AN INTRODUCTION TO COMBINATORIAL ANALYSIS

JOHN RIORDAN
Member Technical Staff
Bell Telephone Laboratories, Inc.

New York · John Wiley & Sons, Inc.
London · Chapman & Hall, Limited
1958

ДЖ. РИОРДАН

ВВЕДЕНИЕ В КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Перевод с английского
Л. Е. САДОВСКОГО

Под редакцией
Л. Я. КУЛИКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1963

АННОТАЦИЯ

Книга Дж. Риордана содержит оригинальное изложение комбинаторного анализа — области математики, близкой к теории чисел, алгебре, теории вероятностей и имеющей большое прикладное значение. Основным аппаратом, которым пользуется автор при решении задач комбинаторики, является метод производящих функций и символическое исчисление. В конце каждой главы имеется большое число задач, помогающих активно усваивать изложенные в книге методы.

На русском языке нет книг, посвященных систематическому изложению комбинаторного анализа. Перевод книги Дж. Риордана восполняет этот существенный пробел. Книга, несомненно, будет полезна научным работникам и инженерам различных специальностей, а также студентам и аспирантам, желающим расширить и углубить свои знания в области комбинаторики.

Редакция литературы по математическим наукам

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Комбинаторный анализ является хорошо изученным разделом математики, однако его границы определены недостаточно четко. Началом комбинаторного анализа следует считать «ars combinatoria» Лейбница, если этот раздел понимать в смысле Нетто (Netto E., Lehrbuch der Combinatorik, Leipzig, 1901), т. е. как совокупность исследований о расположении, упорядочении или выборе элементов некоторого множества. Этот же смысл вложен в название книги Уитворта «Выбор и случай» (Whithworth W. A., Choice and Chance, London, 1901), одной из немногих книг по этому вопросу, изданных в Англии. Ее удачное название подчеркивает также тесную связь между комбинаторикой и теорией вероятностей. Мак-Магон в своем весьма основательном трактате указывает только, что комбинаторный анализ занимает промежуточное положение между алгеброй и высшей арифметикой, понимая под последней то, что сейчас называется теорией чисел.

Современный американский словарь (Funk and Wagnalls New Standard, 1943) определяет «комбинаторику» (этим удобным сокращением пользуемся и мы в нашей книге) как «раздел математики, изучающий составление, перечисление и свойства разбиений, вариаций, сочетаний и перестановок из конечного числа элементов при различных условиях».

Более удачным на наш взгляд является определение комбинаторного анализа, данное Августом де Морганом (de Morgan A., Differential and Integral Calculus, London, 1842):

«Комбинаторный анализ состоит главным образом в изучении сложных разложений при помощи априорных соображений и набора различных комбинаций членов, в которые могут входить коэффициенты».

Ни одно из приведенных выше определений не является вполне удовлетворительным, так как не дает четкого ответа на вопрос, что относится и что не относится к комбинаторике. Авторы трех упомянутых книг могли позволить себе некоторую неточность, так как само содержание этих книг говорило о том, что именно авторы имели в виду. Определение, даваемое словарем, не оставляет места для новых приложений комбинаторной техники (такие приложения имеются в последнем разделе гл. VI настоящей книги, посвященном числовому описанию деревьев, сетей и линейных графов). Определение де Моргана утверждает, что, говоря современным языком, коэффициенты производящих функций могут быть определены путем решения комбинаторных задач, однако в нем ничего не сказано о решении комбинаторных задач с помощью определения коэффициентов производящих функций.

Так как комбинаторный анализ развивается в нескольких новых направлениях, то при его определении имеется опасность чрезмерной узости, и некоторая расплывчатость, быть может, желательна. В настоящей книге «комбинаторным» считается все то, что «перечисляемо»; на протяжении всей книги основное внимание уделяется отысканию числа способов выполнения некоторых точно определенных операций. Сюда включаются все традиционные разделы, перечисленные в определении, данном в словаре, а также и новый материал, упомянутый выше. Поэтому данная книга может служить введением в рассматриваемый нами предмет, отвечающим современному его уровню.

Современное развитие комбинаторного анализа тесно связано с использованием производящих функций. В целях использования этих функций для нужд комбинаторики, их, следуя Беллу, естественно считать инструментом алгебры последовательностей и поэтому, несмотря на внешнее сходство с производящими функциями из анализа, относить к алгебре, а не к анализу. Использование производящих функций намного сокращает объем необходимых преобразований, позволяет унифицировать многие результаты и тем самым дает возможность охватить значительно больший круг вопросов. Применяя производящие функции в качестве основного орудия комбинаторики, можно показать, что метод включения и исключения связан с использованием факториальных моментов (что должно представлять некоторый интерес для статистиков). Наконец, метод производящих функций хорошо согласуется с методом представления вероятностей, данным В. Феллером в его книге «Введение в теорию вероятностей и ее приложения».

Представляются полезными следующие замечания о содержании книги. Глава I дает беглый обзор той части теории перестановок и сочетаний, которая приводится в книгах по элементарной алгебре. Однако здесь подчеркивается связь результатов этой теории с производящими функциями, и таким образом эти общеизвестные результаты освещаются по-новому.

В гл. II производящие функции рассматриваются более подробно. Здесь важным моментом является введение многочленов Белла, которые используются и в последующих главах.

В гл. III содержится подробное изучение принципа включения и исключения, который необходим для перечисления перестановок с ограничениями на позиции, рассматриваемых в гл. VII и VIII.

В гл. IV изучаются методы подсчета числа перестановок, представленных с помощью циклов. Эту главу можно рассматривать как введение в замечательную работу моего друга Жака Тушара.

Глава V содержит беглый обзор теории размещений, в которую сделал значительный вклад Мак-Магон.

В гл. VI рассматриваются разбиения, композиции и перечисления деревьев и линейных графов. Большая часть материала по линейным графам была подготовлена специально для этой книги и является продолжением работы, выполненной совместно с моими друзьями Фостером и Шенноном.

О гл. VII и VIII уже упоминалось. Они посвящены развитию исследований, в начале которых мне посчастливилось сотрудничать с Ирвингом Капланским; продолжению этой работы в большой степени способствовала переписка с Тушаром и Коихи Ямамото; во всем остальном работа проделана мной одним.

В каждой главе имеется обширный раздел задач, которые развивают положения, приведенные в основном тексте. По мере возможности, задачи ставятся в такой форме, которая помогает читателям. Тем не менее решение этих задач требует определенной математической зрелости.

Что касается обозначений, то я в основном ограничился использованием букв латинского алфавита, в результате чего одна и та же буква иногда оказывается имеющей несколько различных смыслов. По мере возможности использование одной и той же буквы в различных смыслах разделено достаточными интервалами, а в случаях, когда возможна путаница, делаются специальные оговорки. В пределах каждой главы для соотношений, теорем, разделов, примеров и задач избрана сквозная нумерация, и ссылки в пределах главы даются в соответствии с этой нумерацией. Ссылки же, относящиеся к другой главе, содержат в начале дополнительную цифру, указывающую на номер соответствующей главы. Так, например, отсылка к соотношению 3а из гл. IV дается в пределах этой главы в виде (3а), а в гл. VI в виде (4.3а). Список литературы дается в конце каждой главы. Для указания объема таблиц часто используются принятые в настоящее время сокращения; так, например, запись $n = 0(1)10$ означает, что n пробегает значения 0, 1, 2, ..., 10.

Я ставил перед собой цель доводить все преобразования до того момента, когда с предельной легкостью можно получить нужный численный результат. Поэтому оказываются оправданными некоторые алгебраические преобразования, излишние при иных подходах. Некоторые числовые результаты настолько занимательны, что стимулируют изучение их арифметической природы. Поэтому в книге приведены (без доказательств) соответствующие результаты теории чисел.

В первый период работы над книгой, 15 лет назад, я состоял в активной переписке с Беккером. Во время интенсивной работы в последние два года, которую мне не удалось бы выполнить без поддержки Б. Мак-Миллана, я воспользовался возможностью изложить материал этой книги на двух заседаниях семинара в лаборатории компании Белл. Е. Гильберт — организатор одного из этих заседаний — оказался настолько любезным, что прочитал весь текст в различных вариантах, а также просмотрел много задач и пополнил их число. Многие улучшения были внесены после прочтения текста Ж. Тушаром и С. Рисом. Всем этим коллегам я приношу искреннюю благодарность.

Джон Риордан

Лаборатория компании Белл,
Нью-Йорк, Февраль 1958

Глава 1

ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ

1. Введение

В этой главе собран наиболее простой и чаще всего используемый материал из теории сочетаний. Этот материал излагается в целом ряде учебников по элементарной алгебре, поэтому в настоящей книге изложение его сопровождается лишь самыми необходимыми объяснениями и минимальным количеством примеров. Основное внимание уделено методам доказательств, которые могут оказаться полезными позднее, и введению необходимых понятий и рабочих приемов. Среди этих понятий вводится понятие производящей функции. Это позволяет провести в весьма общем виде изучение как перестановок, так и сочетаний. Подобный метод, как нам представляется, не в достаточной мере известен.

В большей части доказательств в той или иной форме используется одно или одновременно два из следующих правил:

Правило суммы. Если объект A может быть выбран m способами, а объект B другими n способами, то выбор «либо A, либо B» может быть осуществлен $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A может быть выбран m способами и после каждого из таких выборов объект B в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор «A и B» *в указанном порядке* может быть осуществлен mn способами.

Правила эти по своей природе являются определениями, и их скорее нужно понимать, нежели доказывать. Следует заметить, что в первом правиле выборы A и B являются взаимно исключающими; т. е. нет возможности выбрать оба объекта одновременно (одним и тем же путем). Правило произведения наиболее часто используется в тех случаях, когда порядок выбора не является существенным, т. е. когда выборы A и B оказываются независимыми. Не следует, однако, игнорировать возможность наличия такой зависимости.

Даем основные определения перестановок и сочетаний:

Определение. *r-перестановкой из n элементов называется упорядоченная выборка (либо расположение в определенном порядке) r из этих элементов.*

Определение. *r-сочетанием из n элементов называется выборка r из них без учета порядка.*

В связи с этими определениями отметим следующее. Во-первых, в каждом из указанных определений ничего не говорится о характере n элементов; они могут быть все одного вида, либо некоторые одного, остальные иного вида, либо все различны.

Несмотря на то, что в более простых случаях настоящей теории предполагается, что все рассматриваемые элементы различны, самым общим является следующий случай: имеется k видов элементов, причем к виду j относятся n_j элементов, так что $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$. Множество чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ называется *спецификацией* этих элементов. Далее, в определении перестановок смысл термина «упорядоченный» означает, что две выборки рассматриваются как различные, если они состоят из одних и тех же элементов, но осуществлены в различном порядке. Можно считать, что все r-перестановки реализуются в два приема: сначала осуществляются выборы всевозможных множеств по r элементов в каждом (r-сочетания), а затем каждое из них упорядочивается всеми возможными способами. Например, 2-перестановками из трех различных элементов, обозначаемых цифрами 1, 2, 3, оказываются 12, 13, 23, 21, 31, 32. Первые три из них являются 2-сочетаниями нз этих предметов.

В более старой литературе r-перестановки из n элементов для $r<n$ назывались вариациями по r элементов из n, а термин «перестановка» резервировался для операции упорядочения всех n элементов, что, как отмечено в гл. IV, является естественным в теории групп. Подобной терминологии мы придерживаемся в настоящей книге, всюду подразумевая под недостаточно точным понятием «перестановка» n-перестановку.

2. r-перестановки

Используем теперь приведенные выше правила и определения для проведения наиболее простых и полезных подсчетов.

2. 1. Различные предметы (элементы)

Первый из членов r-перестановки из n различных предметов может быть выбран n способами, так как все n предметов различны по предположению. После этого выбор второго члена уже можно осуществить $n-1$ способами и т. д. вплоть до выбора r-го члена, который может быть проведен $n-r+1$ способами. Повторным применением правила произведения получим искомое число различных r-перестановок

$$P(n, r)=n(n-1)\ldots(n-r+1), \quad n\geqslant r. \tag{1}$$

При $r=n$ получаем

$$P(n, n)=n(n-1)\ldots 1=n!, \tag{2}$$

т. е. число различных перестановок из n предметов равно произведению всех целых чисел от 1 до n, называемому n-факториалом и обозначаемому, как показано выше, через $n!$ Символ $P(n, 0)$, не имеющий комбинаторного смысла, условимся считать равным единице.

Используя соотношение (2), можно переписать (1) в следующем виде:

$$P(n, r)=\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{P(n, n)}{P(n-r, n-r)}$$

или в сокращенном виде:

$$P(n, r)=(n)_r.$$

Последнее выражение называется убывающим r-факториалом от n. Так как тот же самый символ используется и в теории гипергеометрических функций для обозначения произведения $n(n+1)\dots(n+r-1)$ в предыдущем определении, во избежание двусмысленности оказалось необходимым использовать слово «убывающий».

Полученное выше соотношение

$$P(n, n)=P(n, r)P(n-r, n-r)$$

вытекает также из правила произведения.

Интересно отметить также следующее рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned}P(n, r)&=P(n-1, r)+rP(n-1, r-1)=\\&=(n-1)_r+r(n-1)_{r-1}.\end{aligned}\qquad(3)$$

Это соотношение можно получить из (1) с помощью обычных алгебраических преобразований, положив в нем $n=n-r+r$; к нему же можно прийти в процессе классификации r-перестановок по наличию или отсутствию в них заданного элемента. Действительно, число перестановок, в которых фиксированный элемент отсутствует, составит $P(n-1, r)$. Если же этот элемент входит в перестановку, то может занимать в ней одно из r положений. Поэтому он и может появляться в $P(n-1, r-1)$ различных перестановках из $n-1$ отличных от него предметов.

Пример 1. Из четырех различных объектов, обозначенных цифрами 1, 2, 3 и 4, составляются следующие двенадцать 2-перестановок ($n=4$, $r=2$):

12	13	14	23	24	34
21	31	41	32	42	43

2.2. Число перестановок из n объектов, из которых p принадлежат одному виду, q—другому и т. д.

Здесь рассматриваются только перестановки из всех n элементов (взятых в совокупности), поэтому термин «перестановка» здесь не уточняется. Пусть x — искомое число перестановок. Допустим, что p одинаковых предметов заменены новыми p предметами, отличными как друг от друга, так и от других предметов, входящих в перестановку. Их можно переставить между собой, согласно соотношению (2), $p!$ способами. Следовательно, число перестановок из этих новых предметов составит $xp!$. Те же рассуждения справедливы для всякого иного набора одинаковых предметов, а так как в конечном счете все n предметов являются различными и число перестановок из них равно $n!$, то

$$xp!q!\ldots = n!,$$

откуда

$$x = \frac{n!}{p!q!\ldots}, \qquad p+q+\ \ldots = n. \tag{4}$$

Правая часть (4) является полиномиальным коэффициентом, т. е. коэффициентом в разложении выражения $(a+b+\ldots)^n$. Этот коэффициент является также, как будет показано в гл. V, числом размещений n различных элементов по p различным ячейкам или ящикам, причем в первую помещается p элементов, во вторую q и т. д., без учета порядка элементов в любой ячейке.

Пример 2. n различных книг, каждая из которых имеется в m экземплярах, могут быть размещены на одной полке $(nm)!/(m!)^n$ способами.

В последнем разделе этой главы с помощью метода производящих функций будет решена более общая проблема определения числа r-перестановок из элементов общей спецификации (p элементов одной природы, q — другой и т. д.).

2. 3. r-перестановки с неограниченными повторениями

Рассмотрим запас предметов n различных типов, в котором элементов каждого типа неограниченное число или, другими словами, любой элемент после извлечения его из запаса замещается в запасе другим, аналогичным ему. Следовательно, каждое место в r-перестановке может быть заполнено n различными путями, так как запас элементов после любого выбора остается неизменным. Согласно правилу произведения, искомое число перестановок, а именно число r-перестановок с повторениями из n элементов, равно

$$U(n, r) = n^r. \tag{5}$$

Пример 3. Число различных способов, которыми могут быть нанесены перфорации на r-позиционную ленту (используемую в телетайпе или вычислительной машине), составляет 2^r. В рассматриваемом примере любая из r позиций, составляющих каждую строку ленты, замещается одним из двух «элементов» — перфорацией или отсутствием ее.

В терминах статистики величина $U(n, r)$ соответствует выбору с возвращением, в противоположность величине $P(n, r)$, отвечающей выбору без возвращения.

3. Сочетания

3. 1. r-сочетания из n различных элементов

Простейший метод рассуждений основан на том замечании, что в каждом сочетании из r различных элементов эти последние могут быть упорядочены $r!$ способами, т. е. столькими способами, сколько существует r-перестановок; следовательно, если $C(n, r)$ означает искомое число сочетаний, то

$$r!C(n, r) = P(n, r) = n(n-1)\dots(n-r+1), \quad n \geqslant r,$$

и

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}, \tag{6}$$

где последний символ используется обычно для биномиальных коэффициентов, т. е. коэффициентов в разложении $(a+b)^n$. [C_r^n, C_n^r, ${}_nC_r$ и (n,r)— различные обозначения того же числа $C(n, r)$; первые два из них трудны для печати, а индексы можно принять за показатели степени; левый индекс третьего обозначения иногда трудно отнести к той букве C, которую он определяет; написание буквы C, строго говоря, не является необходимым, ибо числа (6) не обязательно во всех случаях связаны с сочетаниями; заметим, однако, что все указанные обозначения употребляются в печатных изданиях и вне их.]

$C(n, 0)$ — число сочетаний из n элементов по 0—не имеет комбинаторного смысла, однако обычно уславливаются считать его равным единице. При $r<0$ или $r>n$, по определению, $C(n, r)=0$.

Величина $C(-n, r)$ не имеет комбинаторного смысла, однако можно заметить, что из (6) следует

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

и

$$\binom{-n}{-r} = (-1)^{n+r} \binom{r-1}{n-1}.$$

Пример 4. Из четырех различных объектов (обозначаемых 1, 2, 3, 4) можно составить следующие сочетания по два ($n=4$, $r=2$):

12 13, 14, 23, 24, 34.

С помощью рекуррентных соотношений число сочетаний (6) можно получить несколько иным путем. Сочетания (6) можно разбить на два типа: сочетания, содержащие данный элемент, скажем, первый, и сочетания, его не содержащие. Число сочетаний первого типа равно $C(n-1, r-1)$, так как фиксация одного элемента в сочетании уменьшает на единицу как число n, так и число r; число сочетаний второго типа по тем же соображениям равно $C(n-1,\ r)$. Следовательно,

$$C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r),\ n\geqslant r. \qquad (7)$$

Методом математической индукции можно показать, что (6) является единственным решением (7), удовлетворяющим граничным условиям

$$C(n,\ 0)=C(1,\ 1)=1;\quad C(1,\ 2)=C(1,\ 3)=\ldots=0.$$

Соотношение (7) является важной формулой, ибо оно служит основным рекуррентным соотношением для биномиальных коэффициентов. Заметим, что путем итерации можно получить

$$\begin{aligned} C(n,\ r)&=C(n-1,\ r-1)+C(n-2,\ r-1)+\ldots\\ &\ldots+C(r-1,\ r-1)=C(n-1,\ r)+C(n-2,\ r-1)+\ldots\\ &\ldots+C(n-1-r,\ 0). \end{aligned} \qquad (8)$$

Первая строка классифицирует r-сочетания из n пронумерованных элементов по элементу с наименьшим номером, т. е. $C(n-k,\ r-1)$ является числом r-сочетаний, в которых наименьший из номеров элементов равен k. Вторая из строк (8) не поддается столь же простому комбинаторному толкованию.

Ниже приводится небольшая таблица, позволяющая находить числовые значения величины $C(n,\ r)$ и являющаяся разновидностью треугольника Паскаля. Обратите внимание на то, сколь просто заполняется каждая строка таблицы с помощью предыдущей строки и (7). Отметим также, что $C(n,\ r)=C(n,\ n-r)$. Это соотношение непосредственно следует из (6), а также с очевидностью вытекает из того факта, что выбор r предметов из общего числа n определяет оставшиеся $n-r$ предметов.

Числа *C(n, r)* (биномиальные коэффициенты)

$n \backslash r$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

3.2. Сочетания с повторениями

Теперь искомым является число r-сочетаний из n различных предметов, каждый из которых может появляться неопределенно часто — от 0 до r раз. Это число является функцией $f(n, r)$ от n и r.

Нам кажется, что наиболее естественным для определения числа сочетаний с повторениями является использование рекуррентных формул и правила суммы. Предположим, что предметы перенумерованы числами от 1 до n. Тогда каждое сочетание либо содержит, либо не содержит 1. Если в сочетание входит предмет 1, то он может встретиться в сочетании 1, 2 и т. д. вплоть до r раз. Однако во всех случаях при уменьшении допустимого числа появлений элемента 1 на единицу получаем $f(n, r-1)$ допустимых сочетаний. Сочетаний, не содержащих элемента 1, будет $f(n-1, r)$. Следовательно,

$$f(n, r)=f(n, r-1)+f(n-1, r). \tag{9}$$

Если $r=1$, то никакие повторения элементов невозможны и $f(n, 1)=n$. [Заметим, что (9) определяет число $f(n, 0)=$ $=f(n, 1)-f(n-1, 1)$ равным единице, что является естественным условием.] Если $n=1$, то при любом значении r возможно лишь одно сочетание, поэтому $f(1, r)=1$. Далее

$$\begin{aligned} f(n, 2)&=f(n, 1)+f(n-1, 2)= \\ &=f(n, 1)+f(n-1, 1)+f(n-2, 2). \end{aligned}$$

Если теперь повторно использовать это соотношение до появления числа $f(1, 2)$, равного единице, то по формуле суммы арифметической прогрессии или согласно первому из соотношений (8) получаем

$$\begin{aligned} f(n, 2)&=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1= \\ &=(n+1)n/2=\binom{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично, опять-таки с помощью первого из соотношений (8), получаем

$$\begin{aligned} f(n, 3)&=f(n, 2)+f(n-1, 2)+\ldots+f(1, 3)= \\ &=\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\ldots+1=\binom{n+2}{3}. \end{aligned}$$

Теперь ясен общий ответ: число r-сочетаний с повторениями из n различных элементов равно

$$f(n, r)=\binom{n+r-1}{r}. \tag{10}$$

При этом можно без труда проверить, что (10) удовлетворяет (9) и его граничным условиям: $f(n, 1)=n$, $f(1, r)=1$.

Пример 5. Число сочетаний с повторением по 2 из 4 элементов, обозначаемых через 1, 2, 3, 4, равно, согласно (10), десяти; разбив их, согласно (9), получим

11, 12, 13, 14
22, 23, 24, 33, 34, 44

Результат (10) настолько же прост, насколько просты его доказательства. Лучшее из них, которое можно считать восходящим к Эйлеру, следующее. Рассмотрим любое из r-сочетаний с повторением из n пронумерованных упорядоченных предметов; например, сочетание $c_1c_2 \ldots c_r$, в котором элементы выписаны в возрастающем порядке (считаем, что одинаковые элементы также упорядочены по возрастанию). Естественно, что в каждом сочетании вследствие возможности неограниченных повторений любые рядом стоящие элементы могут быть одинаковыми. Ввиду этого обстоятельства строим с помощью соотношений

$$d_1=c_1+0;\ d_2=c_2+1,\ \ldots;\ d_i=c_i+i-1,\ \ldots;\ d_r=c_r+r-1$$

последовательность элементов $d_1, d_2, \ldots, d_r$. Следовательно, при любых элементах c_i элементы d_i всегда различны. Ясно, что последовательности из элементов c_i и d_i взаимно однозначно соответствуют друг другу, т. е. каждое заданное r-сочетание порождает определенную последовательность элементов d_i, и наоборот. Число последовательностей из элементов d_i равно числу $C(n+r-1, r)$ r-сочетаний (без повторений) из элементов с номерами от 1 до $n+r-1$; следовательно, формула (10) доказана. Например, последовательностями из элементов d_i, соответствующими r-сочетаниям из примера 5, оказываются (в том же порядке) следующие:

12, 13, 14, 15
23, 24, 25, 34, 35, 45

4. Производящие функции для сочетаний

Проведенные выше подсчеты могут быть унифицированы и обобщены с помощью сравнительно простого математического аппарата — производящей функции.

Для примера рассмотрим три объекта, обозначенные x_1, x_2, x_3. Образуем произведение

$$(1+x_1t)(1+x_2t)(1+x_3t).$$

Перемножив и расположив это произведение по степеням t, получим

$$1+(x_1+x_2+x_3)\,t+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\,t^2+x_1x_2x_3t^3,$$

или

$$1+a_1t+a_2t^2+a_3t^3,$$

где a_1, a_2, a_3 — элементарные симметрические функции трех переменных x_1, x_2 и x_3. Эти симметрические функции определяются выше приведенным выражением. Можно заметить, что число слагаемых каждого коэффициента a_r $(r=1, 2, 3)$ равно числу сочетаний из трех элементов по r. Следовательно, число таких сочетаний получается приравниванием каждого x_i единице, т. е.

$$(1+t)^3=\sum_{r=0}^{3} a_r(1, 1, 1)t^r.$$

Для случая n различных объектов, обозначенных $x_1, \ldots, x_n$, ясно, что

$$(1+x_1t)(1+x_2t)\ldots(1+x_nt)=1+a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)t+\ldots$$
$$\ldots+a_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)t^r+\ldots+a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)t^n$$

и

$$(1+t)^n=\sum_{r=0}^{n} a_r(1, 1, \ldots, 1)t^r=\sum_{r=0}^{n} C(n, r)t^r; \qquad (11)$$

это есть результат, упомянутый в замечании, следующем за выражением (6), определявшим числа $C(n, r)$ как биномиальные коэффициенты.

Выражение $(1+t)^n$ называется перечисляющей производящей функцией сочетаний из n различных объектов или просто *энумератором*.

Эффективность энумераторов показана на следующих примерах.

Пример 6. В равенстве (11) примем $t=1$; тогда

$$2^n=\sum_{0}^{n} C(n, r)=\sum_{0}^{n}\binom{n}{r},$$

т. е. число всех возможных сочетаний из n различных элементов равно 2^n. Последнее также очевидно из того, что в любое из возможных сочетаний каждый заданный элемент либо входит, либо не входит. Далее, при $t=-1$ соотношение (11) принимает вид

$$0=\sum_{0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}=$$
$$=1-n+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}.$$

Сложив два последних равенства, а затем вычтя одно из другого, получим

$$\sum_{r=0}\binom{n}{2r}=\sum_{r=0}\binom{n}{2r+1}=2^{n-1}.$$

Пример 7. Положим $n=n-m+m$. Так как

$$(1+t)^n=(1+t)^{n-m}(1+t)^m$$

то, приравнивая коэффициенты при t^r в левой и правой частях, получаем

$$C(n,\ r) = C(n-m,\ 0)\,C(m,\ r) + C(n-m,\ 1)\,C(m,\ r-1) + \ldots$$
$$\ldots + C(n-m,\ r)\,C(m,\ 0)$$

или

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=0} \binom{n-m}{k} \binom{m}{r-k}.$$

Соответствующее соотношение для «убывающих» факториалов $(n)_r = n(n-1)\ldots(n-r+1)$ имеет вид

$$(n)_r = (m)_r + \binom{r}{1}(n-m)_1(m)_{r-1} + \binom{r}{2}(n-m)_2(m)_{r-2} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{r}{j}(n-m_j)(m)_{r-j} + \ldots + (n-m)_r.$$

Этот результат часто называют теоремой Вандермоида. Его можно переписать в виде

$$(n)_r = \sum_{j=0} \binom{r}{j}(n+m)_j(m)_{r-j},$$

откуда следует соотношение

$$n^{(r)} = \sum_{j=0} \binom{r}{j}(n-m)^{(j)} m^{(r-j)}$$

для «возрастающих» факториалов

$$n^{(r)} = n(n+1)\ \ldots\ (n+r-1) = (-1)^r(-n)_r.$$

Результат (11) — только начало. Какими же оказываются производящие функции и энумераторы в случае, когда не все комбинируемые элементы различны?

В произведении $(1+x_1t)(1+x_2t)\ \ldots\ (1+x_nt)$ каждый множитель является биномом, который благодаря наличию в нем слагаемых 1 и x_k указывает на возможность наличия или отсутствия в каждом из сочетаний элемента x_k. Это произведение порождает сочетания, так как коэффициент при t^r в нем получается выбором единицы в $n-r$ из n двучленных множителей и в r оставшихся после такого выбора множителях — членов вида x_kt всеми возможными путями. Эти коэффициенты по самому их определению являются r-сочетаниями. Каждый элемент в любом сочетании может появляться не более одного раза, ибо любой множитель состоит только из двух слагаемых.

Следовательно, производящую функцию для сочетаний, в которых элементы x_k могут содержаться по 0, 1, 2, ..., j раз, можно получить заменой прежних множителей $1+x_kt$ множителями вида

$$1 + x_kt + x_k^2t^2 + \ldots + x_k^jt^j.$$

Более того, множители производящей функции можно совершенно независимо друг от друга приспосабливать к любым требованиям задачи. Так, например, если x_k должно всегда входить четное число раз, но не более чем j раз, то j-й множитель $(j = 2i + 1)$ следует выбирать в виде

$$1 + x_k^2 t^2 + x_k^4 t^4 + \ldots + x_k^{2i} t^{2i}.$$

Следовательно, производящая функция для любой задачи описывает не только виды элементов, но и виды искомых сочетаний. Множитель x_k^i в каждом члене коэффициента при соответствующей степени t в выражении производящей функции показывает, что элемент x_k появляется в соответствующем сочетании i раз.

Можно было бы записать общую для всех случаев форму, однако обозначения оказались бы громоздкими и менее наглядными, нежели в приводимых ниже примерах.

Пример 8. Для сочетаний с неограниченным повторением элементов n видов и без ограничений на число появлений любого элемента перечисляющей производящей функцией будет

$$(1 + t + t^2 + \ldots)^n$$

или, что то же самое,

$$(1-t)^n = \sum_0^\infty \binom{-n}{r} (-1)^r =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{-n(-n-1)\ldots(-n-r+1)}{r!} (-t)^r =$$

$$= \sum_0^\infty \binom{n+r-1}{r} t^r.$$

Этим подтверждается результат (10).

Пример 9. Для сочетаний из примера 8 и при дополнительном условии непременного вхождения в сочетание по меньшей мере одного элемента каждого вида, перечисляющая производящая функция будет иметь вид

$$(t + t^2 + \ldots)^n$$

или, что то же самое,

$$(t + t^2 + \ldots)^n = t^n (1-t)^{-n} =$$

$$= t^n \sum_0^\infty \binom{n+r-1}{r} t^r =$$

$$= \sum_{r=n}^\infty \binom{r-1}{r-n} t^r = \sum_{r=n}^\infty \binom{r-1}{n-1} t^r$$

Следовательно, число искомых сочетаний равно 0 для $r < n$ и равно $C(r-1, r-n)$ для $r \geqslant n$. Например, для $n=3$ и элементов a, b, c существует одно 3-сочетание abc и шесть $= C(4, 2)$ 5-сочетаний, а именно $aaabc$, $abbbc$, $abccc$, $aabbc$, $aabcc$, $abbcc$.

Пример 10. Для сочетаний из примера 8, но при условии, что каждый элемент появляется четное число раз, перечисляющая производящая функция имеет вид

$$(1+t^2+t^4+\ldots)^n,$$

или, что то же самое, вид

$$(1-t^2)^{-n}=\sum_{0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}t^{2r}.$$

Таким образом, число r-сочетаний при нечетном r равно нулю, а число $2r$-сочетаний, совершенно очевидно, равно числу r-сочетаний из примера 8. Отметим, что

$$(1-t^2)^{-n}=(1-t)^{-n}(1+t)^{-n},$$

так что сумма

$$\binom{n+r-1}{r}-\binom{n+r-2}{r-1}n+\binom{n+r-3}{r-2}\binom{n+1}{2}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^k\binom{n+r-k-1}{r-k}\binom{n+k-1}{k}+\ldots+(-1)^r\binom{n+r-1}{r}$$

равна нулю для нечетного r и $\binom{n+s-1}{s}$ для $r=2s$, т. е.

$$\binom{n+s-1}{s}=\sum_{k=0}^{2s}\binom{n+2s-k-1}{2s-k}\binom{n+k-1}{k}(-1)^k.$$

Подобные примеры, очевидно, могут быть неограниченно умножены. Полезно отметить следующий основной факт. При образовании сочетания осуществляется независимый выбор элементов. И это преимущество используется в производящей функции на основе правила умножения. Действительно, каждый коэффициент произведения является производящей функцией для элементов данного вида. Произведения этих производящих функций возникают подобно тому, как возникают суммы независимых произвольных переменных в теории вероятностей.

5. Производящие функции для перестановок

В случае коммутативных алгебраических операций произведения x_1x_2 и x_2x_1 одинаковы. Поэтому производящую функцию, описывающую перестановки, невозможно построить так, как это было сделано для сочетаний. Тем не менее отыскание перечисляющих производящих функций (энумераторов) оказывается делом несложным.

В случае n различных элементов из соотношения (1) вытекает, что

$$(1+t)^n = \sum_{0}^{n} P(n, r)\, t^r/r!, \qquad (12)$$

т. е. в разложении выражения $(1+t)^n$ число $P(n, r)$ является коэффициентом при $t^r/r!$

Этот факт указывает пути для обобщения. Если какой-либо элемент может появляться 0, 1, 2, ..., k раз или если существует k элементов данного вида, то множитель $1+t$ в левой части (12) заменяется множителем

$$1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k}{k!}\,.$$

Это объясняется тем, что число перестановок из n элементов, p из которых одного вида, q — другого и т. д., согласно формуле (4), равно

$$\frac{n!}{p!\,q!\,\ldots}\,.$$

Это число оказывается коэффициентом при $t^n/n!$ в произведении

$$\frac{t^p}{p!}\,\frac{t^q}{q!}\,\ldots, \quad p+q+\ldots = n,$$

что в точности соответствует требованиям: буква, определяющая элементы первого типа, появляется точно p раз, буква, определяющая элементы второго типа, — ровно q раз и т. д.

Следовательно, если перестановки заданы условиями, согласно которым k-й из n элементов должен появиться $\lambda_0(k)$, $\lambda_1(k)$, ... раз ($k = 1, 2, \ldots, n$), то число r-перестановок оказывается коэффициентом при $t^r/r!$ в произведении

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{t^{\lambda_0(k)}}{\lambda_0(k)!} + \frac{t^{\lambda_1(k)}}{\lambda_1(k)!} + \ldots \right).$$

Возникающие здесь производящие перечисляющие функции могут быть названы экспоненциальными производящими функциями. Подобный термин оправдан аналогией, ибо известно, что

$$e^{at} = \sum_{0}^{\infty} a^r \frac{t^r}{r!}\,.$$

Это замечание разъясняется следующими примерами.

Пример 11. Для r-перестановок из n различных элементов с неограниченными повторениями (любой элемент может появляться в перестановке произвольное число раз) перечисляющей производящей функцией служит

$$\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\dots\right)^n.$$

Но

$$\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\dots\right)^n=e^{nt}=\sum_0^\infty n^r\frac{t^r}{r!}.$$

Следовательно, число r-перестановок равно n^r, что согласуется с соотношением (5).

Пример 12. Для перестановок из примера 11 и при дополнительном условии, что каждый элемент входит в перестановку не менее одного раза, энумератором служит

$$\begin{aligned}\left(t+\frac{t^2}{2!}+\dots\right)^n&=(e^t-1)^n=\\&=\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}(-1)^j e^{(n-j)t}=\\&=\sum_{r=0}^n\frac{t^r}{r!}\sum_0^n\binom{n}{j}(-1)^j(n-j)^r=\\&=\sum_{r=0}^\infty\frac{t^r}{r!}\Delta^n0^r.\end{aligned}$$

Последний результат выражен в обозначениях, принятых в теории конечных разностей. Если ввести оператор E сдвига $Eu(n)=u(n+1)$ и оператор Δ разности $\Delta u(n)=u(n+1)-u(n)=(E-1)u(n)$, то этому результату можно придать вид

$$\sum\binom{n}{j}(-1)^j(n-j)^r=\sum\binom{n}{j}(-1)^jE^{n-j}0^r=(E-1)^n0^r=\Delta^n0^r.$$

Заметим, что $\Delta 0^r=1^r$, $\Delta^2 0^r=2^r-2$, $\Delta^3 0^r=3^r-3\cdot 2^r+3$. Эти величины вновь появятся в следующих главах.

Пример 13. Для r-перестановок из элементов, удовлетворяющих условиям п. 2.2 (p элементов одного вида, q — второго и т. д.), перечисляющий производящей функцией оказывается

$$(1+t+\dots+t^p/p!)(1+t+\dots+t^q/q!)\dots\,.$$

Легко проверить (см. замечание на стр. 21), что, согласно (4), коэффициент при $t^n/n!$ есть $n!/p!q!\dots$. Число r-перестановок является коэффициентом при $t^r/r!$; следовательно, производящая функция, приведенная выше, оказывается именно той, о которой шла речь в п. 2.2.

Наконец, следует отметить, что перестановки с неограниченными повторениями из примеров 11 и 12 связаны с задачами на размещения, которые будут рассматриваться в гл. 5. Для примера рассмотрим восемь 3-перестановок с повторениями из элементов двух типа a и b:

$$aaa,\quad aab,\quad aba,\quad baa,\quad abb,\quad bab,\quad bba,\quad bbb.$$

Их можно поставить во взаимно однозначное соответствие с размещениями трех различных элементов по двум ячейкам (ячейки отделены вертикальными черточками):

$$abc|-\quad ab|c\quad ac|b\quad bc|a\quad a|bc\quad b|ac\quad c|ab\quad -|abc.$$

Здесь намечается утверждение, доказываемое в гл. 6, а именно число r-перестановок с повторениями из объектов n различных типов равно числу размещений r различных элементов по n различным ячейкам. Ограничение из примера 12, состоящее в том, что каждая перестановка содержит по меньшей мере по одному элементу каждого типа, соответствует следующему требованию, относящемуся к размещениям: все n ячеек должны оказаться занятыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барнард и Чайлд (Barnard S., Child J. M.), Higher Algebra, New York, 1936.
2. Кристалл (Chrystal G.), Algebra (part II), London, 1900.
3. Нетто (Netto E.), Lehrbuch der Combinatorik, Leipzig, 1901.
4. Уитворт (Whitworth W. A.), Choice and Chance, London, 1901.

Задачи

1. (a) Показать, что из p знаков плюс и из q знаков минус можно составить $\binom{p+1}{q}$ различных последовательностей, в каждой из которых нигде рядом не окажутся два знака минус.

(b) Показать, что n знаков, каждый из которых либо плюс, либо минус, можно $f(n)$ способами расположить в последовательность, в которой нигде не окажутся рядом два минуса. При этом $f(0)=1$, $f(1)=2$ и

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2),\quad n>1.$$

(c) Из сопоставления (a) и (b) вытекает, что

$$f(n)=\sum_{q=0}^{m}\binom{n-q+1}{q},\quad m=[(n+1)/2],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x. **Показать,** что

$$g(n)=\sum_{q=0}^{m}\binom{n-q+1}{q}=g(n-1)+g(n-2)$$

и что $g(0)=1$, $g(1)=2$ и, следовательно, $g(n)=f(n)$. Числа $f(n)$ называются числами Фибоначчи.

2. (а) Доказать, что

$$n\binom{n}{r}=(r+1)\binom{n}{r+1}+r\binom{n}{r},$$

$$\binom{n}{2}\binom{n}{r}=\binom{r+2}{2}\binom{n}{r+2}+2\binom{r+1}{2}\binom{n}{r+1}+\binom{r}{2}\binom{n}{r},$$

$$\binom{n}{s}\binom{n}{r}=\sum_{k=0}^{q}\binom{s}{k}\binom{r+s-k}{r-k}\binom{n}{r+s-k}, \quad q=\min(r,\ s).$$

(b) Доказать аналогично, что

$$n\binom{n}{\mathbf{r}}=r\binom{n+1}{r+1}+\binom{n}{r+1},$$

$$\binom{n}{2}\binom{n}{r}=\binom{r}{2}\binom{n+2}{r+2}+2r\binom{n+1}{r+2}+\binom{n}{r+2},$$

$$\binom{n}{s}\binom{n}{r}=\sum_{k=0}\binom{s}{k}\binom{r}{s-k}\binom{n+s-k}{r+s}.$$

3. Используя производящую функцию $(1+t)^n=\sum C(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}}$, или другим путем, доказать, что

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r+1}}{r+1}C(n,\ r)=\frac{n}{n+1},$$

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r+1}C(n,\ r)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

4. Вывести следующие тождественные соотношения между биномиальными коэффициентами:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k}=0, \quad 0<m\leqslant n;$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k}=2^m\binom{n}{m};$$

$$\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n-k}{m}\binom{n}{k}=0, \quad 0\leqslant m<n;$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}=\binom{2n}{m}, \quad m\leqslant n; \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

5. Доказать, что число r-сочетаний из n элементов, среди которых имеется p элементов одного типа и по одному элементу из q других типов [спецификацию этих элементов будем обозначать символом $p1^q$ $(p+q=n)$], равно

$$C(p1^q;\ r)=\binom{q}{r}+\binom{q}{r-1}+\ldots+\binom{q}{r-p}.$$

Пользуясь этим результатом, доказать, что энумератором в данном случае служит

$$(1+t+t^2+\ldots+t^p)(1+t)^q,$$

и установить рекуррентную формулу

$$C(p1^q;\ r)-C(p1^q,\ r-1)=\binom{q}{r}-\binom{q}{r-p-1}.$$

6. Доказать, что число r-сочетаний из n элементов спецификации 2^m1^{n-2m} оказывается равным

$$C(2^m1^{n-2m},\ r)=\sum_k\binom{m}{k}\binom{n-m-k}{r-2k}.$$

Вывести рекуррентную формулу

$$C(2^m1^{n-2m},\ r)=C(2^{m-1}1^{n+1-2m},\ r)+C(2^{m-1}1^{n-2m},\ r-2).$$

7. Показать, что число r-сочетаний из элементов спецификации s^m (m различных видов элементов по s элементов каждого вида), называемой иногда «регулярной», составляет

$$C(s^m,\ r)=\sum_k(-1)^k\binom{m}{k}\binom{m+r-k(s+1)-1}{r+k(s+1)}.$$

8. Обозначив через $C(n_1n_2\ldots n_m,\ r)$ число r-сочетаний из элементов спецификации $(n_1n_2\ldots n_m)$, вывести рекуррентную формулу

$$C(n_1n_2\ldots n_m,\ r)=C(n_2\ldots n_m,\ r)+C(n_2\ldots n_m,\ r-1)+\ldots$$
$$\ldots+C(n_2\ldots n_m,\ r-n_1).$$

9. Путем классификации n^r перестановок из примера 11 по числу содержащихся в них различных элементов доказать результат примера 12 для перестановок с неограниченными повторениями.

10. Используя производящую функцию из примера 12, или иным методом, показать, что

$$\Delta^n0^{r+1}=n\Delta^n0^r+n\Delta^{n-1}0^r.$$

11. Показать, что число r-перестановок с неограниченными повторениями, в которых каждый элемент может повторяться лишь четное число раз (в том числе и 0 раз), дается в виде δ^n0^r,

где $\delta u_n = (u_{n+1} + u_{n-1})/2$. Вывести рекуррентное соотношение

$$\delta^n 0^{r+2} = n^2 \delta^n 0^r - n(n-1)\,\delta^{n-2} 0^r.$$

12. Обозначим через P_n общее число всех перестановок из n различных элементов, $P_n = \sum (n)_r$.

(a) Вывести рекуррентную формулу

$$P_n = nP_{n-1} + 1$$

и проверить таблицу

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_n	1	2	5	16	65	326	1957	13700	109601

(b) Показать, что

$$P_n = (E+1)^n\, 0! = n! \sum_{0}^{n} 1/k! = n!e - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+2)_2} - \dots$$

и, следовательно, что P_n является ближайшим к $n!\,e$ целым числом.

(c) Показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n/n! = e^t/(1-t).$$

13. Производящей функцией для r-перестановок спецификации (2^m) (m видов, по два элемента каждого вида) служит

$$\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)^m = \sum_{r=0}^{2m} q_{m,\,r} t^r/r!,$$

где $q_{m,\,r}$ — число r-перестановок.

(a) Вывести следующие рекуррентные соотношения:

$$q_{m+1,\,r} = q_{m,\,r} + r q_{m,\,r-1} + \binom{r}{2} q_{m,\,r-2},$$

$$q_{m,\,r+1} = m q_{m,\,r} - m \binom{r}{2} q_{m-1,\,r-2},$$

$$q_{m,\,r+2} = m(2m-1)\, q_{m-1,\,r} - m(m-1)\, q_{m-2,\,r}.$$

Проверить, в частности, что

$$q_{m,\,0} = 1, \quad q_{m,\,1} = m, \quad q_{m,\,2} = m^2.$$

(b) Установить, что число всех перестановок $q_m = \sum q_{m,\,r}$ определяется следующим символическим выражением:

$$q_m = (1 + E + E^2/2)^m\, 0! \quad (E^k 0! = k!),$$

и вывести рекуррентную формулу

$$q_m = m(2m-1)q_{m-1} - m(m-1)q_{m-2} + m + 1.$$

Проверить, что

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 3, \quad q_2 = 19, \quad q_3 = 271.$$

14. Путем классификации перестановок из n различных элементов с повторениями показать, что

$$r^r (n-r)^{n-r} \binom{n}{r} \leqslant n^n,$$

или

$$\binom{n}{r} \leqslant n^n / r^r (n-r)^{n-r}.$$

15. Задача Терквема. Упорядочим n элементов; построим из них r-сочетания, располагая элементы в каждом из сочетаний в их естественном (по возрастанию индексов) порядке. Пусть $f(n, r)$ — число таких r-сочетаний, в которых элементы с нечетными индексами стоят в нечетных позициях, а элементы с четными индексами — в четных местах. Или, что то же самое, пусть $f(n, r)$ — число r-сочетаний, составленных при четном r из равного числа элементов с четными и нечетными индексами. При нечетном r число элементов с нечетными индексами на единицу больше числа элементов с четными индексами.

(a) Показать, что для $f(n, r)$ имеет место рекуррентная формула

$$f(n, r) = f(n-1, r-1) + f(n-2, r), \quad f(n, 0) = 1.$$

(b) $$f(n, r) = \binom{q}{r}, \quad q = [(n+r)/2],$$

где $[(n+r/2)]$ — наибольшее целое, не превосходящее $(n+r)/2$.

(c) $$f(n) = \sum f(n, r) = f(n-1) + f(n-2).$$

Числа $f(n)$ оказываются, как и в задаче 1, числами Фибоначчи.

16. Обозначим через $a_{n,r}$ число r-перестановок из n различных элементов с повторениями, в которых любые два соседних элемента различны; через $a^*_{n,r}$ обозначим число таких r-перестановок, в которых на первом месте стоит данный элемент. Показать, что

$$a_{n,r} = n a^*_{n,r},$$
$$a^*_{n,r} = (n-1) a^*_{n,r-1}$$

и, следовательно,

$$a_{n,r} = (n-1) a_{n,r-1}, \quad r > 1,$$
$$a_{n,r} = n(n-1)^{r-1}, \quad r > 0.$$

Показать, что если

$$a_n(x) = \sum_{r=1} a_{n,r} x^{r-1},$$

то

$$a_n(x) = n[1 - x(n-1)]^{-1}.$$

17. (а) Обозначим через $b_{n,r}$ число тех перестановок из задачи 16, в которых не может содержаться трех одинаковых элементов подряд. Используя знание числа перестановок, содержащих данный элемент на первом месте, и число перестановок с двумя данными элементами на двух первых местах, доказать рекуррентную формулу

$$b_{n,r} = (n-1)(b_{n,r-1} + b_{n,r-2}), \quad r > 2.$$

Из этой формулы и начальных значений $b_{n,1} = n$, $b_{n,2} = n^2$ вывести соотношение для производящей функции

$$[1 - (n-1)(x + x^2)]\, b_n(x) = n(1 + x),$$

где

$$b_n(x) = \sum_{r=1} b_{n,r} x^{r-1}.$$

(b) Показать, что

$$1 + \frac{n-1}{n} x b_n(x) = \frac{1}{1-(n-1)(x+x^2)} = \sum_{r=0} \frac{\alpha^{r+1} - \beta^{r+1}}{\alpha - \beta} x^r,$$

где

$$(1 - \alpha x)(1 - \beta x) = 1 - (n-1)(x + x^2).$$

Следовательно,

$$\frac{n-1}{n} b_{n,r} = \frac{\alpha^{r+1} - \beta^{r+1}}{\alpha - \beta}.$$

18. Рассмотрим те перестановки из задач 16 и 17, в которых не содержится m ($m = 2, 3, \dots$) одинаковых элементов подряд. Число этих перестановок обозначим через $a^{(m)}_{n,r}$, а производящую функцию — через $a^{(m)}_n(x)$. Показать, что

$$a^{(m)}_{n,r} = (n-1)(a^{(m)}_{n,r-1} + a^{(m)}_{n,r-2} + \dots + a^{(m)}_{n,r-m+1}), \quad r > m-1,$$

и, следовательно, что $a^{(m)}_{n,r} = n^r$, $r < m$,

$$[1 - (n-1)(x + x^2 + \dots + x^{m-1})]\, a^{(m)}_n(x) = n(1 + x + \dots + x^{m-2}).$$

Глава 2

1. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

1. Введение

Из материала гл. 1 ясно, что производящая функция подходящего вида может явиться важным средством унификации при исследовании комбинаторных проблем. Этот факт можно было бы предсказать, основываясь на определении комбинаторного анализа, данном Морганом и приведенном в предисловии. Действительно, если комбинаторный анализ является методом для отыскания коэффициентов при сложных преобразованиях с данными функциями, то и обратно эти функции можно рассматривать как порождающие соответствующие коэффициенты. Поэтому изучение производящих функций естественным образом связано с изучением коэффициентов, входящих в выражения для этих функций. Настоящая глава является началом подобных исследований

Отметим, что неформальное изучение в гл. 1 производящих функций двух видов для сочетаний и перестановок можно теперь уточнить с помощью следующих определений:

(a) Обычной *производящей функцией* для последовательности a_0, a_1,... называется сумма

$$A(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n+\ldots . \qquad (1)$$

(b) *Экспоненциальной производящей функцией* для той же самой последовательности называется сумма

$$E(t)=a_0+a_1t+a_2t^2/2!+\ldots+a_nt^n/n!+\ldots . \qquad (2)$$

В связи с этими определениями необходимо сделать несколько замечаний. Во-первых, элементы последовательности a_0, a_1,..., как видно из самих обозначений, упорядочены, но не обязательно должны быть различными. Во-вторых, переменная t производящей функции никак не определена. Нет необходимости следовать естественной тенденции представителей классического анализа и пионеров в области подобных исследований, считая эту переменную действительной или комплексной величиной. В этом случае немедленно возник бы вопрос о существовании производящей функции для заданной бесконечной числовой последовательности, на который, конечно, нужно было бы дать ответ, т. е. установить сходимость ряда, определяющего производящую функцию. Можно отметить, что в случае ограниченной последовательности, т. е. когда $|a_n| \leqslant M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (M — некоторое конечное число), ряд, определяющий $A(t)$, сходится при $|t| < 1$, тогда как ряд $E(t)$ сходится для всех значений t. С другой стороны, переменную t можно считать абстрактным или неопределенным знаком, роль которого, как и его степеней, сводится лишь к тому, чтобы различать элементы последовательности, объединенные в сумму, определяющую данную производящую функцию. В этом случае переменная t оказывается орудием для алгебраических преобразований над подобными последовательностями элементов. Формальные операции над производящими функциями, такие, как сложение, умножение, дифференцирование и интегрирование по t, помогают сформулировать определения и выявить зависимости в этой алгебре, в частности путем приравнивания коэффициентов при степенях t^n после выполнения этих операций. С этой точки зрения неуместно ставить вопрос о сходимости соответствующих рядов. (Формальное и детальное обоснование изложенной точки зрения можно найти в работах [1], [2] и [3].)

Алгебра степенных рядов $A(t)$, определяющих производящие функции, известна под именем алгебры Коши, а алгебра степенных рядов $E(t)$, определяющих экспоненциальные производящие функции, известна как символическое исчисление Блиссара. Функция $E(t)$ менее известна как производящая функция, нежели $A(t)$; некоторые даже не уверены, следует ли называть $E(t)$ производящей функцией, и сохраняют этот термин исключительно для $A(t)$. Однако факт появления функции $E(t)$ в гл. 1 свидетельствует о пригодности ее для решения комбинаторных задач. В статистике она фигурирует как производящая функция моментов; $E(t)$ используется также в теории чисел (Люка [6], Белл [2]).

Более того, как будет показано ниже, в некоторых разделах комбинаторики неизбежно возникают производящие функции, отличные и от $A(t)$, и от $E(t)$.

Нам представляется, что в книге, вводящей в суть предмета, подобно нашей, излишне загромождать текст уточнениями определений и объяснениями, необходимыми для формальной полноты изложения. Вместо этого все формальные операции применяются нами свободно, эвристически, а проверка в той степени, в которой она допускается объемом книги, осуществляется каждый раз на основе тех или иных независимых соображений.

Далее, чтобы завершить разговор о производящих функциях, следует сначала отметить, что для одной переменной как $A(t)$, так и $E(t)$ являются частными случаями выражения

$$G(t) = a_0 f_0(t) + a_1 f_1(t) + \ldots + a_n f_n(t) + \ldots, \qquad (3)$$

для которого единственным требованием является линейная независимость функций $f_0(t)$, $f_1(t), \ldots$ (для того чтобы сделать выражение однозначным). Для двухиндексной последовательности $a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{11}, a_{20}, \ldots$ соответствующее выражение может быть записано в виде

$$G(t,u) = a_{00}f_0(t)g_0(u) + a_{10}f_1(t)g_0(u) + a_{01}f_0(t)g_1(u) + \ldots = \\ = \sum_{n=0}\sum_{m=0} a_{nm}f_n(t)g_m(u). \quad (4)$$

Отметим, что если

$$F_m(t) = \sum a_{nm}f_n(t),$$
$$G_n(u) = \sum a_{nm}g_m(u),$$

то (4) можно переписать в виде

$$G(t,u) = \sum_{n=0} G_n(u)f_n(t) = \sum_{m=0} F_m(t)g_m(u), \quad (4a)$$

аналогичном (3). Подобные ступенчатые преобразования при работе с производящими функциями от многих переменных оказываются иногда полезными при отыскании последовательностей функций, подобных $f_0(t), f_1(t), \ldots$, так как позволяют упростить сами операции и их результаты. Изучив выражения (4), можно без труда представить себе общий вид производящей функции для любого числа переменных.

Другой вид производящей функции для многих переменных был положен в основу обстоятельного изложения комбинаторного анализа, данного Мак-Магоном, о чем уже упоминалось в предисловии. Несмотря на то, что эта работа мало используется в настоящей книге, сама идея заслуживает внимания.

Выберем конечную последовательность a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02} и построим многочлен

$$A(t,u) = a_{00} + a_{10}t + a_{01}u + a_{20}t^2 + a_{11}tu + a_{02}u^2$$

относительно двух переменных. Этот многочлен при произвольных коэффициентах несимметричен по t и u; в то же время сумма $A(t, u) + A(u, t)$ такой симметрией обладает. Действительно,

$$A(t,u) + A(u,t) = 2a_{00} + (a_{10} + a_{01})(t + u) + \\ + (a_{20} + a_{02})(t^2 + u^2) + 2a_{11}tu; \quad (5)$$

отсюда видно, что правая часть (5) — симметрическая функция как относительно индексов коэффициентов, так и относительно переменных u и t. Таким образом, (5) есть разложение симметрической функции в сумму симметрических функций. Все это легко перенести на случай любой конечной или бесконечной многоиндексной последовательности, естественно, при соответствующем числе переменных.

При использовании таких симметрических производящих функций каждая из них может служить для представления всех возможных результатов некоторого класса комбинаторных задач. Так, например, подобная функция определяет все числа сочетаний из элементов всех возможных спецификаций, а не только числа сочетаний из элементов одной спецификации, как в гл. 1. Однако, вероятно, из-за этой высокой степени общности такие функции используются не часто. Одна из причин такого явления кроется в громоздкости алгебры этих функций: приходится иметь дело с большим числом членов, несмотря на упрощения, которые были внесены Мак-Магоном в теорию оператора Хаммонда, естественным образом используемого в алгебре производящих функций. Другая, возможно, более важная причина заключается в том, что такое полное исследование комбинаторного вопроса требуется в весьма редких случаях, а для отыскания решений частных задач эта теория не дает достаточно простых методов. Вот в чем причины того, что эта красивая теория здесь не рассматривается; однако в дальнейшем станет очевидным, что она оказала определенное влияние на рассмотрение некоторых вопросов (например, вопроса о циклах перестановок и теории размещений).

Наконец, для читателей, которые больше привыкли к операциям над непрерывными переменными, следует отметить, что аналогом обычной производящей функции с одной переменной служит несобственный интеграл

$$A(t)=\int_0^\infty a(k)\,t^k\,dk.$$

Этот факт, по-видимому, более известен для случая экспоненциального ядра e^{-tk}, т. е. для преобразования Лапласа

$$A(t)=\int_0^\infty a(k)\,e^{-tk}\,dx.$$

Выражение, включающее в себя как частные случаи оба приведенные выше интеграла и степенные ряды (1), представляет собой интеграл Стильтьеса

$$A(t)=\int_0^\infty a(k)\,dF(t,\,k),$$

в котором t — параметр. Чтобы получить сумму (1), в качестве функции $F(t,\,k)$ выбираем ступенчатую функцию. Эта функция имеет скачки при $k=0,\,1,\,2\ldots$; скачок в точке k равен t^k.

***Пример* 1. Для** последовательности, определяемой **условиями**

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_N = 1,$$

$$a_{N+n} = 0, \ n > 0,$$

производящая функция $A(t)$ превращается в многочлен

$$A(t) = 1 + t + t^2 + \ldots + t^N = (1 - t^{N+1})/(1 - t).$$

Первые две производные от $A(t)$ равны соответственно

$$A'(t) = 1 + 2t + 3t^2 + \ldots + Nt^{N-1} =$$

$$= (1 - (N+1)\,t^N + \ldots + Nt^{N+1})/(1 - t)^2,$$

$$A''(t) = 2 + 6t + 12t^2 + \ldots + N(N-1)\,t^{N-2} =$$

$$= \frac{2 - N(N+1)\,t^{N-1} + 2(N^2 - 1)\,t^N - N(N-1)\,t^{N+1}}{(1 - t)^3}.$$

Эти результаты показывают, что для конечных последовательностей оказываются выполненными естественные предположения: формальные операции над производящими функциями приводят к производящим же функциям для соответствующих им последовательностей, а именно последовательность $(n+1)\,a_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ соответствует первой производной производящей функции, последовательность $(n+2)(n+1)\,a_n$, $n = 0, 1, \ldots, N-2$ — второй производной. Заметим, что использование конечных последовательностей приводит к значительному усложнению внешнего вида выражений, возникающих при усечении бесконечных по своей математической природе производящих функций $(1-t)^{-1}$, $(1-t)^{-2}$, $(1-t)^{-3}$.

В приведенной ниже краткой таблице указаны как обычные, так и экспоненциальные производящие функции для некоторых простых бесконечных последовательностей. Все эти результаты просты и хорошо известны, и таблица дается только для конкретности.

Некоторые простейшие производящие функции

a_k	$A(t)$	$E(t)$
a^k	$(1-at)^{-1}$	$\exp at$
k	$t\,(1-t)^{-2}$	$t \exp t$
$k(k-1)$	$2t^2\,(1-t)^{-3}$	$t^2 \exp t$
k^2	$t\,(t+1)\,(1-t)^{-3}$	$t\,(t+1) \exp t$
$\binom{n}{k}$	$(1+t)^n$	—
$n(n-1)\ldots(n-k+1)$	—	$(1+t)^n$

2. Элементарные соотиошения между обычными производящими функциями

Обозначим через $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ производящие функции, соответствующие последовательностям (a_k), (b_k), (c_k). Тогда в качестве непосредственного следствия из самого определения последовательности (a) получаем две пары соотношений; в каждой паре выполнение одного из соотношений влечет за собой выполнение второго.

Сумма:

$$a_k = b_k + c_k,$$
$$A(t) = B(t) + C(t). \tag{6}$$

Произведение:

$$a_k = b_k c_0 + b_{k-1}c_1 + \dots + b_1 c_{k-1} + b_0 c_k, \tag{7}$$
$$A(t) = B(t) C(t).$$

Первое из соотношений (7) получается путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях t в обеих частях равенства $A(t) = B(t)C(t)$. Ясно, что коэффициент при t^k может быть получен путем перемножений члена $b_j t^j$ из $B(t)$ и члена $c_{k-j} t^{k-}$ из $C(t)$ для всех $j = 0, 1, \dots, k$. Сумму $b_k c_0 + b_{k-1}c_1 + \dots + b_0 c_k$ называют иногда сверткой. Точнее, последовательность (a_k) называется *сверткой* (b_k) и (c_k), если $A(t) = B(t)C(t)$. Соотношение (7) может рассматриваться также как определение произведения последовательностей (b_k), (c_k) в алгебре Коши.

Заметим, что как сумма, так и произведение обладают свойствами коммутативности и ассоциативности.

Произведение (7) находит многочисленные приложения, получаемые путем специализации одной из функций $B(t)$, $C(t)$. Так, например, соотношение

$$A(t) = B(t)(1 - t) \tag{8}$$

означает, что

$$a_k = b_k - b_{k-1}$$

или что

$$a_k = \Delta b_{k-1}, \tag{9}$$
$$b_k = a_k + b_{k-1} = a_k + a_{k-1} + \dots + a_0. \tag{10}$$

Соотношение (9) — это иная запись второго из соотношений (8), которое определяет оператор Δ, а (10) показывает, что производящая функция, обратная для (8), а именно $B(t) = A(t)(1 - t)^{-1}$, приводит к правильным результатам.

Операторы разности Δ определяют обычно равенством $\Delta b_k = b_{k+1} - b_k$; соотношению $a_k = \Delta b_k$ соответствует соотношение между производящими функциями

$$A(t) = B(t)(t^{-1} - 1) - b_0 t^{-1}.$$

Член $-b_0 t^{-1}$ появляется за счет начальных условий.

В теоретико-вероятностных работах предпочтительней оказывается не соотношение (10), а дополнительное к нему, которое при соответствующем изменении обозначений имеет вид

$$A(t)=[B(1)-B(t)](1-t)^{-1}. \tag{11}$$

Последнее равенство равносильно соотношению

$$a_k=b_{k+1}+b_{k+2}+\ \ldots$$

Таким образом, если $B(t)$ является многочленом, коэффициентами которого являются вероятности, то $A(t)$ оказывается производящей функцией для их сумм; в этом случае обычно $B(1)=1$.

Итерация выражений (10) приводит к сумме сумм; т. е. если

$$\begin{aligned} S^0a_k &= a_k, \\ Sa_k &= a_k+a_{k-1}+\ \ldots\ +a_0, \\ S^2a_k &= S(a_k+a_{k-1}+\ \ldots\ +a_0)= \\ &= a_k+2a_{k-1}+3a_{k-2}+\ldots\ +(k+1)a_0, \end{aligned}$$

то, по индукции,

$$S^n(a_k)=S[S^{n-1}(a_k)]=a_k+na_{k-1}+\ \ldots\ +\binom{n+j-1}{j}a_{k-j}+\ \ldots$$
$$\ldots\ +\binom{n+k-1}{k}a_0.$$

Последнее эквивалентно следующему соотношению между производящими функциями:

$$B(t)=A(t)(1-t)^{-n},\quad b_k=S^n(a_k).$$

Числа $\binom{n+j-1}{j}$, появляющиеся в S^n, называются фигурными числами (потому что они определяют число некоторых точек в определенных фигурах; например, для $j=1$ этими фигурами являются треугольники). Эти числа определяют также числа j-сочетаний с повторениями из n различных элементов (см. п. 1.3.2).

Укажем еще на одно возможное использование соотношения (7): производящая функция последовательности a_0', a_1', ..., обратной к последовательности a_0, a_1, ..., определяется условием

$$A(t)A'(t)=1,$$

так что

$$\begin{aligned} a_0a_0' &= 1, \\ a_1a_0'+a_0a_1' &= 0, \\ a_2a_0'+a_1a_1'+a_0a_2' &= 0 \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{12}$$

Пример 2. Рекуррентным соотношением для сочетаний с повторениями служит (1.9), а именно

$$f(n, r)=f(n, r-1)+f(n-1, r).$$

Полагая

$$f_n(t)=\sum_{r=0}^{\infty} f(n, r)\, t^r,$$

приходим к

$$(1-t)\, f_n(t)=f_{n-1}(t)$$

или

$$f_n(t)=(1-t)^{-1} f_{n-1}(t)=(1-t)^{-2} f_{n-2}(t)=(1-t)^{-n},$$

так как по условию $f_0(t)=1$ или, если угодно, $f_1(t)=(1-t)^{-1}$. Следовательно, с помощью биномиального разложения получаем так же, как в (1.10), что

$$f(n, r)=\binom{n+r-1}{r}.$$

Столь же просто используются производящие функции и в ряде других случаев.

