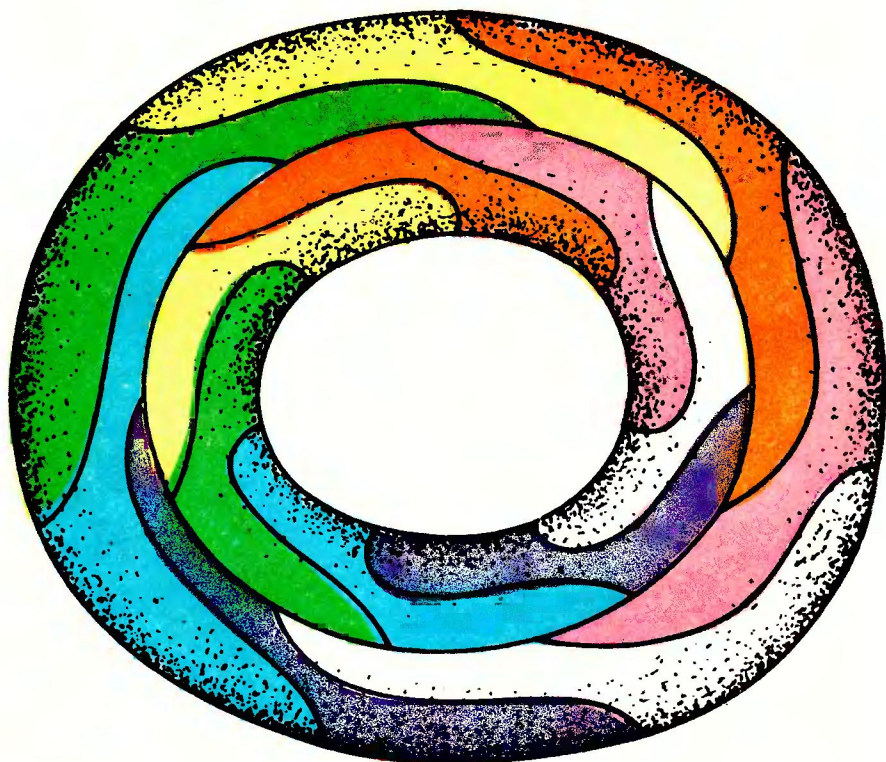


Г. РИНГЕЛЬ



ТЕОРЕМА О РАСКРАСКЕ КАРТ



Die Grundlehren der
mathematischen Wissenschaften

Band 209

GERHARD RINGEL

MAP COLOR THEOREM

With 176 Figures

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York 1974

«Современная математика»
Вводные курсы

Г. РИНГЕЛЬ

ТЕОРЕМА О РАСКРАСКЕ КАРТ

Перевод с английского
В. Б. Алексева

Под редакцией
Г. П. Гаврилова

Издательство «Мир»
Москва 1977

Каково наименьшее число цветов, достаточное для раскраски любой карты, изображенной на сфере, таким образом, чтобы соседние страны были окрашены в разные цвета? Эта знаменитая «проблема четырех красок» еще в конце прошлого века была обобщена на случай карт, расположенных на произвольных поверхностях. И хотя сама проблема четырех красок более ста лет оставалась нерешенной, задача о раскраске карт для всех ориентируемых поверхностей, отличных от сферы, была недавно решена. Полное решение этой задачи и составляет основу книги Г. Рингеля — известного специалиста в области теории графов, внесшего большой вклад в решение задачи о раскраске карт.

Книга написана доступно и будет полезна широкому кругу читателей, интересующихся современными проблемами математики.

Редакция литературы по математическим наукам

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1974. All rights reserved. Authorized translation from English language edition published by Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

Р 20203-014
041(01)-77 14-77 © Перевод на русский язык, «Мир», 1977

ИБ № 645

Г. Рингель

ТЕОРЕМА О РАСКРАСКЕ КАРТ

Редактор Н. И. Плужникова Художник А. В. Шипов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Н. В. Панфилова

Сдано в набор 14/X 1976 г. Подписано к печати 20/I 1977 г. Бумага тип. № 2
84×108¹/₃₂ = 4,00 бум. л. 13,44 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 10,61. Изд. № 1/9067.
Цена 79 коп. Зак. 372.

Издательство «Мир» Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и
книжной торговли. 198052, Ленинград, Л.-52. Измайловский проспект, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В математике двадцатого века немало знаменательных вех, отражающих своеобразие, глубину и совершенство идей, методов и аппарата многочисленных направлений исследования. Эти вехи нередко возникали при поиске решений давно поставленных (и долго не поддававшихся усилиям исследователей) проблем. Вспомним хотя бы критерий планарности, установленный К. Куратовским и Л. С. Понтрягиным, блестящие работы П. Дж. Коэна о независимости континуум-гипотезы, отрицательное решение десятой проблемы Гильберта (о разрешимости произвольного диофантова уравнения), данное Ю. В. Матиясевичем.

В теории графов предостаточно весьма тонких результатов, которые с полным правом могут претендовать на роль определяющих вех в ее развитии. В своем обзоре «Об истории теории графов», представленном на третью Анн-Арборскую конференцию по теории графов (1971 г.), Фрэнк Харари перечисляет 12 наиболее важных теорем, среди которых: результат Кирхгофа (о числе остовов данного графа), Кэли (о числе помеченных деревьев с заданным числом вершин), Татта (о существовании в графе 1-фактора) и т. д. Двенадцатым результатом в этом списке значится решение проблемы Хивуда, данное Рингелем и Янгсом.

Проблема Хивуда продержалась около 80 лет и была решена лишь в шестидесятых годах нашего столетия, благодаря настойчивому «штурму» ее, предпринятому рядом математиков и особенно Янгсом и Рингелем.

С постановкой и краткой историей проблемы Хивуда советский читатель мог познакомиться по книге

Ф. Харари «Теория графов» («Мир», 1973) (главы 11 и 12), а также по двум статьям Рингеля и Янгса, которые были опубликованы в сборнике переводов «Теория графов» («Мир», 1974). Предлагаемая вниманию читателя книга Герхарда Рингеля представляет собой весьма удачный «отчет» одного из двух главных «виновников» решения проблемы Хивуда. Книга открывается посвящением профессору Дж. Янгсу и его жене. Дж. У. Т. Янгс, мечтавший о написании такой книги, безвременно скончался летом 1970 г., и книга Рингеля служит прекрасным памятником этому выдающемуся ученому.

Каскад изящных методов, искрометность глубоких идей, бесспорно, очаруют каждого, кто окунется в этот животворный родник, созданный кропотливым трудом и озаренный удивительными вспышками беспокойной исследовательской мысли!

Книга читается как захватывающий роман о разгадке простых по виду, но сложных и весьма совершенных взаимосвязей между явлениями действительного мира. Наиболее впечатляющими являются главы 6, 7, 10 и параграфы 2 и 3 из главы 9.

Каждый, кто при чтении книги попытается хотя бы представить себе, как можно было бы решить тот или иной из 12 случаев, а затем прочувствовать «подводные рифы», возникающие на пути исследователя, испытает истинную радость открытия после нахождения (вместе с автором книги) правильного решения рассматриваемого случая и поймет, насколько искренним было послание Дж. Янгса Г. Рингелю, о котором говорится в предисловии автора.

Многообразие плодотворных идей, весьма современные аппарат исследования и стиль изложения — все это позволяет надеяться, что книга будет интересна и полезна не только специалистам по теории графов, но и топологам, алгебраистам, а также специалистам в смежных областях знания, занимающимся вопросами представления разнообразных дискретных структур.

Г. П. Гаврилов

*Посвящается профессору
Дж. У. Т. Янгсу и его жене*

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1890 г. Хивуд [1] опубликовал формулу, которую назвал теоремой о раскраске карт. Однако он забыл ее доказать. Поэтому в математическом мире ее называли гипотезой Хивуда. В 1968 г. формула была доказана и поэтому снова стала называться теоремой о раскраске карт.

Для доказательства этой формулы были развиты красивые комбинаторные методы. Доказательство разбилось на двенадцать случаев. В 1966 г. три из них оставались еще не решенными. В 1967/68 учебном году Дж. У. Т. Янгс пригласил меня в Санта-Крус поработать вместе с ним над этими тремя случаями. Неожиданно наши совместные усилия привели к решению всех трех случаев. Это был год тяжелого труда, но и большого удовлетворения. Совместная работа была чрезвычайно полезной и приятной.

Несмотря на то что мы виделись каждый день, Тед написал мне письмо, которое я приведу здесь с сокращениями.

Санта-Крус, 1 марта 1968 г.

Дорогой Герхард!

Вчера вечером, когда я проверял наши результаты для случаев 2, 8 и 11 и думал о том большом удовольствии, которое мы получили днем от чрезвычайно элегантного нового решения для случая 11, мне захотелось сделать небольшую паузу и составить памятную записку об историческом ходе событий.

Мы начали работу над случаем 8 10 октября 1967 г. и решили его вечером во вторник 14 ноября 1967 г. Ключевая идея относительно добавления соседства появилась у тебя к 29 октября, но я не смог закончить регулярную часть задачи по твоему плану. В понедельник 30 октября мы сели за мой письменный стол около 4 часов 30 минут пополудни и ты выработал второй «план». По той удивительной счастливой случайности, которая изредка приходит к математикам, я завершил цепную диаграмму для случая четного s за пятнадцать минут. Мне надолго запомнится наша радость в тот момент (было 5 часов вечера), наши дружеские рукопожатия и взаимные поздравления.

Ситуация в случае нечетного s потребовала больше времени, чем я полагал. Ты дал мне план в понедельник 13 ноября, и я построил цепь в тот же вечер. Во вторник утром мы решили встретиться в полдень за ленчем в моем кабинете и, увы, обнаружили ошибку! Кажется, ты записал положительный ток в какой-то точке в перестановке 0, когда нужно было записать отрицательный. Хорошо помню, как ты ужасно расстроился. Я так волновался за тебя, что, помню, позвонил, чтобы сказать тебе, что подобные вещи случались много раз не только со мной, но, я уверен, со всеми математиками; однако ты был разочарован и безутешен, как был бы и я на твоём месте. Позже в этот вечер, во вторник 14 ноября (а если быть совсем точным — в 10 часов 40 минут), ты позвонил, беспокоясь, не разбудил ли меня, и сообщил, что *по тому же самому* плану, о котором ты упоминал, тебе удалось решить и ту часть задачи, которая касалась добавления соседства. Таким образом, случай 8 был решен...

Вернувшись из поездки с лекциями на Средний Запад, я энергично взялся за дело вчера днем, рассматривая $n = 35$. Я составил большую таблицу всех различных возможностей; ты в это время читал лекцию своим студентам. И вдруг все стало вставать на свое место. Когда ты заглянул в мой кабинет (около 3 часов 30 минут), я уже имел граф токов и соби-

рался его проверить. В той части, которая касалась добавления соседства, ошибок не было. Ты сел рядом, и все было хорошо. В этот момент меня осенило предчувствие, что новый план, с помощью которого решился случай $s = 2$, сработает и в общем случае. Мы обобщили этот план на все s и в 4 часа 20 минут пополудни смогли представить окончательное решение с наиболее элегантной возможной цепью — цепью, которая на самом деле появилась 6 октября 1964 г., когда Густин и я пытались найти приближенное решение гипотезы Хивуда. Это была прекрасная новость, и мы оба почувствовали, что для случая 11 дальнейшее улучшение невозможно.

Искренне твой
Дж. У. Т. Янгс

Весной 1970 г. мы снова встретились с Тедом и провели неделю в Математическом институте в Обервольфахе. Мы решили написать книгу, посвященную теореме о раскраске карт, и сделали первый набросок содержания.

Летом 1970 г. я получил печальное известие о том, что Тед умер. Это случилось как раз перед тем, как мы собирались начать книгу. Таким образом, я был вынужден писать ее без его помощи.

Три раза я читал курс по теории графов и теоремам о раскраске — один раз в Берлине и дважды в Санта-Крус. В течение этого времени был разработан набор тренировочных задач. Они включены в эту книгу.

Специалист найдет здесь много усовершенствований по сравнению с существующей литературой на эту тему. Быть может, некоторым специалистам хотелось бы, чтобы эта книга была написана более абстрактно и более формально. За это я должен извиниться. Моей основной заботой было сделать книгу доступной молодым студентам.

Мне хотелось бы поблагодарить Эдварда Ландесмана, Хейди Манке, Ричарда Найлса и Дэвида Пенгелли, внимательно прочитавших корректуры и сделавших много полезных предложений и улучшений. Я благодарю Дорис Хейнсон за совершенное исполнение всех рисунков и Розмари Стэмпфел за отличную работу по перепечатке рукописи.

Мне также хотелось бы поблагодарить Национальный научный фонд за многолетнюю поддержку всех исследований по темам, связанным с этой книгой.

Герхард Рингель

Сентябрь 1973

1. ПРОБЛЕМЫ, ИЛЛЮСТРАЦИИ, ИСТОРИЯ

В этой первой главе для объяснения всех проблем и всех результатов, представленных в этой книге, мы будем опираться на геометрическую интуицию и геометрическое воображение. В этой главе совсем не будет доказательств. Мы надеемся, что она послужит введением для тех, кто не знаком с предметом. Доказательства и математические основы теории графов и теории поверхностей будут даны в следующих главах.

1.1. ПРОБЛЕМА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

Будем говорить, что две страны (или два штата, две области и т. д.) на географической карте, нарисованной на сфере (или на плоскости), например на карте Европы, являются *соседними*, если они имеют по крайней мере одну общую границу. Это означает, что штаты Аризона и Колорадо не являются соседними, так как у них только одна общая точка. Мы будем рассматривать только такие карты на сфере, в которых граница любой страны состоит из одной замкнутой кривой.

Пусть M — произвольная карта; будем говорить, что карта M допускает раскраску в 4 цвета, если каждую страну этой карты можно окрасить в один из этих цветов так, чтобы любые две соседние страны были разного цвета.

Математики не знают ответа на следующий вопрос: *допускает ли любая карта, изображенная на сфере, раскраску в 4 цвета?* Эта нерешенная проблема называется *проблемой четырех красок*. Предполагает-

ся, что ответ утвердительный, и это называют *гипотезой четырех красок*¹⁾.

В этой книге мы не добавим ничего нового к решению проблемы четырех красок. Здесь мы будем решать проблему раскраски для поверхностей, более сложных, чем сфера или плоскость.

Неизвестно, ставил ли кто-нибудь вопрос о четырех красках до 1852 г., когда Фрэнсис Гутри [1] предложил его своему младшему брату Фредерику. Фрэнсис, студент Лондонского университета, обнаружил, что четырех красок достаточно для различения графств на карте Англии. Первым известным документом, относящимся к проблеме четырех красок, является письмо Аугуста де Моргана, датированное 23 октября 1852 г., его другу и коллеге сэру Вильяму Роуэну Гамильтону. Он писал, что студент Фредерик Гутри спрашивал его о проблеме четырех красок и что ему не удалось ее решить.

Эта задача была полностью забыта до 1878 г., когда Артур Кэли сообщил членам Лондонского математического общества, что он не смог ее решить. В 1879 и в 1880 гг. соответственно Тейт [1, 2] и английский адвокат Кемпе [1, 2] опубликовали «доказательства» гипотезы четырех красок. (В Англии тех дней было много талантливых математиков-любителей — чтобы убедиться в этом, достаточно беглого взгляда на Труды Лондонского математического общества.) Английский математик Хивуд [1] в 1890 г. нашел пробел в доказательстве Кемпе. Тот факт, что рассуждения Кемпе не оспаривались в течение десяти лет, — убедительное свидетельство, что математики тех дней были не более склонны читать статьи друг друга, чем сегодня. Однако Хивуд в своей статье был не только разрушителем. Он дал первое доказательство теоремы о пяти красках, которая утверждает, что любую карту на сфере можно раскрасить в пять цве-

¹⁾ Совсем недавно появилось сообщение о том, что гипотезу четырех красок удалось обосновать с помощью ЭВМ (см. K. Appel and W. Haken (University of Illinois, Urbans), Every planar map is four colorable, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82, № 5 (Sept. 1976)). — *Прим. ред.*

тов. В течение многих лет другие математики пытались решить проблему четырех красок, однако эти попытки оказались безуспешными, хотя они и привели к развитию многих методов, которые впоследствии нашли применение в других задачах.

В 1920 г. Филип Франклин [1] показал, что все карты на сфере, содержащие 25 или меньше областей, можно раскрасить в 4 цвета. В последующие годы число областей повышалось несколько раз разными авторами. Следующая таблица показывает прогресс в этом вопросе:

1920	Филип Франклин [1]	25
1926	Рейнольдс [1]	27
1936	Филип Франклин [2]	31
1938	Уинн [2]	35
1968	Оре и Стемпл [1]	40 ¹⁾

Это означает, что если кто-то, пытаясь доказать несправедливость гипотезы четырех красок, представит карту, которая не раскрашивается в четыре цвета, то мы знаем сейчас, что такой контрпример должен содержать по крайней мере 41 страну.

В последние годы были предложены новые подходы к проблеме четырех красок. Они базируются на интенсивном применении вычислительных машин. Более подробно об этом см. Уитни и Татт [1]. См. также книги Оре [2] и Хееша [1].

1.2. ТЕОРЕМА О РАСКРАСКЕ КАРТ

Чтобы показать, что проблема четырех красок является на самом деле только частью более сложной проблемы, рассмотрим сейчас поверхности, существенно отличные от сферы. Первый пример: возьмем окружность и не пересекающую ее прямую линию g ; вращая окружность вокруг оси g , мы получим поверхность, называемую *тором* (рис. 1.1). Его можно представлять себе как поверхность бублика или велосипед-

¹⁾ Ф. Харари в книге «Теория графов» (см. русский перевод, стр. 158) пишет о 39 областях, а не о 40! Г. А. Донец довел число областей до 41 (см. также предыдущее примечание). — *Прим. ред.*

ной камеры. Мы собираемся изучать карты на торе. Такое изучение облегчается, если мы сначала найдем плоское представление тора (рис. 1.2).

Разрежем тор вдоль образующей — окружности a ; наша поверхность превратится в деформированный цилиндр. Выпрямим его и разрежем вдоль одной из его образующих b . Получится прямоугольник. Этот

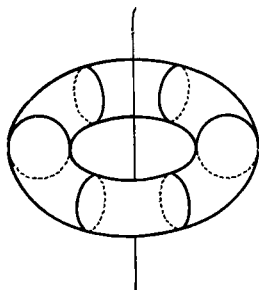


Рис. 1.1.

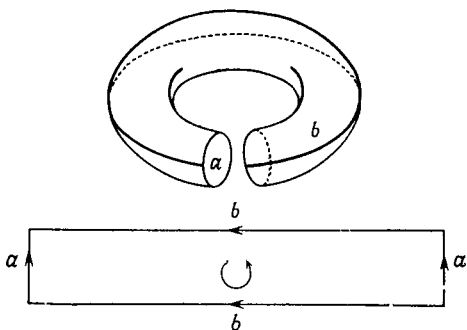


Рис. 1.2.

прямоугольник представляет наш тор при условии, что две пары параллельных сторон отождествляются. На рис. 1.3 показана карта на торе, содержащая 7 стран.

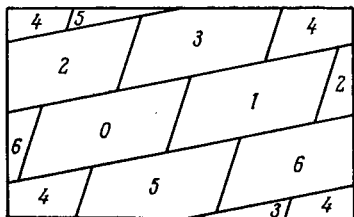


Рис. 1.3.

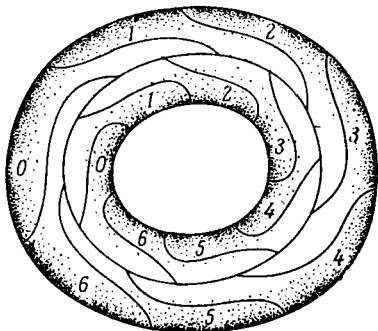


Рис. 1.4.

Каждая страна является соседней с любой другой страной. Рис. 1.4 дает другое представление карты на торе с семью попарно соседними странами. Хотя каж-

дая страна представлена двумя частями, нетрудно понять, как эти две части соединяются на противоположной стороне тора.

Такую карту впервые описал Хивуд [1]. Он также доказал, что *любая карта на торе допускает раскраску в 7 цветов*. Пример, приведенный на рис. 1.3 и 1.4, показывает, что меньше чем для 7 цветов утверждение неверно.

На рис. 1.5 изображена сфера с тремя приделанными к ней ручками. В более общем случае, пусть S_p — поверхность сферы с p ручками. (Можно также представлять себе поверхность швейцарского сыра с p сквозными дырками.) Поверхность S_p является стандартной моделью так называемой ориентируемой поверхности рода p . В этих обозначениях S_0 — это сфера, а S_1 — тор.

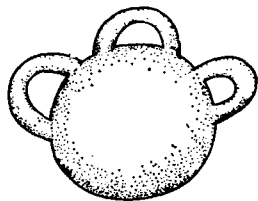


Рис. 1.5

Если S — некоторая поверхность и любая карта на S допускает раскраску в n цветов, но не любая карта на S допускает раскраску в $n - 1$ цветов, то мы будем называть n хроматическим числом поверхности S и писать $\chi(S) = n$. Например, мы не знаем, равно ли 4 или 5 хроматическое число $\chi(S_0)$ сферы S_0 , но знаем, что $\chi(S_1) = 7$.

В упомянутой выше статье Хивуд доказал следующее неравенство для хроматического числа $\chi(S_p)$ ориентируемой поверхности рода $p \geq 1$:

$$(1.1) \quad \chi(S_p) \leq \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right] \quad \text{для} \quad p \geq 1.$$

Символом $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x . Хивуд, который писал и рассуждал в несколько небрежном стиле прошлого столетия, полагал, что он установил равенство в (1.1). Однако это было не так, и только в 1968 г. утверждение

$$(1.2) \quad \chi(S_p) = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right] \quad \text{для} \quad p \geq 1,$$

которое Хивуд назвал *теоремой о раскраске карт*, действительно было доказано. В следующей таблице приведены хроматические числа для нескольких первых значений p .

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\chi(S_p)$	7	8	9	10	11	12	12	13	13	14	15	15	16	16	16	17	17	18	18

Примечательно, что если гипотеза четырех красок верна, то соотношения (1.1) и (1.2) выполняются и при $p = 0$. Доказательство равенства (1.2) имеет длинную историю. Хеффтер [1] в 1891 г. обратил внимание на неполноту рассуждений Хивуда и сумел доказать, что равенство (1.2) выполняется для $1 \leq p \leq 6$ и некоторых других значений p . После этого всякое продвижение остановилось на три четверти века. Прежде чем продолжить эту историю, мы объясним, в чем состоит проблема нитей, которая тесно связана с доказательством равенства (1.2). Мы покажем позднее, что на самом деле решение проблемы нитей немедленно приводит к доказательству равенства (1.2).

1.3. ПРОБЛЕМА НИТЕЙ

Пусть нам даны два целых числа n и p , где $n \geq 3$ и $p \geq 0$. Можно ли выбрать n точек на поверхности S_p и связать каждую из этих точек с каждой другой точкой с помощью простой кривой (нити) на поверхности, так чтобы эти кривые не пересекались? Этот вопрос назван *проблемой нитей* в книге Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена [1].

Если ответ «да», то мы назовем пару (n, p) *допустимой парой*. Например, $(4, 0)$ — допустимая пара, потому что, как показывает рис. 1.6, 4 точки на плоскости или на сфере можно соединить друг с другом с помощью попарно непересекающихся простых кривых. На рис. 1.7 показан тор, на котором 7 точек соединены попарно непересекающимися кривыми. Следовательно, $(7, 1)$ — допустимая пара. Следующее утверждение очевидно: *если (n, p) — допустимая пара,*

то пары $(n, p+1)$ и $(n-1, p)$ также являются допустимыми.

Чтобы получить полную информацию о множестве всех допустимых пар, рассмотрим для данного числа n наименьшее число p , такое, что (n, p) — допустимая пара. Это минимальное p мы обозначим $\gamma(n)$, так как оно зависит от n . Так как $(4, 0)$ и $(7, 1)$ — допустимые пары, то $\gamma(4) = 0$ и $\gamma(7) \leq 1$. Более того, можно до-

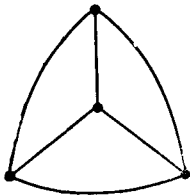


Рис. 1.6.

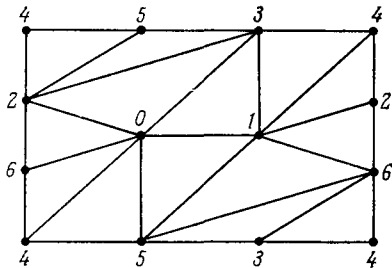


Рис. 1.7.

казать, что $\gamma(7) = 1$. Проблема нитей была полностью решена в 1968 г., когда была доказана формула

$$(1.3) \quad \gamma(n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\} \quad \text{для} \quad n \geq 3.$$

Символом $\{x\}$ обозначено наименьшее целое число, не меньшее чем x .

Как мы увидим позднее, легко доказать, что равенство (1.2) справедливо, если справедливо равенство (1.3). Ввиду этого история проблемы о раскраске карт для ориентируемых поверхностей рода $p \geq 1$ является на самом деле историей доказательства равенства (1.3).

В 1891 г. Хеффер [1] доказал равенство (1.3) для всех $n \leq 12$ и для весьма специальной последовательности $n = 19, 31, 55, 67, 139, 175, 199, \dots$ (Это числа n вида $n = 12s + 7$, такие, что число $q = 4s + 3$ является простым и порядок элемента 2 в мультипликативной группе целых чисел $\text{mod } q$ равен $q-1$ или $(q-1)/2$.) Неизвестно, является ли этот класс чисел конечным или нет.

В 1952 г. Рингель [2] доказал равенство (1.3) для $n = 13$, а в 1954 г. (см. Рингель [3]) для всех $n \equiv 5 \pmod{12}$. Это решение можно также найти в книге Рингеля [7]. В 1961 г. он сумел справиться еще с тремя случаями: $n \equiv 7, 10, 3 \pmod{12}$.

В 1963 г. Густин [1] ввел очень мощное средство — графы токов и анонсировал решение для случаев $n \equiv 3, 4$ и 7 , не зная о том, что первый и последний уже решены Рингелем. К сожалению, Густин не сопроводил сообщение о своих исследованиях деталями, а дал только три примера, по одному на каждый случай $3, 4$ и 7 . Жаль, что его пример на случай 4 содержит опечатку.

В 1963 г. Терри, Уэлч и Янгс [1] решили случай $n \equiv 0 \pmod{12}$. В 1963—1965 гг. Густин и Янгс доказали равенство (1.3) для $n \equiv 1$ и $9 \pmod{12}$. В 1966 г. Янгс [5] решил случай 6 . Некоторые из этих решений были опубликованы много позже, чем они были получены (см. Янгс [5, 6]). Осенью 1967 г. Рингель и Янгс объединили усилия в Калифорнийском университете (Санта-Крус) и решили все три оставшихся случая $2, 8$ и 11 (именно в таком порядке) к концу года. Следует упомянуть, что в конце нашей работы нам помог Ричард Гай. Некоторые из доказательств были улучшены весной 1968 г.

Но это еще не конец истории. Некоторые из общих методов не проходят для малых значений n . К концу 1967 г. равенство (1.3) оставалось невыясненным только для $n = 18, 20, 23, 30, 35, 47$ и 59 . Не зная об этом, Жан Мейер [1], профессор французской литературы университета в Монпелье, доказал в течение 1967 г. равенство (1.3) для всех $n \leq 23$. В феврале 1968 г. Рингель и Янгс сделали совместный доклад на встрече специалистов по теории графов в Мичигане. Они объяснили, какие детали пока не удается восполнить, например, в случае 59 . Один из слушателей, Ричард Гай, проработал всю ночь и к утру получил решение для $n = 59$. После этого Рингель и Янгс решили случаи $n = 35, 47$. Последний случай $n = 30$ был решен Мейером в конце февраля и независимо Янгсом в марте 1968 г.

Доказательства некоторых случаев в последующие годы были улучшены. Наибольшим успехом явилось новое элегантное решение случая 9, найденное М. Юнгерманом [1] в 1973 г.

1.4. ОДНОСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ

В гл. 3 мы увидим, что существует в точности два класса замкнутых поверхностей. Первый — это ориентируемые поверхности рода p при $p = 0, 1, 2, \dots$, для которых мы уже рассмотрели модель (S_p) и дали формулу для хроматического числа (при $p \neq 0$). Второй — это неориентируемые поверхности рода q при $q = 1, 2, 3, \dots$, для которых мы сейчас сделаем то же самое. Изобразить их в трехмерном пространстве нелегко. Пока мы воспользуемся следующей моделью.

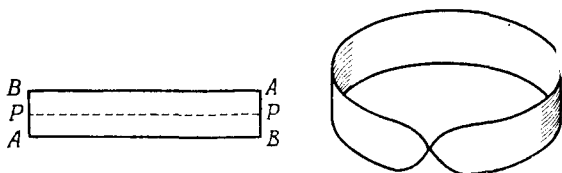


Рис. 1.8.

Возьмем прямоугольник и обозначим его вершины A, B, A, B . отождествим две противоположные стороны прямоугольника таким образом, чтобы первая точка A совпала со второй точкой A , а первая точка B — со второй точкой B . Получившаяся в результате поверхность называется *листом Мёбиуса*, хотя впервые ее упомянул Листинг в 1861 г., за четыре года до Мёбиуса. Границей листа Мёбиуса является *одна* замкнутая простая кривая. Поэтому мы говорим, что лист Мёбиуса является поверхностью с границей, а не замкнутой поверхностью, как S_p . Рассматривая лист Мёбиуса в трехмерном пространстве, мы видим, что он имеет только одну сторону. Это означает, что ползущий по поверхности муравей может перейти с одной стороны поверхности на другую, не пересекая края листа. Например, муравей может выйти из средней точки P (рис. 1.8) и двигаться по пунктирной линии.

Когда он вернется в ту же точку P первый раз, он окажется на другой стороне поверхности. Поэтому лист Мёбиуса называют *односторонней* поверхностью.

Очевидно, что на сфере или на сфере с p ручками муравей не может перейти на другую сторону, двигаясь по поверхности. Он находится или внутри, или снаружи. Поэтому поверхность S_p называется *двусторонней* поверхностью.

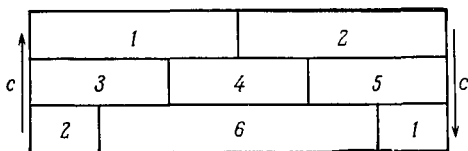


Рис. 1.9

На рис. 1.9 две стороны, помеченные символом c , должны быть отождествлены так, чтобы совпали направления стрелок. Это означает, что на рисунке изображены лист Мёбиуса и карта на нем, состоящая из

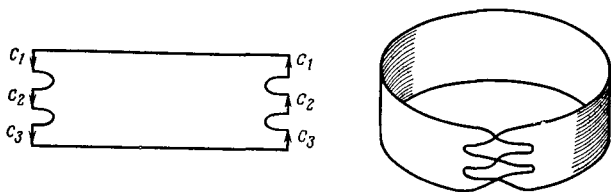


Рис. 1.10.

шести попарно соседних стран. Таким образом, $\chi(M_1) \geq 6$, если M_1 — лист Мёбиуса. В 1910 г. Титце [1] доказал, что $\chi(M_1) = 6$.

Определим теперь поверхность M_q , которую можно было бы назвать листом Мёбиуса порядка q . Рассмотрим $4q$ -угольник, изображенный на рис. 1.10 ($q = 3$). Пометим стороны $4q$ -угольника через одну символами $c_1, c_2, \dots, c_q, c_q, \dots, c_2, c_1$ — именно в таком порядке. Поставим стрелку на каждой из этих $2q$ сторон, так чтобы все они были направлены в одну сторону по

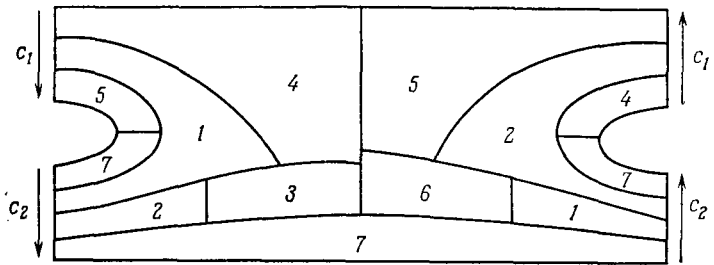


Рис. 1.11.

границе многоугольника. Совместим теперь одну сторону c_1 с другой стороной c_1 так, чтобы направления стрелок совпали. То же самое сделаем со сторонами c_2, c_3, \dots . Полученную поверхность обозначим M_q . Она похожа на широкий ремень с q пряжками, каждая из которых застегнута после переворота на 180° . Очевидно, что M_1 — это как раз лист Мёбиуса. Заметим, что границей поверхности M_q является одна простая замкнутая кривая.

На рис. 1.11 показана карта на M_2 с семью странами. Две из них, а именно 3 и 5, не являются соседними. Поэтому страны этой карты можно раскрасить

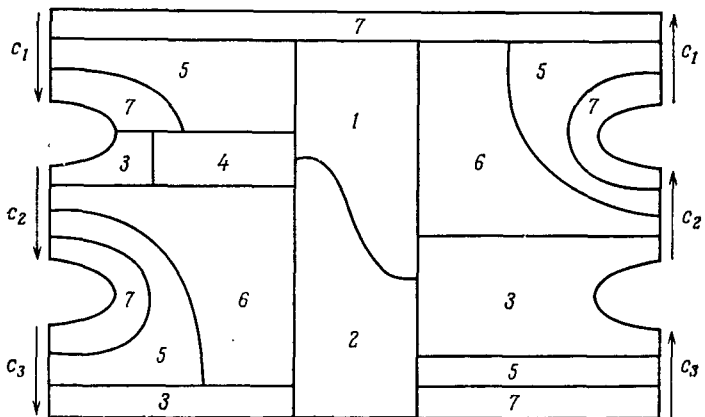


Рис. 1.12.

шестью красками, ибо эти две страны могут быть одного и того же цвета. В 1934 г. Ф. Франклин [2] доказал, что $\chi(M_2) = 6$.

На поверхности M_3 , как показывает рис. 1.12, существует карта с семью попарно соседними странами. Поэтому $\chi(M_3) \geq 7$. Более того, можно показать, что $\chi(M_3) = 7$.

Общий результат

$$(1.4) \quad \chi(M_q) = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2} \right] \quad \text{при} \quad q \neq 2,$$

$$\chi(M_2) = 6$$

был доказан Г. Рингелем [3] в 1954 г. Ранее формула (1.4) была доказана для следующих частных случаев (первые два случая уже обсуждались):

$q = 1$	Титце [1]	в 1910 г.
$q = 2$	Франклин [2]	в 1934 г.
$q = 3, 4, 6$	Каньо [1]	в 1935 г.
$q = 5$	Коксетер [1]	в 1943 г.
$q = 7$	Боуз [1]	в 1939 г.

Доказательство равенства (1.4), данное Рингелем, очень трудное, но в 1967 г. Янгс [3, 4] нашел новый метод, использующий графы токов и позволяющий доказать это равенство гораздо более коротким и простым способом. После этого некоторые случаи были усовершенствованы Ландесманом и Янгсом [1] и Рингелем. Поверхность M_q на первый взгляд кажется очень необычной. Однако в действительности она может быть использована как модель неориентируемой поверхности рода q (см. § 3.6).

2. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

2.1. ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО

Точная формулировка и решение задачи о раскраске карт и задачи о нитях требуют некоторого ознакомления с теорией графов.

Граф состоит из конечного множества *вершин* и множества *ребер*, удовлетворяющих двум условиям: каждое ребро соединяет две различные вершины, и никакие два различных ребра не соединяют одну и ту же пару вершин. Например, 8 вершин и 12 ребер куба образуют граф.

Наиболее простой способ описать граф — нарисовать картинку. Можно также дать список всех вершин и список всех пар вершин, соединенных ребрами. На рис. 2.1 приведены некоторые примеры.

Два графа G_6 и G_7 , изображенные на рис. 2.1, нельзя нарисовать на плоскости без пересечения ребер. Однако важной характеристикой графа является его комбинаторная структура. Конечно, в трехмерном евклидовом пространстве любой граф можно изобразить так, что каждая вершина будет точкой, а ребра — простыми кривыми, которые не пересекаются.

Если в графе G две вершины A , B соединены ребром c , то мы будем говорить, что каждая из вершин A и B *инцидентна* ребру c . Мы будем называть вершины A и B *смежными* в графе G , если имеется соединяющее их ребро. *Степень* (валентность) вершины B (обозначается $\text{val } B$) — это число ребер, инцидентных B . Число вершин обозначается α_0 , число ребер α_1 . Вершина нулевой степени называется *изолированной*. Если сложить степени всех вершин графа, то каждое ребро войдет в эту сумму дважды. Следовательно, имеет место

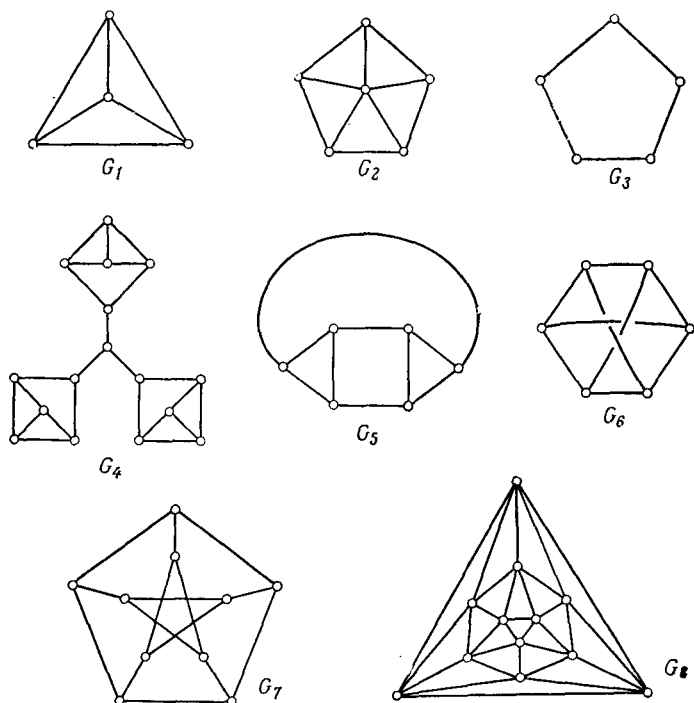


Рис. 2.1.

ТЕОРЕМА 2.1. Если $P_1, P_2, \dots, P_\alpha$ — вершины графа G , то

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} \text{val } P_i = 2\alpha_1,$$

где α_1 — число ребер графа G .

Если H и G — два графа и каждая вершина и каждое ребро графа H содержатся в G , то H называется *подграфом* графа G . Если $H \neq G$, то H — *собственный подграф* графа G .

Граф называется *n -раскрашиваемым*, если каждой вершине можно приписать один из n цветов так, что никакие две вершины одного цвета не будут смежными. *Хроматическое число* $\chi(G)$ графа G — это ми-

нимальное число k , такое, что граф G является k -раскрашиваемым, т. е. $\chi(G) = k$, если G является k -раскрашиваемым, но не является $(k - 1)$ -раскрашиваемым.

Хроматические числа первых шести графов на рис. 2.1 равны 4, 4, 3, 3, 3, 2.

Граф G называется *критическим*, если хроматическое число любого его собственного подграфа меньше, чем хроматическое число графа G .

Если из графа G_2 на рис. 2.1 удалить любое ребро, то получится 3-раскрашиваемый граф. Следовательно, G_2 — критический граф. Графы G_1 и G_3 также критические.

ТЕОРЕМА 2.2. *Любой граф G содержит критический подграф H , такой, что $\chi(H) = \chi(G)$.*

Доказательство. Если граф G сам является критическим, то теорема верна для G , так как G является подграфом самого себя. Если G — не критический граф, то он содержит *собственный* подграф H_1 , такой, что $\chi(H_1) = \chi(G)$. Если H_1 — критический подграф, то теорема выполняется для $H = H_1$. Если H_1 — не критический подграф, то он содержит *собственный* подграф H_2 , такой, что $\chi(H_2) = \chi(G)$, и мы продолжаем тот же процесс. Так как на каждом шаге число ребер или число вершин убывает, то процесс остановится на некотором подграфе H_n . Ясно, что тогда теорема выполняется при $H = H_n$.

Для упрощения обозначений в последующих теоремах и доказательствах мы будем хроматическое число $\chi(G)$ графа G обозначать просто χ .

ТЕОРЕМА 2.3. *Если G — критический граф с хроматическим числом χ , то степень каждой вершины графа G не меньше $\chi - 1$.*

Доказательство. Предположим, что критический граф G содержит вершину P степени $g < \chi - 1$. Обозначим g вершин, смежных с P , через P_1, P_2, \dots, P_g . Удалим вершину P и все инцидентные ей ребра. Полученный граф обозначим $G - P$. Граф $G - P$ является

собственным подграфом графа G . Поэтому $\chi(G - P) < \chi(G)$ и существует раскраска графа $G - P$, использующая не более $\chi - 1$ цветов. Рассмотрим такую раскраску графа $G - P$. Для раскраски g вершин P_1, P_2, \dots, P_g используется не более чем $g \leq \chi - 2$ различных цветов. Имеется по крайней мере один из $\chi - 1$ цветов, который не используется для раскраски *соседей* вершины P . Приписывая этот цвет вершине P , получаем раскраску графа G в $\chi - 1$ или меньшее число цветов, откуда вытекает, что хроматическое число графа G не равно χ . Приходим к противоречию, и, следовательно, теорема 2.3 доказана.

ТЕОРЕМА 2.4. *Если G — критический граф с α_0 вершинами и α_1 ребрами и хроматическое число графа G равно χ , то выполняется соотношение*

$$(\chi - 1)\alpha_0 \leq 2\alpha_1.$$

Доказательство. По теореме 2.3 степень каждой вершины графа G не меньше, чем $\chi - 1$. Используя теорему 2.1, получаем $(\chi - 1)\alpha_0 \leq 2\alpha_1$.

Полный граф K_n — это граф с n вершинами, в котором каждая пара вершин соединена ребром. Граф G_1 на рис. 2.1 является изображением графа K_4 . Очевидно, что K_n — критический граф с $\chi(K_n) = n$. Можно проверить, что для графа K_n неравенства в теоремах 2.3 и 2.4 превращаются в равенства.

Псевдографы. В этой книге мы в основном будем касаться только графов, но иногда нам понадобится более общее понятие псевдографа. *Псевдограф* состоит из множества *вершин* и множества *ребер*, удовлетворяющих условию: каждое ребро инцидентно ровно двум или ровно одной вершине.

Ребро, инцидентное ровно одной вершине, называется *петлей*. В псевдографе две вершины могут быть соединены более чем одним ребром, как показано на рис. 2.2. Два ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин, называются *параллельными* ребрами. *Степень* вершины P в псевдографе определяется как число ребер, инцидентных P , однако петли следует учитывать дважды.

Например, на рис. 2.2 val $D = 8$.

Чередующаяся последовательность вершин и ребер

$$(2.1) \quad P_0 a_1 P_1 a_2 P_2 \dots a_t P_t$$

в графе или псевдографе называется *маршрутом*, если вершины P_{i-1} и P_i соединяются ребром a_i ($i = 1, 2, \dots, t$). В *маршруте* вершина или ребро может появляться несколько раз. Говорят, что маршрут (2.1) *соединяет* вершину P_0 с вершиной P_t . *Длина* маршрута — это число вхождений ребер в него¹⁾. Длина маршрута (2.1) равна t .

Цепь — это маршрут, в котором все ребра различны.

Простая цепь — это маршрут, в котором все вершины (и, следовательно, все ребра) различны. Если в (2.1) $P_0 = P_t$, то последовательность

$$(2.2) \quad P_0 a_1 P_1 a_2 P_2 \dots a_t$$

называется *замкнутым маршрутом*. В этом случае строка

(2.2) читается циклически, т. е. вершина P_0 следует за ребром a_t . Например, в псевдографе на рис. 2.2 последовательность

$$CfDfCdDhDaA$$

является маршрутом, но не является цепью. Последовательность

$$CfDeCdDhDaA$$

является маршрутом и цепью, но не является простой цепью, а последовательность

$$CfDaA$$

— простая цепь.

В псевдографе могут быть замкнутые простые цепи длины два или длины один. В графе оба эти случая

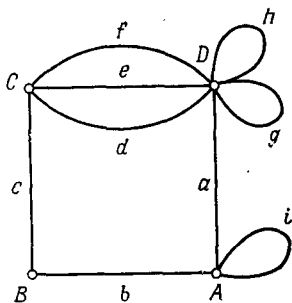


Рис. 2.2.

¹⁾ Каждое ребро учитывается столько раз, сколько оно встречается в данном маршруте. — *Прим. перев.*

невозможны. Маршрут вида (2.1) в графе (но не в псевдографе) можно записать короче, как

$$P_0 P_1 P_2 \dots P_t \quad \text{или} \quad a_1 a_2 \dots a_t.$$

В любом случае полная чередующаяся последовательность (2.1) определяется однозначно. Граф или псевдограф называется *связным*, если для любой пары вершин существует простая цепь, идущая из одной из этих вершин в другую. Граф, не имеющий замкнутых простых цепей, называется *лесом*. Связный лес называется *деревом*.

Орграфы. Если s — ребро, соединяющее вершины A и B в графе, оно может иметь одну из двух возможных ориентаций. *Ориентация* ребра s — это пара (A, B) , в которой A — начальная, а B — конечная вершины ребра. Противоположная ориентация — это пара (B, A) . Таким образом, ориентация — это просто приписывание ребру направления. Ориентированное ребро обычно изображают, помещая на ребре стрелку, указывающую направление к конечной вершине

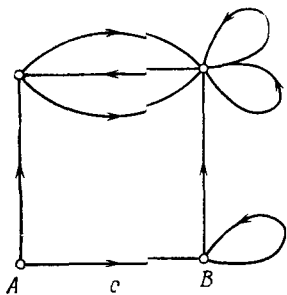


Рис. 2.3.

ребра. Петлю в псевдографе тоже можно ориентировать двумя способами, но комбинаторно описать это невозможно.

Ориентированный псевдограф (или короче *орграф*) — это псевдограф, в котором каждое ребро ориентировано. На рис. 2.3 приведен пример орграфа.

Упражнения

2.1.1. Существует ли граф, у которого одна вершина степени пять, а все остальные вершины степени четыре?

2.1.2. Определите хроматическое число графов G_7 и G_8 , изображенных на рис. 2.1. Найдите критические подграфы с тем же хроматическим числом.

2.1.3. Чему равно $\chi(C_n)$, если C_n — граф, состоящий из вершин и сторон (в качестве ребер) многоугольника с n сторонами?

2.1.4. Покажите, что число вершин нечетной степени в графе всегда четно.

2.1.5. Докажите теорему: в любом графе, имеющем по крайней мере одно ребро, можно найти две вершины одинаковой степени.

2.1.6. Полный граф K_n является критическим, и для $\chi = \chi(K_n)$ выполняется равенство $(\chi - 1)\alpha_0 = 2\alpha_1$. (Ср. с теоремой 2.4.) Существуют ли другие критические графы, для которых выполняется это равенство?

2.1.7. Найдите 2-раскрашиваемый граф с $2n$ вершинами и максимальным числом ребер. Сколько ребер в этом графе?

2.1.8. Докажите теорему: если каждая замкнутая простая цепь в графе имеет четную длину, то $\chi(G) \leq 2$.

2.1.9. Расстояние $d(A, B)$ между двумя вершинами в графе — это длина кратчайшей простой цепи, идущей из A в B . Дерево обладает тем свойством, что для любой пары вершин A, B существует единственная простая цепь длины $d(A, B)$, идущая из A в B . Существуют ли другие связные графы с таким же свойством? Нарисуйте несколько примеров.

2.1.10. Если G — граф, его дополнение \bar{G} определяется следующим образом: вершинами графа \bar{G} являются вершины графа G , но любые две вершины, которые не смежны в G , смежны в \bar{G} , и наоборот. Докажите утверждение: если граф G не связан, то \bar{G} связан.

2.1.11. Пусть G — связный граф с α_0 вершинами и α_1 ребрами. Покажите, что выполняется неравенство $\alpha_0 \leq \alpha_1 + 1$ и что равенство $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ верно тогда и только тогда, когда G — дерево. (Указание: используйте индукцию и рассмотрите цикл¹⁾ или самую длинную простую цепь в графе.)

2.1.12. Докажите следующее утверждение: если G — граф, и $\chi(G - A - B) = \chi(G) - 2$ для любой пары вершин A, B графа G , то G — полный граф.

2.1.13. Возьмите кружочки одинакового размера (например, монеты) и положите их плашмя на стол так, чтобы никакие два кружка не перекрывались. Определим $\chi(A)$ как минимальное число цветов, необходимое для раскраски всех кружков при расположении A таким образом, чтобы никакие два касающихся кружка не были одинакового цвета. Докажите, что $\max \chi(A) = 4$, где максимум берется по всем возможным конфигурациям A . (Необходимо указать расположение A , при котором $\chi(A) = 4$, и доказать, что $\chi(A) \leq 4$ для любого A .)

¹⁾ То есть замкнутую цепь. — Прим. ред.

2.1.14. Лес имеет α_0 вершин и α_1 ребер. Сколько деревьев «растет» в этом лесу? Мы должны объяснить, что означает «растет». Подграф H графа G называется максимальным связным подграфом графа G , если в графе G не существует связного подграфа $K \neq H$, такого, что H является подграфом K . Максимальный связный подграф графа G называют иногда *компонентой* графа G . Если граф G не связан, то он состоит из нескольких компонент. Наш вопрос означает: сколько компонент имеет данный лес?

2.1.15. Если в дереве n ребер и одна вершина имеет степень n , то остальные вершины должны иметь степень 1. Такое дерево называется звездой U_n .

Дерево с n ребрами, в котором все вершины имеют степень не более 2, называется простой цепью W_n длины n .

Связный граф с n ребрами, в котором каждая вершина имеет степень 2, называется n -циклом C_n .

Пусть $n > 3$ и G — один из графов $K_3, U_3, W_3, C_4, U_4, U_n, W_n, C_n, C_{n+1}$.

Вопрос: сколько подграфов, изоморфных G , содержится в полном графе K_{n+1} ?

2.2. ВРАЩЕНИЯ ГРАФОВ

Знание того, что такое графы с вращениями, и умение свободно обращаться с ними абсолютно необходимы в этой книге.

Для данного графа G *вращение* вершины A графа G — это ориентированный циклический порядок (или циклическая перестановка) всех ребер, инцидентных вершине A . Обозначим вершины графа числами $0, 1, 2, \dots$. Если вершина 0 имеет степень 3, а $1, 2, 3$ — три вершины, смежные с вершиной 0 , то имеются две различные возможности для задания вращения вершины 0 . Мы можем описать вращение, указывая циклический порядок вершин, смежных с вершиной 0 , вместо ребер, инцидентных этой вершине. Тогда указанные две возможности — это

$$(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2)$$

или

$$(3\ 2\ 1) = (2\ 1\ 3) = (1\ 3\ 2).$$

Вершина степени 4 может иметь одно из шести различных вращений. Вообще, число возможных враще-

ний вершины степени n равно $(n - 1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 1)$.

Вращение σ графа G — это вращение всех вершин графа G . Запись (G, σ) будет обозначать граф G с некоторым вращением σ .

Граф G с вращением часто бывает удобно изображать на плоскости таким образом, чтобы, читая ребра,

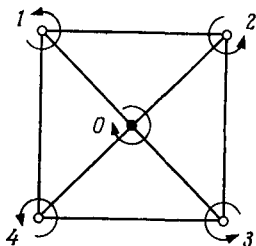


Рис. 2.4.

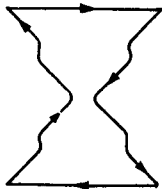


Рис. 2.5.

инцидентные некоторой вершине, по часовой стрелке (или против часовой стрелки), мы получали вращение в этой вершине. При этом, если читать нужно по часовой стрелке (против часовой стрелки), то вершина изображается маленьким темным (светлым) кружком (\bullet) (\circ).

Вращение графа можно описывать и представлять следующим образом. Обозначим вершины числами $0, 1, 2, \dots$. Затем выпишем циклическую перестановку соседей для каждой вершины i . Эта перестановка порождается вращением вершины i , которое является циклической перестановкой ребер, инцидентных вершине i . Например, графу с вращением, показанному на рис. 2.4, соответствует схема

$$(2.3) \quad \begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 4 & 0 & 2 & \\ & 2 & 0 & 3 & 1 & \\ & 3 & 2 & 0 & 4 & \\ & 4 & 3 & 0 & 1 & \end{array}$$

Диаграмма

(2.4)	0.	1	3	2	4
	1.	3	0	2	4
	2.	1	4	0	3
	3.	2	4	1	0
	4.	1	0	3	2

представляет интересное вращение полного графа K_5 , показанное на рис. 2.6.

Рассмотрим теперь некоторые замкнутые маршруты в графе, которые определяются данным вращением

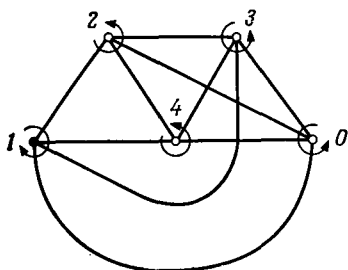


Рис. 2.6.

графа. Для того чтобы это было легче объяснить, будем рассматривать граф как карту дорог, ребра — как двусторонние шоссе, а каждую вершину — как круговой перекресток с односторонним движением транспорта, причем будем считать, что направление движения транспорта на таком перекрестке (по часовой

стрелке или против часовой стрелки) определяется вращением вершины.

Предположим, что путешественник совершает поездку, начиная из вершины A_0 и двигаясь по шоссе c_0 , и пусть каждый раз, когда он достигает очередной вершины, рассматриваемой как круговой перекресток, он покидает ее по первому же выходу. (Это, конечно, приводит его на другое шоссе, если степень вершины не менее чем 2. Если степень вершины равна 1, он возвращается на то же шоссе, но в противоположном направлении.) Мы назовем эту поездку циклом, порожденным вершиной A_0 и ребром c_0 и индуцированным вращением σ . Указанная поездка является в действительности маршрутом, так как может случиться, что вершины или ребра повторятся, однако каждый раз,

когда ребро повторяется, повторение происходит в противоположном направлении.

Например, на рис. 2.5 показан цикл 1, 2, 0, 3, 4, 0, индуцированный графом с вращением, изображенным на рис. 2.4. Еще два цикла индуцируются этим графом: 4, 3, 2, 1 и 1, 0, 2, 3, 0, 4. Вращение графа K_5 , заданное диаграммой (2.4) или рисунком 2.6, индуцирует единственный цикл

$$1\ 2\ 4\ 1\ 3\ 0\ 2\ 3\ 4\ 2\ 0\ 4\ 3\ 1\ 0\ 3\ 2\ 1\ 4\ 0,$$

как показано на рис. 2.7 (мы опустили запятые). Заметим, что каждое ребро появляется в точности дважды, второй раз всегда в противоположном направлении.

Читатель может заметить, что мы использовали слишком много неопределенных слов, таких, как путешественник, поездка, транспорт и т. д. Нетрудно описать приведенные выше понятия в строгой математической форме. Мы сделаем это следующим образом.

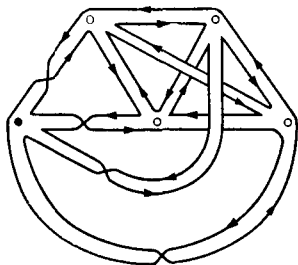


Рис. 2.7.

Пусть A_0 — вершина, инцидентная ребру c_0 в графе G с вращением (G, σ) . Мы построим в графе G замкнутый маршрут

$$(2.5) \quad A_0, c_0, A_1, c_1, A_2, c_2, \dots,$$

где вершина A_1 — второй конец ребра c_0 , а ребро c_1 следует за ребром c_0 во вращении вершины A_1 , определяемом вращением σ . Затем определяется A_2 как вершина, инцидентная ребру c_1 и не равная A_1 . После этого в качестве c_2 выбирается ребро, следующее за ребром c_1 во вращении вершины A_2 , и т. д.

Мы закончим процесс в точности перед тем моментом, когда должна повториться пара A_0, c_0 . Она должна повториться, ибо граф G конечный, а наш процесс однозначно определен и в обратном направлении, а именно, если часть $\dots A_{t-1}, c_t, A_t \dots$ извест-

на, то ребро c_{t-1} определяется вращением вокруг вершины A_{t-1} . Мы назовем замкнутый маршрут (2.5) *циклом*, порожденным вершиной A_0 и ребром c_0 и *индуцированным* вращением σ . Обозначим число циклов, индуцированных вращением σ графа G , через $\alpha_2(G, \sigma)$. Рассмотрим два числа:

$$\begin{aligned}\mu(G) &= \max \alpha_2(G, \sigma) \quad \text{и} \\ \nu(G) &= \min \alpha_2(G, \sigma),\end{aligned}$$

где максимум и минимум берутся по всем возможным вращениям σ графа G . Назовем вращение, которое индуцирует в точности $\mu(G)$ или в точности $\nu(G)$ циклов, соответственно *максимальным* и *минимальным вращением*.

Вращение, индуцирующее ровно один цикл, называется *круговым* вращением. Круговое вращение является, очевидно, минимальным. Однако существуют графы, у которых минимальное вращение не является круговым; см., например, граф G_4 на рис. 2.1. Каждое вращение дерева является круговым, а следовательно, максимальным и минимальным.

Пусть (G, σ) — граф с вращением σ . Если c — ребро графа G , то можно рассмотреть подграф $G - c$. Определим $(G - c, \sigma)$ следующим образом: если A — вершина, не инцидентная ребру c , то вращение вершины A в $(G - c, \sigma)$ останется таким же, как в (G, σ) . Если вершина A инцидентна ребру c , то вращение вершины A в $(G - c, \sigma)$ получаем очевидным образом, а именно убирая ребро c из вращения вершины A в (G, σ) ; см. рис. 2.8.

Ребро, инцидентное вершине степени 1, называется *концевым*.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть G — граф с вращением (G, σ) и c — ребро, не являющееся концевым. Тогда $\alpha_2(G, \sigma)$ отличается от $\alpha_2(G - c, \sigma)$ ровно на 1.