Часто оказываются полезными указанные ниже простые соотношения, полученные дифференцированием (здесь $D\equiv d/dt$):

$$\left\{\begin{aligned} &DA(t)=\sum ka_k t^{k-1},\\ &D^2A(t)=\sum k(k-1)\, a_k t^{k-2},\\ &D^jA(t)=\sum (k)_j\, a_k t^{k-j}, \quad (k)_j=k(k-1)\ldots(k-j+1). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Для получения при G_k степенных множителей t^k более удобно пользоваться оператором $\theta=tD$. В этом случае

$$\begin{aligned} &\theta A(t)=\sum ka_k t^k,\\ &\theta^2 A(t)=\sum k^2 a_k t^k,\\ &\theta^j A(t)=\sum k^j a_k t^k. \end{aligned} \tag{14}$$

Следовательно, для полинома $P(\theta)$ от θ с постоянными коэффициентами получаем соотношение

$$P(\theta)\, A(t)=\sum P(k)\, a_k t^k. \tag{15}$$

3. Решение линейных рекуррентных уравнений

Произведение двух обыкновенных производящих функций, определенное уравнением (7), может быть непосредственно использовано при решении линейных рекуррентных уравнений. Для иллюстрации рассмотрим рекуррентное уравнение второго порядка

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}-\beta a_n=0, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{16}$$

в котором постоянные α, β от n не зависят. При этом a_0 и a_1 остаются неопределенными; если, однако, рассматривать их как данные граничные условия, то система (16) дополняется тождествами

$$a_0 = a_0,$$
$$a_1 - \alpha a_0 = a_1 - \alpha a_0.$$

Теперь система имеет вид, требуемый соотношением (7), а именно

$$a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n = c_n,$$

где

$$b_0 = 1,\ b_1 = -\alpha,\ b_2 = -\beta,\ b_{n+2} = 0,\ n > 0,$$
$$c_0 = a_0,\ c_1 = a_1 - \alpha a_0,\ c_{n+1} = 0,\ n > 0.$$

Следовательно,

$$A(t)[1 - \alpha t - \beta t^2] = a_0 + (a_1 - \alpha a_0)\,t. \tag{17}$$

Последнее, конечно, можно было бы получить умножением каждого n-го соотношения полной системы на t^n и последующим суммированием. Явное выражение для $A(t)$ находится посредством разложения на элементарные дроби. Таким образом, если

$$1 - \alpha t - \beta t^2 = (1 - s_1 t)(1 - s_2 t),$$

то

$$A(t) = \frac{1}{s_1 - s_2}\left(\frac{a_1 - \alpha a_0 + s_1 a_0}{1 - s_1 t} - \frac{a_1 - \alpha a_0 + s_2 a_0}{1 - s_2 t}\right).$$

Приравнивая коэффициенты при t^n, получаем

$$a_n = (a_1 - \alpha a_0)\frac{s_1^n - s_2^n}{s_1 - s_2} + a_0 \frac{s_1^{n+1} - s_2^{n+1}}{s_1 - s_2}. \tag{18}$$

Можно убедиться, что правая часть (18) при $n = 0$ и 1 равна соответственно a_0 и a_1 и что коэффициенты a_n, определяемые (18), удовлетворяют рекуррентным соотношениям (16).

4. Экспоненциальные производящие функции

Обозначим через $E(t)$, $F(t)$ и $G(t)$ экспоненциальные производящие функции последовательностей (a_k), (b_k) и (c_k) и зададим основные соотношения для суммы и произведения последовательностей следующим образом.

Сумма:

$$a_k = b_k + c_k,$$
$$E(t) = F(t) + G(t). \tag{19}$$

Произведение:

$$a_k = b_k c_0 + k b_{k-1} c_1 + \dots + \binom{k}{j} b_{k-j} c_j + \dots + b_0 c_k,$$

$$E(t) = F(t)\,G(t). \qquad (20)$$

Соотношение (19) формально не отличается от аналогичного соотношения для обыкновенных производящих функций. Соотношения (20) отличаются от соответствующих соотношений (7) наличием биномиальных коэффициентов, которые являются основным орудием в исчислении Блиссара. А именно:

Последовательность a_0, a_1, ... может быть заменена последовательностью a^0, a^1, ..., причем индексы, стоящие наверху, в процессе всех формальных операций рассматриваются как обычные показатели степени, а по завершении этих операций они вновь считаются индексами. Отметим, что a^0 не обязательно равно 1. Следовательно, при таком условии первое из равенств (20) запишется в виде

$$a_k = (b + c)^k, \quad b^n \equiv b_n, \quad c^n \equiv c_n, \qquad (20a)$$

причем дополнительные соотношения $b^n \equiv b_n$, $c^n \equiv c_n$ призваны напоминать об этом условии. Заметим, что

$$a_0 = b_0 c_0$$

и равно единице лишь при b_0 и c_0, равных единице.

Далее, подобно тому, как это ранее имело место для (7), либо (20), либо (20a) служит определением произведения двух последовательностей в этой алгебре. Упомянутый выше метод Блиссара основан, конечно, на том факте, что экспоненциальные производящие функции имеют вид обычных экспоненциальных функций. Таким образом,

$$E(t) = \exp at, \quad a^n \equiv a_n.$$

При аналогичных выражениях для $F(t)$ и $G(t)$ второе из равенств (20) превращается в

$$\exp at = (\exp bt)(\exp ct) = \exp (b + c)\,t.$$

Приравнивая коэффициенты при t^n, приходим к (20a).

Можно также отметить, что коль скоро штрих означает производную, то

$$E'(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2/2! + \dots = a \exp at,$$

$$a^n \equiv a_n.$$

Обобщение (20) и (20а) на случай многих переменных дает соотношения

$$a_0 = b_0 c_0 \ldots,$$
$$a_n = (b + c + \ldots)^n, \quad b^n \equiv b_n, \quad c^n \equiv c_n, \ldots,$$
$$a_n = \sum \frac{n!}{p!q! \ldots} b_p c_q \ldots, \quad p + q + \ldots = n. \tag{21}$$

Последнее из соотношений (21) выражает полиномиальную теорему.

С одинаковыми последовательностями оперируют точно так же, как и с различными. Так, например, справедливо соотношение

$$(a + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k, \tag{22}$$

а не соотношение

$$(a + a)^n = \sum \binom{n}{k} a^{n-k} a^k = \sum \binom{n}{k} a_n = 2^n a_n.$$

Описание алгебры мы завершим указанием на то, **что** последовательность (a'_n), обратная заданной последовательности (a_n), определяется условиями

$$a_0 a'_0 = 1,$$
$$(a + a')^n = 0, \quad n > 0, \quad a^n \equiv a_n, \quad (a')^n \equiv a'_n. \tag{23}$$

Эти условия эквивалентны следующему соотношению **для** производящей функции

$$\exp(a + a')t = 1, \quad a^n \equiv a_n, \quad (a')^n \equiv a'_n.$$

Из соотношений (23) члены одной последовательности могут быть выражены через члены другой. Как это фактически осуществить, показано далее в настоящей главе. Однако уже сейчас можно отметить, что имеют место следующие выражения:

$$a'_0 = \frac{1}{a_0}, \quad a'_2 = -\frac{a_2}{a_0^2} + \frac{2a_1^2}{a_0^3},$$
$$a'_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}, \quad a'_3 = -\frac{a_3}{a_0^2} + \frac{6a_2 a_1}{a_0^3} - \frac{6a_1^3}{a_0^4}.$$

Пример 3. (а) Если α — обычная (не символическая) переменная, то каждое из соотношений

$$\exp at = (\exp bt)(\exp \alpha t), \quad a^n \equiv a_n, \quad b^n \equiv b_n,$$
$$(\exp at)\,[\exp(-\alpha t)] = \exp bt, \quad a^n \equiv a_n, \quad b^n \equiv b_n$$

вытекает из другого. Следовательно, любое из соотношений

$$a_n = (b + \alpha)^n, \quad b^n \equiv b_n,$$
$$b_n = (a - \alpha)^n; \quad a^n \equiv a_n$$

следует из другого.

(б) Если α заменить c, где c — символическая переменная для последовательности $c_0, c_1, \ldots$, и если c' — соответствующая переменная для последовательности, обратной этой, то предыдущие соотношения принимают вид

$$\begin{gathered}
\exp at = (\exp bt)(\exp ct), \quad a^n \equiv a_n, \; b^n \equiv b_n, \quad c^n \equiv c_n, \\
(\exp at)(\exp c't) = \exp bt, \; a^n \equiv a_n, \; b^n \equiv b_n, \; (c')^n = c'_n, \\
a_n = (b+c)^n, \quad b^n \equiv b_n, \; c^n \equiv c_n, \\
b_n = (a+c')^n, \quad a^n \equiv a_n, \; (c')^n \equiv c'_n.
\end{gathered}$$

Следует отметить, что если положить $c_0 = 1$, $c_n = \alpha^n$, $n = 1, 2, \ldots$, то переменная c превращается в обычную переменную α. Следовательно, из части (а) настоящего примера явствует, что $c'_0 = 1$, $c'_n = (-\alpha)^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Последнее согласуется с (23).

Наконец, полезно отметить, что при $D = d/dt$

$$D^n E(t) = \sum_{k=0} a_{k+n} t^k / k! = a^n \exp at, \; a^k \equiv a_k.$$

5. Соотношения между обычными и экспоненциальными производящими функциями

Если $A(t)$ и $E(t)$ являются соотвественно обычной и экспоненциальной производящими функциями последовательности $a_0, a_1, \ldots$, то формально

$$A(t) = \int_0^\infty e^{-s} E(ts)\, ds. \tag{24}$$

Это — соотношение для борелевского суммирования расходящихся рядов. Оно получается, если учесть, что

$$k! = \int_0^\infty e^{-s} s^k \, ds$$

(интеграл Эйлера для гамма-функции). Следовательно,

$$\begin{aligned}
A(t) = \sum_{k=0} a_k t^k = \sum a_k (t^k/k!) \int_0^\infty e^{-s} s^k \, ds = \\
= \int_0^\infty e^{-s}\, ds \sum a_k (st)^k / k!.
\end{aligned}$$

Пример 4. (а) Для последовательности $1 = a_0 = a_1 = \ldots$

$$\begin{aligned}
A(t) &= 1 + t + t^2 + \ldots = (1-t)^{-1}, \\
E(t) &= 1 + t + t^2/2! + \ldots = e^t
\end{aligned}$$

и

$$(1-t)^{-1} = \int_0^\infty e^{-s} e^{ts}\, ds.$$

(b) Для последовательности $a_0=a_1=\ldots=a_{j-1}=0$, $a_k=(k)_j$, $k\geqslant j$,

$$A(t)=j!t^j+\frac{(j+1)!\,t^{j+1}}{1!}+\ldots+\frac{k!t^k}{(k-j)!}+\ldots=\frac{t^jj!}{(1-t)^{j+1}},$$

$$E(t)=t^j+\frac{t^{j+1}}{1!}+\ldots+\frac{t^{j+k}}{k!}+\ldots=t^je^t$$

и

$$t^jj!\,(1-t)^{-j-1}=\int\limits_0^\infty e^{-s}\,(st)^je^{st}\,ds.$$

6. Производящие функции для моментов

Пусть p_0, p_1, $\ldots$ — последовательность вероятностей (распределение вероятностей), $0\leqslant p_j\leqslant 1$, $j=0,\ 1,\ \ldots$. *Обычные* моменты этого распределения определяются как

$$m_0=p_0+p_1+p_2+\ \ldots,$$
$$m_1=p_1+2p_2+\ \ldots$$

и

$$m_k=p_1+2^kp_2+3^kp_k+\ \ldots\ =\sum_{j=0}j^kp_j. \tag{25}$$

Факториальные моменты определяются соотношениями

$$(m)_k=\sum_{j=0}(j)_k\,p_j,\quad (j)_k=j\,(j-1)\ \ldots\ (j-k+1), \tag{26}$$

а тесно связанные с ними *биномиальные* моменты — соотношениями

$$B_k=\sum\binom{j}{k}p_j=(m)_k/k!. \tag{27}$$

Обозначения $(m)_k$ приняты для факториальных моментов вследствие того, что

$$(m)_k=m\,(m-1)\ \ldots\ (m-k+1),\quad m^j\equiv m_j, \tag{28}$$

где m_j — обычный момент. Предвосхищая следующий раздел, отметим, что числа, возникающие при полном разложении (28), являются числами Стирлинга первого рода, тогда как числа, фигурирующие в обратных выражениях обычных моментов через факториальные моменты, являются числами Стирлинга второго рода.

Центральные моменты определяются так:

$$\begin{gathered}M_k=(m-m_1)^k,\quad m^k\equiv m_k,\\ M_k=\sum\binom{k}{j}m_{k-j}\,(-m_1)^j.\end{gathered} \tag{29}$$

В частности, второй центральный момент $M_2 = m_2 - m_1^2$ известен как дисперсия,

Все производящие функции определенных выше моментов взаимосвязаны. Пусть $P(t)$ — обычная производящая функция для указанного выше распределения вероятностей, т. е.

$$P(t) = p_0 + p_1 t + \ldots + p_k t^k + \ldots,$$

тогда

$$\begin{aligned} m(t) &= \exp mt = \sum_{k=0}^{\infty} m_k t^k / k! = P(e^t), \\ \exp(m)t &= \sum_{k=0}^{\infty} (m)_k t^k / k! = P(1+t), \\ B(t) &= B_0 + B_1 t + \ldots = \exp(m)t = P(1+t) \end{aligned} \tag{30}$$

и

$$m(t) = B(e^t - 1). \tag{31}$$

Все эти зависимости получаются путем формальных операций. Так, например, первое соотношение из (30) получается следующим образом:

$$\begin{aligned} P(e^t) &= \sum_{j=0} p_j e^{tj} = \\ &= \sum_{j=0} p_j \sum_{k=0} (tj)^k / k! = \\ &= \sum_{k=0} t^k / k! \sum_{j=0} p_j j^k. \end{aligned}$$

Следует отметить, что последнее из соотношений (30) может быть записано в виде

$$B(t) = (1+t)^m, \qquad m^k \equiv m_k, \tag{30a}$$

откуда

$$B(e^t - 1) = (e^t)^m = \exp mt, \qquad m^k \equiv m_k,$$

но это и есть соотношение (31).

Второе из соотношений (30) эквивалентно

$$\begin{aligned} P(t) &= \exp(m)(t-1) = \\ &= [\exp(-m)][\exp(m)t], \qquad (m)^k \equiv (m)_k, \end{aligned}$$

а следовательно, и

$$\begin{aligned} p_j &= \sum_{k=0} (-1)^k \frac{(m)_{k+j}}{j!\,k!} = \\ &= \sum_{k=0} (-1)^k \binom{k+j}{k} B_{j+k}. \end{aligned} \tag{32}$$

Последний факт является важным результатом, тесно связанным с принципом включения и исключения, который рассматривается в следующей главе. Дело в том, что во многих задачах легче определить факториальные моменты, нежели сами вероятности, даваемые соотношениями (32). Следует отметить, что вторая форма соотношений (32) оказывается выражением, обратным для соотношения

$$B_k = \sum \binom{j}{k} p_j,$$

определяющего биномиальные моменты.

Порождающей функцией для центральных **моментов служит** функция

$$\begin{aligned} M(t) = \exp Mt = \sum M_k t^k/k! &= \\ = \exp(m - m_1) t &= \\ = [\exp(-m_1 t)] m(t). & \qquad (33) \end{aligned}$$

Естественно, что для многоиндексных последовательностей вероятностей вводятся соответствующие многомерные вероятности и производящие функции моментов. Между этими функциями имеют место взаимосвязи, аналогичные рассмотренным выше. Отметим, что *ковариация* двухиндексного распределения вероятностей задается в виде

$$m_{11} - m_{10} m_{01},$$

причем

$$m_{rs} = \sum j^r k^s p_{jk}.$$

7. Числа Стирлинга

Как уже отмечалось в рассмотренных выше примерах, числа Стирлинга (названные так по имени ученого, открывшего их) связывают степени переменной с ее факториалами, и наоборот. Так как в исчислении конечных разностей факториалы играют такую же роль, как и степени в дифференциальном исчислении, то числа Стирлинга являются частью естественного моста между этими двумя исчислениями и постоянно встречаются в различных задачах (почти так же часто, как и числа Бернулли).

Числа Стирлинга определяются следующим образом. Положим

$$(t)_0 = t^0 = s(0,\ 0) = S(0,\ 0) = 1,$$

$$\begin{aligned} (t)_n = t(t-1)\dots(t-n+1) &= \\ = \sum_0^n s(n,\ k) t^k, &\qquad n > 0, \qquad (34) \end{aligned}$$

$$t^n = \sum_0^n S(n,\ k)(t)_k, \qquad n > 0. \qquad (35)$$

Тогда $s(n, k)$ и $S(n, k)$ называются числами Стирлинга соответственно первого и второго рода. Заметим, что числа обоих родов отличны от нуля только для $k=1, 2, \ldots, n$, $n>0$ и что $(t)_n$ является обычной производящей функцией для $s(n, k)$, тогда как t^n является новым типом производящей функции для входящей в уравнение (3) функции $f_k(t)$, равной $(t)_k$ (следует заметить, что совокупность этих функций линейно независима). Для заданного n или k числа первого рода $s(n, k)$ могут иметь тот или иной знак; действительно, так как

$$(-t)_n=(-1)^n t(t+1)\ldots(t+n-1),$$

то из (34) немедленно следует, что $(-1)^{n+k}s(n, k)$ всегда положительно. В некоторых случаях, как в гл. 4, эти положительные числа, порождаемые «возрастающим» факториалом, оказываются более удобными.

Рекуррентные соотношения для этих чисел вытекают из простых рекуррентных соотношений для факториалов

$$(t)_{n+1}=(t-n)(t)_n.$$

Рассматривая (10) вместе с (34), получаем

$$s(n+1, k)=s(n, k-1)-ns(n, k). \qquad \textbf{(36)}$$

В то же время, используя (35), находим

$$\begin{aligned}t^{n+1}&=\sum S(n+1, k)(t)_k=\\&=t\sum S(n, k)(t)_k=\\&=\sum S(n, k)[(t)_{k+1}+k(t)_k]\end{aligned}$$

и

$$S(n+1, k)=S(n, k-1)+kS(n, k). \qquad (37)$$

Последнее можно использовать для нахождения чисел, приведенных в табл. 1 и 2 в конце настоящей главы, в которых $k=1(1)n$, $n=1(1)10$.

Числа $S(n, k)$ связаны с числами $\Delta^k 0^n$ из примера 1.12 соотношением

$$k!\,S(n, k)=\Delta^k 0^n. \qquad (38)$$

Соотношение это легко получить, если использовать символические операторы

$$\begin{aligned}t^n&=E^t 0^n=(1+\Delta)^t 0^n=\\&=\sum \binom{t}{k}\Delta^k 0^n.\end{aligned}$$

Естественно, что (38) можно получить и иным путем. Наконец, подстановка (34) в (35), или наоборот, дает

$$\sum S(n, k)s(k, m)=\delta_{nm}, \tag{39}$$

где δ_{nm} — дельта Кронекера: $\delta_{nn}=1$, $\delta_{nm}=0$, $n\neq m$, а сумма берется по всем значениям k, для которых $S(n, k)$ и $s(k, m)$ отличны от нуля. Это указывает на то, что каждое из соотношений

$$\begin{aligned} a_n &= \sum s(n, k)b_k, \\ b_n &= \sum S(n, k)a_k \end{aligned} \tag{40}$$

влечет за собой другое. Пример приведенных выше уравнений (40) является таким, в котором $a_n=(m)_n$ есть n-й факториальный момент распределения вероятностей и $b_n=m_n$ — n-й обычный момент. Если это учесть, то уравнения (40) принимают вид

$$(m)_n=\sum s(n, k)m_k, \qquad m_n=\sum S(n, k)(m)_k.$$

Пусть S — бесконечная матрица $(S(n, k))$, т. е. матрица, в которой на пересечении n-й строки и k-го столбца ($n=0, 1, 2, \ldots$; $k=0, 1, 2, \ldots$) стоит число $S(n, k)$. Пусть, далее, s — аналогичная матрица, составленная из чисел $s(n, k)$. Тогда соотношение (39) эквивалентно матричному уравнению

$$Ss=I,$$

где I — единичная матрица (δ_{nk}) бесконечного порядка. Следовательно, $s=S^{-1}$ — матрица, обратная для S, и наоборот. Это обстоятельство предопределяет существование двойной бесконечной совокупности чисел Стирлинга, введенной Е. Т. Беллом [5] и определяемой с помощью матричных соотношений

$$\begin{aligned} S^1 &= S\cdot I=S, \\ S^r &= S\cdot S^{r-1}. \end{aligned}$$

Общим элементом матрицы S^r является число $S(n, k, r)$. Тогда общее матричное уравнение аналогично уравнению

$$S(n, k, r)=\sum S(n, j, r-1)S(j, k, 1).$$

8. Производные сложных функций

Сложная функция — это функция от функции. Ей можно придать стандартную форму экспоненциальной (или обычной) производящей функции, воспользовавшись ее производными. Выражая производную сложной функции через производные ее компонент, приходим к некоторой совокупности полиномов — полиномов Белла

[4], — характерных для многих комбинаторных и статистических задач.

Положим

$$A(t) = f[g(t)] \tag{41}$$

и

$$D_t^n A(t) = A_n, \quad [D_u^n f(u)]_{u=g(t)} = f_n, \quad D_t^n g(t) = g_n,$$

где $D_t = d/dt$, $D_u = d/du$.

Затем последовательным дифференцированием (41) получим

$$A_1 = f_1 g_1,$$
$$A_2 = f_1 g_2 + f_2 g_1^2,$$
$$A_3 = f_1 g_3 + 3 f_2 g_2 g_1 + f_3 g_1^3.$$

В общем виде можно записать

$$A_n = f_1 A_{n1} + f_2 A_{n2} + \dots + f_n A_{nn} = \sum_{k=1}^{n} f_k A_{n,k}(g_1, g_2, \dots, g_n). \tag{42}$$

Отметим, что коэффициенты $A_{n,k}$ зависят только от производных $g_1, g_2, \dots$, как явствует из подробных обозначений, принятых во второй строчке, но не зависят от f_k. Следовательно, они могут быть определены специальным выбором f; удобно положить $f(u) = \exp au$, где a — постоянная. Тогда

$$f_k = a^k \exp ag, \qquad g = g(t)$$

и

$$e^{-eg} D_t^n e^{ag} = \sum A_{n,k}(g_1, g_2, \dots, g_n) a^k = A_n(a; g_1, g_2, \dots, g_n), \tag{43}$$

где вторая строка — сокращенная запись первой.

В этих обозначениях (42) принимает вид

$$A_n = A_n(f; g_1, g_2, \dots, g_n), \quad f^k \equiv f_k, \tag{42a}$$

где

$$A_0 = f_0 = A(t).$$

Соотношение (43) полностью определяет полиномы $A_n(a; g_1, \dots, g_n)$ и, с помощью (42a), — производные A_n. Можно заметить, что в обозначениях Белла

$$A_n(1; y_1, y_2, \dots, y_n) = Y_n(y_1, y_2, \dots, y_n) = e^{-y} D_x^n e^y,$$
$$y \equiv y(x).$$

С целью получения явного выражения для полиномов Белла обозначим кратко

$$A_n(a;\ g_1,\ \dots,\ g_n)$$

через $A'_n(a)$ и используем формулу Лейбница для дифференцирования произведения

$$\begin{aligned} A_{n+1}(a) &= e^{-ag}D^n(De^{ag}) = \\ &= a^{-ag}aD^n(g_1e^{ag}) = \\ &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{-ag}D^{n-k}e^{ag})D^kg_1 = \\ &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_{n-k}(a)\,g_{k+1} = \\ &= ag(A(a)+g)^n; \quad (A(a))^k \equiv A_k(a), \quad g^k \equiv g_k. \end{aligned} \tag{44}$$

Частными случаями соотношения (44) при $A_0(a) = 1$ являются соотношения

$$\begin{aligned} A_1(a) &= ag_1, \\ A_2(a) &= ag_2 + ag_1A_1(a) = ag_2 + a^2g_1^2, \\ A_3(a) &= ag_3 + 2ag_2A_1(a) + ag_1A_2(a) = \\ &= ag_3 + 3a^2g_2g_1 + a^3g_1^3, \end{aligned}$$

что согласуется с результатами, предшествующими (42).

Далее, соотношение (44) влечет за собой соотношение для экспоненциальной производящей функции

$$\begin{aligned} \exp uA(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(a)\,u^n/n! = \\ &= \exp a\,[ug_1 + u^2g_2/2! + \dots] = \\ &= \exp aG(u), \end{aligned} \tag{45}$$

в котором

$$G(u) = \exp(ug) - g_0, \qquad g^n \equiv g_n.$$

Дифференцированием (45) и приравниванием коэффициентов при u^n получаем (44).

Наконец, раскрывая (45) с помощью полиномиальной теоремы и приравнивая коэффициенты при u^n, получаем искомую формулу

$$A_n(a) = \sum \frac{a^kn!}{k_1!\dots k_n!}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}, \tag{46}$$

в которой $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ и сумма берется по всем решениям в неотрицательных целых числах уравнения $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$, или по всем разбиениям n (определение этого термина см. в гл. 6). Отсюда, имея в виду (42a), получаем соотношение

$$A_n = A_n(f) = \sum \frac{n!\, f_k}{k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}, \tag{45a}$$

известное как формула Бруно. Соответствующие полиномы в несколько модифицированных белловских обозначениях приведены в конце настоящей главы (табл. 3) для $n = 1\,(1)\,8$.

Стоит отметить, что если $A(t)$ разлагается в ряд Тейлора, т. е. если

$$A(t+u) = \exp uA(t), \qquad A^n(f) \equiv A_n(f),$$

то

$$A_n^0 = A_n(f) \quad \text{при} \quad t = 0,$$

$$A(t) = \exp uA^0, \qquad (A^0)^n \equiv A_n^0.$$

Рассмотренные многочлены используются в статистике при описании связей между кумулянтами (семиинвариантами) и обычными моментами; это обстоятельство имеет общий интерес, ибо выдвигает проблему о возможности обращения функций, заданных в виде многочленов.

Кумулянтная (экспоненциальная) производящая функция

$$L(t) = \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_n t^n / n! + \ldots$$

определяется обычно соотношением

$$\exp mt = \exp L(t), \qquad m^n \equiv m_n,$$

в котором m_n — обычный n-й момент. При $a = 1$ из (45) непосредственно следует, что

$$m_n = A_n(1;\, \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n) = Y_n(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_n), \tag{47}$$

а из (44) — что

$$m_{n+1} = \lambda\,(m + \lambda)^n, \quad m^n \equiv m_n, \quad \lambda^n \equiv \lambda_n. \tag{48}$$

С помощью любого из последних двух соотношений легко придти к следующим обратным зависимостям:

$$\lambda_1 = m_1, \qquad \lambda_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3,$$

$$\lambda_2 = m_2 - m_1^2, \qquad \lambda_4 = m_4 - 4m_3 m_1 - 3m_2^2 + 12 m_2 m_1^2 - 6m_1^4.$$

Соотношением, обратным (45), будет

$$aG(u) = \log(\exp uA(a)), \tag{49}$$

которое при $f(u)=\log u$ превращается в (41). Следовательно,

$$ag_n = A_n(f;\ A_1(a),\ \ldots,\ A_n(a)),\quad f^k \equiv f_k \equiv (-1)^{k-1}(k-1)! \quad (50)$$

является искомой совокупностью обратных зависимостей. Таким образом, выражения

$$\lambda_n = A_n(f;\ m_1,\ \ldots,\ m_n) = \\ = Y_n(fm_1,\ \ldots,\ fm_n),\quad f^k \equiv f_k = (-1)^{k-1}(k-1)! \quad (51)$$

являются обратными для (47) и, как это будет установлено, согласуются с отмеченными выше частными случаями.

В последующих задачах выявляются новые свойства полиномов Белла и указываются примеры их использования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белл (Bell E. T.), Euler algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **25**, (1923), 135—154.
2. Белл (Bell E. T.), Algebraic Arithmetic, New York, 1927.
3. Белл (Bell E. T.), Postulational bases for the umbral calculus, *Amer. J. of Math.*, **62** (1940), 717—724.
4. Белл (Bell E. T.), Exponential polynomials, *Annals of Math.*, **35** (1934), 258—277.
5. Белл (Bell E. T.), Generalized Stirling transforms of sequences, *Amer. J. of Math.*, **61** (1939), 89—101.
6. Люка (Lucas E.), Thécrie des nombres, Paris, 1891, ch. 13.
7. Мак-Магон (MacMahon P. A.), Combinatory Analysis, v. I, London, 1915; v. II, London, 1916.
8. Харди и Райт (Hardy G. H., Wright E. M.), An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford, 1938.

Задачи

1. Показать, что если $A(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_Nt^N$, то

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iku}A(e^{iu})\,du. \quad \text{(Лаплас)}$$

2. (а) Показать, что если $a_n(x)$ определено соотношением

$$a_n(x) = (1-x)^{n+1}\sum_{0}^{\infty} k^n x^k,$$

то

$$a_n(x) = nxa_{n-1}(x) + x(1-x)Da_{n-1}(x)$$
$$(D = d/dx),$$

и проверить, что

$$a_0(x)=1,\qquad a_2(x)=x+x^2,$$
$$a_1(x)=x,\qquad a_3(x)=x+4x^2+x^3.$$

(b) Показать, что если $a_n(x)=a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\dots$, $n>0$, то

$$a_{n,k}=ka_{n-1,k}+(n-k+1)a_{n-1,k-1},\qquad n>0,$$

и убедиться, что

$$\begin{aligned} &a_{n,1}=1,\\ &a_{n,2}=2^n-(n+1),\\ &a_{n,3}=3^n-(n+1)2^n+\binom{n+1}{2}. \end{aligned}$$

(c) Предполагая $a_n(x)$ определенным так, как указано выше, доказать, что его экспоненциальная производящая функция

$$a(x,\ t)=a_0(x)+a_1(x)t+a_2(x)t^2/2!+\dots$$

может быть задана в виде

$$a(x,\ t)=(1-x)/(1-xe^{t(1-x)}).$$

Используя рекуррентное соотношение из (a), проверить, что $a(x,\ t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных [индексы при $a(x,\ t)$ означают частные производные по соответствующим переменным]:

$$(1-xt)a_t(x,\ t)=xa(x,\ t)+x(1-x)a_x(x,\ t).$$

(d) Определить новую последовательность функций $A_n(x)$ соотношениями

$$A_0(x)=a_0(x)=1,\qquad xA_n(x)=a_n(x)$$

и проверить, что

$$A(x,\ t)=A_0(x)+A_1(x)t+A_2(x)t^2/2!+\dots=(1-x)/(e^{t(x-1)}-x),$$

$$(1-xt)A_t(x,\ t)=A(x,\ t)+x(1-x)A_x(x,\ t).$$

(e) Пусть $H_n(x)=A_n(x)/(x-1)^n$; проверить, что

$$\begin{aligned} H(x,\ t)=H_0(x)+H_1(x)t+H_2(x)t^2/2!+\dots&=\\ =(1-x)/(e^t-x),&\qquad \text{(Эйлер)} \end{aligned}$$

$$(H+1)^n=xH_n+(1-x)\delta_{n0},\qquad H^n\equiv H_n\equiv H_n(x),$$

где δ_{n0} — дельта Кронекера.

Ввиду этих результатов числа $a_{n,k}$, или, что то же самое, $A_{n,k}$, определенные соотношением

$$A_n(x)=A_{n,1}+A_{n,2}x+A_{n,3}x^2+\dots,$$

называются числами Эйлера. Таблица этих чисел приведена в гл. 8.

3. Показать, что если

$$a_k = \binom{k}{0} + \binom{k+1}{2} + \ldots + \binom{k+j}{2j} + \ldots + \binom{2k}{2k}, \qquad k \geqslant 0,$$

$$b_k = \binom{k}{1} + \binom{k+1}{3} + \ldots + \binom{k+j}{1+2j} + \ldots + \binom{2k-1}{2k-1}, \qquad k > 0,$$

то

$$a_{k+1} = a_k + b_{k+1},$$
$$b_{k+1} = a_k + b_k.$$

Показать, следовательно, что обычные производящие функции для этих коэффициентов

$$A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots,$$
$$B(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n + \ldots$$

(отметим, что $a_0 = 1$, $b_0 = 0$) связаны соотношениями

$$A(t) - 1 = tA(t) + B(t),$$
$$B(t) = tA(t) + tB(t),$$

так что

$$A(t) = (1-t)[(1-t)^2 - t]^{-1},$$
$$B(t) = t[(1-t)^2 - t]^{-1}.$$

4. Пусть, подобно предыдущему, $b_0 = c_0 = c_1 = 0$ и

$$a_k = \binom{k}{0} + \binom{k+1}{3} + \ldots + \binom{k+j}{3j} + \ldots, \qquad k \geqslant 0,$$

$$b_k = \binom{k}{1} + \binom{k+1}{4} + \ldots + \binom{k+j}{1+3j} + \ldots, \qquad k > 0,$$

$$c_k = \binom{k}{2} + \binom{k+1}{5} + \ldots + \binom{k+j}{2+3j} + \ldots, \qquad k > 1,$$

(все три ряда — конечны и имеют верхние пределы, определенные естественно требованием целочисленности биномиальных коэффициентов). Показать, что

$$a_{k+1} = a_k + c_{k+1},$$
$$b_{k+1} = a_k + b_k,$$
$$c_{k+1} = b_k + c_k$$

и что соответствующими соотношениями для производящих функций являются

$$A(t) - 1 = tA(t) + C(t),$$
$$B(t) = tA(t) + tB(t),$$
$$C(t) = tB(t) + tC(t)$$

$$A(t)=(1-t^2)\,[(1-t)^3-t^2]^{-1},$$
$$B(t)=t\,(1-t)\,[(1-t)^3-t^2]^{-1},$$
$$C(t)=t^2\,[(1-t)^3-t^2]^{-1}.$$

5. Задачи 3 и 4 могут быть обобщены на случай конечных сумм

$$a_k=\binom{k}{b}+\binom{k+a}{b+c}+\binom{k+2a}{b+2c}+\ldots,\quad a,\ b<c.$$

Показать, что производящую функцию указанной суммы, а именно

$$A(t;a,\,b,\,c)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots,$$

можно представить в виде

$$A(t;\ a,\,b,\,c)=t^b\,(1-t)^{c-1-b}\,[(1-t)^c-t^{c-a}]^{-1},\quad a,\,b<c.$$

6. (a) Положим $\alpha=e^{i2\pi/3}$, $i=\sqrt{-1}$ $(\alpha^3=1,\ \ 1+\alpha+\alpha^2=0)$.

Показать, что

$$\frac{1}{3}\left[\,2^k+(1+\alpha)^k\alpha^{2b}+(1+\alpha^2)^k\,\alpha^b\right]=$$
$$=\binom{k}{b}+\binom{k}{b+3}+\binom{k}{b+6}+\ldots,\qquad b=0,\,1,\,2.$$

(b) Получить те же результаты разложением выражения

$$A(t;\ 0,\,b,\,3)=t^b\,(1-t)^{2-b}\,[(1-t)^3-t^3]^{-1}$$

из задачи (5) на простейшие дроби.

(c) Упростить полученные результаты, приведя их к виду

$$\frac{1}{3}\left(2^k+2\cos\frac{k\pi}{3}\right)=\binom{k}{0}+\binom{k}{3}+\binom{k}{6}+\ldots,$$
$$\frac{1}{3}\left(2^k+2\cos\frac{(k-2)\pi}{3}\right)=\binom{k}{1}+\binom{k}{4}+\binom{k}{7}+\ldots,$$
$$\frac{1}{3}\left(2^k+2\cos\frac{(k-4)\pi}{3}\right)=\binom{k}{2}+\binom{k}{5}+\binom{k}{8}+\ldots.$$

7. Аналогично, показать, что при $\alpha=\exp i2\pi/c$, $i=\sqrt{-1}$, и при целом положительном c

$$\frac{1}{c}\sum_{j=0}^{c-1}(1+\alpha^j)^k\,\alpha^{-bj}=\binom{k}{b}+\binom{k}{b+c}+\binom{k}{b+2c}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{c}\sum_{j=0}^{c-1}\left(2\cos\frac{j\pi}{c}\right)^k\cos\frac{(k-2b)\,j\pi}{c},\qquad b<c.$$

8. Доказать, что если производящая функция $B(t)$ (биномиальная вероятность) определяется равенством

$$B(t) = \sum_{0}^{n} b_k t^k = (q + pt)^n, \quad p + q = 1,$$

то

$$b_k = \binom{n}{k} q^{n-k} p^k$$

(отметим, что b_k является функцией n, p и k).

9. *Продолжение.* (a) Показать, что соответствующей производящей функцией факториального момента служит

$$\exp t\,(m) = (1 + pt)^n$$

и

$$(m)_k = (n)_k p^k.$$

(b) Показать, что если $S(k, j)$ — числа Стирлинга (второго рода), то

$$m_k \equiv m_k(n, p) = \sum S(k, j)\,(n)_j p^j.$$

10. *Продолжение.* (a) Экспоненциальной производящей функцией для обычных моментов $m_k(n, p) \equiv m_k(n)$ служит

$$m(n, t) = \exp tm(n) = B(e^t) = (q + pe^t)^n,$$

где $[m(n)]^k \equiv m_k(n)$. Считая, что $D = d/dt$, установить, что

$$\begin{aligned} D \exp tm(n) &= npe^t \exp tm(n-1) = \\ &= n \exp tm(n) - qn \exp tm(n-1) \end{aligned}$$

и что из последнего вытекают рекуррентные соотношения

$$\begin{gathered} m_{k+1}(n) = np\,[m(n-1) + 1]^k = nm_k(n) - qnm_k(n-1), \\ [m(n-1)]^j \equiv m_j(n-1) \end{gathered}$$

Отметим, что $np = m_1(n)$.

(b) Проверить следующие частные случаи первого из этих рекуррентных соотношений путем сравнения с задачей 9(b), т. е.

$$\begin{aligned} m_1(n) &= np, \\ m_2(n) &= np\,[(n-1)\,p + 1], \\ m_3(n) &= np\,[(n-1)(n-2)\,p^2 + 3\,(n-1)\,p + 1]. \end{aligned}$$

11. *Продолжение.* Показать, что ($D_p = d/dp$, $D_t = d/dt$)

$$pqD_p \exp tm(n) = D_t \exp tm(n) - np \exp tm(n),$$

и, следовательно, что

$$m_{k+1}(n) = npm_k(n) + pq\,D_p m_k(n).$$

12. *Продолжение.* Если $M_k(n, p) \equiv M_k(n)$ — k-й центральный момент биномиального распределения и $\exp tM(n)$ — производящая функция, то показать, что $(D = d/dt)$

$$D \exp tM(n) = -np \exp tM(n) + np \exp t[M(n-1)+q] =$$
$$= nq \exp tM(n) - nq \exp t[M(n-1)-p]$$

и, следовательно, что

$$M_{k+1}(n) = -npM_k(n) + np[M(n-1)+q]^k =$$
$$= nqM_k(n) - nq[M(n-1)-p]^k,$$

причем, разумеется, в обоих соотношениях $[M(n-1)]^j \equiv M_j(n-1)$. Проверить частные случаи:

$$M_0(n) = 1, \quad M_2(n) = npq,$$
$$M_1(n) = 0, \quad M_3(n) = npq(q-p).$$

13. (a) Пользуясь рекуррентными соотношениями для чисел Стирлинга

$$s(n+1, k) + ns(n, k) = s(n, k-1),$$

показать, что экспоненциальная производящая функция

$$y_k(t) = \sum_0^\infty s(n, k)\, t^n/n! = \exp ts(\,, k), \quad s(\,, k)^n = s(n, k)$$

удовлетворяет соотношению

$$(1+t)\frac{dy_k(t)}{dt} = y_{k-1}(t),$$

и на основе этого проверить, что

$$y_k(t) = [\log(1+t)]^k/k!.$$

(b) Используя последнее дифференциальное уравнение, доказать, что

$$s(n+1, k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} s(n-j, k-1)(-1)^j j!,$$

и проверить этот результат итерацией уравнения (36).

14. (a) Аналогично, показать, что для экспоненциальной производящей функции

$$Y_k(t) = \sum_0^\infty S(n, k)\, t^n/n! = \exp tS(\,, k), \quad S(\,,k)^n = S(n, k)$$

имеет место дифференциальное рекуррентное **соотношение**

$$\left(\frac{d}{dt}-k\right)Y_k(t)=Y_{k-1}(t),$$

и проверить, **что**

$$Y_1=e^t-1,$$
$$Y_k=(e^t-1)^k/k!.$$

(b) **Показать**, что

$$S(n+1,\,k)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}S(j,\,k-1).$$

15. Доказать, что производящая функция

$$S_k(t)=\sum_{0}^{\infty}S(n+k,\,k)\,t^n$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$(1-kt)\,S_k(t)=S_{k-1}(t),$$

так что

$$(1-t)\,(1-2t)\ldots(1-kt)\,S_k(t)=1.$$

Следовательно, $S_0(t)=1$, $S_1(t)=1/(1-t)$, и путем **разложения** на простейшие дроби

$$S_2(t)=\frac{2}{1-2t}-\frac{1}{1-t},$$
$$S_3(t)=\frac{9}{2(1-3t)}-\frac{4}{1-2t}+\frac{1}{2(1-t)},$$
$$S_k(t)=\frac{k^k}{k!}\,\frac{1}{1-kt}-\frac{(k-1)^k}{(k-1)!}\,\frac{1}{1-(k-1)t}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^j}{k!}\binom{k}{j}\frac{(k-j)^k}{1-(k-j)t}+\ldots$$

[**Несколько** проще последнее выражение можно **получить, если** уравнение (38) записать в развернутом виде, а именно

$$S(n,\,k)=\frac{1}{k!}\sum(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n.$$

Этот результат используется в первом из соотношений настоящей задачи.]

Отметим, что

$$\frac{S(n,\,k)}{k^n}\sim\frac{1}{k!},$$

где $\sim$ есть знак асимптотической эквивалентности.

16. Числа Лаха[1]). Определим числа $L_{n,k}$ соотношениями

$$(-x)_n=\sum L_{n,k}(x)_k,$$

так что

$$(x)_n=\sum L_{n,k}(-x)_k$$

и

$$\sum L_{n,k}L_{k,m}=\delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ — дельта Кронекера. Следовательно, каждое из уравнений

$$a_n=\sum L_{n,k}b_k,$$

$$b_n=\sum L_{n,k}a_k$$

вытекает из второго. Отметим, что числа $(-1)^n L_{n,k}$ положительные.

(a) Вывести рекуррентную формулу

$$L_{n+1,k}=-(n+k)L_{n,k}-L_{n,k-1}$$

и проверить таблицу

k n	1	2	3	4	5
1	—1				
2	2	1			
3	—6	—6	—1		
4	24	36	12	1	
5	—120	—240	—120	—20	—1

(b) Пусть

$$L_k(t)=\sum_{n=0}L_{n,k}t^n/n!.$$

Показать, что из соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)_n t^n/n!=\sum_{k=0}\binom{x}{k}\left(\frac{-t}{1+t}\right)^k$$

---

[1]) Lah I., Eine neue Art von Zahren. ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik, *Mitteilungsbl. Math. Statist.*, 7 (1955), 203—212.

вытекает

$$L_k(t) = \frac{1}{k!}\left(-\frac{t}{1+t}\right)^k$$

и, следовательно, что

$$L_{n,k} = (-1)^n \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

Убедиться, что этот результат согласуется с рекуррентной формулой из (а) и граничными условиями.

(с) Вывести соотношение

$$\sum_{k=0} x^k L_k(-t) = \exp\frac{xt}{1-t}$$

(в этом результате проявляется связь между числами Лаха и полиномами Лагерра).

(d) Показать, что

$$L_{n,k} = \sum (-1)^j s_{nj} S_{jk},$$

где s_{nj} и S_{jk} — числа Стирлинга.

17. Пусть $a_0 = a_1 = 1$ и

$$a_{n+1} = (n+1)a_n - \binom{n}{2} a_{n-2}, \quad n > 1.$$

Показать, что экспоненциальная производящая функция

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2/2! + \dots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-t)\frac{dA}{dt} = \left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)A(t)$$

и

$$A(t) = (1-t)^{-1/2}\exp(t/2 + t^2/4).$$

18. Показать, что оператор θ^n (n-я итерация оператора $\theta = tD$) удовлетворяет соотношению

$$\theta^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)\, t^k D^k,$$

$$t^n D^n = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, \theta^k = (\theta)_n,$$

в котором $S(n, k)$, $s(n, k)$ — числа Стирлинга.

19. (а) Пользуясь производящей функцией для чисел Бернулли при четных значениях индекса, а именно

$$\exp tb = t/(e^t - 1) = [\log(1 + e^t - 1)](e^t - 1)^{-1},$$

и другими средствами, показать, что

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!\, S(n, k)/(k+1).$$

(b) Показать, что

$$(b)_n = \sum s(n, k)\, b_k = (-1)^n n!/(n+1).$$

[*Замечание.* Это соотношение можно непосредственно получить из приведенной выше производящей функции для чисел Бернулли путем подстановки $t = \log(1+u)$.]

20. Используя решение системы уравнений (12), показать, что элемент a'_n обратной последовательности может быть представлен в виде определителя

$$a'_n = (-1)^n a_0^{-n-1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}.$$

21. Обозначим через y упорядоченную последовательность n переменных $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ (y — вектор, имеющий n компонент). Пусть $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ — аналогичная последовательность, и положим $y + z = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n)$.

Показать, что

$$Y_n(y+z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Y_{n-k}(y) Y_k(z) =$$

$$= (Y(y) + Y(z))^n, \quad Y^k(y) \equiv Y_k(y), \quad Y^k(z) \equiv Y_k(z).$$

Если a — целое положительное и $ay = (ay_1, \dots, ay_n)$, то установить, что

$$Y_n(ay) = (Y(y) + \dots + Y(y))^n$$

$\longleftarrow a$ слагаемых $\longrightarrow$.

22. Положим

$$f(x) = x^m, \quad g(x) = \exp cx = c_0 + c_1 x + c_2 x^2/2! + \dots,$$

так что

$$A(x) = f(g(x)) = [\exp cx]^m = \exp xC(m), \quad C^n(m) = C_n(m).$$

Показать, что

$$C_n(m) = Y_n(fc_1, fc_2, \dots, fc_n), \quad f_j = (m)_j c_0^{m-j}.$$

Проверить частные случаи:

$$C_0(m)=c_0^m,$$
$$C_1(m)=mc_1c_0^{m-1},$$
$$C_2(m)=mc_2c_0^{m-1}+(m)_2\,c_1^2c_0^{m-2},$$
$$C_3(m)=mc_3c_0^{m-1}+3(m)_2c_2c_1c_0^{m-2}+(m)_3\,c_1^3c_0^{m-3}.$$

23. Положим $(n)_{k,\,a}=n(n-a)\ldots[n-a(k-1)]=a^k(n/a)_k$, где $(n/a)_k$ — обычный убывающий факториал. Показать, что

$$(1+at)^{n/a}=\sum_{k=0}(n)_{k,\,a}\,t^k/k!$$

и, следовательно, что

$$(n)_{k,a}=Y_k(fc_1,\ fc_2,\ \ldots,\ fc_k),\quad f_j=(n)_j,$$

где $c_0=c_1=1$ и

$$c_j=(1)_{j,\,a}=(1-a)(1-2a)\ldots(1-(j-1)a),\ j>1.$$

Проверить путем непосредственных вычислений частные случаи

$$(n)_{1,a}=n=nc_1,$$
$$(n)_{2,a}=n(n-a)=nc_2+(n)_2\,c_1^2=n(1-a)+(n)_2,$$
$$(n)_{3,a}=n(n-a)(n-2a)=$$
$$=n(1-a)(1-2a)+3(n)_2(1-a)+(n)_3.$$

24. Пусть a и a' являются взаимно обратными переменными Блиссара, так что

$$(\exp at)(\exp a't)=1,\ \ a^n\equiv a_n,\ \ (a')^n=a'_n.$$

Показать, что

$$a'_n=Y_n(fa_1,\ fa_2,\ \ldots,\ fa_n),\ \ f_j=(-1)^j\,j!\ \ a_0^{-j-1},$$

и проверить эти результаты, используя материал, следующий за соотношением (23) этой главы.

25. Полагая $f(u)=e^u$, $g(t)=at^2$ и

$$A(t)=f(g(t))=e^{at^2},$$

показать, что

$$A_n=D^nA(t)=e^{at^2}\,Y_n(g_1,\ g_2),$$

где $g_1=2at$, $g_2=2a$, $(g_n=0,\ n>2)$. Установить, что

$$\sum_{n=0}(e^{-at^2}D^ne^{at^2})\,u^n/n!=\exp(g_1u+g_2u^2/2!)=\exp au(2t+u).$$

Если

$$P_n(a,\ t)=e^{-at^2}\,D^n\,e^{at^2},$$

то $P_n(-1,\ t)=H_n(-t)$, где $H_n(t)$ — полином Эрмита (в обозначениях, определяемых этим соотношением).

26. (a) Показать, что при $A(t)=f(e^t)$

$$A_n=D^n A(t)=\sum_{k=0}^{n} S(n,\ k)\, e^{kt} f_k,$$

где $f_k=D_u^k f(u)|_{u=e^t}$.

(b) Проверить, что при $f(u)=u^2$, т. е. для $A(t)=e^{2t}$,

$$A_n=2^n e^{2t}=2(S(n,\ 1)+S(n,\ 2))\, e^{2t}.$$

27. (a) Показать, что

$$\log[1/(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)\ \ldots]=s_1 x+s_2 x^2/2+\ldots+s_n x^n/n+\ldots,$$

где $s_n=\alpha_1^n+\alpha_2^n+\ldots$ — симметрическая функция, являющаяся суммой степеней $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$.

(b) Определим *элементарные* симметрические функции α_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$ (которые уже появлялись в разд. 1.4) и симметрические функции сумм однородных произведений h_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$, соотношениями

$$\begin{aligned}(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)\ \ldots &= 1-a_1 x+a_2 x^2-a_3 x^3+\ldots=\\ &=(1+h_1 x+h_2 x^2+h_3 x^3+\ldots)^{-1},\end{aligned}$$

которые, если использовать предыдущий результат, можно переписать в виде

$$1-a_1 x+a_2 x^2-\ldots=\exp(-s_1 x-s_2 x^2/2-\ldots-s_n x^n/n-\ldots),$$
$$1+h_1 x+h_2 x^2+\ldots=\exp(s_1 x+s_2 x^2/2+\ldots+s_n x^n/n+\ldots).$$

Доказать, что

$$(-1)^n n!\ a_n=Y_n(-s_1,\ -s_2,\ -2s_3,\ \ldots,\ -(n-1)!\ s_n),$$
$$n!\ h_n=Y_n(s_1,\ s_2,\ 2s_3,\ \ldots,\ (n-1)!\ s_n),$$
$$-(n-1)!\ s_n=Y_n(-fa_1,\ f2!\ a_2,\ -f3!\ a_3,\ \ldots,\ f(-1)^n n!\ a_n),$$
$$(n-1)!\ s_n=Y_n(fh_1,\ f2!\ h_2,\ f3!\ h_3,\ \ldots,\ fn!\ h_n),$$

где $f^j\equiv f_j=(-1)^{j-1}(j-1)!$

Проверить частные случаи:

$$\begin{aligned}a_1&=s_1, & s_1&=a_1,\\ 2a_2&=-s_2+s_1^2, & s_2&=-2a_2+a_1^2,\\ 6a_3&=2s_3-3s_2s_1+s_1^3, & 2s_3&=6a_3-6a_2a_1+2a_1^3,\\ h&=s_1, & s_1&=h_1,\end{aligned}$$

$$2h_2 = s_2 + s_1^2, \qquad s_2 = 2h_2 - h_1^2,$$
$$6h_3 = 2s_3 + 3s_2 s_1 + s_1^3, \quad 2s_3 = 6h_3 - 6h_2 h_1 + 2h_1^3.$$

28. (a) Пусть $A_n(a) = A_n(a;\, g_1, \ldots, g_n)$ — то же, что и в соотношении (43), и $D = d/dt$; показать, что

$$A_{n+1}(a) = (ag_1 + D)\, A_n(a) = \left(ag_1 + \sum_1^n g_{s+1} \frac{d}{dg_s}\right) A_n(a).$$

(b) Положим

$$A_n(a) = \sum_{k=1}^{n} a^k A_{n,\,k}.$$

Показать, что

$$A_{n+1,\,k} = g_1 A_{n,\,k-1} + DA_{n,\,k},$$

так что $(A_{n,\,0} = 0)$, например,

$$A_{n+1,\,1} = DA_{n1} = g_{n+1},$$
$$A_{n+1,\,2} = g_1 g_n + DA_{n,\,2}.$$

Отсюда последовательно вывести, что

$$A_{2,\,2} = g_1^2, \qquad A_{4,\,2} = 4g_3 g_1 + 3g_2^2,$$
$$A_{3,\,2} = 3g_2 g_1, \qquad A_{5,\,2} = 5g_4 g_1 + 10 g_3 g_2$$

и, наконец,

$$A_{n,\,2} = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} g_{j+1} g_{n-1-j}.$$

Таблица 1

Числа Стирлинга первого рода, $s(n,\ k)$

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	—1	1								
3	2	—3	1							
4	—6	11	—6	1						
5	24	—50	35	—10	1					
6	—120	274	—225	85	—15	1				
7	720	—1764	1624	—735	175	—21	1			
8	—5040	13068	—13132	6769	—1960	322	—28	1		
9	40320	—109584	118124	—67284	22449	—4536	546	—36	1	
10	—362880	1026576	—1172700	723680	—269325	63273	—9450	870	—45	1

Таблица 2

Числа Стирлинга второго рода, $S(n, k)$

k n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5580	750	45	1

Таблица 3

Полиномы Белла $Y_n(fg_1, fg_2, \dots fg_n)$

Y_1	$f_1g_1,$
Y_2	$f_1g_2+f_2g_1^2,$
Y_3	$f_1g_3+f_2(3g_2g_1)+f_3g_1^3,$
Y_4	$f_1g_4+f_2(4g_3g_1+3g_2^2)+f_3(6g_2g_1^2)+f_4g_1^4,$
Y_5	$f_1g_5+f_2(5g_4g_1+10g_3g_2)+f_3(10g_3g_1^2+15g_2^2g_1)+f_4(10g_2g_1^3)+f_5g_1^5,$
Y_6	$f_1g_6+f_2(6g_5g_1+15g_4g_2+10g_3^2)+f_3(15g_4g_1^2+60g_3g_2g_1+15g_2^3)+$ $+f_4(20g_3g_1^3+45g_2^2g_1^2)+f_5(15g_2g_1^4)+f_6g_1^6,$
Y_7	$f_1g_7+f_2(7g_6g_1+21g_5g_2+35g_4g_3)+f_3(21g_5g_1^2+105g_4g_2g_1+70g_3^2g_1+$ $+105g_3g_2^2)+f_4(35g_4g_1^3+210g_3g_2g_1^2+105g_2^3g_1)+f_5(35g_3g_1^4+$ $+105g_2^2g_1^3)+f_6(21g_2g_1^5)+f_7g_1^7,$
Y_8	$f_1g_8+f_2(8g_7g_1+28g_6g_2+56g_5g_3+35g_4^2)+f_3(28g_6g_1^2+168g_5g_2g_1+$ $+280g_4g_3g_1+210g_4g_2^2+280g_3^2g_2)+f_4(56g_5g_1^3+420g_4g_2g_1^2+$ $+280g_3^2g_1^2+840g_3g_2^2g_1+105g_2^4)+f_5(70g_4g_1^4+560g_3g_2g_1^3+420g_2^3g_1^2)+$ $+f_6(56g_3g_1^5+210g_2^2g_1^4)+f_7(28g_2g_1^6)+f_8g_1^8.$

Глава 3

ПРИНЦИП ВКЛЮЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ

1. Введение

Эта глава посвящена важному комбинаторному методу — принципу включения и исключения, известному также под названиями: символический метод, принцип перекрестной классификации, метод решета (значение этих терминов выявится впоследствии). Логическое тождество, на котором основаны все эти методы, известно давно. В «Истории теории чисел» Диксона (т. I, стр. 119) указано на появление подобных методов у Даниэля да Сильва в 1854 году, но еще в 1713 году Монмор эффективно использовал упомянутый выше метод в решении знаменитой задачи, известной, в основном, под своим французским названием «Le problème des rencontres» («Задача о встречах») (о числе перестановок из n элементов, в которых ни один из элементов не сохраняет своей позиции). Этот метод, возможно, был известен и Бернулли.

В настоящей главе мы будем стремиться к общим формулировкам (некоторые из них наметились в гл. 2 при изучении факториальных моментов), позволяющим подготовить почву для многих указанных далее приложений.

2. Логическое тождество

Предположим, что имеется N объектов, из которых $N(a)$ (используем те же обозначения, что и для функциональной зависимости) обладают свойством a; если, далее, a' означает отсутствие свойства a, то

$$N(a') = N - N(a),$$

так как каждый объект либо обладает, либо не обладает свойством a. Если речь об объектах, могущих обладать двумя свойствами a и b, то число элементов, не обладающих ни одним из них, дается формулой

$$N(a', b') = N - N(a) - N(b) + N(ab),$$

так как при вычитании $N(a)$ и $N(b)$ из общего запаса объектов величина $N(ab)$ вычитается дважды, а потому должна быть восстановлена. Этим оправдывается термин: «включение и исключение»; процесс состоит во включении «всего» и исключении лишнего, во включении ошибочно исключенного и т. д., т. е. в попеременном включении и исключении.

Основной результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема. *Если из N объектов $N(a)$ обладают свойством a, $N(b)$ — свойством b, ..., $N(ab)$ обладают как свойством a, так и свойством b, ..., $N(abc)$ обладают свойствами a, b и c и. т. д., то число объектов $N(a'b'c'...)$, не обладающих ни одним из этих свойств, находится по формуле*

$$\begin{aligned} N(a'b'c'\ldots) = N - N(a) - N(b) - \ldots \\ + N(ab) + N(ac) + \ldots \\ - N(abc) - \ldots \\ + \ldots . \end{aligned} \tag{1}$$

Формула (1) просто доказывается методом математической индукции, если заметить, что соотношение $N(a') = N - N(a)$ применимо к любой соответствующим образом определенной совокупности объектов.

Удобнее будет ввести для свойств иные обозначения, а именно a_1, a_2, ..., a_n. Тогда, во-первых, в силу сделанного выше замечания $N(a_1'a_2' \ldots a_{n-1}'a_n') = N(a_1'a_2' \ldots a_{n-1}') - N(a_1'a_2' \ldots a_{n-1}'a_n)$. Затем, предположим, что формула (1) выполняется для $n-1$ свойств a_1, a_2, ..., a_{n-1}, т. е.

$$N(a_1'a_2' \ldots a_{n-1}') = N - N(a_1) - N(a_2) - \ldots - N(a_{n-1}) + N(a_1a_2) + \ldots$$
$$\ldots + N(a_{n-2}a_{n-1}) + \ldots + (-1)^{n-1} N(a_1a_2 \ldots a_{n-1}).$$

Применяя последнее соотношение к совокупности $N(a_n)$, находим

$$N(a_1'a_2' \ldots a_{n-1}'a_n) = N(a_n) - N(a_1a_n) - N(a_2a_n) - N(a_{n-1}a_n) +$$
$$+ N(a_1a_2a_n) + \ldots + (-1)^{n-1} N(a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n).$$

Вычитая последнее равенство из предыдущего, получаем равенство (1) для n свойств a_1, ..., a_n.

Так как соотношение (1) справедливо для n свойств, коль скоро оно справедливо для $n-1$, а для $n=1$ оно выполнено, то теорему можно считать доказанной.

Для того чтобы облегчить всестороннее использование этой теоремы, сделаем следующие замечания.

Во-первых, нам кажется, что лучше всего она запоминается в следующей символической записи:

$$N(a'b'c' \ldots) = N[(1-a)(1-b)(1-c) \ldots]. \tag{1a}$$

Смысл этой символической записи правой части (1) состоит в том, что сначала при раскрытии круглых скобок вычисляется содержимое квадратных скобок, а затем знак функции N применяется к каждому из полученных слагаемых подобно тому, как это сделано в следующем частном случае:

$$N[(1-a)(1-b)] = N(1-a-b+ab) =$$
$$= N(1) - N(a) - N(b) + N(ab),$$

где $N(1) = N$.

Для большей формализации рассуждений примем, что $N(a+b) = N(a) + N(b)$, $N(-a) = -N(a)$, $N(1) = N$. В логике a' называют дополнением к a и определяют соотношением $a' + a = 1$, где 1 означает рассматриваемую совокупность свойств. В этом можно интуитивно усмотреть естественность соотношения (1а).

Далее, как видно из доказательства, совокупность объектов, к которым применима теорема, не обязана быть совокупностью N всех объектов. Вместо нее можно рассматривать соответствующим образом определенное своими свойствами подмножество совокупности N. Например, в порядке дополнения к уже сказанному отметим, что

$$N(a_1a'_2a_3a'_4) = N[a_1(1-a_2)a_3(1-a_4)] =$$
$$= N(a_1a_3) - N(a_1a_2a_3) - N(a_1a_3a_4) + N(a_1a_2a_3a_4).$$

Вообще говоря, если n различных свойств $a_1, a_2 \ldots a_n$ объектов из совокупности N обозначить через $b_1, b_2 \ldots b_k, c_1, c_2 \ldots c_{n-k}$, то получим формулу

$$N(b_1b_2 \ldots b_kc'_1c'_2 \ldots c'_{n-k}) = N[b_1b_2 \ldots b_k(1-c_1) \ldots (1-c_{n-k})]. \quad (1b)$$

Наиболее интересной эта формула оказывается тогда, когда несколько свойств являются совместными, т. е. когда некоторые из величин $N(a_ja_k)$, $N(a_ja_ka_l)$ и т. д. отличны от нуля. В противном случае, т. е. когда все свойства являются взаимно исключающими, соотношение (1) приобретает вырожденную форму

$$N(a'_1a'_2 \ldots a'_n) = N - N(a_1) - N(a_2) - \ldots - N(a_n)$$

и приводит к мало интересному результату.

В теории вероятностей соотношение (1) называется теоремой Пуанкаре и записывается в следующем символическом виде:

$$P(a'_1a'_2 \ldots a'_n) = [1-P(a_1)][1-P(a_2)] \ldots [1-P(a_n)]. \quad (1c)$$

Интерпретация символической записи правой части (1с) аналогична интерпретации правой части (1а): после раскрытия скобок произведение $P(a_i)P(a_j) \ldots$ заменяется $P(a_ia_j \ldots)$; все уравнения переписываются в вероятностных обозначениях; свойства

a_1, a_2, ... определяют «события», а не объекты, как прежде; $P(a_1a_2)$ обозначает вероятность одновременного появления событий a_1 и a_2 и т. д. Для независимых событий формула (1с) справедлива без символических интерпретаций и, следовательно, может рассматриваться как естественное обобщение формулы вероятности независимых событий на случай событий зависимых и совместных (см. [3] и [4]).

3. Символическое обобщение

Тождество (1) можно подвергнуть существенным символическим обобщениям (это оправдывает термин «символический метод»). С этой целью (как и ранее) через $a_1, \ldots, a_n$ обозначим различные свойства и определим величины S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ соотношениями

$$\begin{aligned} &S_0 = 1, \\ &S_1 = N^{-1} \sum N(a_i), \\ &S_2 = N^{-1} \sum N(a_ia_j), \quad i \neq j, \\ &S_3 = N^{-1} \sum N(a_ia_ja_k), \quad i,\ j,\ k \text{ различны.} \end{aligned}$$

В S_1 входит сумма, взятая по всем n свойствам, в S_2 — по всем парам этих свойств, в S_3 — по всем тройкам и т. д. Далее, если положить $S_{n+k} = 0$, $k > 0$, то (1) можно придать вид

$$\begin{aligned} N^{-1}N(a_1'a_2' \ldots a_n') &= 1 - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^n S_n = \\ &= (1 + S)^{-1}, \quad S^k \equiv S_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Это — вероятностная формула, оперирующая относительными (вероятностями), а не абсолютными числами. Левая часть (2) является относительным числом объектов, не обладающих ни одним из свойств a_i, и может быть заменена $p(0)$. В тех же самых обозначениях $p(k)$ является относительным числом объектов, обладающих в точности k свойствами из данных n свойств, причем из всех $\binom{n}{k}$ сочетаний k свойств берутся только k-сочетания совместных свойств. Таким образом,

$$p(k) = \sum N^{-1}N(a_1a_2 \ldots a_k a_{k+1}' \ldots a_n'),$$

если сумма берется по всем совместным сочетаниям из n свойств по k. Заметим, что для упрощения обозначений, под знаком суммы записан первый, а не общий член этой суммы.

Теперь, опираясь на (1b) в обозначениях, принятых при выводе (2), получаем

$$p(k) = S_k - (k+1) S_{k+1} + \binom{k+2}{2} S_{k+2} - \ldots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} S_n =$$
$$= S^k (1+S)^{-k-1}, \quad S^k \equiv S_k. \qquad (3)$$

Появление биномиальных коэффициентов объясняется тем, что, например, выражение $N(a_1 a_2 \ldots a_{k+j})$ появляется столько раз, сколько имеется k-сочетаний из $k+j$ элементов.

Соотношение (2) является частным случаем (3) при $k = 0$.

Соотношение (3), не считая обозначений, тождественно соотношению (2.32), выражающему вероятности через их биномиальные моменты, а именно

$$p_k = B_k - (k+1) B_{k+1} + \binom{k+2}{2} B_{k+2} - \ldots .$$

Следовательно, суммы S_k оказываются биномиальными моментами вероятностей $p(k)$, т. е.

$$S_k = \sum \binom{j}{k} p(j) =$$
$$= p(k) + (k+1) p(k+1) + \binom{k+2}{2} p(k+2) + \ldots + \binom{n}{k} p(n). \quad (4)$$

Производящая функция для $p(k)$, т. е. функция

$$P(t) = p(0) + p(1)t + p(2)t^2 + \ldots,$$

с помощью второго из соотношений (2.30) приводится к виду

$$P(t) = \exp(m)(t-1) = \sum B_k (t-1)^k = \sum S_k (t-1)^k =$$
$$= [1 - S(t-1)]^{-1}, \quad S^k \equiv S_k. \qquad (5)$$

Этот результат проверяется с помощью соотношения (3), записанного в символической форме

$$P(t) = \sum_{k=0} S^k (1+S)^{-k-1} t^k =$$
$$= (1+S)^{-1} \sum_{k=0} [St/(1+S)]^k = \frac{1}{1+S-St}, \quad S^k \equiv S_k.$$

Его можно проверить также с помощью прямых вычислений с конечными суммами, входящими в (3), $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Стоит также отметить, что производящей функцией для абсолютных, а не для относительных чисел является

$$N(t) = NP(t) = N[1 + S(t-1)]^{-1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} N S_k (t-1)^k, \quad S^k \equiv S_k \qquad (5a)$$

[$N(t)$ как производящую функцию не следует смешивать с $N(a_i)$ — числом объектов со свойством a_i].

Для переменной, равной сумме вероятностей $p(k)$, можно принять любое из следующих обозначений:

$$u(k)=p(0)+p(1)+\dots+p(k),$$
$$v(k)=p(k+1)+p(k+2)+\dots+p(n),$$
$$r(k)=p(k)+p(k+1)+\dots=p(k)+v(k).$$

Отметим, что $u(k)+v(k)=1$. Соответствующими производящими функциями являются

$$U(t)=(1-t)^{-1}P(t)=-\sum S_k(t-1)^{k-1}, \tag{6}$$
$$V(t)=(1-t)^{-1}[1-P(t)]=\sum S_{k+1}(t-1)^k, \tag{7}$$
$$R(t)=(1-t)^{-1}[1-tP(t)]=\sum (S_{k+1}+S_k)(t-1)^k \tag{8}$$

или в символическом виде

$$u(k)=1-S^{k+1}(1+S)^{-k-1}, \quad S^n\equiv S_n, \tag{9}$$
$$v(k)=S^{k+1}(1+S)^{-k-1}, \quad S^n\equiv S_n, \tag{10}$$
$$r(k)=S^k(1+S)^{-k}, \quad S^n\equiv S_n. \tag{11}$$

Вообще, можно предположить, что g_k — это выигрыш, реализуемый при появлении «события» k (т. е. объекта, обладающего в точности k из n рассматриваемых свойств) в некоторой игре двух или более партнеров; тогда ожидаемый выигрыш является функцией $g_1, g_2, \dots, g_n$, определяемой соотношением

$$G(g_0, g_1, \dots, g_n)=g_0p(0)+g_1p(1)+\dots+g_np(n). \tag{12}$$

Отметим, что

$$G(1, t, \dots, t^n)=P(t)$$

и что G является производящей функцией для последовательности $p(k)$. Следуя Тушару [1], этому факту можно придать иную форму с помощью следующей теоремы.

Теорема 2. *Если*

$$G(g_1, g_2, \dots, g_n)=g_0p(0)+g_1p(1)+\dots+g_np(n)$$

и

$$S_k=\sum \binom{j}{k} p(j),$$
$$\Delta g_0=g_1-g_0,$$
$$\Delta^k g_0=\Delta(\Delta^{k-1}g_0)=(g-1)^k, \quad g^j\equiv g_j,$$

то

$$G(g_1, g_2, \dots, g_n)=g_0S_0+(\Delta g_0)S_1+\dots+(\Delta^n g_0)S_n.$$

Доказательство теоремы получается немедленно, если заметить, что (по определению) S_k является биномиальным моментом, и потому, согласно уравнению (2.32),

$$p(j)=\sum(-1)^k\binom{k+j}{k}S_{j+k}=S^k(1+S)^{-k-1},\quad S^n\equiv S_n,$$

и

$$G(g_0,\ g_1,\ \ldots,\ g_n)=\sum g_jp(j)=\sum[gS/(1+S)]^k(1+S)^{-1}=$$
$$=[1-S(g-1)]^{-1}=\sum S^k(g-1)^k=\sum S_k\Delta^kg_0;\quad g^j\equiv g_j,\quad S^j\equiv S_j.$$

Следует отметить, что при $g_k=t^k$, $\Delta^kg_0=(t-1)^k$ выражение

$$G(1,\ t,\ \ldots,\ t^n)=\sum S_k(t-1)^k$$

оказывается величиной $P(t)$, представленной соотношением (5).

Справедливость теоремы можно проверить иначе, если произвольно положить

$$G(g_0,\ g_1,\ \ldots,\ g_n)=S_k,$$

затем в выражении для $G(g_0,\ g_1,\ \ldots,\ g_n)$ из заключительной части теоремы положить

$$\Delta^jg_0=\delta_{jk},$$

где δ_{jk} — дельта Кронекера, и учесть, что

$$\exp t(g-1)=\sum t^j(g-1)^j/j!=\sum t^j\Delta^jg_0/j!=t^k/k!$$

Но это эквивалентно соотношению

$$\exp tg=e^tt^k/k!=\sum\binom{j}{k}t^j/j!$$

или

$$g_j=\binom{j}{k},$$

т. е. дает проверку.

Поменяв $p(j)$ на $p(j)t^j$, можно прийти к иной форме теоремы. Так что если

$$P(t)=p(0)+p(1)t+p(2)t^2+\ \ldots,$$

то

$$S(k)=\sum\binom{j}{k}p(j)t^j=t^kP^{(k)}(t)/k!,$$

где $P^{(k)}(t)$ — производная k-го порядка. Следовательно,

Теорема 2а. *Если*

$$G(g_0,\ g_1,\ \ldots)=g_0p(0)+g_1(p)(1)t+\ \ldots\ +g_jp(j)t^j+\ \ldots$$

и

$$P(t)=p(0)+p(1)t+\ \ldots,$$

то

$$G(g_0,\ g_1\ \ldots)=g_0P(t)+\Delta g_0P'(t)\,t+\ \ldots$$
$$\ldots\ +\Delta^k g_0P^{(k)}(t)\,t^k/k!+\ldots .$$

Целесообразно отметить, что эйлеровское преобразование рядов является частным случаем теоремы 2a.

4. Ранг

Введенные в предыдущем разделе обозначения числа объектов, обладающих тем или иным из заданных свойств, не учитывали ранга или порядка этих свойств. В настоящем разделе упомянутые свойства предполагаются упорядоченными и объекты перенумерованными в соответствии с рангом, начиная с первого из этих свойств; так, число объектов ранга k обозначим через $N(a_1' \ldots$ $\ldots\ a_{k-1}'a_k)$. Для полноты обозначений объекты, число которых обозначено через $N(a_1' \ldots a_n')$, считаем, по определению, имеющими ранг $n+1$.

Положим $R(j)$ равным числу объектов ранга j; $j=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n+1$, и $r(j)=N^{-1}R(j)$ для относительных чисел. В этих обозначениях опущены явные указания на число n различных свойств рассматриваемых объектов. (В случае необходимости эти указания могут быть сделаны.)

Так, например, при $n=2$

$$R(1)=N(a_1),$$
$$R(2)=N(a_1'a_2)=N(a_2)-N(a_1a_2),$$
$$R(3)=N(a_1'a_2')=N-N(a_1)-N(a_2)+N(a_1a_2).$$

В общем случае, согласно (1b),

$$R(j)=N(a_1'a_2'\ \ldots\ a_{j-1}'a_j)=N[(1-a_1)(1-a_2)\ \ldots\ (1-a_{j-1})a_j]=$$
$$=N(a_j)-N(a_1a_j)-\ \ldots\ -N(a_{j-1}a_j)+$$
$$+\ldots\ (-1)^{j-1}N(a_1a_2\ \ldots\ a_j). \quad (13)$$

Если перейти к теоретико-вероятностной интерпретации и считать, что $P(a_1a_2\ \ldots\ a_j)$ — вероятность того, что успех достигается для каждого из испытаний от 1 до j, то $r(j)=P(a_1'a_2'\ \ldots\ a_{j-1}'a_j)$ оказывается вероятностью того, что впервые успех достигается при j-ом испытании. Для независимых испытаний получаем, что $P(a_1a_2\ \ldots\ a_j)=p^j$; если p — вероятность успеха любого из испытаний, и $P(a_1'a_2' \ldots a_{j-1}'a_j) = (1-p)^{j-1}p$ — это простой и хорошо известный результат.

Наличие симметрии влечет за собой некоторые упрощения, а именно если

$$N^{-1}N(b_1b_2 \ldots b_k) = s_k,$$

где $b_1b_2 \ldots b_k$ — любая выборка k из n свойств $a_1, \ldots, a_n$, то

$$r(j) = s_1 - (j-1)s_2 + \binom{j-1}{2}s_3 - \ldots + (-1)^{j-1}s_j =$$

$$= s(1-s)^{j-1}, \quad s^k \equiv s_k, \quad 0 < j < n+1, \qquad (14)$$

и

$$r(n+1) = (1-s)^n, \quad s^k \equiv s_k.$$

Эти выражения можно использовать для получения производящих функций, подобных приведенным ранее в разд. 3. Это будет осуществлено в следующем разделе и в задачах.

5. Задача о встречах

Иллюстрацией полученных выше результатов может служить задача о встречах. Как уже отмечалось, в своей простейшей форме эта задача требует отыскания числа перестановок из n различных элементов (обозначаемых числами от 1 до n), обладающих тем свойством, что элемент k в них не занимает k-й позиции ($k = 1, 2, \ldots, n$). В более общей форме эта задача состоит в подсчете числа перестановок из n различных элементов в соответствии с числом элементов, занимающих в них «свои собственные» позиции.

Укажем на несколько практических постановок этой задачи. Понятие перестановки впервые возникло (Монмор) при решении задачи об извлечении из урны перенумерованных и предварительно перемешанных шаров, как в лотерее. Несколько позднее перестановки появились при описании всех возможных способов разложения n писем по n конвертам или, что то же, при характеристике всевозможных парных соединений карт, взятых из двух разных колод. При этом предполагалось, что в каждой колоде число карт одно и то же и что в каждую пару входит по одной карте из каждой колоды. Понятие перестановки можно также довольно ясно себе представить, если вообразить, что страницы рукописи, разрозненные ветром или маленьким ребенком или какой-либо иной силой, поспешно складываются.

Если иметь в виду задачу о парных соединениях карт, то речь идет об отыскании числа смещенных элементов в одной колоде относительно другой. Другими словами, речь идет о подсчете числа всех смещений (displacements) [это оправдывает используемые ниже обозначения $D_{n,k}$, $D_n(t)$ и т. п.]. Задача, двойственная поставленной, состоит в определении несмещенных элементов, т. е. всех совпадений или, как говорят, «попаданий». Именно так складываются обстоятельства при телепатических опытах, когда отгадывается произвольно вынутая карта.

Общий запас объектов, рассматриваемых в подобных задачах, определяется числом $N=n!$ перестановок из n различных элементов. Перестановки можно охарактеризовать n свойствами $a_1, \ldots, a_n$, причем свойство a_k означает, что элемент k занимает в данной перестановке k-ю позицию. Следовательно, эта задача обладает симметрией, ибо выбор произвольной совокупности из n свойств определяет некоторое число перестановок независимо от данной избранной совокупности свойств. Так, например, если b_1, b_2, ..., b_j — любая выборка j из n свойств, то

$$N(b_1 b_2 \ldots b_j) = (n-j)!,$$

так как фиксация позиций j элементов оставляет для прочих элементов возможность участия в $(n-j)!$ перестановках. В этом случае относительная сумма S_j по всем таким выборкам, как это было показано в разд. 3, оказывается равной

$$S_j = \binom{n}{j}(n-j)!/n! = 1/j! \tag{15}$$

Используя результаты разд. 3, убеждаемся, что задача полностью решена. Таким образом, указывая в соотношениях (2) и (3) на зависимость результата от индекса n, получаем

$$\begin{aligned} p_n(0) &= 1 - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^n S_n = \\ &= 1 - 1 + 1/2! - 1/3! + \ldots + (-1)^n/n!, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} p_n(k) &= S_k - (k+1) S_{k+1} + \binom{k+2}{2} S_{k+2} - \ldots + (-1)^{n-k}\binom{n}{k} S_n = \\ &= [1 - 1 + 1/2! - \ldots + (-1)^{n-k}/(n-k)!]/k! = \\ &= p_{n-k}(0)/k!. \end{aligned} \tag{17}$$

Следовательно, все вероятности выражаются через вероятность $p_n(0)$, которая, согласно (16), оказывается начальным отрезком ряда для e^{-1}. Можно заметить, что средним значением для такого распределения вероятностей оказывается $S_1 = 1$ и что для больших n это распределение оказывается приближенно распределением Пуассона со средним значением 1 $(p_n(k) \sim e^{-1}/k!)$.

Для малых значений n удобно оперировать с упомянутыми выше абсолютными числами $D_{n,k} = n! p_n(k)$. Отметим, что $D_{n,k}$ определяет число перестановок из n элементов, в каждой из которых имеется точно k несмещенных элементов. Тогда, согласно (17),

$$D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0} = \binom{n}{k} D_{n-k}. \tag{17a}$$

Полагая $D_{n,0} \equiv D_n$, производящую функцию

$$D_n(t) = \sum_0^n D_{n,k} t^k$$

можно записать в виде полинома Аппеля:

$$D_n(t) = (D+t)^n, \quad D^n \equiv D_n. \tag{18}$$

Это также следует из (5), так как

$$D_n(t) = n! P_n(t) = n! \sum_0^n (t-1)^k / k!$$

и

$$D'_n(t) = n D_{n-1}(t); \tag{19}$$

соотношение (19) является определяющим для полиномов Аппеля (штрих означает производную). Отметим также, что

$$D_n(t) = n D_{n-1}(t) + (t-1)^n. \tag{20}$$

Отсюда при $t = 0$ немедленно вытекает простейшее рекуррентное соотношение для чисел $D_n \equiv D_n(0)$, а именно

$$D_n = n D_{n-1} + (-1)^n. \tag{21}$$

Ввиду аналогии между этим соотношением и соответствующим соотношением для факториалов Уитворт и другие называют числа D_n субфакториалами. Следует также отметить, что, используя (16) [или итерируя (21)], можно прийти к соотношению

$$D_n = \sum_0^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! = (E-1)^n 0! = \Delta^n 0!, \tag{22}$$

где E и Δ — конечно-разностные операторы. Сопоставлением этого результата с соотношением $n! = E^n 0!$ можно оправдать введение термина «субфакториал».

Числа $D_{n,k}$ для $n = 0(1)10$, $k = 0(1)n$ даны в табл. 1 настоящей главы.

Полученные выше результаты могут быть доказаны различными путями с использованием прямых методов (как это обычно бывает для таких простых задач). Во-первых, (17а) следует из того обстоятельства, что совпадения по k позициям могут быть реализованы при $\binom{n}{k}$ выборах, причем при каждом из таких выборов число перестановок без совпадений из оставшихся $n-k$ элементов составит, по самому определению, $D_{n-k,0}$. Соотношение (18) вытекает отсюда так же, как и ранее. Далее, так как

$$n! = \sum_{0}^{n} D_{n,\,k} = \sum \binom{n}{k} D_{n-k} = (D+1)^n, \quad D^k \equiv D_k,$$

то отсюда следует, что

$$\exp u\,(D+1) = (1-u)^{-1} \tag{23}$$

или

$$(1-u) \exp uD = e^{-u},$$

откуда приравниванием коэффициентов при $u^n/n!$ получаем (21), а представив выражение

$$\exp uD = e^{-u}\,(1-u)^{-1}$$

в виде ряда, получим (22).

Эйлер указывает следующий способ отыскания числа D_n перестановок из n элементов, в каждой из которых все элементы смещены. Первая позиция может быть занята любым из элементов, за исключением 1, т. е. доступна любому из $n-1$ элементов. Предположим, что первую позицию занял элемент k $(k \neq 1)$. Тогда перестановки из всех оставшихся элементов распадаются на два класса в зависимости от того, занимает или не занимает 1 позицию k. Число перестановок, в которых 1 занимает k-ю позицию, равно числу перестановок из $n-2$ элементов, в которых все элементы смещены, т. е. числу D_{n-2}. Если же 1 не занимает k-ю позицию, то допустимыми являются перестановки из элементов $1, 2, \ldots, (k-1)(k+1), \ldots, n$, располагающихся в позициях от 2 до n, при условии, что 1 не занимает k-й позиции и что каждый из остальных элементов не занимает собственной позиции. Однако число таких перестановок совпадает с числом перестановок из $n-1$ элементов от 2 до n, в которых каждый элемент смещен, т. е. равно числу D_{n-1}. Следовательно,

$$D_n = (n-1)\,(D_{n-1} + D_{n-2}). \tag{24}$$

Последнее можно переписать в виде

$$D_n - (n)\,D_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)\,D_{n-2}), \tag{24a}$$

откуда путем итерации получаем (21), так как $D_2 = 1$. Отметим, что $n!$ также удовлетворяет рекуррентному соотношению (24). Этот факт — еще одна формальная аналогия между величинами D_n и $n!$

Переходя к перечислению перестановок в соответствии с их рангом, отметим, во-первых, уже упоминавшуюся выше симметрию этого свойства. Поэтому относительное число s_k [из равенства (14)] перестановок, в которых каждый из заданных k элементов остается в своей собственной позиции, равно

$$s_k=\frac{(n-k)!}{n!}.$$

Следовательно, используя соотношение (14), находим

$$r(j)=s_1-(j-1)s_2+\binom{j-1}{2}s_3-\dots+(-1)^{j-1}s_j=$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_0^{j-1}(-1)^k\binom{j-1}{k}(n-1-k)!,\quad 0<j<n+1, \tag{25}$$

и

$$r(n+1)=(1-s)^n=\sum_0^n\binom{n}{k}(-1)^k s_k=$$

$$=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{D_n}{n!}. \tag{26}$$

Соотношение (25) можно записать короче в конечно-разностной форме; а именно так как $(n-1-k)!=E^{j-1-k}(n-j)!$, то

$$r(j)=\frac{\Delta^{j-1}(n-j)!}{n!},\quad 0<j<n+1. \tag{25a}$$

Абсолютные числа определяются из соотношений

$$R_n(j)=\Delta^{j-1}(n-j)!,\quad j=1,\ 2,\ \dots,\ n, \tag{27}$$

$$R_n(n+1)=D_n=\Delta^n 0!. \tag{28}$$

Заметим, что $R_n(1)=(n-1)!$. Из (27) вытекает следующее рекуррентное соотношение:

$$R_n(j)=(E-1)^{j-1}E^{n-j}0!=(E-1)^{j-2}E^{n+1-j}0!-(E-1)^{j-2}E^{n-j}0!=$$

$$=R_n(j-1)-R_{n-1}(j-1),\quad 1<j<n+1. \tag{29}$$

Чтобы не принять по ошибке $R_n(j)$ за значение обычной производящей функции, изменим обозначения, положив $R_n(j)=R_{nj}$, и рассмотрим выражение

$$R_n(t)=R_{n1}t+R_{n2}t^2+\dots+R_{n,\,n+1}t^{n+1}.$$

Используя (29) и то обстоятельство, что $R_{nn}=D_{n-1}$, найдем, что

$$(1-t)R_n(t)=t\,[(n-1)!-R_{n-1}(t)]+D_nt^{n+1}(1-t). \tag{30}$$

При $t=1$ это дает проверку $R_{n-1}(1)=(n-1)!$, а дифференцирование показывает, что

$$R'_{n-1}(1)=n!-D_n$$

(штрих означает производную). Следовательно, среднее значение ранга перестановок из n элементов равно

$$E[r(j)] = \frac{R'_n(1)}{n!} = n + 1 - \frac{D_{n+1}}{n!} \approx (n+1)(1-e^{-1}). \qquad (31)$$

Этот результат получен Фреше в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тушар (Touchard J.), Remarques sur les probabilités totales et sur le problème des rencontres, *Ann. Soc. Sci., Bruxelles*, **A 53** (1933), 126—134.
2. Уитни (Whitney H.), A logical expansion in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (1932), 572—579.
3. Фреше (Frechet M.), Les probabilités associées à un system d'evénements compatibles et dépendants, Part I, Événements en nombre fini fixe, Paris, 1940.
4. Фреше (Frechet M.), Les probabilités associées à un systém d'événements compatibles et dépendants, Part II, Cas particuliers et applications, Paris, 1943.

Задачи

1. Показать, что число целых чисел, меньших или равных N, не делящихся на 2, 3, 5, 7, равно

$$N - \sum [N/i] + \sum [N/ij] - \sum [N/ijk] + \sum [N/ijkl],$$

где $[N/i]$ — наибольшее из целых чисел не превосходящих N/i, а суммы берутся по всем заданным четырем числам, по всем различным парам из этих чисел и т. д. Показать, что если $N = 210n$, то искомое число равно $48n$.

2. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — простые числа, не превосходящие $\sqrt{N}$. Показать, что число простых чисел, больших p_r, но не превосходящих N, равно

$$N - 1 - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^r S_r,$$

где

$$S_k = \sum [N/p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}],$$

и сумма берется по всем возможным $\binom{r}{k}$ наборам показателей $a_1, a_2, \ldots, a_r$, в каждом из которых ровно k из показателей равны 1, а остальные — нулю.

3. Показать, что $\varphi(n)$, т. е. число целых положительных чисел, меньших чем n и взаимно простых с n (функция Эйлера), равно

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots,$$

где p_1, p_2, ... — различные простые делители n. Проверить следующую таблицу [$\varphi(1)=1$ по определению]:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

4. Из (1c) для независимых и равновероятных (с вероятностью p) событий $a_1, \ldots, a_n$ следует, что $P(a_1'a_2'\ldots a_n')=(1-p)^n$, а, значит, $S_k=\binom{n}{k}p^k$. Показать, что

$$r(k)=p(k)+p(k+1)+\ldots+p(n)=$$

$$=S^k(1+S)^{-k}=n\binom{n-1}{k-1}\sum_0^{n-k}(-1)^j\binom{n-k}{j}\frac{p^{k+j}}{k+j}=$$

$$=n\binom{n-1}{k-1}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx, \qquad S^j\equiv S_j.$$

5. Показать, что для независимых событий задачи 4 переменный ранг $r_{n,j}$ находится по формулам

$$r_{n,j}=pq^{j-1}, \qquad j<n+1,$$

$$r_{n,n+1}=q^n,$$

где $q=1-p$. Показать, что производящая функция и среднее значение равны соответственно

$$r_n(t)=[pt+(1-t)(qt)^{n+1}](1-qt)^{-1},$$

$$\bar{r}_{n,j}=(1-q^{n+1})/p.$$

6. (a) Показать, что из соотношений (18) и (23)

$$D_n(t)=(D+t)^n,$$

$$\exp u(D+1)=(1-u)^{-1}, \qquad D^n\equiv D_n,$$

следует, что

$$\exp uD(t)=(1-u)^{-1}\exp u(t-1), \qquad D^n(t)\equiv D_n(t).$$

(b) Обращая последнее соотношение, показать, что

$$n!=\sum_0^n\binom{n}{k}(1-t)^k D_{n-k}(t),$$

и убедиться, используя полученное, что $D_0(t)=1$, $D_1(t)=t$, $D_2(t)=1+t^2$.

c) Указать для $n=3$ и 4 все перестановки, перечисляемые для всех k числом $D_{n,k}$.

(d) Используя (20) или иным путем, вывести рекуррентную формулу:

$$D_{n+1}(t) = (n+t)D_n(t) + n(1-t)D_{n-1}(t).$$

7. Показать, что для ранговых чисел $R_n(j) \equiv R_{nj}$ из задачи о встречах

$$R_{nj} = D^{j-1}(D+1)^{n-j}, \quad j < n+1, \quad D^k \equiv D_k,$$
$$R_{nj} = (n-j)R_{n-1,\, j} + (j-1)R_{n-1,\, j-1}, \quad j < n,$$
$$R_n(t) = nR_{n-1}(t) - t(1-t)[R'_{n-1}(t) + (-1)^n t^{n-1}]$$

(штрих означает производную).

8. Пусть (p_k) — последовательность вероятностей, а (B_k) — последовательность ее биномиальных моментов. Показать, что

$$p_1 + p_3 + \ldots + p_{2k+1} + \ldots = B_1 - 2B_2 + \ldots + (-2)^{k-1}B_k + \ldots,$$
$$\ldots + p_2 + p_3 + p_5 + p_7 + \ldots = B_2 - 2B_3 + 2B_4 + B_5 -$$
$$- 11B_6 + 36B_7 - 92B_8 + \ldots .$$

В первый ряд входят p_k со всеми нечетными, а во второй — со всеми простыми индексами (см. Тушар [1]).

9. *Обобщение задачи о встречах.*

(a) Рассмотрим все $n!$ перестановок из n элементов. Можно составить $n!^m$ различных «упорядоченных» наборов из m перестановок. Показать, что число таких наборов, в которых при каждой перестановке элементов ни один элемент не сохраняет своей позиции, равно $\Delta^n 0!^m$, т. е.

$$\sum \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)!^m. \qquad \text{(Лаплас)}$$

(b) Пусть p_k есть число наборов, в каждом из которых при любой перестановке набора k его элементов остаются на месте. Показать, что

$$p_k = \binom{n}{k} \Delta^{n-k} 0!^m,$$
$$P(t) = \sum p_k t^k = (\Delta + t)^n 0!^m.$$

(c) Пусть $D_n(m) = \Delta^n 0!^m$. Показать, что

$$D_n(m) = n \sum_{0}^{m-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k (n-k)^{m-1} D_{n-1-k}(m) + (-1)^n.$$

и проверить последний результат с помощью таблицы

n	0	1	2	3	4	5
$D_n(1)$	1	0	1	2	9	44
$D_n(2)$	1	0	3	26	453	11844
$D_n(3)$	1	0	7	194	13005	1660964

(d) Используя обозначения (c) и соотношения

$$n!^m = \sum \binom{n}{k} D_{n-k}(m),$$

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p, \quad \mathrm{mod}\, p,$$

показать, что для простого числа p

$$D_{n+p}(m) \equiv -D_n(m) \,\mathrm{mod}\, p,$$

$$D_{n+2p}(m) \equiv D_n(m) \quad \mathrm{mod}\, p.$$

(Вычеты по $\mathrm{mod}\, p$ повторяются с периодом $2p$.)

10. *Лотерея.* Из урны, содержащей n различных шаров, одновременно извлекается по m шаров. Показать, что при d извлечениях вероятность того, что каждый шар будет вынут хотя бы однажды, составит

$$1 - na_1^d + \binom{n}{2} a_2^d - \ldots + (-1)^n a_n^d,$$

где

$$a_k \equiv a_k(n, m) = \binom{n-k}{m} \Big/ \binom{n}{m}.$$

11. Показать, что для двухиндексной **последовательности** вероятностей p_{jk}, $j = 0, 1, \ldots, k = 0, 1, \ldots,$ **с вероятностной** производящей функцией

$$P(t, u) = \sum_{j,k} p_{jk} t^j u^k$$

и биномиальных моментов

$$B_{r,s} = \sum_{j,k} \binom{r}{j} \binom{k}{s} p_{jk}$$

производящая функция $B(t, u)$ биномиальных **моментов окажется равной**

$$B(t, u) = P(1+t, 1+u),$$

так что

$$p_{jk} = \sum_{r,\,s} (-1)^{r+s} \binom{j+r}{r} \binom{k+s}{s} B_{j+r,\,k+s}.$$

Таблица 1

Числа встреч $D_{n,\,k}$

k n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	1	0	1								
3	2	3	0	1							
4	9	8	6	0	1						
5	44	45	20	10	0	1					
6	265	264	135	40	15	0	1				
7	1854	1855	924	315	70	21	0	1			
8	14833	14832	7420	2464	630	112	28	0	1		
9	133496	133497	66744	22260	5544	1134	168	36	0	1	
10	1334961	1334960	667485	222480	55650	11088	1890	240	45	0	1

Глава 4

ЦИКЛЫ ПЕРЕСТАНОВОК

1. Введение

К понятию перестановки можно прийти двумя путями: 1) рассматривая ее как упорядоченную совокупность данных объектов (как в гл. 1) или 2) как нарушение стандартного порядка, называемого обычно натуральным (алфавитным или числовым), как в настоящей главе. Эти два пути связаны между собой подобно тому, как связаны существительное и глагол, или же как объект и оператор. Второй путь обычно используется при изучении перестановок в теории групп.

Для полного представления о перестановке перенумерованных элементов как об операторе вводится следующее обозначение:

$$\downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

в котором стрелка указывает направление операции; первая строка указывает исходный объект, а вторая — результат. Это обозначение можно упростить, сохранив только вторую строку (результат), если условиться, что исходный объект во всех случаях один и то же и направление стрелки неизменно. Однако больший интерес для наших последующих рассмотрений представляет иной тип «однострочной» записи перестановки, основанный на использовании циклов. В этих обозначениях приведенная выше перестановка запишется в виде

$$(125)\ (34).$$

Это означает, что данная операция переводит 1 в 2, 2 в 5, 5 в 1 и 3 в 4, а 4 в 3. По совершенно очевидным соображениям каждая из фигурирующих здесь последовательностей связанных между собой переводов называется циклом.

Ясно, что каждая перестановка может быть представлена в подобном виде, так как цикл, начинающийся с элемента 1, либо включает все элементы, либо некоторые не включает. В последнем случае все рассуждения можно повторить вновь, начиная с любого элемента, не вошедшего в предыдущий цикл. Таким образом, каждый элемент входит в какой-то из циклов. Более того, это представление является однозначным, если условиться не различать такие, например, записи, как (125), (251), (512), обозначающие один и тот же цикл. Принято первую позицию в каждом цикле сохранять за наименьшим из элементов в этот цикл входящим.

Если встать на точку зрения представления перестановок в виде циклов, то возникает много новых комбинаторных задач: сколько перестановок содержит точно k единичных циклов (то есть k элементов сохраняют свои позиции), каково число перестановок, содержащих точно k r-циклов, или содержащих k r- или s-циклов и т. д. Либо, если пренебречь длиной цикла, сколько перестановок содержат k циклов?

Далее, можно предположить, что эти циклы — некоторого частного вида, например,— содержат элементы в определенной последовательности, и повторить для этого случая все поставленные выше вопросы. Подобные проблемы обстоятельно рассмотрены в прекрасной работе Тушара [8].

Полное исследование этого вопроса может потребовать целой книги. Поэтому в настоящей главе все внимание сосредоточивается лишь на наиболее существенных результатах. Вместе с тем читателю напоминается, что в рассматриваемых нами задачах содержатся многие частные результаты.

2. Цикловые классы

Если перестановка содержит k_1 единичных циклов, k_2 двойных циклов и т. д., то ее принято называть перестановкой класса (k_1, k_2 ,...) или, короче, класса (k). Тот же самый смысл имеет обозначение

$$1^{k_1}2^{k_2}\ldots,$$

принятое в теории разбиений. Пусть $C(k_1, k_2, \ldots)$ есть число перестановок из n элементов класса (k). Тогда ясно, что

$$k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n.$$

Спрашивается, какова формула, определяющая общее число таких перестановок?

Для того чтобы найти эту формулу, выберем произвольную перестановку класса (k) и переставим ее элементы всеми возможными $n!$ способами.

Имеются две причины, в силу которых не все получившиеся в результате этой операции перестановки оказываются различными: (1) все циклы, в которые входят одни и те же элементы в одном и том же циклическом порядке, не отличаются друг от друга, (2) относительное расположение циклов в перестановке несущественно. Как уже отмечалось, r-цикл может начинаться с любого из входящих в него r элементов, и, следовательно, имеется возможность [в силу (1)] получить r дубликатов этого цикла. Общее число дубликатов составит

$$1^{k_1}2^{k_2}\dots n^{k_n}.$$

Далее, если число r-циклов равно k_r, то их можно представить $k_r!$ способами, поэтому дубликатов [в силу (2)] окажется

$$k_1!k_2!\dots k_n!.$$

Следовательно,

$$C(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{1^{k_1}k_1!2^{k_2}k_2!\dots n^{k_n}k_n!}, \tag{1}$$

где $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$.

Пример 1. Шесть перестановок из трех элементов распадаются на цикловые классы следующим образом:

Класс	Перестановки	Число
(001)	(123), (132)	2
(110)	(12) (3); (13) (2), (1) (23)	3
(300)	(1) (2) (3)	1

В принятых в теории разбиений обозначениях эти три класса являются соответственно классами 3, 21, 1^3.

Пример 2. Число перестановок класса n (в обозначениях теории разбиений), для которых $k_n = 1$, $k_r = 0$, $r \neq n$, дается формулой

$$C(00\dots01) = n!/n = (n-1)!.$$

Эта формула проверяется с помощью следующего соображения: в n-цикле первым элементом по условию является единица, а для расстановки оставшихся $n-1$ элементов существует $(n-1)!$ возможностей.

Далее, единственная перестановка класса 1^n совпадает с тождественной перестановкой (в которой не переставляется ни один элемент).

Производящая функция чисел $C(k_1, k_2, \dots, k_n)$ должна иметь вид многочлена от многих переменных, так как n видов циклов должны быть независимыми. Этот факт выражается соотношением

$$C_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum C(k_1, k_2, \dots, k_n)\, t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n}.$$

Следовательно, с учетом (1)

$$C_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum \frac{n!}{k_1!\dots k_n!}\left(\frac{t_1}{1}\right)^{k_1}\left(\frac{t_2}{2}\right)^{k_2}\dots\left(\frac{t_n}{n}\right)^{k_n}. \tag{2}$$

Сумма (2) берется по всем неотрицательным целым числам от k_1 до k_n таким, что $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$, или, что то же самое, по всем разбиениям числа n. Функция $C_n(t_1, \dots, t_n)$ называется *цикловым индикатором* (указателем) симметрической группы.

Для первых значений n имеем [ради краткости $C_n(t_1, \dots, t_n)$ обозначено через C_n]

$$C_1 = t_1,$$

$$C_2 = t_1^2 + t_2,$$

$$C_3 = t_1^3 + 3t_1t_2 + 2t_3,$$
$$C_4 = t_1^4 + 6t_1^2t_2 + 3t_2^2 + 8t_1t_3 + 6t_4,$$

при этом удобно принять $C_0 = 1$. В табл. 1 заданы C_n для $n = 1\,(1)\,9$.

Из сопоставления соотношений (2) и (2.46) следует, что

$$C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = A_n(1;\, t_1, t_2, 2!t_3, \ldots, (n-1)!\,t_n) = \\ = Y_n(t_1, t_2, 2!t_3, \ldots, (n-1)!t_n). \qquad (3)$$

Последнее выражение является следствием соотношения (2.42а) при соответствующем изменении буквенных обозначений. В силу (2.45), это то же самое, что и основное порождающее тождество:

$$\exp uC = \sum_0^\infty C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)u^n/n! = \exp(ut_1 + u^2t_2/2 + u^3t_3/3 + \ldots), \qquad (3а)$$

весьма удобное для дальнейшей работы. Последующие свойства C_n могут быть найдены путем специализации результатов из гл. 2. Чтобы обеспечить читателю возможность контроля, приводим здесь некоторые из этих C_n.

Таблица 1

	Цикловой индикатор $C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$
C_1	$t_1,$
C_2	$t_1^2+t_2,$
C_3	$t_1^3+3t_1t_2+2t_3,$
C_4	$t_1^4+6t_1^2t_2+3t_2^2+8t_1t_3+6t_4,$
C_5	$t_1^5+10t_1^3t_2+15t_1t_2^2+20t_1^2t_3+20t_2t_3+30t_1t_4+24t_5,$
C_6	$t_1^6+15t_1^4t_2+45t_1^2t_2^2+40t_1^3t_3+15t_2^3+120t_1t_2t_3+90t_1^2t_4+40t_3^2+90t_2t_4+$ $+144t_1t_5+120t_6,$
C_7	$t_1^7+21t_1^5t_2+105t_1^3t_2^2+70t_1^4t_3+105t_1t_2^3+420t_1^2t_2t_3+210t_1^3t_4+210t_2^2t_3+$ $+280t_1t_3^2+630t_1t_2t_4+504t_1^2t_5+420t_3t_4+504t_2t_5+840t_1t_6+720t_7,$
C_8	$t_1^8+28t_1^6t_2+210t_1^4t_2^2+112t_1^5t_3+420t_1^2t_2^3+1120t_1^3t_2t_3+420t_1^4t_4+105t_2^4+$ $1680t_1t_2^2t_3+1120t_1^2t_3^2+2520t_1^2t_2t_4+1344t_1^3t_5+1120t_2t_3^2+1260t_2^2t_4+$ $+3360t_1t_3t_4+4032t_1t_2t_5+3360t_1^2t_6+1260t_4^2+2688t_3t_5+$ $3360t_2t_6+5760t_1t_7+5040t_8,$
C_9	$t_1^9+36t_1^7t_2+378t_2^5t_2^2+168t_1^6t_3+1260t_1^3t_2^3+2520t_1^4t_2t_3+756t_1^5t_4+$ $+945t_1t_2^4+7560t_1^2t_2^2t_3+3360t_1^3t_3^2+7560t_1^3t_2t_4+3024t_1^4t^5+$ $+2520t_2^3t_3+10080t_1t_2t_3^2+11340t_1t_2^2t_4+15120t_1^2t_3t_4+18144t_1^2t_2t_5+$ $+10080t_1^3t_6+2240t_3^3+15120t_2t_3t_4+9072t_2^2t_5+11340t_1t_4^2+$ $+24192t_1t_3t_5+30240t_1t_2t_6+25920t_1^2t^7+18144t_4t_5+20160t_3t_6+$ $+25920t_2t_7+45360t_1t_8+40320t_9.$

Отметим, во-первых, что каждая перестановка относится к некоторому цикловому классу, поэтому сумма всех числовых коэффициентов в выражении для C_n равна $n!$, т. е.

$$C_n(1,\ 1,\ \ldots,\ 1) = n!. \tag{4}$$

Это согласуется с (3а), так как

$$\exp(u + u^2/2 + u^3/3 + \ldots) = \exp\log(1-u)^{-1} =$$
$$= (1-u)^{-1} = 1 + u + u^2 + \ldots.$$

Следует отметить, что ввиду (2) соотношение (4) можно записать также в виде известного тождества Коши:

$$\sum \frac{1}{1^{k_1}k_1!\, 2^{k_2}k_2! \ldots n^{k_n}k_n!} = 1.$$

Далее, из уравнений (2.44) и (3), или путем дифференцирования по u соотношения (3а), имеем (аргументы всех C не указаны)

$$C_{n+1} = \sum_0^n (n)_k\, t_{k+1} C_{n-k}. \tag{5}$$

Соотношение (5) можно проверить, используя постепенно уже известное соотношение (2) или табл. 1. Дополнительно приведем для примера

$$C_5 = t_1C_4 + 4t_2C_3 + 12t_3C_2 + 24t_4C_1 + 24t_5C_0 =$$
$$= t_1^5 + 10t_1^3t_2 + 15t_1t_2^2 + 20t_1^2t_3 + 20t_2t_3 + 30t_1t_4 + 24t_5.$$

Наконец, для последующих проверок с помощью табл. 1 отметим, что

$$r\frac{d}{dt_r}(\exp uC) = u^r \exp uC$$

и, следовательно,

$$r\frac{dC_n}{dt_r} = (n)_r C_{n-r}. \tag{6}$$

Так, например,

$$\frac{dC_5}{dt_1} = 5t_1^4 + 30t_1^2t_2 + 15t_2^2 + 40t_1t_3 + 30t_4 = 5C_4,$$

$$\frac{dC_n}{dt_n} = (n-1)!,$$

$$\frac{dC_n}{dt_{n-1}} = n(n-2)!\, t_1.$$

3. Перестановки с заданным числом циклов

Каково число перестановок, состоящих из k циклов (без учета их длины)? Ответ на поставленный вопрос можно получить из предыдущих результатов. А именно если все t_r приравнять t, то придем к производящей функции:

$$C_n(t, t, \ldots, t) \equiv c_n(t).$$

Следовательно, из (3а) имеем

$$\exp uc(t) = \exp t(u + u^2/2 + u^3/3 + \ldots) = \exp t \log(1-u)^{-1} =$$

$$= (1-u)^{-t} = 1 + \sum_{1}^{\infty} t(t+1)\ldots(t+n-1)\frac{u^n}{n!}, \qquad (7)$$

а потому $c_0(t) = 1$ и

$$c_n(t) = t(t+1)\ldots(t+n-1), \quad n > 0. \qquad (8)$$

Это выражение является производящей функцией для абсолютных значений чисел Стирлинга первого рода $(-1)^{k+n}s(n, k)$ (разд. 2.7). Так что если

$$c_n(t) = \sum_{0}^{n} c(n, k)t^k,$$

то

$$c(n, k) = (-1)^{k+n}s(n, k). \qquad (9)$$

Это и есть искомое число. Полученный результат можно проверить, если использовать прямые методы подсчета.

Рассмотрим перестановки из n элементов с k циклами [число таких перестановок равно $c(n, k)$], согласно положению последнего элемента n. Элемент n либо образует, либо не образует единичный цикл. Если элемент n образует в перестановке единичный цикл, то этой перестановке можно сопоставить перестановку из $n-1$ элементов с $k-1$ циклами. Число этих последних перестановок равно $c(n-1, k-1)$. Если элемент n не образует единичного цикла, то число искомых перестановок равно числу способов, с помощью которых элемент n может быть включен в подстановки из $n-1$ элементов с k циклами каждая, без образования нового цикла. Это число равно $n-1$, так как в каждом цикле длины r имеется точно r возможных мест для включения элемента n (напомним, что первое положение исключается, так как n — наибольший элемент), и, по предположению, сумма длин циклов равна $n-1$. Следовательно,

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k). \qquad (10)$$

Это соответствует соотношению между производящими функциями

$$c_n(t) = (t+n-1)\,c_{n-1}(t) \tag{11}$$

и в силу $c_1(t)=t$, как и прежде,

$$c_n(t) = t\,(t+1)\ldots(t+n-1).$$

Естественно, что рекуррентное соотношение (10) не противоречит соотношению (2.35).

Теперь рассмотрим ту же самую задачу как вероятностную. Отношение $c(n,\ k)/n!$ является вероятностью того, что выбранная наугад подстановка содержит k циклов. Следовательно, производящей функцией для вероятностей служит $c_n(t)/n!$, а производящей функцией факториальных моментов или производящей функцией биномиальных моментов, согласно разд. 2.6, является $c_n(1+t)/n!$ Однако, в силу соотношения (8),

$$c_n(1+t) = t^{-1}c_{n+1}(t)$$

и k-е моменты равны соответственно

$$(m)_k = k!\,B_k = k!\,c\,(n+1,\ k+1)/n!. \tag{12}$$

Для $k=0$ и 1 выражение (12) имеет вид

$$m_0 = B_0 = c\,(n+1,\ 1)/n! = 1,$$

$$m_1 = B_1 = c\,(n+1{,}2)/n! = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\,.$$

Отметим, что среднее число m_1 циклов близко к $\log n$ для больших значений n; поэтому средняя длина циклов близка к $n/\log n$.

Для определения моментов высших порядков легче пользоваться рекуррентными соотношениями относительно n. При этом удобнее (исключительно с точки зрения обозначений) работать с биномиальными моментами.

Обозначим через $B_k(n)$ k-й биномиальный момент и через

$$B(t,\ n) = \sum B_k(n)\,t^k = c_n(1+t)/n!$$

его производящую функцию. Затем, согласно (11),

$$B(t,\ n) = (1+t/n)\,B(t,\ n-1) \tag{13}$$

и

$$B_k(n) = B_k(n-1) + n^{-1}B_{k-1}(n-1). \tag{14}$$

Это рекуррентное уравнение можно решить для последовательных значений k. В силу того что $B_0(n)=1$ и $B_1(1)=1$, имеем

$$B_1(n) = B_1(n-1) + n^{-1} = B_1(n-2) + (n-1)^{-1} + n^{-1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\,.$$

Далее, из соотношения для дисперсии $V(n)$, а именно

$$V(n) = 2B_2(n) + B_1(n) - B_1^2(n),$$

и для случаев $k = 1,2$ из (14) следует, что

$$\begin{aligned} V(n) &= V(n-1) + (n-1)/n^2 = \\ &= V(n-2) + (n-2)/(n-1)^2 + (n-1)/n^2 = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \ldots + \left(\frac{n-1}{n^2}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Эта величина для больших значений n также близка к $\log n$. Оба эти результата согласуются с результатами, полученными совершенно другим путем Феллером [6, стр. 205 и след.]. Читателю рекомендуется сравнить эти результаты.

4. Перестановки без единичных циклов

Каково число перестановок из n элементов, каждая из которых состоит из k циклов, отличных от единичных?

Ясно, что ответ на этот вопрос по самому определению функции C_n дается коэффициентом при t^k в выражении для $C_n(0, t, \ldots, t)$, или, для краткости, $d_n(t)$. На основании соотношения (3а)

$$\exp ud(t) = \exp t(u^2/2 + u^3/3 + \ldots) = (1-u)^{-t} \exp(-tu), \tag{16}$$

откуда, сравнивая с (7), получаем

$$d_n(t) = \sum_0^n \binom{n}{k} c_{n-k}(t)(-t)^k, \tag{17}$$

где $c_0(t) = 1$, $c_n(t) = t(t+1)\ldots(t+n-1)$, $n > 0$, как и в (8).

Тогда если

$$d_n(t) = \sum d(n, k)t^k,$$

то соотношением для коэффициентов, вытекающим из (17), окажется следующее:

$$d(n, k) = \sum_0^n \binom{n}{j}(-1)^j c(n-j, k-j). \tag{18}$$

Ввиду (18) числа $d(n, k)$ называются *присоединенными числами Стирлинга первого рода*. Следует отметить, что соотношением, двойственным соотношению (17), получаемым почленным умножением (16) на e^{tu} и приравниванием коэффициентов при u^n, является

$$c_n(t) = \sum \binom{n}{j} d_{n-j}(t)t^j.$$

Последний результат соответствует любопытному представлению чисел Стирлинга

$$c(n,\ k)=\sum\binom{n}{j}d(n-j,\ k-j). \tag{19}$$

Наконец,

$$d_n(1)=\sum d(n,\ k)=D_n,$$

где D_n — числа из задачи о встречах. Последнее немедленно следует из (16) и соотношения (3.23). В табл. 2 приведены числа $d(n,\ k)$ для $n=0(1)10$.

Теперь полученный ответ формально является полным, однако существуют более простые зависимости. Так путем дифференцирования (16) по u получаем [при обычном условии $d(t)^n\equiv d_n(t)$], что

$$d(t)\exp ud(t)=-t\exp ud(t)+t(1-u)^{-1}\exp ud(t) \tag{20}$$

или

$$(1-u)\,d(t)\exp ud(t)=tu\exp ud(t).$$

Это соответствует соотношению

$$d_{n+1}(t)=nd_n(t)+nt\,d_{n-1}(t), \tag{21}$$

Таблица 2

Присоединенные числа Стирлинга первого рода
$d(n,\ k)$

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	0				
2	0	1				
3	0	2				
4	0	6	3			
5	0	24	20			
6	0	120	130	15		
7	0	720	924	210		
8	0	5040	7308	2380	105	
9	0	40320	64224	26432	2520	
10	0	362880	623376	303660	44100	945

что в свою очередь соответствует простому рекуррентному соотношению

$$d(n+1,\ k)=nd(n,\ k)+nd(n-1,\ k-1), \tag{22}$$

которое можно проверить либо непосредственными рассуждениями, либо используя числа из табл. 2.

Действительно, в $d(n+1,\ k)$ подстановка из $n+1$ элементов, в каждой из которых имеется k циклов, ни один из которых не является единичным, элемент $n+1$ либо входит, либо не входит в некоторый цикл длины 2. Если элемент $n+1$ входит в такой цикл, то, согласно условию упорядочения циклов, он является в цикле последним, а первое место в цикле может занимать любой из остальных n элементов, причем оставшиеся $n-1$ элементов могут распределиться по $k-1$ циклам $d(n-1,\ k-1)$ способами. Общее число таких перестановок составит $nd\ (n-1,\ k-1)$. Если же элемент $n+1$ не входит в цикл длины 2, то он попадет в один из $d(n,\ k)$ k-циклов, включающих n элементов. Последнее может реализоваться n способами. Таким образом мы проверили правильность каждого слагаемого в соотношении (22). Столь же легко решить вопросы о наличии или отсутствии в перестановке циклов с длинами, отличными от единицы. Несомненно, однако, что математические преобразования с целью получения числовых результатов оказываются более пространными и требуют более разработанной системы перечислений. Материал, иллюстрирующий изложенное выше, содержится в задачах.

5. Перечисление по характеристике цикла

В предшествующих рассмотрениях циклы различались только по своей длине (по числу элементов, в них содержащихся). Можно пойти дальше и характеризовать расположение элементов в цикле. Здесь это и сделано с тем единственным ограничением, что характеристика распределения для любого цикла не должна зависеть от конкретного выбора элементов цикла.

В любом конкретном цикле длины r элементы могут быть упорядочены $(r-1)!$ способами, так как, согласно условию, первым в цикле должен быть наименьший элемент. Каждое из этих упорядочений может быть использовано в качестве характеристики цикла и обозначено с помощью переменной $t_{ri}(i=1,\ 2,\ \ldots,\ (r-1)!)$. Цикловой индикатор, учитывающий все упорядочения в цикле, является функцией $N=1+1+2+\ldots+(n-1)!$ переменных и оказывается индикатором, несколько лучшим, чем прежний. Простейшими примерами служат следующие:

$$C_3(t_1,\ t_2,\ t_{31},\ t_{32})=t_1^3+3t_1t_2+t_{31}+t_{32},$$

$$C_4(t_1,\ t_2,\ t_{31},\ t_{32},\ t_{41},\ \ldots,\ t_{46})=$$

$$=t_1^4+6t_1^2t_2+3t_2^2+4t_1(t_{31}+t_{32})+t_{41}+t_{42}+t_{43}+t_{44}+t_{45}+t_{46}.$$

Заметим, что новый индикатор является функцией, симметрической относительно t_{ri} для каждого r, и что можно восстановить прежний индикатор, положив $t_{ri}=t_r$.

Цикловой индикатор для некоторого выбранного упорядочения для каждой длины цикла (причем, конечно, нет необходимости в циклах каждой рассматриваемой длины придерживаться аналогичного упорядочения элементов) получается, если для каждого r все t_{ri}, кроме одного, приравнять нулю. Если это единственное отличное от нуля переменное t_{ri} обозначить через s_r, то цикловой индикатор для упорядоченных циклов можно записать в виде

$$A_n(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sum \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{s_1}{1!}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{s_n}{n!}\right)^{k_n} = $$
$$= C_n(s_1, s_2, s_3/2, \ldots, s_n/(n-1)!). \qquad (23)$$

Как указано в последней строке, (23) получается из соотношения (2) путем подстановки t_r вместо $s_r\,(r-1)!$, причем эта операция оправдана замечаниями, сделанными в конце предыдущего абзаца.

Отметим, что на основании (3)

$$A_n(s_1, s_2, \ldots, s_n) = Y_n(s_1, s_2, \ldots, s_n), \qquad (23а)$$

где Y_n является многочленом Белла (гл. 2). Следовательно, табл. 2.3 (с точностью до обозначений) при всех $f_i=1$ является таблицей для индикатора упорядоченных циклов.

Теперь с помощью циклового индикатора для упорядоченных циклов можно точно так же, как указано выше, перечислить все перестановки с упорядоченными циклами фиксированной характеристики.

Отметим, что соотношением, соответствующим (3а) при $A^n \equiv A_n(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, является

$$\exp uA = \exp(us_1 + u^2 s_2/2! + u^3 s_3/3! + \ldots). \qquad (23в)$$

Для иллюстрации рассмотрим перечисление всех упорядоченных циклов. Энумератором в данном случае является $A_n(s, \ldots, s) \equiv \equiv a_n(s)$; с учетом (23в) имеем

$$\exp ua(s) = \exp s(u + u^2/2! + u^3/3! + \ldots) =$$
$$= \exp s(e^u - 1) = \sum_0^\infty s^k (e^u - 1)^k/k! =$$
$$= \sum_{n=0}^\infty (u^n/n!) \sum_{k=0}^n S(n, k) s^k. \qquad (24)$$

Здесь последний шаг осуществляется на основе задачи 2.14 [где $S(n, k)$ — число Стирлинга второго рода]. Следовательно,

$$a_n(s) = \sum S(n, k) s^k. \qquad (25)$$

Для первых значения n имеем

$$a_0(s) = 1, \quad a_2(s) = s + s^2,$$
$$a_1(s) = s, \quad a_3(s) = s + 3s^2 + s^3.$$

Таблица 3

Присоединенные числа Стирлинга второго рода $b(n, k)$

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	0				
2	0	1				
3	0	1				
4	0	1	3			
5	0	1	10			
6	0	1	25	15		
7	0	1	56	105		
8	0	1	119	490	105	
9	0	1	246	1918	1260	
10	0	1	501	6825	9450	945

Этот результат можно проверить с помощью табл. 2.3.

Числа Стирлинга $S(n, k)$ определяют перестановки из n элементов с k циклами только в том случае, когда допустимыми являются циклы с фиксированным порядком.

Рассмотренная задача с абстрактной точки зрения идентична задаче распределений, рассматриваемой в следующей главе (разд. 5.6), а именно задаче о числе способов, с помощью которых n различных объектов могут быть размещены по k одинаковым ячейкам при условии, что ни одна из ячеек не окажется пустой. Для этих двух задач получается один и тот же ответ.

Путем дифференцирования (24) по u получаем рекуррентное соотношение для $a_n(s)$:

$$a_{n+1}(s) = s[a(s) + 1]^n, \quad a^n(s) \equiv a_n(s). \tag{26}$$

Опираясь на это рекуррентное соотношение, можно быстро производить фактическое вычисление многочленов, используя только сложение с помощью приведенной ниже треугольной записи (эта идея принадлежит Айткену[1]):

$$a_0(s),$$
$$a_1(s), \quad a_0(s) + a_1(s),$$

---

[1] Aitken A. C., A problem on combinations, *Math. Notes Edinburgh*, **21** (1933), 18—23.

$$
\begin{array}{llll}
a_2(s), & a_1(s)+a_2(s), & a_0(s)+2a_1(s)+a_2(s), & \\
a_3(s), & a_2(s)+a_3(s), & a_1(s)+2a_2(s)+a_3(s), & \\
 & & a_0(s)+3a_1(s)+3a_2(s)+a_3(s). &
\end{array}
$$

Подобное расположение достигается следующим путем: исходные данные в первой колонке, согласно (26), получаются умножением на s величин из крайней правой колонки предшествующей строки. Величина в любой другой строке и колонке является суммой двух величин, стоящих в соседней слева колонке в той же и в предшествующей строках. Такое размещение оказывается даже еще более простым для чисел $a_n \equiv a_n(1)$, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям:

$$a_{n+1}=(a+1)^n, \quad a^k \equiv a_k. \tag{26a}$$

Для перечисления перестановок по числу циклов, **отличных** от единицы, служат функции $A_n(0, s, \ldots, s)=b_n(s)$ и

$$\exp ub(s)=\exp s(e^u-1-u)=\exp u\,[a(s)-s]. \tag{27}$$

Поэтому

$$b_n(s)=\sum \binom{n}{k} a_{n-k}(s)(-s)^k, \tag{28}$$

$$a_n(s)=\sum \binom{n}{k} b_{n-k}(s)\,s^k, \tag{29}$$

откуда следуют соотношения между **коэффициентами** $b(n, k)$ из **равенства**

$$b_n(s)=\sum b(n, k)\,s^k$$

и числами $S(n, k)$, подобные соотношениям между $d(n, k)$ и $c(n, k)$ из разд. 4. Числа $b(n, k)$ могут быть названы *присоединенными числами Стирлинга второго рода.*

Рекуррентным соотношением для $b_n(s)$, соответствующим соотношению (26), является

$$b_{n+1}(s)=s\,[(b(s)+1)^n-b_n(s)], \quad b^k(s) \equiv b_k(s), \tag{30}$$

$b_n(s)$ также легко подсчитать с помощью треугольной записи Айткена. Для чисел $b(n, k)$ более удобным оказывается второе рекуррентное соотношение. Оно вытекает из следующего соотношения между производящими функциями:

$$\left(\frac{\partial}{du}-s\frac{\partial}{\partial s}\right)\exp ub(s)=su\exp ub(s). \tag{31}$$

Следовательно (штрих означает производную),

$$b_{n+1}(s) = sb'_n(s) + snb_{n-1}(s) \tag{32}$$

и

$$b(n+1,\ k) = kb(n,\ k) + nb(n-1,\ k-1). \tag{33}$$

В табл. 3 приведены значения $b(n,\ k)$ для $n = 0(1)10$.

Наконец, следует отметить, что полный цикловой индикатор, содержащий переменные t_{ri} с двойными индексами, может быть использован для получения цикловых индикаторов, отличных от A_n и C_n. Лишь с целью иллюстрации других возможностей следует отметить, что если фиксированный порядок определяется только для двух первых элементов цикла длины r $(r > 2)$, то цикловой индикатор принимает вид

$$A_n^*(q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_n) =$$

$$= \sum \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{q_1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{q_2}{2}\right)^{k_2} \left(\frac{q_3}{3 \cdot 2}\right)^{k_3} \dots \left(\frac{q_n}{n(n-1)}\right)^{k_n} =$$

$$= C_n(q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_n/(n-1)). \tag{34}$$

6. Циклы четных и нечетных перестановок

Перестановка называется четной, если она эквивалентна четному числу транспозиций; в ином случае она называется нечетной. Каждый цикл нечетного порядка соответствует четному числу транспозиций, а циклы четного порядка — нечетному числу транспозиций. Следовательно, класс четных перестановок (знакопеременная группа) состоит из перестановок, имеющих четное число циклов четного порядка, а класс нечетных перестановок состоит из перестановок, имеющих нечетное число циклов четного порядка.

Цикловой индикатор для четных перестановок есть среднее арифметическое индикатора для всех перестановок и такого же индикатора, в котором всем индексам четных циклов приписан отрицательный знак. Это свойство индикатора не зависит от других особенностей, которыми могут обладать эти циклы (то же правило справедливо для C_n, A_n и A_n^*); полезно ввести такие обозначения, которые это подчеркивают. Так, если $C_n^e(t_1, t, \dots, t_n)$ является цикловым индикатором для четных перестановок, независимо от упорядочений внутри циклов, а $C_n^0(t_1, \dots, t_n)$ играет ту же роль для нечетных перестановок, то

$$2C_n^{e}(t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_n) = C_n(t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_n) + C_n(t_1,\ -t_2,\ t_3,\ -t_4,\ \dots), \tag{35}$$

$$2C_n^0(t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_n) = C_n(t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_n) - C_n(t_1,\ -t_2,\ t_3,\ -t_4,\ \dots). \tag{36}$$

Несколько первых значений даются выражениями:

$$C_0^e = 1,\ C_1^e = t_1,\ C_2^e = t_1^2,\ C_3^e = t_1^3 + 2t_3,\ C_4^e = t_1^4 + 3t_2^2 + 8t_1t_3,$$

$$C_0^0 = 0,\ C_1^0 = 0,\ C_2^0 = t_2,\ C_3^0 = 3t_1t_2,\ C_4^0 = 6t_1^2t_2 + 6t_4.$$

Пользуясь этими соотношениями (или соответствующими соотношениями для упорядоченных циклов), любое перечисление, выполненное для всех перестановок, можно произвести только для четных или только для нечетных перестановок. Укажем для примера, что если энумератором для четных и нечетных перестановок по числу циклов являются $c_n^e(t)$ и $c_n^0(t)$, то

$$c_n^e(t) = C_n^e(t, t, \ldots, t),$$
$$c_n^0(t) = C_n^0(t, t, \ldots, t)$$

и из (35) и (36) имеем

$$2 \exp uc^e(t) = (1-u)^{-t} + (1+u)^t, \tag{37}$$

$$2 \exp uc^0(t) = (1-u)^{-t} - (1+u)^t. \tag{38}$$

Отсюда находим, что

$$2c_n^e(t) = t(t+1) \ldots (t+n-1) + t(t-1) \ldots (t-n+1), \tag{39}$$

$$2c_n^0(t) = t(t+1) \ldots (t+n-1) - t(t-1) \ldots (t-n+1). \tag{40}$$

Дальнейшее развитие идей, связанных с этими функциями, можно найти в задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаров В. Л., **О распределении циклов в перестановках**, *ДАН СССР*, 35 (1942), 299—301.
2. Мозер, Вилман (Moser L., Wyman M.), On solutions of $x^d = 1$ in symmetric groups, *Canadian J. of Math.*, 7 (1955), 159—168.
3. Тушар (Touchard J.), Propriétés arithmétiques de certains nombres recurrents, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, A53 (1933), 21—31.
4. Тушар (Touchard J.), Sur les cycles des substitutions, *Acta Math.*, 70 (1939), 243—279.
5. Тушар (Touchard J.), Nombres exponentials et nombres de Bernoulli, *Canadian J. of Math.*, 8 (1956), 305—320.
6. Феллер (Feller W.), An Introduction to Probability Theory and its Applications, New York, 1950.
7. Човла, Херштейн, Мур (Chowla S., Herstein I. N., Moore K.), On recursions connected with symmetric groups I, *Canadian J. of Math.*, 3 (1951), 328—334.
8. Човла, Херштейн, Скотт (Chowla S., Herstein I. N., Scott W. R.), The solutions of $x^d = 1$ in symmetric groups, *Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim*, 25 (1952), 29—31.
9. Якобсталь (Jacobsthal E.), Sur le nombre d'éléments du group symétrique S_n dont l'ordre est un nombre premier, *Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim*, 21 (1949), 49—51.

Задачи

1. Используем сокращенные обозначения из задачи 2.21 и положим цикловые индикаторы $C_n(t_1, \ldots, t_n)$ и $C_n(s_1+t_1, \ldots, s_n+t_n)$ равными соответственно $C_n(t)$ и $C_n(s+t)$. Тогда, согласно задаче 2.21,

$$C_n(s+t) = (C(s)+C(t))^n, \quad C^k(s) = C_k(s_1, \ldots, s_k).$$

Опираясь на этот результат и на соотношение

$$C_n(x, x^2, \ldots, x^n) = n!\, x^n,$$

показать, что справедливы соотношения

$$C_n(1+x, 1+x^2, \ldots, 1+x^n) = n!\,(1+x+\ldots+x^n) = n!\,(1-x^{n+1})/(1-x),$$

$$C_n(1+x+x^2,\ 1+x^2+x^4, \ldots,\ 1+x^n+x^{2n}) = \\ = n!\,\frac{1-x^{n+1}(1+x)+x^{2n+3}}{(1-x)(1-x^2)}.$$

Проверить полученный результат, используя (3a).

2. (a) Показать аналогично задаче 1, что для индикатора $A_n(s_1, \ldots, s_n)$ упорядоченных циклов с учетом

$$A_n(1, 1, \ldots, 1) = a_n(1) = a_n, \\ A_n(x, x^2, \ldots, x^n) = a_n x^n$$

справедливо соотношение

$$A_n(1+x, \ldots, 1+x^n) = (a+ax)^n, \quad a^k \equiv a_k.$$

Обозначив ради краткости $A_n(1+x, \ldots, 1+x^n)$ через $A_n(x)$, проверить (по табл. 2.3) следующие начальные значения:

$$A_0(x) = 1, \qquad A_2(x) = 2+2x+2x^2,$$
$$A_1(x) = 1+x, \qquad A_3(x) = 5+6x+6x^2+5x^3,$$
$$A_4(x) = 15+20x+24x^2+20x^3+15x^4,$$
$$A_5(x) = 52+75x+100x^2+100x^3+75x^4+52x^5.$$

(b) Вывести соотношения (штрих означает производную)

$$A_n'(x) = n(A+x)^{n-1}, \quad A^k(x) = A_k(x) \equiv A_k(1+x, \ldots, 1+x^k),$$
$$A_n(1) = 2(A+1)^{n-1}, \quad A^k \equiv A_k(1),$$
$$A_n'(1) = nA_n(1)/2.$$

3. Показать, что энумераторы $c_n(t)$ перестановок из разд. 3 по числу циклов удовлетворяют сравнению

$$c_{n+m}(t) \equiv c_n(t)\, c_m(t) \pmod{n}.$$

Указание. Использовать рекуррентное соотношение $c_{n+1}(t) = (n+t)\,c_n(t)$ и математическую индукцию. Для $n=p$ (p — простое) более точный результат может быть получен из сравнения — тождества Лагранжа:

$$(t)_p = t\,(t-1)\ldots(t-p+1) \equiv t^p - t \pmod{p}.$$

Этот результат утверждает, что все числа Стирлинга $s(\ ,\,k)$ первого рода делятся на p; исключение составляют числа $s(p,\,p)$, равные единице, и число $s(p,\,1)$, равное $(p-1)!$ и дающее при делении на p в остатке -1. Последний факт известен как теорема Вильсона.

Так как

$$c_p(t) = (-1)^p\,(-t)_p,$$

то из этого следует, что

$$c_p(t) \equiv t^p - 1 \pmod{p}.$$

4. Показать аналогично предыдущему, что для энумератора $d_n(t)$ из разд. 4 справедливо сравнение

$$d_{n+m}(t) \equiv d_n(t)\,d_m(t) \pmod{n},$$

а при p простом — сравнение

$$d_p(t) \equiv -t \pmod{p}.$$

Проверить эти результаты для $p=3$ и 5 с помощью табл. 2.

Указание. Для получения последнего результата использовать (17), сравнение для $c_p(t)$ и

$$(1+t)^p \equiv 1 + t^p \pmod{p}.$$

5. (а) Показать, что для энумераторов $a_n(s)$ перестановок по числу упорядоченных циклов (разд. 5) справедливо соотношение

$$(a(s))_n = a(s)\,(a(s)-1)\ldots(a(s)-n+1) = s^n,\quad d^k(s) \equiv a_k(s).$$

Указание. В соотношении (24) произвести подстановку $t=e^u-1$.

(b) Используя сравнение Лагранжа (из задачи 3) и

$$(t)_{p+k} \equiv (t)_p\,(t)_k \pmod{p},$$

показать, что

$$(t^p - t)\,t^k \equiv \sum_{j=0}^{k} S(k,\,j)\,(t)_{p+j} \pmod{p},$$

где $S(k,\,j)$ — число Стирлинга.