Доказательство (рис. 2.10 и 2.11). Пусть A и B — две вершины, инцидентные ребру c . Тогда удаление ребра c из графа G может повлиять только на два цикла: цикл α , порожденный парой A, c , и цикл β , по-

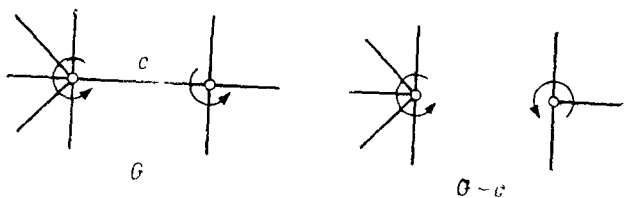


Рис. 28.

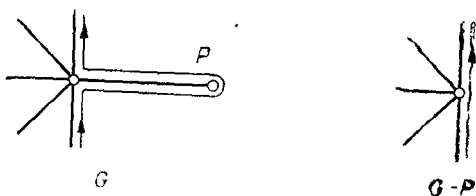


Рис. 29.

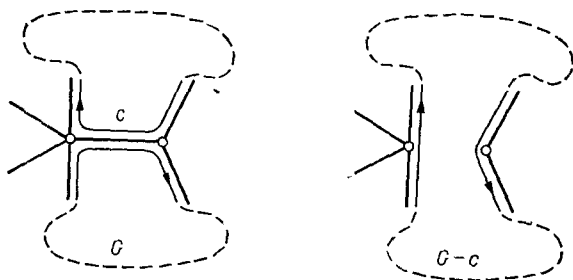


Рис. 2.10.

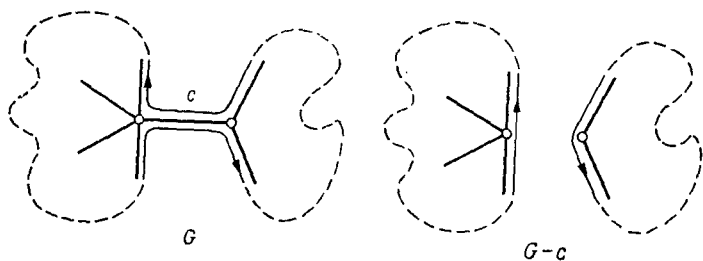


Рис. 2.11.

рожденный парой B, c . Может оказаться, что $\alpha = \beta$ или $\alpha \neq \beta$.

Если $\alpha \neq \beta$ (рис. 2.10), то при удалении ребра c два цикла α и β объединяются в один цикл. Если $\alpha = \beta$ (рис. 2.11), то при удалении ребра c один цикл делится на два цикла. Отсюда следует утверждение теоремы 2.5.

Напомним, что выражение $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что $a - b$ кратно m ; например, $a \equiv 0 \pmod{2}$ означает, что a — четное число.

ТЕОРЕМА 2.6. Если G — граф с α_0 неизолированными вершинами и α_1 ребрами, то

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2(G, \sigma) \equiv 0 \pmod{2}$$

для любого вращения σ графа G .

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что граф G связан. Проведем индукцию по числу ребер графа G . Если граф G имеет только одно или два ребра, то каждое вращение графа G порождает точно один цикл, и теорема 2.6 верна для G .

Пусть теперь дан некоторый граф G , и пусть для всех графов с меньшим числом ребер теорема 2.6 верна. Рассмотрим два случая.

1) Если граф G содержит вершину P степени один, то рассмотрим граф $G - P$, получаемый удалением вершины P и концевго ребра, инцидентного вершине P . Вращение графа G естественным образом переносится на граф $G - P$ (см. рис. 2.9). По предположению индукции теорема 2.6 верна для графа $G - P$, откуда

$$(\alpha_0 - 1) - (\alpha_1 - 1) + \alpha_2(G - P, \sigma) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Очевидно, что $\alpha_2(G, \sigma) = \alpha_2(G - P, \sigma)$, и поэтому теорема 2.6 выполняется и для графа G .

2) Пусть граф G содержит ребро c , не являющееся концевым. Удаляя ребро c , получим граф $G - c$. Этот граф $G - c$ имеет меньше ребер, чем граф G , и поэтому (опять по предположению индукции) тео-

рема 2.6 верна для графа $G - c$. Получаем

$$\alpha_0 - (\alpha_1 - 1) + \alpha_2(G - c, \sigma) \equiv 0 \pmod{2}.$$

По теореме 2.5 число циклов $\alpha_2(G, \sigma)$ отличается от $\alpha_2(G - c, \sigma)$ на единицу. Отсюда вытекает, что теорема 2.6 верна и для графа G .

Если каждый цикл, порожденный вращением σ некоторого графа, имеет длину три, то σ называется *треугольным вращением*. Цикл длины три называют иногда *треугольником*. Предположим, что граф G не имеет вершин степени 0 и 1. Тогда в G нет циклов короче, чем треугольники. Поэтому *треугольное вращение* графа G является *максимальным вращением*.

Позже мы увидим, что проблема нахождения максимального вращения эквивалентна очень важной задаче определения рода графа G (см. гл. 5). Теория вращений позволяет изучать эту задачу чисто комбинаторно, не рассматривая никаких поверхностей.

Можно даже определить *комбинаторный род* графа G как число p , удовлетворяющее равенству

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2(G, \sigma) = 2 - 2p$$

для максимального вращения σ графа G . Оказывается, что на самом деле комбинаторный род совпадает с родом графа G (см. гл. 5).

Нас интересует вопрос о построении треугольных или максимальных вращений для полного графа K_n . Если выбрать вращение по часовой стрелке в каждой вершине графа G_1 на рис. 2.1, то получится треугольное вращение графа K_4 . Следующая теорема показывает, что нельзя надеяться на существование треугольного вращения графа K_n при любом n .

ТЕОРЕМА 2.7. *Если существует треугольное вращение полного графа K_n , то $n \equiv 0, 3, 4$ или $7 \pmod{12}$.*

Доказательство. Пусть σ — треугольное вращение графа K_n . Каждый треугольник, порожденный вращением σ , содержит три ребра, и каждое ребро принадлежит двум из этих треугольников. Поэтому

$$3\alpha_2(K_n, \sigma) = 2\alpha_1.$$

Умножая формулу из теоремы 2.6 на 6 и подставляя $\alpha_0 = n$ и $\alpha_1 = \frac{n(n-1)}{2}$, получим

$$(2.6) \quad \begin{aligned} 6\alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2(K_n, \sigma) &\equiv 0 \pmod{12}, \\ 6\alpha_0 - 2\alpha_1 &\equiv 0 \pmod{12}, \\ 6n - n(n-1) &\equiv 0 \pmod{12}, \\ (7-n)n &\equiv 0 \pmod{12}. \end{aligned}$$

Сравнение (2.6) имеет четыре решения, а именно, $n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$. Этим завершается доказательство теоремы.

Более важным, чем теорема 2.7, является обратное утверждение о том, что для всех $n \equiv 0, 3, 4$ или $7 \pmod{12}$ треугольное вращение графа K_n действительно существует. Большая часть этой книги посвящена именно этому утверждению. Доказательство его для простейших из указанных четырех случаев будет дано ниже в этой главе. В качестве введения к общему решению мы приведем сейчас несколько примеров графов с вращениями. С их помощью мы можем более детально изучить схемы.

Обозначим семь вершин полного графа K_7 числами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Следующая схема описывает вращение графа K_7 :

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccccccc} 0. & 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1. & 2 & 4 & 3 & 0 & 5 & 6 \\ 2. & 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 0 \\ 3. & 4 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 4. & 5 & 0 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 5. & 6 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 6. & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{array}$$

Конечно, строки нужно читать циклически. Это означает, что, например, в строке 6 после числа 4 следует 0.

Не будем скрывать, что на самом деле схема (2.7) получена из примера на рис. 1.7, иллюстрирующего вложение графа K_7 в тор. Но в этой главе мы намерены не рассматривать поверхности. Все здесь должно оставаться одномерным.

Легко проверить, что схема (2.7) удовлетворяет следующему правилу Δ^* , правилу треугольников:

Правило Δ^* . Если в строке i имеем $i \dots j k \dots$, то в строке k должно быть $k \dots i j \dots$.

Например в схеме (2.7) мы видим $1 \dots 2 4 \dots$ и $4 \dots 1 2 \dots$. Правило Δ^* гарантирует, что данное

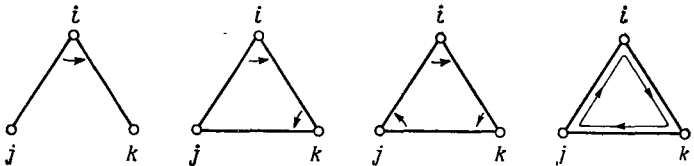


Рис. 2.12.

вращение (2.7) графа K_7 является треугольным. Это можно показать, используя рис. 2.12. Если дана часть $i \dots j k \dots$ схемы, то это означает, что во вращении вершины i ребро, соединяющее вершины i и k , следует за ребром, соединяющим вершины i и j (первая часть рис. 2.12). Используя правило Δ^* , получаем $k \dots i j \dots$ и, следовательно, получаем информацию о вращении в вершине k (вторая часть рис. 2.12). Используя правило Δ^* второй раз, получаем $j \dots \dots k i \dots$ и цикл замыкается (третья и последняя части рис. 2.12). Правило Δ^* является в действительности другим выражением того факта, что рассматриваемое вращение — треугольное.

Приведем треугольное вращение для другого графа. Выражение $K_{10} - K_3$ обозначает граф, который получается после удаления 3 ребер, образующих треугольник, из графа K_{10} . Обозначим вершины графа $K_{10} - K_3$ символами $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, z$.

Вращение, описываемое схемой

(2.8)	0.	1	x	6	2	y	5	4	z	3
	1.	2	x	0	3	y	6	5	z	4
	2.	3	x	1	4	y	0	6	z	5
	3.	4	x	2	5	y	1	0	z	6
	4.	5	x	3	6	y	2	1	z	0
	5.	6	x	4	0	y	3	2	z	1
	6.	0	x	5	1	y	4	3	z	2
	x.	0	1	2	3	4	5	6		
	y.	0	2	4	6	1	3	5		
	z.	0	4	1	5	2	6	3		

удовлетворяет правилу Δ^* и, следовательно, является треугольным. Из схемы видно, что три вершины x , y , z не смежны между собой, так как в строке x нет символов y и z , а в строке y нет z .

Теорема 2.7 утверждает, что для графа K_{10} не существует треугольного вращения, поэтому мы рассмотрим граф $K_{10} - K_3$. Следующая схема представляет вращение для графа K_8 . По теореме 2.7 оно не может быть треугольным.

(2.9)	0.	2	7	3	1	4	5	6
	2.	4	1	5	3	6	7	0
	4.	6	3	7	5	0	1	2
	6.	0	5	1	7	2	3	4
	1.	7	6	5	2	4	0	3
	3.	1	0	7	4	6	2	5
	5.	3	2	1	6	0	4	7
	7.	5	4	3	0	2	6	1

Можно проверить, что вращение (2.9) графа K_8 порождает два ориентированных четырехугольника

$$0\ 2\ 4\ 6 \quad \text{и} \quad 7\ 5\ 3\ 1,$$

а все остальные циклы являются ориентированными треугольниками. Так как граф K_8 имеет 28 ребер и

каждое ребро покрывается дважды набором всех циклов, то должно проходиться 56 отрезков. Каждый цикл имеет длину по меньшей мере 3. Следовательно, число циклов не больше, чем треть от 56. Это означает, что $\alpha_2(K_8, \sigma) \leq 18$ для любого вращения σ графа K_8 . Следовательно, вращение, описанное схемой (2.9), которое порождает 16 треугольников и 2 четырехугольника, является максимальным вращением графа K_8 .

Упражнения

2.2.1. Существует ли вращение графа, показанного на рис. 2.4, которое порождает ровно один цикл?

2.2.2. Покажите, что любое вращение графа G_4 на рис. 2.1 порождает четыре или более циклов

2.2.3. Найдите максимальные вращения для графов G_4 и G_6 , изображенных на рис. 2.1.

2.2.4. Существует ли треугольное вращение для графа G_3 , изображенного на рис. 2.1?

2.2.5. Граф называется *кубическим*, если каждая его вершина имеет степень 3. Докажите следующее утверждение: если число ребер в кубическом графе G четно (нечетно), то любое вращение графа G порождает четное (нечетное) число циклов.

2.2.6. Пусть G — граф с вершинами P_1, P_2, \dots, P_t , и пусть степень вершины P_i равна $v_i \geq 2$ ($i = 1, 2, \dots, t$). Сколько существует различных вращений графа G ?

2.2.7. Пусть n — положительное целое число и $n \equiv 0$ или $3 \pmod{4}$. Покажите, что для полного графа K_n не существует кругового вращения.

2.2.8. Докажите следующее утверждение, не используя теорем и упражнений: если G — кубический граф, то $\alpha_2(G, \sigma) \equiv \alpha_2(G, \sigma') \pmod{2}$ для любых двух вращений σ и σ' графа G .

2.2.9. Найдите треугольное вращение для графа $K_5 - K_2$.

2.2.10. Сколько циклов порождается вращением графа K_6 , заданным схемой.

0.	4	3	5	2	1
1.	2	3	4	5	0
2.	3	4	5	0	1
3.	4	5	0	1	2
4.	5	0	1	2	3
5.	0	1	2	3	4

2.3. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ 7 И 10

Мы хотим показать, что существуют треугольные вращения графа K_n при $n \equiv 7 \pmod{12}$ и графа $K_n - K_3$ при $n \equiv 10 \pmod{12}$.

Удобно обозначить вершины графа, используя элементы некоторой группы и, возможно, дополнительные символы, которые не являются элементами группы.

Изучим вначале вращение графа K_7 , заданное схемой (2.7), и вращение графа $K_{10} - K_3$, заданное схемой (2.8). Будем интерпретировать символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 как элементы циклической группы Z_7 — аддитивной группы целых чисел по модулю 7. Символы x, y, z считаются не принадлежащими группе.

Заметим, что *вся информация* для построения схем (2.7) и (2.8) содержится в них в строке 0. Остальные строки получаются при помощи следующего правила.

Аддитивное правило. Чтобы получить строку i , нужно прибавить i ко всем элементам строки 0, не изменяя их порядка. Сложение выполняется в группе Γ , которая использована для представления вершин. Если в строке 0 имеется символ $z \notin \Gamma$, то полагаем $z + i = z$.

Аддитивное правило не указывает способа для построения строки z . Однако строку z можно получить, используя правило Δ^* .

Схема, полученная из строки 0 с помощью двух указанных правил, называется схемой индекса 1.

ТЕОРЕМА 2.8. *Для любого положительного целого $n \equiv 7 \pmod{12}$ существует треугольное вращение полного графа K_n .*

Для каждого n вида $12s + 7$ мы хотим найти схему, удовлетворяющую правилу Δ^* . Чтобы получить решение индекса 1, мы должны построить подходящую строку 0. Схема (2.7) является решением для K_7 . Сейчас мы построим строку 0 для всех значений n вида $12s + 7$.

Отождествим вершины графа K_n с элементами циклической группы Z_n . Нам нужно построить под-

ходящую строку 0. Проиллюстрируем общий метод для $n = 19$. В этом случае строка 0 должна быть перестановкой элементов 1, 2, ..., 18 или $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 9$.

Рассмотрим граф, изображенный на рис. 2.13. Два конца, помеченные символом A , нужно отождествить. При этом точка A рассматривается как внутренняя точка ребра, а не вершина. То же самое относится к рис. 2.14, 2.15, 2.17. Граф, изображенный на рис. 2.13, совпадает на самом деле с графом G_5 на рис. 2.1. Каждое ребро в графе на рис. 2.13 имеет ориентацию, и ему приписано некоторое значение, называемое током по ребру. При этом токи являются элементами группы \mathbb{Z}_{19} . Заметим, что граф на рис. 2.13 (и соответственно на рис. 2.14, 2.15, 2.17, 2.18) обладает следующими свойствами (в дальнейшем мы часто будем использовать эти свойства как *конструктивные принципы* для построения схем, удовлетворяющих правилу Δ^* , для различных графов):

(C1) *Каждая вершина имеет степень 3 или 1 (степень 1 будет использоваться в случае 10).*

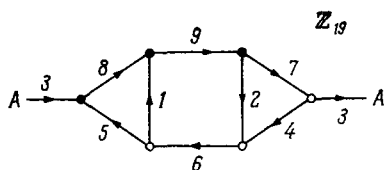
(C2) *Данное вращение круговое (индуцирует единственный цикл). Напомним, что \bullet указывает вращение по часовой стрелке, а \circ — вращение против часовой стрелки.*

(C3) *Каждый элемент 1, 2, ..., $6s + 3$ группы \mathbb{Z}_{12s+7} (в рассматриваемом случае $s = 1$) появляется в качестве тока ровно один раз на некотором ребре.*

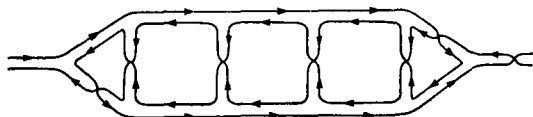
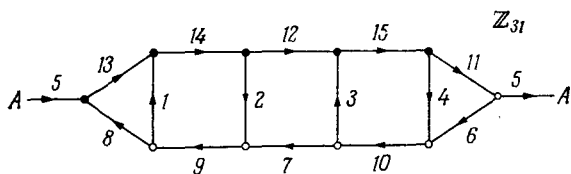
Наиболее важным свойством является следующее:

(C4) *В каждой вершине степени 3 сумма вытекающих токов равна сумме вытекающих токов. Это свойство известно как закон Кирхгофа для токов (сокращенно ЗКТ).*

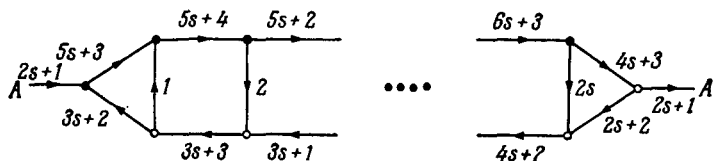
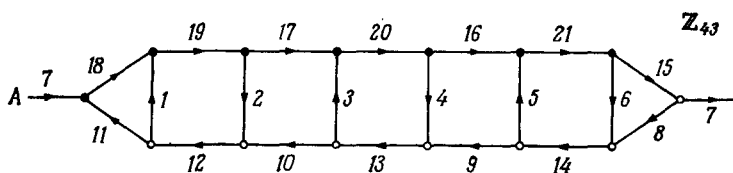
Воспользуемся теперь графом, изображенным на рис. 2.13, как своего рода номограммой. Это даст нам возможность построить треугольное вращение графа K_{19} следующим образом. Рассмотрим цикл, порожденный вращением графа, показанного на рис. 2.13. Запишем последовательно токи в том порядке, как они



Р и с. 2. 13.



Р и с. 2.14.



Р и с. 2.15.

появляются в цикле, однако если направление цикла противоположно направлению рассматриваемого ребра, то ток будем записывать со знаком минус. Опишем все это подробно. Неважно, с какого места начинается обход.

Начнем движение с ребра с током 9 в направлении, указанном стрелкой. В очередной вершине указано вращение по часовой стрелке, поэтому следующим ребром будет ребро с током 7, и мы снова движемся в направлении стрелки. Далее мы приходим в вершину, в которой указано вращение против часовой стрелки, и продолжаем движение по ребру с током 4. Пока мы записали 9, 7, 4. В вершине в конце ребра 4 снова указано вращение против часовой стрелки, поэтому мы должны продолжить движение по ребру 2, однако в направлении, противоположном стрелке. Поэтому мы записываем 9, 7, 4, -2 , Полный *путевой журнал* этого цикла выглядит следующим образом:

$$(2.10) \quad 9 \ 7 \ 4 \ \bar{2} \ \bar{9} \ \bar{1} \ 5 \ \bar{3} \ \bar{7} \ 2 \ 6 \ 1 \ \bar{8} \ \bar{5} \ \bar{6} \ \bar{4} \ 3 \ 8$$

(удобно опускать запятые и писать \bar{a} вместо $-a$). В группе \mathbb{Z}_{19} элемент -2 совпадает с элементом 17. Записывая элементы в (2.10) в положительной форме, получим

$$9 \ 7 \ 4 \ 17 \ 10 \ 18 \ 5 \ 16 \ 12 \ 2 \ 6 \ 1 \ 11 \ 14 \ 13 \ 15 \ 3 \ 8.$$

Возьмем эту последовательность в качестве строки 0 схемы, а строку i получим прибавлением i к элементам строки 0 без изменения порядка элементов ($i = 1, 2, \dots, 18$).

Надо доказать, что эта схема удовлетворяет правилу Δ^* . Предположим, что в схеме указано

$$i \ \dots \ j \ k \ \dots$$

Согласно аддитивному правилу, получаем в строке 0

$$0 \ \dots \ j - i \ k - i \ \dots$$

Локальное изображение графа токов показано на рис. 2.16, где h — ток по третьему ребру (если

некоторые из стрелок на рисунке направлены в противоположную сторону, получается тот же результат). Отсюда находим, что

$$0. \dots j - i \quad k - i \dots i - k \quad h \dots$$

Прибавляя k , получаем, что в строке k

$$k. \dots i \quad h + k \dots$$

В силу закона Кирхгофа для токов (свойство (C4)), $h = (j - i) + (i - k)$, откуда $j = k + h$. Следовательно,

$$k. \dots i \quad j \dots$$

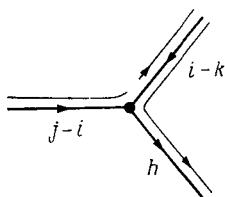


Рис. 2.16.

и правило Δ^* выполняется. Это показывает, что мы действительно получили треугольное вращение графа K_{19} .

Легко получить обобщение для всех графов K_{12s+7} . Рассмотрим граф, похожий на лестницу-стремянку с $2s$ ступеньками, показанный на рис. 2.15 (случай $s = 2$ см. на рис. 2.14). Заметим, что выбранное вращение является круговым. Все $2s$ ступенек ориентированы в чередующемся порядке вверх и вниз и токи по ним равны $1, 2, 3, \dots, 2s$. Все нижние горизонталы, включая две стороны треугольников, направлены влево и токи по ним равны

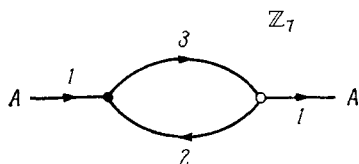
$$3s + 2, 3s + 3, \dots, 4s, 2s + 4, 4s + 1, 2s + 3, \\ 4s + 2, 2s + 2.$$

В этой строке чередуются две арифметические прогрессии с разностями соответственно -1 и 1 . Каждая из верхних горизонталей направлена вправо, а ток по ней получается прибавлением $2s + 1$ к току по соответствующей нижней горизонтали. Рассмотрим рис. 2.15. Легко проверить, что четыре свойства (C1)–(C4) выполняются. На рис. 2.14 ($s=2$) и 2.15 ($s=3$) показаны еще два примера. Заметим, что вращение (2.7) графа K_7 можно получить, используя рис. 2.17.

Схемы (2.7) и (2.8) удовлетворяют следующему правилу.

Правило R^* . Если в строке i имеется $i \dots j k l \dots$, то строка k содержит $k \dots l i j \dots$.

Очевидно, что если схема для графа G удовлетворяет правилу R^* , то она удовлетворяет и правилу Δ^* .



Р и с. 2.17.

Докажем обратное утверждение. Допустим, что

$$i \dots j k l \dots$$

Используя правило Δ^* , получаем

$$k \dots i j \dots \quad \text{и} \quad l \dots i k \dots$$

Применяя правило Δ^* к строке l , получаем

$$k \dots l i \dots$$

Так как граф G не имеет кратных ребер, то символ i появляется в строке k ровно один раз. Следовательно, получаем

$$k \dots l i j \dots,$$

и правило R^* доказано.

Для проверки явно заданной схемы лучше пользоваться правилом R^* , в то время как правило Δ^* более удобно для теоретических рассуждений.

ТЕОРЕМА 2.9. Для любого положительного целого числа $n \equiv 10 \pmod{12}$ существует треугольное вращение графа $K_n - K_3$.

Для доказательства этой теоремы нам нужно обобщить вращение (2.8) графа $K_{10} - K_3$. Это делается

с помощью небольшой модификации графа токов, показанного на рис. 2.15. Пусть n имеет вид $n = 12s + 10$. Для $s = 0$ рассмотрим граф токов, показанный на рис. 2.18. Четыре свойства (C1) — (C4) выполняются. Для вершин степени 1 отметим новое свойство:

(C5) *Каждая вершина, помеченная буквой, например x , имеет степень 1, и ток, втекающий в эту вершину, порождает всю группу. Это означает, что наибольший общий делитель этого тока и числа $12s + 7$ равен 1.*

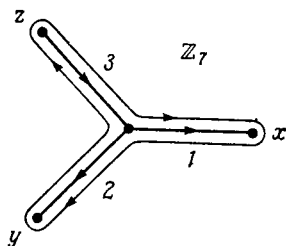


Рис. 2.18.

Вершины, в которых не выполняется закон Кирхгофа для токов, называются *вихрями*. Таким образом, вершины x, y, z — это вихри.

Когда мы описываем цикл для графа токов, такого, как в предыдущем случае, мы должны, проходя через вершину x , записать букву x . Таким образом, по графу токов на рис. 2.18 получаем последовательность

$$1 \ x \ \bar{1} \ 2 \ y \ \bar{2} \ \bar{3} \ z \ 3.$$

Взяв эту последовательность в качестве строки 0 и найдя строки 1, 2, ..., 6 с использованием аддитив-

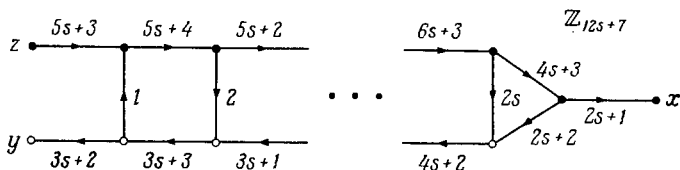


Рис. 2.19.

ного правила, а строки x, y, z с использованием правила Δ^* , приходим к схеме (2.8).

В общем случае $n = 12s + 7$ модифицируем граф токов, показанный на рис. 2.15, заменяя вершину, стоящую слева, тремя вихрями x, y, z так, чтобы получился граф токов, показанный на рис. 2.19. Кроме

того, изменим направление вращения в вершине, стоящей справа, чтобы получить круговое вращение.

Наибольший общий делитель двух целых чисел a , b обозначается (a, b) . Используя свойство $(a, b) = (a, b - na)$ для любого целого числа n , можно вычислить следующие наибольшие общие делители:

$$\begin{aligned}(2s + 1, 12s + 7) &= (2s + 1, 1) = 1, \\(3s + 2, 12s + 7) &= (3s + 2, -1) = 1, \\(5s + 3, 12s + 7) &= (5s + 3, 2s + 1) = \\ &= (s + 1, 2s + 1) = (s + 1, -1) = 1.\end{aligned}$$

Следовательно, ток на любом из трех концевых ребер порождает всю группу Z_{12s+7} .

В дальнейшем мы часто будем использовать такую конструкцию с вихрями. Поэтому имеет смысл рассмотреть ее в общем виде. Пусть a — ток на концевом ребре, инцидентном вихрю x . Тогда построенная строка 0 будет содержать часть

$$0 \dots a x \bar{a} \dots,$$

где вместо $-a$ написано \bar{a} . Следовательно, в нашей схеме

$$\begin{aligned}a \dots 2a x 0 \dots, \\ 2a \dots 3a x a \dots\end{aligned}$$

Используя правило R^* , получаем для строки x

$$x \dots \bar{a} 0 a \dots$$

Повторно применяя правило R^* , получаем

$$x \dots \bar{a} 0 a 2a 3a \dots$$

Если a — образующая группы, то эта строка x содержит все элементы группы.

Используя граф токов, показанный на рис. 2.19, мы получаем схему для графа $K_{12s+10} - K_3$. Нам нужно доказать правило Δ^* только для следующего частного случая. Пусть

$$i \dots x a + i \dots$$

Тогда

$$0 \dots \bar{a} x a \dots$$

и

$$a + i \dots i x \dots$$

Во всех остальных случаях правило Δ^* уже доказано. Следовательно, мы построили треугольное вращение для графа $K_{12s+10} - K_3$.

Ниже мы будем использовать понятие «глобального» закона Кирхгофа для токов. В графе токов на рис. 2.13 рассмотрим верхнее горизонтальное ребро. Сумма всех токов, втекающих в две вершины, инцидентные этому ребру, равна $8 + 1 + 9$, а сумма всех токов, вытекающих из этих двух вершин, равна $7 + 2 + 9$. Эти две суммы равны, и если мы теперь отбросим две девятки, то увидим, что сумма токов, втекающих в эту часть графа ($8 + 1$), равна сумме токов, вытекающих из нее ($7 + 2$).

ТЕОРЕМА 2.10 (глобальный закон Кирхгофа для токов). Пусть G — граф токов, удовлетворяющий ЗКТ (закону Кирхгофа для токов) в каждой вершине, и H — подграф графа G . Будем говорить, что ребро графа G втекает в H (вытекает из H), если оно инцидентно ровно одной вершине P подграфа H и направлено к P (от P). Тогда сумма токов по ребрам, втекающим в H , равна сумме токов по ребрам, вытекающим из H .

Эта теорема легко доказывается индукцией по числу ребер в H .

В рассмотренном выше примере в качестве подграфа H был взят подграф, состоящий из верхнего горизонтального ребра и двух его вершин.

Упражнения

Для того чтобы понять некоторые из следующих задач, нужно заметить, что на рис. 2.13 ЗКТ выполняется не только в группе Z_{19} . На самом деле он выполняется в Z (где Z — аддитивная группа всех целых чисел). Также и во всех других графах токов в этой главе ЗКТ выполняется в Z .

2.3.1. Умножим каждый ток на рис. 2.13 на 5 и приведем его mod 19. Получим новый граф токов, по-прежнему удовлетворяющий ЗКТ в Z_{19} . В более общем случае, если $(c, 12s + 7) = 1$, то, умножая каждый ток на рис. 2.13 или 2.15 на c , мы получим новый граф токов, удовлетворяющий ЗКТ. Проверьте это и попытайтесь доказать.

2.3.2. Распределите элементы 1, 2, 3, 4, 5, 6 группы Z_{13} и расставьте стрелки на шести ребрах графа K_4 так, чтобы ЗКТ выполнялся в Z_{13} . Почему это не приводит к треугольному вращению графа K_{13} ?

2.3.3. Определите число треугольников, порожденных треугольным вращением графа K_{12s+7} и графа $K_{12s+10} - K_3$.

2.3.4. Рассмотрим граф, похожий на лестницу, такой, как на рис. 2.13, 2.14, 2.15, но с 5 ступеньками. Сделайте из него с помощью группы Z_{37} граф токов, удовлетворяющий конструктивным принципам (C1), (C3) и (C4).

2.3.5. Найдите треугольное вращение для графа $K_{15} - K_4$.

2.3.6. Найдите треугольное вращение для графа $K_{25} - K_6$.

2.3.7. Найдите треугольное вращение для графа $K_5 - K_2$, но используйте на этот раз граф токов.

2.3.8. В качестве обобщения задач 2.3.5 и 2.3.6 докажите теорему: если $8s + 3$ — простое число, то существует треугольное вращение графа $K_{10s+5} - K_{2s+2}$.

2.3.9. Разместите числа 1, 2, ..., 12 на 12 ребрах куба и поставьте стрелки на этих ребрах так, чтобы в каждой вершине выполнялся ЗКТ в Z .

2.3.10. Используя граф G_6 на рис. 2.1, расставьте стрелки и токи из группы Z_{19} на его ребрах и укажите вращения. Сделайте это таким образом, чтобы полученный граф токов породил треугольное вращение графа K_{19} .

2.3.11. Покажите, что невозможно выполнить следующее: поставить стрелки на ребрах графа G_6 (рис. 2.1) и разместить числа 1, 2, ..., 9 на его ребрах так, чтобы в каждой вершине выполнялся ЗКТ в Z (на этот раз не только в Z_{19}).

2.3.12. Если размещать числа 2, 3, ..., 10 вместо 1, 2, ..., 9, то конструкция из задачи 2.3.11 становится возможной. Осуществите ее.

2.3.13. Докажите следующий неожиданный результат: не существует треугольного вращения графа $K_6 - K_3$.

2.3.14. Укажите на каждом ребре графа K_5 стрелку и один из элементов 1, 2, ..., 10 так, чтобы каждый элемент появлялся ровно один раз и ЗКТ выполнялся в Z .

2.3.15. Покажите, что невозможно использовать граф токов, изображенный на рис. 2.20 (или, в более общем случае, такой,

что центральная часть является лестницей с $2s - 1$ ступеньками), с токами из Z_{15} (в общем случае — из Z_{12s+3}), для того, чтобы

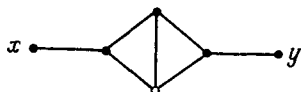


Рис. 2.20.

построить треугольное вращение графа $K_{17} - K_2$ (графа $K_{12s+5} - K_2$).

2.3.16. Рассмотрите токи на рис. 2.13 как элементы группы Z_{20} . Круговое вращение графа определяет строку 0, и с помощью аддитивного правила получается схема для треугольного вращения некоторого графа. Опишите этот граф.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

3.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

В этой главе мы излагаем хорошо известный материал; однако в последующих главах нам потребуются не только результаты, но и части некоторых доказательств. Для более подробного ознакомления с этой теорией см. Зейферт и Трельфалль [1] и Фреше и Фан [1].

Предположим, что нам дана поверхность, сделанная из эластичного материала, скажем из резины. Если мы непрерывно деформируем ее, не разрывая, то полученная поверхность будет, очевидно, иметь то же самое хроматическое число. Подобным же образом, если граф, который можно представлять себе сделанным из проволоки, деформировать без разрывов, то останутся неизменными все его характеристики, рассмотренные в гл. 2: степени вершин, хроматическое число, связность, длины замкнутых маршрутов и т. д.

Наука, изучающая те свойства геометрических фигур, которые не меняются при подобных деформациях, называется *топологией*. Однако надо дать точное математическое определение такого рода деформаций. Деформация, которую мы имеем в виду, называется *гомеоморфизмом*.

Хотя мы дадим сейчас строгое определение этого понятия, читатель может продвигаться дальше, и не овладев им во всех тонкостях.

Пусть E и F — множества точек в трехмерном евклидовом пространстве (или, более общо, в метрическом пространстве). Предположим, что каждой точке x множества E соответствует некоторая точка $f(x)$ множества F и что для каждой точки $y \in F$ существует ровно одна точка x из E , такая, что $f(x) = y$.

Такое соответствие, или отображение, f множества E на множество F называется *взаимно однозначным отображением*. Обратное отображение, которое каждой точке y из F сопоставляет исходную точку x из E , такую, что $f(x) = y$, обозначается обычно f^{-1} , так что $f^{-1}(y) = x$. Очевидно, что f^{-1} — взаимно однозначное отображение множества F на множество E .

ПРИМЕР. Пусть E — карта Сан-Франциско, а F — сам город Сан-Франциско. Пусть f — отображение, которое ставит в соответствие каждой точке x из E в точности ту точку из F , которая изображается точкой x . Тогда f — взаимно однозначное соответствие.

Отображение f множества E на множество F называется *непрерывным* в точке x_0 множества E , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек x из E , отстоящих от x_0 меньше, чем на δ , расстояние между $f(x)$ и $f(x_0)$ меньше, чем ε . Если f непрерывно в каждой точке множества E , то f называется *непрерывным отображением* множества E на множество F . Если f — взаимно однозначное отображение множества E на множество F и оба отображения f и f^{-1} непрерывны, то f называется *гомеоморфизмом*, или *топологическим отображением*. Например, отображение f в рассмотренном выше примере с городом Сан-Франциско является гомеоморфизмом. Если существует гомеоморфизм множества E на F , то E и F называются *гомеоморфными* и F называется *топологическим образом* множества E . Приведем примеры пар гомеоморфных фигур:

круг и квадрат;
поверхность сферы и поверхность тетраэдра;
внутренность круга и внутренность прямоугольника;
множество из n различных точек и другое множество из n различных точек;
поверхность тора и поверхность чайной чашки¹⁾;

¹⁾ Обязательно с ручкой. — Прим. ред.

сплошной тор (с внутренностью) и чайная чашка с внутренностью;
 плоскость и внутренность круга;
 проволочный октаэдр и три окружности, имеющие 6 различных точек пересечения.

Под кругом понимается внутренность и граница (т. е. окружность) круга. Любой топологический образ круга (в трехмерном пространстве) называется *областью*, или *2-клеткой*. Аналогично, топологический образ отрезка называется *ребром*, или *дугой*, или *простой кривой*, или *1-клеткой*. Соответственно *0-клетка* — это просто точка.

Под термином *многоугольник* (треугольник, квадрат, пятиугольник, шестиугольник, ...) мы будем понимать не только плоские прямолинейные фигуры. Мы определим *многоугольник с r сторонами*, или *r -угольник*, как 2-клетку, граница которой разделена r вершинами на r ребер. При этом ребра являются сторонами многоугольника. Мы допускаем также случаи $r = 1$ и $r = 2$; 2-угольник иногда называют *лункой*.

3.2. ПОЛИЭДРЫ

Теперь мы понимаем, что означает термин многоугольник в топологии. Аналогичным образом определим понятие *полиэдра*. Прежде чем дать общее определение, рассмотрим несколько примеров.

Примеры полиэдров: тетраэдр (рис. 3.1), куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр (все эти полиэдры можно рассматривать как подразделения сферы); подразделение тора на 7 шестиугольников, как на рис. 1.3; на 14 треугольников, как на рис. 1.7, или на 16 четырехугольников, как на рис. 3.2. Подразделение тора только на один четырехугольник, как на рис. 1.2, тоже рассматривается как полиэдр.

На рис. 1.2 показано, как подразделить тор на один четырехугольник. Сейчас нас будет больше интересовать обратная операция. Рассмотрим прямоугольник (или четырехугольник). Придадим границе прямоугольника определенное направление (ориента-

цию), указав его «круглой» стрелкой в центре прямоугольника. Обозначим стороны по порядку: a, b, a, b . Нарисуем стрелки на каждой стороне, причем так, чтобы направления стрелок совпадали на одинаково обозначенных сторонах: двух сторонах a и двух сторо-

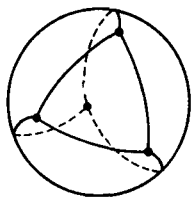


Рис. 3.1.

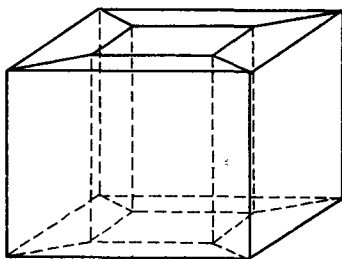


Рис. 3.2.

нах b . В качестве символического описания этого полиэдра будем рассматривать «строку»

$$(3.1) \quad a b a^{-1} b^{-1}.$$

Она представляет четыре стороны четырехугольника. Выражение a^{-1} в (3.1) означает, что третья сторона

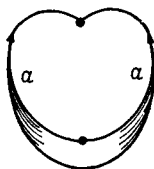


Рис. 3.3.

обозначена буквой a , а стрелка на ней направлена в сторону, противоположную заданной ориентации четырехугольника.

В качестве другого примера рассмотрим лунку (рис. 3.3) — многоугольник, имеющий только 2 стороны. Поместим стрелки на двух сторонах и на самой лунке так, чтобы символическая строка имела вид

$$(3.2) \quad a a^{-1}.$$

Этим определяется подразделение сферы на единственную лунку. Она выглядит подобно кошельку для мелочи, в котором два края застегнуты на молнию.

Теперь легко понять два следующих примера. Превосходные рисунки 3.4 и 3.5 взяты из книги Гильберта и Кон-Фоссена [1]. На рис. 3.4 показано, как преобразовать восьмиугольник в поверхность S_2 . Соответствующая символическая запись имеет вид

$$(3.3) \quad a b a^{-1} b^{-1} c d c^{-1} d^{-1}.$$

Подобным образом, как показано на рис. 3.5, 12-угольник с символическим выражением

$$(3.4) \quad a b a^{-1} b^{-1} c d c^{-1} d^{-1} e f e^{-1} f^{-1}$$

описывает поверхность, которую мы обозначили S_3 . Очевидно, что все это можно обобщить на случай поверхности S_p — сферы с p ручками. Позже мы вернемся к этому примеру.

Если полиэдр содержит s многоугольников, то символическое представление имеет s строк. Например, легко проверить, что схема

$$\begin{array}{ccc} e & d & f \\ a & c^{-1} & e^{-1} \\ f^{-1} & b & a^{-1} \\ c & b^{-1} & d^{-1} \end{array}$$

представляет тетраэдр как подразделение сферы (рис. 3.6). Существуют также полиэдры, которые нельзя вложить в трехмерное пространство без самопересечений. Рассмотрим прямоугольник с символической строкой

$$(3.5) \quad c a c a^{-1}$$

(рис. 3.7). Если сначала отождествить стороны, помеченные буквой c , то получится, очевидно, лист Мёбиуса; следовательно, поверхность будет неориентируемой. Однако, чтобы изобразить ее геометрически, лучше отождествить сначала стороны, помеченные

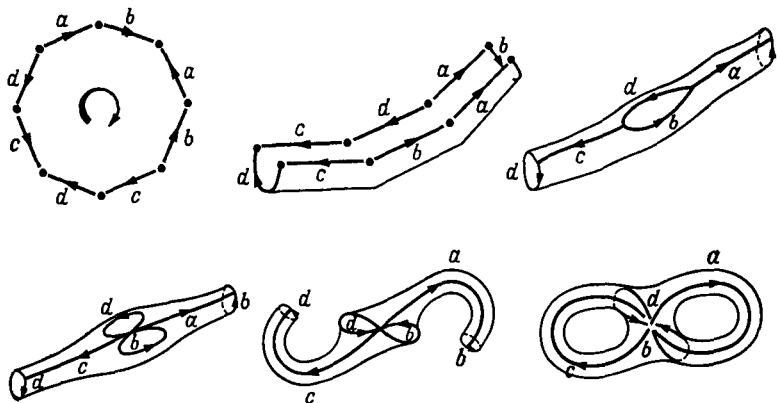


Рис. 34.

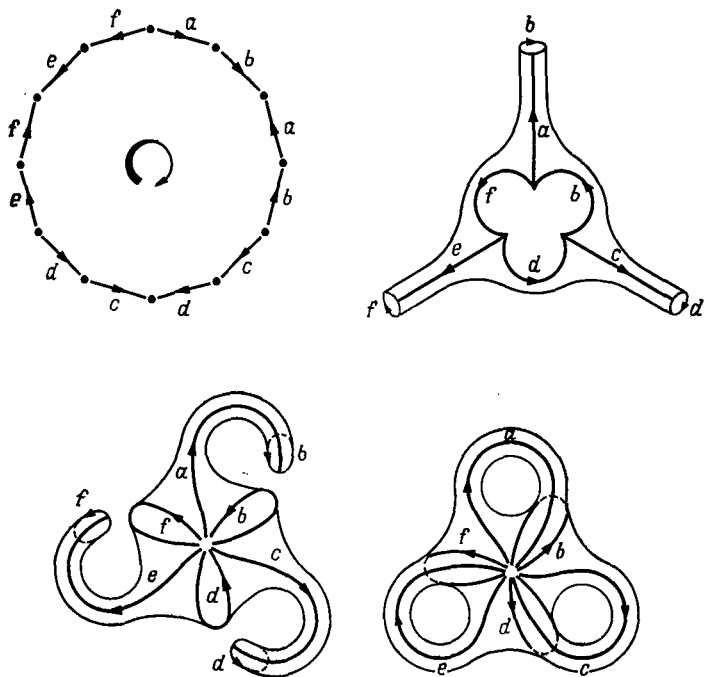
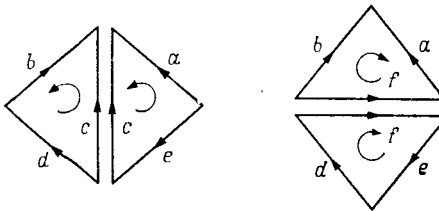
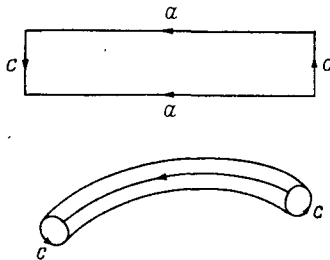


Рис. 35.

буквой a . Тогда получим трубку, у которой две граничные окружности помечены буквой c . Но для отождествления двух граничных окружностей необходимо привести в соответствие стрелки на них. Деформируем трубку так, чтобы один из концов стал несколько тоньше, чем другой, и проткнем этот более тонкий конец сквозь стенку трубки. Загнем края более толстого



Р и с. 3.6.



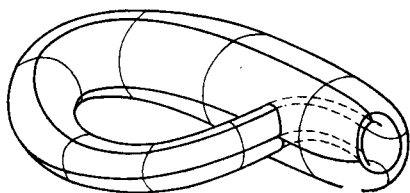
Р и с. 3.7.

конца внутрь и соединим края толстого и тонкого концов трубки согласно требуемому способу отождествления (см. рис. 3.8 и 3.9). Полученная поверхность называется *бутылкой Клейна*.

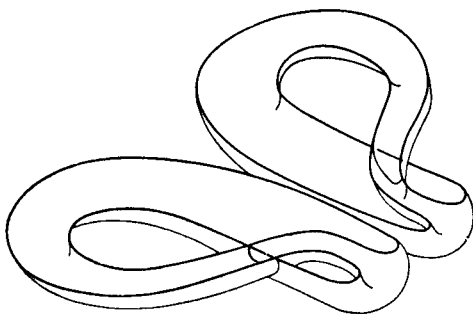
До сих пор мы не дали точного определения полиэдра. Сделаем это следующим образом.

Пусть дано конечное число многоугольников, и пусть общее число сторон всех многоугольников четно. Допустим, что стороны разбиты на пары. Пометим стороны буквами так, чтобы стороны каждой пары были помечены одной и той же буквой (ср. с рис. 3.6). Допустим далее, что для каждой стороны задана

ориентация, которая указана стрелкой. отождествим теперь каждую пару сторон так, чтобы направления стрелок совпали. Две совмещенные стороны называются *ребром*. Если псевдограф, состоящий из данных вершин и ребер, связан, то полученная фигура называется *полиэдром*. Многоугольники, образующие полиэдр, называются его *гранями*.



Р и с. 3.8.



Р и с. 3.9.

Вся исходная информация — многоугольники, разбиение сторон на пары, ориентация сторон (до отождествлений) — называется *плоским представлением полиэдра*. Если общее число сторон всех многоугольников больше двух, то разбить стороны на пары и выбрать ориентацию для каждой стороны можно многими способами. Любой из этих способов допускается при условии, что полученная фигура является связной. Например, можно объединять в пару две стороны одного и того же многоугольника.

Символическое описание полиэдра можно получить следующим образом. Рассмотрим плоское представление полиэдра (т. е. отождествления еще не сделаны). Для каждого многоугольника выберем некоторую ориентацию. Затем для каждого многоугольника в соответствии с выбранной ориентацией выпишем в циклическом порядке его стороны в виде строки соответствующих букв, причем если ориентация многоугольника противоположна ориентации стороны, то соответствующую букву запишем с показателем -1 . Получим схему

$$\begin{array}{l}
 (\Sigma) \quad a b c^{-1} \dots \\
 \quad \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \quad \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
 \end{array}$$

со следующими свойствами:

- (α) каждая буква появляется в (Σ) ровно 2 раза;
- (β) множество строк в (Σ) нельзя разбить на два непересекающихся подмножества так, чтобы для каждого из них выполнялось свойство (α).

Свойство (β) гарантирует, что полученная в результате поверхность будет связной. Очевидно, что строки в (Σ) должны читаться циклически. Следующие операции изменяют схему (Σ), но не изменяют представляемый схемой полиэдр:

(a) перестановка первой буквы строки в конец строки (циклическая перестановка);

(b) замена всюду некоторой буквы, скажем b , встречающейся в схеме, той же буквой с показателем -1 и наоборот: b^{-1} заменяется на b (заметим, что если буква b встречается в схеме, то найдется ее второе вхождение либо в виде b , либо в виде b^{-1}); данную операцию мы будем называть изменением показателей;

(c) одновременное выполнение следующих операций: изменение показателей у всех элементов строки и изменение циклического порядка в этой строке на противоположный.

Операции (b) и (c) можно интерпретировать как изменение ориентации соответственно ребра и многоугольника.

3.3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Мы хотим получить общее представление о всех возможных разновидностях полиэдров. Для этого поступим следующим образом: для данного полиэдра P и его символического представления с помощью схемы (Σ) определим четыре операции, которые назовем элементарными операциями. Эти операции изменяют как схему, так и сам полиэдр. Однако интуитивно ясно, что сама «поверхность» при этом не меняется.

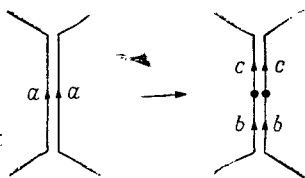


Рис. 3.10.

(SU1) *Одномерное подразделение*

Взяв какую-либо внутреннюю точку некоторого ребра a рассматриваемого полиэдра в качестве новой вершины, разобьем ребро a на два новых ребра b и c (рис. 3.10). При этом в схеме необходимо заменить букву a словом bc , а a^{-1} — словом $c^{-1}b^{-1}$.

(CO1) *Одномерное укрупнение*

Эта операция является обратной к (SU1). Если в схеме в двух местах мы встречаем слово ab , то в обоих местах заменяем ab буквой c . Если же мы встречаем в схеме слова ab и $b^{-1}a^{-1}$, то заменяем их соответственно буквами c и c^{-1} .

(SU2) *Двумерное подразделение*

Соединим две вершины некоторого многоугольника в полиэдре новым ребром k , так что многоугольник разделится на два многоугольника (рис. 3.11). В схеме вместо одной строки

$$(3.6) \quad b \dots c d \dots a$$

запишем две строки

$$(3.7) \quad \begin{array}{l} b \dots c k^{-1} \\ k d \dots a. \end{array}$$

(CO2) *Двумерное укрупнение*

Эта операция является обратной к (SU2). Два многоугольника с общим ребром преобразуются в один новый многоугольник выбрасыванием этого общего ребра. В схеме две строки вида (3.7) заменяются одной строкой вида (3.6).

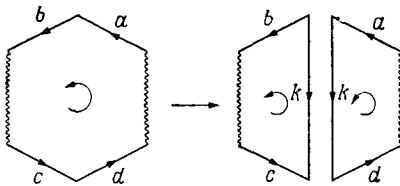


Рис. 3.11.

Два полиэдра P и P' будем называть *элементарно подобными*, если P можно преобразовать в P' с помощью конечного числа элементарных операций (CO1), (SU1), (CO2), (SU2).

Назовем полиэдр *ориентируемым*, если можно выбрать ориентацию каждого многоугольника так, чтобы каждое ребро появлялось в обоих возможных направлениях. Для символического представления это означает следующее: полиэдр ориентируем, если путем многократного применения операции (с) можно получить схему, в которой для каждого ребра a в символическом представлении появляются a , и a^{-1} .

Легко видеть, что любая из операций (CO1), (SU1), (CO2), (SU2) преобразует произвольный ориентируемый полиэдр снова в ориентируемый полиэдр и, следовательно, любой неориентируемый полиэдр в неориентируемый полиэдр.

Обозначим число вершин, ребер и многоугольников полиэдра соответственно через α_0 , α_1 и α_2 (эти числа определяются, конечно, *после* отождествления

всех эквивалентных пар сторон многоугольников). Например, для подразделения тора на один четырехугольник, показанного на рис. 1.2, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$. В символическом представлении полиэдра α_2 — это просто число строк, а α_1 — число различных букв. Определение числа α_0 несколько более сложно. Пока мы этого не рассматриваем.

Знакопеременная сумма

$$(3.8) \quad E(P) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

для полиэдра P называется его *эйлеровой характеристикой*. Она не меняется при применении любой из элементарных операций. В случае (SU1) оба числа α_0 и α_1 увеличиваются на 1 и, следовательно, $E(P)$ остается постоянной. В случае (SU2) оба числа α_1 и α_2 уменьшаются на 1, и снова $E(P)$ не меняется. Операции (CO1) и (CO2) не меняют эйлерову характеристику, так как ее не меняют обратные к ним операции (SU1) и (SU2).

Подытоживая все сказанное, мы видим, что верна следующая

ТЕОРЕМА 3.1. *Два элементарно подобных полиэдра имеют одну и ту же эйлерову характеристику и являются оба ориентируемыми или оба неориентируемыми.*

Наша следующая цель — доказать утверждение, обратное к теореме 3.1. Мы докажем, что два ориентируемых (а также два неориентируемых) полиэдра с одинаковой эйлеровой характеристикой элементарно подобны.

Множество всех полиэдров разбивается на попарно непересекающиеся классы так, что два полиэдра принадлежат одному и тому же классу в том и только в том случае, если они элементарно подобны. В каждом классе мы хотим найти простейший полиэдр, который назовем «нормальной формой» класса. Надо, конечно, определить, что означают слова «простейший полиэдр в некотором классе». При построении нормальной формы для данного полиэдра очень поможет символическое представление.

3.4. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть дан ориентируемый полиэдр. Применим к нему следующие преобразования.

1. *Получение одной строки.* Если полиэдр содержит более одного многоугольника, то, применяя конечное число раз двумерное укрупнение, можно получить полиэдр, содержащий только один многоугольник. При этом символическое представление будет иметь только одну строку.

2. *Простая нормализация.* Последовательность малых букв в строке (т. е. слово) удобно обозначать одной большой буквой. Например, строка $Raa^{-1}Q$ — это просто более короткая запись строки вида $b_1b_2\dots b_saa^{-1}c_1c_2\dots c_t$.

Пусть $Raa^{-1}Q$ — строка в символическом представлении некоторого полиэдра, и пусть P и Q оба не пусты. Если заменить $Raa^{-1}Q$ на PQ , то получится представление для полиэдра, элементарно подобного первому полиэдру. Доказательство этого факта получается применением операций (SU2), (CO1), (CO2):

$$Raa^{-1}Q \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Pak \\ k^{-1}a^{-1}Q \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Pc \\ c^{-1}Q \end{array} \right. \rightarrow PQ$$

(рис. 3.12). Назовем это преобразование

$$Raa^{-1}Q \rightarrow PQ$$

простой нормализацией.

Получив одну строку и применяя затем простую нормализацию до тех пор, пока это возможно, мы придем к одному из двух возможных случаев:

I. Полиэдр имеет только одно ребро и, следовательно, имеет вид aa^{-1} , что совпадает с примером (3.2), изображенным на рис. 3.3. Будем считать это

нормальной формой. Строку aa^{-1} будем называть нормальной формой сферы.

II. Полиэдр имеет более одного ребра (это означает, что строка в символическом представлении содержит не менее двух различных букв). В этом случае продолжим процесс редукции следующим образом.

3. *Подготовка к выделению ручек.* В строке, представляющей полиэдр, найдутся две буквы a , b , появляющиеся в строке в следующем (чередующемся) порядке:

$$\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$$

Чтобы доказать это, рассмотрим произвольную букву a в данной строке. Тогда строка имеет вид $aQa^{-1}R$,

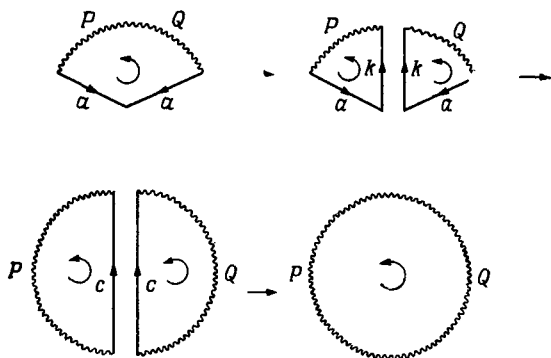


Рис. 3.12.

где слово Q не пусто. В противном случае можно было бы выполнить простую нормализацию. Выберем теперь такую букву a , для которой слово Q самое короткое. Если b — некоторая буква из Q , то буква b^{-1} должна содержаться в R , так как слово Q имеет минимальную длину.

4. *Выделение ручки.* Мы показали, что строку можно записать в виде $PaQbRa^{-1}Sb^{-1}T$. Применим не-

сколько раз элементарные операции:

$$\begin{aligned}
 PaQbRa^{-1}Sb^{-1}T &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} PaQbRc \\ c^{-1}a^{-1}Sb^{-1}T \end{array} \right. \rightarrow \\
 &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} QbRcPa \\ a^{-1}Sb^{-1}Tc^{-1} \end{array} \right. \rightarrow QbRcPSb^{-1}Tc^{-1} \rightarrow \\
 &\rightarrow c^{-1}QbRcPSb^{-1}T \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c^{-1}QbRck \\ k^{-1}PSb^{-1}T \end{array} \right. \rightarrow \\
 &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Rckc^{-1}Qb \\ b^{-1}Tk^{-1}PS \end{array} \right. \rightarrow Rckc^{-1}QTk^{-1}PS \rightarrow \\
 &\rightarrow c^{-1}QTk^{-1}PSRck \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c^{-1}QTj \\ j^{-1}k^{-1}PSRck \end{array} \right. \rightarrow \\
 &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} QTjc^{-1} \\ ckj^{-1}k^{-1}PSR \end{array} \right. \rightarrow QTjkj^{-1}k^{-1}PSR \rightarrow \\
 &\rightarrow PSRQTjkj^{-1}k^{-1} \rightarrow PSRQTaba^{-1}b^{-1}.
 \end{aligned}$$

На последнем шаге мы просто заменили буквы j, k буквами a, b . Это преобразование

$$PaQbRa^{-1}Sb^{-1}T \rightarrow PSRQTaba^{-1}b^{-1}$$

называется *выделением ручки*. Его иллюстрирует рис. 3.13. Вначале многоугольник делится новой диагональю c на два многоугольника. Склеивая их вместе по ребру a , получаем один многоугольник. Он делится новой диагональю k . Две образовавшиеся части склеиваются по ребру b . Полученный многоугольник делится диагональю j . Полученные две части склеиваются вместе по ребру c .