(с) Используя результаты 5(а) и 5(b), получить сравнения

$$a_p(s) \equiv s^p + s \pmod{p},$$

$$a_{p+k}(s) \equiv a_{k+1}(s) + s^p a_k(s) \pmod{p} \qquad \text{(Тушар [3])},$$

а из них при $a_n \equiv a_n(1)$ получить

$$a_p \equiv 2 \pmod p,$$
$$a_{p+k} \equiv a_{k+1} + a_k \pmod p.$$

6. Показать, что для энумераторов $b_n(s)$ (разд. 5) справедливы сравнения

$$(b(s))_n = b(s)(b(s)-1)\ldots(b(s)-n+1), \quad b^k(s) \equiv b_k(s),$$
$$(b(s))_n = (s-\beta(s))^n, \quad \beta^k(s) = s(s+1)\ldots(s+k-1),$$
$$b_p(s) \equiv a_p(s) - s^p \equiv s \pmod p,$$
$$b_{p+k}(s) \equiv b_{k+1}(s) + sb_k(s) \pmod p.$$

7. Из соотношения (29) или иным путем получить соотношение

$$S(n, k) = \sum \binom{n}{j} b(n-j, k-j)$$

или

$$S(n, n-k) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j+k} b(j+k, j).$$

Проверить частные случаи

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2},$$
$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4},$$
$$S(n, n-3) = \binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6}.$$

8. Обозначим через $C(n, r, k)$ число перестановок из n элементов, содержащих k циклов длины r; при этом характер циклов длины, отличной от r, во внимание не принимается. Через $C_n(r, t) = \sum C(n, r, k) t^k$ обозначим соответствующий энумератор. Тогда

$$C_n(r, t) = C_n(1, 1, \ldots, t, 1, \ldots, 1),$$

где $C_n(t_1, \ldots, t_n)$ является цикловым индикатором и t находится в r-й позиции. Доказать, что

$$(1-u)\exp uC(r, t) = \exp(t-1)u^r/r, \quad C^k(r, t) \equiv C_k(r, t),$$
$$C_n(r, t) - nC_{n-1}(r, t) = (t-1)^k n!/r^k k!, \quad n = kr,$$
$$C_n = 0, \quad n \neq kr.$$

Проверить частные случаи, внесенные **в таблицу:**

n	1	2	3	4
$C_n(1, t)$	t	$1+t^2$	$2+3t+t^3$	$9+8t+6t^2+t^4$
$C_n(2, t)$	1	$1+t$	$3+3t$	$15+6t+3t^2$
$C_n(3, t)$	1	2	$4+2t$	$16+8t$

Отметим, что $C_n(1, t) \equiv D_n(t)$ — многочлен числа смещений из разд. 3.5; сравнить с задачей 3.6.

9. (а) Для упрощения задачи 8 обозначим

$$C_{kr}(r, t) = (kr)!\ c_k(r, t)/r^k k!.$$

Вывести рекуррентное соотношение

$$c_k(r, t) = krc_{k-1}(r, t) + (t-1)^k =$$
$$= (kr - 1 + t)\,c_{k-1}(r, t) + (1-t)(k-1)\,rc_{k-2}(r, t).$$

Для $r=1$ $C_k(1, t) = c_k(1, t) = D(t)$; для $r=2$ $c_1(2, t) = 1+t$, $c_2(2, t) = C_4(2, t)/3 = 5+2t+t^2$ (проверить эти значения с помощью таблицы 8).

(b) Проинтегрировав первую форму рекуррентного соотношения для $c_k(r, t)$, показать, что

$$c_k(r, t) = \sum_0^k \binom{k}{j} r^j j!\,(t-1)^{k-j} = (\gamma(r) + t - 1)^k,$$
$$\gamma^j(r) \equiv \gamma_j(r) = r^j j!.$$

Следовательно,

$$c_k(r, 0) = [\gamma(r) - 1]^k$$

и

$$c_k(r, t) = [c(r, 0) + t]^k, \quad c^j(r, 0) \equiv c_j(r, 0).$$

Проверить таблицу

n	0	1	2	3	4	5
$c_n(1, 0)$	1	0	1	2	9	44
$c_n(2, 0)$	1	1	5	29	233	2329
$c_n(3, 0)$	1	2	13	116	1393	20894

(c) вывести формулу

$$C_n(r, t) = \sum_0^m \frac{n!}{j!\,r^j}(t-1)^j, \quad m = [n/r].$$

10. Для проверки результатов, полученных выше для $r=2$, методом включения и исключения показать, что (в обозначениях гл. 3)

$$n!\,S_k=\frac{1}{k!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2k+2}{2}(n-2k)!=n!/2^k k!$$

и, значит,

$$C_n(2,\ t)=\sum_0^m n!\,(t-1)^k/2^k k!,\qquad m=[n/2].$$

Следовательно,

$$C_{2n}(2,\ t)=2nC_{2n-1}(2,\ t)+(t-1)^n(2n)!/2^n n,$$

$$C_{2n+1}(2,\ t)=(2n+1)\,C_{2n}(2,\ t).$$

11. (a) Из первого рекуррентного соотношения задачи 9 (a) вывести соотношение для экспоненциальной производящей функции

$$\exp uc(r,\ t)=ru\exp uc(r,\ t)+\exp u(t-1).$$

Следовательно,

$$\exp u[c(r,\ t)+1-t]=(1-ru)^{-1}$$

и

$$[c(r,\ t)+1-t]^n=r^n n!=\gamma_n(r),$$

где $c^k(r,\ t)\equiv c_k(r,\ t)$ и $\gamma_n(r)$ — как в задаче 9 (b).

(b) Из последнего соотношения вывести, что при p **простом**

$$c_p(r,\ t)+1-t^p\equiv 0\pmod p,$$

$$c_{p+k}(r,\ t)+(1-t^p)\,c_k(r,\ t)\equiv 0,\pmod p,$$

и, в частности,

$$c_p(r,\ 0)+1\equiv 0\pmod p,$$

$$c_{2p+k}(r,\ 0)\equiv c_k(r,\ 0)\qquad\pmod p.$$

Проверить следующую таблицу вычетов ($r=2$):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	
$c_n(2,\ 0)$	1	1	−1	−1	−1	1	1	1	(mod 3)
$c_n(2,\ 0)$	1	1	0	−1	−2	−1	−1	0	(mod 5)

12. Используя соотношение задачи 9 (с), показать, что факториальные моменты распределения $C_n(r, t)/n!$ даются соотношениями

$$(m)_k = r^{-k}, \quad k \leqslant [n/r],$$
$$(m)_k = 0, \quad k > [n/r].$$

Следовательно, это распределение почти пуассоновское со средним значением r^{-1} (см. Гончаров [1]).

13. Обозначим через $C(n, r, s, j, k)$ число перестановок, имеющих j r-циклов и k s-циклов, а их энумератор — через

$$C_n(r, s; t, w) = \sum\sum C(n, r, s, j, k)\, t^j w^k.$$

Тогда

$$C_n(r, s; t, w) = C_n(1, \ldots, t, \ldots, w, \ldots, 1),$$

где функция $C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, находящаяся в правой части, является цикловым индикатором, в котором $t_r = t$, $t_s = w$ и все другие переменные равны 1. Далее, из соотношения 3(а)

$$(1-u)\exp uC(r, s; t, w) = \exp[(t-1)(u^r/r) + (w-1)(u^s/s)].$$

Вывести отсюда рекуррентное соотношение

$$C_n(r, s; t, w) - nC_{n-1}(r, s, t, w) = \sum n!\,(t-1)^j (w-1)^k / r^j j!\, s^k k!,$$

где суммирование по j и k производится по всем таким парам целых чисел, таких, что $rj + sk = n$.

Отметим, что при $w = 1$ получаем знакомое нам соотношение из задачи 8.

14. В условиях задачи 13 вывести соотношение

$$(1-u)C(r, s; t, w)\exp uC(r, s; t, w) =$$
$$= [1 + (t-1)(1-u)\, u^{r-1} + (w-1)\,(1-u)\,u^{s-1}]\exp uC\,(r, s; t, w),$$

где $C^n(r, s; t, w) \equiv C_n(r, s; t, w)$. Отсюда, обозначив, ради краткости, $C_n(r, s; t, w)$ через C_n, вывести рекуррентное соотношение

$$C_{n+1} = (n+1)C_n + (t-1)[(n)_{r-1}B_{n-r+1} - (n)_r C_{n-r}] +$$
$$+ (w-1)[(n)_{s-1}C_{n-s+1} - (n)_s C_{n-s}].$$

Проверить для $r = 1$, $s = 2$ следующую таблицу:

n	0	1	2	3	4
C_n	1	t	t^2+w	$2+3tw+t^3$	$6+8t+3w^2+6wt^2+t^4$

и рекуррентное соотношение $[C_n \equiv C_n(1,\ 2;\ t,\ w)]$

$$C_{n+1} = (n+t)\,C_n + (w-t)\,nC_{n-1} + (1-w)\,n\,(n-1)\,C_{n-2}.$$

15. (a) Показать, что если $C(n,\ r,\ s,\ j,\ k)$ являются числами из задачи 13 и выполнено обычное условие $C^n(r,\ s,\ j,\ k) \equiv C(n,\ r,\ s,\ j,\ k)$, то

$$(1-u)\exp uC(r,\ s,\ j,\ k) = \frac{u^{rj+sk}}{r^j j!\, s^k k!}\exp(-u^r/r - u^s/s).$$

(b) Положим $P(n,\ r,\ s)$ равным числу перестановок, в которых число r-циклов равно числу s-циклов. Тогда

$$P(n,\ r,\ s) = \sum_j C(u,\ r,\ s,\ j,\ j).$$

Используя полученный выше результат, показать, что при

$$P^n(r,\ s) \equiv P(n,\ r,\ s), \quad i = \sqrt{-1},$$

$$(1-u)\exp uP(r,\ s) =$$
$$= J_0\left(2iu^{(r+s)/2}/\sqrt{rs}\right)\exp(-u^r/r - u^s/s)$$ (Тушар [4]).

16. (a) Обозначим через $d_n(t,\ r)$ энумератор перестановок из n элементов по числу циклов, ни один из которых не является r-циклом. Показать, что при $d^n(t,\ r) \equiv d_n(t,\ r)$

$$\exp ud(t,\ r) = e^{-tu^r/r}(1-u)^{-t},$$

$$d_{n+1}(t,\ r) = (n+t)\,d_n(t,\ r) - t\,(n)_{r-1}\,d_{n-r+1}(t) + t\,(n)_r\,d_{n-r}(t,\ r).$$

Отметим, что $d_k(t,\ r) = t\,(t+1)\ \ldots\ (t+k-1),\ k < r,\ d_n(t,\ 1) = d_n(t)$.

(b) Показать, что при $d_n(1,\ r) \equiv d_n(r)$

$$d_n(r) = nd_{n-1}(r) + (-1)^k n!/k!r^k, \quad n = kr,$$
$$d_n(r) = nd_{n-1}(r), \quad n \neq kr.$$

Проверить следующую таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_n(1)$	1	0	1	2	9	44	265	1854	14833
$d_n(2)$	1	1	1	3	15	75	435	3045	24465
$d_n(3)$	1	1	2	4	16	80	520	3640	29120
$d_n(4)$	1	1	2	6	18	90	540	3780	31500

17. (a) Телефонная станция на n абонентов имеет возможность соединять абонентов только попарно (не предусмотрены

контуры, соединяющие несколько абонентов). В этом случае энумератор $T_n(t)$ числа соединений определяется соотношением

$$T_n(t)=C_n(1,\ t,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

где $C_n(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$ — цикловой индикатор. Из уравнения (3а) получаем

$$\exp uT(t)=\exp(u+tu^2/2),\quad T^n(t)\equiv T_n(t).$$

Показать, что

$$T_{n+1}(t)=T_n(t)+ntT_{n-1}(t),$$

и проверить таблицу

n	0	1	2	3	4	5
$T_n(t)$	1	1	$1+t$	$1+3t$	$1+6t+3t^2$	$1+10t+15t^2$

(b) Показать, что если $T_n(t)=\sum T(n,\ k)\,t^k$, то
$T(n,\ k)=n!/k!\,(n-2k)!\,2^k=$

$$=T(n-1,\ k)+(n-1)\,T(n-2,\ k-1).$$

(c) Показать, что если $U(n,\ k)=T(n,\ 0)+T(n,\ 1)+\ldots$
$\ldots+T(n,\ k)$, то

$$U(n,\ k)=U(n-1,\ k)+(n-1)\,U(n-2,\ k-1).$$

(d) Положим $T_n\equiv T_n(1)$; вывести соотношение

$$T_n=T_{n-1}+(n-1)\,T_{n-2}=U(n,\ m),\quad m=[n/2],$$

$$T_n=e^{-1/2}\sum_{k=m}^{\infty}\binom{2k}{n}n!/2^k k!,\quad m=[(n+1)/2]$$

и проверить таблицу

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T_n	1	1	2	4	10	26	76	232	764

Замечание. Полиномы Эрмита $H_n(x)$, определяемые соотношениями $H_0(x)=1$:

$$H_n(x=)2xH_{n-1}(x)-2(n-1)\,H_{n-2}(x),$$

обладают экспоненциальной производящей функцией

$$\exp uH(x) = \exp(-u^2 + 2ux).$$

Следовательно, при $i = \sqrt{-1}$

$$T_n(t) = \left(\frac{\sqrt{t}}{i\sqrt{2}}\right)^n H_n(i/\sqrt{2t})$$

и T_n асимптотически приближается к $(n/e)^{n/2}e^{\sqrt{n}}/e^{1/4}\sqrt{2}$ (ср. с Човла и др. [7]).

18. (a) Обозначим энумератор перестановок из n элементов по числу четных циклов через $e_n(t)$, а энумератор по числу нечетных циклов через $o_n(t)$ [отметим, что эти энумераторы отличаются от энумераторов $c_n^e(t)$ и $c_n^o(t)$ из разд. 6]. Показать, что

$$\exp ue(t) = (1-u^2)^{-t/2}, \qquad e^n(t) \equiv e_n(t),$$
$$\exp uo(t) = (1-u)^{-t/2}(1+u)^{t/2}, \quad o^n(t) \equiv o_n(t).$$

(b) Вывести соотношения:

$$(1+u)^t \exp ue(t) = \exp uo(t),$$
$$(1+u^2)\,e(t) \exp ue(t) = tu \exp ue(t),$$
$$(1-u^2)\,o(t) \exp uo(t) = t \exp uo(t),$$
$$\sum_0^n \binom{n}{k}(t)_k e_{n-k}(t) = o_n(t),$$
$$e_{n+1}(t) = n(n-1+t)\,e_{n-1}(t),$$
$$o_{n+1}(t) = to_n(t) + n(n-1)\,o_{n-1}(t).$$

Для проверки приводим несколько первых значений:

n	0	1	2	3	4	5
$e_n(t)$	1	0	t	0	$6t+3t^2$	0
$o_n(t)$	0	t	t^2	$2t+t^3$	$8t^2+t^4$	$24t+20t^3+t^5$

(c) Обозначим через $e_n = e_n(1)$, $o_n = o_n(1)$ энумераторы для всех перестановок. Доказать, что

$$o_n = e_n + ne_{n-1},$$
$$e_{n+1} = n^2 e_{n-1},$$
$$o_{n+1} = o_n + n(n-1)\,o_{n-1} = no_n + e_n,$$
$$e_{2n} = ((2n)!/2^n n!)^2 = (2n-1)^2 e_{2n-2},$$

$$e_{2n+1}=0,$$
$$o_{2n}=(2n-1)\,o_{2n-1}=e_{2n},$$
$$o_{2n+1}=(2n+1)\,o_{2n}.$$

Проверить эти результаты по таблице

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
e_n	1	0	1	0	9	0	225	0	11025
o_n	0	1	1	3	9	45	225	1575	11025

19. Пусть P — перестановка, а P^k означает k-ю итерацию перестановки P, рассматриваемой как оператор (или как элемент симметрической группы); пусть, далее, 1 означает тождественную перестановку. Тогда для каждого P существует целое число m — порядок P, такое, что $P^m=1$ и $P^x\neq 1$, $x<m$. Если P — цикл длины k, то его порядок равен k; если P состоит из циклов с длинами $k_1, k_2, \ldots$, то его порядок равен наименьшему общему кратному чисел $k_1, k_2, \ldots$. Если $T_n(m)$ означает число перестановок из n элементов, удовлетворяющих соотношению $P^m=1$, тогда каждая перестановка P содержит только циклы, длина которых равна m или одному из делителей m и

$$\exp uT(m)=\exp\sum_{k|m}u^k/k,\qquad T^n(m)\equiv T_n(m),$$

причем k/m означает, что суммирование ведется по всем делителям m, включая 1 и m (ср. с Човла и др. [8]). Показать, что

$$T_{n+1}(m)=\sum_{k|m}(n)_{k-1}T_{n-k+1}(m)$$

и, в частности, при простом p

$$T_{n+1}(p)=T_n(p)+(n)_{p-1}T_{n-p+1}(p).$$

Отметим, что $T_n(p)=1$, $n<p$, тогда как $T_p(p)=1+(p-1)!\equiv$ $\equiv 0 \pmod p$. Показать, что

$$T_n(p)\equiv 0 \pmod p,\quad n>p,$$
$$T_{n+q}(p)\equiv T_n(p)\,T_q(p) \pmod q,$$
$$T_{n+q}(m)\equiv T_n(m)\,T_q(m) \pmod q.$$

(Для особого случая $p=m=2$ сравнить последние два соотношения с результатами Мозера и Вимана [2].)

20. (a) Показать, что для энумераторов $c^e_n(t)$ и $c^o_n(t)$ четных и нечетных перестановок по числу циклов (как в разд. 6) справедливы соотношения

$$(1-u^2)\,c^e(t)\exp uc^e(t) = t\exp uc^e(t) + tu\exp uc^o(t),$$
$$(1-u^2)\,c^o(t)\exp uc^o(t) = tu\exp uc^e(t) + t\exp uc^o(t),$$

следовательно, соотношения

$$c^e(t)\exp uc^e(t) - uc^o(t)\exp uc^o(t) = t\exp uc^e(t),$$
$$-uc^e(t)\exp uc^e(t) + c^o(t)\exp uc^o(t) = t\exp uc^o(t)$$

и

$$c^e_{n+1}(t) = tc^e_n(t) + nc^o_n(t),$$
$$c^o_{n+1}(t) = nc^e_n(t) + tc^o_n(t),$$

симметричные по этим двум энумераторам. Исключив один из этих энумераторов, получить «чисто» рекуррентное соотношение

$$nx_{n+2} - (2n+1)\,tx_{n+1} + (n+1)(t^2-n^2)\,x_n = 0,$$

в котором $x_n \equiv c^e_n(t)$ или $c^o_n(t)$. Проверить эти соотношения по таблице

n	0	1	2	3	4	5
$c^e_n(t)$	1	t	t^2	$2t+t^3$	$11t^2+t^4$	$24t+35t^3+t^5$
$c^o_n(t)$	0	0	t	$3t^2$	$6t+6t^3$	$50t^2+10t^4$

(b) Показать, что числа $c^e_n(1) = c^e_n$; $c^o_n(1) = c^o_n$ удовлетворяют соотношениям

$$(1-u)\exp uc^e = 1 - u^2/2,$$
$$(1-u)\exp uc^o = u^2/2$$

и, следовательно, имеют значения

$$c^e_0 = c^e_1 = 1, \quad c^e_2 = 1, \quad c^e_n = nc^e_{n-1} = n!/2, \quad n > 2,$$
$$c^o_0 = c^o_1 = 0, \quad c^o_2 = 1, \quad c^o_n = nc^o_{n-1} = n!/2, \quad n > 2,$$

что проверяется соотношениями (39) и (40). Величина c^e_n определяет число членов с положительным знаком в определителе n-го порядка. Этот результат содержится в решении одной из задач Пойа и Сегё¹).

---

¹) Pólya G., Szegö G., Aufgabe und Lehrsätze aus der Analysis, v. II, problem VII, New York, 1945.

21. (а) Пусть $d_n^e(t)$, $d_n^o(t)$ являются энумераторами по числу отличных от единичного циклов четных и нечетных перестановок. Доказать, что

$$2\exp ud^e(t) = [(1-u)^{-t} + (1+u)^t]\exp(-tu),$$
$$2\exp ud^o(t) = [(1-u)^{-t} - (1+u)^t]\exp(-tu),$$
$$d_{n+1}^e(t) = nd_n^o(t) + ntd_{n-1}^o(t),$$
$$d_{n+1}^o(t) = nd_n^e(t) + ntd_{n-1}^e(t),$$
$$x_{n+1} - n(n-1)x_{n-1} - n(2n-3)tx_{n-2} - n(n-2)t^2x_{n-3} = 0,$$

где $x_n = d_n^e(t)$ или $d_n^o(t)$.

Проверить таблицу

n	0	1	2	3	4	5	6
$d_n^e(t)$	1	0	0	$2t$	$3t^2$	$24t$	$130t^2$
$d_n^o(t)$	0	0	t	0	$6t$	$20t^2$	$120t+15t^3$

(b) Показать, что величины $d_n^e \equiv d_n^e(1)$, $d_n^o \equiv d_n^o(1)$ удовлетворяют соотношениям

$$(1-u)\exp ud^e = (1-u^2/2)\exp(-u),$$
$$(1-u)\exp ud^o = (u^2/2)\exp(-u),$$
$$d_n^e = nd_{n-1}^e + (-1)^n\left[1-\binom{n}{2}\right],$$
$$d_n^o = nd_{n-1}^o + (-1)^n\binom{n}{2}$$

и что если D_n означает число смещений (гл. 3), то

$$d_n^e + d_n^o = D_n,$$
$$d_n^e - d_n^o = (-1)^{n-1}(n-1).$$

В обозначениях Пойа и Сегё (см. ссылку в задаче 20) $D_n = \sum_n$ и $d_n^e - d_n^o = \Delta_n$; это перечисление определителей по нулевым коэффициентам на главной диагонали.

22. Обозначим через $T_n^e(m)$ число всех четных перестановок из n элементов, удовлетворяющих соотношению $P^m = 1$. Тогда из соотношения (35) следует, в обозначениях задачи 19, соотношение

$$2\exp uT^e(m) = \exp\sum_{k|m} u^k/k + \exp\sum_{k,m}(-1)^{k-1}u^k/k.$$

Если

$$\exp uT^*(m) = \exp \sum_{k|m} (-1)^{k-1} u^k/k,$$

то при $T_n(m)$, определяемом как в задаче 19, справедливо равенство

$$2T_n^e(m) = T_n(m) + T_n^*(m).$$

Следовательно, для $m = p$ (p — простое)

$$T_n^e(p) = T_n(p) = T_n^*(p).$$

Показать, что

$$T_{n+1}^*(m) = \sum (-1)^{k-1} (n)_{k-1} T_{n-k+1}^*(m),$$

$$T_{n+q}^*(m) \equiv T_n^*(m)\, T_q^*(m) \qquad (\mathrm{mod}\, q),$$

$$T_{n+q}^e(m) \equiv T_n^e(m)\, T_q^e(m) \qquad (\mathrm{mod}\, q).$$

Глава 5

РАЗМЕЩЕНИЯ, ЗАНЯТОСТЬ

1. Введение

Мак-Магон [1] определяет размещение как разбиение совокупности элементов на множество классов. Более конкретно под этим термином можно понимать распределение объектов данной совокупности по ячейкам. Объекты могут быть любой природы и иметься в любом числе, а ячейки — совершенно независимо классифицироваться по виду, вместимости и числу. Порядок объектов, вкладываемых в одну ячейку, может учитываться, но может в расчет и не приниматься. В случаях, когда изучается вопрос о числе размещений объектов по ячейкам, говорят, что имеет место задача о размещении. Когда же ставится вопрос о числе объектов в заданных или произвольно выбранных ячейках, то говорят о задаче занятости.

Задачи обоих видов уже встречались ранее в связи с полиномиальными коэффициентами в п. 1.2.2 и в примерах 1.8 и 1.9 гл. 1. Это обстоятельство указывает на тесную связь подобных задач с перестановками и сочетаниями. Однако точка зрения на такие задачи в достаточной степени специфична и потому оправдывает их самостоятельное изучение.

2. Различные объекты и ячейки

Простейшим является случай n различных объектов и m различных ячеек. При отсутствии ограничений на занятость каждой ячейки из примера 1.11 следует, что

Число способов размещения n различных объектов по m различным ячейкам равно m^n.

К этому же результату приводят и непосредственные рассуждения: каждый объект может быть помещен в одну из m ячеек; следовательно, для всех n объектов число возможностей составит, как и указано, m^n.

Это замечание приводит к следующим более общим рассуждениям. Предположим, что x_i является индикатором занятости ячейки в том смысле, что символ $x_1^{n_1}x_2^{n_2} \ldots$ характеризует такое размещение элементов, при котором в i-ю ячейку попадает n_i объектов. В соответствии с этим индикатором распределения единственного объекта служит выражение

$$x_1+x_2+\ldots+x_m,$$

а индикатором распределения n различных объектов —

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n.$$

Экспоненциальной производящей функцией для этого случая является

$$F(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)=\sum_{n=0}(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n t^n/n!=$$
$$=\exp t\,(x_1+x_2+\ldots+x_m)=$$
$$=\exp tx_1 \exp tx_2 \ldots \exp tx_m. \quad (1)$$

Следовательно, энумератор занятости i-й ячейки имеет вид

$$\exp tx_i=1+x_it+x_i^2t^2/2!+\ldots+x_i^nt^n/n!+\ldots, \quad (2)$$

точно такой же, как и для перестановок из элементов различных типов (разд. 1.5). Таким образом, соотношение (2) известным уже способом может быть использовано при любой заданной спецификации ограничений на занятость ячейки. Например, если данная ячейка не должна оставаться пустой, то энумератором является $\exp tx_i-1$, если эта ячейка должна содержать по меньшей мере a и, самое большее, $a+b$ объектов, то энумератором служит

$$x_i^at^a/a!+x_i^{a+1}t^{a+1}/(a+1)!+\ldots+x_i^{a+b}t^{a+b}/(a+b)!.$$

Естественно, что занятость для каждой ячейки может быть определена независимо от других ячеек.

Производящая функция, перечисляющая все возможности, имеет вид

$$F(t;\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1)=\exp mt.$$

Соотношение (1) немедленно дает другой хорошо известный результат (который уже выявился в примере 1.12), а именно:

Число способов размещения n различных объектов по m различным ячейкам, при условии, что ни одна ячейка ни разу не оказывается пустой, равно

$$\Delta^m0^n=m!S(n,\ m),$$

где Δ — конечно-разностный оператор ($\Delta u_n=u_{n+1}-u_n$) и $S(n,\ m)$ — число Стирлинга второго рода.

В этом случае, как следует из примера 1.12 или задачи 2.14, энумератор занятости имеет вид

$$G(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)=(\exp tx_1-1)\ \ldots\ (\exp tx_m-1)$$

и

$$G(t;\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1) = (e^t - 1)^m = \sum_{n=0} \Delta^m 0^n t^n/n!.$$

Далее, если p из m ячеек должны быть заняты, а остальные ячейки свободны, то энумератором для всех случаев служит выражение

$$\binom{m}{p}(e^t - 1)^p = (m)_p \sum_{n=0} S(n,\ p)\, t^n/n!,$$

так как для избрания p занятых ячеек (или $m-p$ свободных ячеек) существует $\binom{m}{p}$ возможностей. Итак,

Число способов размещения n различных объектов по m различным ячейкам, так чтобы p ячеек были заняты, а $m-p$ — свободны, равно

$$(m)_p S(n,\ p).$$

Наконец, следует отметить, что, согласно полиномиальной теореме,

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} x_1^{n_1} x_1^{n_2} \ldots x_m^{n_m}.$$

Поэтому

Число способов размещения n различных объектов по m различным ячейкам, при условии, что в i-й ячейке ($i = 1, 2, \ldots, m$) помещается n_i элементов, равно

$$n!/n_1!n_2! \ldots n_m! \text{ (ср. с п. 1.2.2).}$$

Дополнительные примеры и развитие полученных результатов содержатся в разделе задач.

3. Одинаковые объекты и различные ячейки

Предположения, соответствующие результатам предыдущего раздела, формулируются следующим образом:

Число способов размещения n одинаковых объектов по m различным ячейкам равно

$$\binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m-1}{m-1}.$$

Число способов размещения n одинаковых объектов по m различным ячейкам при отсутствии пустых ячеек равно

$$\binom{n-1}{m-1}.$$

Заметим, что к этим результатам мы уже приходили в примерах 1.8 и 1.9.

Приведенные выше предложения могут быть непосредственно доказаны при заданных условиях следующим образом. Во-первых, при отсутствии свободных ячеек искомое число является числом возможных размещений $m-1$ разделительных знаков между n одинаковыми объектами, расположенными в ряд. Для расстановки разделительных знаков между объектами имеется $n-1$ позиций. Отсюда немедленно следует искомый результат. Далее, допустим, что возможны свободные ячейки. Тогда искомое число совпадет с числом размещений $n+m$ одинаковых объектов в m ячейках при условии, что все ячейки должны быть заняты. Действительно, после удаления m из $n+m$ объектов (по одному из каждой ячейки) оставшиеся n объектов оказываются размещенными без ограничений. Отметим также, что

$$\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\binom{n-1}{m-k-1}=\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\binom{n-1}{k-1}=\binom{n+m-1}{n}.$$

К общему случаю приводит следующее доказательство. Энумератор занятости i-й ячейки, отвечающий одинаковым объектам, получится из соотношения (2), если всюду в знаменателях опустить факториалы. Следовательно, таким энумератором служит выражение

$$E(t;\ x_i)=1+x_it+x_i^2t_1^2+\ldots+x_i^nt^n+\ldots=(1-x_it)^{-1}. \tag{3}$$

Энумератором для всех m ячеек является

$$\begin{aligned}E(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)&=E(t;\ x_1)E(t;\ x_2)\ \ldots\ E(t;\ x_m)=\\&=1/(1-x_1t)(1-x_2t)\ \ldots\ (1-x_mt)=\\&=1/(1-a_1t+a_2t^2+\ldots+(-1)^ma_mt^m)=\\&=1+h_1t+h_2t^2+\ldots+h_nt^n+\ldots,\end{aligned} \tag{4}$$

где $a_k\equiv a_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ — элементарная симметрическая функция веса k, а $h_k\equiv h_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ — однородная сумма произведений веса k [она определяется последними двумя из соотношений (4)].

Отметим, что энумератор для размещений n одинаковых объектов по m различным ячейкам равен $h_n(x_1,\ \ldots,\ x_m)$ в то время как для n различных объектов на основании (1) он равен $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$ или h_1^n, где $h_1\equiv h_1(x_1,\ \ldots,\ x_m)=x_1+x_2+\ldots$ $\ldots+x_m$.

Энумератор для данной ячейки, не остающейся пустой, равен

$$xt+x^2t^2+\ldots=xt(1-xt)^{-1},$$

тогда как для всех ячеек, из которых ни одна не может оставаться пустой, он равен

$$D(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_m) = x_1 x_2\ \ldots\ x_m t^m/(1-x_1 t)\ \ldots\ (1-x_m t) =$$
$$= \sum_{k=0} a_m h_n t^{n+m}. \qquad (5)$$

В этом случае энумераторами всех возможностей служат соответственно выражения

$$E(t;\ 1,\ \ldots,\ 1) = (1-t)^{-m} = \sum \binom{n+m-1}{n} t^n,$$
$$D(t;\ 1,\ \ldots,\ 1) = t^m (1-t)^{-m} = \sum \binom{n-1}{m-1} t^n.$$

Размещения с определенной сцецификацией (с указанным заранее числом объектов в каждой из m ячеек) даются в общем виде выражением $h_n(x_1,\ \ldots,\ x_m)$. Таким образом,

$$h_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m,$$
$$h_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{m-1} x_m).$$

Ясно, что для любой заданной спецификации чисел n_i, $i = 1$, $2, \ldots, m$, при $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ ответ окажется равным единице. Этот факт очевиден и из других соображений.

Дополнительные примеры и развитие полученных результатов содержатся в разделе задач.

4. Объекты любой спецификации и различные ячейки

С помощью имеющихся теперь в нашем распоряжении результатов может быть полностью решена задача о размещении объектов любых типов по различным ячейкам. Основной результат, полученный без ограничений на число объектов в каждой из ячеек, следующий.

Число возможных размещений n объектов спецификации $(1^{n_1} 2^{n_2} \ldots)$ по m различным ячейкам равно

$$m^{n_1} \binom{m+1}{2}^{n_2} \binom{m+2}{3}^{n_3} \ldots .$$

Это предложение следует из предыдущих результатов, в частности, из первого предложения разд. 3 и из факта независимого размещения объектов различных типов. Рассмотрим объекты спецификации (pq), т. е. p объектов одного типа и q — другого. Объекты первого типа могут быть размещены $\binom{p+m-1}{p}$ способами, объекты второго — $\binom{q+m-1}{q}$ способами. Произведение

$$\binom{p+m-1}{p}\binom{q+m-1}{q}$$

дает число размещений объектов обоих типов.

Перейдем к определению числа способов размещения при отсутствии свободных ячеек. Обозначим через $[n]$ спецификацию $(1^{n_1}2^{n_2}\ldots)$ и через

$$U([n], m) = m^{n_1}\binom{m+1}{2}^{n_2}\ldots \tag{6}$$

число размещений без дополнительных ограничений. Обозначим, далее, через $R([n], m)$ число размещений при отсутствии свободных ячеек. Тогда, классифицируя размещения $U([n], m)$ по числу пустых ячеек, немедленно получим, что

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}R([n], m-k) = U([n], m), \tag{7}$$

или, что то же самое,

$$U([n], m) = [R([n],) + 1]^m, \quad R^k([n],) \equiv R([n], k).$$

Обратным для полученного нами соотношения является результат

$$R([n], m) = [U([n],) - 1]^m = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}U([n], m-k), \tag{8}$$

найденный иным методом Мак-Магоном [1].

Соотношение (8), записанное в развернутом виде, слишком громоздко. Поэтому полезно отметить некоторые рекуррентные соотношения. Предположим сначала, что объекты некоторых типов имеются в единственном числе (число n_1 в рассматриваемой спецификации отлично от нуля), так что $[n] = (1^p s)$, где s является разбиением (спецификацией), в котором больше одного элемента каждого из типов. Для удобства обозначим $U([n], m)$ через $U_m(1^p s)$. Тогда

$$U_m(1^p s) = mU_m(1^{p-1}s),$$

а из соотношения (8) получаем

$$R_m(1^p s) = \sum(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)U_{m-k}(1^{p-1}s) =$$

$$= mR_m(1^{p-1}s) + mR_{m-1}(1^{p-1}s). \tag{9}$$

Подобным же образом обозначим спецификацию, в которой имеется по два однотипных элемента, через $(2^p s)$, полагая, что в спецификации s элементов каждого из типов уже не менее трех. Тогда

$$U_m(2^p s) = \binom{m+1}{2} U_m(2^{p-1}s)$$

и

$$R_m(2^p s) = \binom{m+1}{2} R_m(2^{p-1}s) + m^2 R_{m-1}(2^{p-1}s) + \binom{m}{2} R_{m-2}(2^{p-1}s). \tag{10}$$

Последнее соотношение основано на тождестве

$$\binom{m-k+1}{2} = \binom{m+1}{2} - mk + \binom{k}{2}.$$

Применяя для спецификаций обозначения, аналогичные предыдущим, получаем

$$U_m(q^p s) = \binom{m+q-1}{q} U_m(q^{p-1}s),$$

$$\binom{m-k+q-1}{q} = \sum (-1)^j \binom{m+q-j-1}{q-j} \binom{k}{j}$$

и

$$R_m(q^p s) = \sum_{j=0} \binom{m+q-j-1}{q-j} \binom{m}{j} R_{m-j}(q^{p-1}s). \tag{11}$$

Если учесть, что

$$\binom{q+m}{q+1} = \frac{q+m}{q+1} \binom{q+m-1}{q},$$

то можно получить рекуррентные соотношения иного вида:

$$(q+1)\, U_m((q+1)\, s) = (q+m)\, U_m(qs)$$

и

$$(q+1)\, R_m((q+1)\, s) = (q+m)\, R_m(qs) + mR_{m-1}(qs). \tag{12}$$

Распределение вероятностей для числа пустых ячеек имеет производящую функцию:

$$P(x;\ m,\ [n]) = \sum_{k=0} p(k;\ m,\ [n])\, x^k, \tag{13}$$

где

$$p(k;\ m, [n]) = \binom{m}{k} R_{m-k}([n])/U_m[n].$$

Каким образом видоизменяются выражения для энумераторов (см. соотношения [4] и [5]), полученные для объектов одного и того же вида [спецификация (n)]? Ответ на поставленный вопрос очень легко получить, если рассмотреть сначала случай спецификации (pq) (p объектов — одного типа, и q — другого). Если

$$E(t_1;\ x_1 \ldots x_m) = 1 + h_1 t_1 + \ldots + h_p t_1^p + \ldots$$

является энумератором по числу объектов первого вида, а выражение

$$E(t_2;\ x_1,\ \ldots,\ x_m) = 1 + h_2 t_2 + \ldots + h_q t_2^q + \ldots$$

служит аналогичным энумератором для объектов второго вида, то в силу независимого распределения объектов каждого вида выражение

$$E(t_1,\ t_2;\ x_1,\ \ldots,\ x_m) = \sum\sum h_p h_q t_1^p t_2^q \tag{14}$$

оказывается энумератором для объектов обоих типов. В выражении (14), так же как и в (4), симметрическая функция h_p является функцией m переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$.

В общем случае, подобно (14), для объектов каждого типа вводится по одной перечисляющей переменной; энумератором для всех переменных служит их произведение. Таким образом, получаем следующий общий результат.

Энумератором занятости m различных ячеек объектами спецификации $(1^{n_1},\ 2^{n_2} \ldots)$ является произведение симметрических функций

$$h_1^{n_1} h_2^{n_2} \ldots,$$

в котором $h_j \equiv h_j(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Этот результат соответствует предложению, высказанному в начале настоящего раздела, что немедленно выявляется, если заметить, что

$$h_j(1,\ 1,\ \ldots,\ 1) = \binom{m+j-1}{j}.$$

Для задач о занятости требуются различные энумераторы. Если, как указано выше, $t_1,\ t_2,\ \ldots$ являются перечисляющими (энумераторными) переменными для объектов различных типов, то энумератором занятости одной ячейки служит выражение

$$1/(1-xt_1)(1-xt_2) \ldots = 1 + xh_1(t_1,\ t_2,\ \ldots) + \\ + x^2 h_2(t_1,\ t_2,\ \ldots) + \ldots + x^n h_n(t_1,\ t_2,\ \ldots) + \ldots, \tag{15}$$

где член $(xt_1)^{n_1}(xt_2)^{n_2} \ldots$ указывает на занятость данной ячейки $n = n_1 + n_2 + \ldots$ объектами, из которых n_1 — первого, n_2 — второго вида и т. д. Конечно, выражение (15) может быть видоизменено с целью описания занятости ячейки при ограничениях, наложенных на появление объектов любого из типов, точно так, как это было сделано в соотношениях (2) и (3).

Так как различные ячейки занимаются независимо, энумератор для всех m ячеек имеет вид

$$O(x_1, \ldots, x_m; t_1, t_2, \ldots) = O(x_1; t_1, t_2, \ldots\, O(x_m; t_1, t_2, \ldots), \quad (16)$$

где, как указано в (15),

$$O(x; t_1, t_2, \ldots) = 1/(1 - t_1 x_1)(1 - t_2 x) \ldots =$$
$$= 1 + x h_1 + x^2 h_2 + \ldots + x^n h_n + \ldots .$$

При отсутствии пустых ячеек (т. е. когда нет необходимости обращать внимание на то, какая из ячеек занята) энумератором занятости ячеек служит

$$(h_1 x + h_2 x^2 + \ldots)^m.$$

Это тот самый результат, из которого Мак-Магон вывел соотношение (8).

Следует заметить, что как в выражении (15), так и в (16) в симметрической функции h_n спецификации всех элементов «перемешаны» («положены в одну корзинку»). Вследствие этого все спецификации приходится рассматривать в совокупности. Если, в частности, рассматриваются спецификации таких, например, видов, как (21^{n-2}), $(p1^{n-p})$, то проще поступить иначе. Так, например, для единственной ячейки, вследствие независимости размещений объектов различных типов, распределение вероятностей для любой спецификации находится как обычное произведение. Обозначим через

$$P(x; [n]) = \sum p(k, [n])\, x^k$$

вероятностную производящую функцию для занятости одной ячейки объектами спецификации $[n] = (1^{n_1} 2^{n_2} \ldots)$. Тогда

$$P(x, [n]) = [P(x; (1))]^{n_1} [P(x; (2))]^{n_2} \ldots, \quad (17)$$

где

$$P(x; (1)) = h_1(x_1, 1, \ldots, 1)/h_1(1, 1, \ldots, 1) = (x + m - 1)/m,$$
$$P(x; (2)) = h_2(x, 1, \ldots, 1)/h_2(1, 1, \ldots, 1),$$
$$\vdots$$
$$P(x; (n)) = h_n(x, 1, \ldots, 1)/h_n(1, 1, \ldots, 1).$$

Это следует из (4). Отметим, что h_n является функцией m переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — индикаторов занятости ячеек.

Аналогичные результаты могут быть получены для занятости любого числа из заданной совокупности ячеек. Однако при этом сложность записи будет возрастать. Все это иллюстрируется ниже в задачах.

Далее, описание числа размещений с указанными числами объектов в каждой из m ячеек требует обобщения понятия произведения

$$h_1^{p_1}h_2^{p_2}\ldots$$

встречающихся выше симметрических функций [для объектов спецификации $(1^{p_1}, 2^{p_2}\ldots)$] как полиномов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Короче говоря, речь идет о введении мономиальных симметрических функций этих переменных, т. е. функций, подобных следующим:

$$(21) = \sum x_1^2 x_j,$$

$$(2^2 1^2) = \sum x_i^2 x_j^2 x_k x_e.$$

Здесь первая сумма берется по всем i, j от 1 до m при $i \neq j$; суммирование во второй сумме производится аналогично. Эти обобщения при более детальном знакомстве с ними оказываются сложными, и мы в них не будем углубляться. Заинтересовавшийся читатель может обратится к монографии Мак-Магона.

5. Упорядоченные размещения

Теперь предполагаем, что объекты в каждой ячейке упорядочены. Размещения считаются различными, если различно упорядочение в ячейках, даже если объекты в ячейках одни и те же. Эта проблема, как станет ясно из последующих результатов, тесно связана с размещениями одинаковых объектов по ячейкам без их упорядочения. Сформулируем первый из этих результатов:

Число способов размещения n различных объектов по m различным ячейкам, когда объекты в ячейках упорядочиваются и нет ограничений на число объектов в каждой из них, равно

$$m(m+1)\ \ldots\ (m+n-1) = n! \binom{m+n-1}{n}.$$

При условии, что все ячейки должны быть заняты, это число равно

$$n! \binom{n-1}{m-1}.$$

Это утверждение можно доказать, разместив сначала n одинаковых объектов по m различным ячейкам, не обращая внимания на их упорядочение. Затем после каждого такого размещения предположить, что объекты различны, и переставить их всеми $n!$ способами. Это и дает нам все возможные упорядочения в ячейках.

В случае одинаковых объектов не существенно, каким образом они упорядочены в ячейках. Поэтому размещения объектов окажутся одними и теми же как в случае упорядоченных, так и в случае неупорядоченных ячеек. Это приводит нас к следующему результату:

Число способов размещения объектов спецификации $(n_1 n_2 \ldots)$ *по* m *различным ячейкам, когда объекты в ячейках упорядочены, равно произведению выражения*

$$n!/n_1!n_2! \ldots, \quad n = n_1 + n_2 + \ldots$$

на соответствующее число способов размещения n *одинаковых объектов по* m *различным ячейкам без упорядочения объектов в них.*

Это последнее число может, конечно, подсчитываться при любых желаемых ограничениях на занятость ячеек, подобно тому, как это осуществлялось выше, в разд. 3.

Отметим, что относительная занятость, т. е. отношения числа занятостей некоторого специального типа к общему числу возможных занятостей, не отличается от соответствующего отношения для случая n одинаковых объектов и m различных ячеек без упорядочения объектов в них.

6. Одинаковые ячейки

Общие задачи размещения и занятости для случая одинаковых ячеек оказываются весьма сложными. Здесь мы отметим только простейшие результаты. Первый из них:

Число способов размещения n *различных элементов по* m *одинаковым ячейкам при условии, что ни одна из них не остается пустой, определяется числом*

$$S(n, m)$$

Стирлинга второго рода; а при отсутствии указанного ограничения — числом

$$S(n, 1) + S(n, 2) + \ldots + S(n, m).$$

Первое из этих чисел получается делением на $m!$ соответствующего числа способов размещений для различных ячеек. В этом случае $m!$ дает число всех способов, которыми можно переставить эти m ячеек. Действительно, каждому из размещений при m одинаковых ячейках соответствуют $m!$ размещений в случае, когда эти ячейки считаются различными. Второе из упомянутых чисел можно получить непосредственным суммированием, так как выбор пустых ячеек можно осуществить единственным способом.

Сформулированный выше результат дает новую комбинаторную интерпретацию чисел Стирлинга $S(n, m)$, которая, как можно заметить, эквивалентна следующему утверждению:

Число, равное произведению n *различных простых множителей, может быть* $S(n, m)$ *способами представлено в виде произведения* m *множителей.*

Кроме того, если $m \geqslant n$, то числа размещений без каких-либо ограничений представляют собой экспоненциальные числа, фигурирующие в разд. 4.5 [см. замечание, следующее за соотношением (4.25)].

Далее, для одинаковых объектов имеет место следующее утверждение:

Число способов размещения n одинаковых элементов по m одинаковым ячейкам при условии отсутствия пустых ячеек равно числу

$$p_n(m)$$

разбиений n сомножителей в m групп, а число способов размещений без указанного ограничения равно

$$p_n(1)+p_n(2)+\ldots+p_n(m).$$

Числа $p_n(m)$ детально изучаются в следующей главе. Как и следует ожидать, эти числа не имеют такой простой общей структуры, как числа $S(n, m)$.

Как можно усмотреть из полученного результата, размещения объектов произвольной спецификации эквивалентны более изученному типу разбиений, а именно такому, в котором каждая из частей представляет собой составное число, содержащее столько множителей, сколько имеется в наличии видов размещаемых объектов.

Таблица 1

Размещение элементов по одинаковым ячейкам
(свободные ячейки отсутствуют)

№ ячейки	Спецификация объектов						
	(2)	(1^2)					
1	1	1					
2	1	1					
	(3)	(21)	(1^3)				
1	1	1	1				
2	1	2	3				
3	1	1	1				
	(4)	(31)	(2^2)	(21^2)	(1^4)		
1	1	1	1	1	1		
2	2	3	4	5	7		
3	1	2	3	4	6		
4	1	1	1	1	1		
	(5)	(41)	(32)	(31^2)	(2^21)	(21^3)	(1^5)
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	5	7	8	11	15
3	2	4	6	8	11	16	25
4	1	2	3	4	5	7	10
5	1	1	1	1	1	1	1

Иными словами, каждая ячейка характеризуется составным числом, определяющим число объектов каждого из видов в ней заключенных. По крайней мере одно из этих чисел должно быть положительным, иначе ячейка оказалась бы пустой. Сумма по всем ячейкам чисел, соответствующих объектам одного и того же вида, должна равняться заданному числу объектов этого вида. В противном случае некоторые объекты окажутся неразмещенными.

Эта тема слишком обширна, чтобы здесь в нее углубляться; заинтересовавшийся читатель вновь отсылается к монографии Мак-Магона. Результаты, отвечающие простейшим случаям, сведены в табл. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Магон (MacMahon P. A.), Combinatory Analysis, vol I, Cambridge, 1915.
2. Нетто (Netto E.), Lehrbuch der Combinatorik, Leipzig, 1901.
3. Уитворт (Whitworth W. A.), Choice and Chance, London, 1901.

Задачи

1. Обозначим через $D(n, m)$ число способов размещения различных объектов по m различным ячейкам при условии занятости всех ячеек. Пользуясь соотношением

$$D(n,m)+mD(n,m-1)+\ldots+\binom{m}{k}D(n,m-k)+\ldots+D(n,0)=m^n$$

или равенством

$$[D(n,)+1]^m=m^n=E^m0^n,\quad D(n,)^k\equiv D(n,\ k);$$

показать, что в соответствии с ранее изложенным

$$D(n,\ m)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n=\Delta^m0^n.$$

2. Вероятность того, что s из m различных ячеек окажутся свободными после размещения в них n различных объектов, равна

$$p(s;\ n,\ m)=(m)_{m-s}S(n,\ m-s)/m^n.$$

Показать, что если Δ означает обычный конечно-разностный оператор, то

$$P(x;\ n,\ m)=\sum p(s;\ n,\ m)\,x^s=(\Delta+x)^m\,0^n/m^n,$$

$$M(x;\ n,\ m)=P(1+x;\ n,\ m)=(E+x)^m\,0^n/m^n,$$

$$E^k0^n\equiv k^n,$$

и, следовательно, биномиальные моменты $B_k(n, m)$ определяются по формуле

$$B_k(n, m)=\binom{m}{k}\left(1-\frac{k}{m}\right)^n.$$

В частности, ожидаемое число пустых ячеек равно

$$B_1(n, m)=m\left(1-\frac{1}{m}\right)^n,$$

а ожидаемое число занятых ячеек равно

$$m-B_1(n, m)=m\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right].$$

3. (a) Пусть $p(s;\ n,\ m,\ k)$ — вероятность того, что при распределении n различных объектов по m различным ячейкам будет точно s ячеек, в каждой из которых содержится в точности k объектов.

Показать, что

$$\sum_{n=0} m^n p(s;\ n,\ m,\ k)\,t^n/n!=\binom{m}{s}\left(\frac{t^k}{k!}\right)^s\left(e^t-\frac{t^k}{k!}\right)^{m-s}$$

и что, следовательно,

$$\sum_{n=0} P(x;\ n,\ m,\ k)\,t^n/n!=\left(e^{t/m}+(x-1)\frac{(t/m)^k}{k!}\right)^m,$$

где

$$P(x;\ n,\ m,\ k)=\sum_{s=0} p(s;\ n,\ m,\ k)\,x^s.$$

(b) Показать, что биномиальные моменты полученных выше распределений вероятностей оказываются равными

$$B_j(n,\ m,\ k)=\binom{m}{j}\frac{n!}{k!^j\,(n-kj)!}\,\frac{(m-j)^{n-kj}}{m^n}.$$

4. Показать, что энумератором занятости любой ячейки при распределении n различных объектов по m различным ячейкам является

$$(x+m-1)^n.$$

Следовательно, если $p(k;\ m,\ n)$ — вероятность того, что данная ячейка содержит k объектов, то

$$P(x;\ m,\ n)=\sum p(k;\ m,\ n)\,x^k=(x+m-1)^n/m^n$$

и

$$p(k;\ m,\ n)=\binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}m^{-k}.$$

Показать, что биномиальные моменты даются соотношениями

$$B_k(m,\ n) = \binom{n}{k} m^{-k}$$

и что среднее значение и дисперсия равны соответственно n/m и $(n/m)(1-1/m)$.

5. Аналогичным путем показать, что вероятностная производящая функция для занятости данной пары ячеек равна

$$P(x,\ y) = (x+y+m-2)^n/m^n = \sum p(j,\ k;\ m,\ n)\, x^j y^k,$$

так что

$$p(j,\ k;\ m,\ n) = \binom{n}{j+k} (m-2)^{n-j-k} \binom{j+k}{j} \Big/ m^n$$

Производящая функция биномиального момента равна

$$B(x,\ y) = P(x+1,\ y+1) = \sum B_{jk}(m,\ n)\, x^j y^k.$$

Показать, что

$$B_{jk}(m,\ n) = \binom{n}{j+k} \binom{j+k}{j} m^{-j-k}$$

и что ковариация равна $-n/m^2$.

6. Если каждая из m различных ячеек может содержать 0, 1, 2, ..., s из n различных объектов, то энумератором общего числа способов размещений объектов по ячейкам служит выражение

$$f(t;\ m,\ s) = \sum f_n(m,\ s)\, t^n/n! = (1+t+t^2/2!+\ldots+t^s/s!)^m.$$

(a) Вывести рекуррентные соотношения:

$$f_n(m,\ s) = f_n(m-1,\ s) + n f_{n-1}(m-1,\ s) + \ldots + \binom{n}{s} f_{n-s}(m-1,\ s),$$

$$f_{n+1}(m,\ s) = m f_n(m,\ s) - m \binom{n}{s} f_{n-s}(m-1,\ s).$$

(b) Используя задачу 2.20, показать, что при $s > 1$

$$f_n(m,\ s) = m^n n \leqslant s,$$

$$f_{s+1}(m,\ s) = m^{s+1} - m,$$

$$f_{s+2}(m,\ s) = m^{s+2} - m - (m)_2 (s+2),$$

$$f_{s+3}(m,\ s) = m^{s+3} - m - (m_2) \binom{s+4}{2} - (m_3) \binom{s+3}{2}.$$

7. Если в условиях задачи 6 каждая из ячеек должна содержать по крайней мере s элементов, то энумератором для общего

числа способов размещений служит

$$g(t;\ m,\ s)=(t^s/s!+t^{s+1}/(s+1)!+\ldots)^m=$$
$$=(e^t-1-t-\ldots-t^{s-1}/(s-1)!)^m=\sum g_n(m,\ s)\,t^n/n!$$

Вывести рекуррентные соотношения:

$$g_n(m,\ s)=mg_{n-1}(m,\ s)+m\binom{n-1}{s-1}g_{n-s}(m-1,\ s),$$

$$g_n(m,\ s)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{n!}{(s-1)!^k\,(n-sk+k)}\,g_{n-sk+k}(m-k,\ s-1).$$

8. (а) Обозначим через $L(n,\ m)$ число способов размещения n одинаковых объектов по m различным ячейкам при условии, что ни одна из них не остается пустой. Из соотношения

$$L(n,\ m)=mL(n,\ m-1)+\ldots+\binom{m}{k}L(n,\ m-k)+\ldots$$
$$\ldots+L(n,\ 0)=\binom{n+m-1}{n}$$

вывести, что

$$L(n,\ m)=\sum_{k=0}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{m+n-k-1}{n}.$$

(b) Доказать тождество

$$\binom{n-1}{m-1}=\sum_{k=0}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{m+n-k-1}{n}.$$

Указание. Использовать тождество

$$t^m(1-t)^{-m}=\sum(-1)^k\binom{m}{k}(1-t)^{-m+k}$$

для производящей функции.

9. Пусть $p(k;\ n,\ m)$ является вероятностью размещения n одинаковых объектов по m различным ячейкам при условии, что k из них остаются пустыми. Показать, что

$$p(k;\ n,\ m)=\binom{m}{k}L(n,\ m-k)\Big/\binom{n+m-1}{n}=$$
$$=N(k;\ n,\ m)\Big/\binom{n+m-1}{n}.$$

При этом последнее выражение и определяет величину $N(k;\ n,\ m)$.

Вывести соотношения

$$\sum_{n=0} t^n \sum_{k=0} x^k N(k;\ n,\ m) = (x-1+(1-t)^{-1})^m,$$

$$\sum t^n \sum (1+x)^k N(k;\ n,\ m) = (x+(1-t)^{-1})^m =$$

$$= \sum t^n \sum x^k \binom{m}{k} \binom{n+m-k-1}{n}$$

и, пользуясь ими, найти биномиальные моменты

$$B_k(n,\ m) = \binom{m}{k} \binom{n+m-k-1}{n} \Big/ \binom{n+m-1}{n}$$

распределения вероятностей $p(k;\ n,\ m)$, $k = 0,\ 1, \ldots, m$.

Показать, в частности, что среднее значение и дисперсия равны

$m(m-1)(m+n-1)^{-1}$ и $m(m-1)n(n-1)/(n+m-1)^2(n+m-2)$.

10. Пусть, аналогично предыдущему, $N(k;\ n,\ m,\ s)$ является числом способов размещения n одинаковых объектов по m различным ячейкам при условии, что точно k из них содержат точно по s объектов.

Показать, что

$$[(x-1)t^s + (1-t)^{-1}]^m = \sum t^n \sum x^k N(k;\ n,\ m,\ s)$$

и что биномиальные моменты распределения вероятностей $p(k;\ n,\ m,\ s)$, $k = 0,\ 1, \ldots, m$, где

$$p(k;\ n,\ m,\ s) = N(k;\ n,\ m,\ s) \Big/ \binom{n+m-1}{n},$$

равны

$$B_k(n,\ m,\ s) = \binom{m}{k} \binom{n+m-k(s+1)-1}{n-ks} \Big/ \binom{n+m-1}{n}.$$

11. Показать, что энумератором занятости отдельной ячейки в случае, когда n одинаковых объектов размещаются по m различным ячейкам, служит

$$E(t,\ x;\ m) = (1-xt)^{-1}(1-t)^{-m+1} =$$

$$= \sum t^n \sum x^j \binom{n+m-j-2}{n-j} = \sum t^n \sum \binom{n+m-j}{n-j} (x-1)^j$$

и, следовательно, что биномиальными моментами соответствующих размещений являются

$$B_j(n,\ m) = \binom{n+m-1}{n-j} \Big/ \binom{n+m-1}{n} = (n)_j/(m+j-1)_j.$$

Среднее значение и дисперсия равны соответственно n/m и $n(n+m)(m-1)/(m+1)m^2$.

12. Аналогично предыдущему, показать, что биномиальными моментами для одновременной занятости двух ячеек являются

$$B_{jk}(n, m) = (n)_{j+k}/(m+j+k-1)_{j+k}$$

и, в частности, что ковариация равна $-n(n+m)/(m+1)m^2$.

13. (a) В случае, когда каждая из m различных ячеек может содержать не более чем p из n одинаковых объектов, энумератором для общего числа способов размещений служит выражение

$$E(t; m, p) = (1+t+\ldots+t^p)^m = \sum t^n N_n(m, p).$$

Показать, что

$$N_n(m, p) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{n-kp-k+m-1}{n-kp-k}.$$

(b) Вывести рекуррентные соотношения:

$$N_n(m, p) = N_n(m-1, p) + N_{n-1}(m-1, p) + \ldots + N_{n-p}(m-1, p),$$
$$N_n(m, p) = N_{n-1}(m, p) + N_n(m-1, p) - N_{n-p-1}(m-1, p).$$

14. В условиях задачи 13 показать, что биномиальные моменты указанного размещения по числу пустых ячеек равны

$$B_j(n, m, p) = \binom{m}{j} \frac{N_n(m-j, p)}{N_n(m, p)},$$

где $N_n(m, p)$ определено в задаче 13.

15. Показать, аналогично предыдущему, что биномиальные моменты размещения по числу ячеек, содержащих точно k объектов, равны

$$B_j(k, n, m, p) = \binom{m}{j} \frac{N_{n-jk}(m-j, p)}{N_n(m, p)}.$$

16. Показать, что энумератором общего числа размещений при условии, что каждая из m различных ячеек может содержать не менее чем p из n одинаковых объектов, служит выражение

$$E(t; m, p) = (t^p + t^{p+1} + \ldots)^m = t^{mp}(1-t)^{-m} =$$
$$= \sum_{n=0} \binom{n+m-1}{n} t^{n+mp} = \sum_{n=mp} \binom{n-mp+m-1}{m-1} t^n.$$

17. При тех же ограничениях на характер занятости ячеек, что и в задаче 16, и при дополнительном условии, что ни одна из ячеек не должна содержать более $p+q-1$ объектов, прове-

рить результат

$$E(t;\, m,\, p,\, q) = t^{pm}(1-t^q)^m(1-t)^{-m} =$$
$$= \sum_{n=mp} t^n N_n(m,\, p,\, q),$$

где

$$N_{n+mp}(m,\, p,\, q) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{n-kq+m-1}{m-1}.$$

Сравнить его с задачей 13 (а).

18. Показать, что если число размещений объектов спецификации $(p1^{n-p})$ по m различным ячейкам (без ограничений на занятость) составляет $U_m(d1^{n-p})$, то

$$\sum_{p=0} \sum_{n-p=0} U_m(p1^{n-p}) \frac{t^p u^{n-p}}{(n-p)!} = e^{um}(1-t)^{-m}$$

и

$$\sum \sum R_m(p1^{n-p}) \frac{t^p u^{n-p}}{(n-p)!} = \left(\frac{e^u}{1-t} - 1\right)^m,$$

где $R_m(p1^{n-p})$ — соответствующее число размещений **при отсутствии** пустых ячеек.

Доказать, что

$$R_m(p1^q) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{p+k-1}{m-1} \Delta^k 0^q.$$

19. Пусть заданы объекты спецификации (pq), m различных ячеек и величина $R_m(pq)$ определена, как в задаче 18 и в тексте. Тогда, используя соотношение (12) этой главы (с соответствующим изменением обозначений), показать, что

$$R_m(pq) = \sum_{k=0} \binom{p-1}{k} \binom{q}{m-k-1} \binom{m+p-1-k}{p}.$$

20. Допустим, что объекты спецификации $(2^p s)$ размещаются по m различным ячейкам и величина $R_m(2^p s)$ определена, как обычно. Тогда, если

$$R(x;\, 2^p s) = \sum_{m=1} R_m(2^p s)\, x^{m-1} \equiv R_p(x),$$

показать, что

$$R_p(x) = (1 + 4x + 3x^2) R_{p-1}(x) + (2x + 5x^2 + 3x^2) R'_{p-1}(x) +$$
$$+ (^1/_2)\, x^2 (1+x)^2 R''_{p-1}(x)$$

(штрихи означают производные).

21. Показать, что биномиальные моменты для занятости объектами спецификации (pq) одной из m различных ячеек определяются выражениями

$$B_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{p+m-1}{p-j}\binom{q+m-1}{q-k+j} \Big/ \binom{p+m-1}{p}\binom{q+m-1}{q}.$$

22. Показать, что производящая функция биномиальных моментов для занятости объектами спецификации $(1^{p_1}2^{p_2}\ldots)$ одной из m различных ячеек определяется выражением

$$B(x;\, m,\, 1^{p_1}2^{p_2}\ldots) = B(x;\, m,\, 1)^{p_1}\, B(x;\, m,\, 2)^{p_2}\ldots,$$

в котором

$$B(x;\, m,\, n) = \sum_{j=0} x^j \binom{n+m-1}{n-j} \Big/ \binom{n+m-1}{n}.$$

23. Обозначим через $A_n(m)$ число способов размещения n различных элементов по m одинаковым ячейкам так, что

$$A_n(m) = S(n,\, 1) + S(n,\, 2) + \ldots + S(n,\, m) =$$
$$= A_n(m-1) + S(n,\, m).$$

Показать, что

$$A_n(m) = \sum_{i=0}^{m} d_{m-i} i^n/i! = \frac{1}{m!}(D+E)^m 0^n,$$
$$D^k \equiv D_k, \quad E^k 0^n = k^n,$$

где $D_n = n!\, d_n = \Delta^n 0!$ равно числу встреч.

Глава 6

РАЗБИЕНИЯ, КОМПОЗИЦИИ, ДЕРЕВЬЯ И СЕТИ

1. Введение

Согласно Диксону [4], к книге которого читатель отсылается в связи со многими интересными результатами, понятие разбиения впервые появляется в письме Лейбница к Иоганну Бернулли (1669). Действительное развитие этого понятия, как и многого другого в комбинаторике, начинается с Эйлера (1674).

Понятие разбиения уже встречалось в гл. 1 в связи со спецификацией набора элементов различных видов. Возникает естественная потребность в подсчете числа разбиений. По определению, разбиением называется набор целых положительных чисел (при данной их сумме), в котором порядок чисел не принимается в расчет. Естественно поэтому наряду с разбиением рассматривать соответствующие упорядоченные наборы целых положительных чисел, которые, согласно Мак-Магону, называются композициями. К той же группе понятий относятся понятия деревьев и сетей. Причина этого кроется, как показано ниже, в подобии их производящих функций.

Целые числа, образующие разбиение (или композицию), называются его частями, а сумма этих чисел (частей) называется характеристикой разбиения (или композиции). Принято сокращать запись, используя для повторяющихся (равных) частей показатель степени; например, разбиение 111 записывается в виде 1^3. В табл. 1 приведены все разбиения целого n [для $n=1(1)8$], собранные в группы по числу частей в них. При подсчете числа разбиений и композиций можно принимать в расчет или же не учитывать ограничения на тип, величины частей, число повторений или общее число частей. Без учета этих ограничений разбиения и композиции чисел 3 и 4 следующие:

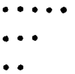
Число	Разбиения	Композиции
3	3, 21, 1^3	3, 21, 12, 1^3
4	4, 31, 2^2, 21^2, 1^4	4, 31, 13, 2^2, 211, 121, 112, 1^4

Таблица 1

Разбиения числа *n* по числу частей

Число частей / *n*	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	2	1^2						
3	3	21	1^3					
4	4	31 2^2	21^2	1^4				
5	5	41 32	31^2 2^21	21^3	1^5			
6	6	51 42 3^2	41^2 321 2^3	31^3 2^21^2	21^4	1^6		
7	7	61 52 43	51^2 421 3^21 32^2	41^3 321^2 2^31	31^4 2^21^3	21^5	1^7	
8	8	71 62 53 4^2	61^2 521 431 42^2 3^22	51^3 421^2 3^21^2 32^21 2^4	41^4 321^3 2^31^2	31^5 2^21^4	21^6	1^8

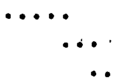
Разбиение можно изобразить также фигурой из точек, называемой графом Ферре. Например, для разбиения 532 такой граф имеет вид:



Как видно из самого изображения графа, каждой части разбиения отвечает одна строка, а число точек в каждой строке графа указывает величину соответствующей части. При этом крайние левые точки во всех рядах располагаются одна под другой.

Разбиение, полученное путем чтения заданного графа Ферре не по строкам, а по колонкам, называется графом, сопряженным с данным. Сопряженным разбиением для 532 служит разбиение 33211, и наоборот. Некоторые из тождеств при подсчете числа разбиений оказываются простыми следствиями сопряженности. Это станет ясным далее.

Композицию также можно изображать фигурой из точек, называемой зигзагообразным графом Мак-Магона, предложившего его. Граф Мак-Магона отличается от графа Ферре тем, что первая точка каждой строки графа лежит под последней точкой его предыдущей строки. Так, например, композиция 532 имеет граф



Как и в случае разбиения, композиция, сопряженная с данной, получается чтением графа заданной композиции по колонкам. Так, например, композицией, сопряженной с 532, является композиция 11112121.

Один из специальных видов линейных графов (или сетей) называется деревом. (Термин «граф» используется как для диаграмм Ферре и зигзагообразных диаграмм, упомянутых выше, так и для сетей, ибо подобная терминология стала стандартной. При этом не может быть смешения понятий, ибо смысл понятия разъясняется текстом.) Линейный граф, если говорить не строго, это совокупность точек и совокупность линий (или пар точек), с помощью которых изображаются соединения точек. Набор из n изолированных точек (без соединительных линий) также является графом. Другой крайностью является граф из n точек, каждая пара которых соединена линией [всего таких линий, естественно, $n(n-1)/2$]. Такой граф называется полным. Для подсчета числа графов удобно принять

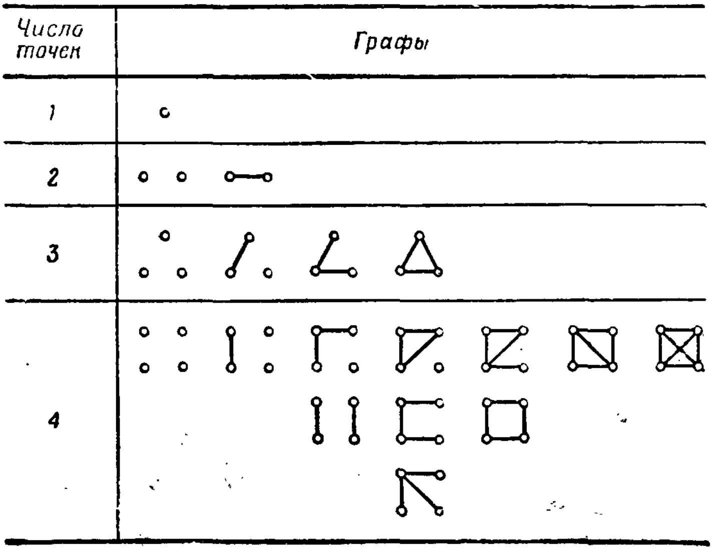


Рис. 1. Линейные графы.

следующие ограничения: 1) две точки графа могут быть соединены лишь одной линией (или, используя терминологию электротехники, не допускается никаких параллельных соединений); 2) граф не должен иметь «петель», т. е. линий, соединяющих точку с ней же

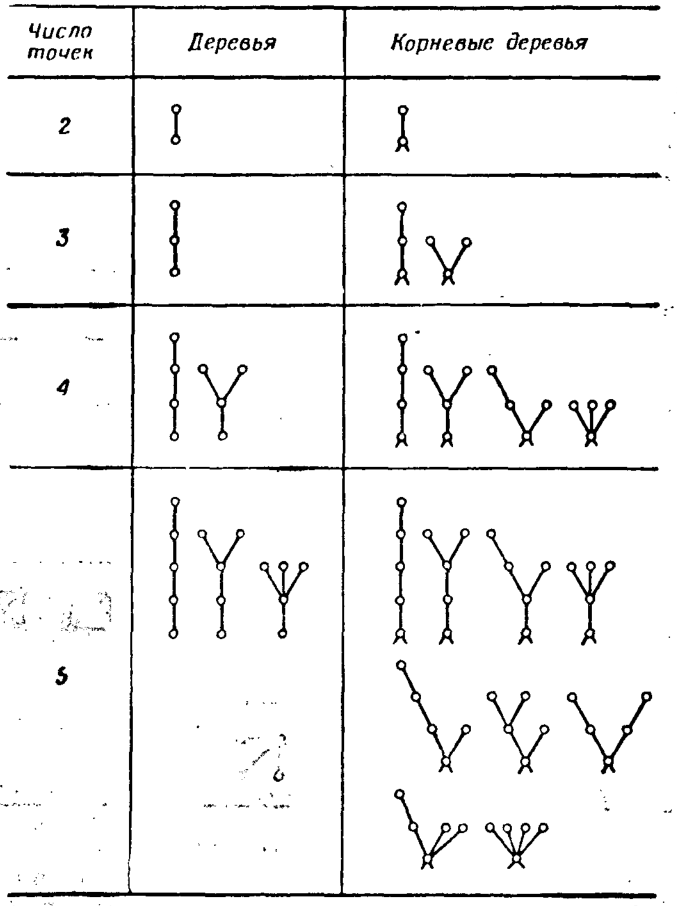


Рис. 2. Деревья и корневые деревья.

самой. Надо иметь в виду, однако, что в общей теории графов (см. Кёниг [6]) ни одно из этих ограничений не накладывается. На рис. 1 показаны различные линейные графы из n точек, $n=1(1)4$.

Циклом графа называется такая совокупность линий $p_1p_2, p_2p_3,\ldots$ $\ldots, p_{k-1}p_1$ (здесь p_ip_j обозначает линию, соединяющую точки p_i и p_j), в которой каждая точка, кроме p_1, встречается лишь один раз. Граф называется *связным*, если каждую пару его точек соединяет *путь*, т. е. совокупность линий вида p_1p_2, p_2p_3, ..., $p_{k-1}p_k$, в которой все точки от p_1 до p_k различны.

Связный линейный граф без циклов (а также без «параллельных» линий и петель) называется *деревом*. Это математическое понятие более родственно генеалогическому дереву, нежели деревьям, произрастающим на земле. Дерево, одна точка которого — корень выделяется среди всех других точек, называется *корневым* деревом. В случаях, когда требуется подчеркнуть, что дерево не является корневым, будем называть его *свободным* деревом.

На рис. 2 показаны всевозможные деревья и корневые деревья из n точек, $n=2$, ..., 5. Ввиду отсутствия циклов, число точек в дереве на единицу больше числа линий в нем. Корневые деревья можно получить из соответствующего свободного дерева, если последовательно каждую его точку принимать за корень. В результате подобных операций могут появиться дубликаты корневых деревьев. В этом случае сохраняют только по одному экземпляру корневых деревьев каждого вида.

На первом этапе подсчеты числа деревьев и корневых деревьев осуществляются по числу точек, которые подразумеваются одинаковыми. Затем точкам и линиям придают дополнительные характеристики. Точкам присваивают *ярлыки* или *расцветку*, а линиям — *ярлыки*, *расцветку* или *ориентацию*. Эти термины объясняются ниже. Подсчет числа линейных графов на первом этапе производится по числу точек и линий, но опять-таки либо точкам, либо линиям, либо и тем и другим могут быть присвоены дополнительные характеристики. Естественно, что можно исследовать иные отличные от деревьев разновидности (подграфы) линейных графов. Можно указать много признаков, по которым проводится подсчет числа графов. Поэтому соответствующий материал, излагаемый в основном тексте и задачах, является лишь началом изучения этой темы.

2. Производящие функции для разбиений

Обозначим через p_n число разбиений (без дополнительных ограничений) числа n. Пусть, далее, $p_0=1$ и

$$p(t)=p_0+p_1t+p_2t^2+\dots$$

есть соответствующая производящая функция. Тогда имеет место

Теорема 1. *Перечисляющей производящей функцией для разбиений без ограничений является*

$$p(t)=(1+t+t^2+t^3+\dots)(1+t^2+t^4+\dots)\times\dots$$
$$\dots\times(1+t^k+t^{2k}+t^{3k}+\dots)\dots=1/(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^k)\dots \quad (1)$$

Доказательство немедленно вытекает из того, что каждый множитель в произведении (1) характеризует всевозможные «вклады», вносимые частями разбиения, имеющими данную величину. Отметим, что (1) является также производящей функцией для сочетаний с повторениями, в которых на первый элемент не накладывается ограничений, а второй элемент является кратным 2, третий — кратным 3 и т. д.

Производящие функции для разбиений при наличии ограничений некоторых типов можно усмотреть непосредственно из соотношения (1). Так, например, разбиения, все части которых не превосходят числа k, перечисляются с помощью функции

$$p_k(t) = \sum p_{nk} t^n = 1/(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^k). \tag{2}$$

Разбиения, в которых все части различны, перечисляются функцией

$$u(t) = (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\ldots. \tag{3}$$

Разбиения, в которых все части — нечетные числа, перечисляются функцией

$$o(t) = 1/(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\ldots. \tag{4}$$

Из тождества $(1-t^{2k}) = (1-t^k)(1+t^k)$ следует, что

$$u(t)(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\ldots = (1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)\ldots$$

или

$$u(t) = o(t). \tag{5}$$

Этот результат можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 2. *Число разбиений с неравными частями равно числу разбиений, все части которых нечетны.*

Например, разбиениями числа 5 с неравными частями служат 5, 41, 32; в то же время разбиениями числа 5 с нечетными частями являются 5, 31^2, 1^5.

Для подсчета разбиений по числу частей необходима, согласно Эйлеру, производящая функция с двумя переменными. Если

$$F(t, u) = (1+ut+u^2t^2+u^3t^3+\ldots)(1+ut^2+u^2t^4+\ldots)\times\ldots$$
$$\ldots\times(1+ut^k+u^2t^{2k}+\ldots)\ldots = 1/(1-ut)(1-ut^2)\ldots(1-ut^k)\ldots \tag{6}$$

и

$$F(t, u) = \sum p(t, k) u^k, \tag{7}$$

то $p(t, 0) = 1$ и $p(t, k)$ является производящей функцией для разбиений точно с k частями.

Это в действительности так, ибо член $u^j t^{jk}$ в общем множителе из соотношения (6) указывает, что часть, равная j, появляется k раз.

Чтобы найти $p(t, k)$, отметим, что

$$(1-ut)F(t, u)=F(t, tu) \tag{8}$$

или, из соотношения (7),

$$p(t, k)-tp(t, k-1)=t^k p(t, k). \tag{9}$$

Следовательно,

$$(1-t^k)p(t, k)=tp(t, k-1),$$

$$(1-t^{k-1})(1-t^k)p(t, k)=t^2 p(t, k-2)$$

и т. д. до тех пор, пока, наконец, получим

$$p(t, k)=t^k/(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^k), \tag{10}$$

так как $p(t, 0)=1$.

Обозначим разбиения, перечисляемые этой функцией, через $p_n(k)$. Здесь, конечно, $p_n(k)$ является числом разбиений целого n на точно k частей. Тогда, сравнивая (10) и (2), немедленно получаем, что

$$p_{nk}=p_{n+k}(k). \tag{11}$$

Иными словами, мы приходим к такому результату.

Теорема 3. *Число разбиений целого n, в которых нет частей, превосходящих k, равно числу таких разбиений числа $n+k$, в каждом из которых имеется точно k частей.*

Например, разбиениями числа 6 с частями, не превосходящими 2, являются 2^3, $2^2 1^2$, 21^4, 1^6. В то же время разбиениями из двух частей числа 8 оказываются: 71, 62, 53, 44.

Имея в виду, что $p(t, 0)=1$, и проводя, с использованием (10), математическую индукцию, получаем

$$P(t, k)=p(t, 0)+p(t, 1)+\ldots+p(t, k)=$$
$$=1/(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^k)=t^{-k}p(t, k)=p_k(t). \tag{12}$$

Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3(а). *Число разбиений целого n, в каждом из которых число частей не превышает k, оказывается равным числу разбиений n, в которых нет частей, больших k, а также равно числу таких разбиений целого $n+k$, в которых содержится точно k частей.*

Для $n=6$ разбиений не более чем с двумя частями имеется, как утверждает теорема, ровно четыре, а именно: 6, 51, 43, 3^2. Если ввести в рассмотрение сопряженные разбиения, то удается перебросить мост между теоремой 3 и теоремой 3(а).

Сопряженным для разбиения из k частей является разбиение, в котором одна или более частей равны k. Следовательно, имеет место первая часть теоремы 3(а).

Функцией, перечисляющей разбиения с неравными частями (по числу этих частей), является

$$G(t, a) = (1 + at)(1 + at^2)(1 + at^3)\ldots = \sum u(t, k) a^k, \qquad (13)$$

где $u(t, k)$ — производящая функция для разбиений с k неравными частями. Отсюда имеем, что

$$G(t, a) = (1 + at)\, G(t, at), \qquad (14)$$

и, приравнивая коэффициенты, получаем

$$u(t, k) = t^k u(t, k) + t^k u(t, k-1). \qquad (15)$$

Следовательно, путем итерации (15) и с учетом условия $u(t, 0) = 1$ выводим

$$u(t, k) = t^{\binom{k+1}{2}} / (1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^k). \qquad (16)$$

Этот результат можно выразить в следующей форме.

Теорема 3(b). *Число разбиений, определенных в теореме* 3(a), *равно числу разбиений числа* $n + \binom{k+1}{2}$ *с* k *неравными частями.*

Так, например, четырьмя разбиениями числа 9 ($n = 6$, $k = 2$) с двумя неравными частями оказываются 81, 72, 63, 54.

3. Приложение графа Ферре

Как было упомянуто выше, чтение графа Ферре по строкам и столбцам приводит к следующему равенству чисел подразбиений.

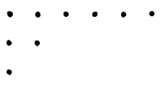
Теорема 4. *Число разбиений целого* n, *в каждом из которых точно* m *частей, равно числу разбиений* n *на части, наибольшая из которых равна* m.

В соответствии с этим разбиения из трех частей числа 6 суть: 41^2, 321, 2^3, тогда как подразбиениями того же числа 6, в которых наибольшая часть равна 3, оказываются следующие: 31^3, 321, 3^2.

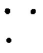
Первая часть теоремы 3(a) является, как уже было отмечено, прямым следствием теоремы 4.

В такой же мере поучительными оказываются приложения графа Ферре к другим вопросам. Рассмотрим одно из утверждений, даваемых теоремой 3(b): *число разбиений целого* n, *каждое из которых содержит точно* k *частей, равно числу разбиений числа* $n + \binom{k}{2}$ *с* k *различными частями.* Для конкретности примем

$n=6$, $k=3$, так что $n+\binom{k}{2}=9$. Искомыми разбиениями являются 41^2, 321, 2^3 и 621, 531, 432. Рассматривая граф



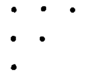
отвечающий разбиению 621, заметим, что его можно разделить на два графа:


и


Первый из них отвечает разбиению 41^2, т. е. одному из разбиений числа 6 на три части. Аналогичный факт имеет место для разбиений 531 и 432, причем в каждом случае возникает указанный выше треугольный граф, отвечающий разбиению 21.

Ясно, что при произвольном k добавление к любому графу из k строк и n точек треугольного графа с $k-1$ строчками, расположенными, как показано выше, приводит к графу из $n+\binom{k}{2}$ точек, в котором нет одинаковых строк. Именно это и утверждается в теореме.

Рассмотрим теперь самосопряженные разбиения, в которых соответствующие строки и столбцы одинаковы. Примером служит граф 321



Каждый такой граф обладает симметрией, которая может быть выражена следующим образом: (1) имеется угловой квадрат из m^2 точек (так называемый квадрат Дурфи); если его отбросить, то (2) останутся два одинаковых «хвоста», которые являются разбиениями $(n-m^2)/2$ самое большее на m частей. Для заданных m^2 и n существует класс самосопряженных разбиений, число которых определяется коэффициентом при $t^{(n-m^2)/2}$ в выражении

$$p_m(t)=1/(1-t)(1-t^2)\ \dots\ (1-t^m)$$

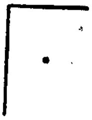
или, если положить $t=x^2$, — коэффициентом при x^n в выражении

$$x^{m^2}/(1-x^2)(1-x^4)\ \dots\ (1-x^{2m}).$$

Тогда производящая функция для самосопряженных разбиений имеет вид

$$1+\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)}+\frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}+\dots\ . \qquad (17)$$

Теперь прочтите самосопряженный граф по сторонам углов («по углам»), как указано ниже:



Вследствие равенства соответствующих строк и столбцов графа каждый угол содержит нечетное число точек и в каждом данном разбиении нет одинаковых углов. Следовательно, общее число таких графов одновременно является и числом разбиений с неравными нечетными частями, определяемых функцией

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\ \dots\ .$$

Более того, если угловой квадрат содержит m^2 точек, то чтение его по углам дает m частей и энумератором по числу таких частей оказывается функция

$$(1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\ \dots\ .$$

Таким образом, мы приходим к тождеству

$$(1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\ \dots =$$
$$= 1+a\frac{x}{1-x^2}+a^2\frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)}+a^3\frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}+\dots\ . \qquad (18)$$

В качестве последней иллюстрации приведем принадлежащее Фабиану Франклину[1] красивое доказательство известного тождества Эйлера о коэффициентах в разложении

$$(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\ \dots\ .$$

Это выражение получается из (13), если a заменить -1. Следовательно, коэффициент при t^n дается выражением

$$u(t,\ 0)+u(t,\ 2)+u(t,\ 4)+\dots-[u(t,\ 1)+u(t,\ 3)+\dots].$$

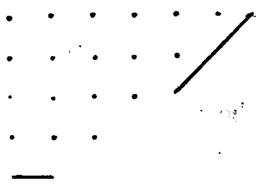
Этот коэффициент может быть записан в виде $E(n)-O(n)$, где $E(n)$ — число разбиений целого n с четным числом неравных частей, а $O(n)$ — число подразбиений того же n с нечетным числом неравных частей. Например, $E(7)=3$, а соответствующими разбиениями являются 61, 42, 43; $O(7)=2$ и разбиения суть 7 и 421.

Идея Франклина состояла в установлении соответствия между $E(n)$ и $O(n)$, что позволило бы найти разность $E(n)-O(n)$.

---

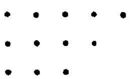
[1] Franklin F., *C. R. Acad. Sci. Paris*, 92 (1881), 448—450.

Предположим, что разбиение на неравные части имеет граф (для 76532)



с базисной линией (она может состоять и из одной точки) у основания и внешней диагональю (под углом в 45° к основанию, на которой не лежит ни одна из внутренних точек). Эта диагональ также может быть одной точкой. Предположим, что число точек на базисной линии равно b, а число точек на диагонали — d. Перемещение базисной линии вдоль диагонали уменьшает каждый раз число частей на единицу. Перемещение диагонали вниз к базисной линии каждый раз увеличивает число частей на единицу. И то, и другое перемещения в каждом случае изменяют четность числа частей. Возникает вопрос, при каких условиях оказывается возможным одно или другое из указанных перемещений без изменения в характере графа (неравные части при чтении их сверху вниз)?

Возможны три случая: $b<d$, $b=d$, $b>d$. При $b<d$ можно перемещать базисную линию. При $b=d$ опять-таки возможны перемещения базисной линии, чего нельзя сказать о диагонали, если только эта линия не пересекается с диагональю, как в случае



Для $b>d$ можно перемещать диагональ, если только она не пересекает базисную линию и $b=d+1$. В первом исключительном случае ($b=d$) разбиение имеет вид

$$b,\ b+1,\ b+2,\ \ldots,\ 2b-1$$

и

$$n=b+(b+1)+(b+2)+\ldots+(2b-1)=(3b^2-b)/2.$$

Во втором исключительном случае разбиение имеет вид

$$d+1,\ d+2,\ \ldots,\ 2d$$

и

$$n=(3d^2+d)/2.$$

Следовательно, $E(n)-O(n)=0$, если только $n=(3k^2\pm k)/2$, ($E(n)-O(n)=(-1)^k$ для $n=(3k^2\pm k)/2$) и тождество Эйлера записывается в виде

$$(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\ldots = 1-t-t^2+t^5+t^7-t^{12}-t^{15}+\ldots =$$
$$= 1+\sum_1^{\infty}(-1)^k\left(t^{(3k^2-k)/2}+t^{(3k^2+k)/2}\right). \quad (19)$$

Это тождество особенно интересно в связи с соотношением (1), так как

$$p(t)(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\ldots = 1,$$

откуда, приравнивая коэффициенты, получаем

$$p_n-p_{n-1}-p_{n-2}+p_{n-5}+p_{n-7}-\ldots+(-1)^k\left[p_{n-k_1}+p_{n-k_2}\right]+\ldots = 0, \quad (20)$$

где $k_1=(3k^2-k)/2$, $k_2=(3k^2+k)/2$. Соотношение (20) является рекуррентным соотношением для разбиений без ограничений, фактически использованным Мак-Магоном при вычислении p_n для n от 1 до 200 включительно.

4. Денумерант

Термин «денумерант» был введен Сильвестром для определения числа разбиений на заданные части, среди которых могут быть и равные. В соответствии с этим $D(n;\ a_1, a_2, \ldots, a_m)$ обозначает число разбиений целого n на части $a_1, a_2, \ldots, a_m$, или, что то же самое, число решений в целых неотрицательных числах уравнения

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m=n.$$

Соответствующая производящая функция имеет вид

$$D(t;\ a_1, a_2, \ldots, a_m)=\sum D(n;\ a_1, a_2, \ldots, a_m)\,t^n =$$
$$=1/(1-t^{a_1})(1-t^{a_2})\ldots(1-t^{a_m}).$$

В этих обозначениях число разбиений без ограничений определяется денумерантом $D(n;\ 1, 2, 3, \ldots)$; число разбиений без ограничений, в которых ни одна часть не превышает k, — денумерантом $D(n;\ 1, 2, 3, \ldots, k)$; число таких же разбиений, в которых все части нечетны, выражается денумерантом $D(n;\ 1, 3, 5, \ldots)$ и т. д.

Простейшим способом вычисления денумеранта является способ. использованный Эйлером, а именно вычисление с помощью рекуррентных соотношений. Так, например, из равенства

$$(1-t^k)D(t;\ 1, 2, 3, \ldots, k)=D(t;\ 1, 2, 3, \ldots, k-1)$$

немедленно следует, что

$$D(n;\ 1, 2, 3, \ldots, k) - D(n-k;\ 1, 2, 3, \ldots, k) = \\ = D(n;\ 1, 2, 3, \ldots, k-1). \quad (21)$$

Равенство (21) с учетом того, что $D(n;\ 1) = 1$, $n > 0$ (единственное разбиение -1^n), позволяет шаг за шагом вычислить денумерант для любого k. А так как

$$D(n;\ 1, 2, 3, \ldots, k) = D(n;\ 1, 2, 3, \ldots), \ n < k,$$

то может быть вычислен и денумерант для разбиений без ограничений. Однако никогда нельзя быть вполне уверенным в том, что на какой-либо ступени этого процесса не было допущено ошибки.

Кэли вместо рекуррентного метода с его неустранимым недостатком использовал разложение на простейшие дроби; например,

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \frac{1}{2(1-t)^2} + \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)},$$

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \frac{1}{6(1-t)^3} + \frac{1}{4(1-t)^2} + \frac{17}{72(1-t)} + \\ + \frac{1}{8(1+t)} + \frac{2+t}{9(1+t+t^2)}.$$

Из этих разложений находятся выражения для следующих денумерантов:

$$4D(n;\ 12) = 2n + 3 + (1,\ -1)\,\mathrm{pcr}\,2_n, \quad (22)$$

$$72D(n;\ 123) = 6n^2 + 36n + 47 + 9(1,\ -1)\,\mathrm{pcr}\,2_n + \\ + 8(2,\ -1,\ -1)\,\mathrm{pcr}\,3_n. \quad (23)$$

Здесь использована запись в обозначениях Кэли [8]; при этом pcr означает простой цикл, а $(1,\ -1)\,\mathrm{pcr}\,2_n$ является сокращенным обозначением функции, значение которой равно 1 при n четном и -1 при n нечетном.

Следует заметить, что разложение на простейшие дроби при кратном множителе $(1-t)$ выполняется полностью, что квадратный трехчлен $1+t+t^2$ не может быть разложен на множители и что наличие кратных множителей осложняет процесс разложения.

Для денумеранта $D(n;\ 1, 2, 3, \ldots, k)$ более простое разложение указывает Мак-Магон. Это разложение основано на том факте, что симметрические функции h_i переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ обладают следующей производящей функцией [ср. с задачей 2.27 (b)]:

$$1 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots = 1/(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)(1-\alpha_3 x)\ldots,$$

и если в качестве $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ принять соответственно $1, t, t^2, \ldots,$ то

$$1+h_1x+h_2x^2+\ldots=1/(1-x)(1-tx)(1-t^2x)\ldots$$

и

$$h_k=P(t,\,k)=1/(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\,\ldots\,(1-t^k). \qquad (24)$$

С другой стороны, та же самая замена переменных переводит симметрические функции $s_1, s_2, \ldots,$ являющиеся суммами степеней переменных и определяемые соотношениями

$$s_i=\alpha_1^i+\alpha_2^i+\ldots,$$

в функции

$$s_i=1+t^i+t^{2i}+\ldots=1/(1-t^i). \qquad (25)$$

Следовательно, соотношением между этими двумя типами симметрических функций служит разложение на простейшие дроби производящих функций денумерантов. Как уже указывалось в задаче 2.27,

$$1+h_1x+h_2x^2+\ldots=\exp(s_1x+s_2x^2/2+s_3x^3/3+\ldots)$$

или

$$k!h_k=Y_k(s_1,\,s_2,\,2s_3,\,\ldots,\,(k-1)!\,s_k)=C_k(s_1,\,s_2,\,s_3,\,\ldots,\,s_k),$$

где Y_k — полином Белла и C_k — цикловой индикатор (гл. IV).

Первые из этих соотношений, а именно

$$2h_2=s^2+s_2,$$

$$6h_3=s^3+3s_1s_2+2s_3,$$

соответствуют разложениям

$$\frac{2}{(1-t)(1-t^2)}=\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1-t^2},$$

$$\frac{6}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}=\frac{1}{(1-t)^3}+\frac{3}{(1-t)(1-t^2)}+\frac{2}{1-t^3}=$$

$$=\frac{1}{(1-t)^3}+\frac{3}{2(1-t)^2}+\frac{3}{2(1-t^2)}+\frac{2}{1-t^3}$$

(последнее выражение вытекает из первого). Из этого разложения находим, что

$$2D(n;\ 12)=n+1+(1,\,0)\operatorname{pcr}2_n,$$

$$12D(n;\ 123)=(n+1)(n+5)+3(1,\,0)\operatorname{pcr}2_n+4(1,\,0,\,0)\operatorname{pcr}3_n,$$

причем оба выражения проще соответствующих соотношений (22) и (23), данных Кэли. Заметив, что $(n+1)(n+5)=n^2+6n+5$ и что циклические члены равны 0, 3, 4 или 7, приходим к результату де Моргана, утверждающему, что $D(n;\ 123)$ является ближайшим целым числом к $(n+3)^2/12$.

В любом из двух рассмотренных типов разложений на простейшие дроби наличие циклических членов связано с неудобствами. Их можно полностью исключить, как указано Беллом [1], путем надлежащего выбора переменной n в денумеранте. Отметим, что для $D(n;\ 123)$ имеют место следующие равенства:

$$D(6n;\ 123)=3n^2+3n+1,\quad D(6n+3;\ 123)=3n^2+6n+3,$$
$$D(6n+1;\ 123)=3n^2+4n+1,\quad D(6n+4;\ 123)=3n^2+7n+4,$$
$$D(6n+2;\ 123)=3n^2+5n+2,\quad D(6n+5;\ 123)=3n^2+8n+5,$$

и что 6 является наименьшим общим кратным частей, равных 1, 2, 3.

Приводим общую формулировку этого результата, доказанного Беллом [1].

Теорема 5. *Если a является наименьшим общим кратным чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$, то денумерант $D(an+b;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m)$, $b=0,1,2,\ \ldots,\ a-1$ оказывается полиномом относительно n степени $m-1$, т. е.*

$$D(an+b)=c_0+c_1n+\ldots+c_mn^{m-1},$$

где $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_m$ — постоянные, не зависящие от n.

Эти постоянные оказываются полностью определенными в случае, когда известен денумерант для m различных значений n, например $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m$, или, что то же самое, когда $D(an+b)$ можно однозначно выразить через $D(an_1+b)$, $D(an_2+b)$, $\ldots$, $D(an_m+b)$. Действительно, согласно интерполяционной формуле Лагранжа,

$$D(an+b)=\sum_{j=1}^{m}\frac{F_j(n)}{F_j(n_j)}D(an_j+b),\tag{26}$$

в которой $F(x)=(x-n_1)(x-n_2)\ \ldots\ (x-n_m)$ и $F_j(x)=F(x)/(x-n_j)$. Положив $n_j=j$, получаем

$$D(an+b)=\binom{n-1}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}\frac{jD(aj+b)}{n-j}.\tag{27}$$

Таким образом, денумерант определен для всех значений n, если он известен для am значений n.

Для случая трех частей $a_1,\ a_2,\ a_3$ соотношение (27) принимает вид

$$2D(an+b)=(n-2)(n-3)D(a+b)-2(n-1)(n-3)D(2a+b)+$$
$$+(n-1)(n-2)D(3a+b).$$

Наконец, следует отметить, что Гупта [3], являющийся автором наиболее подробных таблиц разбиений (без ограничений), использовал метод, отличающийся от всех упомянутых выше. Этот метод состоит в следующем. Пусть $r(n, m)$ будет числом разбиений целого n, при которых одна часть равна m, а все остальные части — не меньше, чем m. Энумератором для $r(n, m)$ является

$$r_m(t) = \sum r(n, m) t^n = t^m/(1-t^m)(1-t^{m+1})(1-t^{m+2})\dots . \qquad (28)$$

Следовательно,

$$r(n, m) = D(n-m;\ m,\ m+1,\ \dots).$$

Далее,

$$p(n) = r(n, 1) + r(n, 2) + \dots + r(n, n), \qquad (29)$$

так как разбиения, обозначенные через $r(n, j)$, отличаются от разбиений $r(n, k)$ при k, отличном от j. Обратно, (29) получается суммированием тождеств

$$\frac{1}{(1-t^m)(1-t)^{m+1}}\dots - \frac{t^m}{(1-t^m)(1-t^{m+1})}\dots = \frac{1}{(1-t^{m+1})(1-t^{m+2})}\dots$$

или

$$t^{-m} r_m(t) = r_m(t) + t^{-m-1} r_{m+1}(t)$$

для значений m от 1 до бесконечности.

Суммирование этих тождеств от m до бесконечности и до $m+k$ дает соответственно

$$t^{-m} r_m(t) = r_m(t) + r_{m+1}(t) + \dots, \qquad (30)$$

$$t^{-m} r_m(t) = r_m(t) + r_{m+1}(t) + \dots + r_{m+k}(t) + t^{-m-k-1} r_{m+k+1}(t). \qquad (30a)$$

Из (30) следует, что

$$r(n, m) = r(n-m, m) + r(n-m, m+1) + \dots + r(n-m, n-m). \qquad (31)$$

Из (30а) вытекает соответствующий результат:

$$r(n, m) = r(n-m, m) + r(n-m, m+1) + \dots + r(n-m, m+k) + \\ + r(n-k-1, m+k+1), \qquad (32)$$

и, в частности, при $k = 0$ получаем

$$r(n, m) = r(n-m, m) + r(n-1, m+1). \qquad (33)$$

Эти соотношения, наряду с очевидными граничными условиями $r(k, m) = 0$, $k < m$, $r(m, m) = 1$, оказываются достаточными для подсчета, с помощью рекуррентного соотношения, всех разбиений. Эти вычисления в значительной мере сокращаются при использовании следующих результатов, полученных Гупта [3]:

$$r(m+j,\ m)=0,\quad 0<j<m,$$

$$r(2m+j,\ m)=\sum_{0}^{j} r(m+j,\ m+i)=1,\quad 0\leqslant j<m,$$

$$r(3m+j,\ m)=\sum_{0}^{a} r(2m+j,\ m+i)+r(3m+j+a+1,\ m+a+1)=$$
$$=2+a;\ a=[j/2],\quad 0\leqslant j<m,$$

и при $b=[j/3]$

$$r(4m+j,\ m)=\sum_{0}^{b}(3m+j,\ m+i)+r(4m+j+b+1,\ m+b+1)=$$
$$=3+[(m+j)/2]+[j(j+6)/12].$$

Кроме того,

$$r(4m+k,\ >m)=r(4m+k,\ m+1)+r(4m+k,\ m+2)+\ldots=$$
$$=m+2+[k/2]+[(m^2+2km+k^2-9)/12],\quad k<4.$$

В табл. 2 даны разбиения (без ограничений) чисел n в диапазоне от 1 до 99.

Целесообразно отметить, что между методом Гупта и методом рекуррентных соотношений Эйлера, связанным с уравнением (20), имеется следующая зависимость. Во-первых,

$$r_1(t)=\frac{t}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}\ \ldots=tp(t).$$

Следовательно, $r(n,\ 1)=p(n-1)$. Далее,

$$r_2(t)=\frac{t^2}{(1-t^2)(1-t^3)}\ \ldots=t^2(1-t)\,p(t)$$

и $r(n,\ 2)=p(n-2)-p(n-3)$. Таким же образом

$$r(n,\ 3)=p(n-3)-p(n-4)-p(n-5)+p(n-6),$$
$$r(n,\ 4)=p(n-4)-p(n-5)-p(n-6)+p(n-8)+$$
$$+p(n-9)-p(n-10).$$

Следовательно, соотношение (29) соответствует соотношению

$$p(n)=p(n-1)+[p(n-2)-p(n-3)]+[p(n-3)-p(n-5)+$$
$$+p(n-6)]+[p(n-4)-p(n-5)-p(n-6)+p(n-8)+$$
$$+p(n-9)-p(n-10)]+\ldots,$$

что свидетельствует о последовательном характере вывода соотношения (20).

Таблица 2

Число разбиений (без ограничений) числа n
$n=10k+m$

m \ k	0	1	2	3	4	5	6
0		42	627	5604	37338	2 04226	9 66467
1	1	56	792	6842	44583	2 39943	11 21505
2	2	77	1002	8349	53174	2 81589	13 00156
3	3	101	1255	10143	63261	3 29931	15 05499
4	5	135	1575	12310	75175	3 86155	17 41630
5	7	176	1958	14883	89134	4 51276	20 12558
6	11	231	2436	17977	1 05558	5 26823	23 23520
7	15	297	3010	21637	1 24754	6 14154	26 79689
8	22	385	3718	26015	1 47273	7 15220	30 87735
9	30	490	4565	31185	1 73525	8 31820	35 54345

m \ k	7	8	9
0	40 87968	157 96476	566 34173
1	46 97205	180 04327	641 12359
2	53 92783	205 06255	725 33807
3	61 85689	233 38469	820 10177
4	70 89500	265 43660	926 69720
5	81 18264	301 67357	1046 51419
6	92 89091	342 62962	1181 14304
7	106 19863	388 87673	1332 30930
8	121 32164	441 08109	1501 98136
9	138 48650	499 95925	1692 29875

5. Совершенные разбиения

Совершенным разбиением числа n называется такое разбиение, в котором содержится лишь одно разбиение каждого числа, меньшего n, при условии, что равные части считаются неразличимыми. Так, например, 1^n является совершенным разбиением для каждого n. Для $n=7$ разбиения 41^3, 421, $2^3 1$, 1^7, и только эти разбиения, являются совершенными.

Если все части разбиения рассматривать как разновесы для весов, то совершенные разбиения оказываются решениями проблемы определения такого набора разновесов, с помощью которого (при условии размещения разновесов на одной чаше весов) можно взвесить, и притом лишь одним способом, любой предмет, вес которого выражается целым числом (или установить, и притом только одним путем, вес любого предмета с точностью до единицы). С помощью аналогичной интерпретации удается связать совершенные разбиения с коробками сопротивлений, предназначенными для электрических измерений. Наконец, совершенные разбиения естественно связаны с системой счисления при заданном ее основании.

Для того чтобы найти все совершенные разбиения, отметим прежде всего, что в каждом таком разбиении должна содержаться по крайней мере одна часть, равная 1 (единственное разбиение 1). Предположим, что в нем содержится q_1-1 частей, равных единице. Тогда все числа, меньшие чем q_1, имеют только одно разбиение и q_1 должно рассматриваться как следующая часть совершенного разбиения. Пусть в разбиении содержится q_2-1 частей, равных q_1; тогда все числа, вплоть до $q_1 q_2$, единственным способом выражаются с помощью 1 и q_1. Продолжая аналогичные рассуждения, приходим к совершенному разбиению:

$$1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}(q_1q_2q_3)^{q_4-1}\dots(q_1q_2\cdots q_{k-1})^{q_k-1}.$$

Следовательно,

$$n=q_1-1+q_1(q_2-1)+\dots+(q_1q_2\cdots q_{k-1})(q_k-1)=q_1q_2\cdots q_k-1.$$

Числа $q_1q_2, \dots, q_k$ *в указанном порядке* полностью определяют данное разбиение; при этом $q_i>1$ для любого i. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Число совершенных разбиений целого n равно числу упорядоченных разложений целого $n+1$ на множители без единичных множителей.*

Различными разложениями на множители числа 8 служат 8, 42, 24, 222. Все они соответствуют приведенным выше совершенным разбиениям 1^7, 1^34, 12^3, 124 числа 7.

6. Композиции

Подсчет числа композиций тесно связан с подсчетом числа сочетаний с повторениями. Если $c_m(t)$ является перечисляющей производящей функцией для композиций, имеющих точно m частей, то

$$c_m(t)=\sum c_{m,n}t^n=(t+t^2+t^3+\dots)^m=t^m(1-t)^{-m} \qquad (34)$$

и

$$c_{m,n}=\binom{n-1}{m-1}.$$

Отметим, что наличие в производящей функции m одинаковых сомножителей говорит о том, что все части и позиции в композиции равноправны. При этом каждый сомножитель определяет одну из позиций композиции и, таким образом, содержит выражения для всех возможных величин частей.

Композиции с точно m частями, каждая из которых не превышает s, имеют следующую производящую функцию:

$$c_m(t;\, s) = (t + t^2 + \ldots + t^s)^m. \tag{35}$$

Производящая функция для композиций точно с m нечетными частями имеет следующий вид:

$$o_m(t) = (t + t^3 + t^5 + \ldots)^m, \tag{36}$$

а производящая функция для композиций с нечетными частями, не превосходящими $2s+1$, такова:

$$o_m(t;\, s) = (t + t^3 + t^5 + \ldots + t^{2s+1})^m. \tag{37}$$

Производящая функция без ограничений на число или величину частей имеет вид

$$c(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t) = \frac{t}{1-2t} \tag{38}$$

и

$$c_n = 2^{n-1}. \tag{39}$$

Аналогично этому производящая функция без ограничений на число частей, но не содержащая частей, превосходящих s, равна

$$c(t;\, s) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t;\, s) = \frac{t - t^{s+1}}{1 - 2t + t^{s+1}}. \tag{40}$$

Столь же легко можно получить выражения и для производящих функций иного вида. С этими функциями читатель встретится в задачах. Однако в качестве заключительного примера покажем, что если первые $k\,(k < m)$ частей должны равняться $s_1 s_2 \ldots s_k$ *в заданном порядке*, то производящая функция для соответствующих композиций с m частями равна

$$t^{s_1+s_2+\cdots+s_k}(t + t^2 + \ldots)^{m-k}.$$

Если позиции заданных частей в композиции не определены, то производящей функцией является

$$\binom{m}{k} t^{s_1+s_2+\cdots+s_k}(t + t^2 + \ldots)^{m-k}.$$

Далее, если каждая из остальных частей композиции не должна равняться ни одной из заданных, то соответствующая производящая функция такова:

$$t^{s_1+s_2+\cdots+s_k}(t + t^2 + \ldots - t^{s_1} - t^{s_2} - \ldots - t^{s_k})^{m-k}.$$

7. Подсчет числа корневых деревьев

Задача о подсчете числа корневых деревьев является наиболее простой среди задач такого рода. Поэтому для общей ориентировки в этом вопросе она и рассматривается первой. Имеют место два случая: 1) все точки дерева, за исключением корня, одинаковы; 2) все точки различны. Точки считаются различными, если

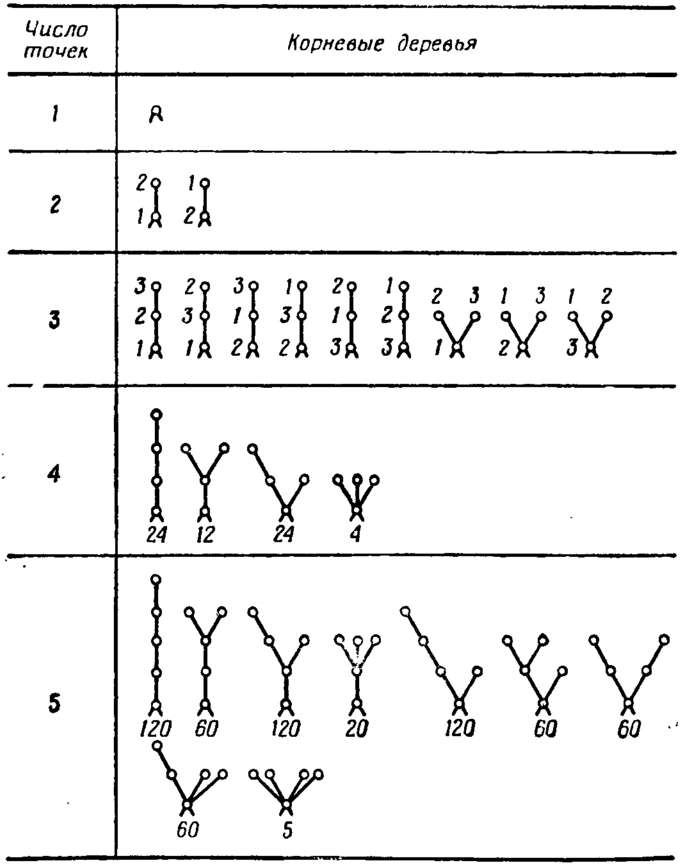


Рис. 3. Корневые деревья с точками, снабженными ярлыками.

они снабжены ярлыками (этикетками) или числовыми индексами; удобно, хотя и не обязательно, снабдить ярлыком также и корень.

На рис. 3 показаны все различные корневые деревья с n различными точками для значений n от 1 до 5. (Для $n=4,5$ указано только число деревьев с различными точками, соответствующих каждому корневому дереву данного вида с одинаковыми точками.) Как уже отмечалось, на рис. 2 изображены корневые деревья с одинаковыми точками,

Рассмотрим первый случай. Положим, что r_n — число различных корневых деревьев с n точками, в которых все точки (за исключением корневых) одинаковы. Пусть $r_n(m)$ является числом деревьев рассматриваемого типа, у каждого из которых в корне сходятся m линий, так что

$$r_n = \sum_{m=1} r_n(m).$$

Тогда, во-первых, $r_n(1) = r_{n-1}$, так как эти корневые деревья могут быть образованы добавлением одной линии у корня корневых деревьев с $n-1$ точками и последующим перемещением корня. Тем же путем для четного n можно установить, что

$$r_{2q}(2) = r_1 r_{2q-2} + r_2 r_{2q-3} + \ldots + r_{q-1} r_q.$$

В то же время для нечетного n

$$r_{2q+1}(2) = r_1 r_{2q-1} + r_2 r_{2q-2} + \ldots + r_{q-1} r_{q+1} + \binom{r_q + 1}{2}.$$

Получается этот результат потому что в случае присоединения корневых деревьев с одним и тем же числом точек к двум линиям у корня число возможностей (вследствие симметрии этих линий у корня) равно не произведению r_q^2, а числу сочетаний по два с повторениями из r_q элементов.

Пусть теперь в корне сходится m линий. Предположим, далее, что присоединяемые корневые деревья классифицируются по числу точек с помощью разбиений на m частей

$$(1^{k_1} 2^{k_2} \ldots (n-1)^{k_{n-1}}).$$

В этих разбиениях $k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1} = m$ и $k_1 + 2k_2 + \ldots \ldots + (n-1) k_{n-1} = n-1$. Тогда число различных возможностей, соответствующих этому разбиению, оказывается равным произведению

$$\binom{r_1 + k_1 - 1}{k_1} \binom{r_2 + k_2 - 1}{k_2} \ldots \binom{r_{n-1} + k_{n-1} - 1}{k_{n-1}},$$

в котором каждый множитель дает число возможностей для повторяющихся частей.

Наконец, r_n есть сумма всех таких чисел по всем разбиениям числа $n-1$, т. е.

$$r_n = \sum \binom{r_1 + k_1 - 1}{k_1} \binom{r_2 + k_2 - 1}{k_2} \ldots \binom{r_{n-1} + k_{n-1} - 1}{k_{n-1}}, \qquad (41)$$

где $k_1+2k_2+\ldots+nk_{n-1}=n-1$. Этот результат выглядит более просто, если его выразить с помощью производящей функции:

$$r(x)=r_1x+r_2x^2+\ldots=$$
$$=x\sum\binom{r_1+k_1-1}{k_j}x^{k_1}\ldots\sum\binom{r_j+k_j-1}{k_j}x^{jk_j}\ldots=$$
$$=x(1-x)^{-r_1}(1-x^2)^{-r_2}\ldots\,. \tag{42}$$

Это и есть результат Кэли. Как отмечалось во введении в настоящую главу, последний результат весьма напоминает производящую функцию (1) для разбиений. Производящая функция $r(x)$ оказывается энумератором по числу точек для корневых деревьев, все точки которых, кроме корневой, одинаковы.

Обратное утверждение высказано Пойа [12], и его стоит иметь в виду в дальнейшей работе. Вычислим логарифм (42); тогда

$$\log r(x)=\log x+\sum r_j\log(1-x^j)^{-1}=$$
$$=\log x+\sum r_j(x^j+x^{2j}/2+x^{3j}/3+\ldots)=$$
$$=\log x+r(x)+r(x^2)/2+r(x^3)/3+\ldots$$

или

$$r(x)=x\exp[r(x)+r(x^2)/2+r(x^3)/3+\ldots]. \tag{43}$$

Тот же прием может быть использован для корневых деревьев с различными точками, т. е. для деревьев, у которых все точки снабжены ярлыками. Обозначим число таких деревьев с n точками через R_n, а число деревьев с m линиями у корня через $R_n(m)$. Отметим сначала, что ярлык для корня может быть избран n способами, и при любом заданном выборе для обозначений оставшихся $n-1$ ярлык.

В этом случае, следуя Пойа [12], получаем, что

$$R_n(1)=nR_{n-1},$$
$$R_n(2)=\frac{n}{2!}\sum_{j=1}^{n-2}\binom{n-1}{j}R_jR_{n-1-j},$$

так как в последнем случае ярлыки для корневых деревьев, присоединенных к двум линиям у корня, могут быть избраны $\binom{n-1}{j}$ способами, когда одно из присоединенных деревьев имеет j точек. Заметим, что благодаря наличию ярлыков присоединяемые деревья не могут быть одинаковыми. Чтобы исключить возможные повторения, которые могут иметь место в результате перестановок линий у корня, вводится множитель 2!.

При $R_0 = 0$ этим результатам можно придать вид

$$R_n(1) = nR^{n-1}, \quad R^j \equiv R_j,$$

$$2!R_n(2) = n(R+R)^{n-1}, \quad R^j \equiv R_j.$$

Из этого легко усмотреть, что

$$m!R_n(m) = n(R+R+\ldots+R)^{n-1}, \quad R^j \equiv R_j, \tag{44}$$

где в правой части содержится m слагаемых.

Доказательство (44) получается немедленно, если заметить, что число способов распределения $n-1$ ярлыков по деревьям соответственно с p, q, r, ... точками выражается полиномиальным коэффициентом $(n-1)!/p!q!r!\ldots$.

Если в качестве энумератора для чисел R_n выбрана экспоненциальная форма, то

$$R(x) = R_1 x + R_2 x^2/2! + R_3 x^3/3! + \ldots .$$

Далее, из $R_1 = 1$ и

$$R_n = \sum_{m=1} R_n(m), \quad n > 1,$$

немедленно следует результат, полученный Пойа [12]:

$$R(x) = x + xR(x) + xR^2(x)/2! + \ldots = x \exp R(x). \tag{45}$$

Из краткого перечисления, приведенного на рис. 3, усматриваем, что $R_n = n^{n-1}$ для $n \leqslant 5$, и, действительно, выражение (45) обращающееся в нуль при $x = 0$, дает

$$R(x) = x + 2x^2/2! + 3^2x^3/3! + \ldots + n^{n-1}x^n/n! + \ldots,$$

следовательно,

$$R_n = n^{n-1}. \tag{46}$$

Это есть формула Кэли.

Для случая различных точек нет существенной разницы между деревьями и корневыми деревьями. Так как каждое свободное дерево с n различными точками соответствует n различным корневым деревьям, то при T_n, равному числу деревьев с n различными точками, приходим к результату

$$T_n = n^{-1}R_n = n^{n-2}, \tag{47}$$

также полученному Кэли.

Эти результаты легко распространяются на ориентированные деревья. Дерево называется ориентированным, если каждая из его линий получает направление, для выбора которого имеется только две возможности. Для наглядности выбраньые направления указываются стрелками.

Числа таких деревьев с различными точками немедленно находятся на основании следующих замечаний: (1) $n-1$ линий (в деревьях с n точками) могут быть ориентированы 2^{n-1} способами; (2) все эти ориентации дерева или корневого дерева с различными точками различны. Следовательно, если числа ориентированных деревьев и свободных деревьев с различными точками обозначить соответственно через P_n и Q_n, то

$$P_n = 2^{n-1} R_n = (2n)^{n-1}, \tag{48}$$

$$Q_n = 2^{n-1} T_n = 2\,(2n)^{n-2}. \tag{49}$$

Рассмотрим случай одинаковых точек. Обозначим через ϱ_n число ориентированных корневых деревьев с n точками, а через $\varrho_n(m)$ — соответствующее число корневых деревьев с m линиями у корня. Тогда $\varrho_n(1) = 2\varrho_{n-1}$, так как линия у корня может иметь две ориентации. Аналогично в случае m линий у корня появление множителя 2 связано с числом ориентированных деревьев, которые могут быть присоединены к линии у корня. При этом выражение, соответствующее (41), примет вид

$$\varrho_n = \sum \binom{2\varrho_1 + k_1 - 1}{k_1} \binom{2\varrho_2 + k_2 - 1}{k_2} \cdots \binom{2\varrho_{n-1} + k_{n-1} - 1}{k_{n-1}}.$$

Следовательно, если энумератор имеет вид

$$\varrho(x) = \varrho_1 x + \varrho_2 x^2 + \ldots + \varrho_n x^n + \ldots, \tag{50}$$

то отсюда, как выше для $r(x)$, следует, что

$$\varrho(x) = x(1-x)^{-2\varrho_1}(1-x^2)^{-2\varrho_2} \ldots (1-x^k)^{-2\varrho_k} \ldots, \tag{51}$$

$$\varrho(x) = x \exp 2\,[\varrho(x) + \varrho(x^2)/2 + \ldots + \varrho(x^k)/k + \ldots]. \tag{52}$$

8. Теорема Пойа

Изложенные выше результаты могут быть объединены и обобщены теоремой, установленной Пойа в его классическом исследовании деревьев и родственных им образований. Так как теорема содержит несколько различных понятий, а терминология и формулировки, принятые нами, отличаются от тех, которыми пользуется Пойа, необходимо сделать несколько предварительных замечаний.

Теорема Пойа говорит о связи между двумя энумераторами с одним и тем же числом переменных. Для удобства здесь будут рассматриваться энумераторы с двумя переменными.

Первый из этих энумераторов является энумератором $S(x, y)$ запаса (набора) объектов в соответствии с их рангом, размером или емкостью, учитывающим две из заданных характеристик.

В качестве примера можно рассмотреть деревья, некоторые точки которых снабжаются ярлыками и потому оказываются различными; перечисление ведется в соответствии с числом точек и числом ярлыков. Производящей функцией $S(x, y)$ с двумя переменными может служить любая функция вида [соотношение (2.4)]

$$S(x, y)=\sum S_{ij} f_i(x) g_j(y),$$

где функции $(f_i(x)), (g_j(y))$ линейно независимы. Выбор этих функций в каждом отдельном случае подсказывается самой задачей. Так, например, в гл. 1 подсчет числа сочетаний проводился с помощью обычных производящих функций, в то время как подсчет числа перестановок осуществлялся с помощью экспоненциальных производящих функций.

Второй энумератор $T(x, y)$ учитывает те же характеристики, что и первый, для различных (не эквивалентных) упорядоченных выборок по n объектов из запаса при условии, что каждый из объектов выбирается независимо. В этом случае $T(x, y)$ отличается от $S(x, y)$ только числовыми коэффициентами, которые можно обозначить через T_{ij}.

Изложенное выше еще не определяет природы различия выборок по n объектов и связи между двумя признаками для этих выборок и двумя признаками для отдельных объектов.

Что касается различимости, то две выборки считаются различными, если они отличаются друг от друга по меньшей мере одним из объектов. Но, кроме того, различие может быть и в порядке выбора объектов.

Две упорядоченные выборки (из одних и тех же элементов) называются эквивалентными в случае наличия в группе G перестановки, переводящей одну выборку в другую. Группа G определяется своим *цикловым индексом*:

$$H_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)=\frac{1}{h} \sum h_{i_1 i_2 \ldots i_n} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \ldots t_n^{i_n},$$

где $i_1+2i_2+\ldots+ni_n=n$, h — общее число перестановок в группе G и $h_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ — число перестановок, содержащих i_1 циклов длины один, i_2 циклов длины 2 и т. д. Отметим, что $H_n(1, 1, \ldots, 1)=1$, и если все упорядочения выборки различны, то $H_n=t_1^n$. В случае, когда все упорядочения одинаковы, имеем

$$H_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)=C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)/n!,$$

где C_n — цикловой индикатор (см. гл. 4).

Что же касается второго вопроса, т. е. сочетания признаков, то соответствующее правило выглядит следующим образом.

Признаки должны оказаться такими, чтобы в случае когда все упорядочения выборки различны, энуменатор $T_n(x, y)$ выборок n элементов удовлетворял естественному при использовании производящих функций соотношению $T_n(x, y) = S^n(x, y)$.

Это правило можно легко видоизменить с целью приспособления к выборкам элементов из более чем одного запаса. Однако, во избежание дальнейших усложнений, эта модификация правила нами не рассматривается. При выполнении указанного выше правила сочетания признаков говорят, что энумератор $S(x, y)$ удовлетворяет *правилу произведения*.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема (Пойа). *Пусть объекты независимо друг от друга выбираются из некоторого запаса с энумератором* $S \equiv S(x_1, x_2, \ldots)$, *удовлетворяющим правилу произведения. Допустим, далее, что эквивалентность упорядоченных выборок определяется цикловым индексом* $H_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. *Тогда энумератором различных (неэквивалентных) выборок по n элементов служит выражение*

$$H_n(S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

в котором $S_1 = S$ и S_k — энумератор выборок по k элементов, остающихся инвариантными при циклических перестановках длины k.

Доказательство этой теоремы следующее. Предположим, что цикловой индекс H имеет порядок h; поэтому перестановки, охватываемые индексом H, можно обозначить через $H_1, H_2, \ldots, H_h$. Предположим, далее, что энумератором выборок инвариантных относительно перестановки H_i, является выражение

$$E(H_i) \equiv E(x_1, x_2, \ldots; H_i).$$

Каждая данная выборка C (n определенных элементов в фиксированном порядке) является инвариантной относительно некоторого числа g из этих перестановок (g не меньше единицы, так как одна из перестановок является тождественной). Действительно, эти g перестановок представляют собой подгруппу H и g — делитель h. Для всех перестановок из H существует h/g выборок, эквивалентных заданной выборке C (включая и выборку C).

Далее, в сумме

$$E(H_1) + E(H_2) + \ldots + E(H_h)$$

любая выборка, эквивалентная C, появляется точно в g слагаемых (так как g перестановок оставляют ее инвариантной) Следовательно, все слагаемые вместе вносят в сумму $g(h/g) = h$ выборок. Потому выражение

$$[E(H_1) + E(H_2) + \ldots + E(H_h)]/h$$

перечисляет неэквивалентные выборки.

Положим, что H_i является перестановкой с цикловой структурой $1^{i_1}2^{i_2}\ldots$. Согласно правилу произведения, можно провести поцикловое построение энумератора $E(H_i)$. И если энумератором для циклов длины k служит S_k, то

$$E(H_i)=S_1^{i_1}S_2^{i_2}\ldots .$$

Суммированием по i получаем утверждение теоремы.

Отметим, что единственными выборками, инвариантными относительно циклов длины k, являются такие выборки, в которых все элементы одинаковы. Если энумератор запаса (простоты ради, для двух переменных) имеет вид

$$S(x,\ y)=\sum S_{nm}x^n y^m,$$

то

$$S_k(x,\ y)=\sum S_{nm}x^{kn}y^{km}=S(x^k,\ y^k), \tag{53}$$

так как если в выборке все элементы одинаковы, то соответствующие показатели степеней перемножаются.

Рассмотрим запасы, состоящие из элементов, над признаками которых можно осуществлять перестановки. Тогда, как уже упоминалось ранее, энумератором по этим признакам служит выражение

$$S(x,\ y)=\sum S_{nm}x^n y^m/m!$$

Выборки одинаковых элементов отвечают в этом случае таким выборкам, для которых $m=0$ и, значит,

$$S_k(x,\ y)=\sum S_{n0}x^{kn}=S(x^k,\ 0).$$

Основываясь на этих случаях, можно сформулировать утверждение теоремы на более раннем этапе, чем это сделал Пойа.

Два частных случая теоремы Пойа, базирующиеся на материале предыдущих глав, могут оказаться полезными для уяснения ее сущности.

Рассмотрим, во-первых, как и прежде, перестановки с цикловым индексом, равным t_1^n. Допустим, что запас состоит из m различных элементов, энумератор которых равен $x_1+x_2+\ldots+x_m$. Тогда, согласно теореме, энумератором перестановок по n элементов с повторениями оказывается, как и в гл. 1, выражение $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$.

Далее, рассмотрим сочетания с повторениями, считая, что запас элементов оказывается таким же, что и в первом случае, но что цикловым индексом является $C_n(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)/n!$. Тогда, согласно теореме, сочетания из m различных элементов по n с повторением перечисляются с помощью выражения

$$C_n(x_1+x_2+\ldots+x_m,\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2,\ \ldots,\ x_1^n+x_2^n+\ldots$$
$$\ldots+x_m^n)/n!$$

Это можно проверить следующим путем. Энумератором указанных выше сочетаний с любым числом элементов в каждом, как указывалось в гл. 1, является выражение (в обозначениях настоящей главы)

$$G(t) = (1 + x_1 t + x_1^2 t^2 + \ldots)(1 + x_2 t + x_2^2 t^2 + \ldots)\ldots$$
$$\ldots(1 + x_m t + x_m^2 t^2 + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) t^n,$$

и если результат теоремы правилен, то

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_n)/n!,$$

где для сокращения записи

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_m^k$$

(отметим, что s_k — это сумма k-х степеней m переменных $x_1, \ldots, x_m$).

Чтобы доказать это утверждение, отметим, во-первых, что

$$G(t) = \exp\log(1 - x_1 t)^{-1}(1 - x_2 t)^{-1} \ldots (1 - x_m t)^{-1} =$$
$$= \exp(\log(1 - x_1 t)^{-1} + \log(1 - x_2 t)^{-1} + \ldots + \log(1 - x_m t)^{-1}) =$$
$$= \exp\sum_{k=1}^{m}(x_k t + x_k^2 t^2/2 + \ldots + x_k^n t^n/n + \ldots) =$$
$$= \exp(s_1 t + s_2 t^2/2 + \ldots + s_n t^n/n + \ldots). \qquad (54)$$

С другой стороны, на основании соотношения (4.3а)

$$\sum t^n C_n(s_1, s_2, \ldots, s_n)/n! = \exp(s_1 t + s_2 t^2/2 + \ldots).$$

Это и доказывает утверждение.

В порядке проверки, имеющей непосредственный интерес, теорему Пойа можно использовать в целях доказательства соотношения (43), т. е. тождества, определяющего энумератор корневых деревьев. С этой целью, как и прежде, рассмотрим корневые деревья с n линиями у корня. Запас состоит из корневых деревьев, которые можно присоединить к упомянутым линиям. Энумератор этого запаса (по числу точек) по-прежнему обозначается через $r(x)$. Любая перестановка n линий оставляет выборку без изменения. Следовательно, цикловой индекс равен $C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)/n!$. Так как корень «вносит» одну точку, то энумератором для корневых деревьев с n линиями служит выражение

$$xC_n(r(x), r(x^2), \ldots, r(x^n))/n!$$

Используя соотношение (4.3), вновь приходим к соотношению

$$r(x) = x \exp(r(x) + r(x^2)/2 + \ldots + r(x^k)/k + \ldots),$$

что совпадает с (43).

Подобным же методом проверяется соотношение (52). Иным в этом случае оказывается лишь запас. Так как линия у корня может иметь две ориентации, то энумератором этого запаса служит выражение $2\varrho(x)$.

Рассмотрим теперь корневые деревья с p точками, из которых m, включая корень, снабжены ярлыками. Точка, снабженная ярлыком, отличается от всех других снабженных ярлыками точек, а также от точек, ярлыков не имеющих. Ярлыки различных точек можно переставлять. Удобно, хотя в этом и нет необходимости, в качестве ярлыков взять числа. Можно, например, обозначить единственный ярлык цифрой 1, цифрами 1 и 2 — два ярлыка и т. д. В каждом случае ярлыки могут избираться совершенно независимо. Отметим, что этот способ снабжения ярлыками отличается от выбора каждого требуемого ярлыка из некоторого запаса c ярлыков (его можно считать запасом различных расцветок). Некоторые из подобных случаев рассматриваются в задачах.

Пусть r_{pm} является числом корневых деревьев с p точками, m из которых, включая корень, снабжены ярлыками, и пусть их энумератором является выражение

$$r(x, y) = xr_1(y) + x^2r_2(y) + \ldots + x^pr_p(y) + \ldots =$$

$$= \sum_1^\infty x^p \sum_0^p r_{pm}y^m/m!$$

Отметим, что y является коммутирующей переменной и что $r(x, 0) = r(x)$ — функция, определенная выше.

Для корневых деревьев с точками, снабженными ярлыками и n линиями у корня, энумератором запаса служит функция $r(x, y)$. Как и прежде, цикловой индекс равен $C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)/n!$, причем никакая пара корневых деревьев не может иметь одинаковых ярлыков. Так как корень, снабженный ярлыком, имеет энумератор, равный $x(1+y)$, то

$$r(x, y) = x(1+y)\exp[r(x, y) + r(x^2)/2 + \ldots + r(x^k)/k + \ldots]. \quad (55)$$

Для $y=0$ это выражение превращается в (43). Используя оба выражения, приходим к соотношению, имеющему симметрическую форму:

$$r(x, y)\exp r(x) = (1+y)r(x)\exp r(x, y). \quad (56)$$

Дифференцированием этого соотношения можно получить результаты, удобные для вычислений. Используя для обозначений частных производных нижние индексы $[r_x(x, y) = \partial r(x, y)/\partial x$ и т. д.], получаем, что

$$a(x)\, r_x(x, y) = (1+y)\, r_y(x, y) = r(x, y)/[1-r(x, y)], \tag{57}$$

где для краткости принято, что

$$a(x) = r(x)/r'(x)\,[1-r(x)],$$

причем штрих означает обычную производную. Отметим, что $a(x)$ является рядом по степеням x, а именно

$$a(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots =$$
$$= x - x^3 - x^4 - 2x^5 + x^6 - 3x^7 + 4x^8 - x^9 + x^{10} + \ldots .$$

Тогда из первой половины (57) следует, что

$$(1+y)\, r'_n(y) = nr_n(y) - (n-2)\, r_{n-2}(y) - (n-3)\, r_{n-3}(y) -$$
$$- 2(n-4)\, r_{n-4}(y) + \ldots + (n-k)\, r_{n-k}(y)\, a_{k+1} + \ldots . \tag{58}$$

Таблица 3

Числа корневых деревьев с точками, снабженными ярлыками

Число точек Число ярлыков	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719
1	1	2	5	13	35	95	262	727	2033	5714
2		2	9	34	119	401	1316	4247	13532	42712
3			9	64	326	1433	5799	22224	81987	2 93987
4				64	625	4016	21256	1 00407	4 39646	18 23298
5					625	7776	60387	3 73895	20 19348	99 41905
6						7776	1 17649	10 71904	76 01777	462 05469
7							1 17649	20 97152	219 35132	1753 29789
8								20 97152	430 46721	5083 83608
9									430 46721	10000 00000
10										10000 00000

С помощью последнего соотношения и были подсчитаны значения для табл. 3 $[m = 0(1)n;\ n = 1(1)10]$. Корневые деревья с точками, полностью снабженными ярлыками, перечисляются функцией r_{nn}. Поэтому r_{nn} должна совпадать с функцией R_n, заданной соотношением (46), а из (56) должно следовать (45). Чтобы это показать, положим $xy = z$ и

$$r(x, z) = R_0(z) + xR_1(z) + \ldots + x^nR_n(z) + \ldots, \tag{59}$$

где

$$R_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty} r_{n+m,\, m} z^m/m!.$$

Отметим, что если $R(x)$ определено соотношением (45), $R_0(z)$ совпадает с $R(z)$.

Действительно, так как (56) принимает вид

$$r(x,\ z)\exp r(x)=(x+z)\,[r(x)/x]\exp r(x,\ z),$$

а $r(0,\ z)=R_0(z)$, $r(0)=0$, $(r(x)/x)_{x=0}=1$, то немедленно следует соотношение

$$R_0(z)=z\exp R_0(z),$$

которое, в принятых теперь обозначениях, и оказывается соотношением (45).

Для полноты отметим, что

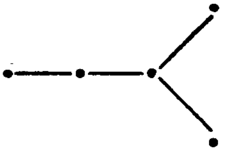
$$\begin{aligned} xa(x)\,r_x(x,\ z) &= (x^2+xz-za(x))\,r_z(x,\ z)= \\ &= (x^2+xz-za(x))\,r(x,\ z)/(x+z)(1-r(x,\ z)). \qquad (60) \end{aligned}$$

9. Деревья

Для того чтобы установить связь между энумераторами деревьев и корневых деревьев, следует найти метод, с помощью которого каждое дерево можно уподобить корневому. Эта операция может быть осуществлена двумя путями.

Во-первых, каждое дерево имеет либо центр, либо бицентр. Отбросив все наружные линии дерева, получим меньшее дерево с несколькими внешними линиями, которые в свою очередь также отбрасываются. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не придем к единственной точке — центру или к единственной линии, совокупность крайних точек которой называют бицентром. Дерево с центром выглядит как корневое дерево, корнем которого служит центр; дерево с бицентром выглядит как два корневых дерева, связанных линией бицентра. Однако зависимость между упомянутыми выше энумераторами легче выявить (следуя Пойа) вторым путем, суть которого такова. Определим высоту любой ветви дерева в любой точке числом линий, содержащихся в этой ветви. Все внешние точки имеют одну ветвь, которая содержит все линии, и, следовательно, в дереве из n точек все внешние точки имеют высоту $n-1$. Назовем высотой заданной точки высоту наибольших из ее ветвей. Тогда точку с наименьшей высотой назовем центроидом. Каждое дерево имеет либо центроид, либо бицентроид. Бицентроид состоит из двух точек одинаковой высоты, соединенных линией (дерево из двух точек оказывается одновременно бицентроидальным и бицентральным).