5. *Приведение к нормальной форме*. Применим теперь многократно к строке $PSRQTa_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$ простую нормализацию до тех пор, пока это возможно. Если все буквы из $PSRQT$ уничтожатся, то полученную строку $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$ мы будем считать нормальной формой. Это — нормальная форма тора. Если же $PSRQT$

остается непустым, то так же, как на шаге 3 (подготовка к выделению ручки), строку можно записать в виде

$$P_2 a_2 Q_2 b_2 R_2 a_2^{-1} S_2 b_2^{-1} T_2 a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}.$$

Положив $T = T_2 a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ и снова применяя операцию выделения ручки, получим

$$P_2 S_2 R_2 Q_2 T_2 a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}.$$

После этого преобразуем последовательность $P_2 S_2 R_2 Q_2 T_2$ с помощью простой нормализации. Если

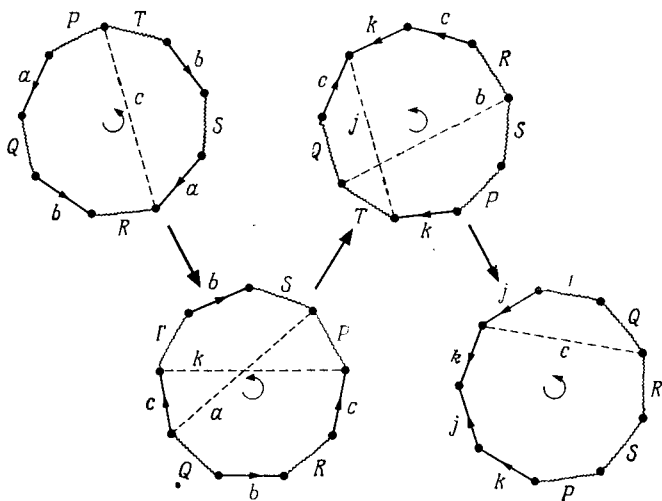


Рис. 3.13.

некоторые буквы еще останутся, можно снова применить операцию выделения ручки. Продолжая этот процесс, получим в результате нормальную форму:

$$(H_p) \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}.$$

Для $p = 2$ и $p = 3$ мы уже рассматривали эту нормальную форму (см. (3.3), (3.4) и рис. 3.4 и 3.5). Оп-

ределим эйлерову характеристику полиэдра (H_p) . Заметим, что до отождествления сторон многоугольник имеет $4p$ вершин. Обозначим их

$$P_1, P_2, \dots, P_{4p},$$

где

$$a_1 = (P_1, P_2), \quad b_1 = (P_2, P_3), \quad a_1^{-1} = (P_3, P_4), \\ b_1^{-1} = (P_4, P_5), \quad a_2 = (P_5, P_6)$$

и т. д. Из процесса отождествления следует, что $P_1 = P_4, P_2 = P_3, P_3 = P_4, P_2 = P_5, \dots$. В результате получаем, что полиэдр (H_p) имеет всего *одну* вершину. Подставив значения $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2p, \alpha_2 = 1$ в формулу (3.8), получим $E(H_p) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p$. Следовательно, эйлерова характеристика полиэдра (H_p) равна $2 - 2p$.

3.5. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА НЕОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть дан неориентируемый полиэдр и его символическое представление. Следующие преобразования приводят его к нормальной форме. Вначале будем применять простую нормализацию до тех пор, пока это возможно. Затем применяем двумерное укрупнение, чтобы получилась одна-единственная строка (один многоугольник). Если P — некоторое слово, например, $P = a^{-1}bcd$, то слово P^{-1} получается из P изменением порядка букв на обратный и изменением показателей у всех букв, т. е. для нашего примера $P^{-1} = d^{-1}c^{-1}b^{-1}a$. К нормальной форме приводят следующие шаги.

Выделение пленки Мёбиуса. В символическом представлении неориентируемого полиэдра имеется сейчас только одна строка вида $PcQcR$. Если P, Q и R пусты, то строку cc будем считать нормальной формой. В противном случае применим элементарные

операции следующим образом:

$$\begin{aligned}
 PcQcR &\rightarrow \begin{cases} Pck^{-1} \\ kQcR \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P^{-1}kc^{-1} \\ cRkQ \end{cases} \rightarrow \\
 &\rightarrow P^{-1}kRkQ \rightarrow kRkQP^{-1} \rightarrow \\
 &\rightarrow \begin{cases} kRc \\ c^{-1}kQP^{-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Rck \\ k^{-1}cPQ^{-1} \end{cases} \rightarrow \\
 &\rightarrow RccPQ^{-1} \rightarrow PQ^{-1}Rcc.
 \end{aligned}$$

Это преобразование

$$PcQcR \rightarrow PQ^{-1}Rcc$$

называется *выделением пленки Мёбиуса*.

Преобразование одной ручки в две пленки Мёбиуса. Пусть символическое представление полиэдра имеет вид

$$Rccaba^{-1}b^{-1}.$$

Тогда можно сделать следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
 Rccaba^{-1}b^{-1} &\rightarrow a^{-1}b^{-1}Rccab \rightarrow \begin{cases} a^{-1}b^{-1}Rck \\ k^{-1}cab \end{cases} \rightarrow \\
 &\rightarrow \begin{cases} Rcka^{-1}b^{-1} \\ bk^{-1}ca \end{cases} \rightarrow Rcka^{-1}k^{-1}ca.
 \end{aligned}$$

Применим теперь дважды операцию выделения пленки Мёбиуса, сначала относительно c , затем относительно a :

$$Rcka^{-1}k^{-1}ca \rightarrow Rkak^{-1}acc \rightarrow Rkkccaa \rightarrow Rccaabb.$$

На последнем шаге мы поменяли некоторые буквы.

Приведение к нормальной форме. Если дан неориентируемый полиэдр, то, применяя несколько раз двумерное укрупнение, получим в символическом представлении единственную строку. Применим многократно операции простой нормализации и выделе-

ния пленки Мёбиуса до тех пор, пока это возможно. Получим строку вида

$$W c_1 c_1 c_2 c_2 \dots c_t c_t.$$

В слове W каждая пара букв встречается с разными показателями. В противном случае можно было бы еще раз применить операцию выделения пленки Мёбиуса. Так как слово W представляет ориентируемый полиэдр, то его можно записать в виде

$$W = P_1 a_1 Q_1 b_1 R_1 a_1^{-1} S_1 b_1^{-1} T_1$$

точно так же, как в ориентируемом случае. Применяя операцию выделения ручки, получим строку

$$W_1 c_1 c_1 c_2 c_2 \dots c_t c_t a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}.$$

Если после применения простой нормализации слово W_1 остается непустым, то можно еще раз применить операцию выделения ручки. Применяя этот процесс до тех пор, пока это возможно, получим строку

$$c_1 c_1 c_2 c_2 \dots c_t c_t a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_s b_s a_s^{-1} b_s^{-1}.$$

Так как $t \geq 1$, то все ручки можно последовательно преобразовать в пленки Мёбиуса. Окончательно получим строку

$$(C_q) \quad c_1 c_1 c_2 c_2 \dots c_q c_q,$$

которую будем называть *нормальной формой* (C_q) данного неориентируемого полиэдра.

Обозначим следующим образом вершины $2q$ -угольника (C_q) (еще не отождествляя ребра):

$$P_1, P'_1, P_2, P'_2, \dots, P_q, P'_q,$$

причем так, чтобы вершина P_1 находилась между двумя сторонами, помеченными буквой c_1 .

Тогда из процесса отождествления ребер легко следует, что $P_1 = P'_1 = P_2 = P'_2$ и т. д. Значит, нормальная форма (C_q) имеет одну вершину, q ребер и один многоугольник. Поэтому эйлерова характеристика полиэдра (C_q) равна

$$E(C_q) = 2 - q.$$

3.6. СТАНДАРТНЫЕ МОДЕЛИ

Мы получили, что каждый полиэдр элементарно подобен одной из следующих нормальных форм:

Нормальная форма	Эйлерова характеристика	Ориентируемость
$(H_0) \quad aa^{-1}$	2	да ($p = 0$)
$(H_p) \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$	$2 - 2p$	да ($p = 1, 2, \dots$)
$(C_q) \quad c_1 c_1 c_2 c_2 \dots c_q c_q$	$2 - q$	нет ($q = 1, 2, \dots$)

Следующие две теоремы теперь очевидны.

ТЕОРЕМА 3.2. *Эйлерова характеристика $E(P)$ любого полиэдра P меньше или равна 2.*

ТЕОРЕМА 3.3. *Полиэдр P элементарно подобен нормальной форме aa^{-1} (сфера) тогда и только тогда, когда $E(P) = 2$.*

Любые две различные нормальные формы не являются элементарно подобными, так как они различаются либо эйлеровой характеристикой, либо ориентируемостью.

ТЕОРЕМА 3.4. *Два полиэдра элементарно подобны тогда и только тогда, когда они оба имеют одну и ту же эйлерову характеристику и оба ориентируемы или оба неориентируемы.*

Теорема 3.1 показывает, что эти условия необходимы. Чтобы доказать, что они также и достаточны, рассмотрим два ориентируемых полиэдра P и P' , таких, что $E(P) = E(P')$. Оба полиэдра должны быть элементарно подобны одной и той же нормальной форме, так как имеется только одна ориентируемая нормальная форма с данной эйлеровой характеристикой. Следовательно, полиэдр P элементарно подобен

полиэдру P' . Эти же рассуждения справедливы и в случае, когда P и P' оба неориентируемы.

На этом этапе изложения удобно дать следующее комбинаторное определение поверхности.

Если P — полиэдр, то назовем множество S всех полиэдров, элементарно подобных P , *замкнутой поверхностью*. Если P — произвольный элемент множества S , то будем говорить, что P — полиэдр на S , или что P — подразделение поверхности S .

Эйлерова характеристика $E(S)$ замкнутой поверхности S определяется равенством $E(S) = E(P)$, где P — произвольный полиэдр на S . Будем говорить, что поверхность S *ориентируема (неориентируема)*, если соответствующий полиэдр P ориентируем (неориентируем). Это определение корректно, так как все полиэдры на S имеют одну и ту же эйлерову характеристику и либо все ориентируемы, либо все неориентируемы.

Множество всех полиэдров, элементарно подобных нормальной форме (H_p) , будем называть *замкнутой ориентируемой поверхностью рода p* и обозначать S_p ($p = 0, 1, 2, \dots$).

Аналогично, множество всех полиэдров, элементарно подобных нормальной форме (C_q) , будем называть *замкнутой неориентируемой поверхностью рода q* и обозначать N_q ($q = 1, 2, \dots$).

Поверхность S_0 называют обычно *сферой*, а S_1 — *тором*. Покажем, что в качестве *стандартной модели* для поверхности S_p может служить сфера с p ручками. Для частных случаев $p = 1, 2, 3$ мы уже иллюстрировали это на рис. 1.2, 3.4 и 3.5.

На рис. 3.14 показан ориентируемый полиэдр, состоящий из 6 четырехугольников и двух 12-угольников. Легко видеть, что два четырехугольника образуют одну ручку и один из 12-угольников можно рассматривать как северное полушарие, а другой — как южное полушарие. Стрелки на многоугольниках показывают, что полиэдр действительно ориентируем. Обобщение на случай p ручек очевидно: полиэдр будет содержать $2p$ четырехугольников и два $4p$ -угольника.

Из равенств

$$\alpha_0 = 4p, \quad \alpha_1 = 8p, \quad \alpha_2 = 2p + 2$$

получаем, что эйлерова характеристика этого полиэдра равна $2 - 2p$. Таким образом, сферу с p ручками

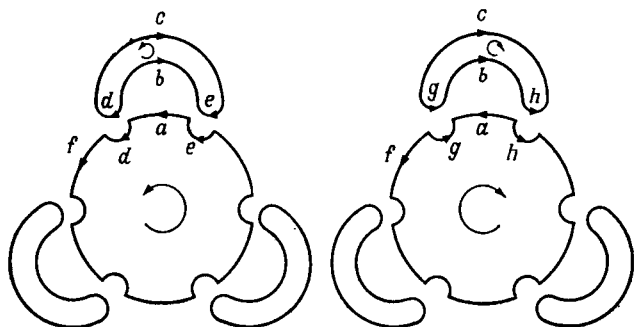


Рис. 3.14.

можно рассматривать как модель для ориентируемой поверхности рода p .

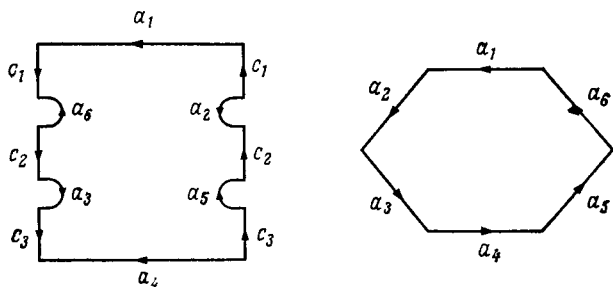


Рис. 3.15.

Для неориентируемой поверхности невозможно построить простую модель. Рассмотрим полиэдр, состоящий из одного 12-угольника и одного шестиугольника, плоское представление которого показано на рис. 3.15.

Этот полиэдр неориентируем, и его эйлерова характеристика равна

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 6 - 9 + 2 = -1.$$

Следовательно, он представляет неориентируемую поверхность рода 3. В общем случае рассмотрим лист Мёбиуса M_q порядка q , описанный в § 1.4. Границей M_q является одна простая кривая. Возьмем дополнительно 2-клетку, граница которой также состоит из одной простой кривой. отождествив эти две граничные кривые, получим представление неориентируемой поверхности рода q .

Если вырезать одну маленькую 2-клетку из поверхности N_q , то получится поверхность M_q . Поверхность M_q легко представить геометрически, в то время как для N_q это почти невозможно. В действительности невозможно найти вложение поверхности N_q в трехмерное евклидово пространство без самопересечений. Как мы уже видели, поверхность N_2 — это в точности бутылка Клейна.

Упражнения

3.6.1. Преобразуйте многоугольник $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ в одну из нормальных форм.

3.6.2. Преобразуйте многоугольник $abca^{-1}b^{-1}c$ в одну из нормальных форм.

3.6.3. Какую поверхность представляет следующий многоугольник:

$$a_1 a_2 \dots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1}?$$

Ответ можно дать без преобразования к нормальной форме.

3.6.4. Что неверно в следующем «доказательстве» для выделения пленки Мёбиуса:

$$\begin{aligned} PcQcR &\rightarrow PcQP^{-1}PcR \rightarrow \begin{cases} PcQP^{-1}k^{-1} \\ kPcR \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} P^{-1}kPQ^{-1}c^{-1} \\ cRkP \end{cases} \rightarrow P^{-1}kPQ^{-1}RkP \rightarrow kkPQ^{-1}R? \end{aligned}$$

3.6.5. Пусть дан полиэдр со следующими свойствами: каждая грань является пятиугольником, каждая вершина имеет

степень четыре и число пятиугольников больше, чем 8, и меньше, чем 16. Покажите, что этот полиэдр неориентируем.

3.6.6. Пусть дан полиэдр со следующими свойствами: каждая грань является пятиугольником или шестиугольником, каждая вершина имеет степень 3, и число пятиугольников не меньше, чем 12. Покажите, что этот полиэдр ориентируем.

3.6.7. Пусть каждая грань полиэдра на торе является четырехугольником или треугольником, а каждая вершина имеет степень 4 или 3. Определите число треугольников и число вершин степени 3.

3.6.8. Какая поверхность получится, если изменить направление одной из 12 стрелок на рис. 3.6?

3.6.9. Если дан $2n$ -угольник, то можно многими способами разбить его стороны на пары, после чего стороны в каждой паре можно отождествить двумя различными способами.

(а) Если полученный полиэдр ориентируем, то каков его максимальный и минимальный возможный род?

(б) Если полученный полиэдр неориентируем, то каков его максимальный и минимальный возможный род?

(Ответ в (а) зависит от четности n .)

3.6.10. Если даны $2n$ треугольников, то имеется много способов попарно отождествить стороны так, чтобы получился один полиэдр. Найдите ответы на те же вопросы (а) и (б), что и в предыдущем упражнении.

3.6.11. Преобразуйте многоугольник $a_1 a_2 \dots a_n a_n \dots a_2 a_1$ к нормальной форме.

3.6.12. Сколько элементарных операций необходимо, чтобы преобразовать куб в тетраэдр?

3.7. ЧАСТИЧНЫЕ ПОЛИЭДРЫ

Пусть дано конечное число многоугольников. Рассмотрим *собственное* подмножество D сторон этих многоугольников. Пусть число сторон в D четно. Пометим стороны, входящие в D , буквами так, чтобы каждая из букв появлялась ровно на двух сторонах. Ориентируем каждую сторону подмножества D , указывая ориентацию стрелкой. В результате получаем так называемое *плоское представление частичного полиэдра*. Если мы отождествим стороны, помеченные одинаковыми буквами, причем так, чтобы совпали направления стрелок, то получим *частичный полиэдр*. Стороны, не принадлежащие подмножеству D , не помечены и не ориентированы, и мы назовем их *границ-*

ными ребрами частичного полиэдра. Из определения следует, что в частичном полиэдре имеется по крайней мере одно граничное ребро.

В частичном полиэдре множество граничных ребер вместе с множеством всех вершин, каждая из которых инцидентна по крайней мере одному граничному ребру, образует псевдограф. Мы назовем его *граничным псевдографом* частичного полиэдра. На рис. 3.16 по-

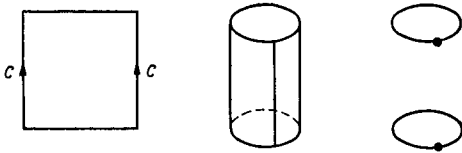


Рис. 3.16.

казано плоское представление (слева) частичного полиэдра (изображенного в центре) и его граничный псевдограф (справа). Другой пример приведен на рис. 3.17. Лист Мёбиуса (и более общую поверхность

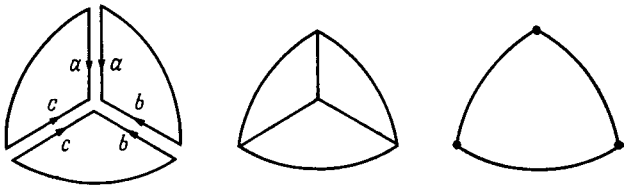


Рис. 3.17.

M_g из § 1.4, рис. 1.10) можно рассматривать как частичный полиэдр.

ТЕОРЕМА 3.5. *Каждая вершина граничного псевдографа частичного полиэдра имеет степень 2.*

Доказательство. Рассмотрим в плоском представлении многоугольник с вершиной A_0 , инцидентной граничной (непомеченной) стороне. Если эта вершина A_0 инцидентна только непомеченным сторонам многоугольника, то ее степень равна 2 даже после

отождествления всех помеченных сторон. В противном случае пусть c_1 — помеченная сторона многоугольника, инцидентная вершине A_0 (см. рис. 3.18). Можно построить такую последовательность

$$A_0, c_1; c_1, A_1, c_2; c_2, A_2, c_3; \dots; c_t, A_t,$$

что две соседние буквы $c_i; c_i$ представляют две различные стороны, помеченные буквой c_i ($i=1, 2, \dots, t$), тройка c_i, A_i, c_{i+1} принадлежит некоторому многоугольнику, в котором вершина A_i инцидентна сторонам c_i и c_{i+1} ($i=1, 2, \dots, t-1$), и ориентация сторон c_i такова, что первая сторона c_i направлена к вершине A_{i-1} тогда и только тогда, когда вторая сторона c_i направлена к вершине A_i . Если указанную последовательность нельзя продолжить дальше,

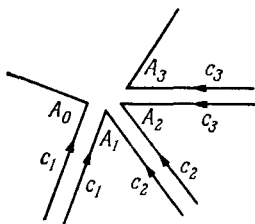


Рис. 3.18.

то последняя вершина A_t инцидентна непомеченной стороне. После отождествления сторон все вершины A_i ($i=0, 1, \dots, t$) отождествляются в одну вершину, которая будет инцидентна ровно двум непомеченным ребрам (или одной петле).

Пусть T — частичный полиэдр. Пусть β_0 — число вершин после отождествления помеченных сторон, β_1 — число ребер, включая граничные ребра, β_2 — число многоугольников в T . Тогда *эйлерова характеристика* $E(T)$ частичного полиэдра T определяется как $E(T) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2$.

ТЕОРЕМА 3.6. Если T — частичный полиэдр, то $E(T) \leq 1$.

Доказательство. В граничном псевдографе B частичного полиэдра T все вершины имеют степень 2. Следовательно, псевдограф B состоит из k замкнутых простых цепей и $k \geq 1$. Пусть s_1, s_2, \dots, s_k — длины этих цепей. Возьмем k дополнительных многоугольников, а именно, s_1 -угольник, s_2 -угольник, \dots , s_k -угольник. Отождествим границу s_i -угольника с соот-

ветствующей замкнутой простой цепью граничных сторон частичного полиэдра $T (i = 1, 2, \dots, k)$.

Полученный полиэдр P имеет $\beta_2 + k$ многоугольников. По теореме 3.2

$$E(P) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 + k = E(T) + k \leq 2.$$

Так как $k \geq 1$, то получаем отсюда утверждение теоремы 3.6.

Равенство $E(T) = 1$ выполняется в том и только в том случае, если $E(P) = 2$ и $k = 1$. Используя теорему 3.3, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.7. *Если T — частичный полиэдр, такой, что $E(T) = 1$, то его граничные ребра образуют одну замкнутую простую цепь и при отождествлении этой цепи с границей одного дополнительного многоугольника получается подразделение сферы.*

Замечание. Отдельно взятый многоугольник, в котором все стороны не помечены, также можно рассматривать как частичный полиэдр; мы назовем его *2-клеткой*.

Каждый частичный полиэдр T с эйлеровой характеристикой $E(T) = 1$ элементарно подобен 2-клетке. Эта теорема не потребует нам в дальнейшем. Поэтому мы опустим ее длинное доказательство.

4. ГРАФЫ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

4.1. ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕНИИ

Если даны граф G и поверхность S , то возникает следующий вопрос: можно ли «нарисовать» данный граф G на поверхности S так, чтобы его ребра пересекались только в общих для них вершинах. При этом надо точно определить, что означает «нарисовать». Напомним, что поверхность S — это некоторое множество полиэдров (см. определение в § 3.6).

Два графа G и G' называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин графа G и множеством вершин графа G' , такое, что две вершины смежны в G тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины смежны в G' . Например, граф G_5 , изображенный на рис. 2.1, изоморфен графу, состоящему из вершин и ребер треугольной призмы.

Два графа G и G' называются *гомеоморфными*, если один из них можно преобразовать в граф, изоморфный второму, применяя конечное число раз операции одномерного укрупнения и одномерного подразделения (определенные в § 3.3). На рис. 4.1 показаны два гомеоморфных графа. Изоморфные графы идентичны в абстрактном смысле, в то время как гомеоморфные графы обладают одинаковыми свойствами, связанными с вложениями.

Обозначим число вершин и ребер в графах G и G' обычным образом: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha'_0, \alpha'_1$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если графы G и G' гомеоморфны, то $\alpha_0 - \alpha_1 = \alpha'_0 - \alpha'_1$.*

Доказательство очевидно. При одномерном подразделении одно ребро заменяется двумя ребрами и

добавляется одна вершина. Следовательно, разность $\alpha_0 - \alpha_1$ не меняется. То же верно и для обратной операции — одномерного укрупнения.

Определим теперь, что значит вложить граф G в поверхность S («нарисовать» граф на поверхности

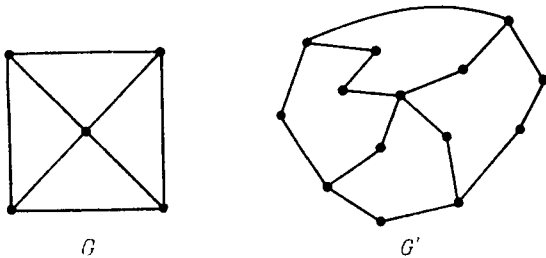


Рис. 4.1.

S). Назовем псевдограф, состоящий из всех ребер и вершин некоторого полиэдра P , 1-скелетом полиэдра P . Например, 1-скелетом полиэдра $aba^{-1}b^{-1}$ на торе является псевдограф с одной вершиной и двумя петлями, а 1-скелетом тетраэдра является граф K_4 .

Пусть даны граф G и поверхность S ; будем говорить, что граф G можно вложить в поверхность S , если существует полиэдр P на S , такой, что 1-скелет полиэдра P содержит подграф, гомеоморфный графу G (см. рис. 4.1 и 4.2). На интуитивном уровне это означает, что граф G можно нарисовать на поверхности S без пересечения ребер (не считая пересечений в вершинах). Произвольный граф, который можно вложить в сферу, называется *планарным графом*.

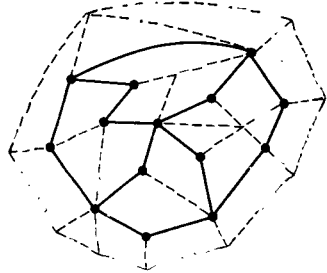


Рис. 4.2.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть в графе G степень каждой вершины не меньше 2. Если граф G можно вложить

в замкнутую поверхность S , то

$$\alpha_1 \leq 3\alpha_0 - 3E(S).$$

Так как доказательство теоремы 4.2 достаточно сложно, мы рассмотрим вначале следующий частный случай.

Предположим, что граф G является 1-скелетом полиэдра P на поверхности S . Тогда $E(S) = E(P) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$, где α_0 и α_1 определяются по графу G . Необходимо получить верхнюю оценку для α_2 . Так как кратчайшая замкнутая цепь в графе G содержит по крайней мере три ребра, то каждый многоугольник полиэдра P имеет по крайней мере три стороны. Кроме того, каждое ребро полиэдра P образуется из двух сторон многоугольников. Следовательно, $3\alpha_2 \leq 2\alpha_1$. Отсюда вытекает неравенство $3E(S) \leq 3\alpha_0 - \alpha_1$, которое и требовалось получить.

Доказательство теоремы 4.2 в общем случае. Пусть граф G можно вложить в поверхность S . По определению это означает, что на поверхности S существует полиэдр P , 1-скелет которого содержит подграф G' , гомеоморфный графу G . Каждое ребро подграфа G' соответствует двум сторонам многоугольников в плоском представлении полиэдра P . Следовательно, имеется $2\alpha'_1$ сторон многоугольников, которые соответствуют ребрам подграфа G' . Уберем метки с этих $2\alpha'_1$ сторон многоугольников, т. е. не будем в дальнейшем объединять их в пары (отождествлять). При этом данный полиэдр разбивается на частичные полиэдры T_1, T_2, \dots, T_t (если нарушится связность, то может получиться более одного частичного полиэдра). Этот процесс можно представлять себе как *разрезание* полиэдра по G' .

Пусть $\beta_0^{(i)}$ — число вершин, $\beta_1^{(i)}$ — число ребер и $\beta_2^{(i)}$ — число граней в частичном полиэдре T_i ($i = 1, 2, \dots, t$). Пусть $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ — те же величины для полиэдра P .

Рассмотрим три суммы

$$\sum_{i=1}^t \beta_0^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^t \beta_1^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^t \beta_2^{(i)}.$$

В первой сумме каждая вершина A подграфа G' учитывается ровно h раз, где h — степень вершины A . Например, если $h = 3$, то вершина A появляется либо по одному разу в трех различных частичных полиэдрах, либо в двух полиэдрах, но в одном из них дважды, либо только в одном полиэдре трижды.

Во второй сумме каждое ребро подграфа G' учитывается дважды. Получаем, что

$$\beta_0 = \sum_{i=1}^t \beta_0^{(i)} - \sum_{A \in G'} \text{val } A + \alpha'_0,$$

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^t \beta_1^{(i)} - \alpha'_1,$$

$$\beta_2 = \sum_{i=1}^t \beta_2^{(i)}.$$

По теореме 2.1 сумма степеней всех вершин графа G' равна $2\alpha'_1$. Поэтому

$$\begin{aligned} E(S) &= \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = \\ &= \sum_{i=1}^t (\beta_0^{(i)} - \beta_1^{(i)} + \beta_2^{(i)}) - 2\alpha'_1 + \alpha'_0 + \alpha'_1. \end{aligned}$$

Применяя теорему 4.1, получаем

$$(4.1) \quad E(S) = \sum_{i=1}^t E(T_i) - \alpha_1 + \alpha_0.$$

Теорема 3.6 утверждает, что

$$(4.2) \quad E(T_i) \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, t).$$

Следовательно,

$$(4.3) \quad E(S) \leq t - \alpha_1 + \alpha_0.$$

Сравним теперь величины t и α_1 . Так как граф G не имеет вершин степени 0 и 1, то длина каждого цикла, индуцированного любым вращением графа G , равна по крайней мере 3. Каждому ребру графа G соответствует цепь в графе G' (см. рис. 4.1). Поэтому граничному псевдографу каждого частичного полиэдра T_i

соответствуют по крайней мере три ребра графа G . Каждое ребро графа G соответствует двум или одному из частичных полиэдров T_i . Следовательно,

$$(4.4) \quad 3t \leq 2\alpha_1,$$

и мы получаем

$$3E(S) \leq 3t - 2\alpha_1 - \alpha_1 + 3\alpha_0,$$

$$(4.5) \quad 3E(S) \leq 3\alpha_0 - \alpha_1.$$

Теорема 4.2 полностью доказана.

Заметим, что в (4.5) равенство будет только в том случае, когда каждое из неравенств (4.4) и (4.2) обращается в равенство. Поэтому можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть G — граф, все вершины которого имеют степень не менее 2. Если G можно вложить в поверхность S и $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S)$, то существует такой полиэдр F на S , что G изоморфен 1-скелету полиэдра F и все грани полиэдра F являются треугольниками.

Доказательство этого утверждения непростое. Но так как теорема 4.3 играет в данной книге очень важную роль, мы дадим ее полное доказательство.

Пусть граф G можно вложить в поверхность S . По определению это означает, что существует такой полиэдр P на S , что его 1-скелет содержит подграф G' , гомеоморфный графу G . Воспользуемся понятиями и результатами из доказательства теоремы 4.2.

Так как, по условию, в (4.5) имеет место равенство, то в (4.2) и (4.4) тоже должно быть равенство. Поскольку $E(T_i) = 1$ для каждого i , можно применить теорему 3.7. Граничные ребра частичного полиэдра T_i образуют одну замкнутую цепь. Отождествив эту цепь с границей одного дополнительного многоугольника L_i , получим подразделение сферы D_i .

Необходимо «избавиться» от всех «ненужных» ребер 1-скелета полиэдра P , чтобы получить 1-скелет, изоморфный графу G . Для этого применим следующую процедуру, сначала для $i = 1$. Рассмотрим плоское представление полиэдра P и заменим все много-

угольники, относящиеся к T_1 , единственным многоугольником L_1 , граничный цикл которого соответствует границе частичного полиэдра T_1 .

Получим новый полиэдр P' на некоторой поверхности S' . Покажем, что $S' = S$. Для определения эйлеровой характеристики поверхности S' воспользуемся уже доказанной формулой (4.1), только на этот раз первым частичным полиэдром будет не T_1 , а L_1 . Но $E(L_1) = E(T_1) = 1$, поэтому $E(S') = E(S)$.

Пусть полиэдр P' ориентируем. Тогда для каждого его многоугольника можно выбрать ориентацию так, чтобы каждое ребро полиэдра P' «встречалось в обоих направлениях». Назовем это *ориентацией полиэдра P'* . Любая ориентация (их две) полиэдра P' определяется ориентацией одного из многоугольников.

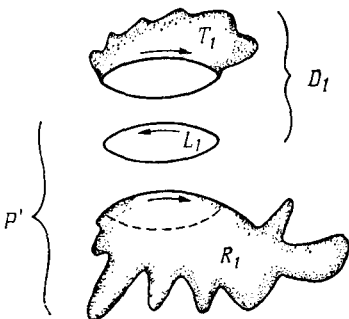


Рис. 4.3.

Обозначим частичный полиэдр, являющийся объединением частичных полиэдров T_2, T_3, \dots, T_t , символом R_1 . Выберем некоторую ориентацию для P' . Этим определится ориентация для L_1 и R_1 . Возьмем теперь ориентацию для D_1 , определяемую данной ориентацией многоугольника L_1 . Это дает некоторую ориентацию для T_1 . Противоположная ориентация частичного полиэдра T_1 вместе с данной ориентацией частичного полиэдра R_1 дает ориентацию для P (см. рис. 4.3). Точно так же можно установить, что если P — ориентируемый полиэдр, то и P' — ориентируемый полиэдр. Таким образом, полиэдры P и P' либо оба ориентируемы, либо оба неориентируемы. Следовательно, по теореме 3.4, две поверхности S и S' одинаковы.

Рассмотрим теперь полиэдр P и заменим T_1, T_2, \dots, T_t последовательно многоугольниками L_1, L_2, \dots, L_t . Получим полиэдр на S , 1-скелет которого изоморфен графу G' . После нескольких одномерных под-

разделений или укрупнений получим полиэдр F на S , 1-скелет которого изоморфен графу G . Так как в (4.4) имеет место равенство, то все грани полиэдра F являются треугольниками. Теорема 4.3 полностью доказана.

Если граф G удовлетворяет условиям теоремы 4.3, то полиэдр F на поверхности S называется *треугольным вложением* графа G в поверхность S . Например, для графов K_3 и K_4 имеются треугольные вложения в сферу, а граф K_7 допускает треугольное вложение в тор (см. рис. 1.7).

Треугольное вложение графа, отличного от K_3 , обладает тем свойством, что любые два различных треугольника могут иметь общими либо только одну вершину, либо одно ребро и две вершины. В противном случае в графе содержались бы петли или параллельные ребра.

Следующая теорема является обратной к теореме 4.3.

ТЕОРЕМА 4.4. *Если существует треугольное вложение графа G в поверхность S , то $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S)$.*

Обозначим число треугольников в этом вложении через α_2 . Тогда $3\alpha_2 = 2\alpha_1$. Подставляя α_2 в формулу Эйлера $E(S) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$, получим утверждение теоремы 4.4.

Следующее обобщение теоремы 4.2 оказывается иногда очень полезным.

ТЕОРЕМА 4.5. *Пусть все вершины графа G имеют степени не меньше 2, и пусть длина кратчайшей замкнутой цепи в графе G не меньше k . Тогда если граф G допускает вложение в замкнутую поверхность S , то*

$$(k - 2)\alpha_1 \leq k\alpha_0 - kE(S).$$

Доказательство этой теоремы получается в результате небольшой модификации доказательства теоремы 4.2. Вместо неравенства (4.4) нужно рассмотреть неравенство

$$kt \leq 2\alpha_1.$$

Выражая отсюда t и подставляя его в неравенство (4.3), получаем требуемое утверждение.

Упражнения

4.1.1. Покажите, что полный граф K_5 не является планарным.

4.1.2. То же самое докажите для графов G_6 и G_7 , изображенных на рис. 2.1.

4.1.3. Пусть имеются два непересекающихся множества соответственно с n и m вершинами, и пусть любые две вершины из разных множеств соединены ребром. Полученный граф с $n + m$ вершинами называется *полным двудольным графом* и обозначается через $K_{n,m}$. Очевидно, граф $K_{n,m}$ содержит nm ребер. Например, граф G_6 (рис. 2.1) изоморфен графу $K_{3,3}$. Покажите, что граф $K_{4,4}$ нельзя вложить в неориентируемую поверхность рода один.

4.1.4. Пусть граф $K_{n,m}$, определенный в упр. 4.1.3, вкладывается в поверхность S . Найдите верхнюю границу для $E(S)$.

4.1.5. Теорема 4.2 выполняется не только для графов, у которых все вершины имеют степень не меньше 2. Достаточно предположить, что граф имеет по крайней мере 3 вершины. Докажите это.

4.1.6. Некто нарисовал на плоскости псевдограф с 11 вершинами и 28 ребрами без пересечения ребер (не считая пересечений в общих вершинах). Покажите, что этот псевдограф не является графом.

4.1.7. Пусть дана произвольная поверхность S . Покажите, что существует граф, который нельзя вложить в S .

4.1.8. Граф называется *шестивалентным*¹⁾, если все его вершины имеют степень 6. Пусть некоторый шестивалентный граф можно вложить в поверхность S . Докажите, что S не является сферой и не является неориентируемой поверхностью рода 1.

4.2. ДВОЙСТВЕННЫЕ ПОЛИЭДРЫ

Полиэдр M на поверхности S называется *картой на S* , если степень каждой его вершины не менее 3 и каждая вершина степени h инцидентна h различным граням. Грани карты называют *странами*. Две страны, имеющие по крайней мере одно общее ребро, называются *соседними*. Определение карты не допускает наличия страны, которая была бы соседней самой себе. Но может случиться, что две страны имеют более одного общего ребра. Хроматическое число $\chi(M)$ карты M было уже определено в гл. 1. Так как о гра-

¹⁾ Или *однородным степени 6*. — Прим. ред.

фах мы знаем намного больше, чем о картах, мы будем рассматривать графы, ассоциированные с картами.

Для любой карты M определим следующий абстрактный граф G_M , который будем называть *графом стран карты M* . Каждая страна карты M представляется в графе G_M одной вершиной, и две вершины смежны в графе G_M тогда и только тогда, когда две соответствующие страны являются соседними в M . Очевидно, что $\chi(G_M) = \chi(M)$, так как по любой раскраске стран карты M непосредственно получается раскраска вершин графа G_M и наоборот.

ТЕОРЕМА 4.6. *Если M — карта на поверхности S , то граф стран G_M можно вложить в S .*

Имеется стандартное доказательство этой теоремы. В каждой стране выберем одну точку и назовем ее

столицей страны. Если две страны являются соседними, то соединим их столицы голубым ребром (см. рис. 4.4; некоторые конструкции легче объяснить, используя «окрашенные ребра», что на самом деле означает просто «определенные, или выделенные, ребра»). Все голубые ребра можно выбрать на поверхности так, чтобы они не пересекались (не считая пересечений в столицах).

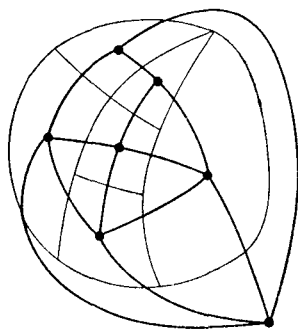


Рис. 4.4.

Некоторый подграф псевдографа, состоящего из всех столиц и всех голубых ребер, изоморфен графу G_M (пара стран может иметь более одного общего ребра, но нам нужно только одно ребро, соединяющее две столицы). Это доказательство нестрогое, так как оно основывается только на интуиции, а не на строгой теории поверхностей. Однако оно станет строгим, если выполнить указанную выше конструкцию, используя только элементарные операции (одномерные и двумерные подразделения).

Пусть дана карта M на поверхности S . Разделим вначале каждое ее ребро на два ребра, добавляя одну новую вершину (одномерное подразделение). Назовем эти новые вершины *средними точками*. Так как каждая страна является соседней по крайней мере к двум другим странами, то каждая страна инцидентна по крайней мере двум средним точкам. Рассмотрим некоторую страну λ и соединим две из средних точек, инцидентных этой стране, новым ребром, полностью содержащимся в λ . В результате страна λ разделится на две части (двумерное подразделение). Разделим это новое ребро на два ребра новой вершиной, которую назовем *столицей* страны λ (одномерное подразделение). После этого каждую из оставшихся средних точек, инцидентных исходной стране λ , соединим одну за другой ребром со столицей страны λ (двумерное подразделение). То же самое сделаем для каждой страны.

Столицы и все новые ребра, содержащиеся в полученном полиэдре на поверхности S , образуют псевдограф, содержащий подграф, гомеоморфный графу G_M . Этим завершается доказательство теоремы 4.6.

Если каждая пара соседних стран карты M имеет только одно общее ребро, то эту конструкцию можно продолжить. Применяя двумерные и одномерные укрупнения, можно избавиться от всех исходных ребер и вершин карты M . После этого можно удалить и средние точки. Полученная карта на поверхности S имеет 1-скелет, изоморфный графу G_M . Эта карта называется *картой*, *двойственной* карте M .

Имеются некоторые хорошо известные примеры пар двойственных карт на сфере:

- куб и октаэдр;
- додекаэдр и икосаэдр;
- тетраэдр двойствен самому себе.

Карта на торе, изображенная на рис. 1.3, двойственна карте, изображенной на рис. 1.7, и наоборот. (Имеется также карта на торе, двойственная самой себе и состоящая из пяти четырехугольников.)

ТЕОРЕМА 4.7. Если граф G можно вложить в поверхность S , то существует карта M на S , такая, что граф G изоморфен некоторому подграфу графа стран G_M .

Данное ниже доказательство легко сделать совершенно строгим, используя только двумерные и одномерные подразделения и укрупнения (как в доказательстве теоремы 4.6). Мы только в общих чертах опишем соответствующую процедуру.

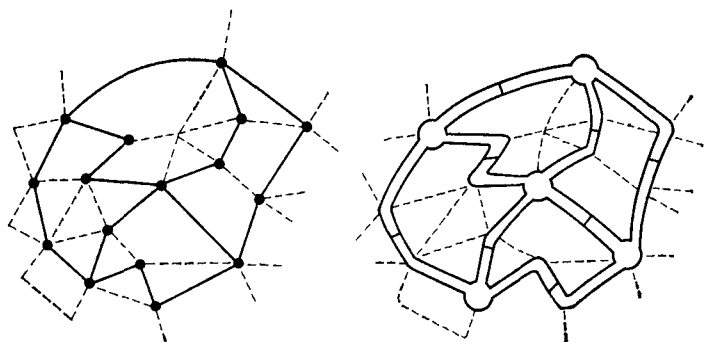


Рис. 4.5.

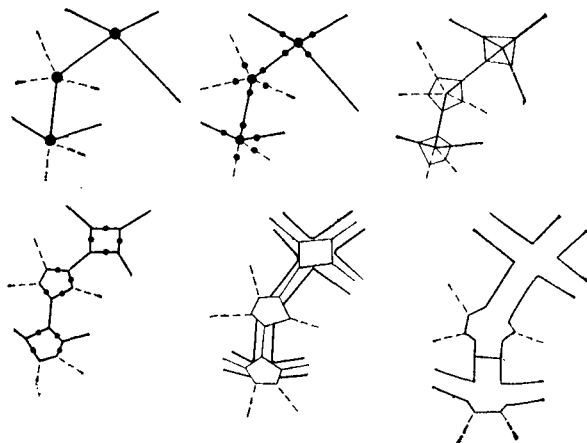


Рис. 4.6

Пусть дано вложение графа G в поверхность S . Образует «маленький кружок» вокруг каждой вершины графа G (см. рис. 4.5). «Расширим» каждое ребро графа G (оно может быть представлено цепью на поверхности S) до «узкой улицы». При помощи нового ребра разделим каждую из этих улиц на две «половины». Рассмотрим каждый кружок вместе с прилегающими к нему половинами улиц как страну. И пусть остальная часть поверхности разбита на некоторое число стран.

Граф стран получившейся карты M , очевидно, содержит подграф, изоморфный данному графу G . На рис. 4.6 показано, как выполнить эту конструкцию, используя только элементарные операции.

4.3. НЕРАВЕНСТВО ХИВУДА

Если M — карта на поверхности S , то мы будем иногда использовать обозначение $M \subset S$. Подобным образом, выражение $G \subset S$ означает по определению, что граф G вкладывается в поверхность S .

Хроматическое число $\chi(S)$ замкнутой поверхности S определялось в гл. 1 следующим образом:

$$(4.6) \quad \chi(S) = \max_{M \subset S} \chi(M),$$

где максимум берется по всевозможным картам M на поверхности S . Заранее не ясно, существует ли этот максимум. Однако приведенная ниже теорема 4.8 показывает, что максимум в (4.6), а также в (4.7), является конечным числом. Теперь легко показать, что вместо карт можно рассматривать графы. Докажем, что

$$(4.7) \quad \chi(S) = \max_{G \subset S} \chi(G),$$

где максимум берется по всем графам G , которые можно вложить в S .

Для каждой карты M на поверхности S существует граф, а именно, граф стран G_M , который вкладывается в поверхность S (теорема 4.6) и для которого $\chi(M) =$

$=\chi(G_M)$. Отсюда

$$\max_{M \subset S} \chi(M) \leq \max_{G \subset S} \chi(G).$$

Обратное неравенство сразу вытекает из того, что для каждого графа G на поверхности S существует такая карта M на S (теорема 4.7), что $\chi(G) \leq \chi(M)$.

Мы хотим найти хроматическое число произвольной замкнутой поверхности. Первым шагом является следующее неравенство, которое было получено Хивудом в 1890 г. Его доказательство было не совсем строгим и, кроме того, он рассматривал только ориентируемые поверхности.

ТЕОРЕМА 4.8. *Если S — замкнутая поверхность с эйлеровой характеристикой $E(S) \neq 2$ (это означает, что S отлична от сферы), то*

$$(4.8) \quad \chi(S) \leq \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24E(S)}}{2} \right].$$

Доказательство. Согласно (4.7), существует граф G , который можно вложить в поверхность S и для которого $\chi(S) = \chi(G)$. Можно считать, что G — критический граф (в противном случае рассмотрим критический подграф с тем же хроматическим числом). Из теорем 2.4 и 4.2 следует, что для $\chi(G) = \chi$ и $E(S) = E$

$$(4.9) \quad \begin{aligned} (\chi - 1) \alpha_0 &\leq 2\alpha_1, & \alpha_1 &\leq 3\alpha_0 - 3E, \\ (\chi - 1) \alpha_0 &\leq 6\alpha_0 - 6E, \\ \chi - 1 &\leq 6 - \frac{6E}{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая: $E \leq 0$ и $E = 1$.

Случай I. Пусть $E \leq 0$. Так как $\alpha_0 \geq \chi$, можно заменить α_0 в (4.9) на χ и после умножения на χ получим

$$\begin{aligned} \chi^2 - \chi &\leq 6\chi - 6E, \\ \chi - 7\chi + 6E &\leq 0. \end{aligned}$$

Используя формулу для корней квадратного трехчлена, можно представить это неравенство в виде

$$(4.10) \quad \left(\chi - \frac{7 + \sqrt{49 - 24E}}{2} \right) \left(\chi - \frac{7 - \sqrt{49 - 24E}}{2} \right) \leq 0.$$

Так как $E \leq 0$, то $\sqrt{49 - 24E} \geq 7$. Так как $\chi \geq 1$, то второй сомножитель в (4.10) всегда положителен. Отсюда вытекает, что первый сомножитель ≤ 0 . Этим завершается доказательство теоремы 4.8 в случае $E \leq 0$.

Случай II. Пусть $E = 1$, т. е. S является неориентируемой поверхностью рода 1. Тогда из (4.9) получаем

$$\chi - 1 \leq 6 - \frac{6}{\alpha_0} < 6.$$

Так как χ — целое число, находим отсюда

$$\chi \leq 6 = \frac{7 + 5}{2} = \frac{7 + \sqrt{49 - 24E}}{2}.$$

На самом деле имеется еще третий случай $E = 2$, но доказательство или контрпример для этого случая не известны. Этот случай как раз и соответствует знаменитой проблеме четырех красок.

Нашей следующей целью является установление того факта, что неравенство в теореме 4.8 можно заменить равенством (с одним исключением). Для этого на заданной поверхности S мы должны указать некоторый граф G , такой, что $\chi(G)$ равно правой части в (4.8).

К счастью, для этой цели подходит полный граф. Для другого графа было бы довольно трудно определить его хроматическое число. Таким образом, нам надо изучить следующий вопрос: *если дана поверхность S , то для каких n существует вложение графа K_n в S ?* С практической точки зрения лучше задать тот же вопрос в следующей форме: *если дано число n , то какие поверхности S обладают тем свойством, что граф K_n можно вложить в S ?*

Мы изучим этот вопрос отдельно для ориентируемых и неориентируемых поверхностей.

4.4. РОД ГРАФОВ

Род $\gamma(G)$ графа G определяется как минимальный род ориентируемой поверхности, в которую его можно вложить. Другими словами, равенство $\gamma(G) = p$ означает, что граф G можно вложить в поверхность S_p и нельзя вложить в S_{p-1} . Например, $\gamma(K_4) = 0$, а $\gamma(K_5) = 1$. Пусть граф G не имеет вершин степени 0 и 1. Применяя теорему 4.2, получим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\leq 3\alpha_0 - 6 + 6p, \\ \alpha_1 - 3\alpha_0 + 6 &\leq 6p, \\ (4.11) \quad \gamma(G) &\geq \left\{ \frac{\alpha_1 - 3\alpha_0 + 6}{6} \right\}. \end{aligned}$$

Выражение $\{x\}$ означает наименьшее целое число, не меньшее, чем x .

Проблема нитей из § 1.3 равносильна в действительности определению рода полного графа. Решение этой задачи состоит из двух частей: одна из них очень легкая, другая очень сложная. Рассмотрим сначала легкую часть.

Применяя (4.11) к $G = K_n$, $\alpha_0 = n$, $\alpha_1 = C_n^2$, получим

$$(4.12) \quad \gamma(K_n) \geq \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\} \quad \text{при} \quad n \geq 3.$$

В нескольких следующих главах мы докажем, что на самом деле в (4.12) имеет место равенство:

$$(4.13) \quad \gamma(K_n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\} \quad \text{при} \quad n \geq 3.$$

Доказательство разбивается на 12 случаев в зависимости от класса вычетов $\text{mod } 12$, к которому принадлежит n .

Для $n \equiv 0, 3, 4$ и $7 \pmod{12}$ произведение $(n-3) \cdot (n-4)$ делится на 12. Эти четыре случая называются *регулярными*, так как для таких чисел n можно построить треугольное вложение графа K_n в ориентируемую поверхность рода $\gamma(K_n)$. Мы проделаем это позднее.

Легко показать, что если для рода графа K_n доказано равенство (4.13), то теорема о раскраске карт верна для всех ориентируемых поверхностей, кроме сферы.

ТЕОРЕМА 4.9. *Если равенство (4.13) верно, то*

$$\chi(S_p) = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right] \quad \text{для всех } p \geq 1.$$

Доказательство. Пусть дана ориентируемая поверхность S_p рода $p \geq 1$, и пусть n — наибольшее целое число, такое, что

$$(4.14) \quad \gamma(K_n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\} \leq p.$$

Тогда

$$\begin{aligned} p &< \left\{ \frac{(n-2)(n-3)}{12} \right\}, \\ 12p &< (n-2)(n-3), \\ 0 &< n^2 - 5n + 6 - 12p, \\ 0 &< \left(n - \frac{5 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right) \left(n - \frac{5 - \sqrt{1 + 48p}}{2} \right). \end{aligned}$$

Так как $p \geq 1$, то второй сомножитель всегда положителен. Следовательно,

$$(4.15) \quad \begin{aligned} 0 &< n - \frac{5 + \sqrt{1 + 48p}}{2}, \\ \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} - 1 &< n. \end{aligned}$$

Из (4.14) имеем $\gamma(K_n) \leq p$. Следовательно, граф K_n можно вложить в поверхность S_p , откуда вытекает, что $n \leq \chi(S_p)$. Из (4.15) получаем

$$(4.16) \quad \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} - 1 < \chi(S_p) \leq \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2}.$$

Верхняя граница в правой части неравенства (4.16) получается из теоремы 4.8 при подстановке $E(S_p) = 2 - 2p$. Из неравенства (4.16) немедленно вытекает утверждение теоремы 4.9.

4.5. НЕОРИЕНТИРУЕМЫЙ РОД ГРАФОВ

Рассмотрим тот же вопрос для неориентируемых поверхностей. *Неориентируемый род* $\bar{\gamma}(G)$ графа G определяется как минимальный род неориентируемой поверхности, в которую можно вложить граф G . Пусть все вершины графа G имеют степень не меньше 1. По теореме 4.3 получаем

$$\alpha_1 \leq 3\alpha_0 - 3E(S)$$

и при $E(S) = 2 - \bar{\gamma}(G)$

$$(4.17) \quad \bar{\gamma}(G) \geq \left\{ \frac{\alpha_1 - 3\alpha_0 + 6}{3} \right\}.$$

Для полного графа это приводит к неравенству

$$(4.18) \quad \bar{\gamma}(K_n) \geq \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\} \quad \text{при} \quad n \geq 3.$$

В нескольких следующих главах мы дадим доказательство следующего равенства:

$$(4.19) \quad \bar{\gamma}(K_n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\} \quad \text{при} \quad n \neq 7 \quad \text{и} \quad n \geq 3,$$

$$\bar{\gamma}(K_7) = 3.$$

Случай $n = 7$ является удивительным исключением (см. § 4.6, «бутылка Клейна»).

ТЕОРЕМА 4.10. *Если равенство (4.19) верно, то*

$$\chi(N_q) = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2} \right] \quad \text{при} \quad q \neq 2.$$

Особый случай N_2 (бутылка Клейна) будет рассмотрен отдельно. Доказательство теоремы 4.10 почти такое же, как и теоремы 4.9.

Однако вначале нам придется рассмотреть частный случай $q = 3$. В этом случае мы можем доказать теорему 4.10, даже не используя равенство (4.19). Из (4.8) получаем

$$\chi(N_3) \leq \left[\frac{7 + \sqrt{73}}{2} \right] = 7.$$

На рис. 1.12 показана карта с хроматическим числом 7 на поверхности M_3 , которую можно рассматривать как

часть поверхности N_3 . Следовательно, $\chi(N_3) \geq 7$ и теорема 4.10 доказана для $q = 3$.

Для $q = 1$, используя (4.8) и рис. 1.9, можно таким же образом доказать, что $\chi(N_1) = 6$. (Однако для случая $q = 2$ мы не можем сделать то же самое, используя только (4.8) и рис. 1.11.)

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы доказать теорему 4.10 в общем случае. Пусть равенство (4.19) верно, и пусть q — целое число, не меньшее 4. Выберем наибольшее целое n , такое, что

$$\left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\} \leq q.$$

Тогда $n \geq 8$ и, применяя (4.19), получаем

$$(4.20) \quad \bar{\gamma}(K_n) \leq q.$$

Так как n максимально, то

$$q < \frac{(n-2)(n-3)}{6},$$

$$6q < n^2 - 5n + 6,$$

$$0 < n^2 - 5n + 6 - 6q,$$

$$0 < \left(n - \frac{5 + \sqrt{1 + 24q}}{2} \right) \left(n - \frac{5 - \sqrt{1 + 24q}}{2} \right).$$

Второй сомножитель положителен и, следовательно,

$$0 < n - \frac{5 + \sqrt{1 + 24q}}{2},$$

$$\frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2} - 1 < n.$$

Согласно неравенству (4.20), $\bar{\gamma}(K_n) \leq q$ и, следовательно, граф K_n вкладывается в поверхность N_q . Это означает, что $\chi(N_q) \geq n$. Из неравенства, полученного выше, вытекает, что

$$(4.21) \quad \frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2} - 1 < \chi(N_q) \leq \frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2}.$$

Правая часть неравенства (4.21) выводится из теоремы 4.8 при условии, что $E(N_q) = 2 - q$. Из неравенства (4.21) вытекает утверждение теоремы 4.10.

Упражнения

4.5.1. Докажите, что хроматическое число сферы не больше шести.

4.5.2. Найдите граф, для которого соотношение (4.11) не обращается в равенство.

4.5.3. Покажите, что для любого графа G справедливо неравенство $\bar{\gamma}(G) \leq 2\gamma(G) + 1$.

4.5.4. Найдите род графа $K_n - K_{n-2}$.

4.5.5. Возьмем правильный $2n$ -угольник со всеми его $2n$ сторонами и всеми наибольшими диагоналями (их n) и будем рассматривать его как граф. Каков род этого кубического графа? (Он меньше, чем можно было бы ожидать.)

4.5.6. Каков неориентируемый род графа из упр. 4.5.5?

4.5.7. Рассмотрим как граф правильный $(2n + 1)$ -угольник со всеми его $2n + 1$ сторонами и всеми наибольшими диагоналями (их $2n + 1$). Каков род этого кубического графа?

4.5.8. Рассмотрим как граф правильный n -угольник со всеми его n сторонами и всеми кратчайшими диагоналями (более длинными, чем стороны). Каков род этого четырехвалентного графа?

4.5.9. Каков род двудольного графа $K_{4,4}$ (определение см. в упр. 4.1.3)?

4.5.10. Определите род графа $K_7 - K_4$.

4.6. БУТЫЛКА КЛЕЙНА

Изучим теперь поверхность N_2 , которую называют также бутылкой Клейна. Этот частный случай не покрывается теоремой 4.10 и является особенно поучительным.

ТЕОРЕМА 4.11. *Полный граф K_7 нельзя вложить в поверхность N_2 .*

Доказательство. Предположим, что граф K_7 можно вложить в поверхность N_2 . Так как $\alpha_0 = 7$, $\alpha_1 = 21$ и $E(N_2) = 0$, то выполняется равенство $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(N_2)$. Следовательно, применима теорема 4.3, т. е. существует треугольное вложение графа K_7 в поверхность N_2 . Карта M , двойственная этому полиэдру, состоит из семи попарно соседних шестиугольников, и все вершины этой карты имеют степень 3.

Выясним структуру карты M . Выберем некоторую вершину P . Пометим три шестиугольника, инцидентные вершине P , числами 0, 1, 2. Ребро, находящееся между шестиугольником 1 и шестиугольником 2, инцидентно другой вершине $Q \neq P$. Эта вершина Q инцидентна шестиугольнику 1, шестиугольнику 2 и третьему шестиугольнику, который можно обозначить числом 3. Шестиугольник 3 отличен от шестиугольника 0, так как в противном случае у шестиугольника 1 было бы недостаточно ребер, чтобы быть соседним с шестью различными шестиугольниками.

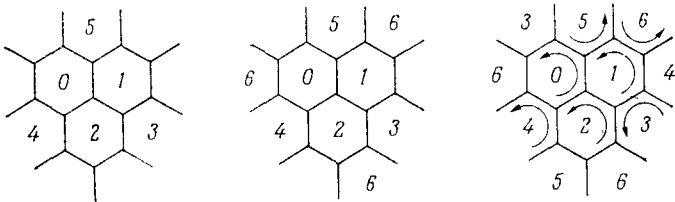


Рис. 4.7.

Точно так же получаем, что все шестиугольники 0, 1, 2, 3, 4, 5, показанные на рис. 4.7, отличны друг от друга. Последний шестиугольник, помеченный числом 6, либо должен располагаться так, как показано в центре на рис. 4.7, либо может совпадать с тремя непомеченными шестиугольниками. Эти две возможности на самом деле не отличаются друг от друга. Одна является зеркальным отражением другой (относительно средней вертикальной линии).

Шестиугольник 0 должен быть соседним еще с шестиугольником 3, шестиугольник 1 с шестиугольником 4, а шестиугольник 2 с шестиугольником 5. Следовательно, частичное изображение карты M должно выглядеть так, как показано на рис. 4.7 справа. Мы скоро увидим, что это частичное изображение однозначно определяет полную карту M .