Эти два представления деревьев, с помощью центров и центроидов, совпадают для $n<5$. Однако уже дерево



($n=5$) имеет бицентр, но не бицентроид, а лишь центроид (точка разветвления).

Если дерево бицентроидально, оно должно состоять из двух деревьев с одинаковым числом точек (причем в каждое из них следует включить центроидальную точку) по обе стороны от линии, соединяющей два центроида (по определению). Следовательно, при нечетном числе точек никакое дерево не окажется бицентроидальным, а при четном числе точек, скажем $2m$, каждое из двух деревьев, составляющих заданное дерево, может рассматриваться как корневое дерево из m точек.

При нечетном числе точек дерево, не содержащее разветвлений, имеет центроид высотой $(n-1)/2$, и никакое дерево, содержащее такое же число точек, не может иметь центроид большей высоты. Для дерева с четным числом точек максимальная высота центроида составляет $[(n-1)/2]$ (квадратные скобки, как обычно, означают целую часть заключенного в них числа). Дерево такой высоты можно, например, получить из только что упоминавшегося дерева без разветвлений с меньшим на единицу числом точек, если к его центроиду присоединить линию. Можно доказать, что в этом случае высота $[(n-1)/2]$ оказывается максимальной.

Пусть $t'(x, y)$ есть энумератор для центроидальных деревьев, точки которых снабжены ярлыками; $t''(x, y)$ — энумератор для бицентроидальных деревьев с ярылками. Тогда выражение

$$t(x, y)=t'(x, y)+t''(x, y)$$

оказывается энумератором для деревьев с ярлыками. Допустим, что $t'_p(y)$, $t''_p(y)$ и $t_p(y)$ являются соответствующими энумераторами по ярлыкам деревьев из p точек. С помощью приведенных выше замечаний и теоремы Пойа немедленно описываются все бицентроидальные деревья. Во-первых,

$$t''_{2q+1}(y)=0, \qquad (61)$$

а так как центроиды подобны, то цикловой индекс равен $(t_1^2 + t_2)/2$ и

$$t''_{2q}(y) = (r_q^2(y) + r_q)/2. \tag{62}$$

Центроидальные деревья включаются в перечисление корневых деревьев (классифицируемых по числу линий у корня). Однако это перечисление охватывает деревья с высотами, превышающими $[(n-1)/2]$. Так, например, если корневое дерево с n точками и m линиями у корня, m_1 из которых оканчиваются корневыми деревьями с одной точкой, m_2 — корневыми деревьями с двумя точками и т. д., перечисляется с помощью выражения $r_{[m]}(y)$, где $[m]$ — разбиение $1^{m_1}2^{m_2}\ldots$ числа $n-1$ на m частей, то

$$t'_3(y) = (1+y)\,r_{11}(y).$$

В то же время

$$r_3(y) = (1+y)\,r_2(y) + (1+y)\,r_{11}(y).$$

Если заметить, что $r_1(y) = 1+y$, то получим

$$t'_3(y) = r_3(y) - r_2(y)\,r_1(y).$$

Вновь находим, что

$$t'_4(y) = (1+y)\,r_{111}(y),$$

$$r_4(y) = (1+y)\,r_3(y) + (1+y)\,r_{21}(y) + (1+y)\,r_{111}(y)$$

и

$$t'_4(y) = r_4(y) - r_3(y)\,r_1(y) - (1+y)\,r_{21}(y) = \\ = r_4(y) - r_3(y)\,r_1(y) - r_2^2(y).$$

На последнем шаге используются равенства $r_{21}(y) = r_2(y)\,r_1(y)$ и $r_1^2(y) = r_2(y)$, первое из которых следует из того факта, что две ветви у корня различимы, а второе — из того, что $r_2(y) = (1+y)\,r_1(y)$.

Аналогичным путем (редукцией) устанавливаем, что

$$t'_{2q}(y) = r_{2q}(y) - r_{2q-1}(y)\,r_1(y) - r_{2q-2}(y)\,r_2(y) - \ldots - r_q^2(y), \tag{63}$$

$$t'_{2q+1}(y) = r_{2q+1}(y) - r_{2q}(y)\,r_1(y) - r_{2q-1}(y)\,r_2(y) - \ldots - r_{q+1}(y)\,r_q(y). \tag{64}$$

Суммирование по p членов вида $x^p t'_p(y)$ и $x^p t''_p(y)$ дает

$$t(x, y) = r(x, y) - \frac{1}{2}r^2(x, y) + \frac{1}{2}r(x^2). \tag{65}$$

Член $r^2(x, y)/2$ получается из произведения $r_{p-k}(y)\,r_k(y)$, а член $r(x^2)/2$ возникает из слагаемого $r_p/2$ выражения для $t''_{2q}(y)$.

Приравнивая нулю y, а $t(x, 0)$ полагая равным $t(x)$, приходим к результату

$$t(x)=r(x)-\frac{1}{2}r^2(x)+\frac{1}{2}r(x^2), \qquad (66)$$

впервые полученному Оттером [11].

В целях различного рода проверок этого результата отметим, что (для частных производных используются те же обозначения, что и ранее)

$$a(x)t_x(x, y)=r(x, y)+xa(x)r'(x^2) \qquad (67)$$

и

$$(1+y)t_y(x, y)=r(x, y)=a(x)(t_x(x, y)-xr'(x^2)). \qquad (68)$$

Здесь $a(x)$ является функцией, приведенной выше непосредственно за соотношением (57), $a(x)=r(x)/r'(x)[1-r(x)]$. Следует отметить, что из (66) вытекает равенство

$$t'(x)-xr'(x^2)=r'(x)(1-r(x))=r(x)/a(x), \qquad (69)$$

в котором штрих означает производную.

Из (68) при $y=0$ находим соотношение

$$t_y(x, 0)=\sum x^p t_{p1}=r(x),$$

из которого следует, что $t_{p1}=r_p$; этот результат служит проверкой, так как по самому определению корневые деревья являются деревьями, среди точек которых имеется одна особая снабженная ярлыком точка, называемая корнем.

Далее, проводя подстановку $z=xy$ и полагая (как и в случае корневых деревьев), что

$$t(x, z)=T_0(z)+xT_1(z)+\ldots,$$

где

$$T_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty} t_{n+m,\, m}z^m/m!, \qquad (70)$$

из соотношения

$$t_z(x, z)=r_z(x, z)[1-r(x, z)].$$

и из равенства (60) получаем, что

$$(x+z)t_z(x, z)=r(x, z). \qquad (71)$$

Таким образом,

$$T'_{n-1}(z)+zT'_n(z)=R_n(z) \qquad (72)$$

Таблица 4

Число деревьев, корневых деревьев, ориентированных деревьев и ориентированных корневых деревьев с n точками

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t_n	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106	235	551
r_n	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719	1842	4766
τ_n	1	1	3	8	27	91	350	1376	5743	24635	1 08968	4 92180
ϱ_n	1	2	7	26	107	458	2058	9498	44947	2 16598	10 59952	52 51806

n	13	14	15	16	17
t_n	1301	3159	7741	19320	48629
r_n	12486	32973	87811	2 35381	6 34847
τ_n	22 66502	105 98452	502 35931	2408 72654	11667 32814
ϱ_n	262 97238	1328 56766	6763 98395	34667 99104	1 78738 08798

n	18	19	20	21
t_n	1 23867	3 17955	8 23065	21 44505
r_n	17 21159	46 88676	128 26228	352 21832
τ_n	56820 01435	4 80687 87314	13 93549 22608	69 58085 54300
ϱ_n	9 26300 98886	48 22926 84506	252 16101 75006	1323 35730 19372

n	22	23	24	25	26
t_n	56 23756	148 28074	392 99897	1046 36890	2797 93450
r_n	970 55181	2682 82855	7437 24984	20671 74645	57596 36510

и, в частности,

$$zT'_0(z) = R_0(z).$$

Из последнего соотношения следует равенство $nt_{nn} = r_{nn}$ или, в обозначениях разд. 7, равенство $nT_n = R_n$.

Зависимости между энумераторами $\tau(x, y)$ и $\varrho(x, y)$ для ориентированных деревьев и ориентированных корневых деревьев соответственно могут быть получены почти точно так, как показано выше, с единственным существенным отличием, состоящим в том, что ориентация линии между двумя центроидами бицентроидального дерева нарушает симметрию центроидов, и потому

$$\tau''_{2q}(y) = \varrho_q^2(y). \tag{73}$$

Упомянутая зависимость оказывается следующей:

$$\tau(x, y) = \varrho(x, y) - \varrho^2(x, y). \tag{74}$$

В табл. 4 указаны числа r_n и t_n для $n = 1(1)26$, ϱ_n и τ_n для $n = 1(1)21$. Табл. 5 дает t_{nm} для $n = 1(1)10$ и $m = 0(1)n$.

Таблица 5

Число деревьев с точками, снабженными ярлыками

Число точек / Число ярлыков	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106
1	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719
2		1	3	9	26	75	214	612	1747	4995
3			3	16	67	251	888	3023	10038	32722
4				16	125	680	3135	13155	51873	1 95821
5					125	1296	8716	47787	2 32154	10 40014
6						1296	16807	1 34960	8 58578	47 41835
7							16807	2 62144	24 50309	177 54459
8								2 62144	47 82969	510 48576
9									47 82969	1000 00000
10										1000 00000

10. Последовательно-параллельные сети

Идеи и методы Кэли, касающиеся деревьев, были использованы Мак-Магоном [10] для перечисления двухполюсных последовательно-параллельных сетей, которые он называл сочетаниями сопротивлений. Эти сети представляют собой электрические сети, рассматриваемые с топологической или геометрической точек зрения, т. е. без учета электрических характеристик связанных между собой элементов сетей. Двухполюсные сети и корневые деревья во многом похожи друг на друга как по форме, так и своими энумераторами, так как полюсы, как и корень, являются специальными точками, и один из полюсов может рассматриваться в качестве точки слияния всех внешних точек корневого дерева.

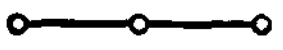
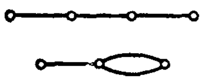
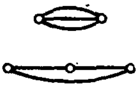
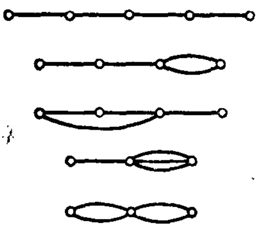
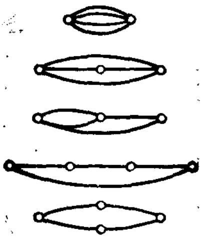
Число элементов	*Существенно последовательные сети*	*Существенно параллельные сети*	*Число сетей*
2			2
3			4
4			10

Рис. 4. Последовательно-параллельные двухполюсные сети.

Однако сети отличаются от деревьев в двух отношениях. Во-первых, в деревьях соседние точки соединяются только одной линией, тогда как в сетях допустимо любое число линий, соединяющих эти точки. Во-вторых, сети считаются эквивалентными не только в случае их топологической эквивалентности (подобно деревьям), но и тогда, когда взаимной заменой элементов, соединенных последовательно, их можно привести в соответствие друг с другом. Иными словами, изменение взаимного порядка последовательно соединенных элементов является операцией эквивалентности.

На рис. 4 показаны двухполюсные последовательно-параллельные сети с четырьмя и меньшим числом элементов (линий). Далее будет доказано, что число сетей, содержащих более чем один элемент, оказывается четным. Этот факт является следствием свойства двойственности сетей. Вся совокупность сетей может быть разделена, как на рис. 4, на два класса, называемых *существенно последовательными и существенно параллельными*. Любая сеть из одного класса имеет соответствующую двойственную сеть в другом классе, которая получается простой взаимной заменой слов «параллельный» на «последовательный» в словесном описании рассматриваемой сети.

Существенно последовательные сети формируются путем последовательного соединения существенно параллельных сетей, и наоборот.

При подсчете числа таких сетей изложенным ниже способом используется свойство двойственности. Обозначим через $a_{n,m}$ число существенно параллельных сетей из n элементов, m из которых имеют различные ярлыки, и пусть

$$a(x, y) = xa_1(y) + x^2a_2(y) + \ldots, \tag{75}$$

где

$$a_n(y) = a_{n0} + a_{n1}y + a_{n2}y^2/2! + \ldots + a_{nn}y^n/n!$$

является энумератором. Предположим, что S_{nm} и $S(x, y)$ имеют тот же самый смысл для (двухполюсных) последовательно-параллельных сетей. Тогда $S_1(y) = a_1(y) = 1 + y$ и в силу свойства двойственности $S_n(y) = 2a_n(y)$ для $n > 1$. Следовательно,

$$S(x, y) = 2a(x, y) - x(1 + y). \tag{76}$$

Рассмотрим теперь сети, полученные путем параллельного соединения k существенно последовательных сетей в свете теоремы Пойа. Весь запас состоит из всех существенно последовательных сетей и в силу двойственности имеет энумератором функцию $a(x, y)$. Позиция, в которой осуществлено параллельное соединение, не существенна, поэтому цикловым индексом служит $C_k(t_1, t_2, \ldots, t_k)/k!$. Так как никакие две сети с ярлыками не могут оказаться одинаковыми, то при перечислении таких сетей t_j следует заменить $a(x^j, 0) \equiv a(x^j)$.

Суммируя по k, получаем сразу

$$1 + S(x, y) = \exp[a(x, y) + a(x^2)/2 + \ldots + a(x^k)/k + \ldots]. \tag{77}$$

При $y = 0$ равенство (77) соответствует тождественному соотношению между энумераторами, установленному Мак-Магоном. Другими словами, при условии, что $S(x, 0) = S(x)$, равенство

$$1 + S(x) = \exp(a(x) + a(x^2)/2 + \ldots + a(x^k)/k + \ldots) \tag{77a}$$

эквивалентно соотношению Мак-Магона

$$1 + S(x) = (1 - x)^{-a_1}(1 - x^2)^{-a_2} \ldots (1 - x^k)^{-a_k} \ldots$$

где, естественно,

$$a(x) = xa_1 + x^2a_2 + \ldots .$$

Используя равенство (77а), соотношение (77) можно записать в симметрической форме

$$(1 + S(x, y)) \exp a(x) = [1 + S(x)] \exp a(x, y)$$

или, наконец, используя соотношение (76), — в виде

$$(1 + S(x, y)) \exp S(x)/2 = [1 + S(x)] \exp (S(x, y) + xy)/2. \quad (78)$$

Из этого следует, как и для корневых деревьев (при обычных обозначениях частных производных), что

$$S_x(x, y) = (y + d(x))(1 + S)/(1 - S), \quad (79)$$

$$S_y(x, y) = x(1 + S)/(1 - S) \quad (80)$$

и

$$xS_x(x, y) = (y + d(x)) S_y(x, y), \quad (81)$$

где

$$\begin{aligned} dx &= S'(x)(1 - S(x))/(1 + S(x)) = \\ &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ldots + d_nx^n + \ldots = \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + 6x^3 + 2x^4 + 18x^5 + 2x^6 + 46x^7 + 14x^8 + \ldots . \end{aligned}$$

Соотношение (81) при известном $S(x)$, а следовательно, и $d(x)$, дает простейшее рекуррентное соотношение для вычислений, а именно соотношение

$$nS_n(y) = (d_0 + y) S'_n(y) + \sum_1^{n-1} d_k S'_{n-k}(y). \quad (81а)$$

В табл. 6 даны значения S_{nm} для $m = 0(1)n$ и для $n = 1(1)10$.

Далее, при $xy = z$ и

$$S(x, z) = A_0(z) + xA_1(z) + \ldots + x^nA_n(z) + \ldots,$$

$$A_n(z) = \sum S_{n+m,m} z^m/m! \quad (82)$$

из (78) следует, что

$$[1 + S(x, z)] \exp S(x)/2 = (1 + S(x)) \exp (S(x, z) + z)/2, \quad (83)$$

$$S_x(x, z) = d(x)(1 + S(x, z))/(1 - S(x, z)) = d(x) S_z(x, z). \quad (84)$$

При $x = 0$ $[S(0) = 0,\ S(0, z) = A_0(z)]$ из (83) имеем

$$1 + A_0(z) = \exp (A_0(z) + z)/2 \quad (85)$$

Таблица 6

Числа S_{nm} последовательно-параллельных сетей

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	4	10	24	66	180	522	1532	4624
1	1	2	6	18	58	186	614	2034	6818	22970
2		2	8	34	136	538	2080	7970	30224	1 13874
3			8	52	288	1424	6648	29700	1 28800	5 45600
4				52	472	3224	18888	1 01340	5 11120	24 65904
5					472	5504	44712	3 02096	18 28016	102 47424
6						5504	78416	7 38448	56 45312	379 88096
7							78416	13 20064	141 38976	1205 63808
8								13 20064	256 37824	3077 75648
9									256 37824	5642 75648
10										5642 75648

или, полагая $A_n = S_{nn}$ и используя соотношение (2.39), а также определение полиномов Белла, следующего за соотношением (2.41), приходим к равенству

$$A_n = Y_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \tag{86}$$

где $\alpha_1 = (1 + A_1)/2$, $\alpha_n = A_n/2$, $n > 1$ (числа $\alpha_n \equiv a_{nn}$ являются числами существенно последовательных или существенно параллельных сетей, все точки которых снабжены ярлыками). Соотношение (86) эквивалентно соотношению, установленному Кнёделем [7].

Однако числа A_n легче получить из (85) следующим образом. Сначала для упрощения записи опустим индексы и выполним дифференцирование; получим (штрих означает производную)

$$A'(z) = \frac{1 + A(z)}{1 - A(z)}.$$

Повторное дифференцирование дает

$$A''(z) = 2\frac{1 + A(z)}{[1 - A(z)]^3}.$$

Далее, если уже установлено, что n-я производная равна

$$A^{(n)}(z) = \frac{1 + A(z)}{[1 - A(z)]^{2n-1}} P_n[A(z)],$$

то полученные выше результаты и дифференцирование показывают, что $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 2$ и

$$P_{n+1}(x) = [2n + (2n - 2)x] P_n(x) + (1 - x^2) P'_n(x). \tag{87}$$

Из условия $A(0)=0$ следует, что

$$A_n = A^{(n)}(0) = P_n(0).$$

Для первых нескольких значений n полиномами $P_n(x)$ являются следующие:

$$P_1 = 1,\quad P_3 = 8+4x,$$
$$P_2 = 2,\quad P_4 = 52+56x+12x^2.$$

Наконец, следует отметить, что соотношение (84) эквивалентно рекуррентному соотношению

$$(n+1)A_{n+1}(z) = \sum_{0}^{n} d_k A'_{n-k}(z). \tag{88}$$

Отсюда в свою очередь находим, что

$$(n+1)S_{n+1+m,m} = \sum_{0}^{n} d_k S_{n-k+m+1,m+1}. \tag{89}$$

Последнее равенство дает возможность выразить все числа $S_{n,m}$ через d_k и $S_{nn}=A_n$.

11. Линейные графы

В рамках нашей книги под линейным графом понимается совокупность n точек и линий, их соединяющих, причем каждая пара точек оказывается либо не соединенной вообще, либо соединенной точно одной линией. Совокупность n изолированных точек является линейным графом без линий. Отметим, что «петли», т. е. линии, соединяющие точку с ней же самой, равно как и «параллельные» линии между точками, в линейном графе недопустимы. Эти требования предусмотрены нами для удобства последующего перечисления. Как упоминалось выше, оба ограничения учитываются в общей теории графов (см., например, Кёниг [6]) .

Перечисление линейных графов осуществляется, конечно, с помощью теоремы Пойа, которая и была установлена с целью перечисления по числу линий топологически различных линейных графов с n точками.

Запас элементов состоит из всех линий, которыми должны соединяться точки, и, следовательно, имеет своим энумератором выражение $1+x$.

Топологическое различие определяет цикловой индекс, который является индексом всех перестановок из $N=\binom{n}{2}$ пар точек, порожденных всеми перестановками самих точек. Если g_k является переменной, определяющей цикл пар точек длины k, то цикловой.

индекс оказывается некоторой функцией вида $G_n(g_1, g_2, \dots, g_n)$. Покажем, что эта функция может быть найдена, если известен цикловой индекс $C_n(t_1, t_2, \dots, t_n)/n!$ для всех перестановок этих точек[1]).

Во-первых, тождественная перестановка t_1^n соответствует g_1^N, так как при этой перестановке все пары точек остаются неизменными. Далее, цикл t_n длины n при нечетных n соответствует $g_n^{N/n}$, а при $n=2m$ — произведению $g_m g_{2m}^{m-1}$ [заметим, что $m+2m(m-1)=N$]. Например, при $n=3$ цикл (123) точек соответствует циклу (12, 23, 13) пар точек, длина которого также равна 3. В то же время при $n=4$ цикл (1234) соответствует перестановке (12, 23, 34, 14) (13, 24), определенной произведением $g_4 g_2$.

Чтобы доказать этот результат для любого n, заметим сначала, что цикл из n точек смещает каждую точку, следовательно, соответствует некоторой перестановке пар точек, каждая из которых также смещена. Точечный цикл может избираться произвольно. Допустим, что он равен $(123 \dots n)$. Тогда для любого k в диапазоне от 2 до n имеется цикл пар

$$(1k;\ 2,\ k+1;\ \dots;\ n-k+1,\ n;\ 1,\ n-k+2;\ \dots;\ k-1,\ n).$$

Длина этого цикла равна n, если только пары 1, k и 1, $n-k+2$ не являются одинаковыми, в ином случае длина цикла равна $n-k+1$. Но если $k=n-k+2$, то $2k=n+2$ и n должно быть четным. Если $n=2m$, то $k=m+1$ и длина цикла равна $2m-(m+1)+1=m$. Теперь подведем итог для нечетного n. Длина цикла пар для каждого k равна n, и индикатором его служит, как было отмечено выше, $g_n^{N/n}$, так как каждая пара появляется в некотором цикле длины n. С другой стороны, при четном $n=2m$ имеется только один цикл длины m (для $k=m+1$) и должны существовать $m-1$ циклов длины n, исчерпывающие все пары точек.

В случае, когда точечный цикл имеет длину, меньшую, чем n, для циклов пар точек, из которых обе содержатся в рассматриваемом точечном цикле, имеют место те же самые результаты.

Таким образом, единственным оставшимся пока вне рассмотрения случаем является случай цикла пар точек, одна из которых принадлежит точечному циклу длины i, а другая — циклу длины j. Без труда можно сообразить, что индексом таких циклов служит выражение

$$g_{[i,\, j]}^{(i,\, j)},$$

где $[i, j]$ — наименьшее общее кратное, а (i, j) — наибольший общий делитель чисел i и j. Отметим, что $[i, j]\ (i, j)=ij$, что и состав-

---

[1]) Доказательство взято из неопубликованной работы моего коллеги Д. Слепяна.

ляет общее число пар точек, взятых по одной из каждого цикла. В случае равенства i и j индекс равен g_i^i.

Если $t_i \circ t_j$ означает описанную выше операцию, то индекс парных циклов оказывается полностью определенным правилами соответствия:

$$t_{2m} \sim g_m g_{2m}^{m-1},$$
$$t_{2m+1} \sim g_{2m+1}^m,$$
$$t_i \circ t_j \sim g_M^D, \quad M = [i, j], D = (i, j).$$

Необходимо помнить, что последнее правило следует применять ко всем без исключения точкам, входящим в циклы пар. Так, например, $t_2 t_1^2$ с помощью соотношения

$$(t_2)(t_1)(t_1)(t_2 \circ t_1)(t_2 \circ t_1)(t_1 \circ t_1)$$

преобразуется в

$$g_1(1)(1)(g_2)(g_2)(g_1) = g_1^2 g_2^2.$$

Кроме того,

$$t_{2m}^k \sim (t_{2m})^k (t_{2m} \circ t_{2m})^{\binom{k}{2}} \sim (g_m g_{2m}^{m-1})^k g_{2m}^{2m\binom{k}{2}},$$

$$t_{2m+1}^k \sim (t_{2m+1})^k (t_{2m+1} \circ t_{2m+1})^{\binom{k}{2}} \sim g_{2m+1}^M, \quad M = \frac{1}{2m+1} \binom{2mk+k}{2}.$$

Последнее оказывается удобным рабочим правилом.

Приведем несколько значений G_n:

$$G_2 = g_1,$$
$$6G_3 = g_1^3 + 3g_1 g_2 + 2g_3,$$
$$24G_4 = g_1^6 + 9g_1^2 g_2^2 + 8g_3^2 + 6g_2 g_4,$$
$$120G_5 = g_1^{10} + 10g_1^4 g_2^3 + 15g_1^2 g_2^4 + 20g_1 g_3^3 + 20g_1 g_3 g_6 + 30g_2 g_4^2 + 24g_5^2.$$

Из теоремы Пойа следует, что энумератор $L_n(x)$ различных линейных графов из n точек по числу линий имеет вид

$$L_n(x) = G_n(1+x, \ 1+x^2, \ \ldots, \ 1+x^n). \tag{90}$$

Значит,

$$L_2(x) = 1 + x,$$
$$L_3(x) = [(1+x)^3 + 3(1+x)(1+x^2) + 2(1+x^3)]/6 = $$
$$= 1 + x + x^2 + x^3,$$
$$L_4(x) = [(1+x)^6 + 9(1+x)^2(1+x^2)^2 + 8(1+x^3)^2 +$$
$$+ 6(1+x^2)(1+x^4)]/24 =$$
$$= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6,$$

что согласуется с результатами, приведенными на рис. 1.

Отметим, что для каждого n имеет место равенство

$$L_n(x) = x^N L_n(x^{-1}), \quad N = \binom{n}{2}.$$

Оно является следствием свойства двойственности графов, полученных путем взаимной замены слов «связанная» и «несвязанная» в словесном описании графа, касающемся условий, в которых находится пара точек.

Следует отметить, что трудность фактического определения энумераторов $L_n(x)$ с помощью соотношения (90) возрастает с увеличением n почти по экспоненциальному закону, хотя таблицу для G_n составлять не трудно, если пользоваться уже известной таблицей для C_n из гл. 4. Табл. 7 дает все числа L_{nk} различных линейных графов с n точками и k линиями для $n=2(1)9$, причем по закону двойственности не учитываются графы, возникающие из указанных при $n=7$, 8 и 9. Значения для $n=8$ и 9 получены с помощью косвенных методов, слишком объемистых для того, чтобы их здесь излагать.

Таблица 7

Число линейных графов с n точками и k линиямн

n k	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	2	2	2	2	2
3		1	3	4	5	5	5	5
4			2	6	9	10	11	11
5			1	6	15	21	24	25
6			1	6	21	41	56	63
7				4	24	65	115	148
8				2	24	97	221	345
9				1	21	131	402	771
10				1	15	148	663	1637
11					9	148	980	3252
12					5	131	1312	5995
13					2	97	1557	10120
14					1	65	1646	15615
15					1	41	1557	21933
16						21	1312	27987
17						10	980	32403
18						5	663	34040

Доказанная выше теорема может быть использована для установления зависимости между линейными графами и их связными частями. Чтобы уяснить этот вопрос, обозначим сначала через $L(x, y)$

выражение

$$L(x, y) = \sum_{p=1} y^p L_p(x) = \sum L_{pk} x^k y^p.$$

Далее (подобно тому, как это осуществлялось ранее в связи с деревьями, точки которых снабжены различными ярлыками) обозначим через

$$L(x, y, z) = \sum L_{pkj} x^k y^p z^j / j!$$

энумератор линейных графов по числу точек, линий и ярлыков. Обозначим, кроме того, через $C(x, y, z)$ соответствующий энумератор связных графов и рассмотрим графы с n связными частями.

Запас состоит из связных графов и имеет энумератором функцию $C(x, y, z)$, удовлетворяющую правилу произведения. Цикловой индекс равен $C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)/n!$ Следовательно, как и в случае последовательно-параллельных сетей,

$$1 + L(x, y, z) = \exp[C(x, y, z) + C(x^2, y^2)/2 + \ldots + C(x^k, y^k)/k + \ldots], \tag{91}$$

где, ради краткости обозначений, $C(x^k, y^k, 0) \equiv C(x^k, y^k)$.

При $z=0$ это соотношение превращается в соотношение, найденное Харари [19] для графов с точками без ярлыков. Объединение этих двух соотношений приводит к равенству

$$[1 + L(x, y, z)] \exp C(x, y) = [1 + L(x, y)] \exp C(x, y, z), \tag{92}$$

родственному соотношению (78). Следует отметить, что

$$L_z(x, y, z) = [1 + L(x, y, z)] C_z(x, y, z). \tag{93}$$

При подстановке $yz = w$ формально не меняются соотношения (92) и (93), а энумераторы преобразуются в следующие:

$$L(x, y, w) = L_0(x, w) + yL_1(x, w) + \ldots,$$
$$C(x, y, w) = C_0(x, w) + yC_1(x, w) + \ldots .$$

Здесь, например, $L_0(x, w)$ и $C_0(x, w)$ — энумераторы всех пар точек, снабженных ярлыками. Из (92) при $y = 0$ и $C(x, 0) = L(x, 0) = 0$ следует, что

$$1 + L_0(x, w) = \exp C_0(x, w). \tag{94}$$

Это соотношение (в числе прочих) содержится в работе Гильберта [2]. Отметим, что если ярлыками снабжены все точки, то индекс равен величине g_1^N и

$$L_0(x, w) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + x)^N w^n / n!, \quad N = \binom{n}{2} .$$

12. Связные графы с одним циклом

Только что полученное соотношение иллюстрирует значение связных графов в общей теории. Простейшими связными графами являются (свободные) деревья. Следующими за ними по простоте являются деревья с единственным замкнутым циклом, т. е. графы, состоящие из одного многоугольника с одним или более ответвляющимися от его вершин деревьями. Именно такие графы мы сейчас и рассмотрим, так как они не только отличаются простотой изображения, но связаны с новым типом циклового индекса, а именно с цикловым индексом группы диэдра.

Рассматриваемые графы, как обычно, подсчитываются с помощью теоремы Пойа. Предположим, что многоугольник имеет p точек (и p линий). Запас состоит из корневых деревьев, которые могут быть в этих точках присоединены. Следовательно, энумератором запаса является выражение

$$r(x) = xr_1 + x^2 r_2 + \ldots .$$

Цикловой индекс определяется симметрией многоугольника следующим образом.

Во-первых, при $p=3$, т. е. для треугольника, все три вершины одинаковы; следовательно, если $D_p(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ является индексом для p точек, то

$$D_3(t_1, t_2, t_3) = (t_1^3 + 3t_1t_2 + 2t_3)/6. \qquad (95)$$

Далее, при $p=4$, т. е. для квадрата, все симметричные преобразования сводятся к следующим двум: (1) вращения (1234) (здесь числами обозначены вершины квадрата), которое геометрически является поворотом квадрата на прямой угол, и (2) перестановки (24) (геометрически она определяет отображение относительно диагонали). Определение всех перестановок точек, при которых квадрат остается неизменным, с помощью преобразований вращения (1) и отображения (2) является простой задачей из теории групп. Обозначим указанные преобразования соответственно через R и T, а через RT — перестановку, являющуюся результатом последовательного выполнения перестановок R и T. Отметим сначала, что

$$TT = T^2 = I,$$
$$RRRR = R^4 = I,$$

где I означает тождественную перестановку t_1^4. Иными словами, последние два соотношения обозначают, что квадрат преобразуется сам в себя при (1) двух последовательных отображениях и (2) четырех последовательных поворотах. Простейшими произведениями, составленными из R и T, являются RT, R^2T, R^3T и TR,

TR^2 и TR^3. Однако с помощью элементарных вычислений заключаем, что

$$RT = TR^3 = (14)(23),$$
$$R^2T = TR^2 = (13),$$
$$R^3T = TR = (12)(34).$$

Любые более сложные произведения равны либо одному из упомянутых выше, либо T, либо R^k $(k = 1, 2, 3)$. Следовательно, вся совокупность перестановок, порожденных R и T, оказывается следующей:

$$I,\ R,\ R^2,\ R^3,\ T,\ TR,\ TR^2,\ TR^3.$$

Как указывалось выше, эта совокупность перестановок образует группу диэдра восьмого порядка. Заметив, что $R^2 = (13)(24)$, $R^3 = (1432)$, для циклового индекса можно сразу записать выражение

$$D_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = (t_1^4 + 2t_1^2t_2 + 3t_2^2 + 2t_4)/8. \qquad (96)$$

Для любого p указанные преобразования симметрии восполняются с помощью двух перестановок: вращения $R = (123 \ldots p)$ и отображения

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & p \\ 1 & p & p-1 \ldots & 2 \end{pmatrix} = (1)(2p)(3,\ p-1) \ldots (k,\ p-k+2) \ldots .$$

При $p = 2m$ последовательность выписанных выше транспозиций оканчивается единичным циклом элемента $m+1$ и T имеет цикловую структуру $1^2 2^{m-1}$. При $p = 2m+1$ последней транспозицией является $(m+1,\ m+2)$, а цикловая структура имеет вид $1 \cdot 2^m$. Во всех случаях

$$T^2 = R^p = I.$$

Прямыми вычислениями получаем

$$TRT = (1pp - 1 \ldots 2) = R^{p\ 1}$$

или, умножив на T,

$$RT = TR^{p\ 1}.$$

На языке теории групп элементы R и R^{p-1} являются взаимно обратными, ибо $R(R^{p-1}) = R^p = I$. Они являются также взаимно сопряженными; действительно, напомним, что если P является любой перестановкой и $PP^{-1} = I$, $P^{-1}QP = S$, то S называется элементом, сопряженным с Q. Важно отметить, что сопряженные перестановки имеют одну и ту же цикловую структуру.

Итерация соотношения $RT = TR^{p-1}$ показывает, что $R^kT = TR^{p-k}$ при любом k. Поэтому соответствующая группа является группой порядка $2p$ и состоит из следующих элементов:

$$I,\ R,\ R^2,\ \dots,\ R^{p-1},\ T,\ TR,\ TR^2,\ \dots,\ TR^{p-1}.$$

Цикловая структура может быть найдена в два приема. Во-первых, совокупность элементов $(I,\ R,\ \dots,\ R^{p-1})$ образует циклическую группу порядка p, цикловая структура которой определяется выражением

$$\sum \varphi(k)\, t_k^{p/k},$$

где сумма взята по всем делителям p и $\varphi(k)$ — функция Эйлера, определяющая число положительных чисел, меньших k и взаимно простых с k (эта функция уже фигурировала в задаче 3.3). Далее рассмотрим совокупность элементов $(T,\ TR,\ \dots,\ TR^{p-1})$. Так как на основании изложенного выше

$$R^{p-k}(TR^s)\,R^k = R^{p-k}TR^{s+k} = TR^kR^{s+k} = TR^{s+2k},$$

то заключаем, что элементы TR^s и TR^{s+2k} являются взаимно сопряженными и имеют одинаковую цикловую структуру. Для нечетного p все элементы TR^s, $s=0,\ 1,\ \dots,\ p-1$, имеют одинаковую цикловую структуру, такую же, как элемент T. Следовательно, цикловая структура этого множества элементов определяется выражением $pt_1t_2^{(p-1)/2}$. При p четном $q=p/2$ элементов TR^{2k} имеют ту же структуру, что и T, а именно $t_1^2t_2^{q-1}$. Структура же остальных q элементов TR^{2k+1} совпадает со структурой t_2^q подстановки TR.

Наконец заключаем, что для нечетного p цикловой индекс группы диэдра определяется выражением

$$2pD_p(t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_p) = \sum \varphi(k)\, t_k^{p/k} + pt_1t_2^{(p-1)/2} \tag{97}$$

а для $p=2q$ — выражением

$$2pD_p(t_1,\ t_2,\ \dots,t_p) = \sum \varphi(k)\, t_k^{p/k} + qt_2^{q-1}(t_1^2+t_2). \tag{98}$$

Результаты (95) и (96), полученные для частных случаев, согласуются с (97) и (98).

Доказанная теорема позволяет сразу найти энумератор $D_p(x)$ связных графов с одним циклом длины p по числу точек:

$$D_p(x) = \sum D_{pn}x^n = D_p(r(x),\ r(x^2),\ \dots,\ r(x^p))/2p. \tag{99}$$

Например,

$$D_3(x) = [r^3(x) + 3r^2(x)\, r(x^2) + 2r(x^3)]/6.$$

В табл. 8 приводятся коэффициенты $r^m(x)$ для $m=1\,(1)\,10$, которые оказываются полезными при оценке таких выражений.

Таблица 8

Коэффициенты при степенях в выражении энумератора корневых деревьев

$$r^m(x) = \sum r_n(m)\, x^{n+m-1}$$

$r_n(m)$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719
2	1	2	5	12	30	74	188	478	1235	3214
3	1	3	9	25	69	186	503	1353	3651	9865
4	1	4	14	44	133	388	1116	3168	8938	25100
5	1	5	20	70	230	721	2200	6575	19385	56575
6	1	6	27	104	369	1236	3989	12522	38535	1 16808
7	1	7	35	147	560	1995	6790	22338	71652	2 25379
8	1	8	44	200	814	3072	10996	37832	1 26301	4 11824
9	1	9	54	264	1143	4554	17100	61407	2 13057	7 19368
10	1	10	65	340	1560	6542	25710	96190	3 46360	12 09660

В табл. 9 указаны числа соответствующих графов.

Таблица 9

Числа D_{pn} связных графов с одним циклом длины p и с n точками

p \ n	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	1	3	7	18	44	117	299
4		1	1	4	9	28	71	202
5			1	1	4	10	32	89
6				1	1	5	13	45
7					1	1	5	14
8						1	1	6
9							1	1
10								1

ЛИТЕРАТУРА

1. Белл (Bell E. T.), Interpolated denumerants and Lambert series, *Amer. J. of Math.*, 65 (1943), 382—386.
2. Гильберт (Gilbert E. N.), Enumeration of labeled graphs, *Canadian J. of Math.*, 8 (1956), 405—411.
3. Гупта (Gupta H.), Tables of Partitions, Madras, 1939.
4. Диксон (Dickson L. E.), History of the Theory of Numbers, II, Chapter II, New York, 1952.

5. Карлиц, Риордан (Carlitz L., Riordan J.), The number of labeled two-terminal series — parallel networks, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 435—446.
6. Кёниг (König D.), Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, New York, 1950.
7. Кнёдель (Knödel W.), Über Zerfällungen, *Monatsh. Math.*, **55** (1951), 20—27.
8. Кэли (Cayley A.), Collected Mathematical Papers, Cambridge, 1889—1897, vol. 3, p. 242—246, vol. 9, p. 202—204, 427—460, vol. 11, p. 365—367; vol. 13, p. 26—28.
9. Мак-Магон (MacMahon P. A.), Combinatory Analysis, vol. II, London, 1916.
10. Мак-Магон (MacMahon P. A.), The combination of resistances, *The Electrician*, **28** (1892), 601—602.
11. Оттер (Otter R.), The number of trees, *Annals of Math.*, **49** (1948), 583—599.
12. Пойа (Pólya G.), Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen, und chemische Verbindungen, *Acta Math.*, 68 (1937), 145—253.
13. Риордан (Riordan J.), The numbers of labeled colored and chromatic trees, *Acta Math.*, **97** (1957), 211—225.
14. Риордан, Шеннон (Riordan J., Shannon C. E.), The number of two-terminal series-parallel networks, *J. of Math. and Physics*, 21 (1942), 83—93.
15. Форд, Уленбек (Ford G. W., Uhlenbeck G. E.), Combinatorial problems in the theory of graphs, I, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **42** (1956), 122—128.
16. Форд, Норман, Уленбек (Ford G. W., Norman R. Z., Uhlenbeck G. E.), Combinatorial problems in the theory of graphs II, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 42 (1956), 203—208.
17. Фостер (Foster R. M.), Geometrical circuits of electrical networks, *Trans. Amer. Inst. of Electr. Eng.*, **51** (1932), 309—317.
18. Фостер (Foster R. M.), The number of series-parallel networks, Proc. Internat. Congr. Mathematicians, Cambridge, 1950, vol. 1, p. 646.
19. Харари (Harary F.), The number of linear, directed, rooted and connected graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78 (1955), 445—463.
20. Харари (Harary F.), Note on the Pólya and Otter formulas for enumerating trees, *Michigan Math. J.*, **3** (1955—1956), 109—112.
21. Харари (Harary F.), The number of oriented graphs, *Michigan Math. J.*, **3** (1957).
22. Харари, Уленбек (Harary F., Uhlenbeck G. E.), On the number of Husimi trees, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 315—322.
23. Шёдер (Schöder E.), Vier combinatorische Probleme, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **15** (1870), 361—376.

Задачи

1. Доказать, что денумерант $D(n; da_1, da_2, \ldots, da_m)$, где d — наибольший общий делитель чисел $da_1, da_2, \ldots, da_m$, удовлетворяет следующим соотношениям:

$$D(dn; da_1, da_2, \ldots, da_m) = D(n; a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

$$D(dn+e; da_1, da_2, \ldots, da_m) = 0, \quad e = 1, 2, \ldots, d-1.$$

2. Показать, что

$$D(5n+m;\ 1, 5, 10, 25, 50) = D(n;\ 1, 1, 2, 5, 10),\quad m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Проверить следующую таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$D(n;\ 1, 2)$	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$D(n;\ 1, 2, 5)$	1	1	2	2	3	4	5	6	7
$D(n;\ 1, 2, 5, 10)$	1	1	2	2	3	4	5	6	7
$D(n;\ 1, 1, 2, 5, 10)$	1	2	4	6	9	13	18	24	31

n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20
$D(n;\ 1, 2)$	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	11
$D(n;\ 1, 2, 5)$	8	10	11	13	14	16	18	20	22	26	29
$D(n;\ 1, 2, 5, 10)$	8	11	12	15	16	19	22	25	28	34	40
$D(n;\ 1, 1, 2, 5, 10)$	39	50	62	77	93	112	134	159	187	252	292

Доказать, что число различных способов разменять доллар (на пенсы, пятицентовики, десятицентовики, четверти доллара и полдоллары) равно 292[1].

3. (а) Опираясь на тождество

$$(1-x)^{-1} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ \ldots\ (1+x^{2^n})\ \ldots,$$

доказать, что каждое число имеет единственное выражение в двоичной системе (система с основанием 2).

(b) Опираясь на то же самое тождество, доказать, что для каждого числа, большего единицы, существует столько же разбиений с четным числом частей, сколько и с нечетным.

4. (а) Доказать, что если

$$H(t, n) = 1/(1-u)(1-ut)\ \ldots\ (1-ut^k)\ \ldots\ = F(t, u)/(1-u),$$

где $F(t, u)$ определяется соотношением (6), то

$$H(t, u) = \sum P(t, k)\, u^k,$$

где

$$P(t, k) = p(t, 0) + p(t, 1) + \ldots + p(t, k)$$

и $p(t, k)$ определены соотношением (7).

---

[1] Пенни (ед. число от «пенсы») — монета достоинством в 1 цент, т. е. 1/100 доллара. — *Прим. ред.*

(b) **Показать**, что равенства

$$(1-u)H(t, u)=H(t, ut),$$
$$(1-t^k)P(t, k)=P(t, k-1),$$
$$(1-t)(1-t^2)\ \dots\ (1-t^k)P(t, k)=1$$

согласуются с соотношением (12).

5. Энумератор по числу частей разбиений, в **которых нет** частей, больших j, равен

$$F_j(t, u)=1/(1-ut)(1-ut^2)\ \dots\ (1-ut^j)=$$
$$=\sum p_j(t, k)u^k.$$

Доказать, что

$$(1-ut)F_j(t, u)=(1-ut^{j+1})F_j(t, ut)$$

и, следовательно, что

$$p_j(t, k)=t^k\frac{(1-t^j)(1-t^{j+1})\ \dots\ (1-t^{j+k-1})}{(1-t)(1-t^2)\ \dots\ (1-t^k)}$$

служит энумератором разбиений точно с k частями, **среди которых** максимальная часть равна j.

6. Примем в обозначениях задач 4 и 5, что

$$F(t, u)=\sum\prod(t, k)u^kF_k(t, u).$$

Используя соотношения

$$(1-ut)F(t, u)=F(t, ut),$$
$$(1-ut)(F_k(t, u)+ut^{k+1}F_{k+1}(t, u))=F_k(t, ut),$$

показать, что

$$(1-t^k)\prod(t, k)=t^{2k-1}\prod(t, k-1),$$

а затем с помощью итерации доказать, что

$$\prod(t, k)=\frac{t^{k^2}}{(1-t)(1-t^2)\ \dots\ (1-t^k)}.$$

Проверить тождество

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)}\ \dots =1+\frac{t}{(1-t)^2}+\frac{t^4}{(1-t)^2(1-t^2)^2}+\dots$$
$$\dots+\frac{t^{k^2}}{[(1-t)(1-t^2)\ \dots\ (1-t^k)]^k}+\dots.$$

7. Энумератором по числу частей разбиений, в которых все части различны и ни одна из них не превосходит j, служит

выражение

$$G_j(t, a) = (1+at)(1+at^2)\ldots(1+at^j) = \sum u_j(t, k)a^k.$$

Показать, что

$$(1+at^{j+1})G_j(t, a) = (1+at)G_j(t, at)$$

и, следовательно, что

$$u_j(t, k) = t^{\binom{k+1}{2}}\frac{(1-t^j)(1-t^{j-1})\ldots(1-t^{j-k+1})}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^k)}, \quad k<j,$$

$$u_j(t, j) = t^{\binom{j+1}{2}}.$$

8. Доказать, что если

$$I(t, a) = \frac{1}{1-a}G(t, a) = \frac{1}{1-a}(1+at)(1+at^2)\ldots = \sum U(t, k)a^k,$$

где $G(t, a)$ определяется соотношением (13), то

$$(1-a)I(t, a) = (1-a^2t^2)I(t, at),$$

$$(1-t^k)U(t, k) = U(t, k-1) - t^kU(t, k-2).$$

Проверить, в частности, результаты

$$U(t, 0) = 1, \quad (1-t)(1-t^2)U(t, 2) = 1-t^2+t^3,$$

$$(1-t)U(t, 1) = 1, \quad (1-t)(1-t^2)(1-t^3)U(t, 3) = 1-t^2+t^5.$$

9. Энумератором по числу частей разбиений с нечетными различными частями служит выражение

$$J(t, a) = (1+at)(1+at^3)\ldots(1+at^{2n+1})\ldots = \sum v(t, k)a^k.$$

Доказать, что соотношения

$$J(t, a) = (1+at)J(t, at^2),$$

$$(1-t^{2k})v(t, k) = t^{2k-1}v(t, k-1),$$

$$(1-t^2)(1-t^4)\ldots(1-t^{2k})v(t, k) = t^{k^2}$$

согласуются с соотношением (18).

10. Доказать, что

$$144[(1-t)(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)]^{-1} =$$
$$= 6(1-t)^{-4} + 18(1-t)^{-3} + 25(1-t)^{-2} + 16(1-t)^{-1} +$$
$$+ 9(1-t^2)^{-1} + 18(1-t^2)^{-2} + 16(1-t^2)(1-t^3)^{-1} + 36(1-t^4)^{-1}$$

и, следовательно, что денумерант $D(n;\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ дается выражением

$$144D(n;\ 1, 2, 3, 4) = n^3 + 15n^2 + 63n + 65 + (27 + 18m)(1,\ 0)\operatorname{pcr} 2_n + \\ + 16(1,\ 0,\ -1)\operatorname{pcr} 3_n + 36(1,\ 0,\ 0,\ 0)\operatorname{pcr} 4_n,$$

где $m = [n/2]$. Если $\langle x \rangle$ означает наибольшее целое, ближайшее к x, то проверить, что

$$\langle (12n + a + 5)^3/144 \rangle = D(12n + a;\ 1,\ 2,\ 3,\ 4); \quad a \text{ — четное},$$

$$\langle (12n + a + 5)^3/144 \rangle = D(12n + a;\ 1,\ 2,\ 3,\ 4) + n + 1; \quad a \text{ — нечетное}.$$

11. Энумератором композиций с точно m частями, из которых ни одна не превосходит s [соотношение (35)], служит

$$c_m(t,\ s) = (t + t^2 + \ldots + t^s)^m.$$

(a) Доказать, что

$$(1 - t)\,c_m(t,\ s) = t\,(1 - t^s)\,c_{m-1}(t,\ s),$$

$$c_{m,\,n}(s) - c_{m,\,n-1}(s) = c_{m-1,\,n-1}(s) - c_{m-1,\,n-s-1}(s),$$

(b) $$c_{m,\,n}(s) = \sum_{0}^{m} \binom{m}{k} c_{m-k,\ n-sk}(s-1).$$

12. Энумератором композиций, ни одна из частей **которых не** превосходит s [см. соотношение (40)], является

$$c(t,\ s) = \frac{t - t^{s+1}}{1 - 2t + t^{s+1}} = \frac{1 - t}{1 - 2t + t^{s+1}} - 1 =$$

$$= \frac{t + t^2 + \ldots + t^s}{1 - t - t^2 - \ldots - t^s} = \frac{1}{1 - t - t^2 - \ldots - t^s} - 1 = \sum c_n(s)\,t^n.$$

(a) Доказать, что числа $c_n(2)$ являются числами Фибоначчи.

(b) Вывести рекуррентное соотношение (δ_{ij} — дельта Кронекера)

$$c_n(s) - 2c_{n-1}(s) + c_{n-s-1}(s) = \delta_{1,n} - \delta_{s+1,n}.$$

(c) Проверить таблицу чисел $c_n(s)$

n s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
3	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274
4	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401

13. (а) Доказать, что энумератором композиций, не содержащих частей, больших чем s, и содержащих по крайней мере одну часть, равную s, служит выражение

$$c^*(t,\ s) = c(t,\ s) - c(t,\ s-1) = \frac{(1-t)^2 t^s}{(1-2t+t^s)(1-2t+t^{s+1})}.$$

(b) Вывести соотношения:

$$(1-2t+t^{s+1})\,c^*(t,\ s) = (t-2t^2+t^s)\,c^*(t,\ s-1),$$

$$c_n^*(s) - 2c_{n-1}^*(s) + c_{n-s-1}^*(s) = c_{n-1}^*(s-1) - 2c_{n-2}^*(s-1) + c_{n-s}^*(s-1).$$

(c) Проверить таблицу чисел $c_n^*(s)$

$s \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	4	7	12	20	33	54	88
3			1	2	5	11	23	47	94	185
4				1	2	5	12	27	59	127

14. Каждая точка дерева независимо от остальных окрашивается в один из c цветов. Доказать, что если выражение

$$q(x;\ c) = xq_1(c) + x^2 q_2(c) + \ldots$$

является энумератором по числу точек раскрашенных таким образом корневых деревьев, то

$$q(x;\ c) = xc\exp\left(q(x;\ c) + q(x^2;\ c)/2 + \ldots + q(x^k;\ c)/k + \ldots\right).$$

Пользуясь соотношением (индекс x означает частную производную)

$$xq_x(x;\ c) = q(x;\ c)\left[1 + xq_x(x;\ c) + x^2 q_x(x^2;\ c) + \ldots\right],$$

установить, что

$$q_1(c) = c, \qquad q_3(c) = 2c + 10\binom{c}{2} + 9\binom{c}{3},$$

$$q_2(c) = c + 2\binom{c}{2}, \qquad q_4(c) = 4c + 44\binom{c}{2} + 102\binom{c}{3} + 64\binom{c}{4}.$$

15. Доказать, что энумератор $u(x;\ c)$ раскрашенных подобным образом деревьев удовлетворяет соотношению

$$u(x;\ c) = q(x;\ c) - \frac{1}{2}q^2(x;\ c) + \frac{1}{2}q(x^2;\ c).$$

16. Доказать, что энумератор $p(x;\ c)$ корневых деревьев с раскрашенными точками, среди которых не встречается двух сосед-

них одинаковой расцветки, удовлетворяет соотношениям

$$p(x;c)=xc\exp\frac{c-1}{c}\left(p(x;\ c)+p(x^2;\ c)/2+\ldots+p(x^k;\ c)/k+\ldots\right),$$

$$xp_x(x;\ c)=p(x;\ c)\left[1+\frac{c-1}{c}\left(xp_x(x;\ c)+x^2p_x(x^2;c)+\ldots\right)\right].$$

Проверить следующие значения:

$$p_1=c,\qquad p_3=4\binom{c}{2}+9\binom{c}{3},$$

$$p_2=2\binom{c}{2},\quad p_4=8\binom{c}{2}+54\binom{c}{3}+64\binom{c}{4}.$$

17. Доказать, что энумератор $v(x;\ c)$ деревьев с хроматической окраской точек (все точки каждого дерева различной расцветки) удовлетворяет соотношению

$$v(x;\ c)=p(x,\ c)-\frac{1}{2}\frac{c-1}{c}p^2(x;\ c).$$

18. Доказать, что энумератор $r^*(x,\ y)$ корневых деревьев с линиями, снабженными различными ярлыками, определяется соотношением

$$x(1+y)\,r^*(x,\ y)=r(x,\ y),$$

в котором $r(x,\ y)$ является энумератором корневых деревьев с точками, снабженными ярлыками [см. соотношения (54) и (55)].

19. Доказать, что энумератор $q^*(x;\ c)$ корневых деревьев с цветными линиями связан с энумератором деревьев с цветными точками (задача 14) соотношением

$$xcq^*(x;\ c)=q(x;\ c).$$

20. Положим, что энумератор корневых деревьев с хроматической окраской линий равен $p^*(x;\ c)$, а энумератор «посаженных» деревьев (корневых деревьев с одной линией — стеблем, присоединенной к корню) равен $g(x;c)=1+xg_1(c)+x^2g_2(c)+\ldots$. Доказать, что

$$p^*(x;\ c)=[1+xg(x;\ c)]^c,$$

$$g(x;\ c)=[1+xg(x;\ c)]^{c-1},$$

и проверить частные значения:

$$p_0^*=1,\qquad p_3^*=4\binom{c}{2}+16\binom{c}{3},$$

$$p_1^*=c,\qquad p_4^*=5\binom{c}{2}+75\binom{c}{3}+125\binom{c}{4},$$

$$p_2^*=3\binom{c}{2},\quad p_5^*=6\binom{c}{2}+279\binom{c}{3}+1296\binom{c}{4}+1296\binom{c}{5}$$

21. Установить для деревьев с линиями, снабженными ярлыками, раскрашенными и имеющими хроматическую окраску, соответственно следующие соотношения.

Снабженные ярлыками: $x(1+y)t^*(x, y)=t(x, y)+(y+y^2/2)r(x^2)$.

Раскрашенные: $xcu^*(x;\ c)=u(x,\ c)+\frac{c-1}{2}q(x^2;\ c)$.

Хроматические: $v^*(x;\ c)=p^*(x;\ c)-\frac{1}{2}xcg^2(x;\ c)+\frac{1}{2}xcg(x^2;\ c)$.

22. Показать, что энумератор $\varrho(x,\ y)$ ориентированных корневых деревьев с раскрашенными точками удовлетворяет соотношениям $[\varrho(x,\ 0)\equiv\varrho(x)]$:

$$\varrho(x,\ y)=x(1+y)\exp 2(\varrho(x,\ y)+\varrho(x^2)/2+\ldots+\varrho(x^k)/k+\ldots),$$

$$\varrho(x,\ y)\exp 2\varrho(x)=(1+y)\varrho(x)\exp 2\varrho(x,\ y),$$

$$\alpha(x)\varrho_x(x,\ y)=(1+y)\varrho_y(x,\ y)=\varrho(x,\ y)[1-2\varrho(x,\ y)],$$

в которых

$$\alpha(x)=\varrho(x)/\varrho'(x)(1-2\varrho(x)).$$

23. Показать, что если $\tau(x,\ y)$ является энумератором ориентированных деревьев с точками, снабженными ярлыками [см. соотношение (74)], то (в обозначениях предыдущей задачи) выполняются равенства

$$\alpha(x)\tau'(x)=\varrho(x),$$

$$\alpha(x)\tau_x(x,\ y)=(1+y)\tau_y(x,\ y)=\varrho(x,\ y).$$

24. Рассмотрим ориентированные деревья с раскрашенными точками. Тогда для корневых и свободных деревьев соответственно энумераторами являются следующие выражения:

$$\prod(x;\ c)=xc\exp 2\left(\prod(x;\ c)+\prod(x^2;\ c)/2+\ldots+\prod(x^k\ c)/k+\ldots\right),$$

$$v(x;\ c)=\prod(x;\ c)-\prod{}^2(x;\ c).$$

Для дерева с хроматической окраской точек

$$\nu(x;\ c)=xc\exp 2\,\frac{c-1}{c}\,[\nu(x;\ c)+\nu(x^2;\ c)/2+\ldots],$$

$$\Phi(x;\ c)=\nu(x;\ c)-\frac{c-1}{c}\,\nu^2(x;\ c).$$

Для дерева с линиями, снабженными ярлыками

$$x(1+y)\varrho^*(x,\ y)=\varrho(x,\ y),$$

$$x(1+y)\tau^*(x,\ y)=\tau(x,\ y).$$

Для дерева с цветными линиями

$$xc\prod{}^*(x;\ c)=\prod(x;\ c),$$
$$xcv^*(x;\ c)=v(x;\ c).$$

Для дерева с хроматической раскраской линий

$$\nu^*(x;\ c)=p^*(2x;\ c),$$
$$\Phi^*(x;\ c)=v^*(2x;\ c).$$

25. *Ориентированные графы.* Они находятся в той же связи с линейными графами из разд. 11, что и ориентированные деревья с обычными деревьями. Каждая линия может быть ориентирована (снабжена стрелками) одним из двух способов. Показать, что энумератором запаса является выражение $1+2x$ и что цикловой индекс находится из выражения $C_n(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)/n!$ с помощью правил

$$t_{2m}\sim e_{2m}^{m-1},$$
$$t_{2m+1}\sim e_{2m+1}^{m},$$
$$t_i\circ t_j\sim e_M^D,\quad M=[i,\ j],\quad D=(i,\ j).$$

Отметим, что не существует циклов, в которые входит как пара ij, так и пара ji. Проверить следующие цикловые индексы:

$$2E_2=1+e_1,$$
$$6E_3=e_1^3+3e_2+2e_3,$$
$$24E_4=e_1^6+6e_1e_2^2+3e_2^2+8e_1e_3+6e_4,$$

и при условии, что энумератор определяется выражением

$$\theta_n(x)=E_n(1+2x,\ 1+2x^2,\ \ldots,\ 1+2x^n),$$

доказать соотношения

$$\theta_2(x)=1+x,$$
$$\theta_3(x)=1+x+3x^2+2x^3,$$
$$\theta_4(x)=1+x+4x^2+10x^5+4x^6\quad \text{(Харари [21])}.$$

26. Показать, что связные графы с одним циклом длины p и точками, снабженными ярлыками, перечисляются выражением

$$D_p(x,\ y)=D_p(r(x,\ y),\ r(x^2),\ \ldots,\ r(x^p)),$$

в котором $D_p(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_p)$ — цикловой индикатор группы диэдра [см. соотношения (97) и (98)] и $r(x,\ y)$ — энумератор корневых деревьев с точками, снабженными ярлыками $[r(x,\ 0)=r(x)]$.

27. Доказать, что для частного случая $p=3$ задачи **26 имеет** место соотношение

$$\frac{\partial D_3(x,\ y)}{\partial y}=r_y(x,\ y)\,[r(x,\ y)+r(x^2)-t(x,\ y)],$$

и проверить численные результаты

$$D_3(x,\ y)=x^3(1+y+y^2/2+y^3/6)+x^4(1+3y+7y^2/2+$$
$$+12y^3/6+12y^4/24)+$$
$$+x^5(3+10y+31y^2/2+81y^3/6+150y^4/24+150y^5/5!)+\ldots .$$

28. (a) Показать, что цикловой индекс ориентированных треугольников равен

$$t_1^3+(t_1^3+2t_3)/3=(4t_1^3+2t_3)/3$$

и что, следовательно, энумератором ориентированных связных графов с одним циклом длины 3 и с точками, снабженными различными ярлыками, служит выражение

$$\delta_3(x,\ y)=(4\varrho^3(x,\ y)+2\varrho(x^3))/3.$$

(b) Установить аналогичный результат для ориентированных квадратов:

$$(4t_1^4+2t_2t_1^2+t_2^2+t_4)/2,$$

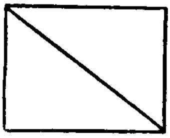
$$\delta_4(x,\ y)=2\varrho^4(x,\ y)+\varrho^2(x,\ y)\,\varrho(x^2)+\frac{1}{2}[\varrho^2(x^2)+\varrho(x^4)].$$

(c) Доказать, что для ориентированных пятиугольников **имеют** место соотношения:

$$(16t_1^5+4t_5)/5,$$

$$\delta_5(x,\ y)=\frac{4}{5}(4\varrho^5(x,\ y)+\varrho(x^5)).$$

29. (a) Доказать, что для связного графа



с двумя циклами длины 3 каждый цикловым индексом является $(t_1^4+2t_1^2t_2+t_2^2)/4$, а энумератором снабженных ярлыками точек служит

$$4E(x,\ y)=r^4(x,\ y)+2r^2(x,\ y)\,r(x^2)+r^2(x^2).$$

(b) Показать, что существует 10 различных ориентаций этого графа. При этом цикловой индекс равен $8t_1^4+2t_1^2t_2$, а энумератором для ярлыков точек служит выражение

$$\varepsilon(x,\ y) = 8\varrho^4(x,\ y) + 2\varrho^2(x,\ y)\,\varrho(x^2).$$

30. *Кактусы.* Кактусы строятся из треугольников подобно тому, как деревья строятся из линий. Положим, следуя Харари, что энумератор корневых кактусов по числу треугольников равен

$$\Delta(x) = 1 + x\Delta_1 + x^2\Delta_2 + \ \dots\ .$$

Это означает, что Δ_n равно числу кактусов из n треугольников.

(a) Доказать, что

$$\Delta(x) = \exp\,[s(x) + s(x^2)/2 + \ \dots\ + s(x^k)/k + \ \dots],$$

где

$$s(x) = x\,(\Delta^2(x) + \Delta(x^2))/2$$

(Харари и Уленбек [22]).

(b) Показать, что энумератор $\Delta(x,\ y)$ по числу треугольников и числу треугольников, снабженных ярлыками (все ярлыки различны), определяется выражением

$$\Delta(x,\ y) = \exp\,[s(x,\ y) + s(x^2)/2 + \ \dots\ + s(x^k)/k + \ \dots],$$

в котором

$$s(x,\ y) = x\,(1 + y)\,[\Delta^2(x,\ y) + \Delta(x^2)]/2.$$

[Функции $s(x)$ и $s(x,\ y)$ не следует смешивать с энумераторами двухполюсных последовательно-параллельных сетей.]

(c) Доказать, объединяя части (a) и (b) настоящей задачи, что

$$\Delta(x,\ y)\exp s(x) = \Delta(x)\exp s(x,\ y),$$

или что при $xy = z$

$$\Delta(x,\ z) = \Gamma_0(z) + x\Gamma_1(z) + \ \dots$$

$$\Delta(x,\ z)\exp s(x) = \Delta(x)\exp s(x,\ z),$$

$$\Gamma_0(z) = \exp z\,(1 + \Gamma_0(z))/2 =$$

$$= 1 + z + 3z^2/2 + 19z^3/3! + 264z^4/4! + \dots\ .$$

31. Доказать, что энумератор $\sigma(x;\ c)$ двухполюсных последовательно-параллельных сетей с c расцветками удовлетворяет соотношению

$$1 + \sigma(x;\ c) = \exp\,[\alpha(x;\ c) + \alpha(x^2;\ c)/2 + \ \dots\ + \alpha(x^k;\ c)/k + \ \dots],$$

где $\alpha(x;\ c)$ — энумератор двухполюсных существенно параллельных сетей и $\sigma(x;\ c) = 2\alpha(x;\ c) - xc$.

Положив

$$\sigma(x;\ c) = x\sigma_1(c) + x^2\sigma_2(c) + \ldots,$$

проверить частные значения:

$$\sigma_1(c) = c, \qquad \sigma_3(c) = 4c + 12\binom{c}{2} + 8\binom{c}{3},$$

$$\sigma_2(c) = 2c + 2\binom{c}{2}, \qquad \sigma_4(c) = 10c + 60\binom{c}{2} + 102\binom{c}{3} + 52\binom{c}{4}.$$

32. (a) Допустим, что к точкам линейного графа можно присоединить больше чем одну линию. Показать, что в этом случае энумератором запаса объектов служит выражение $(1-x)^{-1}$, в то время как цикловой индекс сохраняется неизменным. Тогда энумератором по числу линий графов с n точками является выражение

$$\lambda_n(x) = G_n[(1-x)^{-1},\ (1-x^2)^{-1},\ \ldots,\ (1-x^n)^{-1}],$$

в котором G_n определяется соотношением (90).

(b) Проверить частные значения:

$$\lambda_1(x) = 1,$$
$$\lambda_2(x) = (1-x)^{-1},$$
$$\lambda_3(x) = D(x;\ 123),$$

в которых $D(x;\ 123)$ является денумерантом разбиений на части 1, 2 и 3. Следовательно, число λ_{3k} графов с тремя точками и линиями, в которых разрешены параллельные соединения, является ближайшей целой частью числа $(k+3)^2/12$.

33. Обозначим через $L(x,\ y)$ энумератор

$$1 + L(x,\ y) = (1-y)^{-1}h(x,\ y) =$$
$$= (1-y)^{-1}[1 + xh_1(y) + x^2h_2(y) + \ldots]$$

по числу точек и линий линейных графов без параллельных соединений точек. Соответствующий энумератор связных графов обозначим через

$$C(x,\ y) = c_0(y) + xc_1(y) + x^2c_2(y) + \ldots .$$

Показать, что

$$h_x(x,\ y) = h(x,\ y)[C_x(x,\ y) + xC_x(x^2,\ y^2) + \ldots$$
$$\ldots + x^{k-1}C_x(x^k,\ y^k) + \ldots]$$

и

$$nh_n(y) = C_n(y)\,h_0(y) + C_{n-1}(y)\,h_1(y) + \ldots + C_1(y)\,h_{n-1}(y),$$

где

$$C_1(y) = c_1(y) = y^2, \qquad C_3(y) = 3c_3(y) + c_1(y^3),$$
$$C_2(y) = 2c_2(y) + c_1(y^2), \quad C_4(y) = 4c_4(y) + 2c_2(y^2) + c_1(y^4)$$

и т. д.