Выберем для каждого шестиугольника произвольную ориентацию. Затем выпишем шесть соседей шестиугольника 0 в циклическом порядке согласно данной ориентации: 4 2 1 5 3 6. То же самое сделаем для

других шестиугольников. Для шестиугольника 3 получаем частичные последовательности 4 1 2 6 и 6 0 5 или 5 0 6. Но так как 6 может появляться только один раз, то общая последовательность имеет вид 4 1 2 6 0 5.

Частичное изображение, данное на рис. 4.7, полностью определяет все циклические последовательности:

$$(4.22) \begin{array}{l} 0. \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 5 \quad 3 \quad 6 \\ 1. \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 5 \quad 0 \\ 2. \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ 3. \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 5 \\ 4. \quad 5 \quad 2 \quad 0 \quad 6 \quad 1 \quad 3 \\ 5. \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 6 \quad 2 \quad 4 \\ 6. \quad 5 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

Рис. 4.8 показывает, что в схеме (4.22) должно выполняться следующее

Правило R. Если в строке i имеем $i \dots j k l \dots$, то в строке k должно быть $k \dots l i j \dots$ или $k \dots \dots j i l \dots$.

Можно проверить, что правило R выполняется для любой пары элементов i, k в схеме (4.22). Поэтому

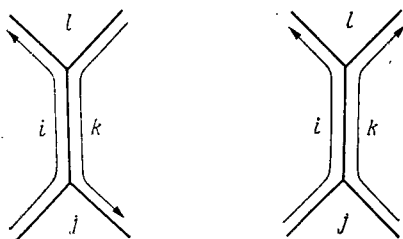


Рис. 4.8.

пока наше предположение непротиворечиво. Но если проверить еще раз, то легко обнаружить, что выполняется даже более сильное правило R^* (см. также § 2.3).

Правило R^* . Если $i \dots j k l \dots$, то $k \dots l i j \dots$.

Но это означает, что карта M ориентируема, что противоречит условию. Таким образом, теорема 4.11 доказана. Схема (4.22) совпадает на самом деле после соответствующей перенумерации со схемой (2.7).

Мы показали, что граф K_7 нельзя вложить в поверхность N_2 . Чтобы показать, что граф K_7 можно вложить в поверхность N_3 , рассмотрим рис. 1.12. Так как все семь стран на изображенной карте являются попарно соседними, то 1-скелет двойственной карты

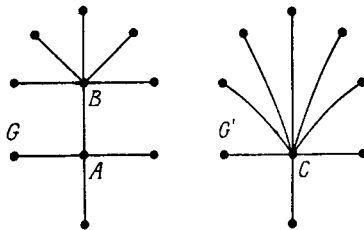


Рис. 4.9.

содержит граф K_7 в качестве подграфа. Но на рис. 1.12 изображена карта на поверхности M_3 , которая является частью поверхности N_3 . Поэтому граф K_7 можно вложить в поверхность N_3 . Это означает, что $\bar{\gamma}(K_7) = 3$, и тем самым (4.19) доказано для $n = 7$. Так как граф K_7 можно вложить в тор S_1 , то, добавляя к тору одну пленку Мёбиуса, получаем еще одно вложение графа K_7 в поверхность N_3 .

Прежде чем определить хроматическое число бутылки Клейна, нам необходимо объяснить одну операцию из теории графов. Пусть G — некоторый граф и c — его ребро, инцидентное вершинам A и B . Рассмотрим следующий граф G' . Множество вершин графа G' состоит из вершин графа G — A — B и одной новой вершины C . Ребрами графа G' являются все ребра графа G — A — B и новые ребра PC для каждой вершины P , смежной с вершиной A или вершиной B в графе G (см. рис. 4.9).

Мы будем говорить, что граф G' получен из графа G стягиванием ребра c . Число ребер в графе G' меньше, чем в графе G . (Если вершина P смежна в графе G с *обеими* вершинами A и B , то в графе G' имеется только *одно* ребро из вершины P в вершину C .)

Предположим, что граф G можно вложить в поверхность S . Стягивание можно легко произвести на поверхности, так что граф G' тоже можно вложить в поверхность S . При этом стягивание можно выполнить с использованием только элементарных операций, подобно тому как это сделано на рис. 4.6.

ТЕОРЕМА 4.12. *Хроматическое число бутылки Клейна равно 6.*

Доказательство. Если мы применим теорему 4.8 к $E(N_2) = 0$, то получим только, что

$$\chi(N_2) \leq 7.$$

Так как полный граф K_6 можно вложить в поверхность N_1 (рис. 1.9), то граф K_6 тоже можно вложить в поверхность N_2 . Следовательно,

$$6 \leq \chi(N_2).$$

Допустим теперь, что $\chi(N_2) = 7$. Это означает, что существует некоторый граф, который вкладывается в поверхность N_2 и хроматическое число которого равно 7. Можно считать, что этот граф имеет минимальное возможное число вершин. Рассмотрим критический подграф G , для которого все еще $\chi(G) = 7$. Обозначим число вершин и ребер в графе G через α_0 и α_1 . Так как граф G вкладывается в поверхность N_2 , то по теореме 4.2

$$\alpha_1 \leq 3\alpha_0.$$

Поскольку G — критический граф с хроматическим числом $\chi = 7$, из теоремы 2.4 вытекает, что $(\chi - 1)\alpha_0 \leq 2\alpha_1$, откуда

$$3\alpha_0 \leq \alpha_1.$$

Следовательно,

$$(4.23) \quad 3\alpha_0 = \alpha_1.$$

По теореме 2.3 степень каждой вершины графа G не меньше 6. Отсюда по теореме 2.1 получаем

$$6\alpha_0 = \sum_{i=1}^{\alpha_0} 6 \leq \sum_{i=1}^{\alpha_0} \text{val } P_i = 2\alpha_1,$$

причем равенство может выполняться, только если $\text{val } P_i = 6$ для всех i . Так как, согласно (4.23), равенство действительно выполняется, то степени всех вершин графа G равны 6. Будем говорить, что граф G шестивалентен.

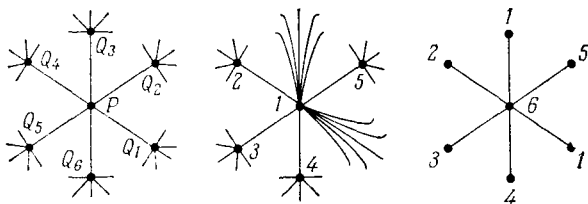


Рис. 4.10.

Рассмотрим некоторую вершину P графа G и соседние с ней вершины $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$. Среди них найдется пара вершин, скажем Q_1 и Q_3 , не смежных в графе G . В противном случае мы имели бы вложение графа K_7 в поверхность N_2 , что противоречит теореме 4.11. Стянем сначала ребро PQ_1 , а затем ребро PQ_3 (см. рис. 4.10). Полученный граф G' вкладывается в поверхность N_2 и имеет меньше вершин, чем G . Следовательно, $\chi(G') \leq 6$, так как граф G имел минимальное возможное число вершин α_0 .

Рассмотрим раскраску вершин графа G' в 6 цветов. По ней легко построить раскраску исходного графа G . Придадим вершинам Q_1 и Q_3 тот цвет, которым окрашена вершина P в графе G' . Остальные вершины, отличные от P , окрасим так же, как в графе G' . Тогда 6 соседей вершины P будут окрашены пятью

или меньше цветами (вершины Q_1 и Q_3 имеют один и тот же цвет). Поэтому вершине P можно приписать шестой цвет. Мы получили раскраску графа G в шесть цветов. Следовательно, хроматическое число поверхности N_2 равно 6.

Упражнения

4.6.1. Докажите, что любой граф G с хроматическим числом $\chi(G) = 7$, который можно вложить в тор, содержит подграф, изоморфный графу K_7 .

4.6.2. Пусть G — некоторый граф и G' — граф, полученный из G стягиванием ребра. Если граф G можно вложить в некоторую поверхность S , то и граф G' можно вложить в S . Приведите пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

4.6.3. Если граф имеет вершины только степеней 5 и 6 и число вершин степени 5 меньше, чем 12, то граф не является планарным. Докажите.

Б. КОМБИНАТОРИКА ВЛОЖЕНИЙ

Б1. ТРЕУГОЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ

Согласно теоремам 4.9 и 4.10, для доказательства теоремы о раскраске карт нам нужно только определить род и неориентируемый род полного графа K_n . Это означает, что мы должны доказать равенства (4.13) и (4.19). Обозначим правую часть в (4.13) через p , а правую часть в (4.19) через q . Мы должны построить вложение графа K_n в поверхности S_p и N_q . В следующей таблице приведены значения p и q для небольших значений n .

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
p	1*	2	3	4	5	6*	8	10	11*	13*	16	18	20*	23	26	29

n	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
q	1*	4	5*	7*	10	12*	15*	19	22*	26*	31	35*	40*	46	51*	57*

Чтобы получить нижние оценки для $\gamma(K_n)$ и $\bar{\gamma}(K_n)$, мы должны построить вложения $K_8 \subset S_2$, $K_9 \subset S_3$ и т. д. и $K_8 \subset N_4$, $K_9 \subset N_5$ и т. д. Чтобы представить четыре указанных вложения, можно было бы воспользоваться рисунками, как мы и поступили для вложения $K_7 \subset S_1$. Но поскольку n — произвольное целое число и может принимать большие значения, требуется, конечно, другой метод доказательства существования таких вложений.

Звездочка в приведенной выше таблице означает, что соответствующее число n обладает тем свойством, что $(n-3)(n-4)$ делится на 12 в ориентируемом случае и $(n-3)(n-4)$ делится на 6 в неориентируе-

мом случае. Это имеет место только при

$$(5.1) \quad n \equiv 0, 3, 4 \text{ или } 7 \pmod{12}$$

для ориентируемых поверхностей и при

$$(5.2) \quad n \equiv 0 \text{ или } 1 \pmod{3}$$

для неориентируемых поверхностей. Это *регулярные* случаи.

Выражение $G \triangleleft S$ будет обозначать, что существует треугольное вложение графа G в поверхность S .

Для регулярных случаев выполняется равенство $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S)$. Следовательно, по теореме 4.3 получаем:

если $K_n \subset S_p$ и $p = (n-3)(n-4)/12$, то $K_n \triangleleft S_p$;

если $K_n \subset N_q$ и $q = (n-3)(n-4)/6$, то $K_n \triangleleft N_q$.

Это означает, что в регулярном случае мы должны найти треугольное вложение графа K_n в некоторую ориентируемую поверхность S_p и в некоторую неориентируемую поверхность N_q . Тогда из теоремы 4.4 вытекает, что $p = (n-3)(n-4)/12$ и $q = (n-3) \times (n-4)/6$. Во всех остальных случаях треугольное вложение заведомо не существует. Из (5.1) и (5.2) видно, что для неориентируемых поверхностей регулярных случаев «больше», чем для ориентируемых. Это позволяет намного легче справиться с неориентируемыми поверхностями.

Сейчас мы объясним простой, но очень сильный метод комбинаторного описания данного треугольного вложения графа.

Пусть $K_n \triangleleft S$, и пусть S — произвольная ориентируемая или неориентируемая поверхность. Тогда карта, двойственная этому вложению, состоит из n стран. Каждая из них граничит с любой другой страной ровно по одному ребру, следовательно, каждая страна является $(n-1)$ -угольником. Кроме того, каждая вершина имеет степень 3. Обозначим страны числами $0, 1, \dots, n-1$. Затем выберем некоторую orienta-

цию для каждой страны. Запишем в циклическом порядке страны, соседние со страной 0. (Мы уже делали это в § 4.6.) Получим некоторую перестановку чисел $1, 2, \dots, n-1$. То же самое сделаем для других стран. В результате получим некоторую схему. Схема (5.3) дает пример для $n = 6$:

$$(5.3) \quad \begin{array}{r} 0. \\ 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \end{array} \begin{array}{cccccc} 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 3 & \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 4 & \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 0 & \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

Полученную схему можно рассматривать как некоторое вращение графа K_6 или, в общем случае, графа K_n . Напомним, что мы описывали вращения графов схемами в § 2.2. Предположим, что мы получили схему (5.3) из некоторого вложения $K_6 \triangleleft S$ описанным способом. Рис. 4.8 показывает, что в ней должно выполняться правило R из § 4.6. Конечно, это верно не только для случая $n = 6$.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 5.1. *Если $K_n \triangleleft S$, то существует такое вращение графа K_n , что описывающая его схема удовлетворяет правилу R .*

Намного более важным является следующее обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. *Если в схеме, описывающей некоторое вращение графа K_n , выполняется правило R , то существует такая поверхность S , что $K_n \triangleleft S$.*

Доказательство. Пусть существует вращение графа K_n , удовлетворяющее правилу R . Мы объясним доказательство на примере $n = 6$. По данной схеме (5.3)

построим следующую таблицу:

$$(5.4) \quad \begin{array}{ccccc} c_{03} & c_{01} & c_{05} & c_{04} & c_{02} \\ c_{14} & c_{12} & c_{15} & c_{10} & c_{13} \\ c_{20} & c_{23} & c_{25} & c_{21} & c_{24} \\ c_{31} & c_{34} & c_{35} & c_{32} & c_{30} \\ c_{42} & c_{40} & c_{45} & c_{43} & c_{41} \\ c_{50} & c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} \end{array}$$

В ней первый индекс буквы c — это номер строки, а второй — число, которое стоит на соответствующем месте в строке i в схеме (5.3) ($i = 0, 1, \dots$).

Положим

$$c_{ik} = c_{ki}, \quad \text{если в схеме (5.3) имеем } \begin{cases} i. \dots j k l \dots \\ k. \dots j i l \dots \end{cases}$$

$$c_{ik} = c_{ki}^{-1}, \quad \text{если в схеме (5.3) имеем } \begin{cases} i. \dots j k l \dots \\ k. \dots l i j \dots \end{cases}$$

Каждая буква c_{ik} появляется теперь в схеме (5.4) ровно два раза. Следовательно, схему (5.4) можно рассматривать как символическое представление некоторого полиэдра P , состоящего из шести пятиугольников. Все они являются попарно соседними. Например, страна i граничит со страной k по ребру c_{ik} . Нам осталось доказать, что каждая вершина полиэдра P имеет степень 3.

Рассмотрим любые два последовательных числа j, k в строке i схемы (5.3). Тогда вследствие правила R в схеме (5.3) имеем одну из четырех возможностей:

$$\begin{array}{ll} i. \dots j k \dots & i. \dots j k \dots \\ j. \dots i k \dots & j. \dots i k \dots \\ k. \dots i j \dots & k. \dots j i \dots \\ \\ i. \dots j k \dots & i. \dots j k \dots \\ j. \dots k i \dots & j. \dots k i \dots \\ k. \dots i j \dots & k. \dots j i \dots \end{array}$$

Это соответствует одной из четырех возможностей в схеме (5.4):

$$\begin{array}{ll}
 \dots c_{ij} c_{ik} \dots & \dots c_{ij} c_{ik} \dots \\
 \dots c_{ij} c_{jk} \dots & \dots c_{ij} c_{jk} \dots \\
 \dots c_{ik}^{-1} c_{jk} \dots & \dots c_{jk}^{-1} c_{ik} \dots \\
 \dots c_{ij} c_{ik} \dots & \dots c_{ij} c_{ik} \dots \\
 \dots c_{jk} c_{ij}^{-1} \dots & \dots c_{jk} c_{ij}^{-1} \dots \\
 \dots c_{ik}^{-1} c_{jk}^{-1} \dots & \dots c_{jk} c_{ik} \dots
 \end{array}$$

Легко проверить, что во всех четырех случаях вершина страны i , инцидентная двум сторонам c_{ij} и c_{ik} , отождествляется ровно с двумя другими вершинами. Рис. 5.1 иллюстрирует это для первого случая.

Карта, двойственная полиэдру P , является треугольным вложением графа K_6 в некоторую поверхность. В общем случае она является треугольным вложением графа K_n в подходящую поверхность.

В качестве первого применения теоремы 5.2 рассмотрим схему

$$\begin{array}{l}
 (5.5) \quad \begin{array}{cccccccc}
 0. & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 & 8 & 3 & 2 \\
 3. & 4 & 7 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 & 5 \\
 6. & 7 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 0 & 8 \\
 1. & 8 & 5 & 2 & 0 & 4 & 6 & 7 & 3 \\
 4. & 2 & 8 & 5 & 3 & 7 & 0 & 1 & 6 \\
 7. & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 3 & 4 & 0 \\
 2. & 6 & 3 & 0 & 1 & 5 & 7 & 8 & 4 \\
 5. & 0 & 6 & 3 & 4 & 8 & 1 & 2 & 7 \\
 8. & 3 & 0 & 6 & 7 & 2 & 4 & 5 & 1
 \end{array}
 \end{array}$$

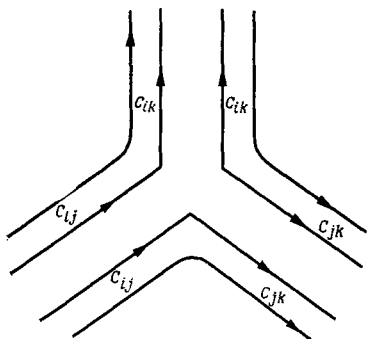
которая удовлетворяет правилу R . Схема (5.5) описывает треугольное вложение графа K_9 в некоторую поверхность S , которая должна быть неориентируемой, так как случай $n = 9$ не является регулярным для ориентируемых поверхностей. По теореме 4.4 находим род $q = 5$, следовательно, $K_9 \triangleleft N_5$.

Обе теоремы 5.1 и 5.2 допускают очевидные обобщения: вместо полного графа K_n можно рассматривать произвольный граф G . Пусть S — некоторая поверхность.

ТЕОРЕМА 5.3. Если $G \triangleleft S$, то существует такое вращение графа G , что схема этого вращения удовлетворяет правилу R .

ТЕОРЕМА 5.4. Если схема для некоторого вращения графа G удовлетворяет правилу R , то существует такая поверхность S , что $G \triangleleft S$.

Для доказательства обеих теорем можно воспользоваться доказательствами теорем 5.1 и 5.2, так как



Р и с. 5.1.

в них мы нигде не опирались на тот факт, что граф K_n полный.

Например, схема

$$\begin{array}{l}
 (5.6) \quad \begin{array}{l}
 0. \quad 3 \quad 1 \quad 7 \quad 2 \quad 5 \quad 6 \quad 9 \quad 4 \\
 1. \quad 4 \quad 2 \quad 6 \quad 8 \quad 3 \quad 0 \quad 7 \quad 5 \\
 2. \quad 5 \quad 3 \quad 6 \quad 1 \quad 4 \quad 7 \quad 0 \\
 3. \quad 0 \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad 5 \quad 7 \quad 8 \quad 1 \\
 4. \quad 1 \quad 5 \quad 6 \quad 3 \quad 0 \quad 9 \quad 7 \quad 2 \\
 5. \quad 2 \quad 0 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad 7 \quad 3 \\
 6. \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \quad 9 \quad 7 \quad 8 \\
 7. \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 5 \quad 3 \quad 8 \quad 6 \quad 9 \quad 4 \\
 8. \quad 3 \quad 1 \quad 6 \quad 7 \\
 9. \quad 4 \quad 0 \quad 6 \quad 7
 \end{array}
 \end{array}$$

удовлетворяет правилу R . Следовательно, она представляет треугольное вложение некоторого графа G

в некоторую поверхность S . Заметим, что вершины $0, 1, \dots, 7$ попарно смежны в графе G . Следовательно, G содержит в качестве подграфа граф K_8 . Для графа G легко получаем, что $\alpha_0 = 10$, $\alpha_1 = 36$. По теореме 4.4 $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S)$. Поэтому $E(S) = -2$. Как установить, ориентируема или нет поверхность S ? Эйлерова характеристика не дает никакой информации об этом, так как является четным числом.

Если можно изменить циклический порядок чисел в некоторых строках схемы (5.6) на противоположный так, чтобы выполнялось правило R^* из § 2.2, то S — ориентируемая поверхность (ср. с рис. 4.8). В противном случае она неориентируема. Рассмотрим следующую часть схемы (5.6):

1.	4	2	6	8	3	0	.	.
2.	5	3	6	1	4	.	.	
3.	.	.	6	2	5	.	8	1 0

Какую бы ориентацию в этих трех строках мы ни выбирали, правило R^* не выполняется хотя бы для одной из трех пар строк. Следовательно, схема (5.6) представляет неориентируемую поверхность, и мы получаем вложение $K_8 \subset N_4$. Вместе с неравенством (4.18) это показывает, что $\bar{\gamma}(K_8) = 4$.

Если мы ограничим теорему 5.3 только на ориентируемые поверхности, то получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.5. *Если $G \triangleleft S$ и S — ориентируемая поверхность, то существует треугольное вращение графа G .*

Напомним, что вращение графа G называется треугольным в том случае, если схема удовлетворяет правилу R^* .

Если мы ограничим теорему 5.4 только на треугольные вращения, то получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.6. *Если существует треугольное вращение графа G , то существует треугольное вложение графа G в некоторую ориентируемую поверхность.*

Если $n \equiv 7 \pmod{12}$, то теорема 2.8 утверждает, что существует треугольное вращение графа K_n . Сле-

довательно, по теореме 5.6 существует вложение $K_n \triangleleft S_p$, где $p = (n - 3)(n - 4)/12$ (см. теорему 4.4). Вместе с (4.12) это доказывает равенство (4.13) для всех $n \equiv 7 \pmod{12}$.

Для каждого из остальных классов вычетов $(\text{mod } 12)$ мы докажем равенство (4.13) отдельно. В некоторых случаях для малых значений n предлагаемый метод не работает. Вначале мы рассмотрим эти особые случаи.

5.2. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ ОСОБЫЕ СЛУЧАИ

В этом параграфе мы определим род полного графа K_n для специальных случаев $n = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 18, 20$ и 23 . Это те случаи (кроме $9, 10, 12$), где общий метод не работает. Для трех случаев $18, 20$ и 23 решение было найдено Ж. Мейером [1].

$n = 8$. Схема (2.9) не удовлетворяет правилу R^* . Но если преобразовать ее к виду

$$(5.7) \quad \begin{array}{cccccccc} 0. & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & x \\ 2. & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 7 & 0 & x \\ 4. & 6 & 3 & 7 & 5 & 0 & 1 & 2 & x \\ 6. & 0 & 5 & 1 & 7 & 2 & 3 & 4 & x \\ 1. & 7 & 6 & 5 & 2 & 4 & 0 & 3 & x \\ 3. & 1 & 0 & 7 & 4 & 6 & 2 & 5 & x \\ 5. & 3 & 2 & 1 & 6 & 0 & 4 & 7 & x \\ 7. & 5 & 4 & 3 & 0 & 2 & 6 & 1 & x \\ x. & (6 & 4 & 2 & 0) & (1 & 3 & 5 & 7) \end{array}$$

то правило R^* будет выполняться, если считать, что строка x состоит из двух циклов. Для того чтобы понять эту схему (5.7), заменим строку x двумя строками: $x_0. 6 4 2 0$ и $x_1. 1 3 5 7$, а букву x заменим буквой x_0 в строках $0, 2, 4, 6$ и буквой x_1 в строках $1, 3, 5, 7$. Тогда схема (5.7) будет представлять треугольное вращение для некоторого графа G , который содержит в качестве подграфа граф K_8 .

Теорема 5.6 утверждает, что граф G допускает треугольное вложение в некоторую ориентируемую по-

верхность. Так как $\alpha_0 = 10$ и $\alpha_1 = 4 \cdot 7 + 8 = 36$, то по теореме 4.4 получаем, что $p = 2$. Следовательно, $K_8 \subset S_2$. Вместе с неравенством (4.12) это дает $\gamma(K_8) = 2$.

$n = 9$. Воспользуемся той же схемой (5.7) и рассмотрим двойственную карту. Вырежем два четырехугольника x_0 и x_1 . В результате получим поверхность с двумя дырками. отождествим границы этих двух дырок с граничными кривыми дополнительного цилиндра так, чтобы получилась ориентируемая поверхность. Это в точности поверхность S_3 . Обозначим добавленный цилиндр через x . Тогда все области $1, 2, \dots, 8, x$ являются соседними друг к другу. Хотя x не является страной, отсюда легко получить вложение графа K_9 в поверхность S_3 . А именно, надо поступать так же, как при доказательстве теоремы 4.6.

$n = 10$. Схема (2.8) из гл. 2 дает треугольное вложение графа $K_{10} - K_3$ в некоторую ориентируемую поверхность S_p . Используя теорему 4.4, получаем $p = 3$. Однако по формуле (4.12) $\gamma(K_{10}) \geq 4$, и нам нужно доказать, что $\gamma(K_{10}) = 4$. Это означает, что мы можем использовать только одну ручку, чтобы связать вершины x, y, z друг с другом ребрами. Мы назовем это *проблемой добавления соседства*. Можно проделать это следующим образом. Рассмотрим карту, двойственную вложению $K_{10} - K_3 \triangleleft S_3$. Все вершины этой карты имеют степень 3, и страны x, y, z не являются соседними. На рис. 5.2 показана окрестность страны 0, которая получена в соответствии со схемой (2.8). В правой части рис. 5.2 представлена некоторая карта на торе. Заметим, что страна 0 как бы разрезана на четыре части, но на самом деле это единая страна на торе. Вернемся к поверхности, нарисованной слева, и вырежем страну 0. То же самое сделаем со страной t на торе. Очевидным образом отождествим границы двух полученных поверхностей. При этом получим новую страну, названную 0, которая является соседней с теми же странами, что и прежняя страна 0. Заметим, что мы добились соседства между x, y и z .

Итак, мы построили карту с 10 попарно соседними странами на поверхности S_4 . Следовательно, $\gamma(K_{10}) = 4$.

$n = 12s + 10$. Совершенно такой же метод работает и в общем случае $n = 12s + 10$. В гл. 2 мы построили треугольное вращение графа $K_{12s+10} - K_3$

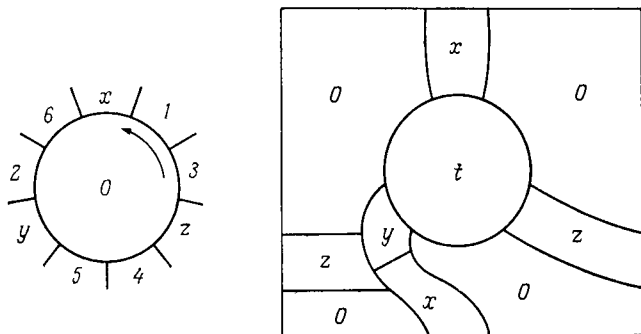


Рис. 5.2.

(теорема 2.9). Этим определяется вложение $K_{12s+10} - K_3 \triangleleft S_p$, причем $\alpha_1 = (6s + 5)(12s + 9) - 3$ и $\alpha_0 = 12s + 10$. Используя формулу $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S)$ из теоремы 4.4, получаем

$$\begin{aligned} (6s + 5)(12s + 9) - 3 &= 3(12s + 10) - 6 + 6p, \\ 6p &= 72s^2 + 78s + 21 - 3 = (12s + 7)(6s + 3) - 3, \\ 12p &= (n - 3)(n - 4) - 6. \end{aligned}$$

Таким образом, p на единицу меньше, чем правая часть неравенства (4.12). Поэтому мы имеем в своем распоряжении одну ручку, для того чтобы получить три недостающих соседства между x , y и z . Это делается точно так же, как в предыдущем частном случае $n = 10$. Тем самым завершается доказательство равенства (4.13) для всех $n \equiv 10 \pmod{12}$.

В следующих случаях мы опустим вычисление рода p , так как у нас уже было достаточно примеров. Надо только воспользоваться теоремой 4.4 и неравенством (4.12).

$n = 11$. Следующая схема удовлетворяет правилу R^* . Легко вычислить род соответствующей ориентируемой поверхности: $\rho = 5$.

1.	4	10	5	7	x	3	2	6	9	8	11
2.	4	5	11	y	8	10	6	1	3	7	9
3.	5	6	10	7	2	1	x	8	4	11	9
4.	6	7	10	1	11	3	8	5	2	9	
5.	7	1	10	11	2	4	8	6	3	9	
6.	1	2	10	3	5	8	y	11	7	4	9
7.	2	3	10	4	6	11	8	x	1	5	9
8.	x	7	11	1	9	10	2	y	6	5	4 3
9.	3	11	10	8	1	6	4	2	7	5	
10.	5	1	4	7	3	6	2	8	9	11	
11.	9	3	4	1	8	7	6	y	2	5	10
x.	1	7	8	3							
y.	2	11	6	8							

Так как первые 11 вершин (или, в двойственной форме, первые 11 стран) попарно смежны, то $\gamma(K_{11}) = 5$.

$n = 12$. Это регулярный случай. Схема

0.	5	7	2	1	11	8	4	3	9	6	10
4.	9	11	6	5	3	0	8	7	1	10.	2
8.	1	3	10	9	7	4	0	11	5	2	6
1.	8	6	11	0	2	5	9	10	4	7	3
5.	0	10	3	4	6	9	1	2	8	11	7
9.	4	2	7	8	10	1	5	6	0	3	11
2.	3	6	8	5	1	0	7	9	4	10	11
6.	7	10	0	9	5	4	11	1	8	2	3
10.	11	2	4	1	9	8	3	5	0	6	7
3.	2	11	9	0	4	5	10	8	1	7	6
7.	6	3	1	4	8	9	2	0	5	11	10
11.	10	7	5	8	0	1	6	4	9	3	2

описывает треугольное вложение графа K_{12} в поверхность S_6 .

$n = 13$. Схема

1.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
2.	5	3	1	13	7	11	8	12	9	x	4	10	6
3.	4	1	2	5	11	10	7	13	9	6	12	8	
4.	1	3	8	6	9	12	7	10	2	x	11	13	5
5.	11	3	2	6	1	4	13	12	10	8	7	9	
6.	12	3	9	4	8	13	11	7	1	5	2	10	
7.	4	12	x	9	5	8	1	6	11	2	13	3	10
8.	2	11	9	1	7	5	10	13	6	4	3	12	
9.	10	1	8	11	5	7	x	2	12	4	6	3	13
10.	3	11	1	9	13	8	5	12	6	2	4	7	
11.	10	3	5	9	8	2	7	6	13	4	x	12	1
12.	7	4	9	2	8	3	6	10	5	13	1	11	x
13.	6	8	10	9	3	7	2	1	12	5	4	11	
x.	7	12	11	4	2	9							

описывает треугольное вложение некоторого графа в поверхность S_8 . Этот граф содержит в качестве подграфа граф K_{13} . Следовательно, $\gamma(K_{13}) = 8$.

 $n = 14$. Схема

0.	6	2	7	5	10	4	1	y	3	11	x	9	8
2.	8	4	9	7	0	6	3	y	5	1	x	11	10
4.	10	6	11	9	2	8	5	y	7	3	x	1	0
6.	0	8	1	11	4	10	7	y	9	5	x	3	2
8.	2	10	3	1	6	0	9	y	11	7	x	5	4
10.	4	0	5	3	8	2	11	y	1	9	x	7	6
1.	7	11	6	8	3	9	10	y	0	4	x	2	5
3.	9	1	8	10	5	11	0	y	2	6	x	4	7
5.	11	3	10	0	7	1	2	y	4	8	x	6	9
7.	1	5	0	2	9	3	4	y	6	10	x	8	11
9.	3	7	2	4	11	5	6	y	8	0	x	10	1
11.	5	9	4	6	1	7	8	y	10	2	x	0	3
x.	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	0	11	
y.	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1	

задает треугольное вложение графа $K_{14} - K_2$ или, в двойственной форме, — карту с 14 странами. Только две страны x и y не являются соседними. Род этой карты равен 9. С помощью одной дополнительной ручки можно добиться соседства x с y . Следовательно, $\gamma(K_{14}) \leq 10$. Из (4.12) мы знаем, что выполняется также обратное неравенство. Поэтому $\gamma(K_{14}) = 10$. В гл. 9 мы опишем, как получить эту схему для $n = 14$, используя граф токов.

$n = 18, 20$ и 23 . Эти три специальных случая являются, к сожалению, весьма нерегулярными. Они совсем не имеют симметрий. В схеме для $n = 18$ строка 5 представлена как два цикла. Так же как в случае $n = 9$, эту схему можно интерпретировать как карту, имеющую 17 стран и одну цилиндрическую область. Все 18 областей являются попарно соседними.

	$n = 18$						$p = 18$										
1.	14	17	9	18	7	5	12	4	13	10	6	2	11	8	3	16	15
2.	1	6	9	8	16	12	10	5	13	14	7	17	18	4	15	3	11
3.	1	8	4	18	9	7	14	5	6	11	2	15	10	17	13	12	16
4.	1	12	15	2	18	3	8	10	9	5	7	11	17	14	6	16	13
5.	(4	9	12	1	7)	(6	3	14	15	13	2	10	8	17	11	16	18)
6.	1	10	16	4	14	11	3	5	18	8	13	17	12	7	15	9	2
7.	1	18	16	17	2	14	3	9	10	13	15	6	12	8	11	4	5
8.	1	11	7	12	14	16	2	9	13	6	18	15	17	5	10	4	3
9.	1	17	16	14	13	8	2	6	15	11	12	5	4	10	7	3	18
10.	1	13	7	9	4	8	5	2	12	11	14	18	17	3	15	16	6
11.	1	2	3	6	14	10	12	9	15	18	13	16	5	17	4	7	8
12.	1	5	9	11	10	2	16	3	13	18	14	8	7	6	17	15	4
13.	1	4	16	11	18	12	3	17	6	8	9	14	2	5	15	7	10
14.	1	15	5	3	7	2	13	9	16	8	12	18	10	11	6	4	17
15.	1	16	10	3	2	4	12	17	8	18	11	9	6	7	13	5	14
16.	1	3	12	2	8	14	9	17	7	18	5	11	13	4	6	10	15
17.	1	14	4	11	5	8	15	12	6	13	3	10	18	2	7	16	9
18.	1	9	3	4	2	17	10	14	12	13	11	15	8	6	5	16	7

	$n = 20$						$p = 23$												
1.	8	4	5	17	11	16	15	19	6	14	9	3	20	2	12	13	7	10	18
2.	1	20	9	11	5	13	3	16	19	7	15	6	4	14	18	10	8	17	12
3.	1	9	4	19	5	7	11	17	15	10	12	16	2	13	14	6	8	18	20

4 1 8 14 2 6 13 17 18 11 12 19 3 9 20 10 15 16 7 5
 5 1 4 7 3 19 10 9 14 16 20 13 2 11 x 8 15 12 6 18 17
 6. 1 19 17 10 16 13 4 2 15 9 18 5 12 7 20 11 8 3 14
 7. 1 13 15 2 19 18 14 17 20 6 12 8 11 3 5 4 16 9 10
 8. 1 18 3 6 11 7 12 20 17 2 10 13 9 15 5 x 19 16 14 4
 9. 1 14 5 10 7 16 17 19 12 18 6 15 8 13 11 2 20 4 3
 10. 1 7 9 5 19 11 14 12 3 15 4 20 16 6 17 13 8 2 18
 11. 1 17 3 7 8 6 20 15 14 10 19 x 5 2 9 13 12 4 18 16
 12. 1 2 17 16 3 10 14 20 8 7 6 5 15 18 9 19 4 11 13
 13. 1 12 11 9 8 10 17 4 6 16 18 19 14 3 2 5 20 y 15 7
 14. 1 6 3 13 19 20 12 10 11 15 17 7 18 2 4 8 16 5 9
 15. 1 16 4 10 3 17 14 11 20 18 12 5 8 9 6 2 7 13 y 19
 16. 1 11 18 13 6 10 20 5 14 8 19 2 3 12 17 9 7 4 15
 17. 1 5 18 4 13 10 6 19 9 16 12 2 8 20 7 14 15 3 11
 18. 1 10 2 14 7 19 13 16 11 4 17 5 6 9 12 15 20 3 8
 19. 1 15 y 20 14 13 18 7 2 16 8 x 11 10 5 3 4 12 9 17 6
 20. 1 3 18 15 11 6 7 17 8 12 14 19 y 13 5 16 10 4 9 2
 x. 5 11 19 8
 y. 15 13 20 19

$n=23$

$p=32$

23 19 12 17 6 9 2 7 18 20 8 5 16 14 3 11 22 21 15 13 4 10
 1 9 20 15 4 11 5 13 3 16 19 6 21 22 17 14 10 8 18 23 12 7
 1 14 23 5 17 15 10 22 16 2 13 18 6 8 20 9 19 4 12 21 7 11
 1 13 22 18 9 11 2 15 23 6 16 8 7 14 17 21 20 5 12 3 19 10
 1 8 12 4 20 6 15 18 22 19 17 3 23 7 21 9 14 13 2 11 10 x
 1 17 10 16 4 23 13 21 2 19 15 5 20 12 11 7 22 y 8 3 18 14
 1 2 12 13 15 19 14 4 8 17 20 22 6 11 3 21 5 23 16 9 10 18
 1 20 3 6 y 23 14 22 9 17 7 4 16 21 18 2 10 13 19 11 15 12
 1 6 14 5 21 13 17 8 22 12 23 10 7 16 15 11 4 18 19 3 20 2
 1 4 19 x 5 11 21 12 22 3 15 20 16 6 17 13 8 2 14 18 7 9
 1 3 7 6 12 14 21 10 5 2 4 9 15 8 19 18 17 16 13 20 23 22
 1 19 13 7 2 23 9 22 10 21 3 4 5 8 15 14 11 6 20 18 16 17
 1 15 7 12 19 8 10 17 9 21 6 23 18 3 2 5 14 20 11 16 22 4
 1 16 20 13 5 9 6 18 10 2 17 4 7 19 21 11 12 15 22 8 23 3
 1 21 23 4 2 20 10 3 17 22 14 12 8 11 9 16 18 5 6 19 7 13
 1 5 x 19 2 3 22 13 11 17 12 18 15 9 7 23 21 8 4 6 10 20
 1 12 16 11 18 21 4 14 2 22 15 3 5 19 23 20 7 8 9 13 10 6
 1 7 10 14 6 3 13 23 2 8 21 17 11 19 9 4 22 5 15 16 12 20
 1 23 17 5 22 20 21 14 7 15 6 2 16 x 10 4 3 9 18 11 8 13
 1 18 12 6 5 4 21 19 22 7 17 23 11 13 14 16 10 15 2 9 3 8
 1 22 2 6 13 9 5 7 3 12 10 11 14 19 20 4 17 18 8 16 23 15
 1 11 23 y 6 7 20 19 5 18 4 13 16 3 10 12 9 8 14 15 17 2
 1 10 9 12 2 18 13 6 4 15 21 16 7 5 3 14 8 j 22 11 20 17
 5 10 19 16
 6 22 23 8

5.3. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ

Для того чтобы определить род полного графа K_n , необходимо найти некоторое вложение графа K_n в ориентируемую поверхность минимального рода. Если $n \equiv 0, 3, 4$ и $7 \pmod{12}$, то можно рассчитывать, что такое вложение будет треугольным. Для этих регулярных случаев мы уже построили (в гл. 2) или построим (в гл. 6, 9, 11) такие треугольные вложения графа K_n в ориентируемую поверхность.

Но как быть в остальных случаях? У нас есть хорошие методы построения треугольных вращений (или ориентируемых вложений) для графов. Однако мы знаем, что в нерегулярных случаях не существует треугольного вращения графа K_n . Как мы видели в случаях $n = 10$ и $n = 14$, сначала строилось вложение некоторого подграфа графа K_n . После этого нам удавалось получить недостающие соседства, используя одну дополнительную ручку. Обсудим теперь, какие возможности у нас есть для применения подобного метода в других нерегулярных случаях.

Допустим, что для графа, полученного из графа K_n удалением t ребер, существует треугольное вложение в ориентируемую поверхность S_p . Запишем это символически:

$$K_n - t \text{ ребер} \triangleleft S_p.$$

По формуле $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 6 + 6p$ из теоремы 4.4 получаем

$$\begin{aligned} n(n-1) - 2t &= 6n + 12p - 12, \\ (n-3)(n-4) &\equiv 2t \pmod{12}. \end{aligned}$$

Это дает четыре группы случаев:

- (а) если $n \equiv 0, 3, 4$ или $7 \pmod{12}$, то $t \equiv 0 \pmod{6}$;
- (б) если $n \equiv 2$ или $5 \pmod{12}$, то $t \equiv 1 \pmod{6}$;
- (в) если $n \equiv 1, 6, 9$ или $10 \pmod{12}$, то $t \equiv 3 \pmod{6}$;
- (г) если $n \equiv 8$ или $11 \pmod{12}$, то $t \equiv 4 \pmod{6}$.

В двух случаях из группы (b) естественно попытаться построить треугольное вложение графа $K_n - K_2$. Мы сможем это сделать для $n \equiv 5 \pmod{12}$ в гл. 9. Недостающее соседство легко получить с помощью одной ручки. Для $n \equiv 2 \pmod{12}$ ориентируемое треугольное вложение графа $K_n - K_2$ было недавно найдено Юнгерманом [1]. Однако его решение очень трудное. В этой книге мы воспользуемся весьма своеобразным методом для определения рода $\gamma(K_n)$ при $n \equiv 2 \pmod{12}$. Этот метод намного легче понять, чем придумать.

В четырех случаях группы (c) можно надеяться на существование ориентируемого треугольного вложения для графа $K_n - K_3$. Для $n \equiv 10 \pmod{12}$ мы уже построили такое вложение графа $K_n - K_3$. То же самое мы сделаем для случаев $n \equiv 1$ и $6 \pmod{12}$ в гл. 6 и 9. Для $n \equiv 9 \pmod{12}$ ориентируемое треугольное вложение графа $K_n - K_3$ и даже графа $K_n - K_6$ было найдено Янгсом [5] и Гаем и Рингелем [1]. В обоих случаях можно решить проблему добавления соседства. Однако в этой книге мы приведем элегантное решение, использующее другой метод.

В двух случаях группы (d) естественно попытаться найти ориентируемое треугольное вложение графа $K_n - K_5$ и затем добавить десять недостающих соседств с помощью двух дополнительных ручек. В гл. 7 мы проделаем это для $n \equiv 11 \pmod{12}$. В случае $n \equiv 8 \pmod{12}$ мы сумели найти треугольное вращение графа $K_n - K_5$. Однако при этом мы не смогли решить проблему добавления соседства. Поэтому мы решим этот случай другим способом.

Чтобы избежать в следующих главах многократных вычислений рода данного треугольного вложения, мы докажем сейчас вспомогательную теорему.

ТЕОРЕМА 5.7. *Предположим, что мы имеем треугольное вложение графа вида $(K_n - t \text{ ребер})$ в некоторую ориентируемую поверхность. Если мы сможем получить t недостающих соседств, используя ровно $\{t/6\}$ дополнительных ручек, то для данного числа n равенство (4.13) справедливо.*

Доказательство. По предположению у нас есть два вложения:

$$K_n - t \text{ ребер} \triangleleft S_p,$$

$$K_n \subset S_{p+\{t/6\}}.$$

Применяя формулу $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 6 + 6p$ из теоремы 4.4 к первому вложению, получим

$$p = \frac{(n-3)(n-4) - 2t}{12}.$$

Из второго вложения находим

$$\begin{aligned} \gamma(K_n) &\leq p + \{t/6\} = \frac{(n-3)(n-4) - 2t}{12} + \left\{ \frac{2t}{12} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\}. \end{aligned}$$

Согласно (4.12), это неравенство является на самом деле равенством. Тем самым завершается доказательство теоремы 5.7.

Общая процедура определения неориентируемого рода графа K_n намного проще. Для всех $n \equiv 0$ или $1 \pmod{3}$ ($n \geq 6$ и $n \neq 7$) мы сможем показать, что существует треугольное вложение графа K_n в некоторую неориентируемую поверхность N_q . Используя формулу $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 6 + 3q$ из теоремы 4.4, получим тогда, что $q = (n-3)(n-4)/6$.

Для всех $n \equiv 2 \pmod{3}$ ($n \geq 1$) естественно попытаться построить треугольное вложение графа $K_n - K_2$ в некоторую поверхность S . Схема

	0.	4	1	x	8	3	5	6	2	y	7
	1.	5	2	x	0	4	6	7	3	y	8
	2.	6	3	x	1	5	7	8	4	y	0
	3.	7	4	x	2	6	8	0	5	y	1
	4.	8	5	x	3	7	0	1	6	y	2
(5.8)	5.	0	6	x	4	8	1	2	7	y	3
	6.	1	7	x	5	0	2	3	8	y	4
	7.	2	8	x	6	1	3	4	0	y	5
	8.	3	0	x	7	2	4	5	1	y	6
	x.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	y.	0	2	4	6	8	1	3	5	7	

удовлетворяет правилу R . Следовательно, она дает пример указанного вложения для $n = 11$. При этом только две вершины (или, в двойственной форме, две страны) не смежны.

Для всех $n \equiv 2, 5$ или $11 \pmod{12}$ мы позднее построим вложение $K_n - K_2 \triangleleft S$. При этом необязательно знать, ориентируема или нет поверхность S . Используя одну дополнительную пленку Мёбиуса, легко получить недостающее соседство следующим образом (пленка Мёбиуса так или иначе порождает неориентируемую поверхность S').

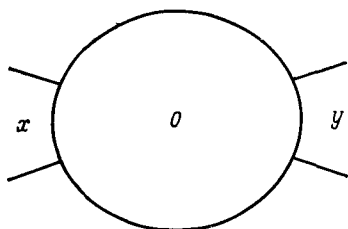


Рис. 5.3.

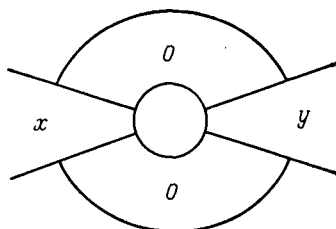


Рис. 5.4.

Рассмотрим карту на S , двойственную вложению $K_n - K_2 \triangleleft S$. Пусть x и y — две не соседние страны. Любая другая страна является соседней с x и y . Пусть 0 — одна из этих стран. Расположение стран вокруг страны 0 показано на рис. 5.3.

Вырежем внутренность замкнутой 2-клетки внутри страны 0 и отождествим противоположные точки полученной границы. Эта конструкция добавляет пленку Мёбиуса к S , порождая поверхность S' . Расширим страны x и y (используя часть территории страны 0) так, чтобы они стали соседними друг с другом, как показано на рис. 5.4.

Заметим, что страна 0 осталась связной и не потеряла ни одного из своих соседей. На самом деле каждое из соседств $(0, x)$ и $(0, y)$ появляется даже дважды. В результате получаем карту на поверхности S' , состоящую из n стран, каждая из которых является соседней с любой другой страной. Двойственное разбиение поверхности S' имеет 1-скелет, содер-

жащий граф K_n . Прямой подсчет с использованием формулы $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S)$ из теоремы 4.4 показывает, что

$$E(S) = 3 - \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\}.$$

Так как мы получили поверхность S' добавлением пленки Мёбиуса, то $E(S') = E(S) - 1$. Следовательно, мы нашли вложение $K_n \subset S'$, где S' — неориентируемая поверхность рода $\{(n-3)(n-4)/6\}$.

Если $n \equiv 8 \pmod{12}$ и $n \geq 20$, то найти вложение $K_n - K_2 \triangleleft S$, вероятно, очень трудно. Доказано, что треугольного вложения графа $K_8 - K_2$ в (ориентируемую или неориентируемую) поверхность не существует (см. Рингель [4]). Однако для определения неориентируемого рода графа K_n в случае $n \equiv 8 \pmod{12}$ мы воспользуемся другим методом.

6. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ 1, 4 И 9

6.1. ОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ 4

Сейчас мы построим треугольное вложение графа K_n в некоторую ориентируемую поверхность для всех n вида $n = 12s + 4$.

Попытки применить тот же метод, что и в случае 7 в § 2.3, с использованием циклической группы Z_{12s+4} оказываются безуспешными. Вместо этого мы будем использовать прямое произведение двух циклических групп — группу $\Gamma = Z_2 \times Z_{6s+2}$, которая состоит из всех пар (a, b) , где a — произвольный элемент группы Z_2 , а b — произвольный элемент группы Z_{6s+2} . Сложение (групповая операция) определяется формулой

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

Единичным элементом является пара $(0, 0)$. В элементе (a, b) будем называть a первой, а b — второй компонентами.

Рассмотрим сначала следующее решение для наименьшего случая $n = 4$, использующее группу $Z_2 \times Z_2$:

$$\begin{array}{cccc} (0, 0). & (1, 0) & (0, 1) & (1, 1) \\ (0, 1). & (1, 1) & (0, 0) & (1, 0) \\ (1, 0). & (0, 0) & (1, 1) & (0, 1) \\ (1, 1). & (0, 1) & (1, 0) & (0, 0) \end{array}$$

Заметим, что правило R^* выполняется и что строка $(0, 0)$ порождает другие строки при помощи аддитивного правила. Эта схема описывает тетраэдр на сфере, который является треугольным вложением графа K_4 .

Опишем теперь следующий случай $n = 16$. Воспользуемся графом токов, показанным на рис. 6.1. Удобно записывать только вторую компоненту тока; первую компоненту будем изображать жирным ребром, если она равна 1, и тонким, если она равна 0. Ток α на любом из трех концевых ребер обладает свойством $\alpha = -\alpha$; это означает, что α имеет в данной группе порядок 2.

Конструктивные принципы (C1), (C2), (C3), (C4) из § 2.3 справедливы для группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$. В дополнение к ним мы используем новый конструктивный принцип, а именно:

(C6) *Каждый элемент порядка 2 в данной группе появляется на концевом ребре.*

При обходе графа по циклу, индуцированному данным вращением, мы должны представлять себе, что поворачиваем назад в середине концевого ребра с током α . Это разумно, так как $\alpha = -\alpha$, а мы не хотим записывать некоторый ток дважды (см. рис. 6.1). Таким образом, при выписывании строки $(0, 0)$ мы записываем элемент α только один раз. Нам надо доказать, что таким образом мы придем к схеме для графа K_{16} , а в общем случае — для графа K_{12s+4} , удовлетворяющей правилу Δ^* .

Пусть i, j, k — элементы используемой группы (в данном случае $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$) и 0 — нулевой элемент. Пусть в строке i мы имеем

$$i \dots j k \dots$$

Тогда аддитивное правило утверждает, что в строке 0 должно быть

$$0 \dots j - i k - i \dots$$

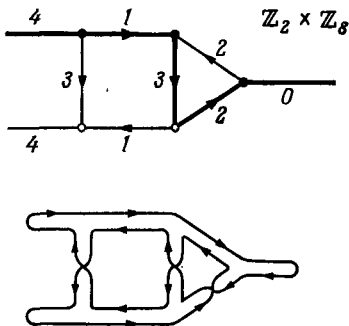


Рис. 6.1.

Это часть путевого журнала графа токов, соответствующий участок которого показан на рис. 2.16. Следовательно, в строке 0 должно быть

$$0. \dots j - i \quad k - i \dots i - k \quad h \dots,$$

если порядок элемента $k - i$ отличен от 2, или

$$0. \dots j - i \quad k - i \quad h \dots,$$

если порядок элемента $k - i$ равен 2 ($k - i = i - k$). В любом случае в строке k получаем

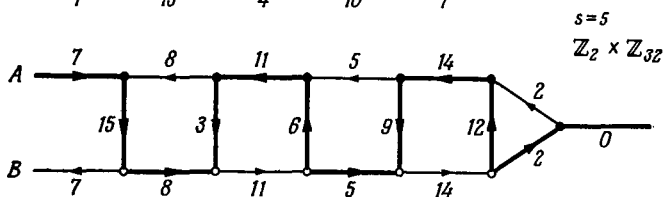
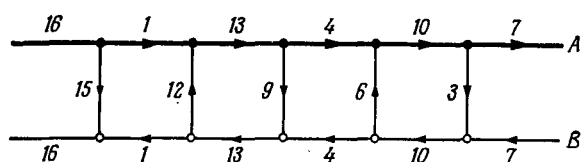
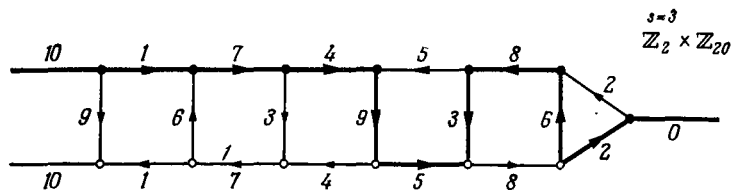
$$k. \dots i \quad k + h \dots$$

Из закона Кирхгофа для токов (свойство С4) вытекает, что $j = k + h$. Таким образом, правило Δ^* доказано.

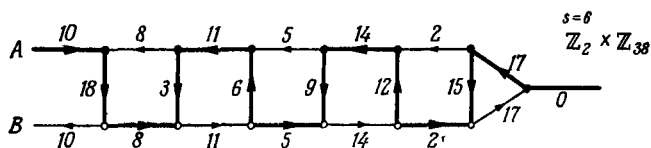
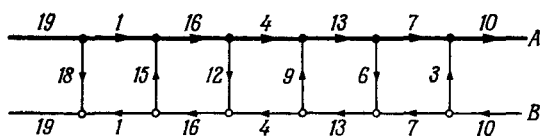
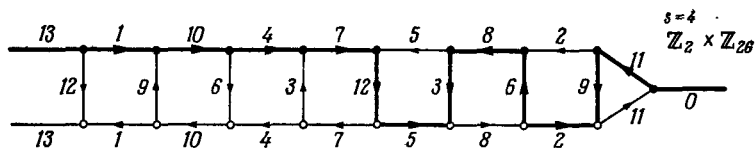
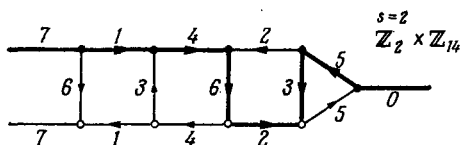
В общем случае $n = 12s + 4$ мы воспользуемся тем же похожим на лестницу графом (рис. 2.19), который мы уже использовали в случае 10. У этого графа $2s$ вертикальных ребер, называемых ступеньками, и три концевых ребра. Наверху (внизу) у каждой ступеньки задается вращение по часовой стрелке (соответственно против часовой стрелки). Это обеспечивает существование единственного цикла. Следовательно, выполняется конструктивный принцип (С2). В группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6s+2}$ имеется три элемента порядка 2, а именно: $(1, 3s + 1)$, $(0, 3s + 1)$ и $(1, 0)$. Припишем элемент $(1, 3s + 1)$ верхнему концевому ребру, а элемент $(0, 3s + 1)$ — концевому ребру, расположенному под ним. Элемент $(1, 0)$ припишем концевому ребру, расположенному справа. Если s нечетно, то вторые компоненты токов на ступеньках возьмем равными $\overline{3s}, \overline{3s - 3}, \overline{3s - 6}, \dots, \overline{6}, \overline{3}, \overline{3s}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \dots, \overline{3s - 3}$,

именно в этом порядке. Черта означает, что ориентация на этой ступеньке задана вниз, в противном случае — вверх. Все остальные токи и их направления полностью определяются законом Кирхгофа (С4). Это приводит к последовательности (вторых компонент)

$$1, 3s - 2, 4, 3s - 5, 7, \dots$$



Р и с. 6.2.



Р и с. 6.3.

для первых s горизонтальных ребер как в верхней, так и в нижней частях. Для другой половины горизонталей получаем последовательность (вторых компонент)

$$\dots, 8, 3s - 4, 5, 3s - 1, 2.$$

На рис. 6.2 показаны случаи $s = 3$ и $s = 5$.

Первые компоненты токов укажем следующим образом. Сначала найдем путь от левой верхней горизонтали до самой правой горизонтали, использующий каждое число (вторую компоненту) ровно один раз. Затем все ребра этого пути начертим жирно, что означает, что первая компонента равна 1 (см. рис. 6.2). Этим обеспечивается выполнение закона Кирхгофа для токов (ЗКТ) также и для первых компонент. Конечно, это можно сделать несколькими способами.

Для четных s решение строится аналогично: для ступеней выбираются токи (вторые компоненты)

$$\overline{3s}, \overline{3s - 3}, \overline{3s - 6}, \dots, 9, \overline{6}, 3, \overline{3s}, \overline{3}, 6, \overline{9}, \dots, \overline{3s - 3}.$$

Несколько случаев для малых s показаны на рис. 6.3.

6.2. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ГРЕБНИ

Большую помощь при распределении элементов или чисел по ступеням графа токов, подобного лестнице, оказывает метод, использующий арифметическую прогрессию и чередующиеся направления ступенек. На рис. 6.4 показаны части рис. 2.15 (вверху) и рис. 6.3 (внизу). В последнем случае порядок изменен на противоположный. Оба частичных рисунка имеют вид гребня. Мы будем называть его *арифметическим гребнем*, если

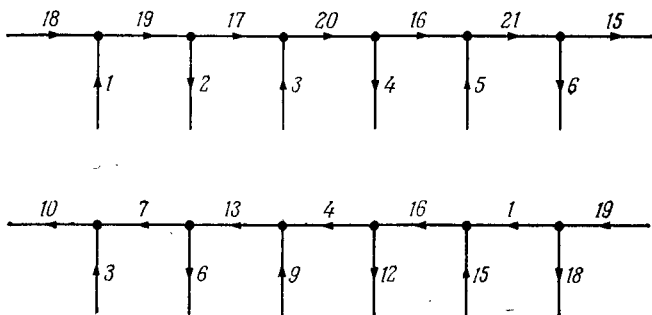
(а) направления ступенек (или зубцов) чередуются, а токи образуют арифметическую прогрессию, и

(б) токи на горизонталях таковы, что в каждой вершине степени 3 выполнен ЗКТ из § 2.3.

Мы будем использовать арифметические гребни очень часто. Однако в некоторых случаях нам при-

дется использовать гребни, удовлетворяющие только условию (b) и не удовлетворяющие условию (a).

Когда мы используем выражение *гребень*, это всегда означает, что условие (b) выполнено. Обычно при этом нужно указать, из какой группы берутся токи. В двух примерах на рис. 6.4 этого не надо делать, так как ЗКТ выполняется везде (даже в кольце Z всех целых чисел).



Р и с. 6.4.