Опираясь на значения

$$c_1(y) = y^2, \qquad c_3(y) = y^3 + 2y^4,$$
$$c_2(y) = y^3, \qquad c_4(y) = 2y^4 + 3y^5,$$

установить, что при $h_0(y) = 1$

$$h_1(y) = y^2, \qquad h_3(y) = y^3 + 2y^4 + y^5 + y^6,$$
$$h_2(y) = y^3 + y^4, \quad h_4(y) = 2y^4 + 4y^5 + 3y^6 + y^7 + y^8.$$

(Ср. с табл. 7.)

34. *Химические «деревья»*. Это — частный случай деревьев, встречающихся в структурных диаграммах химических соединений. Ряд перечислений такого рода деревьев проведен Пойа [12]. Результаты Пойа были основой большей части исследований иа ранней стадии изучения деревьев. Рассмотрим, краткости ради, только парафины. Они представляют собой корневые деревья с двумя разными типами точек, отличных от корня. Внешние точки имеют по одной линии, а каждая из внутренних точек имеет по четыре линии. На языке химии речь идет об атомах водорода (H) и атомах углерода (C) соответственно.

(a) Доказать, что для парафинового дерева с p точками, p_1 из которых — внешне и p_4 — внутренне, и $s = p - 1$ линиями имеют место соотношения

$$p_1 + p_4 = p,$$
$$p_1 + 4p_4 = 2s = 2p - 2.$$

Следовательно,

$$p_1 = 2p_4 + 2.$$

(b) Показать, что если $p(x) = 1 + xp_1 + x^2p_2 + \ldots$ является энумератором по числу внутренних точек корневых деревьев такого рода, то

$$p(x) = 1 + x[p^3(x) + 3p(x)p(x^2) + 2p(x^3)]/6.$$

35. Показать, что если $a(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots$, и

$$a^m(x) = a_1(m)x^m + a_2(m)x^{m+1} + \ldots + a_n(m)x^{n+m-1} + \ldots,$$

то

$$a_1(m) = a_1^m,$$
$$a_2(m) = ma_2a_1^{m-1},$$
$$a_3(m) = ma_3a_1^{m-1} + \binom{m}{2} a_2^2a_1^{m-2},$$
$$a_4(m) = ma_4a_1^{m-1} + \binom{m}{2} 2a_3a_2a_1^{m-2} + \binom{m}{3} a_2^3a_1^{m-3}$$

и для $n > 0$

$$a_{n+1}(m) = Y_n(fa_2,\ f2a_3,\ \ldots,\ fn!a_{n+1})/n!, \qquad f^j \equiv f_j = (m)_j a_1^{m-j}.$$

36. (a) Используя результаты задачи 35 и выражение **для** энумератора $a(x) = r(x)$ корневых деревьев, установить, что (**см.** табл. 8)

$$r_1(m) = 1,$$
$$r_2(m) = m,$$
$$r_3(m) = 2m + \binom{m}{2},$$
$$r_4(m) = 4m + 4\binom{m}{2} + \binom{m}{3},$$
$$r_5(m) = 9m + 12\binom{m}{2} + 6\binom{m}{3} + \binom{m}{4},$$
$$r_6(m) = 20m + 34\binom{m}{2} + 24\binom{m}{3} + 8\binom{m}{4} + \binom{m}{5}.$$

(**b**) Показать, что если $r_n(m) = \sum b_{n,k}\binom{m}{k}$, то

$$b_{n,\,n-1} = 1,$$
$$b_{n,\,n-2} = 2(n-2),$$
$$b_{n,\,n-3} = 4\binom{n-2}{2},$$
$$b_{n,\,n-4} = n - 4 + 8\binom{n-2}{3},$$
$$b_{n,\,n-5} = 4\binom{n-4}{2} + 16\binom{n-2}{4},$$
$$b_{n,\,n-6} = 4(n-6) + 12\binom{n-4}{3} + 32\binom{n-2}{5}.$$

37. *Ожерелья.*

(а) Показать, что энумератором для ожерелий с n бусинками, каждая из которых окрашена в любой из c цветов (при условии, что эквивалентными ожерельями считаются только такие, которые получаются одно из другого сдвигами бусинок в одном направлении), служит выражение

$$N_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_c)=\frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\varphi(d)(x_1^d+\ \ldots\ +x_c^d)^{n/d}.$$

Показать аналогично, что двухсторонние ожерелья (когда рассматриваются эквивалентности, вызванные сдвигами в обоих направлениях) перечисляются функцией

$$N_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_c)=D_n(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n),$$

где D_n — цикловой индекс группы диэдра соотношений (97) и (98) и $s_i=x_1^i+x_2^i+\ \ldots\ +x_c^i$.

(b) Показать, используя первый из результатов (a), что число циклических перестановок n элементов, принадлежащих c видам, с повторениями дается выражением

$$N_1(n)=\frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\varphi(d)\,c^{n/d}$$

и что число циклических перестановок из n объектов спецификации $(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m)$ определяется выражением

$$N_1(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m)=\frac{1}{n}\sum\varphi(d)\frac{(n/d)!}{(n_1/(d)!\ \ldots\ (n_m/d)!},$$

в котором d — делитель наибольшего общего делителя чисел n_1. $n_2,\ \ldots,\ n_m$[1]). Аналогичные, но более сложные результаты могут быть получены для второго из энумераторов п. (a).

---

[1]) Согласно Диксону [4], т. 1, первый результат найден Мак-Магоном [Mac Mahon P. A., *Proc. London. Math. Soc.*, **23** (1891—2), 305—313], а второй приведен Люка (Lucas E., Theorie des nombers, Paris, 1891, p. 50—503).

Глава 7

ПЕРЕСТАНОВКИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПОЗИЦИЯМИ I

1. Введение

Настоящая глава посвящена рассмотрению перестановок, удовлетворяющих заданным ограничениям на позиции переставляемых элементов. С перестановками, фигурировавшими в задаче о встречах, описанной и решенной в гл. 3, связана простейшая задача со следующим ограничением позиций: i-му элементу запрещено занимать i-ю позицию. Родственной ей является задача, названная Э. Люка [9] «задачей о гостях» (probleme des ménages). Искомым в задаче является число способов размещения (за круглым столом) n супружеских пар при условии чередования мужчин и женщин и с запрещением жене сидеть рядом с мужем. Если предположить, что жены уже рассажены (а это можно выполнить $2n!$ способами), то для каждого мужа запрещенными окажутся два места — по обе стороны от его жены; при этом число возможных размещений мужей не зависит от заданного способа размещения жен. К подсчету числа способов размещений мужей и сводится задача о гостях. Если мужей перенумеровать числами от 1 до n, то приведенная задача о гостях сводится к подсчету таких перестановок, в которых i-й элемент не может занимать ни i-ю, ни $i+1$-ю позиции ($i=1,2$ ..., ..., $n-1$) и n-й элемент не может занимать ни n-ю, ни первую позицию (так как стол круглый).

Любые ограничения на позиции могут быть изображены с помощью квадратной таблицы, в которой переставляемые элементы отмечаются номерами столбцов, а позиции — номерами строк. Крестик, проставленный на пересечении строки и столбца, означает соответствующее ограничение. Например, схемы ограничений для перестановок из четырех элементов в задаче о встречах и только что сформулированной задаче о гостях имеют вид

	1	2	3	4
1	×			
2		×		
3			×	
4				×

Задача о встречах

	1	2	3	4
1	×	×		
2		×	×	
3			×	×
4	×			×

Задача о гостях

Так как в квадрате со стороной n имеется n^2 клеток, в каждой из которых крестик может либо проставляться, либо нет, то ясно, что при заданном числе n элементов возможны 2^{n^2} задач (сюда входят и перестановки без ограничений, когда ни одна из клеток не отмечена крестиком). Однако некоторые из этих задач не являются различными, так как при перечислении существенно относительное, а не абсолютное расположение крестиков. Например, все n^2 задач, которым на схеме соответствует только один крестик, оказываются аналогичными. Точное число различных задач для любого n неизвестно, однако в настоящей главе в этом направлении будут сделаны некоторые шаги. Кроме того, некоторые задачи не имеют существенного значения. Наиболее интересные задачи, как нам представляется, имеют схемы ограничений следующих типов: (1) «диагональные» или «лестничные», подобные упомянутым выше в задачах о встречах и гостях; (2) прямоугольные и (3) треугольные.

Лестничные схемы связаны с «латинскими прямоугольниками». Латинским прямоугольником называется прямоугольная таблица элементов, в которой каждый ряд представляет собой перестановку из одних и тех же n элементов, причем в каждом столбце все элементы различны. Латинские прямоугольники впервые были изучены Эйлером в 1782 г., и термин «латинские» указывает лишь на то, что элементы обозначены латинскими буквами (это и отличает такие схемы от греко-латинских прямоугольников, также рассматривавшихся Эйлером, в которых каждая клетка содержит как греческую, так и латинскую буквы).

Латинский прямоугольник с двумя строками и n столбцами можно нормировать, потребовав, чтобы элементы в первой строке были расположены в естественном порядке; тогда во второй строке могут содержаться только такие перестановки, которые фигурируют в задаче о встречах. Число $L(2, n)$ таких двухстрочных латинских прямоугольников равно $n!\ D_n$, где D_n — число смещений, определенное в гл. 3. Более сложная зависимость существует между числом трехстрочных латинских прямоугольников и числом решений задачи о гостях; эта зависимость устанавливается в следующей главе. Дальнейшим усложнением является переход к схемам, подобным трехступенчатой лестнице, связанным в некотором смысле с четырехстрочными латинскими прямоугольниками, о которых фактически известно очень мало.

Прямоугольные схемы возникают при наличии некоторого числа одинаковых элементов, как, например, в задачах о парных картах. Наконец, треугольные схемы тесно связаны с задачей Симона Ньюкомба, состоящей в следующем: колода карт произвольной спецификации складывается в одну стопку до тех пор, пока карты выпадают в порядке возрастающего (неубывающего) старшинства При появлении карты младшей, нежели предшествующая, начинают складывать новую стопку и т. д. Спрашивается, сколькими способами, можно получить k таких стопок? Эта задача также рассматривается в следующей главе.

2. Задача о ладьях

Ладья — это такая шахматная фигура, которая атакует вдоль горизонтальных и вертикальных полос шахматной доски. Задача о ладьях состоит в определении числа способов размещения на шахматной доске k не угрожающих друг другу ладей. При этом под шахматной доской понимается произвольная совокупность клеток, расположенных в виде строк и столбцов, подобная схемам, рассмотренным выше. Иначе говоря, эта задача состоит в таком размещении k ладей на шахматной доске, при котором никакая пара ладей не оказывается на одной и той же вертикали или горизонтали.

Любую задачу о перестановках с ограниченными позициями можно свести к задаче о ладьях на доске с соответствующими ограничениями позиций, т. е. некоторые позиции запрещены и отмечены крестиками, как в приведенных выше схемах.

Действительно, если r_k — число способов размещения k не угрожающих друг другу ладей на этой доске и если N_j — число перестановок из n различных элементов, среди которых точно j элементов занимают запрещенные позиции, то

$$N_n(t) = \sum N_j t^j = \sum r_k (n-k)! \, (t-1)^k. \tag{1}$$

Этот результат вытекает из принципа включения и исключения. Из соотношения (3.5а) имеем

$$N_n(t) = \sum NS_k (t-1)^k,$$

где $NS_k = \Sigma N(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k})$. Здесь признаки a_1, a_2, ... определяются заданными ограничениями позиций, т. е. каждое a_i представляет собой свойство, согласно которому некоторый данный элемент j находится в запрещенной позиции k. Общее число свойств равно общему числу запрещенных позиций, т. е. числу крестиков на соответствующей схеме. Некоторые совокупности этих свойств оказываются совместными, а некоторые такими не оказываются. Если элемент i находится в позиции j, то никакой другой элемент в этой позиции находиться не может, а элемент i не может занимать никакой другой позиции. Как раз эти условия и определяют числа r_k. Следовательно, число членов в сумме NS_k равно r_k. При этом в случае любых k совместных свойств для оставшихся элементов имеется $(n-k)!$ позиций. Таким образом,

$$NS_k = r_k(n-k)!$$

как и в (1). Вводя для чисел r_k обычную **производящую** функцию $R(x)$

$$R(x) = \sum r_k x^k, \tag{2}$$

убеждаемся, что $N_n(t)$ получается в результате подстановки $x^k = (n-k)!\,(t-1)^k$ в $R(x)$. Обозначив $(n-k)!$ через $E^{-k}n!$, перепишем соотношение (1) в символических обозначениях

$$N_n(t) = R\,[(t-1)\,E^{-1}]\,n!. \tag{3}$$

Производящую функцию $R(x)$ назовем *ладейным многочленом*. Производящую функцию $N_n(t)$ назовем *многочленом попаданий*. Попаданием называется появление в перестановке элемента в запрещенной для него позиции. Многочлен попаданий перечисляет перестановки по числу попаданий.

Удобно вместо символического уравнения, оперирующего с $n!$, как (3), иметь уравнение, оперирующее с 0! Из соотношения (1) получаем

$$N_n(t) = (1-t)^n r\,(E\,(1-t)^{-1})\,0!, \tag{3a}$$

если

$$r(x) = \sum (-1)^k r_k x^{n-k} = x^n R(-x^{-1}). \tag{2a}$$

Многочлен $r(x)$ называется *присоединенным* ладейным многочленом. Полученные выше результаты являются основными для настоящей и следующей глав. Чтобы подчеркнуть их важность, сведем эти результаты в следующую теорему.

Теорема 1. *В любой задаче о перестановках с ограниченными позициями ладейный многочлен $R(x)$ доски, определенной заданными ограничениями, или его присоединенный многочлен $r(x)$ связаны с многочленом попаданий $N_n(x)$ соотношениями:*

$$N_n(t) = \sum r_k (n-k)!\,(t-1)^k, \tag{1}$$

$$N_n(t) = R\,[(t-1)\,E^{-1}]\,n!, \tag{3}$$

$$N_n(t) = (1-t)^n r\,[E\,(1-t)^{-1}]\,0!. \tag{3a}$$

Следует отметить, что ладейный многочлен является по существу производящей функцией факториальных моментов распределения вероятностей $P_n(t) = N_n(t)/n!$. Действительно, из соотношения (3.5) следует, что

$$N_n(t) = n!P_n(t) = n! \sum (m)_k\,(t-1)^k/k!,$$

где $(m)_k$ является k-м факториальным моментом. Сравнение с равенством (1) дает

$$r_k = \binom{n}{k} (m)_k,$$

$$R(x) = (1 + (m)x)^n, \quad (m)^k \equiv (m)_k, \tag{2b}$$

$$r(x) = (x - (m))^n, \quad (m)^k \equiv (m)_k. \tag{2c}$$

Удобство применения присоединенного ладейного многочлена $r(x)$ немедленно обнаруживается, если через $r(x)$ и его производные выразить многочлен попаданий. В самом деле, сначала находим, что

$$\begin{aligned}(1-t)^{n-1} r' [E(1-t)^{-1}] 0! &= \sum_0^{n-1} r_k (n-k)! (t-1)^k = \\ &= N_n(t) - r_n (t-1)^n = \\ &= N_n(t) - (1-t)^n r(0)\end{aligned} \tag{4}$$

(штрих обозначает производную). Далее, для производной $r^{(k)}(x)$ получаем выражение

$$\begin{aligned}&(1-t)^{n-k} r^{(k)} [E(1-t)^{-1}] 0! = N_n(t) - \\ &- (1-t)^n r(0) - (1-t)^{n-1} r^{(1)}(0) - \ldots - (1-t)^{n-k+1} r^{(k-1)}(0).\end{aligned} \tag{5}$$

С учетом этих соотношений любое соотношение относительно многочлена $r(x) \equiv r_n(x)$ и его производных немедленно преобразуется в рекуррентное соотношение для многочлена попаданий; отметим, что $r_n^{(k)}(0)$ является числом. Следовательно, полагая

$$\sum a_k r_{n-k}(x) = \sum b_k r'_{n-k}(x)$$

(где a_k и b_k — числа), немедленно получаем

$$\sum a_k (1-t)^k N_{n-k}(t) = \sum b_k (1-t)^{k+1} N_{n-k}(t) - (1-t)^{n+1} \sum b_k r_{n-k}(0).$$

Соотношения этого вида для чисел $N_{n-k}(0)$ имеются у Ямамото [15].

Следует отметить, что при использовании любого из этих результатов нет необходимости в том, чтобы переставляемые элементы были различными. Однако одинаковым элементам запрещено занимать одни и те же позиции и в рассматриваемом случае схема ограничений представляет собой некоторый прямоугольный блок. Для схемы ограничений различение элементов оказывается несущественным, и многочлен попадания $N_n(t)$ для одинаковых элементов отличается от соответствующего многочлена для такого же общего числа различных элементов (при той же схеме) только постоянным множителем.

Пример 1. Для задачи о встречах имеют место следующие ограничения. Элемент i не может занимать i-ю позицию; шахматная доска состоит из n разобщенных клеток (в ней нет двух клеток в одной и той же строке или столбце), и ладейный многочлен имеет вид $(1+x)^n$, так как r_k является просто числом способов выбора k из n клеток и поэтому равно биномиальному коэффициенту $\binom{n}{k}$. [В порядке проверки соотношения (1) отметим, что из соотношения (3.15) следует равенство $NS_k=\binom{n}{k}(n-k)!$]. В обозначениях гл. 3 $N_n(t)=D_n(t)$ и на основании (3) получаем

$$\begin{aligned}D_n(t)&=[1+(t-1)E^{-1}]^n n! =\\ &=(E-1+t)^n 0!=(\Delta+t)^n 0! = \sum \binom{n}{k} \Delta^{n-k}0! t^k =\\ &=(D+t)^n, \qquad D^k \equiv D_k=\Delta^k 0!,\end{aligned}$$

что согласуется с соотношением (3.18).

Чтобы проиллюстрировать соотиошение (4), отметим, что

$$r'_n(x)=n(x-1)^{n-1}=nr_{n-1}(x).$$

Поэтому с учетом того, что $r_n(0)=(-1)^n$, получаем

$$D_n(t)=nD_{n-1}(t)+(t-1)^n,$$

а это совпадает с соотношением (3.20).

Пример 2. Задача о неполных встречах. Допустим, что только на m из n элементов налагаются ограничения, указанные в предыдущем примере, а остальные свободны от ограничений. Тогда шахматная доска состоит из m разобщенных клеток. Ладейный многочлен равен $R(x)=(1+x)^m$, а присоединенный ладейный многочлен равен $r(x)\equiv r_n(x,\ n-m)=x^{n-m}(x-1)^m$. Отметим, что $r_n(x,\ 0)=(x-1)^n$ совпадает с многочленом из предыдущего примера. Обозначим через $D_n(t,\ n-m)$ многочлен попаданий; тогда, согласно теореме 1,

$$\begin{aligned}D_n(t,\ n-m)&=\sum\binom{m}{k}(n-k)!\,(t-1)^k=\\ &=[1+(t-1)E^{-1}]^m n!=(\Delta+t)^m(n-m)!=\\ &=(1-t)^n(E(1-t)^{-1})^{n-m}(E(1-t)^{-1}-1)^m 0!.\end{aligned}$$

Упрощая последнее выражение, получаем

$$\begin{aligned}D_n(t,\ n-m)&=E^{n-m}(E-1+t)^m 0!=\\ &=(\Delta+1)^{n-m}(\Delta+t)^m 0!=\\ &=(D+1)^{n-m}(D+t)^m, \qquad D^k\equiv D_k=\Delta^k 0!\end{aligned}$$

Если преобразуем предшествующее соотношение с помощью рекуррентного биномиального соотношения, то найдем

$$D_n(t,\ n-m)=D_n(t,\ n-m+1)+(t-1)D_{n-1}(t,\ n-m),$$

а на основании соотношения (4) имеем $r_n(0,\ n-m)=0$, $n>m$ и

$$r'_n(x,\ n-m)=(n-m)r_{n-1}(x,\ n-1-m)+mr_{n-1}(x,\ n-m),$$

$$D_n(t,\ n-m)=(n-m)D_{n-1}(t,\ n-1-m)+mD_{n-1}(t,\ n-m),\quad n>m.$$

Укажем несколько первых многочленов попаданий:

$n-m$,n	1	2	3
0	t	$1+t^2$	$2+3t+t^3$
1	1	$1+t$	$3+2t+t^2$
2		2	$4+2t$
3			6

3. Свойства ладейных многочленов

Допустим, что шахматная доска C состоит из двух разобщенных частей C_1 и C_2. Это означает, что часть C_1 не имеет клеток в тех же строках и столбцах, в которых имеются клетки C_2. Ясно, что

$$R(x, C)=R(x, C_1)R(x, C_2) \tag{6}$$

(этот результат неявно уже отмечался в примерах 1 и 2). Таким образом, основными являются ладейные многочлены связных досок.

Далее, в случае произвольной доски при разложении относительно любой из ее клеток следует иметь в виду, что r_k способов размещения ладей распадаются на два типа: на размещения, при которых в данной клетке имеется ладья, и на размещения, при которых ладьи в данной клетке нет. Наличие ладьи в данной клетке исключает возможность появления другой ладьи в любой иной клетке той же строки или того же столбца. Следовательно, число размещений первого типа подсчитывается на доске, из которой удалены соответствующие строка и столбец. Оставшуюся после такого удаления доску обозначим через C_i (значок i говорит о том, что в данной клетке имеется ладья). Во втором случае удаляется только данная клетка, и доска обозначается через C_e (значок e указывает на то, что в данной клетке ладьи нет). Следовательно,

$$r_k(C)=r_{k-1}(C_i)+r_k(C_e)$$

и

$$R(x, C)=xR(x, C_i)+R(x, C_e). \tag{7}$$

Пример 3. (а) В случае треугольной доски

$$\begin{array}{cc}\times & \times\\ & \times\end{array}$$

разложение относительно клетки первой строки и первого столбца определяет производные доски

$$C_i=\times,\quad C_e=\begin{array}{c}\times\\ \times\end{array}.$$

При этом

$$R(x)=x(1+x)+1+2x=1+3x+x^2.$$

Если использовать квадратные скобки для обозначения многочленов, соответствующих доскам, заключенным в скобках, то получим естественную запись

$$\begin{bmatrix}\times & \times\\ & \times\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\times\\ \times\end{bmatrix}+x\,[\times]$$

(b) Точно так же получим, что

$$\begin{bmatrix}\times & \times & \\ & \times & \times\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\times & \\ \times & \times\end{bmatrix}+x\,[\times\,\times]=1+3x+x^2+x(1+2x)=1+4x+3x^2.$$

Из этих примеров можно вывести следующие два заключения. Во-первых, разложение может быть использовано для нахождения ладейных многочленов с помощью рекуррентных соотношений. Во-вторых, имея достаточно полный набор классов таких многочленов, можно определить многочлен, соответствующий данной схеме.

Если для одной или обеих досок, получающихся при разложении относительно некоторой клетки, многочлены неизвестны, то изложение следует продолжать до тех пор, пока не придем к доскам с известными многочленами. С другой стороны, операция разложения может осуществляться относительно нескольких клеток заданной доски. Эта операция эквивалентна тому, что в описанном выше итеративном процессе на каждой из производных досок для разложения выбираются одинаковые клетки. Формальное выражение, описывающее операцию разложения относительно любого числа клеток, перенумерованных числами 1, 2, ..., имеет следующий вид:

$$R=R\,[(e_1+xi_1)(e_2+xi_2)\ldots]. \tag{8}$$

Эта запись, подобно соотношению (3.1a), имеет чисто символический смысл и истолковывается по тем же самым правилам; переменная x в многочлене $R(x)$ явно не выписана. Таким образом,

$$R(e_1+xi_1)=R(e_1)+xR(i_1)$$

является сокращенной записью соотношения (7); соотношение

$$R\,[(e_1+xi_1)(e_2+xi_2)]=R(e_1e_2)+xR(e_1i_2)+xR(e_2i_1)+x^2R(i_1i_2)$$

выражает разложение ладейных схем на схемы $R(e_1e_2)$ (ладьи в клетках 1 и 2 отсутствуют), $xR(e_1i_2)$ (ладья в клетке 1 отсутствует, а в клетке 2 имеется) и т. д.

В случае разложения относительно n клеток выражение (8) в развернутом виде (8а) содержит 2^n членов, которые исчерпывают все возможности.

Если все клетки, относительно которых производится разложение, находятся в одной и той же строке (или столбце), то невозможны два или более включений, и потому соотношение (8) сводится к следующему:

$$R = R(e_1e_2 \ldots) + x[R(i_1e_2e_3 \ldots) + R(e_1i_2e_3 \ldots) + \\ + R(e_1e_2i_3 \ldots) + \ldots]. \qquad (8a)$$

Внутри квадратных скобок содержится столько членов, сколько имеется клеток для разложения, и каждый член содержит единственный символ включения.

4. Прямоугольные доски

Рассмотрим прямоугольник, содержащий m строк и n столбцов. После разложения доски по всем n клеткам одной и той же строки и в силу (8a) ладейный многочлен $R_{m,n}(x)$ окажется равным

$$R_{m,n}(x) = R_{m-1,n}(x) + xnR_{m-1,n-1}(x). \qquad (9)$$

В самом деле, ведь в этом случае $R(e_1e_2 \ldots e_n)$ является прямоугольником с одной исключенной строкой, а $R(e_1 \ldots e_{j-1}i_je_{j+1} \ldots \ldots e_n)$ для любого j является прямоугольником без одной строки и одного столбца. Таким же путем, или в силу симметрии, заключаем, что

$$R_{m,n}(x) = R_{m,n-1}(x) + xmR_{m-1,n-1}(x). \qquad (9a)$$

Немедленно становится очевидным, что

$$R_{1,n}(x) = 1 + nx$$

и, в силу (9),

$$R_{2,n}(x) = 1 + 2nx + n(n-1)x^2,$$
$$R_{3,n}(x) = 1 + 3nx + 3n(n-1)x^2 + n(n-1)(n-2)x^3.$$

Это наводит на мысль, что и в общем случае для $m \leqslant n$

$$R_{m,n}(x) = 1 + mnx + \binom{m}{2}(n)_2x^2 + \ldots + \binom{m}{k}(n)_kx^k + \ldots \\ \ldots + (n)_mx^m. \qquad (10)$$

Последнее предположение проверяется с помощью соотношения (9) и математической индукции (ибо оно справедливо для $m = 1$).

Несколько более просто соотношение (10) проверяется следующими непосредственными рассуждениями: на доске из k строк и k столбцов можно $k!$ способами разместить k не угрожающих друг другу ладей (так как никакие две ладьи не могут располагаться в одной строке или столбце). Кроме того, для построения доски вида $k \times k$ (из k строк и k столбцов) из заданной доски вида $m \times n$ можно выделить k строк $\binom{m}{k}$ способами и k

столбцов $\binom{n}{k}$ способами. Следовательно, как и в (10), получаем

$$r_k = k!\binom{m}{k}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}(n)_k.$$

Стоит отметить еще один вид представления многочленов. Полиномы Лагерра можно определить соотношением[1]

$$n!\, L_n^{\alpha}(x) = e^x x^{-\alpha} D^n (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad D = d/dx.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &L_0^{\alpha}(x) = 1, \\ &L_1^{\alpha}(x) = \alpha + 1 - x, \\ &L_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Следовательно, для целого α

$$R_{n,\, n+\alpha}(x) = n!\, x^n L_n^{\alpha}(-x^{-1}). \tag{11}$$

Если прямоугольник $m \times n$ представляет собой схему запрещенных позиций для перестановок из n элементов (значит, $m \leqslant n$), то из (1) следует, что многочлен $N_n(t)$ попаданий задается выражением:

$$N_n(t) = \sum N_{n,\, j} t^j = \sum \binom{m}{k}\binom{n}{k} k!\,(n-k)!\,(t-1)^k = n!\, t^m, \tag{12}$$

т. е. во всех перестановках в запрещенных позициях находятся точно m элементов.

В силу соотношения (12), прямоугольные многочлены занимают центральное место в теории перестановок с ограниченными позициями. Если $R(x)$ является ладейным многочленом для произвольной доски, определяемой ограничениями на позиции n элементов, $A_n(t)$ — соответствующий многочлен попаданий, то, в силу (3),

$$A_n(t) = \sum A_{n,\, j} t^j = R\,[(t-1)\,E^{-1}]\, n!$$

и, согласно (12),

$$n! t^j = R_{n,j}\,[(t-1)\,E^{-1}]\, n!,$$

где $R_{n,\, j}(x)$ — ладейный многочлен прямоугольника вида $n \times j$. Следовательно,

$$n! R\,[(t-1)\,E^{-1}]\, n! = \sum A_{nj} R_{n,\, j}\,[(t-1)\,E^{-1}]\, n!.$$

---

[1] Erdelyi A, et al., Higher Transcendental functions, vol 2, New York, 1953, p. 188.

Полученное равенство эквивалентно соотношению

$$n!\,R(x) = \sum A_{nj} R_{n,j}(x). \qquad (13)$$

Этот результат можно использовать во многих случаях, например для построения рекуррентных соотношений или, как показано ниже, для отыскания некоторых любопытных тождеств.

Пример 4 Ладейным многочленом для задачи встреч (пример 1) является $(1+x)^n$, а многочленом попаданий — $D_n(t) = (D+t)^n$. Следовательно, из (13) получаем такое любопытное соотношение:

$$n!\,(1+x)^n = \sum \binom{n}{j} D_{n-j} R_{n,j}(x).$$

Частные случаи этого соотношения следующие:

$$2(1+x)^2 = R_{20}+R_{22} = 1+(1+4x+2x^2),$$

$$6(1+x)^3 = 2R_{30}+3R_{31}+R_{33} =$$

$$= 2+3(1+3x)+(1+9x+18x^2+6x^3).$$

Пример 5(a). Так как $(d/dx)(1+x)^n = n(1+x)^{n-1}$, то из примера 4 следует, что

$$\sum \binom{n}{m} D_{n-m} \frac{d}{dx} R_{n,m}(x) = n^2 \sum \binom{n-1}{m} D_{n-1-m} R_{n-1,m}(x).$$

Значит,

$$\frac{d}{dx} R_{n,m}(x) = nmR_{n-1,m-1}(x).$$

Последний результат можно непосредственно проверить с помощью (10).

(b) Соотношение из примера 4, записанное в символическом виде, таково:

$$n!\,(1+x)^n = (D+R_{n,.})^n, \quad D^k \equiv D_k, \quad R^k_{n,.} \equiv R_{n,k}(x).$$

В силу того что $R_{n,k}(0) = 1$, замечаем, как уже упоминалось в гл. 3, что $n! = (D+1)^n$. Последнее соотношение можно переписать в виде

$$n!\,(1+x)^n = (D+1+R_{n,.}-1)^n$$

или

$$\sum \binom{n}{m} n!\,x^m = \sum \binom{n}{m} (n-m)!\,(R_{n,.}-1)^m.$$

Этот результат наводит на мысль, что

$$(n)_m x^m = (R_{n,.}-1)^m.$$

Действительно,

$$nx = R_{n,1} - R_{n,0},$$

$$n(n-1)\,x^2 = R_{n,2} - 2R_{n,1} + R_{n,0}.$$

Доказательство можно получить с помощью математической индукции и соотношения

$$(R_{n,.}-1)^{m+1}=\sum\binom{m+1}{k}(-1)^k R_{n,m+1-k}=$$
$$=\sum\binom{m}{k}(-1)^k\,[R_{n,m-k}+nxR_{n-1,\,m-k}]+$$
$$+\sum\binom{m}{k-1}(-1)^k R_{n.\,m+1-k}=$$
$$=nx\sum\binom{m}{k}(-1)^k R_{n-1,\,m-k}=$$
$$=nx\,(R_{(n-1),.}-1)^m.$$

Отметим, что соотношения

$$(n)_m x^m=(R_{n,.}-1)^m,\ R_n^k\equiv R_{n,\,k}(x),\ m\leqslant n,$$
$$R_{n,\,m}(x)=(1+(n)\,x)^m,\ (n)^k\equiv(n)_k,\qquad m\leqslant n$$

являются взаимно обратными и последнее из них — иная запись соотношения (10).

(c) Обозначим, как и в гл. 3, $D_{n,m}=\binom{n}{m}D_{n-m}$. Тогда из равенства

$$n!\,(1+x)^n=n\,(1+x)\,[(n-1)!\,(1+x)^{n-1}]$$

вытекает рекуррентное соотношение для $D_{n,\,m}$, если $n\,(1+x)\,R_{n-1,\,m}$ может быть выражено через прямоугольные многочлены, у каждого из которых один из индексов равен n. Требуемыми соотношениями, полученными из (9) и (9a), являются

$$R_{n,m+1}-R_{n,m}=nxR_{n-1,\,m},$$
$$(n-m)\,R_{n,\,m}+mR_{n,\,m-1}=nR_{n-1,\,m}.$$

Следовательно,

$$R_{n,\,m+1}+(n-m-1)\,R_{n,\,m}+mR_{n,\,m-1}=n\,(1+x)\,R_{n-1,\,m}$$

и

$$\sum D_{n,\,m}R_{n,\,m}=\sum D_{n-1,\,m}\,[R_{n,\,m+1}+(n-m-1)\,R_{n,\,m}+mR_{n,\,m-1}].$$

Наконец,

$$D_{n,\,m}=D_{n-1,\,m-1}+(n-m-1)\,D_{n-1,\,m}+(m+1)\,D_{n-1,\,m+1}.$$

Отметим, что при $m=0$

$$D_{n,\,0}=(n-1)\,D_{n-1,\,0}+D_{n-1,\,1}=$$
$$=(n-1)\,(D_{n-1,\,0}+D_{n-2,\,0}).$$

Это последнее равенство является известным нам (см. 3.24) соотношением Эйлера. Отметим также, что из рекуррентного соотношения следует равенство

$$D_n(t)=\sum D_{n,\,m}\,t^m=$$
$$=(n-1+t)\,D_{n-1}(t)+(1-t)\,D'_{n-1}(t),$$

в котором, как обычно, штрих означает производную. При этом в соответствии с результатами задачи 3.6 требуется, чтобы $D'_n(t)=nD_{n-1}(t)$, т. е. чтобы выполнялось соотношение (3.19).

Соотношения для прямоугольных многочленов, фигурирующих ниже в примере 5, могут быть систематизированы путем введения операторов E_n, E_m, которые определяются равенствами

$$\begin{gathered} E_n R_{n,\,m}(x) = R_{n+1,\,m}(x), \\ E_m R_{n,\,m}(x) = R_{n,\,m+1}(x). \end{gathered}$$

Основные рекуррентные соотношения, выраженные равенствами (9) и (9a), эквивалентны соотношениям

$$\begin{gathered} [E_m E_n - E_n - (n+1)\,x]\,R_{m,\,n} = 0, \\ [E_m E_n - E_m - (m+1)\,x]\,R_{m,\,n} = 0. \end{gathered} \qquad (14)$$

Операторы E_m и E_n действуют только на индексы m и n многочлена $R_{m,\,n}$. Они независимы и перестановочны. Соотношения (14) в действительности одинаковы, ибо $R_{m,\,n} = R_{n,\,m}$. Переписывая первое из них в виде

$$(E_m - 1)\,R_{m,\,n} = nxR_{m,\,n-1},$$

находим, что

$$(E_m - 1)^2 R_{m,\,n} = nx\,(E_m - 1)\,R_{m,\,n-1} = n\,(n-1)\,x^2 R_{m,\,n-2}.$$

Следовательно,

$$(E_m - 1)^k R_{m,\,n} = (n)_k\,x^k R_{m,\,n-k}. \qquad (15)$$

Полученное соотношение несколько более общего вида, нежели соотношение

$$(n)_m\,x^m = (R_{n,.} - 1)^m = (E_m - 1)^m R_{n,\,0}$$

из примера 5(b).

Комбинация двух уравнений (14) дает новое соотношение, используемое в примере 5, а именно

$$[(n-m)\,E_m E_n + mE_n - nE_m]\,R_{m-1,\,n-1} = 0 \qquad (16)$$

или

$$[n - m + mE_m^{-1} - nE_n^{-1}]\,R_{m,\,n} = 0.$$

Следовательио,

$$\begin{gathered} [n - m + mE_m^{-1}]\,R_{m,\,n} = nE_n^{-1} R_{m,\,n}, \\ [(n-m)\,(n-m-1) + 2m\,(n-m)\,E_n^{-1} + m\,(m-1)\,E_m^{-2}]\,R_{m,\,n} = \\ = n\,(n-1)\,E_n^{-2} R_{m,\,n}; \end{gathered}$$

используя факториальные обозначения, получаем

$$\begin{aligned} \Big[(n-m)_k + \binom{k}{1} (n-m)_{k-1}\,mE_m^{-1} + \ldots \\ \ldots + \binom{k}{j} (n-m)_{k-j}\,(m)_j\,E_m^{-j} + \ldots \\ \ldots + (m_k)\,E_m^{-k} \Big]\,R_{m,\,n} = (n)_k\,E_n^{-k} R_{m,\,n}. \end{aligned} \qquad (17)$$

В символической форме соотношение (17) записывается в виде

$$[(n-m)+(m)E_m^{-1}]^k R_{m,\,n}=(n)_k E_n^{-k}R_{m,\,n},$$

где

$$(n-m)^k\equiv(n-m)_k,\ (m)^k\equiv(m)_k.$$

Наконец, можно отметить, что

$$\sum R_{m,\,n}(x)\,t^m/m!=(1+xt)^n\exp t, \tag{18}$$

$$\sum\sum R_{m,\,n}(x)\,t^m u^n/m!n!=\exp(t+u+xtu). \tag{19}$$

5. Парные карты

Как упоминалось выше, прямоугольные многочлены представляют особый интерес при решении задачи о парных картах. Эта задача состоит в подсчете числа парных карт в колоде, сложенной произвольным образом. В случае двух колод парными называются одинаковые карты, находящиеся в каждой из колод в одной и той же позиции. Для большего числа колод открываются иные возможности. Парными можно называть одинаковые карты и занимающие одну и ту же позицию (как в задаче 3.9) во всех колодах или по крайней мере в k из n колод и т. д. В общем случае спецификация колод (по числу карт каждого вида) является произвольной.

Рассматривая только две колоды, отметим сначала, что без потери общности можно предполагать, что общее число карт в обеих колодах одно и то же. Действительно, в противном случае меньшую из них можно дополнить новыми картами, отличными от старых. При этом не появится никаких новых возможностей для возникновения парных карт. Далее, в связи с тем, что в данном случае важны относительные, а не абсолютные позиции карт в колоде, одну из колод можно расположить в стандартном порядке и сравнивать ее со второй колодой, упорядоченной всеми возможными способами. Стандартный порядок карт первой колоды определяет те позиции, в которых может произойти образование пар, а спецификация второй колоды определяет те элементы, которые могут оказаться парными в этих позициях. Пусть имеется s видов карт, которые учитываются при образовании пар, причем карт i-го типа в первой колоде имеется n_i, а во второй колоде — m_i. Тогда схема образования пар будет состоять из s разобщенных прямоугольников, причем i-й прямоугольник имеет размеры $n_i\times m_i$.

Следовательно, ладейным многочленом в этом случае окажется

$$R(x)=R_{n_1,\,m_1}(x)\,R_{n_2,\,m_2}(x)\,\ldots\,R_{n_s,\,m_s}(x). \tag{20}$$

Простейшим является случай двух колод, в каждой из которых карты перенумерованы числами от 1 до n. Энумератором является функция $D_n(t)$, соответствующая ладейному многочлену $(R_{11})^n$. В колоде обычных игральных карт содержатся карты 13 различных достоинств. Карт каждого достоинства — четыре, и они отличаются мастью. Образование пар может осуществляться либо по достоинству, либо по масти (карты «валет», «дама», «король» можно обозначить числами 11, 12, 13). Образование пар по достоинству описывается ладейным многочленом $[R_{44}(x)]^{13}$, а образование пар по масти — многочленом $[R_{13,13}(x)]^4$. Непосредственное вычисление любого из них, несмотря на ясность путей, оказывается практически неосуществимым, и его обычно заменяют приближенными методами. Эти методы указаны далее. Проиллюстрируем сказанное выше на простом примере.

Пример 6 (a). Рассмотрим две колоды, в каждой из которых p карт типа a и q карт типа b; следовательно, спецификация каждой колоды определяется выражением (pq). В этом случае ладейным многочленом служит

$$R_{pp}R_{qq} \text{ или } S_pS_q$$

(многочлен $S_p = R_{pp}$ называется квадратным). При $p=q=2$

$$S_2(x) = 1+4x+2x^2,$$

$$S_2^2(x) = 1+8x+20x^2+16x^3+4x^4,$$

и многочленом попаданий оказывается

$$N_{22}(t) = 4!+8\cdot 3!\,(t-1)+20\cdot 2\,(t-1)^2+16\,(t-1)^3+4\,(t-1)^4 = \\ = 4\,(1+4t^2+t^4).$$

Далее будет показано, что вычислительная работа значительного объема, затрачиваемая на определение нулевых коэффициентов многочлена $N_{22}(t)$, оказывается бесполезной, и непосредственное изучение общего случая (p, q — произвольны) таким способом мало привлекательно.

(b) Более простым подходом в этом случае является следующий. Предположим, что карты в первой колоде расположены в стандартном порядке, а во второй колоде имеется k парных карт типа a. Тогда вторая колода должна содержать $p-k$ карт типа b в позициях карт типа a, $p-k$ карт типа a в позициях карт типа b и $q-p+k$ парных карт типа b, как указано в следующей таблице:

	a	b
a	k	$p-k$
b	$p-k$	$q-p+k$

Буквы над столбцами являются указателями позиций, а буквы перед строками — указателями карт.

Число пар равно сумме диагональных элементов, а именно $q-p+2k$. Число способов, которыми эти пары могут быть получены равно

$$p!q!\binom{p}{k}\binom{q}{p-k}.$$

Энумератором для числа париых карт является

$$N_{pq}(t)=p!q!\sum\binom{p}{k}\binom{q}{p-k}t^{q-p+2k}=p!q!\sum\binom{p}{k}\binom{q}{k}t^{p+q-2k}.$$

Полученный выше результат для $N_{22}(t)$ легко проверяется, как и следующие простые случаи, для которых $N_{pq}(t)=p!q!\,A_{pq}(t)$:

$$\begin{aligned}&A_{01}=t,\\ &A_{02}=t^2, \quad A_{11}=1+t^2,\\ &A_{03}=t^3, \quad A_{12}=2t+t^3,\\ &A_{04}=t^4, \quad A_{13}=3t^2+t^4, \quad A_{22}=1+4t^2+t^4.\end{aligned}$$

В силу симметрии, $A_{pq}(t)=A_{qp}(t)$; в силу рекуррентного соотношения для бииомиальных коэффициентов,

$$A_{pq}(t)=tA_{p,\,q-1}(t)+tA_{p-1,\,q}(t)+(1-t^2)\,A_{p-1,\,q-1}(t).$$

(c) Используя соотношение (13) и полученные выше результаты, находим, что

$$\binom{p+q}{p}S_p(x)\,S_q(x)=\sum\binom{p}{k}\binom{q}{k}R_{p+q,\,p+q-2k}(x).$$

Используя соотиошение для полиномов Лагерра

$$R_{n,\,n+a}(x)=n!\,x^nL_n^a(-x^{-1}),$$

получаем, что

$$(p+q)!\,L_p(x)\,L_q(x)=\sum\binom{p}{k}\binom{q}{k}(p+q-2k)!\,x^{2k}L_{p+q-2k}^{2k}(x)$$

$$(L_p(x)=L_p^0(x),\ \text{как обычно}).$$

6. Парные карты. Аппроксимация

Как упоминалось выше, непосредственный подсчет числа парных карт для двух колод с большим числом карт чрезвычайно трудоемок. Поэтому желательно иметь приближенные результаты. Их можно получить, основываясь на том факте, что ладейный многочлен по существу является, как уже указывалось в связи с соотношением (2b), производящей функцией для факториальных (или биномиальных) моментов распределения вероятностей $N_n(t)/N_n(1)$, связанного с многочленом попаданий. Следовательно, эти моменты находятся из ладейного многочлена, а распределение вероятностей приближенно определяется образованием такого числа моментов, какое оказывается необходимым.

Чтобы отыскать выражения для моментов распределения вероятностей образования парн х карт, отметим сначала, что прямоугольный ладейный многочлен $R_{n,\,m}(x)$, данный соотношением (10), может быть записан в виде

$$R_{n,\,m}(x)=\exp xA, \qquad A^k\equiv A_k=(n)_k\,(m)_k,$$

где $A_k = 0$ для k, превосходящего наименьшее из чисел m и n. Тогда ладейный многочлен для парных карт из колод со спецификациями $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ и $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ с учетом соотношения (20) можно записать в виде

$$R(x) = \exp x(a_1 + a_2 + \ldots + a_s), \quad a_i^k \equiv a_{ik} = (n_i)_k (m_i)_k.$$

В случае, когда $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$, для k-го биномиального момента B_k имеет место соотношение

$$k!\, r_k = k!\, (n)_k B_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^k,$$

$$a_i^k \equiv (n_i)_k (m_i)_k, \tag{21}$$

подобное соотношению, предшествовавшему соотношению (2b). В частности,

$$\begin{aligned} nB_1 &= a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{s1} = n_1 m_1 + n_2 m_2 + \ldots + n_s m_s; \\ 2n(n-1) B_2 &= a_{12} + \ldots + a_{s2} + 2(a_{11} a_{21} + \ldots + a_{s-1,1} a_{s1}) = \\ &= n_1(n_1 - 1) m_1 (m_1 - 1) + \ldots + n_s (n_s - 1) m_s (m_s - 1) + \\ &\quad + 2[n_1 m_1 n_2 m_2 + \ldots + n_{s-1} m_{s-1} n_s m_s]. \end{aligned}$$

Выражения для моментов более высоких порядков оказываются все более сложными, и выписывать их нет смысла, так как в частных случаях с помощью выражения (21) достигаются значительные упрощения. Это можно усмотреть из следующего примера.

Пример 7. Предположим, что обе рассматриваемые колоды имеют спецификации (a^s), т. е. в них содержатся карты s различных типов и число карт каждого типа равно a. Тогда

$$R(x) = [S_a(x)]^s = (\exp bx)^s, \qquad b_k = (a)_k^2,$$

и на основании результатов задачи (2.22) для $n = as$ получаем

$$k!\, (n)_k B_k = Y_k(fb_1, fb_2, \cdots, fb_k), \qquad f^j = (s)_j.$$

В частности,

$$nB_1 = sa^2 = na,$$

$$2n(n-1) B_2 = s(a(a-1))^2 + s(s-1) a^4 = n(n-1) a^2 - n(a)_2,$$

откуда следует, что $a^k/k!$ является главным членом в выражении для $\boldsymbol{B_k}$. Если положить B_k равным a^k, то в силу (2.32), а именно,

$$p_j = \sum_{k=0} (-1)^k \binom{k+j}{k} B_{j+k},$$

где $p_j = N_{nj}/n!$ — вероятность j попаданий, то вероятность p_j будет равна $e^{-a} a^j/j!$, т. е. окажется типичным членом пуассоновского распределения. Это обстоятельство подсказывает возможность аппроксимации с помощью видоизмененного распределения Пуассона, если воспользоваться следующим разложением для биномиальных моментов:

$$k!B_k=A_{k0}+A_{k1}/n+A_{k2}/n\,(n-1)+\ldots,$$

где A_{ki} зависит от a, а также от k, ио не зависит от n. **Заметив, что**

$$Y_k\,(fb_1,\ \ldots,\ fb_k)=f_kb_1^k+\binom{k}{2}f_{k-1}b_2b_1^{k-2}+$$

$$+\left[\binom{k}{3}b_3b_1+3\binom{k}{4}b_2^2\right]f_{k-2}b_1^{k-4}+\ldots,$$

и полагая $n\,(n-a)\,\ldots\,(n-(k-1)\,a)=(n)_{k,\,a}$, находим сначала, **что**

$$k!\,(n)_kB_k=a^k\,(n)_{k,\,a}+\binom{k}{2}a^{k-1}\,(a-1)^2\,(n)_{k-1,\,a}+$$

$$+\left[\binom{k}{3}a^{k-1}\,(a-1)^2\,(a-2)^2+3\binom{k}{4}a^{k-2}\,(a-1)^4\right](n)_{k-2,\,a}+\ldots.$$

Далее, из задачи 2.23 получаем

$$k!\,(n)_k\,B_k=a^k\,(n)_k+a^{k-1}\,(1-a)\binom{k}{2}(n-1)_{k-1}+A_{k2}\,(n-2)_{k-2}+\ldots,$$

где

$$A_{k2}=a^{k-2}\left[a\,(1-a)\binom{k}{2}+2\,(a-1)\,(a-2)\binom{k}{3}+3\,(a-1)^2\binom{k}{4}\right].$$

Полученное выражение является искомым разложением и может быть использовано, как уже упоминалось выше, в соотношении (2.32) для получения выражения

$$p_j=\frac{N_{n,\,j}}{n!}=\frac{e^{-a}a^j}{j!}\left[1+\frac{(a-1)\,[j-(j-a)^2]}{2a\,(n-1)}+\frac{(a-1)\,f_2\,(a,\ j)}{24a^2n\,(n-1)}+\ldots\right],$$

в котором

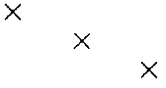
$$f_2(a,\ j)=8\,(a-2)\,[(j)_3-3a\,(j)_2+3a^2j-a^3]+$$

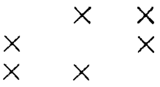
$$+3\,(a-1)\,[(j)_4-4a\,(j)_3+6a^2\,(j)_2-4a^3j+a^4].$$

Последнее соотношеиие улучшает формулу, установленную Каттаиео [6], в которой p_j выражается через степени n^{-1}.

7. Дополнения

Дополнением заданной шахматной доски, являющейся частью некоторой большей доски, называется такая шахматная доска, которая составлена из всех клеток большей доски, не принадлежащих заданной доске. В соответствии с этим определением шахматные доски





служат дополнениями друг друга на квадратной доске со стороной в 3 клетки. Между многочленами досок, взаимно дополняющих друг друга на прямоугольной шахматной доске, существует определенная зависимость. Обозначим через $Q(x)$ и $R(x)$ ладейные многочлены досок, взаимно дополняющих друг друга на прямоугольной доске размера $m \times n$. Тогда

$$Q(x) = \sum r_k(-x)^k R_{m-k,\, n-k}(x) =$$
$$= R(-xf) R_{m,\, n}(x), \quad f^k R_{m,\, n}(x) = R_{m-k,\, n-k}. \qquad (22)$$

Соотношение (22) можно вывести непосредственно из принципа включения и исключения (теорема 3.1), если применить соответствующие рассуждения к многочленам, а не к их числовым коэффициентам, как это делалось раньше. Так, в качествее $N(a'b'c'\ldots)$ возьмем многочлен $Q(x)$; $N = N(1)$ соответствует многочлену $R_{nm}(x)$ всей доски, $N(a)$ — многочлену $R(x) \equiv xR_{n-1,\, m-1}(x)$ доски с ладьей в одной клетке и т. д. Поскольку существует r_k способов размещения k ладей на доске с многочленом $R(x)$ и поскольку многочленом для прямоугольной доски с k ладьями в заданных клетках служит $x^k R_{n-k,\, m-k}(x)$, то легко уяснить смысл общего члена в выражении (22).

Пример 8. Для первой из указанных выше досок ладейным многочленом служит $(1+x)^3$. Следовательно, многочлен второй доски при условии, что $S_n(x)$ означает многочлен квадратной доски со стороной n, равен

$$Q(x) = S_3(x) - 3xS_2(x) + 3x^2S_1(x) - x^3S_0(x) =$$
$$= 1 + 9x + 18x^2 + 6x^3 - 3x(1 + 4x + 2x^2) + 3x^2(1+x) - x^3 = 1 + 6x + 9x^2 + 2x^3.$$

Вторая доска соответствует задаче о гостях для случая $n = 3$. Наоборот,

$$R(x) = (1+x)^3 = S_3 - 6xS_2 + 9x^2S_1 - 2x^3.$$

Иногда удобно находить дополнение по этапам или с помощью рекуррентных соотношений. Так, например, если $R(x)$ задан в виде

$$R(x) = R_0(x) + xR_1(x) + \ldots + x^j R_j(x) + \ldots,$$

то его дополнением на прямоугольной доске $m \times n$ служит многочлен

$$Q(x) = Q_0(x) - xQ_1(x) + \ldots + (-x)^j Q_j(x) + \ldots, \qquad (23)$$

где $Q_j(x)$ является дополнением $R_j(x)$ в прямоугольнике $(m-j) \times (n-j)$.

Если $R(x)$ и $Q(x)$ — многочлены досок, взаимно дополняющих друг друга на квадратной доске со стороной n, и если соответствующие многочлены попаданий для n элементов имеют вид

$$N_n(t) = \sum N_{n,\, j} t^j, \quad M_n(t) = \sum M_{n,\, j} t^j,$$

то $N_{n,\, j} = M_{n,\, n-j}$. Действительно, если j элементов находятся в запрещенных позициях на одной доске, то $n - j$ элементов находятся в запрещенных позициях на дополняющей доске. Соответствующими зависимостями между многочленами оказываются

$$N_n(t) = t^n M_n(t^{-1}),$$
$$M_n(t) = t^n N_n(t^{-1}). \qquad (24)$$

Ладейным многочленам из примера 8 отвечают следующие многочлены попаданий: $N_3(t) = D_3(t) = 2+3t+t^3$ и $M_3(t) = 1+3t^2+2t^3$.

Используя соотношение (3), переписываем первое из соотношений (24) в виде

$$R[(t-1)E^{-1}]n! = t^n Q[(t^{-1}-1)E^{-1}]n!$$

или при $x = t-1$ в виде

$$R(xE^{-1})n! = (1+x)^n Q[-xE^{-1}(1+x)^{-1}]n!. \qquad (25)$$

Суть соотношения (25) может быть выражена в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Если $R(x)$ и $Q(x)$ служат ладейными многочленами двух досок, взаимно дополняющих друг друга на квадратной доске со стороной n, и если $E^{-k}n! = (n-k)!$, то*

$$R(xE^{-1})n! = (1+x)^n Q[-xE^{-1}(1+x)^{-1}]n!$$

или

$$\sum r_k x^k (n-k)! = \sum q_k (-x)^k (1+x)^{n-k} (n-k)!.$$

8. Эквивалентность

Как уже отмечалось, доски, которые можно сделать одинаковыми путем перестановок их строк и столбцов или путем замены строк столбцами и столбцов строками, обладают одними и теми же многочленами и поэтому являются эквивалентными. Эквивалентность обозначают символом $\sim$. Таким образом,

$$\begin{array}{cccc} \times & \times & \sim & \times \\ & & & \times \end{array}$$

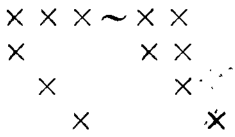
$$\begin{array}{ccccccccccc} \times & \times & \times & \sim & \times & \times & & \sim & \times & \times & \\ & \times & \times & & \times & \times & \times & & \times & \times & \times \\ & & \times & & \times & & & & & \times & \end{array}$$

Существуют и другие, менее очевидные случаи эквивалентности, такие, например, как

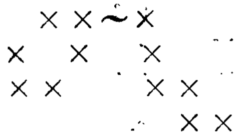
(a) $$\begin{array}{cccccc} \times & \times & \sim & \times & \times & \times \\ \times & \times & & & & \times \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{cccccccccccccc} \times & \times & \times & \sim & \times & \times & \times & \sim & \times & \times & \times & \times & \\ & \times & \times & & & & \times & & & & & & \times \\ & & & & & & \times & & & & & & \end{array}$$

(c)

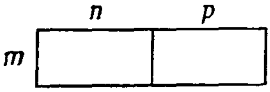


(d)



Эти доски не являются геометрически конгруэнтными, однако обладают одними и теми же многочленами: (a) $1+4x+2x^2$; (b) $1+5x+4x^2$; (c) $1+6x+9x^2+3x^3$, (d) $1+6x+9x^2+2x^3$. Отметим, что многочлены (b) и (c) разложимы на два множителя, каждый из которых является также ладейным многочленом. В отличие от этого многочлен (d) может быть разложен в произведение $(1+4x+x^2)(1+2x)$, в котором, однако, $(1+4x+x^2)$ не является ладейным многочленом.

Когда два многочлена оказываются эквивалентными? Исчерпывающего ответа на поставленный вопрос еще не найдено, однако некоторые сведения содержатся в следующих теоремах. Первой теоремой мы обязаны И. Капланскому (частная переписка). Она требует некоторых предварительных разъяснений. Рассмотрим прямоугольник $m\times(n+p)$



и часть его C, являющуюся полной доской вида $m\times n$ с ладейным многочленом $R_{m,n}(x)$. Предположим далее, что каждая из двух эквивалентных досок A и B вкладывается в оставшуюся часть вида $m\times p$. Тогда справедлива

Теорема 3. *Если A и B — эквивалентные доски, т. е. доски с одинаковыми ладейными многочленами, то доски $A+C$ и $B+C$ также эквивалентны.*

Сумма $A+C$ представляет собой доску, состоящую из всех клеток A и $m\times n$ клеток доски C. Эквивалентные доски вида (a) и первые две доски вида (b) служат примерами для этой теоремы.

Приведем ее доказательство. Положим

$$R(x, A)=R(x, B)=\sum r_k x^k,$$

$$R(x, A+C)=\sum R_k x^k,$$

тогда

$$R_k = \sum_{j=0}^{k} r_j \binom{m-j}{k-j} \binom{n}{k-j} (k-j)!,$$

так как при наличии на доске $k-j$ ладей на доске $(m-j)\times n$ не может оказаться ладей в тех же самых строках и так как

$$\binom{m-j}{k-j} \binom{n}{k-j} (k-j)!$$

является числом способов размещения $k-j$ ладей на прямоугольной доске $(m-j)\times n$. Далее ясно, что

$$R(x,\ B+c) = \sum R_k x^k = R(x,\ A+C).$$

Это и утверждает теорема.

Вторая теорема включает в себя первую (теорему 3).

Теорема 4. *Если два многочлена эквивалентны, то эквивалентными оказываются и их дополнения на любой прямоугольной доске.*

Доказательство этой теоремы немедленно следует из соотношения (22). Доказательство того, что это утверждение включает в себя теорему 3, состоит в следующем. Рассмотрим доску D, которая является прямоугольником вида $m\times p$, и обозначим ее дополнение на доске A через $D-A$, а на доске B — через $D-B$. Согласно теореме 4,

$$D-A \sim D-B.$$

Здесь эквивалентность относится либо к доскам, либо к их ладейным многочленам. Дополнением $D-A$ на прямоугольной доске $C+D$ вида $m\times(n+p)$ служит доска $A+C$. Дополнением $D-B$ на той же доске $C+D$ служит доска $B+C$. Поэтому, согласно теореме 4, $A+C \sim B+C$, что и утверждается теоремой 3.

Третья теорема несколько отлична от предыдущих и почти очевидна.

Теорема 5. *Два многочлена эквивалентны, если оказываются одинаковыми как многочлены включения, так и многочлены исключения при разложении соответствующих досок относительно одной и той же клетки.*

Указанный выше случай (d) представляет собой пример эквивалентности, которая проверяется с помощью теоремы 5, но не с помощью теоремы 4. Разложения относительно одной и той же клетки на каждой из досок вида (d) дают

$$\begin{bmatrix} & \times & \times \\ \times & & \times \\ \times & \times & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \times \\ \times & & \times \\ \times & \times & \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} \times & \times \\ \times & \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \times & & \\ \times & & \\ \times & \times & \\ & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & & \\ \times & \times & \\ & & \\ & \times & \times \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} \times & \\ \times & \times \end{bmatrix}.$$

Трудность приложений теоремы 5 состоит в нахождении подходящей для разложения клетки. Ввиду этого удобно иметь следующее определение.

Определение. *Две клетки данной доски называются эквивалентными для разложения, если либо включающие, либо исключающие их доски эквивалентны.*

Так как двумя разными способами разлагается одна и та же доска, то, согласно соотношению (7), из эквивалентности включающих досок следует эквивалентность исключающих досок (и наоборот).

В табл. 1 приведены все различные многочлены и отвечающие им связные доски с максимальным числом клеток, равным 6. Отметим, что $1+nx$ является единственным двучленом для любого n и что «наибольший» многочлен $L_n(x)$, т. е. многочлен с наибольшей суммой коэффициентов, определяется равенствами $L_0(x)=1$, $L_1(x)=1+x$ и рекуррентным соотношением

$$L_n(x)=L_{n-1}(x)+xL_{n-2}(x). \qquad (26)$$

Здесь $L_n(x)$ соответствует доска, имеющая форму лестницы, (доска для приведенной задачи о гостях в случае, когда стол прямоугольный, а не круглый).

Доказательство справедливости этого утверждения проводится с использованием разложения относительно одной клетки и математической индукции. Во-первых, $L_1(x)=1+x$ является «наибольшим» (и единственным) многочленом для одиночной клетки. Далее, любой многочлен для n связных клеток, полученный с помощью разложения относительно одной клетки, должен иметь вид

$$R_n(x)=P_{n-1}(x)+xQ_{n-k}(x), \quad k>1,$$

где индексы указывают на число клеток, так как на связной доске включение данной клетки влечет за собой исключение по меньшей мере одной другой клетки. Следовательно, если для любого j «наибольшим» многочленом является $L_j(x)$, то $L_n(x)$ является «наибольшим» многочленом для n [выбираем в качестве

$L_{n-1}(x)$ многочлен $P_{n-1}(x)$, а в качестве $L_{n-2}(x)$ — многочлен $Q_{n-k}(x)$].

Отметим, что из (26) и начальных условий следует, что

$$L_n(x)=1+nx+\binom{n-1}{2}x^2+\ldots+\binom{n-k+1}{k}x^k+$$
$$+\ldots+\binom{n-m+1}{m}x^m, \qquad (27)$$

где $m=[(n+1)/2]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэттен (Batten I. L.), On the problem of multiple matching, *Annals of Math. Statist.*, **13** (1942), 294—305.
2. Капланский (Kaplansky I.), On a generalization of the «problème des rencontres», *Amer. Math. Monthly*, **46** (1939), 159—161.
3. Капланский (Kaplansky I.), Symbolic solution of certain problems in permutations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 906—914.
4. Капланский, Риордан (Kaplansky I., Riordan J.), Multiple matching and runs by the symbolic method, *Annals of Math. Statist.*, **16** (1945), 272—277.
5. Капланский (Kaplansky I.), The problem of the rooks and its applications, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 259—268.
6. Каттанео (Cattaneo P.), Sul problema delle concordanze, *Inst. Veneto Sci. Lett. Arti. Parte II, Cl. Sci. Mat. Nat.*, **101** (1942), 89—104.
7. Каллбэк (Kullback S.), Note on a matching problem, *Annals of Math. Sratist.*, **10** (1939), 77—80.
8. Линделёф (Lindelöf L.), Opersigt af Finska Vetenskaps, *Societetens Förhandlingar*, **42** (1899—1900).
9. Люка (Lucas E.), Théorie des nombres, Paris, 1891, pp. 491—495.
10. Мендельсон (Mendelsohn N. S.), Symbolic solution of card matching problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 918—924.
11. Олдс (Olds E. G.), A moment generating function which is useful in solving certain matching problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 407—413.
12. Уилкс (Wilks S. S.), Mathematical Statistics, Princeton, 1943, chap. X.
13. Фреше (Frechet M.), A note on the probléme des rencontres, *Amer. Math. Monthly*, **46** (1939), p. 501.
14. Фреше (Frechet M.), Les probabilités associées a un system d'évènements compatibles et dépendants, part II, Paris, 1943.
15. Ямамото (Yamamoto K.), Structure polynomial of Latin rectangles and its application to a combinatorial problem, *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ.*, Ser. A, **10** (1956), 1—13.

Задачи

1. (а) Доказать. что ладейный многочлен $S_n(x)$ квадрата со стороной n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_{n+1}(x)=[1+(2n+1)x]S_n(x)-n^2x^2S_{n-1}(x),$$
$$S_n'(x)=(d/dx)S_n(x)=n^2S_{n-1}(x), \quad n>0.$$

Проверить, что

$$S_1 = 1 + x, \qquad S_3 = 1 + 9x + 18x^2 + 6x^3,$$
$$S_2 = 1 + 4x + 2x^2, \qquad S_4 = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4.$$

(b) Используя полученные рекуррентиые соотношения, установить следующие зависимости для экспоненциальных производящих функций

$$(1 - xt)^2 D \exp tS(x) = (1 + x - x^2 t) \exp tS(x), \quad D = d/dt,$$
$$\exp tS'(x) = (t + t^2 D) \exp tS(x),$$
$$(1 - xt) \exp tS(x) = \exp [t(1 - xt)^{-1}].$$

2. Дополнением к прямоугольнику вида $m \times n$ в прямоугольнике вида $m \times (n+p)$ является прямоугольник вида $m \times p$. Следовательно, согласно соотношению (21),

$$R_{m,\,p}(x) = \sum (-x)^k \binom{m}{k} \binom{n}{k} k!\, R_{m-k,\,n+p-k}(x).$$

Проверить путем итерации рекуррентного соотношения (9a) для прямоугольного многочлена, что

$$R_{m,\,n-1}(x) = R_{m,\,n}(x) - mxR_{m-1,\,n-1}(x).$$

3. Перманент порядка n можно определить выражением $\sum a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$, в котором $i_1 i_2 \ldots i_n$ — перестановка целых чисел от 1 до n. Он подобен определителю, в котором все члены имеют положительный знак, и обозначается следующим образом:

$$\begin{array}{c} + \hspace{6em} + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}.$$

Показать, что многочлен попаданий $D_n(t)$ для задачи о встречах является перманентом порядка n, в котором элементы главной диагонали равны t, а остальные элементы — единице. Так, например,

$$D_2(t) = \begin{array}{c} + \hspace{2em} + \\ \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} \end{array} = 1 + t^2,$$

$$D_3(t) = \begin{array}{c} + \hspace{3em} + \\ \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} \end{array} = tD_2(t) + 2(1 + t) = 2 + 3t + t^3.$$

Отметим, что позиции, в которых находятся элементы t, определяют доску для задачи о встречах.