Удобно записывать гребень в виде двух строк: в первую входят токи на горизонталях, во вторую — токи на зубцах. Например, первый гребень из рис. 6.4 запишется в виде

$$\begin{array}{ccccccc} 18 & 19 & 17 & 20 & 16 & 21 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \end{array}$$

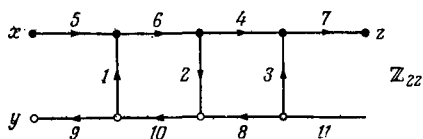
Здесь нет необходимости указывать, как ориентированы ребра, поскольку это однозначно определяется с помощью ЗКТ, если задана ориентация *одного* ребра.

6.3. ОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ I

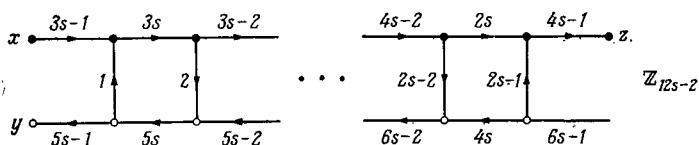
Согласно формуле Эйлера (§ 5.3), в случае $n = 12s + 1$ можно ожидать существования треугольного вложения графа $K_n - K_3$ в некоторую ориентируемую поверхность. Для наименьшего значения $n = 13$

до сих пор неизвестно, существует или нет треугольное вложение графа $K_{13} - K_3$, а для всех $s \geq 2$ мы сейчас дадим конструктивное доказательство существования. Имеется очень простое и привлекательное решение, но, к сожалению, оно годится только для четных s . Мы приведем сначала его.

Обозначим «особые» вершины графа $K_{12s+1} - K_3$ буквами x, y, z , а остальные вершины — элементами группы \mathbb{Z}_{12s-2} .



Р и с. 6.5.



Р и с. 6.6.

Рассмотрим граф токов, показанный на рис. 6.5 для $s = 2$ и на рис. 6.6 для произвольного s . В его основе лежит простой арифметический гребень. Каждый элемент $1, 2, \dots, 6s - 1$ группы \mathbb{Z}_{12s-2} появляется в этом графе токов ровно один раз. Единственный элемент порядка 2, а именно $6s - 1$, находится на концевом ребре. Данное вращение индуцирует единственный цикл. Закон Кирхгофа для токов выполняется в каждой вершине степени 3. На трех концевых ребрах при вершинах x, y, z заданы токи $3s - 1, 5s - 1$ и $4s - 1$. Вычислим наибольшие общие делители каждого из этих чисел и числа $12s - 2$:

$$(3s - 1, 12s - 2) = (3s - 1, 2) = (s - 1, 2),$$

$$(5s - 1, 12s - 2) = (5s - 1, 2s) = (s - 1, 2s) = (s - 1, 2),$$

$$(4s - 1, 12s - 2) = (4s - 1, 1) = 1.$$

Первые два числа равны 1 только в том случае, если s четно. В этом случае выполняются все свойства (C1) — (C6) из § 2.3 и 6.1. Так же, как в случае 10, это порождает строку 0 и, по аддитивному правилу из § 2.3, — треугольное вращение графа $K_{12s+1} - K_3$. Можно также сказать, что это схема для графа $K_{12s+1} - K_3$, удовлетворяющая правилу Δ^* . Тем самым проблема вложения решается для четного s .

Опишем теперь конструкцию, которая пригодна для всех $s \geq 2$. Она была открыта в 1964 г. Густином, который, к сожалению, не опубликовал ее. Вершины обозначаются буквами x, y, z и элементами группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6s-1}$. Нужно отметить, что это прямое произведение на самом деле изоморфно группе \mathbb{Z}_{12s-2} , так как $(2, 6s - 1) = 1$. Однако мы не будем использовать этот факт. Между прочим, прямое произведение, которое мы использовали в § 6.1, не являлось циклической группой.

Применим все шесть конструктивных принципов (C1) — (C6) из § 2.3 и 6.1. Рассмотрим подобный лестнице граф токов, показанный на рис. 6.7 в случаях $s = 3, 5$ или 7 и на рис. 6.8 в четных случаях $s = 2, 4$ или 6. Несколько ниже мы опишем общую конструкцию. Ребра, токи на которых имеют первую компоненту 1, проведены жирными линиями.

Заметим, что токи на концевых ребрах равны $(1, 1), (1, 3), (1, 2)$ и $(1, 0)$. Первые три являются образующими группы и порождают строки x, y, z (C5). Последний, $(1, 0)$, является единственным элементом порядка два, что согласуется с конструктивным принципом (C6). Имеется четное число ступенек, и поэтому существует вращение, индуцирующее единственный цикл. При этом он содержит каждый нетривиальный элемент группы ровно один раз.

В каждой вершине степени три выполняется ЗКТ. Для первой компоненты ЗКТ легко проверяется, так как каждой вершине степени три соответствуют либо два жирных ребра, либо ни одного. Поэтому необходимо проверить ЗКТ только для вторых компонент.

Мы должны объяснить, как соответствующая конструкция строится для произвольных значений s . Рас-

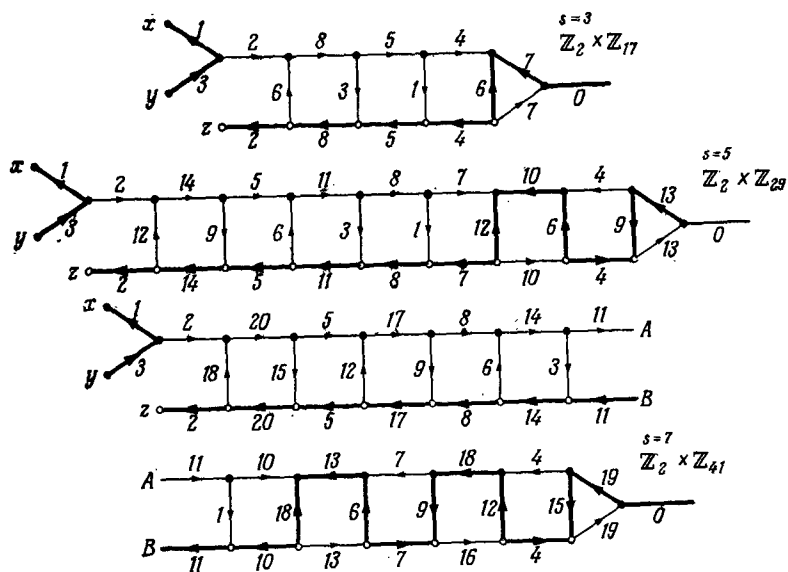


Рис. 6.7.

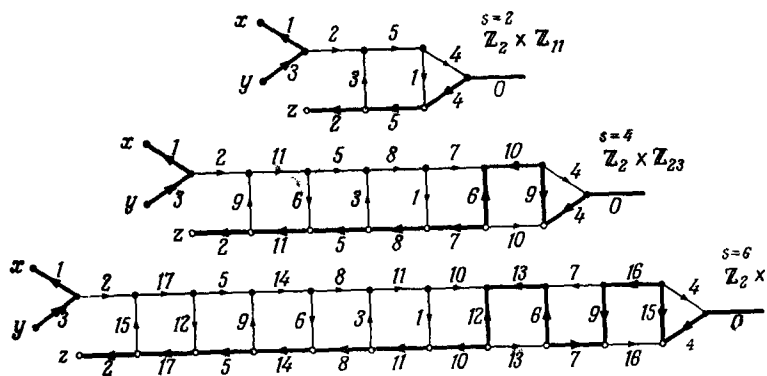


Рис. 6.8.

пределение первых компонент совершенно очевидно, и мы опишем распределение вторых компонент, которые являются ненулевыми элементами группы Z_{6s-1} . Первая горизонталь наверху направлена вправо и содержит ток 2. Два смежных с ней концевых ребра содержат токи 1 и 3. Имеется $2s - 2$ вертикалей. Первая половина из них образует арифметический гребень, содержащий на ступеньках числа, кратные трем. Горизонтالي этого гребня исчерпывают все токи, сравнимые с $2 \pmod 3$. Следующая вертикаль содержит ток 1 и направлена вниз. На всех остальных вертикалях стоят числа, кратные 3. Отсюда вытекает, что горизонтали в правой половине должны быть сравнимы с $1 \pmod 3$.

Если s — нечетное число, то токи на вертикалях равны

$$3s - 3, \dots, \overline{12}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}, \overline{1}, 3s - 3, 6, \overline{9}, 12, \dots, \overline{3s - 6}.$$

Черта означает, что направление на ступеньке указано вниз.

Арифметический гребень образуют не только первые $s - 1$ вертикалей, но также и последние $s - 3$ вертикалей. Отсюда легко видеть, что каждое из чисел $1, 2, \dots, 3s - 1$ появляется только дважды, один раз на жирном ребре и один раз на тонком. Число 0 используется ровно один раз, а именно на жирном концевом ребре.

Если s четно, то на вертикалях расположена следующая последовательность токов:

$$3s - 3, \dots, \overline{12}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}, \overline{1}, 3s - 6, 6, \overline{9}, 12, \dots \\ \dots, \overline{3s - 9}, \overline{3s - 3}.$$

Первый арифметический гребень почти такой же, как в нечетном случае. Второй арифметический гребень начинается с того же места: $\overline{6}, \overline{9}, 12, \dots$, но продолжается только до $\overline{3s - 9}$.

Может возникнуть вопрос, почему указанный метод не работает для наименьшего значения $s = 1$.

Ответ таков: группа $Z_2 \times Z_5$, которая изоморфна группе Z_{10} , не имеет достаточного количества образующих.

6.4. ЦЕПНЫЕ ДИАГРАММЫ

Мы хотим объяснить один метод, который помогает описывать решения, подобные данным в этой главе. На самом деле именно с помощью этого метода были найдены решения.

Рассмотрим диаграмму на рис. 6.8 для $s = 6$. На первой половине горизонталей имеется некоторая перестановка чисел 2, 5, 8, ..., 17, а на второй половине — перестановка чисел 4, 7, ..., 16. Представим эти числа в виде точек, расположенных на прямой линии на равном расстоянии друг от друга (см. рис. 6.9). Проведем дугу от точки 2 к точке 17, затем от точки 17 к точке 5 и т. д. Другими словами, мы проводим дуги, начиная с точки 2, таким образом, чтобы получить *цепь* (т. е. последовательность дуг), проходящую через точки в точности в том же порядке, в каком соответствующие числа появляются на горизонталях на рис. 6.8 ($s = 6$). Припишем затем каждой дуге ток f , расположенный на вертикали, которая находится между двумя горизонталями c и d на рис. 6.8 ($s = 6$), соответствующими двум концам c и d данной дуги. Это показано на рис. 6.12.

Так как в графе токов выполняется ЗКТ, то каждая вертикаль содержит ток, меньший, чем $3s$ ($f = \pm(c - d)$ или $f = \pm(c + d)$, где f всегда меньше, чем $3s$). На рис. 6.9 и 6.10 приводятся примеры, построенные с использованием рис. 6.8 и 6.7, а на рис. 6.11 показана более длинная цепь для следующего случая $s = 8$.

На этих цепных диаграммах очень хорошо видны следующие важные свойства:

(1) Каждое из чисел 2, 5, 8, ..., $3s - 1$ появляется ровно один раз как точка в цепи (и, следовательно, дважды в графе токов на двух соответствующих горизонталях).

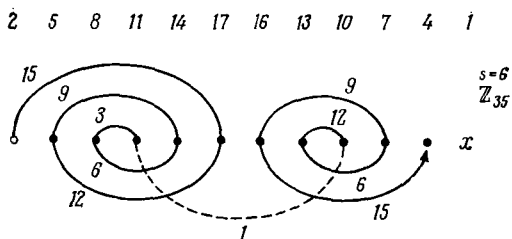


Рис. 6.9.

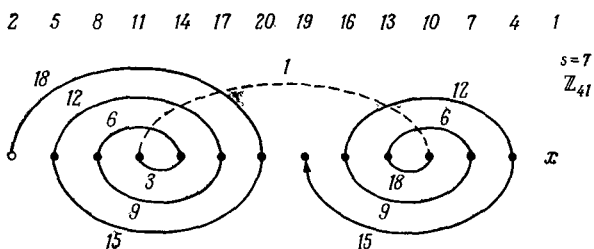


Рис. 6.10.

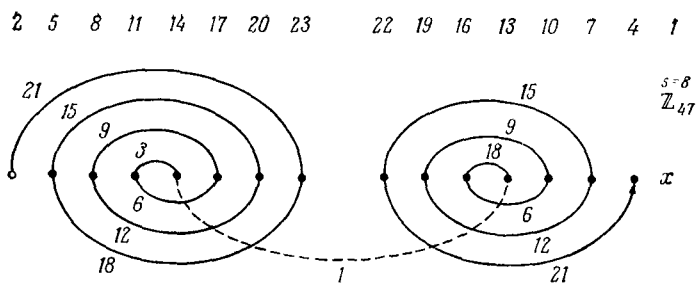


Рис. 6.11.

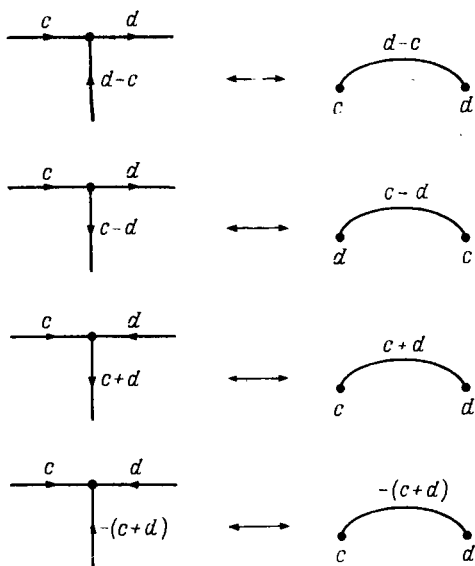


Рис. 6.12.

(2) Каждое из чисел $4, 7, 10, \dots, 3s - 2$ появляется ровно один раз как точка в цепи. (Следовательно, каждое из них появляется в графе токов на двух соответствующих горизонталях. Число 1 используется один раз на концевом ребре при вершине x и один раз на вертикали.)

(3) Каждое из чисел $6, 9, \dots, 3s - 3$ содержится на двух различных дугах. Число 3 стоит только на одной дуге (так как оно используется один раз на концевом ребре при вершине y , являющейся вихрем).

(4) Цепь начинается в точке 2 и проходит через каждую из остальных точек, указанных в (1) и (2), кроме точки, в которой цепь кончается и которая отлична от 2.

(5) Дуга между двумя точками c и d помечена числом $\pm(c-d)$ или $\pm(c+d)$ (см. рис. 6.12).

Если условия (1)–(5) выполнены, то можно использовать рис. 6.12 для построения подходящего гра-

фа токов. Условие (5) обеспечивает выполнение ЗКТ. Таким образом, многие случаи можно свести к задачам построения цепей.

6.5. ОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ 9

Рассмотрим граф токов, изображенный на рис. 6.15 и использующий группу \mathbb{Z}_{12s+8} ; см. также примеры на рис. 6.13 ($s = 0$) и 6.14 ($s = 1$). Этот граф токов обладает свойствами (C1), (C2), (C4) и (C6). Свой-

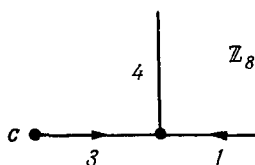


Рис. 6.13.

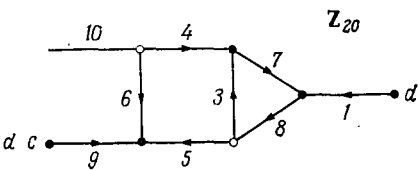


Рис. 6.14.

ство (C3) не выполняется, так как элемент 2 не появляется в качестве тока. Все остальные элементы $1, \hat{2}, 3, \dots, 6s + 4$ используются в качестве токов. Как обычно, выражение $\hat{2}$ означает, что элемент 2 исключен. Следовательно, строка 0 соответствующей схемы не содержит элементов 2 и -2 . Например, если $s = 0$, то получается следующая схема (строки c и d опущены):

0.	5	c	3	4	7	d	1
1.	6	c	4	5	0	d	2
2.	7	c	5	6	1	d	3
3.	0	c	6	7	2	d	4
4.	1	c	7	0	3	d	5
5.	2	c	0	1	4	d	6
6.	3	c	1	2	5	d	7
7.	4	c	2	3	6	d	0

Из этой схемы мы сделаем очень полезную схему

с помощью следующей операции, применяемой к каждой строке j :

если j четно, то вместо c подставим $2 + j$, x , $j - 2$ и опустим d ;

если j нечетно, то вместо d подставим $j - 2$, x , $j + 2$ и опустим c .

В результате мы получим схему ($s = 0$)

0.	5	2	x	6	3	4	7	1
1.	6	4	5	0	7	x	3	2
2.	7	4	x	0	5	6	1	3
3.	0	6	7	2	1	x	5	4
4.	1	6	x	2	7	0	3	5
5.	2	0	1	4	3	x	7	6
6.	3	0	x	4	1	2	5	7
7.	4	2	3	6	5	x	1	0
x.	(0	2	4	6)	(7	5	3	1).

Докажем, что правило R^* или Δ^* выполняется всюду в полученной схеме. Так как ЗКТ выполняется

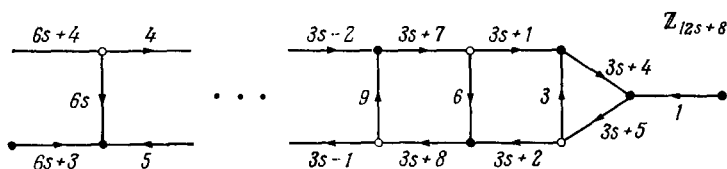


Рис. 6.15.

в каждой вершине степени 3, то необходимо проверить только те места, которые мы изменили при помощи специальной операции. В строке 0 до применения специальной операции было

$$0. \dots 6s + 5 \ c \ 6s + 3. \dots -1 \ d \ 1. \dots ,$$

После применения специальной операции получаем следующую часть схемы:

-2	...	$6s+3$	0	x	-4	$6s+1$...	-3	-1	...
0	...	$6s+5$	2	x	-2	$6s+3$...	-1	1	...
2	...	$6s+7$	4	x	0	$6s+5$...	1	3	...
$6s+4$...	1	$6s+6$
$6s+6$	$6s+4$	1
-1	...	$6s+4$	$6s+2$...	-2	-3	x	1	0	...
1	...	$6s+6$	$6s+4$...	0	-1	x	3	2	...
3	...	$6s+8$	$6s+6$...	2	1	x	5	4	...
$6s+3$...	0	-2
$6s+5$...	2	0

Сравнивая строку 0 со строками ± 2 , ± 1 , $6s + 5$ и $6s + 3$, можно проверить, что для строки 0 правила R^* и Δ^* выполняются. Сравним также строку 1 со строками 3, -1 , 0, 2, $6s + 4$ и $6s + 6$. Для всех остальных строк правило Δ^* вытекает из того, что схема не изменяется при добавлении $+2$ ко всем числам.

Эта схема описывает (в двойственной форме) карту со странами $0, 1, 2, \dots, 12s + 7, x_0, x_1$. Страны, помеченные цифрами, являются соседними друг с другом, в то время как x_0 (x_1) является соседней ко всем четным (нечетным) странам. Все вершины имеют степень 3. Используя формулу Эйлера, легко вычислить род p поверхности, которая задается этой картой:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 12s + 10, \\ 2\alpha_1 &= (12s + 8)(12s + 7) + 2(12s + 8), \\ 3\alpha_0 &= 2\alpha_1, \\ 6\alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 12 - 12p, \\ 12p &= 2\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12, \\ 12p &= (12s + 8)(12s + 9) - 6(12s + 10) + 12, \\ 12p &= (12s + 6)(12s + 5) - 6. \end{aligned}$$

Этот род p ровно на 1 меньше, чем правая часть в (4.13) при $n = 12s + 9$. Используя одну ручку, легко соединить две страны x_0 и x_1 . Отсюда вытекает, что равенство (4.13) выполняется для всех $n \equiv \equiv 9 \pmod{12}$.

7. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ 11, 2 И 8

7.1. ПРИМЕР ДЛЯ $n=35$

Пусть положительное целое число имеет вид $n = 12s + 11$. В соответствии с общей схемой из § 5.3 мы построим треугольное вложение графа $K_n - K_5$ в замкнутую ориентируемую поверхность. Это означает, что мы найдем треугольное вращение графа $K_n - K_5$.

Обозначим вершины графа $K_{12s+11} - K_5$ элементами группы \mathbb{Z}_{12s+6} и пятью буквами x, y, a, b, c . Воспользуемся графом токов. Сначала рассмотрим пример для $s = 2$, показанный на рис. 7.1. Отметим, что

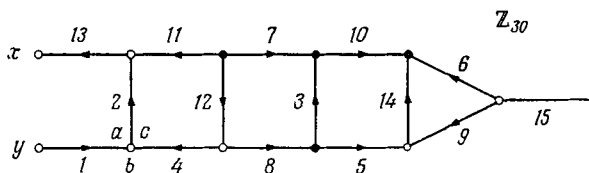


Рис. 7.1.

в вершине, помеченной буквами a, b, c , ЗКТ не выполняется. Но за одним этим исключением свойства (C1) — (C6) из § 2.3 и 6.1 выполняются. Цикл, индуцированный вращениями графа токов, определяет, как описано в § 2.3, строку 0. Выпишем полностью путевой журнал этого цикла, используя положительное представление элементов группы \mathbb{Z}_{30} :

15, 6, 16, 25, 22, 18, 11, 13, x , 17, 28, a , 29, y , 1, b , 26, 8, 3, 23, 12, 4, c , 2, 19, 7, 10, 24, 9, 14, 20, 27, 5, 21.

Заметим, что мы поставили буквы a, b, c точно на тех местах, где цикл проходит через них. Например,

после ребра 4 мы поставили c , прежде чем записать ребро 2. Назовем вершину, в которой ЗКТ не выполняется, *вихрем* степени 3.

Теперь представим этот путевой журнал как строку 0 схемы, в которой «числовая» часть строки i получается прибавлением $+i \pmod{30}$.

Несколько слов нужно сказать о размещении букв. Положение букв x и y не меняется, а буквы a , b , c , появившиеся из вихря степени 3, переставляются следующим образом:

0.	...	13	x	17	28	a	29	y	1	b	26...	4	c	2...
1.	...	14	x	18	29	b	0	y	2	c	27...	5	a	3...
2.	...	15	x	19	0	c	1	y	3	a	28...	6	b	4...
3.	...	16	x	20	1	a	2	y	4	b	29...	7	c	5...
4.	...	17	x	21	2	b	3	y	5	c	0...	8	a	6...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Столбцы, начинающиеся с букв a , b , c , являются циклическими перестановками. Для завершения схемы нужно сказать, как устроены строки x , y , a , b , c . Они определяются тем требованием, что должно выполняться правило R^* . Отсюда вытекает, что эти строки имеют вид

$x.$	0	13	26	21	4	17
$y.$	29	28	27	2	1	0
$a.$	29	0	28	2	3	1	.	.	.	26	27	25
$b.$	26	0	1	29	3	4	.	.	.	23	27	28
$c.$	2	0	4	5	3	7	.	.	.	29	27	1.

Теперь схема описана полностью. Она удовлетворяет правилу R^* и, следовательно, определяет ориентированное треугольное вложение графа $K_{35} - K_5$. Строки x и y являются простыми арифметическими прогрессиями с разностями соответственно 13 и -1 . Это видно из того, что в графе токов токи 13 и -1 втекают соответственно в вихри x и y . Оба эти элемента являются образующими группы \mathbb{Z}_{30} . Мы уже познакомились с такого типа вихрем в § 2.3 при использова-

нии свойства (С5). Надо еще изучить строки a , b , c . Заметим, что в любой из этих строк последовательность элементов, взятых через три, образует арифметическую прогрессию независимо от того, где ее начать. Разность прогрессии всегда равна 3.

Мы применили новый конструктивный принцип, состоящий в использовании вихря степени 3 для получения трех строк a , b , c . Таким образом, мы можем несколько изменить конструктивный принцип (С4) и добавить новый принцип.

(С4*) В каждой вершине степени 3, которая не помечена буквами, выполняется закон Кирхгофа для токов.

(С7) Токи, втекающие в вихрь степени три, обозначенный тремя буквами a , b , c (по одной в каждом углу), сравнимы между собой $\text{mod } 3$, но не сравнимы с 0 $\text{mod } 3$. Сумма всех трех токов, втекающих в вихрь, порождает подгруппу всех элементов, делящихся на 3.

В нашем случае, когда $s = 2$, в вихрь abc втекают три тока 1, 4 и -2 . Их сумма равна 3 и $(3, 30) = 3$. Это означает, что элемент 3 является образующей в подгруппе, состоящей из элементов 3, 6, 9, ...

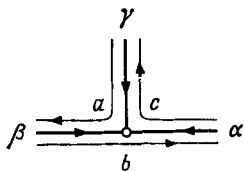


Рис. 7.2.

Мы уже объяснили, используя рис. 7.1, как работает конструктивный принцип (С7), если $s = 2$. Но нам нужно доказать, что этот принцип работает и в общем случае. Предположим, что имеется такой вихрь, как на рис. 7.2. Допустим, что $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 1 \pmod{3}$. (Другой случай $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 2 \pmod{3}$ рассматривается совершенно аналогично, только в этом случае надо писать c под a , b под c и a под b . В действительности, если токи сравнимы с 1 $\text{mod } 3$, то буквы переставляются в направлении вращения, указанного в вихре; если же они сравнимы с 2 $\text{mod } 3$, то буквы переставляются в другом направлении.) Положим $\delta = \alpha + \beta + \gamma$. Рис. 7.2 определяет такие ча-

сти строки 0 и следующих строк:

$$\begin{array}{r}
 0. \quad \dots \quad \gamma \quad a \quad -\beta \dots \beta \quad b \quad -a \dots \quad a \quad c \quad -\gamma \quad . \\
 \gamma. \quad \dots \quad . \quad . \quad . \quad \dots \quad . \quad \dots \quad \delta - \beta \quad a \quad 0 \quad . \\
 + \gamma. \quad \dots \quad . \quad . \quad . \quad \dots \delta \quad a \quad \gamma \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \\
 \delta. \quad \dots \delta + \gamma \quad a \quad \delta - \beta \dots \dots \quad . \quad \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \\
 + \gamma. \quad \dots \quad . \quad . \quad . \quad \dots \quad . \quad \dots \quad 2\delta - \beta \quad a \quad \delta \quad .
 \end{array}$$

Используя правило R^* , получаем строку a :

$$a. \quad \dots -\beta \quad 0 \quad \gamma \quad \delta - \beta \quad \delta \quad \delta + \gamma \quad 2\delta - \beta \quad 2\delta \dots$$

Любая последовательность, состоящая из элементов строки a через три, является арифметической прогрессией, например $0, \delta, 2\delta, \dots$.

Принцип (C7) гласит, что элемент δ — образующая подгруппы с $4s + 2$ элементами. Следовательно, строка a действительно содержит все элементы группы \mathbb{Z}_{12s+6} . С помощью таких же рассуждений можно показать, что строки b и c также являются «полными» циклами.

Возвращаясь к рис. 7.1, отметим, что существуют и другие вращения, которые индуцируют единственный цикл, и, следовательно, другие способы добиться выполнения принципа (C2). Имеются также другие распределения элементов $1, 2, \dots, 15$ группы \mathbb{Z}_{30} , причем такие, что выполняются конструктивные принципы (C1), (C3), (C4*), (C5), (C6), (C7). Любой из этих вариантов дает схему для графа $K_{35} - K_5$, удовлетворяющую правилу Δ^* . Однако на самом деле нам надо найти вложение (конечно, не треугольное) полного графа K_{35} . Это уже проблема добавления соседства. Вложение графа $K_{35} - K_5$, описываемое рис. 7.1, специально приспособлено к тому, чтобы удовлетворить требованиям, налагаемым проблемой добавления соседства. Прежде чем ее решать, мы рассмотрим общий случай $n = 12s + 11$.

Между прочим, диаграмма на рис. 7.3 с 2 ступеньками, так же как в примере для графа $K_{35} - K_5$, при-

водит к схеме для графа $K_{23} - K_5$, удовлетворяющей правилу Δ^* . Неприятность состоит в том, что в этом случае мы не можем решить проблему добавления со-

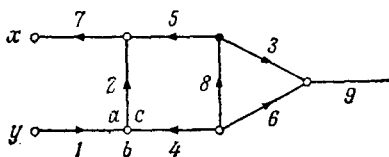


Рис. 7.3.

седства. Поэтому в § 5.2 мы дали решение для $n=23$, которое, к сожалению, очень нерегулярно.

7.2. ОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ 11

Построим треугольное вращение для графа $K_{12s+11} - K_5$. Для этого воспользуемся похожими на лестницу графами, изображенными на рис. 7.4 и 7.5.

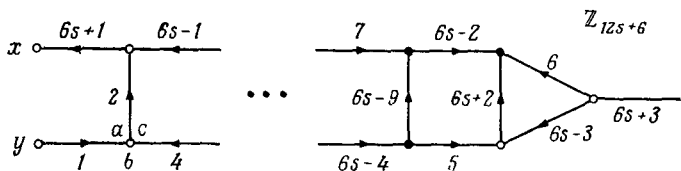


Рис. 7.4.

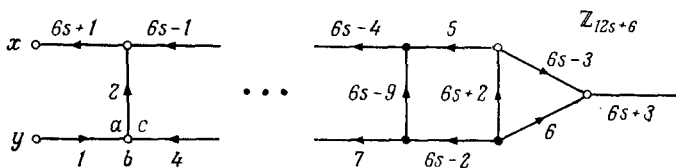


Рис. 7.5.

(Позднее окажется, что рис. 7.4 соответствует четному s , а рис. 7.5 — нечетному.) В любом случае имеется $2s$ вертикалей (ступенек), три из которых показаны на рисунках. Там, где вращения не указаны, поместим \bullet на верхней горизонтали и \circ на нижней.

Эти вращения индуцируют единственный цикл, так как имеется четное число вертикалей.

Граф на рис. 7.4 (или 7.5) имеет $6s + 3$ ребер. Нам нужно распределить все неиспользованные элементы группы Z_{12s+6} из списка

$$(7.1) \quad 1, 2, 3, \dots, 6s + 1, 6s + 2, 6s + 3$$

по непоказанным ребрам так, чтобы ЗКТ выполнялся в каждой новой вершине. Во всех показанных вершинах, кроме x , y и abc , он уже выполняется. А эти три вершины удовлетворяют принципам (C5) (1 и $6s + 1$ — образующие группы Z_{12s+6}) и (C7).

Рассмотрим те элементы списка (7.1), которые делятся на 3:

$$(7.2) \quad 3, 6, 9, \dots, 6s - 3, 6s, 6s + 3.$$

Из них элементы 6 , $6s - 3$, $6s - 9$ и $6s + 3$ уже размещены и осталось разместить на диаграмме $2s - 3$ элементов из (7.2). Так как имеется $2s - 3$ непоказанных ступенек, то предлагается распределить оставшиеся токи из (7.2) по непоказанным ступенькам.

(L) *Предположим, что мы имеем решение задачи распределения, удовлетворяющее ЗКТ и такое, что токи, сравнимые с $0 \pmod 3$, размещены на ступеньках, не показанных на рис. 7.4 или 7.5.*

Горизонталы лестницы должны содержать элементы, сравнимые с 1 или $2 \pmod 3$. Более того, если t — горизонтальный ток, то горизонтальный ток на *парном* ребре, расположенном точно над или под данным ребром, должен быть равен $6s + 3 - t$ и направлен в ту же сторону, что и ток t (оба вправо или оба влево). Это вытекает из справедливости глобального закона Кирхгофа для токов (теорема 2.9) и того, что ток на самом правом ребре диаграммы равен $6s + 3$.

Таким образом, токи из (7.1), сравнимые с 1 или $2 \pmod 3$, должны рассматриваться парами:

$$\text{пара } k: \quad 3k + 1, 6s + 2 - 3k \quad (k = 0, 1, \dots, 2s).$$

Мы назовем эту пару *парой с числом k* , или, короче, *парой k* .

Из пары 0 ток 1 использован на самом левом ребре, а парный ему ток $6s + 2$ на самой правой ступеньке. Из пары $2s$ оба тока использованы слева. Пары 1, 2 и $2s - 1$ также показаны на рис. 7.4 и 7.5, причем на каждом рисунке они расположены на парных ребрах.

Так как в паре 1 ток 4 расположен на нижней горизонтали и направлен влево и так как все токи на вертикалях сравнимы с $0 \pmod 3$, то для каждой пары имеются две возможности:

Если ток $3k + 1$ расположен на нижней горизонтали, то он направлен влево. Если ток $3k + 1$ расположен на верхней горизонтали, то он направлен вправо.

Читатель должен помнить, что мы пока работаем при предположении (L). Следующие шаги показаны на рис. 7.6 ($s = 3$) и 7.7 ($s = 4$). Для данного похожего на лестницу графа токов, показанного на рис. 7.4 (или 7.5), определим *ассоциированный гребень* следующим образом. Гребень рисуется непосредственно под лестницей, «параллелен» ей и имеет $2s - 2$ зубца. Это число ступенек в лестнице, содержащих ток, сравнимые с $0 \pmod 3$. На ребрах гребня распределим токи из группы \mathbb{Z}_{2s+1} , используя следующие правила переноса.

(T1) *Если на ступеньке лестницы имеем ток $3r$, то поместим на соответствующий зубец гребня элемент r и придадим ему то же направление.*

(T2) *Направим все horizontали в гребне вправо.*

(T3) *Если на (верхней или нижней) горизонтали лестницы имеется ток $3k + 1$, то поместим на соответствующую горизонталь гребня ток k .*

Ассоциированный гребень представляется в виде

$$(7.3) \begin{array}{cccccccc} 1 & . & . & h & k & . & . & 2 & & 2s - 1 \\ . & . & . & r & . & . & . & . & & 2s - 3 \end{array}$$

где первая строка — это последовательность горизонталей, а вторая — последовательность зубцов. Отме-

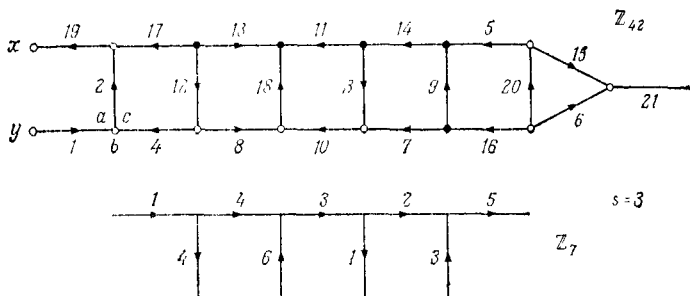


Рис. 7.6.

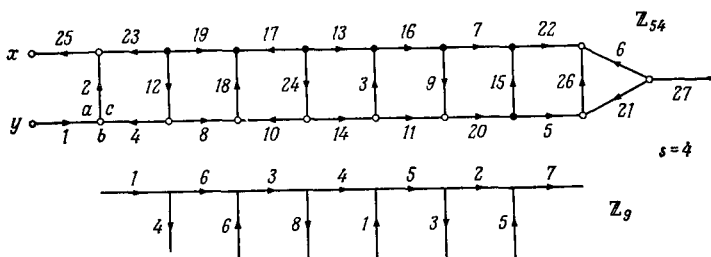


Рис. 7.7.

тим следующие свойства ассоциированного гребня; все они, кроме четвертого, легко проверяются.

(A1) Последовательность горизонталей начинается с тока 1 и кончается токами 2, $2s - 1$. Последняя вертикаль содержит ток $2s - 3$.

(A2) Все стрелки на горизонталях направлены вправо. Токи на горизонталях (это номера пар) различны и исчерпывают множество $\hat{0}, 1, \dots, 2s - 1, \hat{2s}$. Как обычно, выражение \hat{a} означает, что элемент a исключен.

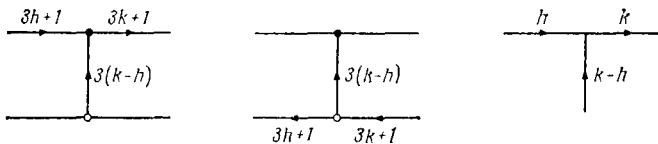
(A3) Токи на зубцах различны и исчерпывают множество $1, \hat{2}, 3, \dots, 2s - 2, \hat{2s - 1}, 2s$.

(A4) Для каждой вершины степени 3 в гребне выполняется ЗКТ в группе Z_{2s+1} .

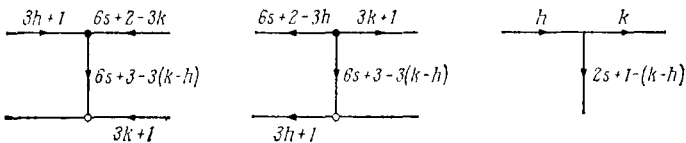
Чтобы доказать (A4), предположим, что h, k — два последовательных тока в ассоциированном гребне

и $h < k$. Согласно правилу (ТЗ), из этого следует, что токи $3h + 1$ и $3k + 1$ находятся на соответствующих верхних или нижних горизонталях лестницы. Это означает, что имеет место ситуация, описываемая одним из четырех частичных изображений лестницы, показанных на рис. 7.8 и 7.9 (слева и в центре).

Токи на вертикалях однозначно определяются по ЗКТ. Следовательно, в ассоциированном гребне имеем



Р и с. 7.8.



Р и с. 7.9.

локальную картину, показанную на рис. 7.8 или 7.9 справа. В обоих случаях ЗКТ выполняется в группе \mathbb{Z}_{2s+1} .

В случае $k < h$ можно провести те же рассуждения, только вместо $h - k$ нужно писать $k - h$ и изменить направление стрелок на всех вертикалях на рис. 7.8 и 7.9.

До этого места мы предполагали, что справедливо свойство (L). Подытожим теперь, что уже доказано.

Если мы имеем решение задачи распределения для подобного лестнице графа, изображенного на рис. 7.4 или 7.5, удовлетворяющее ЗКТ в группе \mathbb{Z}_{12s+6} и такое, что токи, сравнимые с $0 \pmod 3$, расположены на непоказанных ребрах, то существует гребень со свойствами (A1), (A2), (A3) и (A4).

Обратное утверждение тоже верно и для наших целей даже более важно.

Если существует гребень, обладающий свойствами (A1), (A2), (A3) и (A4), то можно распределить все неиспользованные элементы группы Z_{12s+6} на непоказанных ребрах на рис. 7.4 и 7.5 так, чтобы ЗКТ выполнялся в каждой новой вершине.

Доказательство. Пусть дан гребень, обладающий свойствами (A1), (A2), (A3) и (A4). Мы должны заполнить лестницу на рис. 7.4 (или 7.5). Используя правило (T1) в противоположном направлении, легко найти токи на ступеньках. Достаточно умножить токи на зубцах гребня на три, чтобы получить токи на соответствующих ступеньках лестницы. Придадим ступенькам ту же ориентацию, какая имеется на зубцах.

Но как найти токи на горизонталях? Правило (T3) не определяет их однозначно. Однако с помощью ЗКТ это можно сделать. Надо начать заполнение горизонталей лестницы с *левой* стороны.

Пусть $1, c_2, c_3, \dots, c_i, h, k, \dots$ — часть последовательности токов на горизонталях данного гребня. Кроме того, предположим, что мы уже разместили горизонтальные токи вплоть до пары h : $3h + 1, 6s + 1 + 2 - 3h$. При этом ток $3h + 1$ находится на верхней или нижней горизонтали. Свойство (A4) утверждает, что если $h < k$, то на промежуточном зубце находится ток $k - h$ или $2s + 1 - (k - h)$. Следовательно, будет выполняться одна из четырех возможностей, показанных на рис. 7.8 и 7.9, и этим определяется, как расположить следующую пару на лестнице так, чтобы выполнялся ЗКТ.

Для $k < h$ рассуждения аналогичны. Продолжая таким же способом, мы дойдем до правой части, в которой уже размещена пара 2. Пока нельзя сказать, закончим ли мы так, как на рис. 7.4, или так, как на рис. 7.5. В любом случае остается единственный вопрос — как построить гребень, обладающий свойствами (A1), (A2), (A3) и (A4). На рис. 7.6 и 7.7 приведено решение для $s = 3$ и $s = 4$. Следующие два

примера для $s = 5$ и $s = 6$ имеют такой вид:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 8 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 2 & 9 \\ & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{array} \quad (Z_{11})$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 10 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 9 & 2 & 11 \\ & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array} \quad (Z_{13})$$

Напомним, что все стрелки на горизонталях направлены вправо. Стрелки на вертикалях определяются по ЗКТ. В действительности их направления чередуются. Таким образом, приведенные гребни в самом деле являются арифметическими гребнями в смысле § 6.2. (Для последнего гребня, приведенного выше, заметим, что $12 + 2 \equiv 1 \pmod{13}$.)

Обобщение на произвольное s очевидно. Последовательность зубцов (вертикалей) такова:

$$4, 6, 8, \dots, 2s, 1, 3, 5, \dots, 2s - 3.$$

Последовательность горизонтальных токов получается чередованием последовательности

$$1, 3, 5, \dots, 2s - 1$$

с последовательностью

$$2s - 2, 2s - 4, 2s - 6, \dots, 2.$$

Все четные токи на зубцах имеют тип, показанный на рис. 7.9. Это означает, что они переводят токи, сравнимые с $1 \pmod{3}$, с нижней на верхнюю горизонталь лестницы или наоборот. Имеется $s - 1$ зубцов с четными токами, поэтому если s четно, то мы заканчиваем так, как на рис. 7.4, если же s нечетно, — то так, как на рис. 7.5.

Замечание. Легко получить много других решений. Например, из решения для $s = 5$ получим другое решение, меняя местами числа 8 и 3 в последовательности зубцов. Имеются также совсем другие решения, довольно необычные. Пример для $s = 5$:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 5 & 4 & 7 & 6 & 3 & 8 & 2 & 9 \\ & 4 & 1 & 3 & 10 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{array} \quad (Z_{11})$$

7.3. ПРОБЛЕМА ДОБАВЛЕНИЯ СОСЕДСТВА

В предыдущем параграфе мы получили схему для графа $K_{12s+11} - K_5$, удовлетворяющую правилу Δ^* при всех $s \geq 2$. Это означает, что существует треугольное вложение графа $K_{12s+11} - K_5$ в ориентируемую поверхность. Чтобы получить граф K_{12s+11} , нужно добавить 10 недостающих соседств. Согласно теореме 5.7, мы должны попытаться построить эти 10 недостающих ребер с помощью $\{10/6\} = 2$ дополнительных ручек.

Рассмотрим вначале карту, двойственную треугольному вложению графа $K_{12s+11} - K_5$. На ней имеется $12s + 11$ стран, обозначенных $0, 1, \dots, 12s + 5, x, y, a, b, c$. Каждая вершина карты инцидентна трем странам и трем ребрам.

Любые две страны являются соседними, кроме случаев, когда обе страны принадлежат особому множеству из пяти стран x, y, a, b, c .

Информацию, требуемую для решения проблемы добавления соседства, можно получить из частей, показанных на рис. 7.4 (если s четно) или 7.5 (если s нечетно). Левая часть рисунка дает нам часть строки 0, записанную ниже, а также нужные части других строк.

0.	x	$6s+5$	$12s+4$	a	$12s+5$	y	1	b	$12s+2$...	4	c	...
1.	.	.	$12s+5$	b	0	y	2	c			
2.	.	.	0	c	1	y	3	a			
3.	.	.	1	a	2	y	4	b			
4.	.	.	2	b	3	y	5	c			
.			
.			
$12s+4$	y	$12s+5$	c	$12s$...			
$12s+5$	y	0	a	$12s+1$			

Это дает частичную картину (рис. 7.10) карты вокруг стран 0, 3 и 4.

Первая модификация. Преобразуем карту так, как показано на рис. 7.11 (одномерные и двумерные подразделения и укрупнения). Новую страну, обозначен-

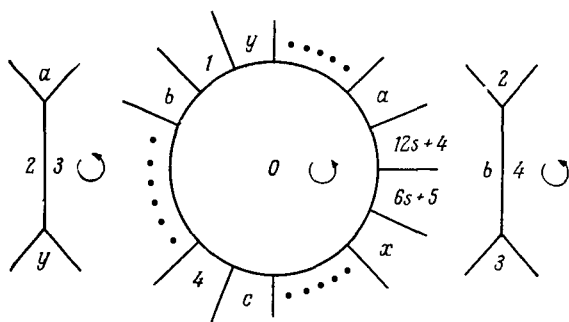


Рис. 7.10.

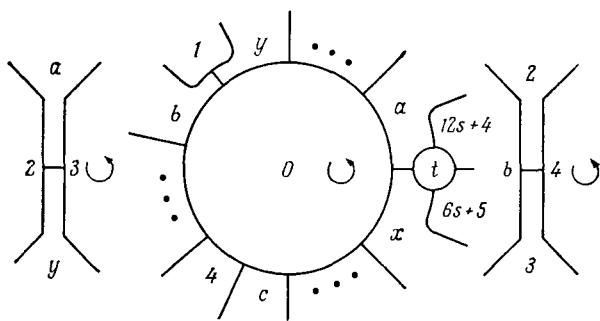


Рис. 7.11.

ную буквой t , мы используем позднее. Заметим, что мы добились трех соседств

$$(7.4) \quad (a, y), (b, y), (a, x),$$

но потеряли четыре соседства

$$(7.5) \quad (0, 1), (0, 12s + 4), (0, 6s + 5), (b, 4).$$

Соседство $(2, 3)$ просто изменило свое положение на карте.

Первая ручка. Рассмотрим карту на торе, показанную на рис. 7.12. Заметим, что страна 0 выглядит разрезанной на четыре части, однако в действительности это единая страна.

Вырежем страну 0 на рис. 7.11 и страну z на рис. 7.12. Затем очевидным образом отождествим две границы двух полученных частичных полиэдров. В результате получим новую страну, названную 0, которая является соседней с теми же странами, что и прежняя страна 0 на рис. 7.11.

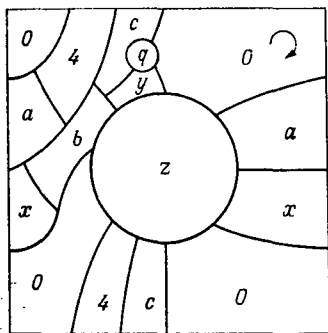


Рис. 7.12.

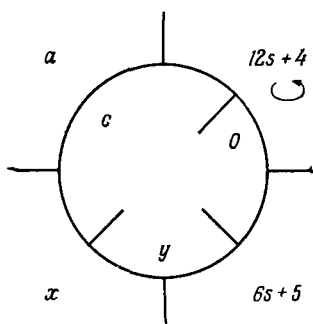


Рис. 7.13.

Используя первую ручку, мы добиваемся шести соседств

$$(7.6) \quad (a, b), (b, c), (b, x), (c, y), (b, 4), (a, 4).$$

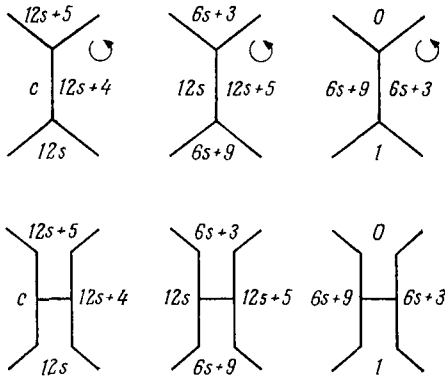
Последнее соседство $(a, 4)$ является *излишним* в том смысле, что оно уже есть где-то на карте.

Вторая ручка. Вырежем теперь страну t на рис. 7.11 и страну q на рис. 7.12. Отождествим границы двух полученных частичных полиэдров так, как показано на рис. 7.13. Заметим, что это дает замкнутую поверхность, которая ориентируема. Мы добились семи соседств

$$(7.7) \quad \begin{array}{lll} (a, c), & (c, x), & (x, y), \\ (0, 12s + 4), & (0, 6s + 5), & (y, 6s + 5), & (c, 12s + 4). \end{array}$$

Два последних соседства — излишние.

Из (7.4), (7.6) и (7.7) мы видим, что все страны, обозначенные буквами a, b, c, x, y , стали теперь соседними друг с другом. При этом мы потеряли соседства, перечисленные в (7.5). Однако в (7.6) мы вос-



Р и с. 7.14.

становили потерянное соседство $(b, 4)$, а в (7.7) — потерянные соседства $(0, 12s + 4)$ и $(0, 6s + 5)$. Следовательно, потерянным осталось только соседство $(0, 1)$.

Окончательная модификация. Если s четно, то правая часть рис. 7.4 дает следующую часть строки 0:

$$0. \dots 6s + 3 \ 6 \ 6s + 4 \ 12s + 1 \ 6s + 10 \dots$$

Если s нечетно, то рис. 7.5 дает

$$0. \dots 6s + 10 \ 12s + 1 \ 6s + 4 \ 6 \ 6s + 3 \dots$$

Одна строка получается из другой обращением порядка пяти содержащихся в ней чисел. Если s четно, то

$$\begin{matrix} 6s + 3. & \dots & 0 & 6s + 9 & 1 & \dots \\ 12s + 5. & \dots & & & 6s + 3 & 12s & 6s + 9 \dots \end{matrix}$$

Используя эти строки и строку $12s + 4$ из ранее описанной части схемы, получаем локальную картину, показанную в верхней части рис. 7.14 при четном s . При нечетном s изменяется ориентация, указанная в центре и справа на рис. 7.14.

Используя вторую ручку, мы получили излишнее соседство $(c, 12s + 4)$ (см. (7.7)). Рис. 7.14 (слева сверху) показывает первоначальное положение со-

седства $(c, 12s + 4)$. Так как оно сейчас есть еще где-то, то здесь оно нам больше не нужно. Поэтому мы преобразуем карту так, как показано на рис. 7.14 (слева внизу), и получаем соседство $(12s, 12s + 5)$. Теперь нам больше не нужно первоначальное место соседства $(12s, 12s + 5)$, показанное на рис. 7.14 (в центре вверху). Преобразуем карту так, как показано внизу в центральной части рисунка. Получим соседство $(6s + 3, 6s + 9)$. Следовательно, мы можем преобразовать правую частичную картину так, как показано в нижней правой части рис. 7.14. Таким образом, мы восстановили последнее потерянное соседство $(0, 1)$.

7.4. ОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ 2

Подобный лестнице граф токов, который мы будем использовать, очень легко описать, так как он почти такой же, как в случае 11. Однако проблема добавления соседства будет более тонкой.

Для того чтобы сохранить обозначения из случая 11, будем считать, что n представлено в виде $n = 12s + 14$.

Рассмотрим граф токов, показанный на рис. 7.15, если s четно, и на рис. 7.16, если s нечетно. В обоих случаях лестница имеет $2s$ ступенек. Токи являются элементами группы \mathbb{Z}_{12s+6} .

На рис. 7.17 показан пример для $s = 2$. Сравнивая рис. 7.15 с рис. 7.4, замечаем, что шесть элементов $1, 6s + 2, 2, 6s + 1, 6, 6s - 3$ поменялись местами. Все остальные элементы размещены на обоих рисунках одинаково. Будем считать, что непоказанные ступеньки и горизонтالي на рис. 7.15 содержат в точности те же токи, что и на рис. 7.4 (s четно). В § 7.2 мы объяснили, как достроить граф токов на рис. 7.4. Если s нечетно, рассмотрим рис. 7.16 и возьмем токи на всех непоказанных ступеньках и горизонталях из рис. 7.5.

Там, где вращение на рис. 7.15 и 7.16 не указано, поместим вращение по часовой стрелке (заполненный кружок) на верхней горизонтали и вращение против

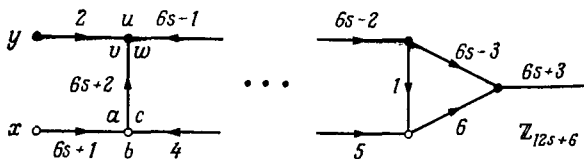


Рис. 7.15.

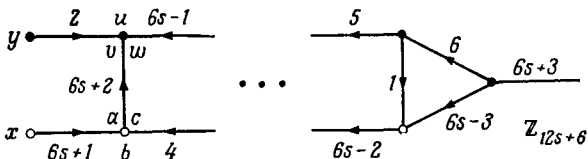


Рис. 7.16.

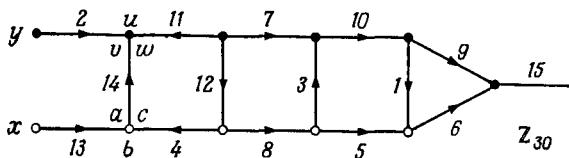


Рис. 7.17.

часовой стрелки (пустой кружок) на нижней горизонтали.

Тогда граф токов будет обладать следующими свойствами:

- (C1) Каждая вершина имеет степень 3 или 1.
- (C2) Данное вращение индуцирует единственный цикл.
- (C3) Каждый элемент группы, кроме 0, появляется на цикле ровно один раз.
- (C4*) В каждой вершине степени 3, которая не помечена буквами, выполняется закон Кирхгофа для токов.

(C5*) Элемент $6s + 1$, стоящий на концевом ребре при вершине x , порождает группу \mathbb{Z}_{12s+6} , а элемент 2 на концевом ребре при вершине y порождает подгруппу всех четных элементов из \mathbb{Z}_{12s+6} .

В двух вершинах abc и uvw выполняется свойство (C7) из § 7.1: токи, втекающие в вершину uvw , равны 2 , $6s - 1$ и $6s + 2$. Все они сравнимы с $2 \pmod 3$. Сумма $2 + 6s - 1 + 6s + 2 = 12s + 3 = +3$ порождает подгруппу всех чисел, кратных 3 . Токи, втекающие в вершину abc , равны 4 , $6s + 1$ и $-(6s + 2)$. Все они сравнимы с $1 \pmod 3$. Их сумма равна 3 и порождает ту же подгруппу индекса 3 . Буквы будут переставляться так, как описано в § 7.1.

Цикл, индуцированный вращением графа токов на рис. 7.15 или 7.16, порождает строку 0 для схемы.

Далее построим строки 1 , 2 и т. д. с помощью аддитивного правила, однако x и y при этом остаются неизменными, а буквы a , b , c и u , v , w переставляются следующим образом:

0.	... a u ...
1.	... b v ...
2.	... c w ...
3.	... a u ...

и т. д. Строки a , b , c , u , v , w , x , y определяются затем по правилу Δ^* в соответствии с принципами (C7) из § 7.1 и (C5) из § 2.3.

Так как ток 2 на концевом ребре при вершине y не является образующим, мы не можем рассчитывать, что получится нормальная строка для y . В самом деле, если мы попытаемся построить строку y , используя правило Δ^* , мы получим два цикла, а именно:

$$y. (12s + 4 \dots 4 \ 2 \ 0) (12s + 5 \dots 5 \ 3 \ 1).$$

Так же, как мы поступили в § 5.2 в схеме (5.7) ($n = 8$ или 9), заменим y на y_0 в строках 0 , 2 , ... и на y_1 в строках 1 , 3 , Мы получим треугольное вращение для некоторого графа G_{12s+15} , который можно описать следующим образом.

Имеется $12s + 15$ вершин, обозначенных $0, 1, 2, \dots$

$12s + 6, a, b, c, u, v, w, x, y_0, y_1$. Каждая пара вершин, обозначенных числами, соединена ребром; вершины a, b, c, u, v, w и x соединены со всеми чис-

ловыми вершинами; вершина y_0 соединена со всеми четными числовыми вершинами, вершина y_1 — со всеми нечетными. Отметим, что нет ребер, соединяющих какую-либо пару вершин, обозначенных буквами.

Замечание. Этот граф G_{12s+15} выглядит очень непохожим на полный граф K_{12s+14} . Однако если в этом графе отождествить вершины y_0 и y_1 так, чтобы получилась одна вершина y , то получится граф $K_{12s+14} - K_8$.

Полученная схема дает треугольное вложение графа G_{12s+15} в некоторую ориентируемую поверхность S . Можно рассмотреть двойственную карту M на S , у которой все вершины имеют степень три. Так как карта M имеет

$$\alpha_2 = 12s + 15 \text{ стран и}$$

$$\alpha_1 = C_{12s+6}^2 + 8(12s + 6) = 72s^2 + 162s + 63 \text{ ребер,}$$

то род p поверхности S можно определить при помощи теоремы 4.4:

$$\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S) = 3\alpha_0 - 6 + 6p,$$

$$p = 12s^2 + 21s + 4.$$

Таким образом, мы нашли довольно необычную карту M с $12s + 15$ странами на ориентируемой поверхности рода $12s^2 + 21s + 4$.

Однако на самом деле нам нужна карта с $12s + 14$ попарно соседними странами на ориентируемой поверхности рода

$$\left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\} = \left\{ \frac{144s^2 + 252s + 110}{12} \right\} = 12s^2 + 21s + 10.$$

Заметим, что разность между двумя родами равна шести. Это означает, что для карты M имеется следующая проблема добавления соседства: используя 6 дополнительных ручек, построить 28 недостающих соседств (все пары из восьми стран a, b, c, u, v, w, x и y_0 не являются соседними) и, кроме того, соседство между y_0 и y_1 . Тогда мы сможем стереть границу ме-

жду y_0 и y_1 и получить новую страну y . В результате будет построена карта с $12s + 14$ попарно соседними странами. Мы сделаем все это в следующем параграфе.

7.5. ПРОБЛЕМА ДОБАВЛЕНИЯ СОСЕДСТВА

Рассмотрим следующую часть строки 0, которую легко получить из рис. 7.15 или 7.16:

0. ... $6s - 1$ ω $6s + 4$ a $6s + 5$ x $6s + 1$ b $12s + 2$...
 ... 4 c $6s + 2$ v $12s + 4$ y_0 2 u $6s + 7$...

Следующая часть схемы также важна:

0. ... $6s + 2$ v $12s + 4$...
 1. ... $6s + 3$ ω $12s + 5$...
 2. ... $6s + 4$ u 0

Это дает частичное изображение карты M вокруг стран 0 и 2, как показано на рис. 7.18.

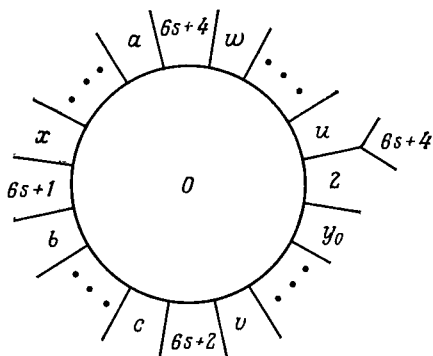


Рис. 7.18.

Первая модификация. Преобразуем карту так, как показано на рис. 7.19. Мы добились соседств

$(a, \omega), (b, x), (c, v), (u, y_0),$

но потеряли соседства

$$(7.8) \quad (0, 2), (0, 6s + 1), (0, 6s + 2), (0, 6s + 4).$$

Первая ручка. Рассмотрим карту на торе, показанную на рис. 7.20 (не обращая внимания на два пунктирных кружка). Вырежем страну 0 на рис. 7.19 и

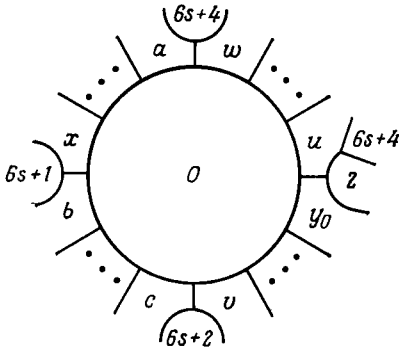


Рис. 7.19.

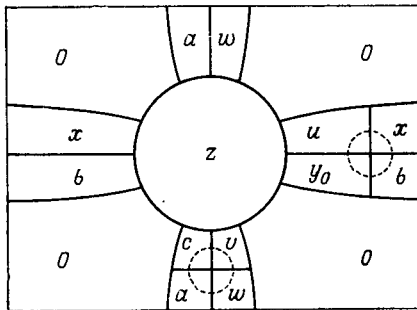


Рис. 7.20.

страну z на рис. 7.20. Очевидным образом отождествим границы двух полученных частичных полиэдров. После этого мы получим новую страну, названную 0, которая соседствует с теми же странами, что и прежняя страна 0 на рис. 7.19.

Мы добились соседств

$$(a, c), (b, y_0), (x, u), (v, w).$$

Вторая ручка. На рис. 7.20 вырежем внутренность двух пунктирных кружков и отождествим границы так, как показано на рис. 7.21 (пока не обращаем внимания на пунктирные кружки на рис. 7.21). Это ото-

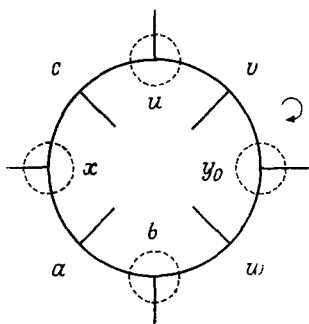


Рис. 7.21.

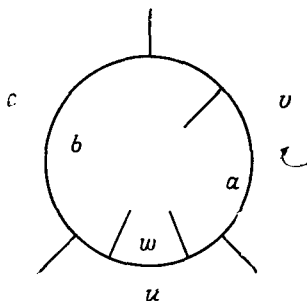


Рис. 7.22.

ждество делается так, что новая поверхность ориентируема. Так же делаются отождествления, проводимые ниже.

Мы добились соседств

$$(a, b), (b, w), (w, y_0), (y_0, v), (v, u), (u, c), (c, x), (x, a).$$

Третья ручка. Вырежем внутренности верхнего и нижнего пунктирных кружков на рис. 7.21. Отождествим границы так, как показано на рис. 7.22. Получаем соседства

$$(a, u), (u, b), (b, v), (v, a), (b, c), (u, w).$$

Четвертая ручка. Вырежем теперь внутренности пунктирных кружков, расположенных слева и справа на рис. 7.21. Отождествим две границы так, как показано на рис. 7.23. Получим шесть соседств

$$(c, y_0), (y_0, x), (x, w), (w, c), (a, y_0), (v, x).$$

То, что достигнуто нами с использованием 4 ручек — просто удивительно! Получены все 28 соседств между странами a, b, c, u, v, w, x, y_0 ! Но, с другой стороны, мы потеряли четыре соседства, указанные в (7.8).

Пятая ручка. Из рис. 7.19 и из того факта, что страна u где-то граничит со страной $6s + 2$, получаем

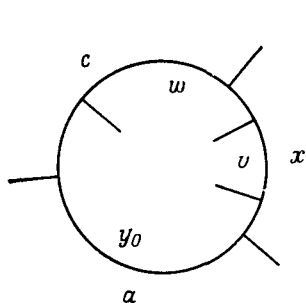


Рис. 7.23.

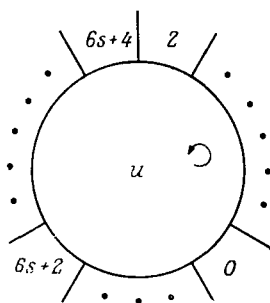


Рис. 7.24.

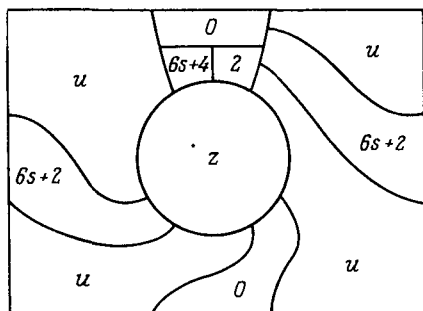


Рис. 7.25.

частичную картину, показанную на рис. 7.24. Рассмотрим рис. 7.25 как карту на торе. Вырежем страну u на рис. 7.24 и страну z на рис. 7.25 и очевидным образом отождествим границы. Опять прежняя страна u заменяется новой страной u . Мы добились соседств $(0, 2), (0, 6s + 2), (0, 6s + 4)$.

Таким образом, мы восстановили три из соседств (7.8), потерянных при первой модификации.

Шестая ручка. Теперь нам осталось только восстановить последнее недостающее соседство $(0, 6s + 1)$ и построить дополнительное соседство между y_0 и y_1 . Страна y_1 соседствует со всеми странами, обозначенными нечетными числами. Следовательно, y_1 и $6s + 1$ имеют общую границу. Подобным же образом y_0 и 0 имеют общую границу. Теперь, добавляя одну ручку, легко получить одновременно два соседства $(0, 6s + 1)$ и (y_0, y_1) .

7.6. ОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ 8

Теперь легко объяснить решение в случае 8, так как мы можем использовать все идеи из двух предыдущих случаев 11 и 2. Мы снова воспользуемся той же группой \mathbb{Z}_{12s+6} .

Рассмотрим подобный лестнице граф токов, показанный на рис. 7.26 (в верхней части), в котором общее число ступенек равно $2s$. (На рис. 7.27 показан пример для $s = 2$.) Там, где вращения не указаны, поместим \bullet на верхней горизонтали и \circ на нижней. Это вращение графа порождает один-единственный цикл.

Граф токов на рис. 7.26 имеет $6s + 3$ ребер. Мы намерены распределить элементы

$$1, 2, 3, \dots, 6s + 3$$

как токи по этим ребрам так, чтобы в каждой вершине степени три выполнялся ЗКТ. Некоторые из элементов уже размещены. Так же, как в двух предыдущих случаях, мы поместим все числа, кратные 3, на вертикали. Это означает, что токи по любым двум соответствующим горизонталями имеют вид

$$3k + 1, \quad 6s + 2 - 3k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2s).$$

Напомним, что это следует из глобального ЗКТ (теорема 2.9). Такую пару мы называли парой k . Два ребра треугольника, расположенные в правой части лестницы, тоже рассмотрим как «горизонталы».

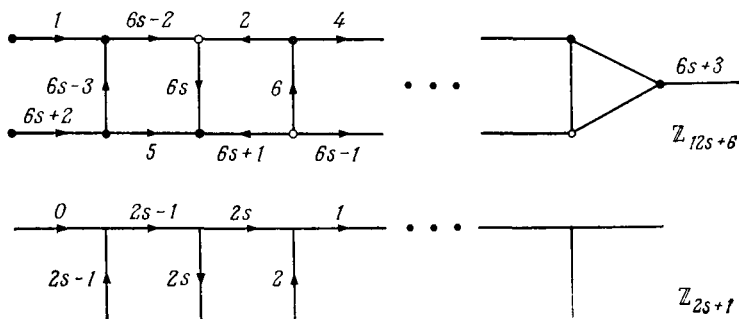


Рис. 7.26.

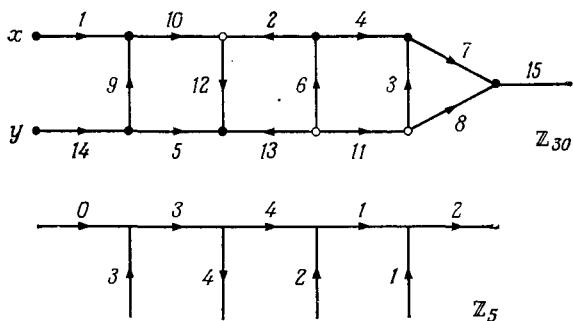


Рис. 7.27.

Предположим, что мы имеем решение описанной задачи распределения для данного графа токов (рис. 7.26, верхняя часть). Тогда мы можем построить ассоциированный гребень следующим образом (рис. 7.26, нижняя часть).

(T0) Гребень имеет $2s$ ступенек.

(T1) Если в графе токов ток по вертикали равен $3r$, то на соответствующую ступеньку в гребне поместим элемент r и выберем такую же ориентацию, как на вертикали.

(T2) Все стрелки на горизонталях направим вправо.

(ТЗ) Если на (верхней или нижней) горизонтали лестницы имеется ток $3k + 1$, то поместим на соответствующую горизонталь гребня ток k .

В § 7.2 мы доказали, что так построенный гребень обладает свойствами (А1)—(А4):

(А1) Левая часть гребня начинается с

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 2s-1 & & 2s & & 1 \dots \\ & & & & & & \\ & 2s-1 & & & 2s & & 2 \dots \end{array}$$

(А2) Все стрелки на горизонталях направлены вправо. Токи на горизонталях различны и исчерпывают множество $0, 1, 2, \dots, 2s$.

(А3) Токи на зубцах гребня различны и исчерпывают множество $1, 2, \dots, 2s$.

(А4) Для каждой вершины степени 3 в гребне выполняется ЗКТ в группе \mathbb{Z}_{2s+1} .

В § 7.2 мы видели, что осуществимо и обратное построение: *если можно найти гребень с $2s$ зубцами, обладающий свойствами (А1)—(А4), то можно решить задачу распределения для графа на рис. 7.26.*

Таким образом, проблема свелась к нахождению соответствующего гребня для каждого значения s . На рис. 7.27 показан пример для $s = 2$. Для $s = 4, 6$ и 8 см. следующие примеры:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 7 & 8 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 \\ & 7 & 8 & 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} (s=4) \\ (\mathbb{Z}_9) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 11 & 12 & 1 & 9 & 2 & 10 & 3 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \\ & 11 & 12 & 2 & 6 & 5 & 8 & 7 & 9 & 10 & 4 & 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} (s=6) \\ (\mathbb{Z}_{13}) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 15 & 16 & 1 & 13 & 2 & 14 & 3 & 11 & 4 \\ & 15 & 16 & 2 & 5 & 6 & 12 & 11 & 9 & 10 \\ & & & 12 & 5 & 9 & 6 & 10 & 7 & 8 \\ & & & 8 & 7 & 13 & 14 & 4 & 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} (s=8) \\ (\mathbb{Z}_{17}) \end{array}$$

В этих трех примерах мы не сказали, куда направлены стрелки. Но это легко определяется свойством

(A2) и ЗКТ. Нетрудно эти примеры для $s = 2, 4, 6$ и 8 обобщить на любое данное четное число s :

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & & 2s-1 & & 2s & & 1 & & 2s-3 & & 2 & & & & 2s-2 \\
 & & 2s-1 & & & & 2s & & 2 & & 5 & & & & 6 & & 2s-4 \\
 & & & & & & & & & & 3 & & 2s-5 & & 4 & & 2s-4 \dots \\
 & & & & & & & & & & 2s-5 & & 9 & & 10 & & 2s-9 & & \dots & & (\mathbb{Z}_{2s+1}) \\
 & & & & & & & & & & \dots & s-2 & & s+2 & & s-1 & & s \\
 & & & & & & & & & & \dots & & 4 & & 3 & & 1
 \end{array}$$

Однако мы предпочитаем более геометрическое описание общего способа решения. Вначале несколько замечаний.

Если мы переставим, например, числа 4 и 5 в нижней строке решения для $s = 4$, то получим другое решение той же задачи.

Во всех данных решениях число зубцов, направленных вниз, равно числу зубцов, направленных вверх.

Вместо нахождения гребня со свойствами (A1) — (A4) мы рассмотрим другую подобную задачу, а именно, нахождение цепной диаграммы в циклической форме.

Рассмотрим на окружности $2s + 1$ точек, которые являются вершинами правильного $(2s + 1)$ -угольника. Обозначим вершины $0, 1, 2, \dots, 2s$. Определим длину хорды, связывающей две вершины k и h , формулой

$$\min(|k - h|, 2s + 1 - |k - h|).$$

Таким образом, наибольшая возможная длина хорды равна s . Рассмотрим теперь следующую проблему хорд.

ПРОБЛЕМА ХОРД. *Требуется начертить непрерывную последовательность хорд со свойствами:*

(Ch1) *Последовательность начинается в точке 0.*

(Ch2) *Последовательность проходит через каждую точку ровно один раз.*

(Ch3) *Каждая возможная длина хорды появляется в последовательности хорд ровно дважды.*

Эту проблему хорд очень легко решить. На рис. 7.28 дано решение для $s = 6$. Длины использованных хорд равны по порядку 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Обобщение на произвольное число s очевидно. Назовем решение (или его часть) *простым зигзагом*, если длины хорд возрастают или убывают на 1 и угол между двумя последовательными хордами всегда острый.

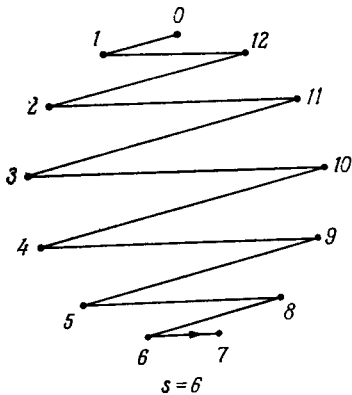


Рис. 7.28.

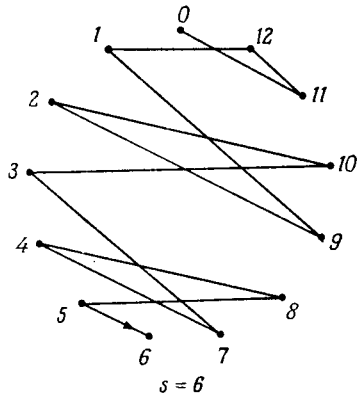


Рис. 7.29.

Раз эта проблема хорд оказалась слишком простой, сделаем ее потруднее.

Усиленная проблема хорд. *Требуется найти последовательность хорд со свойствами (Ch2), (Ch3) и свойством*

(Ch1*) *Последовательность начинается с*

$$0, 2s - 1, 2s, 1, \dots$$

На рис. 7.29 показано решение для $s = 6$. Прежде чем обсуждать общее решение, докажем, что *каждое решение усиленной проблемы хорд дает решение проблемы гребня.*

Рассмотрим данную последовательность хорд. Для каждого k ($k = 1, 2, \dots, s$) имеются две хорды длины k . Пометим одну хорду числом k , а другую — числом $2s + 1 - k$.

Теперь построим гребень с $2s$ зубцами. В качестве токов на горизонталях возьмем номера вершин в данной последовательности и все стрелки на горизонталях направим вправо. Этим обеспечивается свойство (A2). В качестве токов на зубах возьмем пометки хорд в том же порядке, в каком они появляются в данной последовательности хорд. Таким образом выполнится свойство (A3).

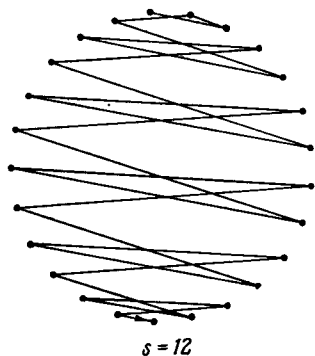


Рис. 7.30.

Если h и k — токи на двух последовательных горизонталях и $h < k$, то ток на промежуточном зубце равен $k - h$ или $2s + 1 - k + h$. В первом случае направим стрелку на зубце вверх, во втором случае — вниз. Если $k < h$, то выберем противоположную ориентацию зубца. В любом

случае выполняется ЗКТ и, следовательно, выполняется свойство (A4).

Первые три хорды имеют длины 2, 1, 2. Мы можем обозначить их $2s - 1$, $2s$, 2. Следовательно, можно построить гребень так, чтобы свойство (A1) также выполнялось.

Рис. 7.30 иллюстрирует, как построить общее решение усиленной проблемы хорд для четного s . Длины хорд равны по порядку

2, 1, 2; 5, 6, 5, 6; 9, 10, 9, 10; ...; 4, 3, 4, 3; 1.

Такое решение мы любим называть «фокстрот», так как после четырех шагов конструкция повторяется.

Теперь перейдем к случаю, когда s — нечетное число. Для $s = 1$ или 3 решения нет. Для $s = 5$ задачу решает гребень

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 9 & 10 & 1 & 6 & 2 & 5 & 4 & 7 & 3 & 8 \\ 9 & 10 & 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 8 & 7 & 6 & \end{array} \quad (Z_{11})$$

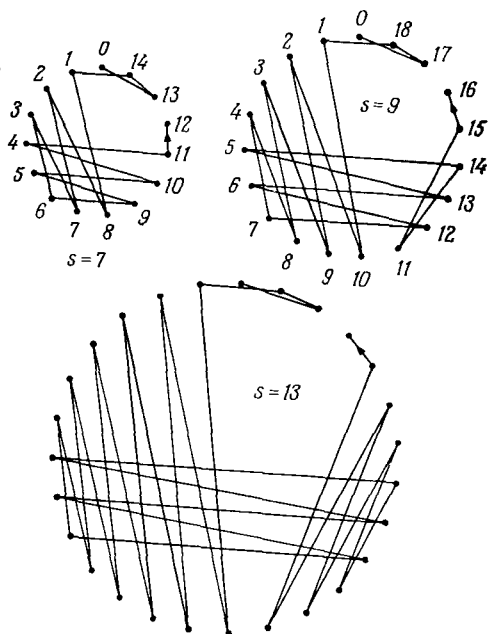


Рис. 7.31.

Несколько следующих случаев см. на рис. 7.31. Легко понять, как работает общая конструкция. Решение составлено из трех простых зигзагов. Зигзаг в середине всегда содержит 5 хорд. В общем решении при нечетном $s \geq 7$ последовательность длин хорд такова:

$$\begin{aligned}
 &2, 1, 2; \\
 &s, s-1, s-2, \dots, 5, 4, 3; \\
 &s-4, s-3, s-2, s-1, s; \\
 &3, 4, 5, \dots, s-5; 1.
 \end{aligned}$$

Последовательность хорд всегда оканчивается в точке $2s-2$.

Проблема добавления соседства. Теперь мы знаем, как распределить токи на графе рис. 7.26, если $s \neq 1$ и $s \neq 3$. Граф токов порождает строку 0 и схему со

строками $0, 1, 2, \dots, 12s + 5, x, y_0$ и y_1 . Так как ток на ребре, инцидентном вершине y , равен числу $6s + 2$, которое порождает подгруппу четных чисел в группе \mathbb{Z}_{12s+6} , то буква y «расщепляется» на y_0 и y_1 , как в случае 2 (§ 7.4).

Эта схема представляет следующий граф G_{12s+9} . Вершины $0, 1, 2, \dots, 12s + 5, x$ все попарно смежны, вершина y_0 смежна с $0, 2, 4, \dots$, а вершина y_1 смежна с $1, 3, 5, \dots$. Других ребер в графе G_{12s+9} нет. Схема представляет треугольное вложение графа G_{12s+9} в некоторую ориентируемую поверхность S .

Рассмотрим двойственную карту M на S . Карта M имеет

$$\alpha_2 = 12s + 9 \text{ стран и}$$

$$\alpha_1 = (12s + 7)(6s + 3) + 12s + 6 \text{ ребер.}$$

Род p поверхности S можно определить, используя формулу

$$\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S) = 3\alpha_0 - 6 + 6p$$

из теоремы 4.4. Получаем

$$p = 12s^2 + 9s + 1.$$

Если подставить $n = 12s + 8$ в правую часть формулы (4.13), то получим

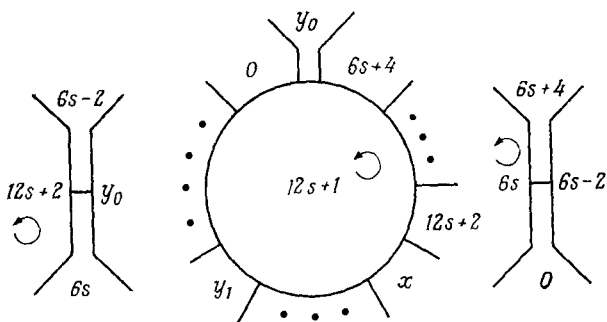
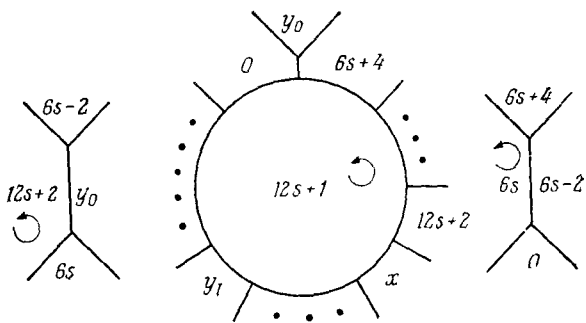
$$12s + 9s + 2.$$

Это означает, что мы должны использовать одну ручку для получения недостающих соседств между x и y_0 и между y_0 и y_1 . Тогда равенство (4.13) будет доказано для $n = 12s + 8$.

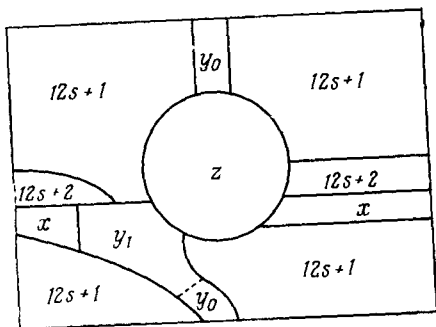
Левая часть рис. 7.26 дает следующую часть схемы:

0.	...	$6s + 4$	y_0	$6s + 2$...	x	1	...	$6s + 9$	5	$6s + 6$	$12s + 4$	4	...
$6s$	0	$6s - 2$	$6s + 4$...
$12s + 1$	$6s - 1$	y_1	$6s - 3$...	x	$12s + 2$...	$6s + 4$	0
$12s + 2$	$6s$	y_0	$6s - 2$

Следовательно, карта M содержит часть, показанную на рис. 7.32.



Р и с. 7.32.



Р и с. 7.33

Преобразуем карту так, как показано в нижней части рис. 7.32. Мы добились соседства $(y_0, 12s + 1)$, но потеряли $(12s + 2, y_0)$. Соседства $(0, 6s + 4)$ и $(6s, 6s - 2)$ остались на карте. Они только изменили свое положение.

Вырежем теперь страну $12s + 1$ из рис. 7.32 (в нижней части) и страну z из карты на отдельном торе, данной на рис. 7.33. Очевидным образом отождествим границы. Мы добились соседств $(12s + 2, y_1)$, (x, y_1) и (y_0, y_1) .

Сотрем границу между y_0 и y_1 и назовем полученную страну y . Так как при добавлении ручки мы добились соседства $(12s + 2, y_1)$, то его можно теперь

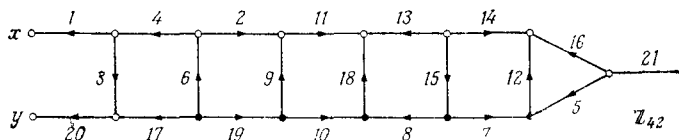


Рис. 7.34

рассматривать как недостающее соседство $(12s + 2, y_0)$. Этим завершается доказательство равенства (4.13), если $n = 12s + 8$ и $s \neq 1$ и $s \neq 3$. Решение для $s = 1$ дано в § 5.2.

Специальное решение для $s = 3$. Граф токов на рис. 7.34 обладает требуемыми свойствами. Воспользуемся частью схемы

0.	31	40	4	1	x	41	...	20	y_0	22	...	29	15	7	...	17	39	...	
2.							...	22	y_0	24	20	0	...
3.					...	x	2	...	23	y_1	25	...							
13.											...	0	28	20	...				
24.	13	22	28	...															

для получения частичного изображения карты, показанного на рис. 7.35 (в верхней части). Преобразуем карту так, как показано в нижней части рис. 7.35. Затем вырежем страну 3 из рис. 7.35 и страну z из

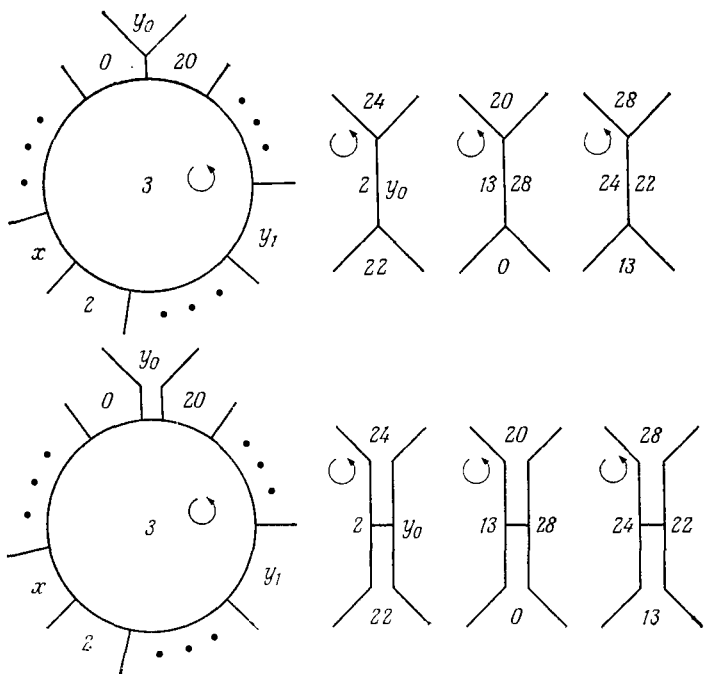


Рис. 7.35.

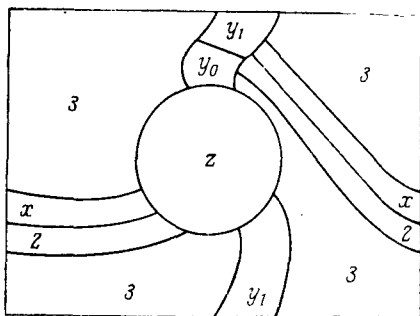


Рис. 7.36.

рис. 7.36. отождествляя границы, получим карту с 44 попарно соседними странами на ориентируемой поверхности рода 137.

Упражнения

7.6.1. Начертите подобный лестнице граф, показанный на рис. 7.26, для $s = 4$ и 5 и разместите все токи в соответствии с гребнем, данным в тексте.

7.6.2. Докажите, что в случае $s = 3$ не существует решения усиленной проблемы хорд (со свойством Ch 1*).

7.6.3. Найдите последовательность хорд со свойствами (Ch 1), (Ch 2) и (Ch 3), оканчивающуюся в вершине 1. Сделайте это сначала для $s = 2, 3$, а затем для произвольного s .

7.6.4. Найдите последовательность хорд со свойствами (Ch 2) и (Ch 3), в которой где-либо в середине имеется следующая часть:

$$\dots, 1, 0, s + 1, s, \dots$$

7.6.5. Найдите последовательность хорд со свойствами (Ch 2) и (Ch 3), начало и конец которой имеют вид

$$0, s + 2, \dots, s + 1, 1.$$

7.6.6. При решении случая 11 в § 7.2 мы использовали ассоциированные гребни. Сопоставьте этим гребням последовательности хорд при $s = 3, 4$ и 5. Как нужно изменить свойства (Ch 1), (Ch 2) и (Ch 3)?

7.6.7. Нарисуйте гребень, ассоциированный с рис. 7.34. Какие из свойств (A1)–(A4) выполняются?

8. НЕОРИЕНТИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ (ИНДЕКС 1)

8.1. МЕТОД УДВОЕНИЯ

Наша цель — определить неориентируемый род графа K_n , т. е. доказать формулу (4.19). Для $n \leq 8$ это уже сделано в § 4.6 и 5.1.

Вначале мы расширим список конструктивных принципов. Первый новый принцип вместе с предыдущими (§ 2.3 и 6.1) приводит к *ориентируемым* треугольным вложениям.

(С8) *Элемент порядка 3 может быть током на концевом ребре.* (Никакие буквы не допускаются в этой вершине степени один.)

В качестве примера рассмотрим рис. 8.1.

Здесь элемент 2 имеет порядок 3. Путевой журнал для этого графа токов имеет вид

$$2 \ 4 \ 1 \ x \ 5 \ 3.$$

Следовательно, полная схема такова:

$$(8.1) \begin{array}{cccccc} 0. & 2 & 4 & 1 & x & 5 & 3 \\ 1. & 3 & 5 & 2 & x & 0 & 4 \\ 2. & 4 & 0 & 3 & x & 1 & 5 \\ 3. & 5 & 1 & 4 & x & 2 & 0 \\ 4. & 0 & 2 & 5 & x & 3 & 1 \\ 5. & 1 & 3 & 0 & x & 4 & 2 \\ x. & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Легко проверить, что правило R^* выполняется. На самом деле это другое представление хорошо известного вложения $K_7 \triangleleft S_1$.

На этот раз мы использовали группу \mathbb{Z}_6 , а не \mathbb{Z}_7 . (Это означает, что группа автоморфизмов вложения $K_7 \triangleleft S_1$ имеет подгруппу, изоморфную группе \mathbb{Z}_7 , а также подгруппу, изоморфную группе \mathbb{Z}_6 .)

Заметим, что в графе токов на рис. 8.1 использованы все конструктивные принципы от (С1) до (С8), исключая (С7).

Докажем, что новый конструктивный принцип (С8) вместе с остальными всегда приводит к (ориентируемой!) схеме, удовлетворяющей правилу Δ^* .

Если d — элемент порядка 3 на концевом ребре, то строка 0 имеет вид

$$0. \dots d -d \dots$$

Так как $2d = -d$, то в строке d имеем

$$d. \dots -d 0 \dots$$

Это доказывает правило Δ^* для строки 0 в том, что касается концевого ребра с током d . Для других строк

это правило вытекает из аддитивного правила.

Любопытно, что мы не смогли использовать это свойство (С8) ни для какого ориентируемого случая, кроме случая 0. Но скоро свойство (С8) потребуется нам для неориентируемых вложений.

В § 2.3 мы показали, что в схеме для графа правила R^* и Δ^* из § 2.2 эквивалентны. Удобно использовать подобное правило, эквивалентное правилу R из § 4.6.

Запись $i. \dots [j k l] \dots$ будет обозначать строку i рассматриваемой схемы, имеющую вид

$$i. \dots j k l \dots \quad \text{или} \quad i. \dots l k j \dots$$

Подобным образом, выражение $i. \dots [j k] \dots$ означает, что элементы j и k — соседи в строке i , но неизвестно, в каком порядке. Тогда правило R из § 4.6 принимает следующий вид.

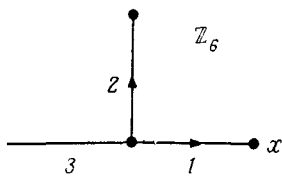


Рис. 8.1.

ПРАВИЛО R . Если $i \dots j k l \dots$, то $k \dots [j i l] \dots$.

ТЕОРЕМА 8.1. Если схема (вращение) графа удовлетворяет приведенному ниже правилу Δ , то она удовлетворяет правилу R , и наоборот.

ПРАВИЛО Δ . Если $i \dots j k \dots$, то $k \dots [i j] \dots$ и $j \dots [k i] \dots$.

Доказательство. Пусть схема для графа удовлетворяет правилу Δ . Рассмотрим часть

$$i \dots j k l \dots$$

строки i . Дважды применяя правило Δ , получим

$$k \dots [i j] \dots \quad \text{и} \quad k \dots [l i] \dots$$

Так как элемент i появляется в строке k только один раз, то получаем

$$k \dots [l i j] \dots$$

Доказательство того, что из правила R вытекает правило Δ , мы оставляем читателю (упр. 8.1.1).

Замечание. Если сравнить правило Δ с правилом Δ^* , то можно подумать, что последняя часть правила Δ является ненужной. Однако это не так.

Например, схема для графа K_5

0.	1	2	3	4
1.	4	0	3	2
2.	1	0	4	3
3.	2	0	1	4
4.	3	0	2	1

удовлетворяет укороченному правилу: если $i \dots j k \dots$, то $k \dots [i j] \dots$, однако не удовлетворяет правилу R .

Теперь для получения неориентируемых вложений мы изменим и расширим список конструктивных прин-

ципов следующим образом. Свойство (C1) мы заменим свойством

(C1*) *Граф токов имеет вершины степени 3, 2 или 1.*

Следующий принцип называется *принципом удвоения*:

(C9) *Если вершина P имеет степень 2, то одно ребро, инцидентное P , должно быть концевым. Ток на другом ребре, втекающий в вершину P , должен быть вдвое больше тока на концевом ребре, вытекающего из вершины P . (На концевом ребре не допускается наличие особых букв, таких, как x .)*

В качестве иллюстрации свойства (C9) см. рис. 8.2 и большинство следующих рисунков.

Изучим строку 0 и другие части схемы, порожденные локальной картиной, показанной на рис. 8.2.

$$\begin{array}{cccccc}
 0. & \dots & 2b & b & -b & -2b & \dots \\
 b. & \dots & . & 2b & 0 & -b & \dots \\
 -b. & \dots & b & 0 & -2b & . & \dots \\
 2b. & \dots & . & . & b & 0 & \dots \\
 -2b. & \dots & 0 & -b & . & . & \dots
 \end{array}$$

Легко проверить, что эта часть схемы удовлетворяет правилу Δ . Кроме того, сравнивая строки 0 и b , видим, что правило R^* не выполняется. Однако это, вообще говоря, не означает, что полная схема обязательно неориентируема.

В примере на рис. 8.3 используются свойство (C6) из § 6.1 и свойство (C9). Схема имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
 0. & 2 & 1 & 3 \\
 1. & 3 & 2 & 0 \\
 2. & 0 & 3 & 1 \\
 3. & 1 & 0 & 2
 \end{array}$$

Если мы обратим порядок элементов в строках 1 и 3, то схема будет удовлетворять правилу R^* . Следова-

тельно, она описывает ориентируемое треугольное вложение. Конечно, это треугольное вложение графа K_4 в сферу. Но этот пример, — по-видимому, единственное ориентируемое применение свойства (С9). Граф токов, изображенный на рис. 8.4, с учетом свойств (С5) и (С9) порождает неориентируемое вложение графа K_6 . На самом деле это есть схема (5.3) из § 5.1, если заменить x на 5.

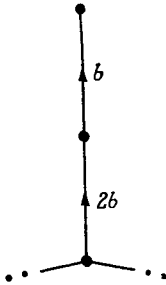


Рис. 8.2.

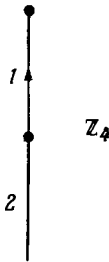


Рис. 8.3.

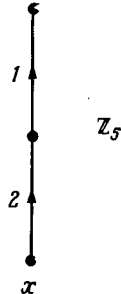


Рис. 8.4.

Прежде чем применять свойство (С9), изучим еще раз часть схемы, порожденную рис. 8.2:

$$\begin{array}{cccccc}
 0. & \dots & 2b & b & -b & -2b & \dots \\
 (*) & b. & \dots & 3b & 2b & 0 & -b & \dots \\
 & 2b. & \dots & 4b & 3b & b & 0 & \dots \\
 (*) & 3b. & \dots & 5b & 4b & 2b & b & \dots
 \end{array}$$

Предположим, что эта схема представляет треугольное вложение графа в ориентируемую поверхность. Тогда можно обратить циклический порядок чисел в некоторых строках так, чтобы выполнялось правило R^* из § 2.3. Сравним строки 0 и b и проверим, выполняется ли правило R^* . Мы видим, что в одной из них циклический порядок нужно изменить на противоположный. Обратим порядок в строке b (помеченной $(*)$). Тогда строка $2b$ должна остаться неизменной. В строке $3b$ порядок нужно изменить и т. д. Следовательно,

$$(8.2) \quad m \cdot b \neq 0 \quad \text{для любого нечетного } m,$$

так как строка 0 остается неизменной, а в строке mb порядок должен быть изменен на противоположный.

8.2. НЕОРИЕНТИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ 0, 3, 7

Случай 0. Пусть n имеет вид $n = 12s$. Для обозначения вершин полного графа K_n мы будем использовать элементы группы \mathbb{Z}_{12s-1} и особую букву x . Рассмотрим графы токов на рис. 8.5, 8.6 и 8.7 (при $s=1$,

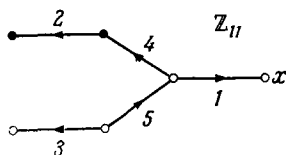


Рис. 8.5.

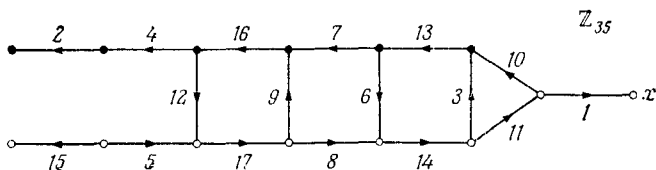


Рис. 8.6.

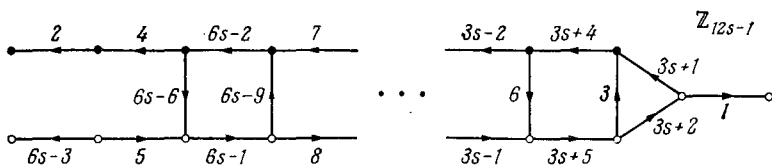


Рис. 8.7.

$s = 3$ и произвольном s). Лестница состоит из $2s - 2$ ступенек. Верхняя вершина каждой ступеньки имеет вращение по часовой стрелке, нижняя — против часовой стрелки. Вращение графа порождает один цикл (C_2) .

Распределение токов на этом графе очень регулярно и использует каждый из элементов $1, 2, 3, \dots, 6s + 1$ ровно один раз (C_3) . На самом деле верх-

ние (или нижние) горизонталы и ступеньки образуют арифметический гребень. Во всех вершинах степени 3 выполняется ЗКТ (С4). Ток 1 в правой части рис. 8.7 порождает всю группу (свойство (С5)). В левой части дважды используется свойство (С9), причем один раз с током $b = 2$ на концевом ребре. Так как

$$(12s - 1) \cdot 2 \equiv 0 \pmod{12s - 1},$$

что противоречит (8.2), то треугольное вложение графа K_n , данное графом токов на рис. 8.7, заведомо неориентируемо. Таким образом, мы доказали формулу (4.19) для неориентируемого рода в случае $n \equiv 0 \pmod{12}$.

Случай 3. Пусть n имеет вид $n = 12s + 3$. Используем для обозначения вершин графа K_n группу \mathbb{Z}_{12s+2}

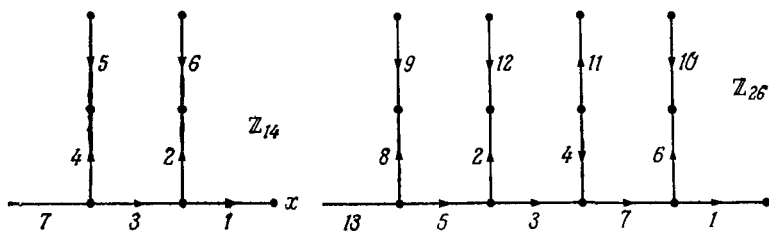


Рис. 8.8.

Рис. 8.9.

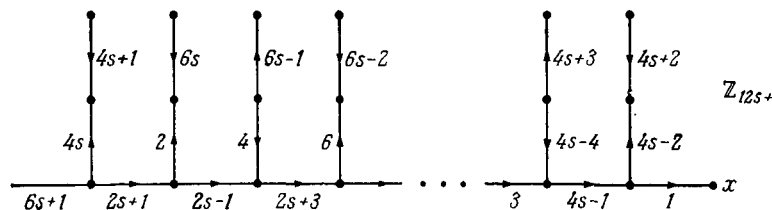


Рис. 8.10.

и особую букву x . На этот раз в качестве графа токов мы используем дерево. Напомним, что в дереве любое вращение индуцирует один-единственный цикл. Рассмотрим граф токов, показанный на рис. 8.10. Рис. 8.8 и 8.9 дают примеры для $s = 1$ и 2. Распреде-

ление элементов $1, 2, \dots, 6s + 1$ снова очень регулярно. Нижние вертикали (исключая первую) и горизонтали (исключая первую) образуют очень простой арифметический гребень. Заметим, что элемент $6s + 1$, имеющий порядок 2, является током на концевом ребре (свойство (С6)). Во всех вершинах степени 2 выполняется свойство удвоения (С9).

Легко видеть, что вложение, порожденное графом токов, изображенным на рис. 8.10, неориентируемо: достаточно взять ток $b = 4s + 2$ на самом правом вертикальном концевом ребре. Так как в противоречие с формулой (8.2)

$$(6s + 1)b \equiv (6s + 1)(4s + 2) \equiv 0 \pmod{12s + 2},$$

то вложение не может быть ориентируемым. Таким образом, формула (4.19) доказана для $n \equiv 3 \pmod{12}$.

Случай 7. Пусть n имеет вид $n = 12s + 7$ и $s \geq 1$. Используем для обозначения вершин графа K_n элементы группы \mathbb{Z}_{12s+6} и особую букву x .

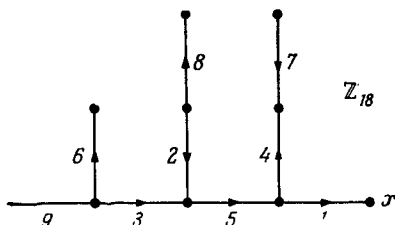


Рис. 8.11.

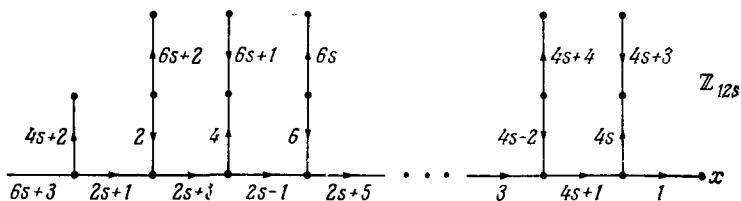


Рис. 8.12.

Рассмотрим граф токов, показанный на рис. 8.12 (на рис. 8.11 приведен частный случай $s = 1$).

Это опять очень простой арифметический гребень. Заметим, что элементы $4s + 2$ и $6s + 3$ в левой части графа токов имеют порядок соответственно 3 и 2. Таким образом, мы применяем конструктивные принципы (С8) и (С6).

Очевидно, каждый из элементов $1, 2, \dots, 6s + 3$ используется ровно один раз и ЗКТ выполнен в каждой вершине степени три. Кроме того, в каждой вершине степени 2 выполняется свойство удвоения (С9).

В правой части рис. 8.12 мы видим ток $4s + 4$. Сравним это с рис. 8.2. Свойство удвоения используется здесь для $b = 4s + 4$. Так как

$$(6s + 3)(4s + 4) \equiv 0 \pmod{12s + 6},$$

что не согласуется с соотношением (8.2), то схема, порожденная графом на рис. 8.12, неориентируема.

Упражнения

8.2.1. Докажите вторую часть теоремы 8.1: если в схеме для некоторого графа выполняется правило R , то выполняется и правило Δ .

8.2.2. Постройте треугольное вложение графа K_{13} в неориентируемую поверхность, используя группу Z_{13} и три раза свойство удвоения.

8.2.3. Постройте неориентируемое треугольное вложение графа K_{10} . Используйте группу Z_9 , удвоение и свойство (С8).

8.2.4. Найдите неориентируемое треугольное вложение графа K_{16} . Используйте группу Z_{15} , свойство (С8) и дважды свойство удвоения (С9).

8.3. КАСКАДЫ

Мы хотим ввести еще один очень полезный конструктивный принцип, который можно применять для построения неориентируемых вложений.

Рассмотрим в графе токов (рис. 8.13) вершину степени 3, в которую втекают токи a, b, c , удовлетворяющие ЗКТ, т. е. такие, что $a + b + c = 0$. Путевой журнал цикла порождает строку 0, которая имеет вид

$$0. \dots a - b \dots b - c \dots c - a \dots$$

Как мы знаем, это в точности согласуется с правилом Δ^* . Но на этот раз нам необходимо только более слабое правило Δ . Например, изменим порядок в последней паре:

$$0. \dots a - b \dots b - c \dots - a \ c \dots$$

Это согласуется с правилом Δ , если речь идет о трех элементах a, b, c . На рис. 8.14 мы попытались продемонстрировать эту возможность. *Вдоль пунктирной линии*, обозначающей часть цикла, нужно делать все *наоборот*: если ток равен a , то надо записывать $-a$

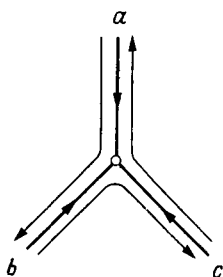


Рис. 8.13.

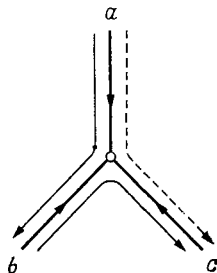


Рис. 8.14.

вместо a ; если вращение по часовой стрелке, то надо рассматривать его как вращение против часовой стрелки, и наоборот.

Теперь нужно найти место, где можно связать пунктирную линию с обычной линией, указывающей маршрут (цикл). Таким местом будет середина некоторого ребра, как показано на рис. 8.15. Но это потребует изменения ориентации «части этого ребра». Все эти соображения приводят в конце концов к следующему определению.

Каскад — это граф токов со следующими дополнительными модификациями:

1) Некоторые из ребер называются *разорванными ребрами*. Разорванное ребро делится его *средней точкой* на два *полуребра*. (Чтобы избежать неприятностей со свойством (С8) и другими свойствами, мы не рассматриваем средние точки как вершины.)

2) Разорванные ребра содержат токи, так же как и другие ребра.

3) Полуребра разорванного ребра либо оба ориентированы к средней точке, либо оба ориентированы от средней точки.

Например, каскад на рис. 8.15 имеет три разорванных ребра.

В графе токов мы рассматривали цикл (или циклы), индуцированный вращением этого графа токов.

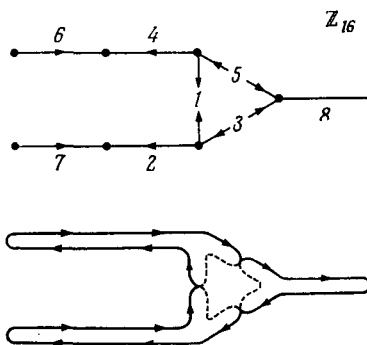


Рис. 8.15.

(Мы интерпретировали цикл как обход графа токов путешественником.) Для каскадов нам придется модифицировать такой цикл (или обход) следующим образом.

Начинаем обход на каком-нибудь неразорванном ребре и поступаем так же, как в графе токов, но в момент прохождения через среднюю точку разорванного ребра «умножаем свое поведение на -1 ». Под этим мы понимаем две вещи:

1) если мы приходим в вершину с вращением против часовой стрелки, то поступаем так, как в вершине с вращением по часовой стрелке, и наоборот;

2) если мы находимся на ребре с током a и проходим по ребру в направлении его ориентации, то записываем в путевой журнал $-a$ вместо a , если же направление противоположно, то записываем $+a$.

Проходя среднюю точку разорванного ребра второй раз, мы, конечно, должны вести себя обычным образом.

Те части обхода, на которых нужно делать все наоборот, в нижней части рис. 8.15 указаны пунктирными линиями. Путевой журнал в этом примере определяет следующую строку 0:

0. 4 10 6 12 11 3 2 9 7 14 1 5 8 13 15.

Используя аддитивное правило, получаем схему для графа K_{16} , удовлетворяющую правилу R .

Случай 4. Этот пример легко обобщить на все $n = 12s + 4$, где $s \geq 1$. Используем для обозначения вершин графа K_{12s+4} элементы группы \mathbb{Z}_{12s+4} . Рассмотрим каскад, показанный на рис. 8.17 (рис. 8.16 дает

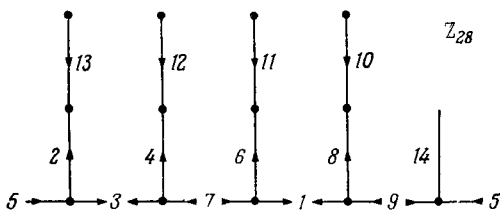


Рис. 8.16.

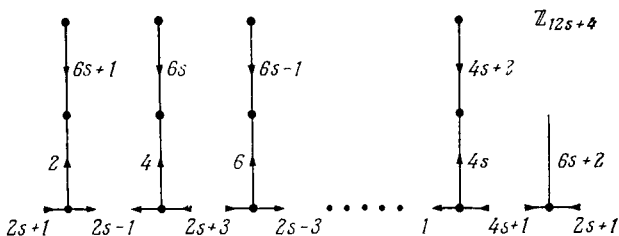


Рис. 8.17.

пример для $s = 2$). Полуребро справа с током $2s + i$ и полуребро слева с тем же током нужно рассматривать как *одно* разорванное ребро. Легко проверить, что каждый из элементов $1, 2, \dots, 6s + 2$ исполь-

зается ровно один раз, причем последний из них — на концевом ребре. В каждой вершине степени 3 выполняется ЗКТ. Во всех вершинах степени 2 выполняется свойство (С9).

Путевой журнал обхода, порожденного каскадом на рис. 8.17, содержит каждый отличный от 0 элемент группы Z_{12s+4} . Конечно, это надо проверить. Поскольку локальная картина вокруг каждой вершины степени 3 выглядит, как показано на рис. 8.14, и все остальные требования выполнены, мы получаем схему, удовлетворяющую правилу Δ . Эта схема определяет треугольное вложение графа K_{12s+4} в замкнутую поверхность. То, что эта поверхность неориентируема, можно доказать следующим образом.

Рассмотрим следующую часть схемы:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 4s & 8s + 2 & 4s + 2 & 8s + 4 & \dots & 2 & 6s + 3 & 6s + 1 & 12s + 2 \\ 2 & \dots & 4s + 2 & 8s + 4 & & & \dots & & & & 6s + 3 & 0 \\ 4s + 2 & \dots & & 0 & 8s + 4 & 2 & \dots & & & & & \end{array}$$

В каких бы из этих трех строк мы ни изменяли порядок на противоположный, правило R^* , или эквивалентное правило Δ^* , не может выполняться сразу для *всех трех* строк. Следовательно, поверхность неориентируема.

Случай 5. Пусть n имеет вид $n = 12s + 5$. Используем группу Z_{12s+3} и каскад, показанный на рис. 8.19. Рис. 8.18 дает пример для $s = 1$. Заметим, что числа

$$(8.3) \quad 1, 4, 7, \dots, 6s - 2$$

появляются в чередующемся порядке на верхних и нижних горизонталях. Числа

$$(8.4) \quad 2, 5, 8, \dots, 6s - 1$$

также появляются в чередующемся порядке на нижних и верхних горизонталях. Разорванные ребра содержат токи, расположенные в таком порядке:

$$(8.5) \quad 6, 12, \dots, 12s.$$

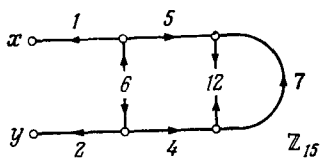


Рис. 8.18

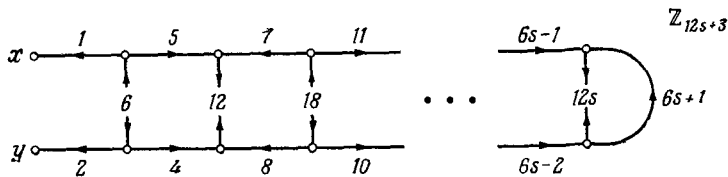


Рис. 8.19.

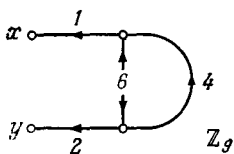


Рис. 8.20.

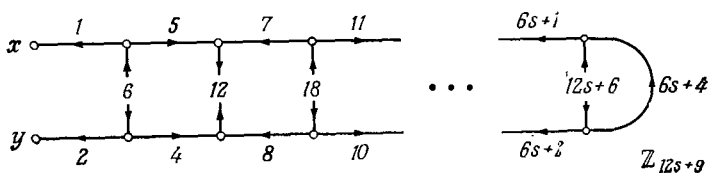


Рис. 8.21.

Ток $6s + 1$ на самом правом ребре, элементы множеств (8.3), (8.4) и (8.5) и все противоположные им элементы исчерпывают ненулевые элементы группы Z_{12s+3} .

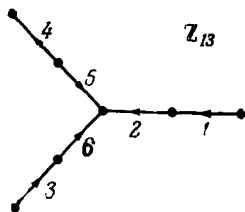
В каждой вершине степени 3 выполняется ЗКТ. Токи на двух концевых ребрах равны 1 и 2. Оба являются образующими группы Z_{12s+3} . Легко проверить, что этот каскад порождает один обход и путевой журнал этого обхода содержит каждый элемент группы Z_{12s+3} и элементы x и y . Таким образом, мы нашли треугольное вложение графа $K_{12s+5} - K_2$ в некоторую замкнутую поверхность. Недостающее соседство между x и y можно получить добавлением одной пленки Мёбиуса так, как указано в конце § 5.3. Полученная поверхность неориентируема.

Случай 11. Если $n = 12s + 11$, то воспользуемся каскадом, показанным на рис. 8.21, где токи берутся из группы Z_{12s+9} . На рис. 8.20 дан пример для $s = 0$. Отметим, что мы использовали каскад на рис. 8.20 для получения схемы (5.8) в § 5.3. Правая часть рис. 8.21 практически такая же, как в случае 5. Этот каскад показывает, что треугольное вложение графа $K_{12s+11} - K_2$ в замкнутую поверхность существует для $s = 0, 1, \dots$.

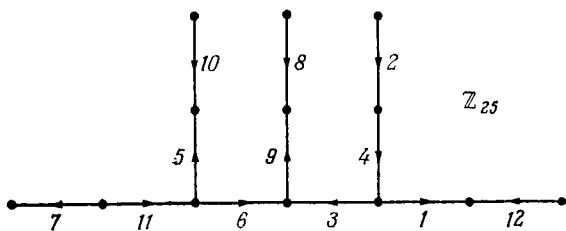
Замечания к случаю 1. Рассмотрим несколько примеров, в которых $n \equiv 1 \pmod{12}$. Граф токов на рис. 8.22 дает треугольное вложение графа K_{13} в неориентируемую поверхность. Для следующего случая $n = 25$ три различных решения для вложения $K_{25} \triangleleft S$ показаны на рис. 8.23, 8.24 и 8.25. Все три решения можно рассматривать как обобщения примера на рис. 8.22.

Ландесман и Янгс в работе [1] построили решение для всех $n \equiv 1 \pmod{12}$, обобщающее рис. 8.24, и решение, обобщающее рис. 8.25. Несмотря на название этой статьи, оба решения очень трудные.

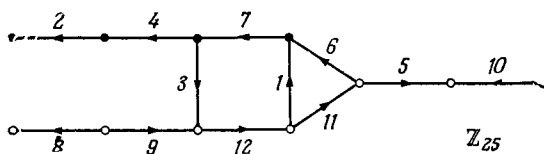
В этой книге мы дадим более простое решение, в котором применяются другие методы (см. § 10.3). Ландесман пытался также найти решение, используя



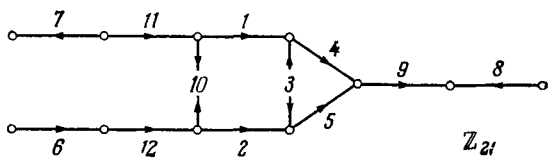
Р и с. 8.22.



Р и с. 8.23.



Р и с. 8.24.



Р и с. 8.25.

щее простой гребень, такой, как на рис. 8.23. Он нашел решение в виде гребня для $n = 25, 37, 49, 61, 73$ и 85 , однако не достиг успеха в поисках общего метода.

Случай 8. Пусть n имеет вид $n = 12s + 8$. Так же как в ориентируемом случае 8, мы построим сначала некоторую карту со странами $1, 2, \dots, 12s + 6, x, y_0, y_1$ на некоторой ориентируемой поверхности S . При этом проблема добавления соседства окажется намного легче, чем в ориентируемом случае 8. Поэтому мы используем очень простой граф токов, показанный на рис. 8.27 (для $s = 2$ см. рис. 8.26). Метод работает также для $s = 0$, когда рис. 8.27 сводится только к трем ребрам. Граф токов на рис. 8.27 определяет некоторую карту M на поверхности S . Как мы уже вычисляли в § 7.6, род поверхности S равен $12s^2 + 9s + 1$. Следовательно,

$$(8.6) \quad E(S) = -24s^2 - 18s.$$

В карте M страна x должна быть соседней с некоторой страной, обозначенной четным числом α , и некоторой страной, обозначенной нечетным числом β , которые являются соседними между собой, как показано на рис. 8.28. Кроме того, страна y_0 должна быть соседней с α , а y_1 — с β . Вырежем внутренность замкнутой 2-клетки внутри страны α и отождествим противоположные точки на границе. То же самое сделаем для β . Эта конструкция добавляет две пленки Мёбиуса к поверхности S , порождая новую поверхность S' . Следовательно,

$$(8.7) \quad E(S') = E(S) - 2.$$

Расширим теперь страны y_0 и y_1 так, как показано на рис. 8.29 (используем одномерные и двумерные подразделения и укрупнения). Сотрем границу между y_0 и y_1 и назовем эту вновь образованную страну y . Полученная карта на S' состоит из n попарно соседних стран. Поверхность S' неориентируема. Ее род q можно вычислить, используя (8.6), (8.7) и равенство

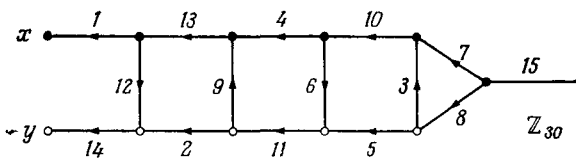


Рис. 8.26.

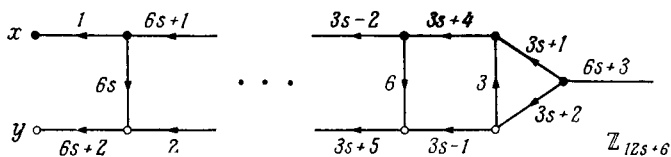


Рис. 8.27.

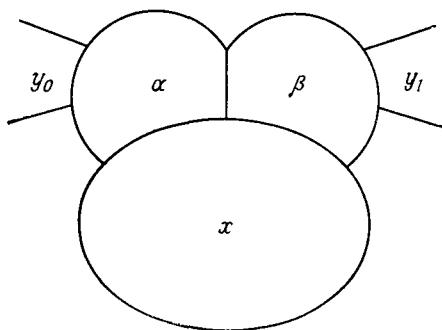


Рис. 8.28.

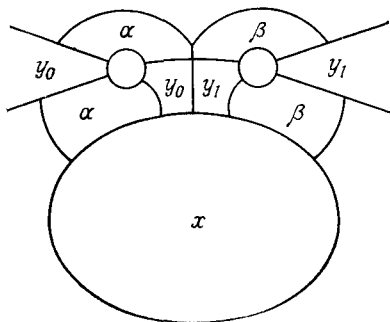


Рис. 8.29.

$E(S') = 2 - q$. Получим

$$q = 24s + 18s + 4.$$

Этим завершается доказательство формулы (4.19) для $n = 12s + 8$.

8.4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ОРИЕНТИРУЕМЫМ СЛУЧАЯМ

Как это ни удивительно, каскады можно использовать даже для построения ориентируемых треугольных вложений. М. Юнгерман [1] нашел следующее решение для половины случая 9.

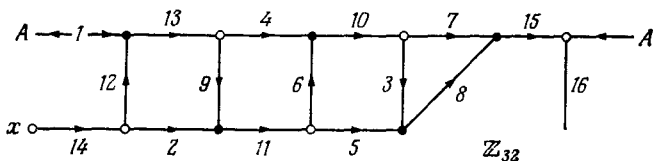


Рис. 8.30.

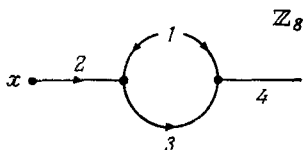


Рис. 8.31.

На рис. 8.30 и 8.31 представлены каскады с единственным разорванным ребром (две точки A необходимо отождествить). Можно проверить, что данное вращение индуцирует один-единственный цикл, путевой журнал которого содержит каждый ненулевой элемент группы ровно один раз. В каждой вершине степени 3 выполняется ЗКТ. Элемент порядка два появляется на концевом ребре. Другое концевое ребро содержит соответственно ток 14 или 2, который порождает подгруппу четных чисел. Это означает, что в соответствующей схеме строка x имеет два цикла.

Схема, порожденная каскадом на рис. 8.31, имеет вид

0.	4	5	6	x	2	7	3	1
1.	5	6	7	x	3	0	4	2
2.	6	7	0	x	4	1	5	3
3.	7	0	1	x	5	2	6	4
4.	0	1	2	x	6	3	7	5
5.	1	2	3	x	7	4	0	6
6.	2	3	4	x	0	5	1	7
7.	3	4	5	x	1	6	2	0
x .	(6	4	2	0)	(7	5	3	1)

Как мы знаем, из конструктивных принципов, которые мы использовали, вытекает, что эта схема удовлетворяет правилу R . Однако если мы обратим порядок во всех нечетных строках, то окажется, что везде выполняется правило R^* . На самом деле мы получим при этом схему (для $n = 9$), уже описанную в § 5.2, где мы интерпретировали строку x как цилиндр.

Очень легко получить обобщение для $n = 12s + 9$, где s четно, используя группу \mathbb{Z}_{12s+8} . На рис. 8.30 показан следующий случай $s = 2$. В общем случае имеется арифметический гребень, в котором по вертикалям текут токи

$$6s, \dots, 9, 6, 3.$$

Ориентации чередуются. Верхняя левая горизонталь является единственным разорванным ребром в каскаде и содержит ток 1. Все остальное однозначно определяется ЗКТ. В вершинах верхней (нижней) горизонтали чередуются вращения по часовой стрелке и против часовой стрелки (соответственно против часовой стрелки и по часовой стрелке).

Этот каскад обладает следующими двумя дополнительными свойствами:

(F1) *Группа имеет четный порядок.*

(F2) Если ток на ребре (разорванном или нет) нечетный, то это ребро появляется в цикле дважды в одном и том же направлении. Если ток четный, то это ребро используется в цикле в обоих направлениях.

Конечно, если ребро используется дважды в одном и том же направлении, то в одном из этих случаев цикл должен иметь «неправильное поведение».

Очень легко показать, что два свойства (F1) и (F2) гарантируют ориентируемость схемы. Достаточно просто изменить на противоположный порядок во всех нечетных строках.

Мы опускаем здесь детали, так как в § 6.5 уже дано решение для случая 9 при всех s .

9. РЕШЕНИЯ ИНДЕКСА 2 и 3

9.1. ПРИМЕРЫ И МЕТОД

Все графы токов, которые мы использовали в предыдущих главах, обладают тем свойством, что данное вращение индуцирует один-единственный цикл. Путевой журнал этого цикла дает строку 0, а все остальные строки определяются аддитивным правилом (или для особых строк (таких, как x и др.) правилом R^*). Мы будем говорить, что строка 0 порождает всю схему и решение является решением *индекса 1*.

Однако можно использовать и более чем одну порождающую строку. Схема для $n = 14$ в § 5.2 обладает тем свойством, что четные (нечетные) строки получаются из строки 0 (строки 1) с помощью аддитивного правила. Здесь мы имеем две порождающие строки: строку 0 и строку 1. Мы будем говорить, что это схема *индекса 2*.

Схема для $n = 12$ из § 5.2 является схемой *индекса 4*, так как имеется четыре порождающих строки. Для трех ориентируемых случаев $n \equiv 3, 5$ и $6 \pmod{12}$ мы дадим ниже решение *индекса 3*.

Схему или треугольное вложение *бóльшего индекса* также можно получить из графа токов. Мы рассмотрим только решения *индексов 2 и 3*. В качестве примеров для *индекса 2* рассмотрим графы токов на рис. 9.1, 9.2 и 9.3. Они обладают следующими нужными нам свойствами:

- (D1) *Степень каждой вершины равна 3, 2 или 1.*
- (D2) *Данное вращение индуцирует два цикла.*
- (D3) *Каждый элемент группы, кроме 0, появляется ровно один раз в путевом журнале для каждого цикла.*

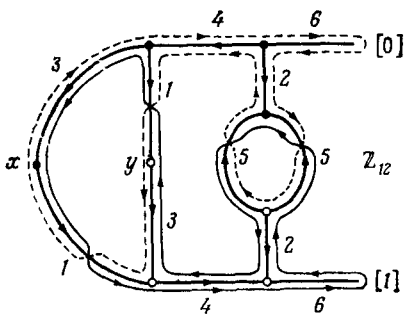


Рис. 9.1.

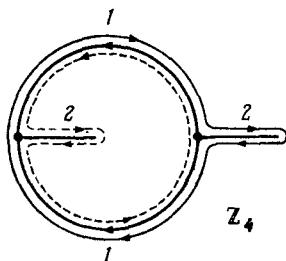


Рис. 9.2.

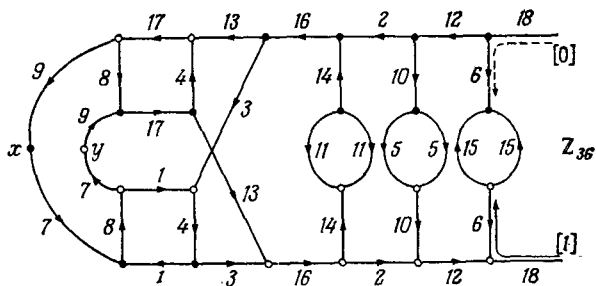


Рис. 9.3.

(D4) В каждой вершине степени 3 выполняется ЗКТ.

(D5) Каждая вершина степени 2 обозначена символами типа x, y, \dots . Токи на двух ребрах, инцидентных этой вершине, являются нечетными числами. Сумма обоих токов (рассматриваемых как втекающие) порождает подгруппу всех четных элементов.

(D6) Элемент порядка 2 может быть током на концевом ребре.

(D7) Ток на ребре, используемом в обоих циклах, является нечетным числом. Ток на ребре, используемом дважды в одном и том же цикле, является четным числом.

Первые свойства (D1) — (D6) представляют собой более или менее очевидные модификации конструктивных принципов (C1) — (C6) для решений индекса 1. Заметим, что (D6) слабее, чем (C6). На рис. 10.7 мы увидим пример графа токов, в котором элемент порядка 2 находится не на концевом ребре. Свойство (D7) — очень важное дополнительное свойство. Объясним теперь, как граф токов со свойствами (D1) — (D7) порождает треугольное вложение некоторого графа.

Запишем путевой журнал для обоих циклов; один из них обозначим [0], другой [1]. Для примера, приведенного на рис. 9.1, получим

[0]. 6 2 7 5 10 4 1 y 3 11 x 9 8

[1]. 6 10 5 7 2 8 9 y 11 3 x 1 4.

Путевой журнал [0] сразу же дает строку 0:

0. 6 2 7 5 10 4 1 y 3 11 x 9 8.

Строка 1 получается из [1] прибавлением $+1$ ко всем элементам без изменения порядка:

1. 7 11 6 8 3 9 10 y 0 4 x 2 5.

После этого каждая четная (нечетная) строка получается по аддитивному правилу из строки 0 (из строки 1). Строки x и y определяются правилом R^* . Полная схема для этого примера приведена в § 5.2 и дает

вложение $K_{14} - K_2 \triangleleft S_9$. Таким же образом из рис. 9.3 получается вложение $K_{38} - K_2 \triangleleft S_{99}$. Рингель и Янгс [5] дали общее доказательство существования треугольного вложения графа $K_{12s+2} - K_2$ в ориентируемую поверхность, но только для нечетных значений s

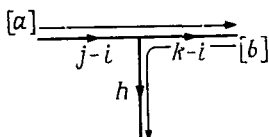


Рис. 9.4.

Докажем теперь, что свойства (D1) — (D7) всегда гарантируют, что полученная схема удовлетворяет правилу Δ^* .

Предположим, что часть строки i имеет вид

$$i. \dots j, k. \dots$$

Следовательно, путевой журнал одного из двух циклов имеет вид

$$[a]. \dots j-i, k-i. \dots,$$

где $a = 0$ или 1 и, согласно конструкции,

$$(9.1) \quad a \equiv i \pmod{2}.$$

Поэтому где-то в графе токов имеется локальная картина, изображенная на рис. 9.4, и мы видим, что цикл [b] имеет вид

$$[b]. \dots i-k, j-k. \dots,$$

так как $h = j - k$ согласно ЗКТ. Свойство (D7) утверждает, что $k - i \equiv b - a \pmod{2}$. Учитывая (9.1), получаем

$$k \equiv b \pmod{2}.$$

Следовательно, строка k имеет вид

$$k. \dots i, j. \dots$$

Таким образом, правило Δ^* выполняется. Это доказательство включает возможность того, что элемент $k - i$ имеет порядок 2.

Легко также доказать, что свойство (D5) гарантирует, что строка x , построенная согласно правилу R^* , будет полной перестановкой всех элементов группы. Мы оставляем это доказательство читателю.

Пример на рис. 9.2 описывает вложение графа K_4 в сферу. Обобщение рис. 9.2 неизвестно.

Пример решения индекса 3. Чтобы дать представление о решениях индекса 3, рассмотрим граф токов, изображенный на рис. 9.5, где два конца A (а также два конца B) отождествляются. Отождествление концов лестницеподобного графа с таким перекручива-

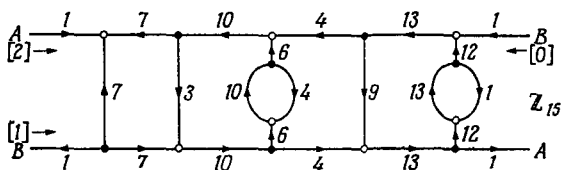


Рис. 9.5.

нием приводит к лестницеподобному графу типа листа Мёбиуса. Без такого перекручивания получаем лестницу цилиндрического типа.

Следующие свойства (E1)–(E6) являются конструктивными принципами для решений индекса 3. Они выполняются в примере, рассмотренном на рис. 9.5. Свойство (E5) в этом примере не применяется.

(E1) Каждая вершина имеет степень 3.

(E2) Данное вращение индуцирует три цикла, обозначаемые $[0]$, $[1]$, $[2]$.

(E3) Каждый элемент группы, кроме 0, появляется точно один раз в путевом журнале каждого цикла.

(E4) ЗКТ выполняется в каждой вершине степени три, исключая вершины, помеченные буквами.

(E5) Каждая вершина, обозначенная буквой, обладает следующими двумя свойствами:

(1) каждый из трех циклов проходит через эту вершину;

(2) сумма трех токов (которые считаются, как вытекающие) в данной вершине порождает подгруппу всех чисел, кратных 3.

(E6) Если ориентированное ребро с током c находится в цикле $[a]$, а то же ребро с противоположной ориентацией и током $-c$ принадлежит циклу $[b]$, то $c \equiv b - a \pmod{3}$. (Эта ситуация показана на рис. 9.7.)

На рис. 9.6 показаны три цикла. Читателю предлагается срисовать этот граф, раскрасив циклы в три различных цвета.

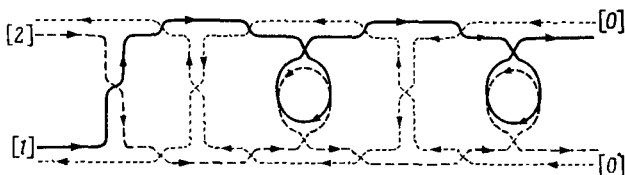


Рис. 9.6.

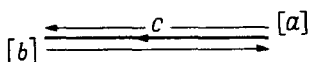


Рис. 9.7.

Если имеет место такая локальная картина, как на рис. 9.7, то мы будем говорить, что цикл $[a]$ встречает цикл $[b]$ вдоль ребра с током c .

Свойство (E6) является очень сильным требованием и делает трудным нахождение решения индекса 3. Оно означает, например, что все ребра, вдоль которых цикл $[a]$ встречает самого себя, содержат токи, сравнимые с 0 mod 3.

Запишем путевые журналы для каждого из трех циклов, данных на рис. 9.5 и 9.6:

[0].	1	13	9	11	5	12	7	14	2	6	4	10	3	8
[1].	14	7	8	5	9	4	10	6	11	2	3	1	13	12
[2].	1	8	7	10	6	11	5	9	4	13	12	14	2	3.

Для решения индекса 3 аддитивное правило необходимо модифицировать следующим образом.

Для каждого элемента $i \equiv a \pmod{3}$ строка i получается из путевого журнала цикла $[a]$ прибавлением $+i$ ко всем элементам строки без изменения порядка элементов ($a = 0, 1$ или 2).

Таким образом, мы получаем схему

0.	1	13	9	11	5	12	7	14	2	6	4	10	3	8
3.	4	1	12	14	8	0	10	2	5	9	7	13	6	11
6.	7	4	0	2	11	3	13	5	8	12	10	1	9	14
9.	10	7	3	5	14	6	1	8	11	0	13	4	12	2
12.	13	10	6	8	2	9	4	11	14	3	1	7	0	5
1.	0	8	9	6	10	5	11	7	12	3	4	2	14	13
4.	3	11	12	9	13	8	14	10	0	6	7	5	2	1
7.	6	14	0	12	1	11	2	13	3	9	10	8	5	4
10.	9	2	3	0	4	14	5	1	6	12	13	11	8	7
13.	12	5	6	3	7	2	8	4	9	0	1	14	11	10
2.	3	10	9	12	8	13	7	11	6	0	14	1	4	5
5.	6	13	12	0	11	1	10	14	9	3	2	4	7	8
8.	9	1	0	3	14	4	13	2	12	6	5	7	10	11
11.	12	4	3	6	2	7	1	5	0	9	8	10	13	14
14.	0	7	6	9	5	10	4	8	3	12	11	13	1	2.

Нетрудно было бы проверить, что в этой схеме для графа K_{15} выполняется свойство Δ^* . Однако лучше доказать, что в общем случае свойство (E5) вместе с модифицированным аддитивным правилом гарантирует выполнение правила Δ^* . Допустим, что в схеме имеется часть

$$i \dots j, k \dots$$

Тогда в одном из трех циклов, скажем $[a]$, имеем

$$(9.2) \quad [a] \dots j - i, k - i \dots \text{ и } a \equiv i \pmod{3}.$$

Вдоль ребра с током $k - i$ цикл $[a]$ встречает другой цикл, скажем $[b]$. Возможность $[a] = [b]$ не исключается.

Из рис. 9.4 мы видим, что путевой журнал цикла $[b]$ выглядит так:

$$[b]. \dots i - k, h, \dots,$$

где $h = j - k$. Свойство (E6) утверждает, что $k - i \equiv b - a \pmod{3}$. Из (9.2) следует, что

$$k \equiv b \pmod{3}.$$

Согласно модифицированному аддитивному правилу, получаем

$$k. \dots i, j, \dots;$$

тем самым устанавливается правило Δ^* .

9.2. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ 3 И 5

Случай 3. Мы покажем, что если n имеет вид $n = 12s + 3$, то существует треугольное вложение графа K_n в ориентируемую поверхность. Как мы видели в предыдущем параграфе, граф токов, изобра-

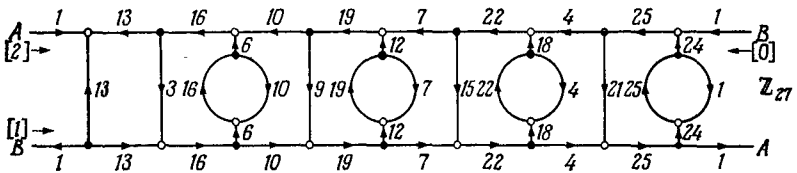


Рис. 9.8.

женный на рис. 9.5, дает треугольное вложение графа K_{15} . Обобщение получить легко. Сначала рассмотрим следующий случай $n = 27$, показанный на рис. 9.8. В обоих примерах конструктивные принципы (E1)—(E4) и (E6) для индекса 3 выполнены.

Кроме того, заметим, что в обоих примерах 3-я, 5-я и т. д. степени подобного лестнице графа подразделены двумя вершинами и лункой, которая называется *кругом*¹⁾. Два ребра, образующих круг, называются *полукруглыми ребрами*.

¹⁾ В оригинале: globe. — Прим. ред.

Заметим, что любые две соответствующие друг другу горизонтали и полукруглое ребро между ними всегда содержат один и тот же ток. Имея это в виду, легко и в общем случае $n = 12s + 3$ дополнить незавершенный граф токов, показанный на рис. 9.9. Основ-

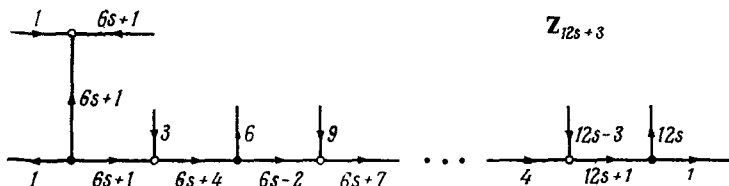


Рис. 9.9.

ная часть рис. 9.9 является простым арифметическим гребнем. Конечно, необходимо проверить, что свойства (E1) — (E4) и (E6) выполняются.

Замечание. Решения этого типа очень жесткие. Например, если переставить два тока 10 и 4 (включая ориентацию) в первом круге на рис. 9.5, то свойство (E3) нарушается.

Случай 5. Техника, развитая при решении случая 3, делает решение случая 5 совсем простым. Мы построим треугольное вложение графа $K_n - K_2$ в ориен-

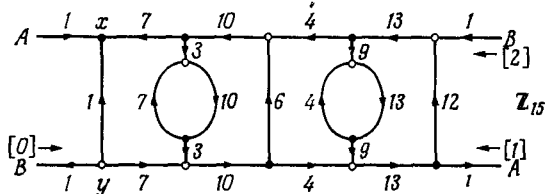


Рис. 9.10.

тируемую поверхность для всех $n \equiv 5 \pmod{12}$. Пусть n имеет вид $n = 12s + 5$. Используем для обозначения двух особых вершин символы x и y , а для других вершин — элементы группы Z_{12s+3} .

Пример $s = 1$ показан на рис. 9.10. Имеются две особые вершины x и y . Заметим, что все свойства (E1) — (E6) выполняются.

Путевые журналы трех циклов имеют вид

[0].	1	x	8	5	9	4	13	12	14	y	7	10	6	11	2	3
[1].	13	9	11	5	12	7	10	3	8	y	1	x	14	2	6	4
[2].	13	9	11	2	6	4	10	3	8	5	12	7	x	14	y	1

Используя аддитивное правило и не изменяя символов x и y , получим схему

0.	1	x	8	5	9	4	13	12	14	y	7	10	6	11	2	3
3.	4	x	11	8	12	7	1	0	2	y	10	13	9	14	5	6
6.	7	x	14	11	0	10	4	3	5	y	13	1	12	2	8	9
9.	10	x	2	14	3	13	7	6	8	y	1	4	0	5	11	12
12.	13	x	5	2	6	1	10	9	11	y	4	7	3	8	14	0
1.	14	10	12	6	13	8	11	4	9	y	2	x	0	3	7	5
4.	2	13	0	9	1	11	14	7	12	y	5	x	3	6	10	8
7.	5	1	3	12	4	14	2	10	0	y	8	x	6	9	13	11
10.	8	4	6	0	7	2	5	13	3	y	11	x	9	12	1	14
13.	11	7	9	3	10	5	8	1	6	y	14	x	12	0	4	2
2.	0	11	13	4	8	6	12	5	10	7	14	9	x	1	y	3
5.	3	14	1	7	11	9	0	8	13	10	2	12	x	4	y	6
8.	6	2	4	10	14	12	3	11	1	13	5	0	x	7	y	9
11.	9	5	7	13	2	0	6	14	4	1	8	3	x	10	y	12
14.	12	8	10	1	5	3	9	2	7	4	11	6	x	13	y	0
x.	0	1	2	9	10	11	3	4	5	12	13	14	6	7	8	
y.	3	2	1	9	8	7	0	14	13	6	5	4	12	11	10.	

Как обычно, строку x и строку y мы получили, используя правило R^* (или Δ^*). Эта схема описывает ориентируемое треугольное вложение графа $K_{17} - K_2$.

Взяв каждый третий элемент в строке x , получаем последовательность 0, 9, 3, 12, 6, или 1, 10, 4, 13, 7, или 2, 11, 5, 14, 8. Это арифметические прогрессии с разностью $d = 9$. С другой стороны, сумма трех токов, втекающих в вихрь x на рис. 9.10, равна $d = 9$ (то же самое имеет место в вихре y и в строке y с $d = 6$). Это не случайно. Легко доказать следующее общее утверждение. Если в вихре x в решении ин-

декса 3 сумма всех трех токов (которые считаются, как втекающие) равна d , то строка x , построенная по правилу Δ^* , имеет вид

$$x. a, b, c, a + d, b + d, c + d, a + 2d, \dots$$

Доказательство такое же, как в § 7.1, и мы оставляем его читателю. Так как строка x имеет указанную выше форму, то мы видим теперь, почему в свойстве (E5) требуется, чтобы сумма d была образующим элементом в подгруппе всех чисел, кратных 3. На самом деле свойство (E5) гарантирует существование подходящей строки x .

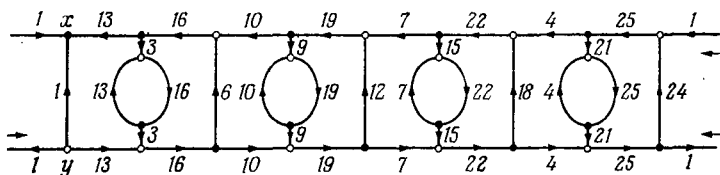


Рис. 9.11.

На рис. 9.11 изображен граф токов со свойствами (E1) — (E6), который дает треугольное вложение графа $K_{29} - K_2$. Заметим, что распределение элементов группы \mathbb{Z}_{27} почти такое же, как на рис. 9.8. Нижние горизонтальные и примыкающие к ним вертикали снова образуют арифметический гребень. В действительности это в точности тот же гребень, что и на рис. 9.8. Это замечание можно использовать для описания общего решения. Возьмем незавершенную картину на рис. 9.9 и изменим ток на первой левой вертикали с $6s + 1$ на 1. Кроме того, изменим вращение на обоих концах этой вертикали и назовем эти вершины x и y .

Дополним остальную часть очевидным образом, так чтобы ступени с токами 3, 9, 15, ... стали круговыми ступенями. Заметим, что токи, втекающие в вершину x , равны 1, 1 и $6s + 1$. Их сумма равна $6s + 3$, а наибольший общий делитель равен $(6s + 3, 12s + 3) = (6s + 3, -3) = 3$. Это обеспечивает свойство (E5) для вихря x . Для вихря y сумма всех втекающих

токов равна $-1 -1 - (6s + 1) = -(6s + 3)$ и также порождает подгруппу всех чисел, кратных 3. Таким образом, мы построили треугольное вложение графа $K_n - K_2$ в некоторую ориентируемую поверхность для всех $n \equiv 5 \pmod{12}$. Очевидно, что можно добавить одно недостающее соседство с помощью одной дополнительной ручки.

Из теоремы 5.7 следует, что равенство (4.13) для рода графа K_n справедливо при всех $n \equiv 5 \pmod{12}$.

9.3. ОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ 6

Объяснить этот случай, к сожалению, несколько труднее. Пусть n имеет вид $n = 12s + 6$. Для обозначения $n = 12s + 6$ вершин графа $K_n - K_3$ мы будем использовать элементы группы \mathbb{Z}_{12s+3} и символы x, y, z . Мы покажем, что существует треугольное вложе-

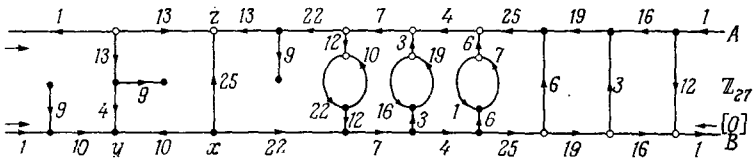


Рис. 9.12.

ние графа $K_n - K_3$ в ориентируемую поверхность для всех $s \geq 2$. Случай $s = 1$ см. в § 5.2. Общее решение годится только для $s \geq 4$. Поэтому для $s = 2$ и $s = 3$ потребуется специальное решение. Решение для $s = 2$ дано на рис. 9.12. Читатель должен проверить, что выполняются свойства (E2) — (E6).

Свойство (E1), очевидно, следует заменить таким свойством:

(E1*) Каждая вершина имеет степень 3 или 1.

Кроме того, на рис. 9.12 мы видим три концевых ребра; все три содержат ток 9. Это означает, что выполняется следующее свойство:

(E7) Элемент порядка 3 может быть током на концевом ребре (при этом в вершине степени 1 не должно быть буквы).

Этот конструктивный принцип близок соответствующему свойству (C8) для решения индекса 1. Мы используем (E7) только в данном специальном примере $n = 30$. Поэтому мы не даем доказательства того, что свойство (E7) работает в общем случае.

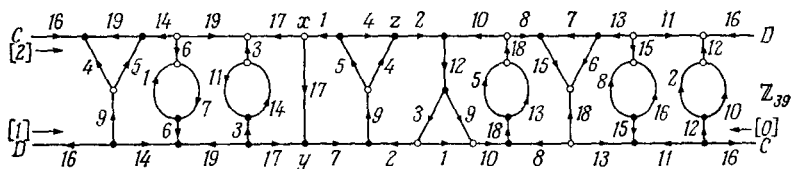


Рис. 9.13.

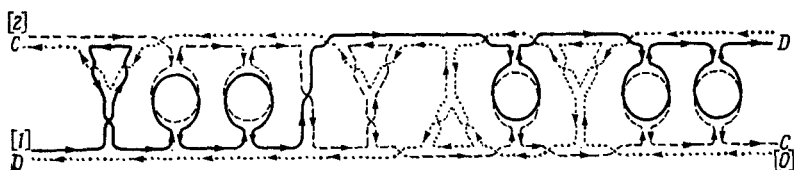


Рис. 9.14.

Рис. 9.13 и 9.14 показывают, что существует ориентируемое треугольное вложение графа $K_{42} - K_3$, а рис. 9.15 описывает общее решение индекса 3 для случая 6 при всех $s \geq 4$. Можно проверить, что условия (E1) — (E6) для индекса 3 выполняются. К сожалению, это требует времени. Но к настоящему моменту решение, показанное на рис. 9.15, найденное Гаем и Янгсом [1], является простейшим известным решением для случая 6.

Решение для случая $s = 3$, показанное на рис. 9.13 и 9.14, почти такое же, как в общем случае на рис. 9.15. На самом деле, несколько усложнив рис. 9.15, можно добиться того, что он будет пригоден для всех $s \geq 3$.

9.4. НЕОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ 9

Этот случай мы решим с помощью каскада индекса 3. Для представления вершин графа K_{12s+9} будем использовать элементы группы Z_{12s+9} . Каскад имеет три части, как на рис. 9.16 ($s = 1$). Две части справа являются точными копиями каскада, показанного на рис. 8.21, а левая часть получается умножением всех токов на -2 . Так как -2 взаимно просто

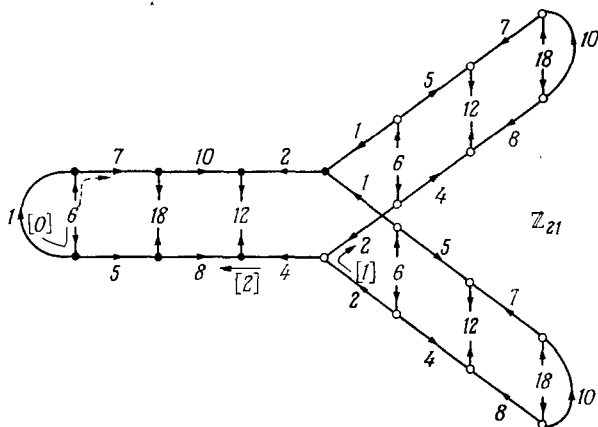


Рис. 9.16.

с $12s + 9$, то это умножение не нарушает нужные свойства каскадов.

В самом деле, если g — ток на ориентированном ребре на рис. 8.21, то $-2g$, новый ток на ориентированном ребре, сравним с $g \pmod 3$. Следовательно, распределение токов $\pmod 3$ одинаково во всех трех частях каскада. Это замечание позволяет легко проверить, что каскад на рис. 9.16 ($s = 1$) и его обобщение для произвольного s удовлетворяют свойствам (E1) — (E5) решения индекса 3 (см. § 9.1). Свойство (E5) не применяется, а свойства (E2), (E3) нужно понимать в смысле каскадов (умножать поведение на -1 в середине каждого разорванного ребра).

Свойство (E6) необходимо обобщить следующим образом.

(E6*) Если вдоль ребра c ток c картина такова, как на рис. 9.7 (т. е. оба цикла имеют нормальное поведение), или на рис. 9.17 (поведение цикла $[a]$

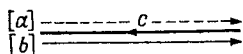


Рис. 9.17.

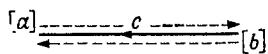


Рис. 9.18.

умножено на -1), или на рис. 9.18 (поведение обоих циклов умножено на -1), то $c \equiv b - a \pmod{3}$.

Свойство (E6*) обеспечивает выполнение правила R.

Заметим, что свойство (E6*) имеет смысл и тогда, когда рассматриваемое ребро является разорванным. При проверке свойства (E6*) в этом случае помогает то, что все разорванные ребра каскада имеют токи, сравнимые с $0 \pmod{3}$.

Этот каскад порождает треугольное вложение графа K_{12s+9} для всех $s \geq 0$. Соответствующая поверхность должна быть неориентируемой, так как ее эйлерова характеристика является нечетным числом.

Замечание. Описанный выше метод годится и для неориентируемого случая 3. Однако в этом случае имеется намного более простое решение, которое приведено в § 8.2.

10. ИНДУКТИВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

10.1. ИНДУКЦИЯ ИНДЕКСА 3

С помощью следующей теоремы мы разрешим неориентируемый случай 1. Ориентируемый случай теоремы 10.1 нас не очень интересует, так как мы уже имеем легкие решения в случаях 1 и 7.

ТЕОРЕМА 10.1. *Если существует (не)ориентируемое треугольное вложение графа K_{2t+1} для $t \geq 2$, то существует (не)ориентируемое треугольное вложение графа K_{6t+1} .*

Следующая конструкция дает доказательство.

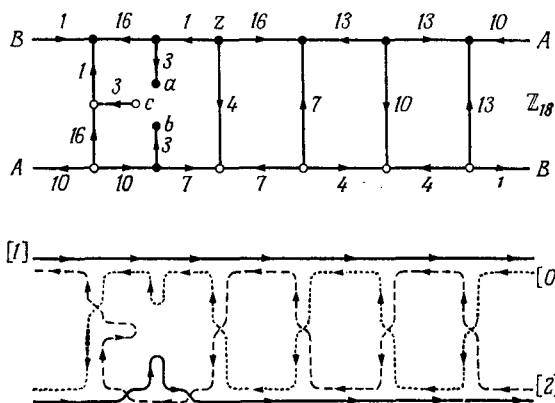


Рис. 10.1.

Рассмотрим группу Z_{6t} и граф токов, показанный на рис. 10.1 для $t = 3$ и на рис. 10.2 для произволь-

ного $t \geq 2$. Этот граф является графом индекса 3, но обладает не всеми свойствами (E1)–(E6) из § 9.1. На самом деле имеют место только свойства (E2),

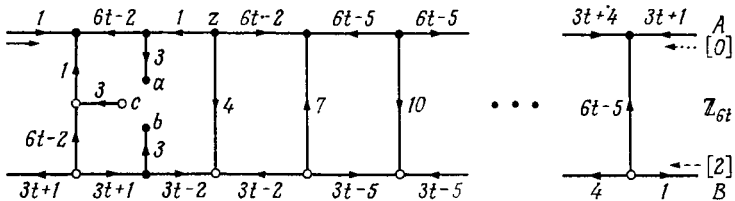


Рис. 10.2.

(E4) и (E6). Остальные свойства выполняются в следующей модифицированной форме.

(E1*) Каждая вершина имеет степень 3 или 1.

(E3*) Каждый элемент группы Z_{6t} , кроме элементов $0, 3, 6, 9, \dots, 6t-6$, появляется ровно один раз в путевом журнале каждого из трех циклов.

(E5*) В вершинах степени 3, помеченных буквами, выполняется свойство (E5).

(E7*) Каждая из трех вершин a, b, c имеет степень 1 и инцидентна концевому ребру, содержащему ток 3, соответственно -3 . Каждый из трех циклов $[0], [1], [2]$ проходит в точности через одну из трех вершин a, b, c .

В частном случае $t = 3$ путевые журналы трех циклов, порожденных графом токов на рис. 10.1, имеют вид

[0].	5	4	8	13	11	7	14	z	1	3	a	15	16	17	2	10
[1].	1	2	17	z	16	5	13	8	10	3	b	15	7	11	4	14
[2].	10	14	7	2	z	4	11	8	16	15	c	3	1	17	13	5.

Следовательно, полная схема имеет вид

0.	5	4	8	13	11	7	14	<i>z</i>	1	3	<i>a</i>	15	16	17	2	10		
3.	8	7	11	16	14	10	17	<i>z</i>	4	6	<i>a</i>	0	1	2	5	13		
6.	11	10	14	1	17	13	2	<i>z</i>	7	9	<i>a</i>	3	4	5	8	16		
9.	14	13	17	4	2	16	5	<i>z</i>	10	12	<i>a</i>	6	7	8	11	1		
12.	17	16	2	7	5	1	8	<i>z</i>	13	15	<i>a</i>	9	10	11	14	4		
15.	2	1	5	10	8	4	11	<i>z</i>	16	0	<i>a</i>	12	13	14	17	7		
1.	2	3	0	<i>z</i>	17	6	14	9	11	4	<i>b</i>	16	8	12	5	15		
4.	5	6	3	<i>z</i>	2	9	17	12	14	7	<i>b</i>	1	11	15	8	0		
7.	8	9	6	<i>z</i>	5	12	2	15	17	10	<i>b</i>	4	14	0	11	3		
10.	11	12	9	<i>z</i>	8	15	5	0	2	13	<i>b</i>	7	17	3	14	6		
13.	14	15	12	<i>z</i>	11	0	8	3	5	16	<i>b</i>	10	2	6	17	9		
16.	17	0	15	<i>z</i>	14	3	11	6	8	1	<i>b</i>	13	5	9	2	12		
2.	12	16	9	4	<i>z</i>	6	13	10	0	17	<i>c</i>	5	3	1	15	7		
5.	15	1	12	7	<i>z</i>	9	16	13	3	2	<i>c</i>	8	6	4	0	10		
8.	0	4	15	10	<i>z</i>	12	1	16	6	5	<i>c</i>	11	9	7	3	13		
11.	3	7	0	13	<i>z</i>	15	4	1	9	8	<i>c</i>	14	12	10	6	16		
14.	6	10	3	16	<i>z</i>	0	7	4	12	11	<i>c</i>	17	15	13	9	1		
17.	9	13	6	1	<i>z</i>	3	10	7	15	14	<i>c</i>	2	0	16	12	4		
<i>z.</i>	14	16	15	11	13	12	8	10	9	5	7	6	2	4	3	17	1	0
<i>a.</i>	0	3	6	9	12	15												
<i>b.</i>	1	4	7	10	13	16												
<i>c.</i>	17	14	11	8	5	2.												

Общая схема, порожденная графом токов на рис. 10.2, описывает треугольное вложение некоторого графа в ориентируемую поверхность. Этот граф, очевидно, отличен от полного графа. Рассмотрим карту M , двойственную этому вложению. Эта карта имеет $6t$ стран, помеченных числами, и еще страны z , a , b и c . Заметим, что любые две страны, помеченные числами i , j , являются соседними при $i \not\equiv j \pmod{3}$ и не являются соседними, если $i \equiv j \pmod{3}$, за исключением тех случаев, когда они расположены друг за другом вокруг страны a , b или c . Страна z является соседней со всеми странами, помеченными числами. Мы сейчас получим недостающие соседства между странами, помеченными числами, и в то же время

удалим страны a , b и c . Это даст нам карту с $6t + 1$ попарно соседними странами.

Предположим, что существует ориентируемое треугольное вложение графа K_{2t+1} . Рассмотрим двойственную карту, в которой все $2t + 1$ стран являются попарно соседними. Возьмем три копии этой карты (см. нижнюю часть рис. 10.3). Страны первой (второй, треть-

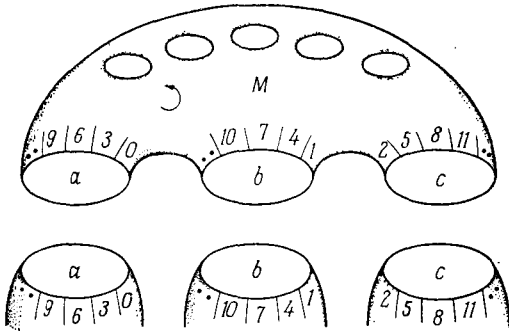


Рис. 10.3.

ей) копии пометим заново символами $a, 0, 3, 6, \dots, 6t-3$ ($b, 1, 4, 7, \dots, 6t-2$; $c, 2, 5, 8, \dots, 6t-1$). Можно сделать это таким образом, чтобы циклический порядок стран, соседних с a (b ; c), имел вид $0, 3, 6, \dots, 6t-3$ ($1, 4, 7, \dots, 6t-2$; $2, 5, 8, \dots, 6t-1$

Вырежем теперь страну a из карты M и из первой копии и очевидным образом отождествим две границы (рис. 10.3). Так же поступим со страной b в M и во второй копии и со страной c в M и в третьей копии. Получим некоторую карту на ориентируемой поверхности, в которой все $6t + 1$ стран являются попарно соседними и все вершины имеют степень три. Двойственным к этой карте является треугольное вложение графа K_{6t+1} . Это доказывает ориентируемую часть теоремы 10.1.

Очевидно, что если вместо ориентируемого вложения графа K_{2t+1} дано неориентируемое вложение, то мы получим неориентируемое треугольное вложение

графа K_{6t+1} . Этим завершается доказательство теоремы 10.1.

Описанная выше конструкция допускает две интересные модификации.

Поменяем местами токи 1 и $6t-2$ на двух вертикальных ребрах в левой части рис. 10.2 и изменим ориентацию ребра, инцидентного вершине c . Это порождает два дополнительных вихря x и y , как показано на рис. 10.4. Вихри x и y , так же как и вихрь z , удовлетворяют требованию (E5) из § 9.1. Если в приведенном выше доказательстве мы заменим рис. 10.2 на

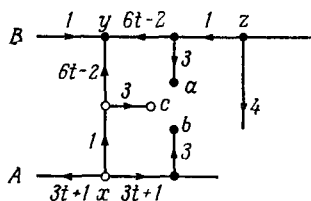


Рис. 10.4.

рис. 10.4, то получим доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 10.2. *Если существует ориентируемое треугольное вложение графа K_{2t+1} для $t \geq 2$, то существует ориентируемое треугольное вложение графа $K_{6t+3} - K_3$.*

Если мы применим эту теорему к ориентируемому случаю 9, то получим только две трети решения, а именно:

ТЕОРЕМА 10.3. *Если $s \not\equiv 2 \pmod{3}$ и $s \geq 1$, то существует ориентируемое треугольное вложение графа $K_{12s+9} - K_3$.*

Доказательство. Существует ориентируемое треугольное вложение графа K_{4s+3} для всех $s \equiv 1 \pmod{3}$, что доказано в § 2.3 (случай 7), и для всех $s \equiv 0 \pmod{3}$, что доказано в § 9.2 (случай 3). Применяя теорему 10.2 при $t = 2s + 1$, получаем теорему 10.3.

Другая модификация этой конструкции, в которой используется граф токов на рис. 10.2, является несколько более сложной.

Пусть t имеет вид $t = 6s + 2$. Тогда треугольного вложения графа K_{2t+1} не существует. Поэтому теорема 10.1 неприменима. Но существует ориентируемое треугольное вложение графа $K_{2t+1} - K_2$. Мы доказали это в § 9.2 (случай 5). Используем теперь в нашей конструкции (как на рис. 10.3) три копии вложения графа $K_{2t+1} - K_2$ (вместо графа K_{2t+1}).

Очевидно, мы получим ориентируемое треугольное вложение графа вида $\{K_{6t+1} - 3 \text{ ребра}\}$, так как в каждой из трех копий недостает одного ребра. Мы хотим получить эти три недостающих соседства, используя одну дополнительную пленку Мёбиуса. Это легко будет сделать, так как эти три недостающих соседства мы можем выбрать заранее.

Рассмотрим схему для графа $K_{17} - K_2$ или $K_{12s+5} - K_2$, порожденную рис. 9.10, 9.11 или их обобщением, описанным в § 9.2. Нетрудно заметить, что строки 0 и 1 имеют вид

$$0. \dots x \dots y \dots$$

$$1. \dots y \dots x \dots$$

В строке 1 имеется только одно число между y и x . Строка 0 показывает, что x и y — в точности противоположные страны в циклическом порядке всех стран, соседних со страной 0. Это означает, что схему для первой копии карты, двойственной к треугольному вложению графа $K_{12s+5} - K_2 = K_{2t+1} - K_2$, можно записать так, чтобы строка a имела вид

$$a. 0, 3, 6, \dots, 6t - 3$$

и две страны 0 и $6t - 6$ не были бы соседними. Вторую копию зададим таким образом, чтобы строка b имела вид

$$b. 1, 4, 7, \dots, 6t - 2$$

и страны 7 и $3t + 7$ не были бы соседними. Наконец, пусть строка

$$c. 6t - 1, \dots, 8, 5, 2$$

является строкой c в третьей копии и две страны 14 и 8 не являются соседними.

Следовательно, конструкция, соответствующая рис. 10.3, дает нам карту с $6t + 1$ странами, в которой недостает трех соседств

$$(0, 6t - 6), (7, 3t + 7), (8, 14).$$

Предположим, что $t \geq 8$.

На рис. 10.2 четвертая вертикаль, считая справа налево, содержит ток $6t - 14$ и проходится циклом [0] в направлении, противоположном ее ориентации.

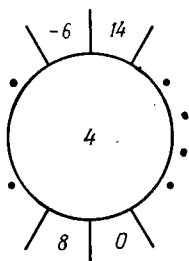


Рис. 10.5.

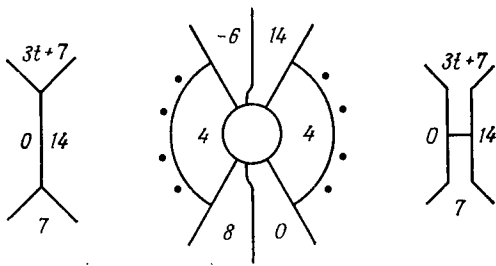


Рис. 10.6.

Ребра перед ней и после нее содержат токи 7 и $3t + 7$. Следовательно, часть строки [0] имеет вид

$$[0]. \dots, 7, 14, 3t + 7, \dots$$

Из рис. 10.2 получаем также часть цикла [1]:

$$[1]. \dots, 10, -10, 7, -7, 4, -4, \dots$$

Следовательно, часть схемы выглядит так:

$$0. \dots, 7, 14, 3t + 7, \dots$$

$$4. \dots, 14, -6, \dots 8, 0, \dots$$

и имеет место частичная картина, показанная на рис. 10.5.

Преобразуем рис. 10.5 в рис. 10.6 следующим образом. Вырежем кружок из внутренности страны 4 и отождествим пары противоположных точек границы. Тогда страна 4 станет пленкой Мёбиуса. Расширим страны -6 , 14 , 8 и 0 , используя некоторую часть страны 4, как показано на рис. 10.6. Страна 4 при

этом остается связной. Справа на рис. 10.6 мы просто заменили соседство $(0, 14)$ на соседство $(7, 3t + 7)$. Таким образом, для каждого $t \equiv 2 \pmod{6}$ и $t \geq 8$ мы получили карту с $6t + 1$ попарно соседними странами на неориентируемой поверхности, причем степени всех вершин равны 3. Следовательно, мы доказали для $s \geq 4$ следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10.4. *Если $s \equiv 1 \pmod{3}$, то существует неориентируемое треугольное вложение графа K_{12s+1} .*

Из § 8.3 (рис. 8.22) мы знаем, что теорема 10.4 верна также и для $s = 1$.

10.2. ИНДУКЦИЯ ИНДЕКСА 2

На этот раз мы будем использовать очень простой каскад индекса 2, подобный каскадам индекса 1 из

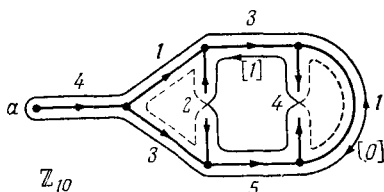


Рис. 10.7.

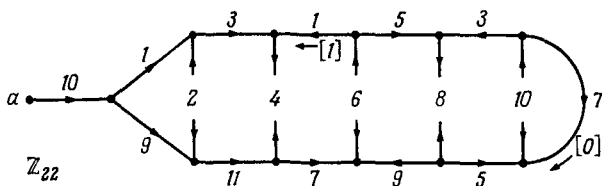


Рис. 10.8.

§ 8.3. Рассмотрим группу Z_{4t+2} и примеры, приведенные на рис. 10.7 ($t = 2$) и 10.8 ($t = 5$). Обобщение этого каскада настолько просто, что мы оставляем его читателю. Достаточно взять t вертикальных разорванных ребер, содержащих токи $2, 4, 6, \dots, 2t$. Направления их чередуются. Горизонтальное концевое

ребро содержит ток $2t$ и направлено вправо. Два негоризонтальных ребра треугольника содержат токи 1 и $2t - 1$ и направлены вправо. Остальное однозначно определяется с помощью ЗКТ.

Этот каскад обладает следующими свойствами. ЗКТ выполняется в каждой вершине степени три. Ток $2t$ на конечном ребре, инцидентном вершине a , порождает подгруппу всех четных элементов группы Z_{4t+2} . Каскад порождает два цикла $[0]$ и $[1]$ (напомним, что в середине каждого разорванного ребра нужно умножать поведение на -1). Путевой журнал цикла $[1]$ содержит каждый ненулевой элемент группы Z_{4t+2} ровно один раз и не содержит символа a . Путевой журнал цикла $[0]$ содержит все нечетные элементы и только два четных, а именно $2t$ и $-2t$. Между этими четными элементами стоит символ a .

Каждое ребро, которое появляется в обоих циклах, содержит нечетный ток. В противном случае ток является четным. Это согласуется со свойством (D7) индекса 2 из § 9.1.

Замечание. В данном каскаде нижняя горизонталь слева содержит элемент $2t + 1$, который имеет порядок 2. Это допускается в решении индекса 2

В качестве примера рассмотрим схему

	0.	6	a	4	1	3	9	5	7	
	2.	8	a	6	3	5	1	7	9	
	4.	0	a	8	5	7	3	9	1	
	6.	2	a	0	7	9	5	1	3	
	8.	4	a	2	9	1	7	3	5	
(M)	1.	0	3	6	5	2	7	8	9	4
	3.	2	5	8	7	4	9	0	1	6
	5.	4	7	0	9	6	1	2	3	8
	7.	6	9	2	1	8	3	4	5	0
	9.	8	1	4	3	0	5	6	7	2
	a .	2	8	4	0	6				

порожденную каскадом на рис. 10.7 для $t = 2$. Она удовлетворяет правилу R и определяет некоторое треугольное вложение в замкнутую поверхность.

Рассмотрим карту M , двойственную к этому вложению, для произвольного t (допустимо даже $t = 1$). Страна a является соседней со всеми четными странами в некотором циклическом порядке. Две четные страны являются соседними только в том случае, если они следуют друг за другом в строке a .

Предположим теперь, что существует неориентируемое треугольное вложение графа K_{2t+2} . Рассмотрим двойственную карту N и обозначим страны элементами $a, 0, 2, 4, \dots, 4t$ таким образом, чтобы строка a была точно такой же перестановкой элементов $0, 2, 4, \dots, 4t$, как и строка a из схемы для карты M .

Например, для $t = 2$ запишем схему (5.3) для графа K_6 в форме

(N)	a.	2	8	4	0	6
	0.	8	6	a	4	2
	2.	0	8	a	6	4
	4.	2	0	a	8	6
	6.	4	2	a	0	8
	8.	6	4	a	2	0.

Вырежем страну a из карты M и страну a из карты N и отождествим границы таким же образом, как мы делали это на рис. 10.3. Получим карту с $4t + 2$ попарно соседними странами. Этим доказана

ТЕОРЕМА 10.5. *Если существует неориентируемое треугольное вложение графа K_{2t+2} , то существует неориентируемое треугольное вложение графа K_{4t+2} .*

Если не существует треугольного вложения графа K_{2t+2} , но существует треугольное вложение графа $K_{2t+2} - K_2$, то эту конструкцию, очевидно, также можно использовать, и мы получаем доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 10.6. *Если существует неориентируемое треугольное вложение графа $K_{2t+2} - K_2$, то существ-*

вует неориентируемое треугольное вложение графа $K_{4t+2} - K_2$.

Так как мы не имеем доказательства того, что неориентируемое вложение графа $K_n - K_2$ существует при $n \equiv 8 \pmod{12}$, то эта теорема 10.6 не дает возможности решить случай 2. Однако такую возможность дает следующая небольшая модификация.

В двух нерегулярных случаях 5 и 11 мы нашли (в § 8.3) треугольное вложение графа $K_n - K_2$, и, как показано на рис. 5.3 и 5.4, недостающее соседство было добавлено с помощью одной пленки Мёбиуса. Полученная в результате двойственная карта содержала два излишних соседства и давала треугольное вложение графа K_n с двумя дополнительными ребрами. Естественно попытаться сделать то же самое для случаев 2 и 8; однако в случае 8 нам не удалось найти треугольное вложение графа $K_n - K_2$. Мы хотим использовать решение случая 8 для решения случая 2. В случае 8 мы построили треугольное вложение графа K_n с двумя дополнительными ребрами. Поэтому мы докажем такую теорему.

ТЕОРЕМА 10.7. *Если существует неориентируемое треугольное вложение графа K_{2t+2} с двумя дополнительными ребрами, то существует неориентируемое треугольное вложение графа K_{4t+2} с двумя дополнительными ребрами.*

Доказательство. Как показывает теорема 4.4, сделанное предположение можно применять только при $t \geq 3$. В этом случае мы можем, так же как в доказательстве теоремы 10.5, обозначить страны карты, двойственной к данному треугольному вложению, так, чтобы страна a имела ровно по одному соседству с каждой из $2t + 1$ остальных стран. Этого можно добиться, так как не более 4 стран имеют кратные соседства, порожденные дополнительными ребрами, и $t \geq 3$. Тогда 1-скелет карты, двойственной к неориентируемому треугольному вложению, полученному при

отождествлении двух поверхностей в теореме 10.5, является графом K_{4t+2} с двумя дополнительными ребрами.

10.3. НЕОРИЕНТИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ 1, 2, 6 И 10

Случай 1. Мы можем теперь решить оставшиеся неориентируемые случаи по индукции.

ТЕОРЕМА 10.8. *Существует неориентируемое треугольное вложение графа K_{12s+1} для каждого целого $s \geq 1$.*

Для доказательства рассмотрим три случая.

(а) Если $s \equiv 1 \pmod{3}$, то теорема 10.8 следует из теоремы 10.4.

(б) Если $s \equiv 2 \pmod{3}$, то пусть s имеет вид $s = 3t + 2$. Так как мы решили случай 9 в § 9.4, то существует неориентируемое треугольное вложение графа $K_{12t+9} = K_{4s+1}$. Применяя теорему 10.1, получаем требуемое вложение графа K_{12s+1} .

(с) Для этого третьего случая используем индукцию. Пусть $s = 3t$, и пусть треугольное неориентируемое вложение графа $K_{12s'+1}$ существует для всех $s' < s$. Следовательно, существует треугольное неориентируемое вложение для графа $K_{2+1} = K_{4s+1}$. По теореме 10.1 то же самое имеет место для K_{12s+1} .

Этим завершается доказательство теоремы 10.8 (случай 1).

Случаи 6 и 10. Эти случаи можно решать вместе.

ТЕОРЕМА 10.9. *Существует неориентируемое треугольное вложение графов K_{12s+6} и K_{12s+10} для любого неотрицательного целого числа s .*

Доказательство. Из § 5.1 мы знаем, что существует неориентируемое треугольное вложение графа K_6 , а по теореме 10.5 ($t = 2$) такое вложение существует и для графа K_{10} . Следовательно, теорема 10.9 выполняется при $s = 0$.

Пусть дано $s > 0$, и пусть теорема 10.9 уже доказана для всех меньших значений s .

Существует неориентируемое треугольное вложение графа K_{6s+4} . Для четного s это следует из уже решенного случая 4 (§ 8.3), для нечетного — из индуктивного предположения. Применяя теорему 10.5 при $t = 3s + 1$, получаем требуемое вложение графа K_{12s+6} .

Существует неориентируемое треугольное вложение графа K_{6s+6} . При нечетном s это следует из уже решенного случая 0 (§ 8.2), при четном — из индуктивного предположения. Применяя теорему 10.5 при $t = 3s + 2$, получаем требуемое вложение графа K_{12s+10} .

Этим завершается доказательство теоремы 10.9.

Случай 2. Этот случай теперь можно решить по индукции.

ТЕОРЕМА 10.10. *Существует неориентируемое треугольное вложение графа K_{12s+2} с двумя дополнительными ребрами для всех $s \geq 1$.*

Доказательство. В § 8.3 мы решили неориентируемый случай 8 для $s \geq 0$. Рассмотрение рис. 8.29 позволяет заключить, что неориентируемое вложение, порожденное графом токов и модификациями на рис. 8.27, 8.28 и 8.29, является на самом деле картой с $12s + 8$ странами и с вершинами только степени 3, в которой соседства (α, y) и (β, y) появляются дважды, а все остальные соседства — ровно один раз. Следовательно, 1-скелет карты, двойственной этому треугольному вложению, является графом K_{12s+8} с двумя дополнительными ребрами.

Для $s = 0$ можно применить теорему 10.7 при $t = 3$ и получить неориентируемое треугольное вложение графа K_{14} с двумя дополнительными ребрами. Это база индукции. Пусть $s > 1$ и для всех $s' < s$ существует неориентируемое треугольное вложение графа $K_{12s'+2}$ с двумя дополнительными ребрами. Тогда существует неориентируемое треугольное вложение графа K_{6s+2} с двумя дополнительными ребрами: при

четном s — по предположению индукции, при нечетном — согласно уже решенному случаю 8. Применение теоремы 10.7 дает неориентируемое треугольное вложение графа K_{12s+2} с двумя дополнительными ребрами.

Вычисление рода этого вложения дает правую часть формулы (4.19) и доказывает ее для всех $n \equiv 2 \pmod{12}$.

Этим завершается определение неориентируемого рода полного графа K_n для всех n . Для ориентируемого рода остался еще один случай. Мы решим его в следующей главе.

11. ОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ 0

11.1. ТОКИ ИЗ НЕАБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Так как это регулярный случай, мы будем строить ориентируемое треугольное вложение графа K_{12s} , используя граф токов индекса 1. Однако на этот раз токи будут выбираться из неабелевой группы порядка $12s$, и вполне естественно, что некоторые конструктивные принципы для графа токов потребуют небольших изменений.

Групповую операцию мы будем записывать как умножение, а единичный элемент группы обозначим ε .

Точно так же, как в предыдущих случаях, строка ε будет путевым журналом цикла в графе токов. Конечно, на этот раз мы пишем a^{-1} вместо $-a$. Пусть строка ε имеет вид

$$\varepsilon. \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}.$$

Тогда все остальные строки схемы мы получим умножением *слева* всех элементов строки ε на некоторый элемент группы:

$$\alpha. \alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \dots, \alpha\alpha_{n-1}.$$

Проделав это для каждого элемента α рассматриваемой группы, получим полную схему.

Мы будем использовать конструктивные принципы (C1), (C2), (C3), (C4), (C6) и (C8). Все эти принципы, кроме (C4), легко перевести на язык мультипликативно записанной неабелевой группы. Например, свойство (C3) принимает вид

(C3) *Каждый неединичный элемент или обратный к нему элемент данной группы появляется ровно один раз как ток на некотором ребре, и если элемент α*

появляется, то обратный к нему элемент не появляется, за исключением случая $\alpha = \alpha^{-1}$.

Конструктивный принцип (С4) необходимо изменить, так как ЗКТ становится неопределенным, если группа неабелева. Мы обобщим (С4) следующим образом:

(С4) Пусть ρ, σ, τ — токи, (рассматриваемые как) вытекающие из вершины P степени 3, и пусть ρ, σ, τ — циклический порядок, заданный вращением в вершине P . Тогда $\rho\sigma\tau = \varepsilon$.

Если имеется граф токов со свойствами (С1) — (С4), (С6) и (С8), использующий группу с $12s$ элементами, то он порождает треугольное вращение графа K_{12s} . Доказательство дано в § 2.3, 6.1 и 8.1.

Группа, которую мы будем использовать, имеет много элементов порядка два. Согласно принципу (С6), они должны появляться на концевых ребрах. На рисунках мы указываем этот тип концевых ребер, опуская концевую вершину (можно интерпретировать такие ребра как петли). В путевом журнале цикла ток порядка 2 записывается только один раз.

Будет также более одного элемента порядка 3 на концевых ребрах, в соответствии с принципом (С8). На рис. 8.1 оба типа концевых ребер показаны в одном примере.

11.2. ПРИМЕРЫ

Обозначим через A_4 знакопеременную группу, действующую на четырех буквах, т. е. группу всех четных подстановок множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Группа A_4 имеет 12 элементов. Нам необходимо детально изучить эти элементы. Мы будем использовать циклическую запись для подстановок из A_4 . Так, (a, b, \dots, \dots, h) — это подстановка, которая переставляет элементы a, b, \dots, h циклически в данном порядке. Если σ, τ — две подстановки, то $\sigma\tau$ обозначает подстановку, переводящую i в $\sigma(\tau(i))$.

Элементы группы A_4 — это 12 следующих элементов:

$$(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), \\ (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), \\ (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3).$$

Две подстановки λ и μ называются *сопряженными* тогда и только тогда, когда $\lambda = \sigma\mu\sigma^{-1}$ для некоторой подстановки σ .

Лемма 11.1. Если (a_1, a_2, \dots, a_m) — произвольная циклическая подстановка, а σ — произвольная подстановка, то

$$\sigma(a_1, a_2, \dots, a_m)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \dots, \sigma(a_m)).$$

Таким образом, две подстановки являются сопряженными только тогда, когда их разложения на непересекающиеся циклы содержат одинаковое число циклов каждой длины

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sigma(a_1, a_2, \dots, a_m)\sigma^{-1}(\sigma(a_i)) = \begin{cases} \sigma(a_{i+1}), & \text{если } i < m, \\ \sigma(a_1), & \text{если } i = m, \end{cases}$$

и что

$$\sigma(a_1, a_2, \dots, a_m)\sigma^{-1}(x) = x, \text{ если } x \neq \sigma(a_i) \text{ для всех } i.$$

А это легко проверяется. Второе утверждение леммы 11.1 следует из того, что $\sigma(\lambda\mu)\sigma^{-1} = (\sigma\lambda\sigma^{-1})(\sigma\mu\sigma^{-1})$. Следовательно, если $\tau = c_1 \cdot c_2 \dots c_m$, где c_i — непересекающиеся циклы, то

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma c_1 \sigma^{-1})(\sigma c_2 \sigma^{-1}) \dots (\sigma c_m \sigma^{-1})$$

и c_i имеет ту же длину, что и $\sigma c_i \sigma^{-1}$. Этим завершается доказательство. Например, подстановка $(1\ 2)(3\ 4)$ не является сопряженной к подстановке $(1\ 2\ 3)$.

Рассмотрим множество элементов

$$N = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

Оно замкнуто относительно композиции (умножения), и, следовательно, N — подгруппа группы A_4 . Так как N содержит все подстановки из A_4 , разложение которых на непересекающиеся циклы имеет вид $(a, b)(c, d)$, то, очевидно, $\sigma N \sigma^{-1} \subseteq N$ для любой подстановки σ из A_4 . Это означает, что N — нормальный делитель группы A_4 . Легко также проверить, что все элементы в N имеют порядок 2 или 1. Пусть $\alpha, \beta \in N$; тогда $\alpha\beta = (\alpha\beta)\alpha^2 = \alpha\beta\alpha\beta^2\alpha = (\alpha\beta)^2\beta\alpha = \beta\alpha$. Следовательно, N — абелева группа. Поэтому, согласно структурной теореме для абелевых групп, N изоморфна группе \mathbb{Z}_4 или $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Так как в N нет элемента порядка 4, то имеет место последняя возможность, т. е. $N \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Конечно, этот факт можно проверить непосредственно, не используя структурную теорему.

Пусть $\alpha = (1\ 2\ 3)$, и пусть $A = \{(1), \alpha, \alpha^2\}$. Тогда A является циклической подгруппой группы A_4 , порожденной элементом α .

Лемма 11.2. *Каждый элемент группы A_4 однозначно представляется в виде na , где $a \in A$, $n \in N$.*

Прежде чем доказывать лемму 11.2, необходимо напомнить, что из нее не следует, что группа A_4 является прямым произведением двух подгрупп, так как не всегда верно, что $(n_1 a_1)(n_2 a_2) = n_1 n_2 a_1 a_2$.

Доказательство. Два таких произведения $n_1 a_1$ и $n_2 a_2$ равны в том и только в том случае, если

$$a_1 a_2^{-1} = n_1^{-1} n_2.$$

Левая часть содержится в A , а правая — в N . Так как A и N имеют только один общий элемент (1) , то получаем $a_1 a_2^{-1} = \varepsilon = n_1^{-1} n_2$ и, следовательно, $a_1 = a_2$ и $n_1 = n_2$. Это доказывает единственность и показывает также, что существует ровно $|A| \cdot |N| = 12$ различных произведений данного вида. Так как $|A_4| = 12$, то эти произведения должны исчерпывать всю группу A_4 . Лемма 11.2 доказана.

Обозначим теперь элементы группы A_4 некоторым удобным способом. Положим

$$\begin{aligned}
 (11.1) \quad & \Theta_1 = (1\ 4)(2\ 3), \\
 & \Theta_2 = (1\ 3)(2\ 4), \\
 & \Theta_3 = (1\ 2)(3\ 4), \\
 (11.2) \quad & s_i = \Theta_i \Theta_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3), \\
 & t_i = \Theta_i \alpha \quad (i = 1, 2, 3), \\
 & t_4 = \alpha.
 \end{aligned}$$

В определении s_3 , данном выше, Θ_4 на самом деле обозначает Θ_1 . Вычисления показывают, что все три элемента s_i различны. Тогда по лемме 11.2 все семь элементов в (11.2) различны. Следующие равенства получаются с помощью простых вычислений:

$$\begin{aligned}
 (11.3) \quad & \alpha^{-1} \Theta_1 \alpha = (3\ 4)(1\ 2) = \Theta_3, \\
 & \alpha^{-1} \Theta_2 \alpha = (3\ 2)(1\ 4) = \Theta_1, \\
 & \alpha^{-1} \Theta_3 \alpha = (3\ 1)(2\ 4) = \Theta_2.
 \end{aligned}$$

Имеем $t_i^{-1} = \alpha^{-1} \Theta_i^{-1} = \alpha^{-1} \Theta_i = (\alpha^{-1} \Theta_i \alpha) \alpha^{-1}$ при $1 \leq i \leq 3$. Поэтому из (11.3) получаем, что

$$\begin{aligned}
 (11.4) \quad & t_1^{-1} = \Theta_3 \alpha^{-1}, \\
 & t_2^{-1} = \Theta_1 \alpha^{-1}, \\
 & t_3^{-1} = \Theta_2 \alpha^{-1}, \\
 & t_4^{-1} = \alpha^{-1}.
 \end{aligned}$$

Так как $\alpha^{-1} \neq \alpha$, то никакие элементы из (11.4) не появляются в (11.2). Таким образом, набор

$$\begin{aligned}
 (11.5) \quad & s_i \quad (i = 1, 2, 3), \\
 & t_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\
 & t_i^{-1} \quad (i = 1, 2, 3, 4)
 \end{aligned}$$

содержит ровно 11 элементов группы A_4 . Следовательно, элементы из (11.5) исчерпывают все неединичные элементы группы A_4 и их можно использовать как токи (рис. 11.1).

Легко проверить, что на рис. 11.1 конструктивные принципы (C1)–(C4), (C6) и (C8) выполняются. Так как $t_i^{-1} \neq t_i$ для каждого i , то s_1, s_2, s_3 — это все элементы порядка 2. Поэтому выполняется свойство (C6). С помощью вычислений получаем, что t_1 и t_4 — элементы порядка 3, поэтому выполняется свойство (C8). Прямое вычисление показывает, что $s_1 t_2 t_1^{-1} = s_2 t_3 t_2^{-1} = s_3 t_4 t_3^{-1} = \varepsilon$. Следовательно, ЗКТ выполняется в каждой вершине степени 3. Остальные конструктивные

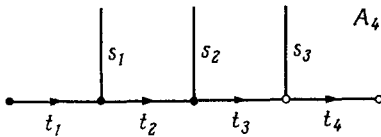


Рис. 11.1.

принципы проверяются тривиально. Таким образом, граф токов, изображенный на рис. 11.1, порождает ориентируемое треугольное вложение графа K_{12} .

Замечание. Подграф на рис. 11.1, состоящий только из трех ребер, содержащих токи t_1, s_1, t_2 , порождает икосаэдр на сфере или, в двойственной форме, додекаэдр. Если на рис. 11.1 изменить ориентацию всех токов и изменить вращение в каждой вершине на противоположное, то легко видеть, что ЗКТ остается выполненным.

В качестве второго примера рассмотрим треугольное ориентируемое вложение графа K_{84} . Мы будем использовать группу $A_4 \times \mathbb{Z}_7$, которая содержит $84 = 12 \cdot 7$ элементов. Возьмем 7 копий дерева, изображенного на рис. 11.1, и расположим их так, как указано на рис. 11.2. Имеются 3 дополнительные вертикали, содержащие единичный элемент ε группы A_4 . Эти три вертикали делят нашу картину на три отсека. Отождествим ребро s_i из каждой верхней копии с ребром s_i из нижней копии в том же отсеке, как показано на рис. 11.3. После этого рассмотрим граф на рис. 11.3 как граф токов с токами (τ, i) из группы

$A_4 \times Z_7$, где $\tau \in A_4$ и $i \in Z_7$. Распределение первых компонент (элементов группы A_4) показано на рис. 11.2. Вторые компоненты (элементы группы Z_7) находятся на рис. 11.3.

Нетрудно проверить, что выполняются все конструктивные принципы индекса 1: (C1)–(C4), (C6) и (C8). На двух горизонтальных концевых ребрах в левой части рис. 11.3 содержатся токи $(t_4, 0)$ и

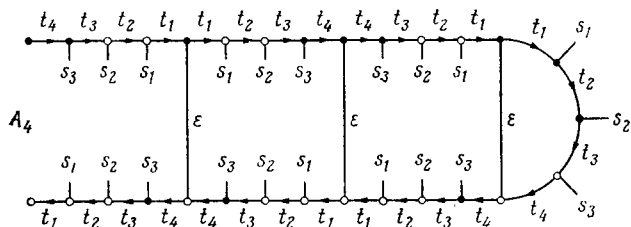


Рис. 11.2.

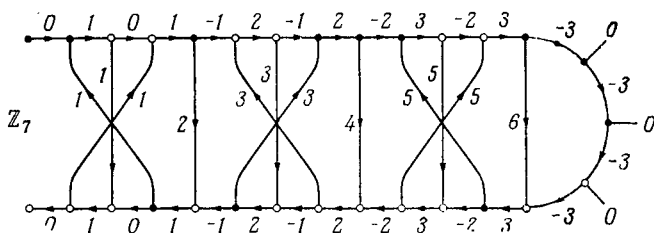


Рис. 11.3.

$(t_1, 0)$. Оба они порядка 3, и, следовательно, выполняется свойство (C8). В группе $A_4 \times Z_7$ имеется три элемента порядка 2. Каждый из них появляется на концевом ребре в правой части рис. 11.3. Это согласуется с принципом (C6). Вращение, выбранное для графа, порождает один-единственный цикл. Остальные свойства также можно проверить. Следовательно, существует ориентируемое треугольное вложение графа K_{12s} , если $s = 7$.

Имеется очевидный способ обобщения этой конструкции для получения вложения графа K_{12s} , если $s = 2r + 1$, т. е. если s — нечетное число. Восполь-

зуюемся группой $A_4 \times Z_s$. Возьмем s копий дерева, изображенного на рис. 11.1, и расположим их так, как показано на рис. 11.2, с r дополнительными вертикалями и построим этот граф так, как показано на рис. 11.3. Вторые компоненты токов на горизонталях возьмем равными

0, 1, 0, 1, -1, 2, -1, 2, -2, 3, -2, 3, ..., 1-r, r, 1-r, r,

если читать слева направо. На вертикалях по порядку поместим элементы

1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, ..., s-2, s-2, s-2, s-1.

На каждом из четырех криволинейных ребер справа поместим ток $-r$. Этот граф токов с токами из группы $A_4 \times Z_s$ порождает треугольное ориентируемое вложение графа K_{12s} , если s нечетно.

11.3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Группу, которая будет использоваться, можно описать следующим образом. Пусть дано число $n = 12s$. Выберем такие r и k , что $s = 2^{k-2} (2r + 1)$. Таким образом, 2^{k-2} — это наибольшая степень числа 2, на которую делится s . Рассмотрим группу

$$A_4 \times \underbrace{Z_2 \times Z_2 \times \dots \times Z_2}_{k-2} \times Z_{2r+1}.$$

Она имеет ровно $12 \cdot 2^{k-2} \cdot (2r + 1) = 12s$ элементов. К сожалению, представление графа токов, использующее эту группу в явном виде, не известно.

Мы воспользуемся очень необычным представлением этой группы. Для этого придется рассмотреть аддитивную и мультипликативную структуру конечных полей. Следующие свойства хорошо известны алгебраистам (см., например, Фрейли [1], Ленг [1], Ван дер Варден [1]).

(FF1) Для каждого положительного целого числа k существует конечное поле $GF(2^k)$ порядка 2^k (оно называется полем Галуа порядка 2^k).

Аддитивная группа поля $GF(2^k)$ обозначается через $F^+(2^k)$, а ее тождественный элемент — через 0. Элементы, отличные от 0, образуют группу относительно умножения — мультипликативную группу $F^*(2^k)$.

(FF2) Мультипликативная группа $F^*(2^k)$ является циклической группой порядка $2^k - 1$.

(FF3) Если Θ — образующая группы $F^*(2^k)$, то $1, \Theta, \Theta^2, \dots, \Theta^{k-1}$ — базис для $GF(2^k)$ над полем $GF(2)$.

(FF4) Если $p \in F^+(2^k)$, то $p + p = 0$.

Пусть Θ — произвольная образующая группы $F^*(2^k)$. Используя экспоненциальное обозначение для автоморфизмов, определим автоморфизм α группы $F^+(2^k)$ с помощью линейного расширения следующего отображения базиса из (FF3):

$$(11.6) \quad \begin{aligned} (\Theta^i)^\alpha &= \Theta^i & (i = 2, 3, \dots, k-1), \\ \Theta^\alpha &= 1 + \Theta, \\ 1^\alpha &= \Theta. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} 1^{\alpha^3} &= \Theta^{\alpha^2} = (1 + \Theta)^\alpha = 1^\alpha + \Theta^\alpha = \Theta + 1 + \Theta = 1, \\ \Theta^{\alpha^3} &= (1 + \Theta)^{\alpha^2} = (\Theta + 1 + \Theta)^\alpha = 1^\alpha = \Theta. \end{aligned}$$

Это означает, что α^3 — тождественный автоморфизм e и элементы $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 = e$ образуют циклическую группу A порядка 3.

Определим теперь группу $G(k)$, которая имеет порядок $3 \cdot 2^k$ и элементы $[p, a]$, где $p \in F^+(2^k)$ и $a \in A$. Умножение в этой группе определяется формулой

$$(11.7) \quad [p, a] \cdot [q, b] = [p + q^a, ab].$$

Легко показать, что эта операция ассоциативна. Элемент $[0, e] = \varepsilon$ является единичным в $G(k)$. Обратный элемент всегда существует, причем

$$(11.8) \quad [p, a]^{-1} = [p^{a^{-1}}, a^{-1}].$$

Эта группа иногда обозначается как полупрямое произведение $G(k) = F^+(2^k) * A$ двух групп $F^+(2^k)$ и A .

Так как мы хотим использовать эту группу $G(k)$ в графе токов, то нам интересно знать, какие элементы имеют порядок 2 и 3.

Лемма 11.3. *Элемент $[p, a]$ имеет порядок 2 тогда и только тогда, когда $p \neq 0$ и $a = e$.*

Доказательство. Если элемент $[p, a]$ имеет порядок 2, то

$$[p, a]^2 = [p + p^a, a^2] = [0, e],$$

откуда вытекает, что $a = e$, так как A — циклическая группа третьего порядка. Если $p = 0$, то $[p, a]$ — единственный элемент и, значит, его порядок отличен от 2. Следовательно, $p \neq 0$ и $a = e$.

Обратное утверждение немедленно вытекает из (FF4).

Лемма 11.4. *Оба элемента $[0, \alpha]$ и $[\Theta, \alpha]$ имеют порядок 3.*

Доказательство. $[0, \alpha]^3 = [0, \alpha^3] = [0, e]$.

$$\begin{aligned} [\Theta, \alpha]^3 &= [\Theta + \Theta^a, \alpha^2][\Theta, \alpha] = [\Theta + 1 + \Theta, \alpha^2][\Theta, \alpha] = \\ &= [1, \alpha^2][\Theta, \alpha] = [1 + \Theta^{a^2}, \alpha^3] = [0, e]. \end{aligned}$$

Положим $b = 2^k$ и определим

$$(11.9) \quad \begin{aligned} s_i &= [\Theta^i + \Theta^{i+1}, e] & (i = 1, 2, \dots, b-1), \\ t_i &= [\Theta^i, \alpha] & (i = 1, 2, \dots, b-1), \\ t_b &= [0, \alpha]. \end{aligned}$$

Применяя леммы 11.3, 11.4 и свойство (FF3), получаем, что элементы t_1 и t_b имеют порядок 3, а каждый элемент s_i имеет порядок 2.

Лемма 11.5. *Все элементы s_i ($i = 1, 2, \dots, b-1$) различны.*

Доказательство. Пусть $1 \leq j < i \leq b-1$ и $s_j = s_i$. Тогда

$$\begin{aligned} \Theta^j + \Theta^{j+1} &= \Theta^i + \Theta^{i+1}, \\ \Theta^j(1 + \Theta) &= \Theta^i(1 + \Theta), \\ \Theta^j &= \Theta^i, \end{aligned}$$

чего не может быть, так как Θ — образующая группы $F^*(2^k)$.

Согласно (11.8), вторая компонента элемента t_i^{-1} равна $\alpha^{-1} \neq \alpha$, поэтому набор

$$(11.10) \quad \begin{aligned} s_i & \quad (i = 1, 2, \dots, b-1), \\ t_i & \quad (i = 1, 2, \dots, b), \\ t_i^{-1} & \quad (i = 1, 2, \dots, b) \end{aligned}$$

состоит из $3b - 1$ различных элементов и, согласно (FF3), ни один из них не равен элементу $[0, e] = e$. Следовательно, набор (11.10) исчерпывает все неединичные элементы группы $G(k)$.

Используем теперь элементы набора (11.10) как токи в графе токов, показанном на рис. 11.4. Из

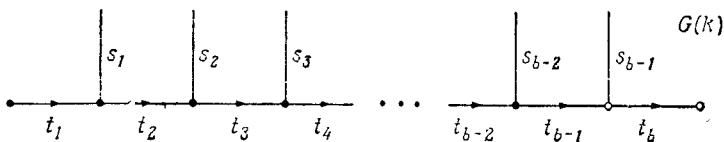


Рис. 11.4.

свойств элементов s_i и t_i вытекает, как нам уже известно, что выполняются конструктивные принципы (C1)–(C3), (C6) и (C8). Нам нужно только показать, что в каждой вершине степени 3 выполняется ЗКТ, т. е.

$$t_i^{-1} s_i t_{i+1} = e \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \dots, b-2$$

и

$$t_b s_{b-1} t_{b-1}^{-1} = e.$$

Доказательство. Для всех $i \leq b-2$

$$s_i t_i = [\Theta^i + \Theta^{i+1}, e][\Theta^i, \alpha] = [\Theta^i + \Theta^{i+1} + \Theta^i, \alpha] = t_{i+1}.$$

Следовательно, $t_i^{-1} s_i t_{i+1} = t_i^{-1} s_i t_i = e$, ибо каждый элемент s_i имеет порядок 2.

Так как $b = 2^k$, то по свойству (FF2)

$$\Theta^{b-1} = 1 \quad \text{и} \quad \Theta^b = \Theta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} t_{b-1}s_{b-1} &= [1, \alpha][1 + \Theta, e] = [1 + 1^\alpha + \Theta^\alpha, \alpha] = \\ &= [1 + \Theta + 1 + \Theta, \alpha] = t_b \end{aligned}$$

и

$$t_b s_{b-1} t_{b-1}^{-1} = t_{b-1} s_{b-1} s_{b-1} t_{b-1}^{-1} = \varepsilon.$$

Так как граф токов на рис. 11.4 обладает всеми требуемыми свойствами, то существует треугольное ориентируемое вложение графа K_{12s} , если s является степенью числа 2, а именно если $s = 2^{k-2}$.

Теперь легко изложить общее решение для случая 0. Пусть $n \equiv 0 \pmod{12}$; тогда $n = 3 \cdot 2^k (2r + 1)$. Возьмем группу

$$G(k) \times Z_{2r+1}.$$

Граф токов, который мы используем, строится точно так же, как на рис. 11.2 и 11.3. Только на этот раз мы берем $2r + 1$ копий графа, показанного на рис. 11.4. Требуемые свойства для этого графа токов легко проверяются.

Нам хотелось бы отметить, что решающее значение имеет тот факт, что число зубцов в гребне на рис. 11.4 нечетно. В противном случае вращение не индуцировало бы один-единственный цикл в рассматриваемом графе.

12. РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

12.1. ВОПРОСЫ О ВРАЩЕНИЯХ

На рис. 2.6 показано вращение графа K_5 , которое индуцирует один-единственный цикл. Можно поставить более общий вопрос: возможно ли это для графа K_n ? Применяя теорему 2.5, можно вывести, что каждое вращение графа K_n индуцирует четное число циклов, если $n \equiv 3$ или $0 \pmod{4}$, и нечетное число циклов, если $n \equiv 1$ или $2 \pmod{4}$. Обозначим вершины графа K_n числами $0, 1, 2, \dots, n-1$ и рассмотрим следующее вращение графа K_n :

0.	...	5	$n-3$	4	$n-2$	3	$n-1$	2	1	
1.	2	3	4	$n-1$	0
2.	3	4	5	0	1
3.	4	5	6	1	2
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$n-1$.	0	1	2	$n-3$	$n-2$.

Можно проверить, что это вращение графа K_n индуцирует один-единственный цикл, если $n \equiv 1$ или $2 \pmod{4}$. Если $n \equiv 3$ или $0 \pmod{4}$, то указанное вращение индуцирует два цикла. Этот вопрос был впервые решен Нордхаузом, Стюартом и Уайтом [1]. Они использовали более сложное вращение графа K_n . Этот вопрос решен также для двудольного графа $K_{m, n}$.

Граф, состоящий только из одной вершины и не имеющий ребер, называется *тривиальным*. *Связность* связного графа G — это наименьшее число вершин, удаление которых приводит или к несвязному графу, или к тривиальному графу.

Граф G_4 на рис. 2.1 обладает тем свойством, что каждое его вращение индуцирует более двух циклов (на самом деле более трех). Связность графа G_4 равна 1.

Насколько мне известно, пока не решен вопрос: верно ли, что у каждого графа со связностью не менее двух имеется вращение, индуцирующее только один или два цикла.

Имеется несколько интересных вопросов о бесконечных графах. Будем рассматривать графы только со счетным числом вершин. Вращение в вершине P степени ∞ — это некоторая последовательность $\dots k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \dots$ (бесконечно продолжающаяся в обоих направлениях) всех ребер k_i , инцидентных вершине P .

Мы должны также рассматривать циклы, бесконечно продолжающиеся в обоих направлениях. Например, любое вращение бесконечного (в обоих направлениях) гребня индуцирует два бесконечных цикла. Или рассмотрим бесконечный граф типа лестницы (подобный показанному на рис. 6.6, но бесконечно продолжающийся в обе стороны). Если мы зададим в каждой верхней вершине вращение по часовой стрелке, а в каждой нижней — против часовой стрелки, то это вращение индуцирует четыре бесконечных цикла.

Следующий вопрос, похоже, является открытым: существует ли бесконечный граф, в котором степени всех вершин меньше некоторой данной константы, обладающий таким вращением, которое порождает один-единственный бесконечный (в обоих направлениях) цикл.

Также неизвестно, существует ли треугольное вращение графа K_∞ . Символ ∞ обозначает счетное множество вершин. Другими словами, требуется найти схему

$$i. \dots c_{-2}^{(i)}, c_{-1}^{(i)}, c_0^{(i)}, c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots$$

$$(i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots),$$

такую, что $\dots c_{-2}^{(i)}, c_{-1}^{(i)}, c_0^{(i)}, c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots$ — перестановка всех целых чисел, кроме i , и схема удовлетво-

ряет правилу Δ^* . Другая нерешенная задача: найти такую же схему для графа K_∞ , но удовлетворяющую только правилу Δ .

12.2. ВОПРОСЫ О ВЛОЖЕНИЯХ

Р. Фокс высказал следующую интересную гипотезу.

Гипотеза. Пусть G — граф, в котором ровно 12 вершин степени 5, а все остальные вершины степени 6. Если число вершин графа G нечетно, то G — непланарный граф.

Вложение графа G в замкнутую поверхность называется *клеточным* вложением, если G делит поверхность S только на 2-клетки (лунки, треугольники, четырехугольники и т. д.). Если S — ориентируемая поверхность, то такое вложение естественным образом индуцирует вращение графа G . Так как имеется два различных способа ориентировать поверхность S , то вложение индуцирует два различных вращения графа G . Одно в точности противоположно другому.

Следующая теорема является обобщением теоремы 5.6 и впервые была установлена Эдмондсом [1]. Однако ее знал еще Хеффтер [1], так как он часто использовал ее и не только для треугольных вложений.

ТЕОРЕМА ХЕФФТЕРА И ЭДМОНДСА. Если дан некоторый граф с вращением, то существует клеточное вложение этого графа в некоторую ориентируемую поверхность, такое, что одно из двух вращений, индуцированных этим вложением, является в точности данным вращением графа.

Доказательство. Пусть дан граф G с вращением. Обозначим каждое ребро буквой a, b, c, \dots и выберем для каждого ребра некоторую ориентацию. Затем выпишем путевой журнал каждого цикла, индуцированного данным вращением.

Например, если G — граф с вращением, показанный на рис. 2.4, то при соответствующем обозначении

ребер получим схему

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ g & a^{-1} & c^{-1} & h & d^{-1} & f^{-1} \\ & b^{-1} & g^{-1} & e^{-1} & h^{-1} & \end{array}$$

В любом случае полученная схема обладает тем свойством, что каждая буква (скажем, a) появляется ровно дважды, причем один раз в инверсной форме (a^{-1}). Это означает, что схема определяет ориентируемый полиэдр. Его 1-скелет является данным графом, а ориентация поверхности индуцирует в точности данное вращение графа. Кроме того, циклы, индуцированные этим вращением, естественным образом соответствуют границам граней.

Все предыдущие главы были посвящены определению рода полного графа K_n . Имеется еще только несколько классов графов, для которых известен род. Если граф G имеет «достаточно» треугольников, можно ожидать, что его род равен правой части неравенства (4.11). Однако мало надежды на общее доказательство такой теоремы.

Рассмотрим род почти полного графа $K_n - K_2$. Первое из следующей цепочки неравенств получается из (4.11):

$$\left\{ \frac{(n-3)(n-4)-2}{12} \right\} \leq \gamma(K_n - K_2) \leq \gamma(K_n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\}.$$

Правая и левая части имеют одно и то же значение, если $n \not\equiv 5 \pmod{12}$ и $n \not\equiv 2 \pmod{12}$.

Треугольное вложение графа $K_n - K_2$ дано в § 9.2 для $n \equiv 5 \pmod{12}$; Рингель и Янгс [5] нашли его для всех $n \equiv 14 \pmod{24}$. Недавно Юнгерман [1] решил оставшийся случай $n \equiv 2 \pmod{24}$ с помощью несколько усложненного решения индекса 2. Следовательно, для $n \equiv 2$ или $5 \pmod{12}$ существует треугольное ориентируемое вложение графа $K_n - K_2$.

Используя теорему 4.4, получаем общий результат:

$$(12.1) \quad \gamma(K_n - K_2) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4) - 2}{12} \right\}.$$

Если мы попытаемся определить род графа $K_n - K_3$, то столкнемся с некоторыми трудностями. Во-первых, неизвестно, существуют ли ориентируемые треугольные вложения трех графов $K_9 - K_3$, $K_{13} - K_3$ и $K_{18} - K_3$.

ТЕОРЕМА 12.1. Пусть $n \geq 21$. Тогда граф $K_n - K_3$ можно треугольно вложить в некоторую ориентируемую поверхность в том и только в том случае, если $n \equiv 1, 6, 9$ или $10 \pmod{12}$.

Доказательство. Если $K_n - K_3 \triangleleft S_p$, то теорема 4.4 показывает, что $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S_p)$. Отсюда

$$n(n-1) = 6n - 6(2-2p) + 6,$$

$$n(n-7) = 12(p-1) + 6.$$

Следовательно, $n(n-7) \equiv 6 \pmod{12}$, а это означает, что $n \equiv 1, 6, 9$ или $10 \pmod{12}$.

Обратно, как показано в этой книге (§ 2.3, 6.3, 9.3), существует треугольное ориентируемое вложение графа $K_n - K_3$, если $n \equiv 1, 6$ или $10 \pmod{12}$ и $n \geq 21$. Для $n \equiv 9 \pmod{12}$ ($n > 9$) доказательство дал Янгс [5]. Сравните это с теоремой 10.3, которая дает только неполный ответ.

Поступая так же, как в предыдущем случае с графом $K_n - K_2$, можно показать, используя (4.11), что $\gamma(K_n - K_3) = \gamma(K_n)$, если $n \equiv 0, 3, 4$ или $7 \pmod{12}$. Это приводит, вместе с теоремой 12.1 и равенством (12.1), к следующему результату:

$$(12.2) \quad \gamma(K_n - K_3) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4) - 6}{12} \right\}$$

для всех $n \not\equiv 8$ и $11 \pmod{12}$ ($n \geq 21$). Для двух классов вычетов $n \equiv 8$ и $11 \pmod{12}$ неизвестно, выполняется ли равенство (12.2).

Нетрудно определить род полного двудольного графа $K_{m,n}$. Определение $K_{m,n}$ см. в упр. 4.1.3.

Пусть $p = \gamma(K_{m, n})$. Кратчайший замкнутый путь в графе $K_{m, n}$ имеет длину 4. Поэтому мы можем воспользоваться теоремой 4.5 при $k = 4$:

$$2\alpha_1 \leq 4\alpha_0 - 4(2 - 2p).$$

Так как $\alpha_0 = m + n$ и $\alpha_1 = mn$, то отсюда следует, что

$$(12.3) \quad \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\} \leq \gamma(K_{m, n}).$$

Пусть m и n — четные числа. Тогда легко построить ориентируемое вложение графа $K_{m, n}$, при котором все грани являются четырехугольниками. Покажем это в случае графа $K_{6,4}$. Пусть 1, 2, 3, 4, 5, 6 — вершины первого класса и a, b, c, d — четыре вершины второго класса.

Рассмотрим вращение графа $K_{6,4}$:

1.	a	b	c	d		
2.	d	c	b	a		
3.	a	b	c	d		
4.	d	c	b	a		
5.	a	b	c	d		
6.	d	c	b	a		
$a.$	1	2	3	4	5	6
$b.$	6	5	4	3	2	1
$c.$	1	2	3	4	5	6
$d.$	6	5	4	3	2	1.

Легко проверить, что все циклы, индуцированные этим вращением, имеют длину 4. По теореме Хэффтера и Эдмондса существует ориентируемое вложение графа $K_{6,4}$, при котором все грани являются четырехугольниками. Это вращение легко обобщить на произвольные четные m и n .

Для четырехугольного вложения графа $K_{m, n}$ имеем

$$4\alpha_2 = 2\alpha_1, \quad \alpha_0 = m + n, \quad \alpha_1 = mn,$$

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p.$$

Исключая из этих уравнений α_i , получим в результате, что при четных m и n в (12.3) имеет место равенство. Для всех остальных случаев Рингелем [6] также было показано, что в (12.3) имеет место равенство.

Для трехдольного графа $K_{n, n, n}$ род равен

$$\gamma(K_{n, n, n}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

для всех $n \geq 1$ (см. Рингель и Янгс [6]). Уайт [1] обобщил эту формулу на все графы вида $K_{an, n, n}$. Формула

$$\gamma(K_{n, n, n, n}) = (n-1)^2$$

была доказана недавно Гарманом [1] для всех $n \equiv 2 \pmod{4}$, и предполагается, что она справедлива для всех n .

Следующий граф с 2^n вершинами называется n -мерным кубом Q_n . Его вершины представляются всеми последовательностями (a_1, a_2, \dots, a_n) , в которых $a_i = \pm 1$. Две вершины смежны, если соответствующие им последовательности различаются ровно в одном месте. Род графа Q_n определен Рингелем [5] и позже независимо Байнеке и Харари [1]:

$$\gamma(Q_n) = (n-4)2^{n-3} + 1.$$

Определение рода других классов графов см. в работах Алперт [1], Гросс [1], Жак [1], Химелрайт [1] и Уайт [2—5].

Нужно отметить, что неориентируемый род графа $K_n - K_2$ неизвестен для $n \equiv 8 \pmod{12}$. Треугольного вложения графа $K_8 - K_2$ не существует (см. Рингель [4]), хотя существование такого вложения не противоречит формуле Эйлера.

Пусть G — некоторый граф. Максимальный род ориентируемой поверхности S , в которую G вкладывается клеточно, обозначается $\gamma_M(G)$. Он называется максимальным родом графа G . Пусть $p = \gamma_M(G)$. Следовательно, существует клеточное вложение $G \subset \subset S_p$. Из формулы Эйлера $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p$ и неравенства $\alpha_2 \geq 1$ получаем

$$(12.4) \quad \gamma_M(G) \leq \left[\frac{\alpha_1 - \alpha_0 + 1}{2} \right].$$

Если существует клеточное вложение графа G в ориентируемую поверхность с $\alpha_2 = 1$ или 2 , то (12.4) на самом деле обращается в равенство.

Например, для полного графа K_n , как мы знаем, существует вращение, индуцирующее только один или два цикла (см. начало § 12.1). Следовательно, по теореме Хеффтера и Эдмондса существует ориентируемое клеточное вложение графа K_n с $\alpha_2 = 1$ или 2 . Это означает, что

$$\gamma_M(K_n) = \left[\frac{(n-1)(n-2)}{4} \right] \quad \text{для} \quad n \geq 1.$$

Для графов $K_{m,n}$ и Q_n максимальный род также известен. Рингейзен [1] нашел, что

$$\gamma_M(K_{m,n}) = \left[\frac{(n-1)(m-1)}{2} \right] \quad \text{для} \quad m, n \geq 1,$$

а Закс [1] показал, что

$$\gamma_M(Q_n) = (n-2)2^{n-2} \quad \text{для} \quad n \geq 2.$$

Нам хотелось бы отметить две открытые проблемы о числе скрещиваний $cr(G)$ графа G . Это число $cr(G)$ является наименьшим числом пересечений пар ребер при «вложении» графа G в плоскость. Например, $cr(K_5) = 1$, $cr(K_6) = 3$. В общем случае высказана гипотеза, что

$$cr(K_n) = \frac{1}{4} \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n-1}{2} \right] \left[\frac{n-2}{2} \right] \left[\frac{n-3}{2} \right],$$

Известно только, что правая часть является верхней границей для $cr(K_n)$ (см. Гай [1]).

Для двудольного графа имеется подобная гипотеза

$$(12.5) \quad cr(K_{m,n}) = \left[\frac{m}{2} \right] \left[\frac{m-1}{2} \right] \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

Д. Клейтман [1] доказал (12.5) для всех $m \leq 6$ и любого n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Алперт (Alpert S. R.)

1. The genera of amalgamations of graphs, Ph. D. Thesis, Columbia University, 1971.

Ауслендер, Браун, Янгс (Auslander L., Brown T. A., Youngs J. W. T.)

1. The imbedding of graphs in manifolds, *J. Math. Mech.*, **12** (1963), 629—634.

Байнеке Л., Харари Ф. (Beineke L. W., Harary F.)

1. The genus of the n -cube, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 494—496. (Русский перевод: Род n -мерного куба, в сб. «Теория графов», М., «Мир», 1974.)

Басакер Р., Саати Т. Л. (Busacker R. G., Saaty T. L.)

1. Finite graphs and networks: An introduction with applications, New York, McGraw-Hill Book Company, 1965. (Русский перевод: Конечные графы и сети, М., «Наука», 1974.)

Баттл, Харари, Кодама, Янгс (Battle J., Harary F., Kodama Y., Youngs J. W. T.)

1. Additivity of the genus of a graph, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 565—568.

Берж К. (Berge C.)

1. The theory of graphs and its applications, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1962. (Русский перевод: Теория графов и ее применение, М., ИЛ., 1962.)

Боуз (Bose R. C.)

1. On the construction of balanced incomplete block designs, *Ann. of Eugenics*, **9** (1939), 353—399.

Ван-дер-Варден Б. (Waerden B. L., van der)

1. Modern algebra, vol. 1, New York, Ungar, 1953. (Русский перевод первого издания: Современная алгебра, т. 1, М., Гостехиздат, 1947.)

Гай (Guy R. K.)

1. A combinatorial problem, *Nabla* (= *Bull. Malayan Math. Soc.*), **7** (1960), 68—72. (See also Dept. of Math., Univ. of Calgary, Res. Paper No. 8, 1967.)

- Гай, Дженкинс, Шаер (Guy R. K., Jenkyns T., Schaer J.)
1. The toroidal crossing number of the complete graph, *J. Combinatorial Theory*, 4 (1968), 376—390.
- Гай, Рингель (Guy R. K., Ringel G.)
1. Triangular embedding of $K_n - K_6$. To appear.
- Гай, Янгс (Guy R. K., Youngs J. W. T.)
1. A smooth and unified proof of cases 6, 5 and 3 of the Ringel-Youngs theorem, *J. Combinatorial Theory*, 15 (1973), 1—11.
- Гарман (Garman B.)
1. Private communication, 1973.
- Гильберт Д., Кон-Фоссен С. (Hilbert D., Cohn-Vossen S.)
1. *Anschauliche Geometrie*, Berlin, Springer, 1932. (Русский перевод: Наглядная геометрия, изд. 2-е, М. — Л., Гостехтеориздат, 1951.)
- Грейвс (Graves R. P.)
1. Life of Sir William Rowan Hamilton, vol. 3, Dublin, 1889.
- Гросс (Gross J. L.)
1. The genus of nearly complete graphs — case 6, IBM Watson Research Center Preprint, New York, Yorktown Heights, 10 pp.
- Гросс, Алперт (Gross J. L., Alpert S.)
1. Branched coverings of graph imbeddings, IBM Research Pamphlet RC 4216, New York, Yorktown Heights, 1973, 18 pp.
 2. The topological theory of current graphs, IBM Research Pamphlet, RC 4252, New York, Yorktown Heights, 1973, 18 pp.
- Густин (Gustin W.)
1. Orientable embedding of Cayley graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 272—275.
- Гутри (Guthrie F.)
1. Note on the coloring of maps, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 10 (1880), 727—728.
- Дирак (Dirac G. A.)
1. Map colour theorems, *Canad. J. Math.*, 4 (1952), 480—490.
 2. Map colour theorems related to the Heawood colour formula, *J. London Math. Soc.*, 31 (1956), 460—471.
 3. On the four-color conjecture, *Proc. London Math. Soc.* (3), 13 (1963), 193—218.
- Дынкин Е. Б., Успенский В. А.
1. Математические беседы, М. — Л., Гостехтеориздат, 1952.
- Дьюк (Duke R.)
1. The genus, regional number, and Betti number of a graph, *Canad. J. Math.*, 18 (1966), 817—822.

Жак (Jacques A.)

1. Constellations et propriétés algébriques des graphes topologiques, Ph. D. Thesis, University of Paris, 1969.

Закс (Zaks J.)

1. The maximum genus of Cartesian products of graphs, To appear.

Зейферт Г., Трельфалль В. (Seifert H., Threlfall W.)

1. Lehrbuch der Topologie, Leipzig, Teubner, 1934. (Русский перевод: Топология, М. — Л., Гостехтеориздат, 1938.)

Кайнен (Kainen P. C.)

1. A lower bound for crossing numbers of graphs with applications to K_n , $K_{p,q}$, and $Q(d)$, *J. Combinatorial Theory*, **12** (1972), 287—298.
2. Embeddings and orientations of graphs. In «Combinatorial Structures and their Applications», New York, Gordon and Breach, 1970, pp. 193—196.

Каньо (Kagno I. N.)

1. A note on the Heawood color formula, *J. Math. Phys.*, **14** (1935), 228—231.

Кемпе (Kempe A. B.)

1. On the geographical problem of the four colours, *Amer. J. Math.*, **2** (1879), 193—200.
2. How to colour a map with four colours, *Nature*, **21** (1880), 399—400.

Кёниг (König D.)

1. Theorie der endlichen und unendlichen graphen, Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe (Mathematik und ihre Anwendungen, Bd. 16), Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1936.

Клейтман (Kleitman D. J.)

1. The crossing number of $K_{5,n}$, *J. Combinatorial Theory*, **8** (1970), 315—323. (Русский перевод: Число скрещиваний графа $K_{5,n}$, в сб. «Теория графов», М., «Мир», 1974.)

Коксетер (Coxeter H. S. M.)

1. The map-coloring of unorientable surfaces, *Duke Math. J.*, **10** (1943), 293—304.
2. The mathematics of map coloring, *J. Recreat. Math.*, **2** (1969), № 1, 1—14.

Ландесман, Янгс (Landesman E. M., Youngs J. W. T.)

1. Smooth solutions in case 1 of the Heawood conjecture for non-orientable surfaces, *J. Combinatorial Theory*, **13** (1972), 26—39.

Ленг С. (Lang S.)

1. Algebra, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1971. (Русский перевод: Алгебра, М., «Мир», 1968.)

Манке (Mahnke H.)

1. Der kritische Fall 0 in der Heawoodschen Vermutung, Doctoral Thesis, Free University, Berlin, 1971.
2. The necessity of non-abelian groups in the case 0 of the Heawood map-coloring theorem, *J. Combinatorial Theory*, **13** (1972), 263—265.

Мей (May K. O.)

1. The origin of the four-colour conjecture, *Isis*, **56** (1965), 346—348.

Мейер (Mayer J.)

1. Le problème des régions voisines sur les surfaces closes orientables, *J. Combinatorial Theory*, **6** (1969), 177—195.
2. Décomposition de K_{16} en trois graphes planaires, *J. Combinatorial Theory*, **13** (1972), 71.

Нордхауз Е., Стюарт Б., Уайт А. (Nordhaus E., Stewart B., White A.)

1. On the maximum genus of a graph, *J. Combinatorial Theory*, **11** (1971), 258—267. (Русский перевод: О максимальном роде графа, в сб. «Теория графов», М., «Мир», 1974.)

Нордхауз, Стюарт, Рингейзен, Уайт (Nordhaus E. A., Stewart B. M., Ringeisen R. D., White A.)

1. A Kuratowski-type theorem for the maximum genus of a graph, *J. Combinatorial Theory*, **B12** (1972), 260—267.

Оре О. (Ore O.)

1. Theory of graphs, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., XXXVIII, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1962. (Русский перевод: Теория графов, М., «Наука», 1968.)
2. The four color problem, Pure and Applied Mathematics, **27**, New York, Acad. Press, 1967.

Оре, Стемпл (Ore O., Stemple J.)

1. On the four color problem, *Notices Amer. Math. Soc.*, **15** (January 1968), № 1, 196.

Петроулдж (Petroelje W. S.)

1. Imbedding graphs in pseudosurfaces, Specialist Thesis, Western Michigan University, 1971.

Рейнольдс (Reynolds C. N.)

1. On the problem of coloring maps in four colours, *Ann. of Math.*, **28** (1926), 1.

Рингейзен (Ringel R. D.)

1. Determining all compact orientable 2-manifolds upon which $K_{m, n}$ has 2-cell imbeddings, *J. Combinatorial Theory*, **12** (1972), 101—104.
2. The maximum genus of a graph, Ph. D. Thesis, Michigan State University, 1970.

Рингель (Ringel G.)

1. Färbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechts, *J. reine angew. Math.*, **190** (1952), 129—147.
2. Farbensatz für orientierbare Flächen vom Geschlecht $p > 0$, *J. reine angew. Math.*, **193** (1954), 11—38.
3. Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen, *Math. Ann.*, **127** (1954), 181—214.
4. Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann, *Math. Ann.*, **130** (1955), 317—326.
5. Über drei kombinatorische Probleme am n -dimensionalen Würfel und Würfelgitter, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **20** (1955), 10—19.
6. Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **28** (1965), 139—150.
7. Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.
8. Über das Problem der Nachbargebiete auf orientierbaren Flächen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **25** (1961), 105—127.

Рингель Г., Янгс Дж. (Ringel G., Youngs J. W. T.)

1. Solution of the Heawood map-coloring problem, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **60** (1968), 438—445. (Русский перевод: Решение проблемы Хивуда о раскраске карт, в сб. «Теория графов», М., «Мир», 1974.)
2. Solution of the Heawood map-coloring problem — case 11, *J. Combinatorial Theory*, **7** (1969), 71—93. (Русский перевод: Решение проблемы Хивуда о раскраске карт: случай 11, в сб. «Теория графов», М., «Мир», 1974.)
3. Solution of the Heawood map-coloring problem — case 8, *J. Combinatorial Theory*, **7** (1969), 353—363.
4. Solution of the Heawood map-coloring problem — case 2, *J. Combinatorial Theory*, **7** (1969), 342—352.
5. Lösung des Problems der Nachbargebiete auf orientierbaren Flächen, *Archiv der Mathematik*, Basel, **20** (1969), 190—201.
6. Das Geschlecht des symmetrischen vollständigen dreifärbbaren Graphen, *Comment. Math. Helv.*, **45** (1970), 152—158.

Саати (Saaty T. L.)

1. The minimum number of intersections in complete graphs, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **52** (1964), 688—690.

Сент-Ларё (Sainte-Laguë A.)

1. Géométrie de situation et jeux, *Mémorial Sci. Math.*, fasc. 41, Paris, Gauthier-Villars, 1929.

Тейт (Tait P. G.)

1. Note on a theorem in geometry of position, *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, **29** (1880), 657—660.
2. Remarks on the colouring of maps, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **10** (1880), 729.

- Терри, Уэлч, Янгс (Terry C. M., Welch L. R., Youngs J. W. T.)
1. The genus of K_{12s} , *J. Combinatorial Theory*, 2 (1967), 43—60.
 2. Solution of the Heawood map-coloring problem — case 4, *J. Combinatorial Theory*, 8 (1970), 170—174.
- Тёрнер (Turner J.)
1. Point symmetric graphs with a prime number of points, *J. Combinatorial Theory*, 3 (1967), 136—145.
- Титце (Tietze H.)
1. Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitigen Flächen, *Jahresber. Deutsch. Math. Vereinigung*, 19 (1910), 155—159.
- Уайт (White A. T.)
1. The genus of the complete tripartite graph $K_{m,n,n}$, *J. Combinatorial Theory*, 7 (1969), 283—285.
 2. The genus of repeated Cartesian products of bipartite graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 151 (1970), 393—404.
 3. On the genus of products of graphs, Recent trends in graph theory (m. Capobianco, J. B. Frechen, and M. Krolík, eds.), Berlin, Springer, 1971, pp. 217—219.
 4. The genus of the Cartesian product of two graphs, *J. Combinatorial Theory*, 11 (1971), 89—94.
 5. On the genus of the composition of two graphs, *Pac. J. Math.*, 41 (1972), 275—279.
 6. On the genus of a group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 173 (1972), 203—214.
- Уинн (Winn C. E.)
1. A case of coloration in the four color problem, *Amer. J. Math.*, 29 (1937), 515—528.
 2. On the minimum number of polygons in an irreducible map, *Amer. J. Math.*, 62 (1940), 406—416.
- Уитни, Татт (Whitney H., Tutte W. T.)
1. Kempe chains and the four colour problem, *Utilitas Mathematica*, 2 (1972), 241—281.
- Франклин (Franklin P.)
1. The four color problem, *Amer. J. Math.*, 44 (1922), 225—236.
 2. A six colour problem, *J. Math. Phys.*, 13 (1934), 363—369.
 3. Note on the four color problem, *J. Math. and Phys.*, 16 (1938), 172.
- Фрейли (Fraleigh J. B.)
1. A first course in abstract algebra, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1969. (См. стр. 365—368.)
- Фреше, Фан (Fréchet M., Fan Ky.)
1. Initiation to combinatorial topology, Boston, Prindle, Weber and Schmidt, 1967.

Хадвигер (Hadwiger H.)

1. Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe, *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 88 (1943), 133—142.

Хееш (Heesch H.)

1. Untersuchungen zum Vierfarbenproblem, B. I. Hochschulschriften, 810/810a/810b, Mannheim-Vienna-Zürich, Bibliographische Institute, 1969.

Хеффер (Heffter L.)

1. Über das Problem der Nachbargebiete, *Math. Ann.*, 38 (1891), 477—508.

Хивуд (Heawood P. J.)

1. Map colour theorem, *Quart. J. Math.*, 24 (1890), 332—338.

Химелрайт (Himelwright P.)

1. On the genus of hamiltonian groups, Specialist Thesis, Western Michigan University, 1972.

Эдмондс (Edmonds J.)

1. A combinatorial representation for polyhedral surfaces, *Notices Amer. Math. Soc.*, 7 (1960), 646.

Эррера (Erréra A.)

1. Du coloriage des cartes et de quelques questions d'Analysis situs, Paris, Brussels, 1921.
2. Une vue d'ensemble sur le problème des quatre couleurs, *Univ. Politec. Torino Rend. Sem. Mat.*, 11 (1952), 5—19.

Юнгерман (Jungerman M.)

1. Ph. D. Thesis, University of California, Santa Cruz, California, 1974.

Янгс (Youngs J. W. T.)

1. Minimal imbeddings and the genus of a-graph, *J. Math. Mech.*, 12 (1963), 303—316.
2. The Heawood map-coloring conjecture, Chapter 12 in Graph Theory and Theoretical Physics (F. Harary, ed.), New York, London, Academic Press, 1967, pp. 313—354.
3. Remarks on the Heawood conjecture (nonorientable case), *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 (1968), 347—353.
4. The nonorientable genus of K_n , *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 (1968), 354—358.
5. Solution of the Heawood map-coloring problem — cases 3, 5, 6, and 9, *J. Combinatorial Theory*, 8 (1970), 175—219.
6. The Heawood map-coloring problem — cases 1, 7, and 10, *J. Combinatorial Theory*, 8 (1970), 220—231.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

автоморфизм 234
аддитивное правило 42
арифметический гребень 128
ассоциированный гребень 146

бутылка Клейна 59

вершина 23
— изолированная 23
— конечная 28
— начальная 28
вершины смежные 23
вихрь 48, 141
— степени три 141, 205
вложение клеточное 240
— треугольное 86
вращение 30, 31
— круговое 34
— максимальное 34
— минимальное 34
— по часовой стрелке 31
— против часовой стрелки 31
— треугольное 37
выделение пленки Мёбиуса 69
— ручки 66

гомеоморфизм 53, 54
граничное ребро 76, 77
граничный псевдограф 77
грань полиэдра 60
граф 23
— бесконечный 239
— двудольный 87
— критический 25
— кубический 41
— планарный 81
— полный 26
— связный 28
— стран 88
— токов 45
— тривиальный 238
— шестивалентный 81
— n -раскрашиваемый 24
графы гомеоморфные 80
— изоморфные 80
гребень 129
группа автоморфизмов 176

двумерное подразделение 62
— укрупнение 63
дерево 28
длина маршрута 27
— хорды 166
дополнение графа 29
допустимая пара 16

закон Кирхгофа для токов (ЗКТ) 43
— — — глобальный 50
звезда 30
зигзаг 167
ЗКТ 43

излишнее соседство 153
индекс 196
инцидентность 23

карта 87
— двойственная 89
каскад 184
компонента 30, 124
конструктивные принципы:
 (C1)–(C4) 43, (C5) 48, (C6) 125,
 (C7) 142, (C8) 175, (C9) 178
круг 203
круговой перекресток 32

лес 28
лист Мёбиуса 19
лунка 55

максимальный связный подграф 30
маршрут 27
— замкнутый 27
многоугольник 55

наибольший общий делитель 49
номограмма 43
нормальная форма неориентируемых
поверхностей 71
— — ориентируемых поверхностей 68

- обозначения:
 $[x]$ 15, (x) 94, $G \triangleleft S$ 106, $G \subset S$ 105,
 d 137, 147
 одномерное подразделение 62
 — укрупнение 62
 оргграф 28
 ориентация 28, 85
 отображение 54
 — непрерывное 54
 — топологическое 54

 параллельные ребра 26
 парные ребра 145
 петля 26
 плоское представление полиэдра 60,
 76
 поверхность двусторонняя 20
 — замкнутая 73
 — — неориентируемая 73
 — — ориентируемая 73
 — неориентируемая 73
 — односторонняя 20
 — ориентируемая 73
 подграф 24
 — собственный 24
 поле Галуа 233
 полиэдр 55, 59, 73
 — неориентируемый 63
 — ориентируемый 63
 — частичный 76
 полуребро 184
 правило Δ^* 39
 — Δ 177
 — R^* 47, 101
 — R 100, 177
 проблема добавления соседства 113
 — нитей 16
 — хорд 166
 — четырех красок 11
 простая кривая 55
 — нормализация 65
 прямое произведение 124
 псевдограф 26
 — ориентированный 28
 путевой журнал 45

 разрезание 82
 расстояние 29
 ребро графа 23
 — концевое 34
 — полиэдра 60
 — полукруглое 203
 — разорванное 184
 регулярные случаи 94, 106

 род графа 94
 — — комбинаторный 37
 — — неориентируемый 96
 род поверхности 73

 связность 238
 символические представления 57
 соответствие 54
 сопряженные подстановки 228
 средняя точка 89, 184
 стандартные модели 73
 степень 23, 26
 столица 89
 сторона 55
 страна 55, 87
 страны соседние 11, 88
 стягивание 102
 сфера 73
 схема 31

 теорема о вложении 81
 — о раскраске карт 16
 ток 43
 топологический образ 54
 топология 51
 тор 13, 73
 треугольник 37

 удвоение 178
 усиленная проблема хорд 167

 Фокстрот 168

 хроматическое число 15, 24

 цепь 27, 134
 — простая 27
 цепная диаграмма 134
 цикл 34
 — индуцированный 34

 элементарно подобные полиэдры 63
 элементарные операции 62

 1-клетка 55
 2-клетка 55
 1-скелет 81
 n -цикл 30

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие редактора перевода</i>	5
<i>Предисловие</i>	7
1. ПРОБЛЕМЫ, ИЛЛЮСТРАЦИИ, ИСТОРИЯ	11
1.1. Проблема четырех красок	11
1.2. Теорема о раскраске карт	13
1.3. Проблема нитей	16
1.4. Односторонние поверхности	19
2. ТЕОРИЯ ГРАФОВ	23
2.1. Хроматическое число	23
2.2. Вращения графов	30
2.3. Ориентируемые случаи 7 и 10	42
3. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ	53
3.1. Элементы топологии	53
3.2. Полиэдры	55
3.3. Элементарные операции	62
3.4. Нормальная форма ориентируемых поверхностей	65
3.5. Нормальная форма неориентируемых поверхностей	69
3.6. Стандартные модели	72
3.7. Частичные полиэдры	76
4. ГРАФЫ НА ПОВЕРХНОСТЯХ	80
4.1. Теорема о вложении	80
4.2. Двойственные полиэдры	87
4.3. Неравенство Хивуда	91
4.4. Род графов	94
4.5. Неориентируемый род графов	96
4.6. Бутылка Клейна	98
5. КОМБИНАТОРИКА ВЛОЖЕНИЙ	105
5.1. Треугольные вложения	105
5.2. Ориентируемые особые случаи	112
5.3. Краткое описание общего случая	119

6. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ 1, 4 И 9	124
6.1. Ориентируемый случай 4	124
6.2. Арифметические гребни	128
6.3. Ориентируемый случай 1	129
6.4. Цепные диаграммы	134
6.5. Ориентируемый случай 9	137
7. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ 11, 2 И 8	140
7.1. Пример для $n = 35$	140
7.2. Ориентируемый случай 11	144
7.3. Проблема добавления соседства	151
7.4. Ориентируемый случай 2	155
7.5. Проблема добавления соседства	159
7.6. Ориентируемый случай 8	163
8. НЕОРИЕНТИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ (ИНДЕКС 1)	175
8.1. Метод удвоения	175
8.2. Неориентируемые случаи 0, 3, 7	180
8.3. Каскады	183
8.4. Приложение к ориентируемым случаям	193
9. РЕШЕНИЯ ИНДЕКСА 2 И 3	196
9.1. Примеры и метод	196
9.2. Ориентируемые случаи 3 и 5	203
9.3. Ориентируемый случай 6	207
9.4. Неориентируемый случай 9	210
10. ИНДУКТИВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ	212
10.1. Индукция индекса 3	212
10.2. Индукция индекса 2	219
10.3. Неориентируемые случаи 1, 2, 6 и 10	223
11. ОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ 0	226
11.1. Токи из неабелевых групп	226
11.2. Примеры	227
11.3. Общее решение	233
12. РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ	238
12.1. Вопросы о вращениях	238
12.2. Вопросы о вложениях	240
<i>Список литературы</i>	<i>246</i>
<i>Предметный указатель</i>	<i>253</i>