Указание. Установить рекуррентные соотношения

$$D_n(t) = tD_{n-1}(t) + (n-1)f_{n-1}(t),$$
$$f_{n-1}(t) = D_{n-2}(t) + (n-2)f_{n-2}(t).$$

4. Доказать, что клетки, лежащие на гипотенузе треугольной доски, эквивалентны. То же утверждение доказать для клеток, лежащих на линии, параллельной гипотенузе.

5. Доказать, что коэффициенты r_k с нечетными индексами ладейного многочлена $R(x)$, самосамодополняющегося на прямоугольной доске вида $m \times n$, должны удовлетворять соотношениям, подобным следующим:

$$2r_1 = mn,$$
$$24r_3 = 12(m-2)(n-2)r_2 - (m)_3(n)_3,$$

но что коэффициенты с четными индексами остаются не определенными. Например, для прямоугольника вида 2×2, доски

$$\begin{array}{cc} \times & \times \\ & \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{cc} \times & \\ & \times \end{array}$$

взаимно дополняют друг друга, но обладают различными многочленами ($1 + 2x$ и $1 + 2x + x^2$). Для прямоугольника вида 2×4 доски

$$\begin{array}{cc} \times & \times \\ \times & \times \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ \times & & \end{array}$$

имеют один и тот же многочлен ($1 + 4x + 2x^2$), однако доска

$$\begin{array}{ccc} \times & \times & \\ & \times & \times \end{array}$$

также самодополняющаяся, имеет своим многочленом $1 + 4x + 4x^2$.

6. Простейшая доска лестничного типа имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cccc} \times & \times & & \\ & \times & \times & \\ & & \times & \times \\ & & & \ldots \end{array}$$

Поэтому ее многочленом (при m «ступенях») служит $(1 + 2x)^m$.

(а) Проверить соотношения для следующих многочленов попаданий ($n = 2m$):

$$A_2(t) = 2t,$$
$$A_4(t) = 8(1 + t + t^2),$$
$$A_6(t) = 48(5 + 6t + 3t^2 + t^3).$$

(b) Положим $A_{2m}(t)=2^m m!\,a_m(t)$. Показать, что

$$a_m(t)=(2m-1)\,a_{m-1}(t)+(1-t)^2\,a_{m-2}(t)=$$
$$=(2m-2+t)\,a_{m-1}(t)+(1-t)\,a'_{m-1}(t)=$$
$$=a'_m(t)-(1-t)\,a_{m-1}(t)$$

(штрих означает производную).

Указание. Использовать соотношение

$$\binom{m}{k}(2m-k)!=(2m-1)\,2m\binom{m-1}{k}(2m-2-k)!+$$
$$+m(m-1)\binom{m-2}{k-2}(2m-2-k)!$$

(c) Показать, что $a_m(t)$ является многочленом степени m, а именно:

$$a_m(t)=\sum a_{m,k}\,t^k,$$
$$a_{m,m}=1,\quad a_{m,m-1}=\binom{m}{2},\quad a_{m,m-2}=\binom{m}{2}+3\binom{m+1}{4}.$$

(d) Опираясь на (b), убедиться, что $a_m(1)=(2m)!/m!\,2^m=a'_m(1)$ (штрих означает производную) и что

$$a''_{m-1}(1)=a'_m(1)-a_{m-1}(1).$$

Следовательно, первые два факториальных момента оказываются равными соответственно

$$m_1=1,\quad (m)_2=(2m-2)/(2m-1).$$

7. Для парных карт из двух колод, каждая из которых определяется спецификацией 2^m [по две карты в каждом из m видов $(n=2m)$], ладейным многочленом является многочлен $(1+4x+2x^2)^m$.

(a) Проверить, что если $A_{2m}(t)=2^m a_m(t)$ — соответствующий многочлен попаданий, то

$$a_1(t)=t^2,$$
$$a_2(t)=1+4t^2+t^4,$$
$$a_3(t)=10+24t+27t^2+16t^3+12t^4+t^6.$$

(b) Показать, что (штрих означает производную)

$$a'_m(t)=2m\,(2m-2+t)\,a_{m-1}(t)+2m\,(1-t)\,a'_{m-1}(t),$$
$$2a_m(t)=[(2m-2)(2m-3)+8(m-1)\,t+2t^2]\,a_{m-1}(t)+$$
$$+(4m-6+4t)(1-t)\,a'_{m-1}(t)+(1-t)^2\,a''_{m-1}(t).$$

Указание. Следовать решению примера 5(a).

8. *Продолжение.* (a) Показать, что если $Eu_n = u_{n+1}$ и D_n — число смещений, то

$$e_n = (E-2)^n 0! = (D-1)^n,$$

$$\exp ue = e^{-2u}(1-u)^{-1}, \qquad e^n \equiv e_n,$$

$$\exp u(e+2t) = (1-u)^{-1} \exp 2u(t-1),$$

$$e_n(2t) = (e+2t)^n = ne_{n-1}(2t) + (2t-2)^n = e^k \equiv e_k$$

$$= n(n-1)e_{n-2}(2t) + (n-2+2t)(2t-2)^{n-1}.$$

(b) Используя соотношение

$$A_{2m}(t) = [E^2 + 4E(t-1) + 2(t-1)^2]^m 0! =$$

$$= [e(2t) - 2(t-1)^2]^m, \quad e^k(2t) \equiv e_k(2t),$$

доказать, что

$$A_{2m}(t) = 2m(2m-1)A_{2m-2}(t) + 8m(m-1)(1-t)^2 A_{2m-4}(t) +$$

$$+ m2^{2m+1}(t-1)^{2m-1} + 2^m(t-1)2^m,$$

$$a_m(t) = m(2m-1)a_{m-1}(t) + 2m(m-1)(1-t)^2 a_{m-2}(t) +$$

$$+ (2m-1+t)(t-1)^{2m-1}.$$

(c) Проверить, что $a_m(1) = (2m)!\,2^{-m}$, и доказать (штрих означает производную), что

$$a'_m(1) = 2a_m(1),$$

$$a''_m(1) = 2ma_{m-1}(1) + 2m(2m-2)a'_{m-1}(1)$$

и что

$$m_1 = 2,$$

$$(m)_2 = m_2 - m_1 = (8m-6)/(2m-1).$$

(d) Показать, что биномиальные моменты $B_k(m)$ удовлетворяют соотношению

$$(2m-1)(k+1)B_{k+1}(m) = 2(2m-1-k)B_k(m-1) + 2B_{k-1}(m-1)$$

и что, следовательно, для больших m

$$B_k(m) \sim 2^k/k!$$

Указание. $B(t, m) = \sum B_k(m)t^k = a_m(1+t)/a_m(1)$; использовать первое соотношение задачи 7(b).

9. (a) Доказать, что при $n = 2m$ число членов в разложении определителя n-го порядка, не содержащих элементов, принадлежащих к какой-либо из двух главных диагоналей, равно $A_{2m}(0)$ [где $A_{2m}(t)$, — как в задаче 8(b)] и, следовательно,

$$A_{2n}(0) = 2m(2m-1)A_{2m-2}(0) + 8m(m-1)A_{2m-4}(0) + (1-2m)2^m,$$

$$a_m(0) = m(2m-1)a_{m-1}(0) + 2m(m-1)a_{m-2}(0) + (1-2m).$$

Первые несколько значений таковы:

m	1	2	3	4	5	6
$A_{2m}(0)$	0	4	80	4752	440192	59245120
$a_m(0)$	0	1	10	297	13756	925705

(b) При $n=2m+1$ ладейный многочлен из задачи 9(a) равен $(1+4x+2x^2)^m(1+x)$. Доказать, что соответствующий многочлен $A_{2m+1}(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$4(m+1)A_{2m+1}(t)=A'_{2m+2}(t),$$
$$A_{2m+1}(t)-4m(1-t)A_{2m-1}(t)=(2m+t)A_{2m}(t)$$

(штрих означает производную).
Следовательно,

$$A_{2m+1}(0)=2m[2A_{2m-1}(0)+A_{2m}(0)].$$

Проверить следующие результаты:

$$\begin{aligned} &A_1(t)=t, && A_1(0)=0,\\ &A_3(t)=4t+2t^3, && A_3(0)=0,\\ &A_5(t)=4(4+9t+8t^2+8t^3+t^5), && A_5(0)=16,\\ & && A_7(0)=528. \end{aligned}$$

10. Ладейные многочлены $Q_n(x)$ для доски, дополняющей в квадрате со стороной n доску, соответствующую задаче встреч, определяются соотношениями

$$Q_n(x)=\sum_0^n \binom{n}{k}(-x)^k S_{n-k}(x)=$$
$$=(S-x)^n,\quad S^n=S_n(x)\text{ — многочлен квадратной доски.}$$

(a) Показать, что

$$\exp tQ(x)=\exp(-xt)\exp tS(x),$$
$$(1-xt)^2Q(x)\exp tQ(x)=(1+x^2t-x^3t^2)\exp tQ(x),$$
$$\exp tQ'(x)=t^2Q(x)\exp tQ(x)+t^2x\exp tQ(x)$$

и, следовательно, что

$$Q_{n+1}(x)=(1+2nx)Q_n(x)-n(n-2)x^2Q_{n-1}(x)-n(n-1)x^3Q_{n-2}(x),$$
$$Q'_n(x)=n(n-1)[Q_{n-1}(x)+xQ_{n-2}(x)].$$

Проверить эти рекуррентные соотношения, использовав начальные значения:

$$Q_0=Q_1=1,\quad Q_2=(1+x)^2,\quad Q_3=1+6x+9x^2+2x^3.$$

(b) Положим $Q_n(x)=\sum Q_{n,k}x^k$; доказать, что

$$Q_{n,k}=\binom{n}{k}\Delta^k(n-k)!/(n-k)!=$$
$$=\binom{n}{k}D^k(D+1)^{n-k}/(n-k)!,\quad D^n\equiv D_n=\Delta^n 0!\ .$$

Проверить частные случаи

$$Q_{n0}=1,\quad Q_{n1}=n(n-1),\quad Q_{n2}=\binom{n}{2}(n^2-3n+3);\quad Q_{nn}=D_n$$

и соотношения

$$kQ_{n,k}=n(n-1)(Q_{n-1,k-1}+Q_{n-2,k-2}).$$

(c) Положим, что $Q_{n,k}=\binom{n}{k}d_{n,n-k}$, причем

$$d_{n,k}=\Delta^{n-k}k!/k!$$

Доказать, что

$$kd_{n,k}=d_{n,k-1}+d_{n-1,k-1},$$
$$d_{n,k}=(n-k)d_{n-1,k}+d_{n-1,k-1}=$$
$$=(n-1)d_{n-1,k}+(n-k-1)d_{n-2,k}.$$

Проверить таблицу

k n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	1	1	1					
3	2	3	2	1				
4	9	11	7	3	1			
5	44	53	32	13	4	1		
6	265	309	181	71	21	5	1	
7	1854	2119	1214	465	134	31	6	1

11. Многочленом попаданий, соответствующим $Q_n(x)$, является

$$A_n(t)=\sum Q_{n,k}(n-k)!\,(t-1)^k.$$

(a) Доказать, что

$$A_n(t) = \sum \binom{n}{k} D_k t^k = (1+Dt)^n, \quad D^k \equiv D_k.$$

Проверить несколько начальных значений

$$A_0 = A_1 = 1, \quad A_2 = 1+t^2, \quad A_3 = 1+3t^2+2t^3.$$

(b) Показать, что если $D_n(t)$ является многочленом числа смещений, то

$$A_n(t) = t^n D_n(t^{-1})$$

и, следовательно,

$$(1-ut)\exp uA(t) = \exp u(1-t),$$

$$A_n(t) = ntA_{n-1}(t) + (1-t)^n,$$

$$n!t^n = [A(t)+(t-1)]^n = \sum \binom{n}{k} (t-1)^k A_{n-k}(t).$$

(c) Пользуясь соотношением

$$n! Q_n(x) = \sum \binom{n}{k} D_k R_{n,k}(x),$$

убедиться, что $Q_{n,k}$ выражается так, как указано в задаче 10 (b).

12. Ладейный многочлен доски, дополняющей в прямоугольнике $n \times m$, $n \geqslant m$ доску, соответствующую задаче о встречах, определяется соотношением

$$Q_{n,m}(x) = \sum \binom{m}{k} (-x)^k R_{n-k,\,m-k}(x),$$

и, как обычно,

$$Q_{n,m}(x) = \sum Q_k(n, m) x^k.$$

(a) Доказать, что в обозначениях задачи 10

$$Q_k(n, m) = \binom{m}{k} d_{n,\,n-k}.$$

Проверить частные случаи

$$Q_{0,0} = Q_{n,0} = 1, \quad Q_{n,1}(x) = 1+(n-1)x,$$

$$Q_{n,2}(x) = 1+2(n-1)x+(n^2-3n+3)x^2.$$

(b) Вывести рекуррентные соотношения

$$Q_{n,m}(x) = Q_{n-1,m}(x) + mxQ_{n-1,\,m-1}(x), \quad m < n.$$

(c) Соответствующий многочлен попаданий $A_{n,m}(t)$ определяется соотношением

$$A_{n,m}(t) = \sum Q_k(n, m)(n-k)!\,(t-1)^k.$$

Доказать, что

$$A_{n,\,m}(t)=(D+1)^{n-m}(1+tD)^{m},\quad D^{k}\equiv D_{k}=\Delta^{k}0!$$

Проверить частные случаи

$$A_{n1}(t)=(n-1)!\,[1+(n-1)\,t],$$
$$A_{n2}(t)=(n-2)!\,[1+2\,(n-2)\,t+(n^{2}-3n+3)\,t^{2}].$$

(d) Показать, что если $A_{nn}(t)=A_{n}(t)$ из задачи 11, то

$$A_{n,\,n-1}(t)=nA_{n-1}(t)-(n-1)\,(1-t)\,A_{n-2}(t),$$
$$A_{n+1,\,n}(t)=ntA_{n,\,n-1}(t)+A_{n}(t),$$
$$A_{n+2,\,n}(t)=ntA_{n+1,\,n-1}(t)+2A_{n+1,\,n}(t).$$

(e) Положим $A_{n+m,\,n}(t)=A_{n}^{(m)}(t)$; доказать, что

$$(1-ut)\exp u\,A^{(m)}(t)=m\exp u\,A^{(m-1)}(t),$$
$$(1-ut)^{m+1}\exp uA^{(m)}(t)=m!\exp[u\,(1-t)]$$

и, следовательно, что

$$A_{n}^{(m)}(t)=ntA_{n-1}^{(m)}(t)+mA_{n}^{(m-1)}(t),$$
$$A_{n+1}^{(m)}(t)=[1+(n+m)\,t]\,A_{n}^{(m)}(t)+n\,(t^{2}-t)\,A_{n-1}^{(m)}(t).$$

13. Опираясь на теорему 3, показать, что следующие **доски** эквивалентны:

$$\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ & \times & \end{array}\sim\begin{array}{cc} \times & \times \\ \times & \times \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \\ & & \times & & \end{array}\sim\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{array}$$

и т. д. **Отметим**, что в общем случае это **означает, что**

$$1+3+\ldots+(2n-1)=n^{2}.$$

14. Введем **в** случае задачи о неполных **встречах (пример 2)** обозначения

$$D_{n}(t,\,m)=\sum D_{k}(n,\,m)\,t^{k},$$

причем

$$D_{k}(n,\,m)=\binom{m}{k}\Delta^{m-k}(n-m)!,$$

$$n!\,(1+x)^{m}=\sum D_{k}(n,\,m)\,R_{n,\,k}(x).$$

(a) Доказать, что для $m < n$ из соотношения $n!(1+x)^m = n[(n-1)!(1+x)^m]$ вытекает, что

$$D_k(n, m) = (n-k)D_k(n-1, m) + (k+1)D_{k+1}(n-1, m)$$

и что, следовательно (штрих означает производную),

$$D_n(t, m) = nD_{n-1}(t, m) + (1-t)D'_{n-1}(t, m).$$

(b) Показать, что

$$D'_n(t, m) = mD_{n-1}(t, m-1)$$

и что

$$D_n(t, m) = nD_{n-1}(t, m) + m(1-t)D_{n-2}(t, m-1), \quad m \leqslant n.$$

(c) Вывести рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \Delta^{m-k}(n-m)! &= \Delta^{m-k+1}(n-m-1)! + \Delta^{m-k}(n-m-1)! = \\ &= (n-m)\Delta^{m-k}(n-m-1)! + (m-k)\Delta^{m-k-1}(n-m)! = \\ &= (n-k)\Delta^{m-k}(n-m-1)! + (m-k)\Delta^{m-k-1}(n-m-1)! \end{aligned}$$

Из второго соотношения вывести формулы

$$\begin{aligned} D_n(t, m) &= (n-m)D_{n-1}(t, m) + D'_n(t, m) = \\ &= (n-m)D_{n-1}(t, m) + mD_{n-1}(t, m-1). \end{aligned}$$

Указание: во втором соотношении использовать формулу

$$\Delta^{m-k}(n-m)! = \sum \binom{n-m}{j} D_{n-k-j}$$

и рекуррентное соотношение

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

15. Многочлен парных карт (пример 6) при $p = q$ может быть записан в виде

$$A_{pp}(t) = \sum \binom{p}{k}^2 t^{2k} = a_p(u), \quad u = t^2.$$

Показать, используя соотношения

$$k^2\binom{p}{k}^2 = p^2\binom{p-1}{k-1}^2,$$

$$(p-k)^2\binom{p}{k}^2 = p^2\binom{p-1}{k}^2,$$

$$k\binom{p}{k}^2 = k\binom{p-1}{k}^2 + (2p-k)\binom{p-1}{k-1}^2,$$

что (штрих означает производную)

$$a'_p(u) + ua''_p(u) = p^2 a_{p-1}(u),$$
$$p^2 a_p(u) - (2p-1)\, u a'_p(u) + u^2 a''_p(u) = p^2 a_{p-1}(u),$$
$$a'_p(u) = (2p-1)\, a_{p-1}(u) + (1-u)\, a'_{p-1}(u)$$

и, следовательно, что

$$p a_p(u) = (2p-1)(1+u)\, a_{p-1}(u) - (p-1)(1-u)^2 a_{p-2}(u).$$

Проверить последнее соотношение, используя следующие начальные значения:

$$a_0(u) = 1, \quad a_1(u) = 1 + u, \quad a_2(u) = 1 + 4u + u^2.$$

Показать, сопоставляя эти значения и рекуррентное соотношение для многочленов Лежандра

$$nP_n(u) = (2n-1)\, uP_{n-1}(u) - (n-1)\, P_{n-2}(u),$$

что

$$a_n(u) = (1-u)^n P_n\,[(1+u)(1-u)^{-1}].$$

16. Показать, что многочленом попаданий для парных карт из двух колод спецификаций $(p_1 q_1)$ и $(p_2 q_2)$ является

$$A(t) = \sum \binom{p_2}{k} \binom{q_2}{p_1 - k} t^{q_2 - p_2 + 2k}.$$

17. *Дополнение к примеру* 7. Обозначим многочлен квадрата со стороной a через

$$S_a(x) = x^a a! \exp c x^{-1}, \quad c^k \equiv c_k.$$

Показать, что $c_k = \binom{a}{k}$. Тогда если

$$[S_a(x)]^s = x^{as} a!^s \exp c(s)\, x^{-1}, \quad c^n(s) \equiv c_n(s),$$

то многочлен попаданий $N(t, a^s)$ определяется соотношением

$$N(t, a^s) = a!^s \sum_{k=0} c_k(s)\,(t-1)^{as-k} = a!^s \sum A_k t^k.$$

Учитывая значения $c_i(s)$ $[c_0(s) = 1, c_1(s) = as, c_2(s) = s\binom{a}{2} + (s-1)\, sa^2$ и т. д.], доказать следующие соотношения:

$$A_{as} = 1,$$
$$A_{as-1} = 0,$$
$$A_{as-2} = a^2 \binom{s}{2},$$
$$A_{as\ 3} = 2a^3 \binom{s}{3},$$

$$A_{as-4}=\binom{a}{2}^2\binom{s}{2}+6a^2\binom{a}{2}\binom{s}{3}+9a^4\binom{s}{4},$$

$$A_{as-5}=12a\binom{a}{2}^2\binom{s}{3}+48a^3\binom{a}{2}\binom{s}{4}+44a^5\binom{s}{5},$$

$$A_{as-6}=\left[2a^2\binom{a}{4}+a\binom{a}{3}\right]\binom{s}{2}/3+a(11a-17)\binom{a}{2}^2\binom{s}{3}+$$
$$+\left[190a^2\binom{a}{2}^2-8a^3\binom{a}{2}\right]\binom{s}{4}+420a^4\binom{a}{2}\binom{s}{5}+265a^6\binom{s}{6}.$$

18. Доказать, что приведенный многочлен попаданий $A_{pq\ldots w}(t)$ $[A_{pq\ldots w}(1)=(p+q+\ldots+w)!/p!q!\ldots w!]$ для двух колод, каждая из которых имеет спецификацию $(pq\ldots w)$, удовлетворяет соотношениям $(n=p+q+\ldots+w,\ D=d/dt)$:

$$pA_{pq\ldots w}(t)=[n+1-2p+t(2p-1)]A_{p-1,q,\ldots,w}(t)+$$
$$+(1-t)DA_{p-1,q,\ldots,w}(t)-(p-1)(1-t)^2A_{p-2,q,\ldots,w}(t),$$

$$DA_{pq\ldots w}(t)=pA_{p-1,q,\ldots,w}(t)+qA_{p,q-1,\ldots,w}(t)+\ldots+wA_{p,q,\ldots,w\ 1}(t),$$

в частности

$$pA_{pq}(t)=[q+1-p+t(2p-1)]A_{p-1,q}(t)+$$
$$+(1-t)DA_{p-1,q}(t)-(p-1)(1-t)^2A_{p-2,q}(t);$$
$$DA_{pq}(t)=pA_{p-1,q}(t)+qA_{p,q-1}(t);$$
$$pA_{pqr}(t)=[q+r+1-p+t(2p-1)]A_{p-1,q,r}(t)+$$
$$+(1-t)DA_{p-1,qr}(t)-(p-1)(1-t)^2A_{p-2,qr}(t);$$
$$DA_{pqr}(t)=pA_{p-1,qr}(t)+qA_{p,q-1,r}(t)+rA_{p,q,r-1}(t).$$

19. Показать, используя соотношения задачи 18 и обозначая $A_{ppp}(t)$ через B_p, что для двух колод, каждая из которых имеет спецификацию ppp, выполняются равенства

$$3p^2B_p-[p+1+(2p-1)t]DB_p-t(1-t)D^2B_p=$$
$$=2p(1-t)^2[(3p-3+(6p-3)t)B_{p-1}+(1-t)(2+t)DB_{p\ 1}];$$
$$2pDB_p=[3(3p^2-1)+6(3p-1)(p-1)t+3(9p^2-10p+3)t^2]B_{p-1}+$$
$$+[7p-4+(12p-9)t-(9p-6)t^2-(10p-7)t^3]DB_{p-1}+$$
$$+(2+t)(1+t)(1-t)^2D^2B_{p-1}.$$

20. Показать, используя матрицу парных карт (каждая из двух колод имеет спецификацию ppp)

$$\begin{array}{ccc} i & j & p-i-j \\ k & l & p-k-l \\ p-i-k & p-j-l & -2p+i+j+k+l, \end{array}$$

что первые коэффициенты B_{pk} в выражении

$$B_p = \sum B_{pk} t^k$$

имеют следующие значения:

$$B_{p0} = \sum \binom{p}{k}^3,$$

(Мак-Магон)

$$B_{p1} = 3p \sum \binom{p}{k+1}\binom{p}{k}\binom{p-1}{k},$$

$$B_{p2} = 3\binom{p}{2}\sum\binom{p}{k+2}\binom{p}{k}\binom{p-2}{k} + 3p^2\sum\binom{p}{k+1}\binom{p-1}{k+1}\binom{p-1}{k},$$

$$B_{p3} = 3\binom{p}{3}\sum\binom{p}{k+3}\binom{p}{k}\binom{p-3}{k} +$$

$$+ 6p\binom{p}{2}\sum\binom{p}{k+1}\binom{p-1}{k+2}\binom{p-2}{k} + p^3\sum\binom{p-1}{k}^3.$$

Проверить следующую таблицу:

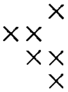
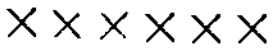
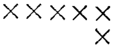
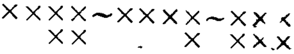
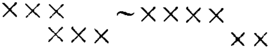
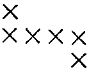
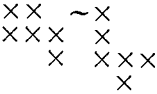
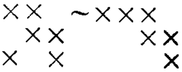
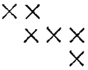
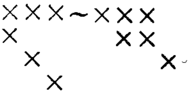
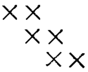
p	1	2	3	4	5
B_{p0}	2	10	56	346	2252
B_{p1}	3	24	216	1824	15150
B_{p2}	0	27	378	4536	48600
B_{p3}	1	16	435	7136	99350

Таблица 1

Различные ладейные многочлены для связных досок из n клеток

	Многочлен	Доска
$n=1$	$1+x$	×
$n=2$	$1+2x$	××
$n=3$	$1+3x$	×××
	$1+3x+x^2$	×× ×
$n=4$	$1+4x$	××××
	$1+4x+2x^2$	×××~×× × ××
	$1+4x+3x^2$	×× ~××× ×× ×
$n=5$	$1+5x$	×××××
	$1+5x+3x^2$	×××× ×
	$1+5x+4x^2$	×××~×××~×××× ×× × × ×

Продолжение табл. 1

	Многочлен	Доска
$n=5$	$1+5x+5x^2$	
	$1+5x+5x^2+x^3$	
	$1+5x+6x^2+x^3$	
$n=6$	$1+6x$	
	$1+6x+4x^2$	
	$1+6x+6x^2$	
	$1+6x+7x^2$	
	$1+6x+8x^2$	
	$1+6x+7x^2+x^3$	
	$1+6x+7x^2+2x^3$	
	$1+6x+8x^2+2x^3$	
	$1+6x+9x^2+2x^3$	
	$1+6x+9x^2+3x^3$	
	$1+6x+9x^2+4x^3$	
	$1+6x+10x^2+4x^3$	

Глава 8

ПЕРЕСТАНОВКИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПОЗИЦИЯМИ II

1. Введение

В этой главе продолжаются рассмотрения, начатые в гл. 7. Изучаются лестничные шахматные доски (наиболее известным примером которых является доска в задаче о гостях), тесно связанные с ними латинские прямоугольники и, наконец, трапециевидные и треугольные доски, появляющиеся в задаче Симона Ньюкомба. Интересным частным случаем задачи Симона Ньюкомба является головоломка, известная под названием задачи о слонах. Каждый из указанных предметов допускает значительные обобщения. Все то, что содержится в основном тексте, а также в задачах, только определяет направления дальнейших исследований. Ярким примером являются латинские прямоугольники с числом строк более трех, перечисление которых только начато.

2. Задача о гостях

Эта задача поставлена в разд. 7.1 в формулировке, данной в 1891 г. Люка [16]. Приведенная задача о гостях состоит в перечислении таких перестановок элементов 1, 2, ..., n, в которых элемент i не занимает позиций i и $i+1$ ($i = 1,2, ..., n-1$), а элемент n не занимает позиций 1 и n. Иными словами, требуется перечисление перестановок, противоречивых перестановкам 123... n и 234... 1.

За тринадцать лет до Люка, по предложению Тейта [32], Кэли [14] и Мьюир [18] рассмотрели эту вторую форму задачи. Тейт предполагал, что искомое перечисление необходимо ему для изучения узлов. (Позднее обнаружилось, что задача Тейта была сложнее, а именно она состояла в перечислении указанных выше перестановок задачи о гостях, причем перестановки M_1 и M_2 задачи о гостях, связанные соотношением $M_1 = CM_2C^{-1}$, не считаются различными, если C — цикличная перестановка. Эта задача не была решена[1].) Кэли и Мьюир, подобно Люка́, нашли рекуррентное соотношение, но не обнаружили простого выражения (5), найденного позднее Тушаром [33] и приводимого нами ниже.

---

[1] Это замечание, прочитанное в рукописи Е. Гильбертом, навело его на решение задачи, опубликованное в статье «Knots and classes of menage permutations», *Scripta Math.*, 22 (1956), 228—233.

Удобно провести одновременное решение обоих вариантов задачи о гостях (случай прямоугольного[1]) стола и случай круглого стола). Доской для первого варианта служит лестница

$$\begin{array}{cccccc} \times & & & & & \\ \times & \times & & & & \\ & \times & \dots & & & \\ & & & \times & \times & \\ & & & & \times & \times \end{array}$$

состоящая из $2n-1$ клеток, по две в каждой из n строк, кроме первой, и по две в каждом столбце, кроме последнего.

Доска для второго варианта задачи такая же, но с добавлением клетки в первой строке и последнем столбце.

Пусть $L_k(x)$ — ладейный многочлен для первых k клеток указанной лестницы (читаемой сверху вниз и слева направо); пусть, далее, $L_{2n-1}(x)$ — многочлен для прямоугольного стола. Пусть, наконец, $M_n(x)$ — ладейный многочлен для случая круглого стола.

Тогда при разложении относительно одной клетки первой строки лестницы, состоящей из k клеток, получаем соотношение

$$L_k(x) = L_{k-1}(x) + xL_{k-2}(x), \tag{1}$$

которое уже встречалось ранее под номером (7.26) как «наибольший» ладейный многочлен доски из k клеток. Тогда, точно так же как и прежде, для соотношения (7.27) окажется, что

$$L_k(x) = \sum_0^m \binom{k-j+1}{j} x^j, \quad m = [(k+1)/2] \tag{2}$$

и ладейный многочлен для прямолинейной доски окажется равным

$$L_{2n-1}(x) = \sum_0^n \binom{2n-k}{k} x^k. \tag{2a}$$

Для ладейного многочлена $M_n(x)$ задачи о гостях путем разложения относительно клетки, добавляемой в этом случае к лестнице, немедленно получаем, что

$$M_n(x) = L_{2n-1}(x) + xL_{2n-3}(x), \quad n > 1. \tag{3}$$

Следовательно, из соотношения (2) имеем

$$M_n(x) = \sum \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} x^k, \quad n > 1. \tag{4}$$

Теперь с помощью соотношения (7.1) можно сразу записать соответствующие многочлены попаданий и сформулировать следующую теорему.

---

[1]) В случае «прямоугольного стола» гости рассаживаются по одну сторону этого стола. — *Прим. ред.*

Теорема 1. *Многочлен попаданий $U_n(t)$ приведенной задачи о гостях и соответствующий многочлен $V_n(t)$ для прямоугольного стола даются соотношениями*

$$U_n(t)=\sum_{0}^{n}\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!\,(t-1)^k, \tag{5}$$

$$V_n(t)=\sum_{0}^{n}\binom{2n-k}{k}(n-k)!\,(t-1)^k \tag{6}$$

и

$$U_n(t)=V_n(t)+(t-1)\,V_{n-1}(t). \tag{7}$$

Ладейные многочлены задаются соответственно соотношениями (4) *и* (2а). Соотношением (5) мы, по существу, обязаны Тушару [33].

Заметим, что соотношение (7) вытекает из соотношения (3). Отметим также, что $U_n(t)$ определено только для $n>1$, а $V_n(t)$ — только для $n>0$. Однако, если в соответствии с (4) считать, что $M_1(x)=1+2x$, то следовало бы положить $U_1=-1+2t$. Значение для $n=0$ устанавливается условно. При этом в некоторых случаях более удобно, как показано ниже, считать, что $M_0=U_0=2$, а не как обычно $M_0=U_0=1$. С другой стороны, для прямоугольного стола естественно считать, что $L_0=V_0=1$.

В табл. 1 даются многочлены $U_n(t)$ для $n=2(1)10$. В табл. 2 для тех же значений n приведены многочлены $V_n(t)$.

Таблица 1

Коэффициенты многочлена попаданий $U_n(t)$ для задачи о гостях

$$U_n(t)=\sum U_{nk}\,t^k$$

k \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	13	80	579	4738	43387	439792
1	0	0	8	30	192	1344	10800	97434	976000
2	2	3	4	40	210	1477	11672	104256	1036050
3		2	8	20	152	994	7888	70152	695760
4			2	15	60	469	3660	32958	328920
5				2	24	140	1232	11268	115056
6					2	35	280	2856	30300
7						2	48	504	6000
8							2	63	840
9								2	80
10									2

Таблица 2

Коэффициенты многочлена попаданий $V_n(t)$ для задачи о гостях

$$V_n(t) = \sum V_{nk} t^k$$

k \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	1	3	16	96	675	5413	48800	488592
1	1	1	1	8	35	211	1459	11584	103605	1030805
2		1	3	6	38	213	1479	11692	104364	1036809
3			1	6	20	134	915	7324	65784	657180
4				1	10	50	385	3130	28764	291900
5					1	15	105	952	9090	95382
6						1	21	196	2100	23310
7							1	28	336	4236
8								1	36	540
9									1	45
10										1

Хотя теорема 1 содержит полное решение задачи о гостях, необходимо детально изучить все вытекающие из нее следствия как в целях подсчетов, так и для использования их в смежных задачах. Для рассмотрения некоторых следствий стоит обратиться к другому доказательству этой теоремы, впервые опубликованному Капланским [3].

Клетки доски для случая прямого стола можно снабдить ярлыками

$$(1, 1);\ (2, 1);\ (2, 2);\ \ldots;\ (i, i-1);\ (i, i);\ \ldots;\ (n, n).$$

Здесь (i, j) является ярлыком клетки, расположенной в i-й строке и j-м столбце. Дополнительной клеткой для случая круглого стола служит клетка $(1, n)$. Естественно, что все клетки можно перенумеровать последовательно, согласно правилу: $(i,j) = C_{i+j-1}$, $(1,n) = C_{2n}$. Перенумерованные таким способом клетки образуют такую совокупность, в которой каждая соседняя пара клеток является несовместимой с точки зрения задачи о ладьях. При этом для кругового варианта задачи вводится пара (C_{2n}, C_1).

Следовательно, коэффициенты ладейных многочленов могут быть найдены с помощью следующей леммы (Капланский [3]).

Лемма. *Число различных выборок k из n расположенных в строку элементов, в которых ни одна пара элементов не расположена в* *естественном порядке, равно* $\binom{n-k+1}{k}$; *если же эти* n *элементов расположены по кругу, то указанное число равно* $\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$.

Для доказательства леммы первое из искомых чисел обозначим через $f(n, k)$. Соответствующие выборки либо включают, либо не включают первый элемент. В первом случае выборки не могут включать второй элемент и, следовательно, число их равно $f(n-2, k-1)$. Во втором случае число выборок равно $f(n-1, k)$. Следовательно,

$$f(n, k) = f(n-1, k) + f(n-2, k-1).$$

Граничными условиями служат значения $f(n, 1) = n, f(1, n) = 0, n > 1$. Отсюда следует утверждение леммы.

Далее, обозначим через $g(n, k)$ искомое число выборок из элементов, расположенных по кругу. Тогда, как и выше, в этих выборках либо содержится, либо не содержится первый элемент. В первом случае число их равно $f(n-3, k-1)$, так как ни второй, ни последний элементы в выборку входить не могут. Во втором случае число выборок оказывается равным $f(n-1, k)$. Значит,

$$g(n, k) = f(n-1, k) + f(n-3, k-1) =$$
$$= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1},$$

что и требовалось доказать.

Следует отметить, что две производящие функции

$$f_n(x) = \sum_0^m f(n, k)\, x^k, \qquad m = [(n+1)/2],$$

$$g_n(x) = \sum_0^q g(n, k)\, x^k, \qquad q = [n/2],$$

так же как и $L_n(x)$, удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению (1). Действительно, ясно, что $f_n(x) \equiv L_n(x)$, тогда как $g_{2n}(x) \equiv M_n(x)$. Из соотношений

$$g_{2n}(x) = g_{2n-1}(x) + x g_{2n-2}(x) = (1+x) g_{2n-2}(x) + x g_{2n-3}(x) =$$
$$= (1+2x) g_{2n-2}(x) - x^2 g_{2n-4}(x)$$

следует, что

$$M_n(x) = (1+2x) M_{n-1}(x) - x^2 M_{n-2}(x). \tag{8}$$

Последнее согласуется с соотношением (4), если $M_0(x) = 2$, $M_1(x) = 1 + 2x$. Аналогично

$$L_{2n-1}(x) = (1+2x) L_{2n-3}(x) - x^2 L_{2n-5}(x). \tag{9}$$

Естественно, что соотношения (8) и (9) имеют одну и ту же форму.

Отметим, что из (8) вытекает соотношение

$$M_{n,\,k}=M_{n-1,\,k}+2M_{n-1,\,k-1}-M_{n-2,\,k-2},$$

откуда немедленно следует рекуррентное соотношение

$$U_n(t)=\sum_0^n (M_{n-1,\,k}+2M_{n-1,\,k-1}-M_{n-2,\,k-2})(n-k)!\,(t-1)^k=$$

$$=(n-2+2t)\,U_{n-1}(t)-(t-1)\,U'_{n-1}(t)-(t-1)^2\,U_{n-2}(t), \qquad (10)$$

в котором штрих обозначает производную. Соответствующее соотношение для $V_n(t)$ имеет аналогичный вид и здесь не приводится.

Несколько более простые рекуррентные соотношения следуют из равенства

$$M_{nk}=\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}=\frac{2n}{k}\binom{2n-1-k}{k-1}=$$

$$=\frac{2n}{2n-2}\,\frac{2n-1-k}{k}\,\frac{2n-2}{k-1}\binom{2n-2-k}{k-2}=$$

$$=\frac{n}{n-1}\,\frac{2n-1-k}{k}\,M_{n-1,\,k-1},$$

соответствующего соотношению между многочленами (штрих означает производную)

$$(n-1)\,M'_n(x)=2n\,(n-1)\,M_{n-1}(x)-nxM'_{n-1}(x)$$

и соотношению

$$L_{2n-1,\,k}=\frac{2n-k}{k}\,L_{2n-3,\,k-1},$$

которое соответствует равенству

$$L'_{2n-1}(x)=(2n-1)\,L_{2n-3}(x)-xL'_{2n-3}(x).$$

Из предыдущего следует, что

$$(n-1)\,U'_n(t)=2n\,(n-1)\,U_{n-1}(t)+n\,(1-t)\,U'_{n-1}(t), \qquad (11)$$

$$V'_n(t)=(2n-1)\,V_{n-1}(t)+(1-t)\,V'_{n-1}(t). \qquad (12)$$

Соответствующими соотношениями между коэффициентами оказываются следующие:

$$(n-1)\,kU_{n,\,k}=2\,(2n-1-k)\,U_{n-1,\,k-1}+nkU_{n-1,\,k}, \qquad (13)$$

$$kV_{n,\,k}=(2n-k)\,V_{n-1,\,k-1}+kV_{n-1,\,k}. \qquad (14)$$

Далее, **поскольку**

$$M_{n,\,k}=(2n/k)\,L_{2n-3,\,k-1},$$

имеем

$$U_n'(t)=2nV_{n-1}(t),$$

$$kU_{n,\,k}=2nV_{n-1,\,k-1}. \qquad (15)$$

Последующие рекуррентные соотношения, не содержащие производных, получаются путем использования вспомогательного многочлена $W_n(t)$, который, по-видимому, не имеет комбинаторного смысла; формально он является многочленом попаданий, соответствующим ладейному многочлену $L_{2:\iota}(x)$ для квадрата со стороной n:

$$W_n(t)=\sum\binom{2n-k+1}{k}(n-k)!\,(t-1)^k. \qquad (16)$$

Тогда

$$U_n(t)=nW_{n-1}(t)+2\,(t-1)^n=W_n(t)-(t-1)^2W_{n-2}(t). \qquad (17)$$

Последнее получается, если использовать равенство

$$M_{n,\,k}=\binom{2n-k+1}{k}-\binom{2n-k-1}{k-2}.$$

Следовательно,

$$W_n(t)=nW_{n-1}(t)+(t-1)^2\,W_{n-2}(t)+2\,(t-1)^n,$$

и, используя теперь первое из соотношений (17), получаем

$$(n-2)\,U_n(t)=n\,(n-2)\,U_{n-1}(t)+n\,(t-1)^2\,U_{n-2}(t)-4\,(t-1)^n. \qquad (18)$$

Соотношение (18) для $t=0$ (при обозначении $U_{n,\,0}=U_n$) принимает вид

$$(n-2)\,U_n=n\,(n-2)\,U_{n-1}+nU_{n-2}+4\,(-1)^{n+1}. \qquad (19)$$

Этот результат известен, в сущности, благодаря Кэли [14].

Так как из рекуррентного соотношения для биномиальных коэффициентов

$$V_n(t)=W_n(t)-(t-1)\,W_{n-1}(t)$$

и из (7) и (17) следует, что

$$V_n(t)+(t-1)\,V_{n-1}(t)=U_n(t)=nW_{n-1}(t)+2\,(t-1)^n,$$

то аналогичным путем находим

$$(n-1)\,V_n(t)=(n^2-n-1+t)\,V_{n-1}(t)+n\,(t-1)^2\,V_{n-2}(t)-2\,(t-1)^n. \qquad (20)$$

При $V_n(0) \equiv V_n$ имеем

$$(n-1)V_n = (n^2-n-1)V_{n-1} + nV_{n-2} + 2(-1)^{n+1}. \qquad (21)$$

Ряд новых свойств некоторых из упомянутых выше чисел и многочленов можно найти в задачах.

3. Перестановки, противоречивые двум заданным перестановкам

Как упоминалось выше, числа $U_n = U_n(0)$ из задачи о гостях перечисляют перестановки, противоречивые следующим перестановкам: $12\ldots n$ и $23\ldots n1$. В действительности в исследованиях Тушара [33], где впервые производится результат, данный соотношением (5), эти числа появляются при перечислении перестановок, противоречивых любым двум заданным перестановкам. Результаты этой работы в современной терминологии излагаются ниже.

Как и в предыдущих случаях, эта задача полностью определяется характером шахматной доски, соответствующей данным перестановкам, или вследствие того, что порядок элементов в одной из перестановок можно считать стандартным, определяется (относительной) цикловой структурой другой перестановки.

Стандартному порядку элементов в первой из перестановок соответствуют клетки, стоящие по диагонали квадрата. Единичные циклы второй перестановки не добавляют никаких клеток; циклы длины k добавляют клетки, которые присоединяются к диагональным клеткам и образуют в итоге доску с ладейным многочленом $M_k(x)$. Доски для отдельных циклов оказываются разобщенными. Так, например, для перестановки с цикловой структурой $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$ или, краткости ради, для перестановки циклового класса (k), где $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$, ладейным многочленом является

$$R(x, (k)) = (1+x)^{k_1}(M_2(x))^{k_2}\ldots(M_n(x))^{k_n}. \qquad (22)$$

Здесь удобно иметь дело с присоединенным ладейным многочленом

$$r(x, (k)) = x^n R(-x^{-1}, (k)) = (x-1)^{k_1}(m_2(x))^{k_2}\ldots(m_n(x))^{k_n}, \qquad (22a)$$

где

$$m_k(x) = x^k M_k(-x^{-1}).$$

Соответствующий многочлен попаданий находится с помощью соотношения (7.3а) и записывается в виде

$$U(t, (k)) = (1-t)^n r[E(1-t)^{-1}, (k)]\,0!. \qquad (23)$$

Если $r(x, (k))$ можно представить в виде линейной суммы присоединенных ладейных многочленов $m_k(x)$ задачи о гостях, то и многочлен попаданий, согласно (13), окажется суммой многочленов попаданий $U_k(t)$ из этой же задачи. Для доказательства этого отметим сначала, что, в силу (8),

$$m_n(x) = (x-2)\,m_{n-1}(x) - m_{n-2}(x), \quad n > 1.$$

Как станет ясным из дальнейшего, удобно принять, что $m_0(x) = 2$, $m_1(x) = x-2$. Последнее рекуррентное соотношение можно сравнить с рекуррентным соотношением

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

для полиномов Чебышева

$$T_n(x) = \cos n \arccos x.$$

(В частности, $T_0 = 1$, $T_1 = x$, $T_2 = 2x^2 - 1$ и т. д.) Тогда

$$\begin{aligned} T_{2n}(x) &= 2xT_{2n-1}(x) - T_{2n-2}(x) = \\ &= (4x^2-1)\,T_{2n-2}(x) - 2xT_{2n-3}(x) = \\ &= (4x^2-2)\,T_{2n-2}(x) - T_{2n-4}(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$m_n(x) = 2T_{2n}\left(\sqrt{x}/2\right) = 2\cos 2n\theta, \quad \cos\theta = \sqrt{x}/2. \tag{24}$$

Из этого следует, как и указано выше, что $m_0 = 2$, $m_1 = x-2$. Отсюда при θ, определенном выше, и при условии $m_{-n}(x) \equiv m_n(x)$, естественном для четных функций, немедленно получаем

$$\begin{aligned} m_j(x)\,m_k(x) &= 4\cos 2j\theta \cos 2k\theta = 2\left[\cos 2(j+k)\,\theta + \cos 2(j-k)\,\theta\right] = \\ &= m_{j+k}(x) + m_{j-k}(x). \end{aligned} \tag{25}$$

В частности,

$$(m_j(x))^2 = m_{2j}(x) + m_0(x).$$

Далее, итерация (25) дает (переменная x ради краткости опускается)

$$m_i m_j m_k = m_{i+j+k} + m_{i+j-k} + m_{i-j+k} + m_{i-j-k},$$
$$m_i^3 = m_{3i} + 3m_i.$$

Кроме того, ясно, что произведение k многочленов может быть записано в виде суммы 2^{k-1} членов следующим образом:

$$m_{i_1} m_{i_2} \ldots m_{i_k} = \sum m_{i_1 \pm i_2 \pm \ldots \pm i_k}. \tag{26}$$

Ввиду того что это утверждение сохраняет свою силу и в том случае, когда некоторые или даже все i_j равны между собой, любое выражение вида $m_2^{k_2} m_3^{k_3}$ сводится к сумме присоединенных многочленов для задачи о гостях. С другой стороны, имея в виду произведения $(x-1)^{k_1}m_n$, отметим сначала, что из уравнения (8) вытекают соотношения

$$(x-1)\,m_1 = m_{n+1} + m_n + m_{n-1}$$

и

$$(x-1)^2 m_n = (x-1)\,m_{n+1} + (x-1)\,m_n + (x-1)\,m_{n-1} = \\ = m_{n+2} + 2m_{n+1} + 3m_n + 2m_{n-1} + m_{n-2}.$$

Общая формула просто записывается в символическом виде:

$$(x-1)^k m_n(x) = m^{n-k}(1+m+m^2)^k, \qquad m^j \equiv m_j(x). \tag{27}$$

В итоге оказывается, что любой многочлен вида (22a) может быть представлен как линейная сумма присоединенных многочленов задачи о гостях. Результаты этого раздела можно объединить в следующей теореме.

Теорема 2. *Перестановки, противоречивые двум перестановкам, имеющим относительную цикловую структуру класса* $(k)=(k_1, k_2, \ldots)$, *соответствуют присоединенному ладейному многочлену*

$$r(x, (k)) = (x-1)^{k_1}(m_2(x))^{k_2} \ldots,$$

который с помощью соотношений (26) *и* (27) *выражается в виде*

$$r(x, (k)) = \sum A_j m_{n-j}(x), \tag{22b}$$

где A_j — *функция циклового класса* (k) *и* $n = k_1 + 2k_2 + \ldots$; *соответствующий многочлен попаданий выражается в виде*

$$U(t, (k)) = \sum A_j (1-t)^j U_{n-j}(t), \tag{23a}$$

где $U_n(t)$ — *многочлен попаданий для задачи о гостях* [*соотношение* (5)].

Формальные выражения для частных классов слишком сложны. Поэтому мы будем их выписывать только в самых простых случаях, иллюстрируемых следующим примером.

Пример 1. Присоединенным ладейным многочленом для перестановок, противоречивых перестановкам 123 и 132, является многочлен $(x-1)\,m_2 = x^3 - 5x^2 + 6x - 2$, а соответствующим многочленом попаданий $4t+2t^3$. Из соотношения (27) имеем

$$(x-1)\,m_2 = m_3 + m_2 + m_1.$$

Из соотношения (23) получаем многочлен попаданий $U_3(t) + (1-t)\,U_2(t) + (1-t^2)\,U_1(t)$, который равен $4t+2t^3$, как показано выше. В более общем случае для перестановок, противоречивых перестановкам $12 \ldots n$ и $134 \ldots n2$, ладейным многочленом является $(x-1)\,m_{n-1} = m^{n-2}(1+m+m^2)$, $m^k \equiv m_k$, а многочлеиом попаданий —

$$U_n(t)+(1-t)\,U_{n-1}(t)+(1-t)^2\,U_{n-2}(t)=U^{n-2}\,[U^2+(1-t)U+(1-t)^2],$$

$$U^n\equiv U_n(t).$$

Наконец, с помощью соотношений (27) и (23) многочлен попаданий, соответствующий ладейному многочлену $(x-1)^k\,m_n(x)$, записывается в виде

$$U^{n-k}\,[U^2+(1-t)\,U+(1-t^2)]^k,\qquad U^n\equiv U_n(t).$$

4. Латинские прямоугольники

Как уже упоминалось в разд. 7.1, в каждой строке латинского прямоугольника из k строк и n столбцов содержится некоторая перестановка из элементов $1, 2, \ldots, n$. При этом перестановки выбираются с таким расчетом, чтобы ни в одном столбце не содержалось одинаковых элементов. Простейшим латинским прямоугольником вида $3\times n$ является

$$\begin{array}{l} 1\;2\ldots n\\ 2\;3\ldots 1\\ 3\;4\ldots 2 \end{array}$$

Если первая строка записана в естественном порядке, то говорят, что прямоугольник редуцированный. Если $L(k, n)$ — число латинских прямоугольников вида $k\times n$, а $K(k, n)$ — число редуцированных прямоугольников, то $L(k, n)=n!K(k, n)$. Как уже упоминалось, $K(2, n)=D_n$ — число смещений (см. гл. 3), а $K(3, n)$ выражается, как мы сейчас покажем, через числа U_n задачи о гостях.

В терминологии предыдущего раздела $K(3, n)$ равно числу перестановок, противоречивых двум выбранным перестановкам, одной из которых является перестановка $12\ldots n$, а второй — любая противоречивая перестановка. Следовательно, вторая перестановка имеет цикловую структуру $(2^{k_2}3^{k_3}\ldots n^{k_n})$, где $2k_2+3k_3+\ldots+nk_n=n$, т. е. структуру без единичных циклов (наличие таких циклов привело бы к появлению в одном и том же столбце одинаковых чисел).

Согласно теореме 2, перестановки, противоречивые двум указанным перестановкам, перечисляются соотношением

$$U(0, (k))=\sum A_jU_{n-j},$$

где $U_k\equiv U_k(0)$ из задачи о гостях и

$$m_2^{k_2}m_3^{k_3}\ldots m_n^{k_n}=\sum A_im_{n-j},\; 2k_2+3k_3+\ldots+nk_n=n.$$

Следовательно,

$$K(3,\ n)=\sum U_{n-j}\sum_{(k)} A_j\,[(k)], \tag{28}$$

где (k) является любым цикловым классом без единичных циклов, а $A_j\,[(k)]$ — числом, ассоциированным с редукцией данного класса (k).

Цикловым индикатором перестановок, не содержащих единичных циклов, служит величина $C_n(0,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$, определяющая все члены, входящие во внутреннюю сумму выражения (28). Следовательно, с учетом того, что

$$C_4(0,\ t_2,\ t_3,\ t_4)=3t_2^2+6t_4$$

и

$$m_2^2=m_4+m_0,$$

получаем

$$K(3,\ 4)=9U_4+3U_0=24.$$

Перечисление цикловых классов и их редукцию можно объединить в одну операцию, если заметить, что в соотношение, предшествующее (23), вместо m_j можно подставить U_j и что редукция является следствием правила $U_iU_j=U_{i+j}+U_{i-j}$, где $U_{-n}=U_n$, $U_0=2$. Так как

$$\frac{1}{2}(U^i+U^{-i})(U^j+U^{-j})=U^{i+j}+U^{i-j},$$

то отсюда имеем ($K_n=K(3,n)$

$$\begin{aligned}
\exp t\,K &=\\
&=\exp tC(0,\ U_2,\ U_3,\ \ldots)= && K^n\equiv K_n,\\
&=\frac{1}{2}\exp tC(0,\ U^2+U^{-2},\ U^3+U^{-3},\ \ldots)=\\
&=\frac{1}{2}\,\frac{e^{-tU}}{1-tU}\,\frac{e^{-t/U}}{1-t/U}=\\
&=\frac{1}{2}\,\frac{e^{-t\mu}}{1-t\mu+t^2}, && U^n=U^{-n}\equiv U_n, \quad (29)
\end{aligned}$$

где $\mu=U+U^{-1}$. В последней строке использована задача 4.1 и соотношение (4.3а).

Так как из соотношения (3.23) следует, что

$$\exp tD=e^{-t}(1-t)^{-1},\quad D^n\equiv D_n=\Delta^n 0!,$$

то другой формой соотношения (29) является

$$\exp tK=\frac{1}{2}\exp(tDU+tDU^{-1}). \tag{29a}$$

Заметим, что в развернутой форме соотношения (29а) член $D^iD^jU^iU^{-j}$ превращается в $D_iD_jU_{i-j}$ и, следовательно,

$$K_n=\frac{1}{2}\sum_0^n\binom{n}{k}D_{n-k}D_kU_{n-2k},\quad U_0=2,\quad U_{-n}=U_n. \tag{30}$$

В частности, как указано выше,

$$K_4=\frac{1}{2}(D_4D_0U_4+4D_3D_1U_2+6D_2^2U_0+4D_1D_3U_{-2}+D_0D_4U_{-4})=$$
$$=D_4D_0U_4+3D_2^2U_0=24.$$

Как показывает этот пример, сумма (28) является симметрической функцией и, следовательно, эквивалентна соотношению

$$K_n=\sum_0^m\binom{n}{k}D_{n-k}D_kU_{n-2k},\quad m=[n/2],\quad U_0=1. \tag{30a}$$

Указанный результат впервые получен Риорданом [21]. Следует отметить, что главным членом в соотношении (30а) является член D_nU_n порядка $n!^2e^{-3}$ (асимптотическое выражение для U_n дается в задаче 7b).

Возвращаясь теперь ко второй форме соотношения (29), отметим сначала, что из задачи 7а следует

$$\mu^n=(U+U^{-1})^n=2e_n,$$

где $e_n=(E-2)^n0!$, как и в задаче 7.8. Следовательно,

$$\exp tK=\frac{e^{-t\mu}}{2(1-t\mu+t^2)}=\frac{1}{2}\sum(-1)^je^{-t\mu}t^{2j}/(1-t\mu)^{j+1}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum(-1)^je^{-t\mu}t^{2j}\frac{(D+1)^j}{j!}\exp t\mu(D+1),\quad D^n\equiv D_n=D^n0!,$$

причем соотношение

$$(D+1)^j\exp t(D+1)=j!(1-t)^{-j-1}$$

получается последовательным дифференцированием соотношения (3.23). Таким образом, имеем, наконец,

$$K_n=\sum_{j=0}^m(-1)^j\frac{n!}{j!(n-2j)!}(D+1)^jD^{n-2j}e_{n-2j},\quad m=[n/2]. \tag{31}$$

Это соотношение менее удобно для прямых вычислений, чем формула (30), из-за чередования знаков входящих в него коэффициентов. Однако оно оказывается полезным для определения рекуррентных соотношений между числами K_n, как будет показано ниже.

Отметим сначала, что это соотношение используется в соотношении

$$\exp tK = (1 - te + t^2)^{-1} \exp(-te), \quad e^n \equiv e_n, \quad K^n \equiv K_n,$$

из которого немедленно следует, что

$$K_n = neK_{n-1} - (n)_2 K_{n-2} + (-1)^n e_n, \tag{32}$$

где K_n оказывается теперь функцией переменной Блиссара. Приведем несколько первых значений для K_n, найденных из (32) и иллюстрирующих эту функциональную зависимость,

$$\begin{aligned}
&K_0 = e_0 = 1,\\
&K_1 = eK_0 - e_1 = e_1 - e_1 = 0,\\
&K_2 = 2eK_1 - 2K_0 + e_2 = e_2 - 2 = 0,\\
&K_3 = 3eK_2 - 6K_1 - e_3 = 3(e_3 - 2e_1) - e_3 = 2e_3 - 6e_1 = 2.
\end{aligned}$$

Далее, переписывая (31) в виде

$$K_n = \sum (-1)^j K_{n,j} e_{n-2j}, \tag{31a}$$

немедленно получаем из (32), что

$$\begin{aligned}
&K_{n,0} = nK_{n-1,0} + (-1)^n = D_n,\\
&K_{n,j} = nK_{n-1,j} + (n)_2 K_{n-2,j-1}, j > 0.
\end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned}
k_j(x) &= \sum K_{n,j} x^n/n! = xk_j(x) + x^2 k_{j-1}(x) =\\
&= x^2 (1-x)^{-1} k_{j-1}(x) = x^{2j} (1-x)^{-j-1} e^{-x},
\end{aligned}$$

так как, согласно соотношению (3.23), $k_0(x) = \exp xD = e^{-x}(1-x)^{-1}$. Дифференцирование последнего соотношения (штрих означает производную) дает равенство

$$x^2 k'_j(x) = x(2j - x) k_j(x) + (j+1) k_{j+1}(x)$$

и, следовательно, равенство

$$jK_{n,j} = n(n+1-2j) K_{n-1,j-1} + (n)_2 K_{n-2,j-1}; \quad j > 0.$$

Из полученных рекуррентных соотношений для коэффициентов $K_{n,j}$ и из соотношения

$$e_n = (n-2) e_{n-1} + 2(n-1) e_{n-2}$$

[последнее вытекает из соотношения $e_n - ne_{n-1} = (-2)^n = (-2)(e_{n-1} - (n-1)e_{n-2})$] можно получить соотношение, которое вместе с (32) используется для исключения перемен[illegible] e. В соответствии с этим,

$$\begin{aligned} eK_n &= \sum (-1)^j K_{nj} e_{n-1-2j} = \\ &= \sum (-1)^j K_{nj} [(n-1-2j) e_{n-2j} + 2(n-2j) e_{n-1-2j}] = \\ &= (n-1) K_n + I_n + J_n, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_n &= \sum (-1)^{j+1} 2j K_{nj} e_{n-2j} = \\ &= \sum (-1)^{j+1} 2e_{n-2j} [n(n+1-2j) K_{n-1,\, j-1} + (n)_2 K_{n-2,\, j-1}] = \\ &= \sum (-1)^j 2e_{n-2-2j} [n(n-1-2j) K_{n-1,\, j} + (n)_2 K_{n-2,\, j}] = \\ &= 2(n)_2 K_{n-2} + nJ_{n-1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} J_n &= \sum (-1)^j 2(n-2j) e_{n-1-2j} K_{nj} = \\ &= 2ne_{n-1} (nK_{n-1,\, 0} + (-1)^n) + \\ &\qquad + \sum_{j=1} (-1)^j 2(n-2j) e_{n-1-2j} (nK_{n-1,\, j} + (n)_2 K_{n-2,\, j-1}) = \\ &= 2n^2 K_{n-1} + (-1)^n 2ne_{n-1} + 2nI_{n-1} - (n)_2 J_{n-2}. \end{aligned}$$

Далее, последнее соотношение с помощью ему предшествующего может быть приведено к следующему виду:

$$J_n = 2n^2 K_{n-1} + 2(n)_3 K_{n-3} + (-1)^n 2ne_{n-1} + nI_{n-1}.$$

В свою очередь этот результат с учетом (32) можно записать в виде

$$J_n = 2(n)_2 (K_{n-1} + eK_{n-2}) + nI_{n-1}.$$

Следовательно,

$$I_n + J_n = 2(n)_2 (K_{n-1} + (1+e) K_{n-2}) + n(I_{n-1} + J_{n-1})$$

или

$$(e-n+1) K_n = 2(n)_2 (K_{n-1} + (1+e) K_{n-2}) + n(e-n+2) K_{n-1}.$$

Но это то же самое, что и

$$\begin{aligned} (e-n+1) K_n - 2(1+e) nK_{n-1} &= \\ = -n[(e-n+2) K_{n-1} - 2(1+e) &= (n-1) K_{n-2}] = \\ = n(n-1)[(e-n+3) K_{r-2} - 2(1+e)(n-2) K_{n-3}] &= \\ = \ldots = (-1)^n n! (1+e) K_0 = 0. \qquad &\textbf{(33)} \end{aligned}$$

Если соотношение (33) записать в виде

$$neK_{n-1} - 2en(n-1) K_{n-2} = n(n-2) K_{n-1} + 2(n)_2 K_{n-2}$$

и левую часть его преобразовать с помощью (32), то получим соотношение

$$K_n = n^2 K_{n-1} + (n)_2 K_{n-2} + 2(n)_3 K_{n-3} + (-1)^n (e_n + 2ne_{n-1}), \quad (34)$$

которое, как нам кажется, является простейшим рекуррентным соотношением между числами $K_n \equiv K(3, n)$. Первоначальный вид этого рекуррентного соотношения (Риордан [25]) совершенно иной. Несмотря на то, что отыскание рекуррентного соотношения «в чистом виде» является задачей более сложной, это соотношение было, как это часто случается, найдено первым (Керавала [11]). Получить его можно, исключив из (34) величины e_n с помощью рекуррентного соотношения $e_n = ne_{n-1} + (-2)^n$.

Соотношение (34) очень полезно для отыскания асимптотического ряда Ямамото [38], так как в этих целях последним членом левой части (34) можно пренебречь. Если асимптотический ряд имеет вид

$$n!^{-2} e^3 K_n \sim 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{(n)_2} + \ldots + \frac{a_s}{(n)_s} + \ldots,$$

то из (34) и тождества

$$\frac{1}{(n-1)_s} = \frac{1}{(n)_s} + \frac{s}{(n)_{s+1}}$$

находим, что

$$a_s = a_s + (s-1) a_{s-1} + a_{s-2} + 2a_{s-3}$$

или

$$sa_s + a_{s-1} + 2a_{s-2} = 0. \quad (35)$$

Чтобы исключить дробные выражения, обозначим $s!\,a_s$ через b_s. Тогда, согласно (35), имеем

$$b_{s+1} + b_s + 2sb_{s-1} = 0, \quad (36)$$

откуда следует, что

$$b \exp tb = -(1 + 2t) \exp tb, \qquad b^n \equiv b_n.$$

Решением этого разностного уравнения при $b_0 = 1$ является

$$\exp tb = \exp(-t - t^2).$$

Следовательно, согласно задаче 2.25 (в принятых в ней обозначениях), получаем

$$b_n = P_n(-1, {}^1/_2) = H_n(-{}^1/_2).$$

Приводим несколько первых значений b_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	1	−1	−1	5	1	−41	31	461	−895	−6481	22591

Результаты этого раздела можно объединить в следующей теореме.

Теорема 3. *Число $K(3, n) \equiv K_n$ редуцированных латинских прямоугольников вида $3 \times n$ выражается через числа задачи о гостях с помощью соотношения* (30a), *а именно*:

$$K_n = \sum_0^m \binom{n}{k} D_{n-k} D_k U_{n-2k}, \quad m = [n/2], \quad U_0 = 1.$$

Это число удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$K_n = n^2 K_{n-1} + (n)_2 K_{n-2} + 2(n)_3 K_{n-3} + (-1)^n (e_n + 2ne_{n-1})$$

и имеет следующий асимптотический ряд:

$$K_n \sim n!^2 e^{-3} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n)_2} + \frac{5}{6(n)_3} + \ldots + \frac{b_s}{s!(n)_s} + \ldots\right), \tag{37}$$

в котором $b_s = H_s(-1/2)$.

Таблица 3

Трехстрочные латинские прямоугольнкн

Значения K_{nj}, e_n и K_n; $K_n = \sum (-1)^j K_{n,j} e_{n-2j}$.

j \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496
1			2	6	36	220	1590	12978	118664	1201464
2					24	240	2520	26880	304080	3671136
3							720	15120	262080	4294080
4									40320	1451520

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8		9	10	
e_n	1	−1	2	−2	8	8	112	656	5501		49024	4	91264
K_n	1	0	0	2	24	552	21280	1073760	70299264	57928	53248	5871599	44704

В табл. 3 приводятся значения K_n и e_n для $n = 0(1)10$, а также значения коэффициентов $K_{n,j}$, входящих в соотношение (31a), для тех же значений n.

О латинских прямоугольниках с числом строк, большим трех, известно крайне мало. Основываясь на уже известных результатах

$$L(2,\ n)=n!\,D_n\sim n!^2e^{-1},$$
$$L(3,\ n)=n!\,K_n\sim n!^3e^{-3},$$

естественно предположить, что

$$L(k,\ n)\sim n!^k e^{-\binom{k}{2}}.$$

Эрдёш и Капланский [37] показали, что эта оценка справедлива для $k<(\log n)^{3/2}$, и высказали предположение, что она остается в силе для $k<n^{1/3}$. Это предположение позднее было доказано Ямамото [41].

Перечисление латинских квадратов осуществлено вплоть до размеров 7 × 7. Были получены следующие результаты. Пусть

$$L(n,\ n)=n!\,(n-1)!\,l_n,$$

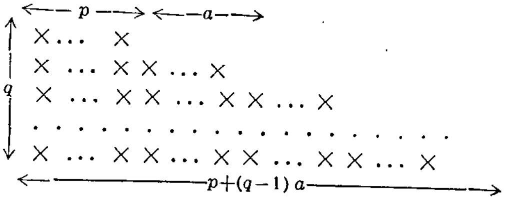
тогда l_n является числом квадратов, в каждом из которых первая строка и первый столбец имеют стандартный порядок. Значения для l_n таковы:

n	2	3	4	5	6	7
l_n	1	1	4	56	9408	16942080

Значение l_7 взято у Сада [27].

5. Трапеции и треугольники

Рассмотрим сначала трапециевидную доску из q строк



В первой строке доски имеется p клеток, во второй $p+a$, и каждая последующая строка содержит на a клеток больше предыдущей. Таким образом, q-я строка содержит $p+(q-1)a$ клеток. В частном случае, когда $p=a=1$, доска оказывается треугольной.

Разложение по клеткам первой строки дает основное рекуррентное соотношение. Если $T(p,\ q,\ a;\ x)$ является ладейным многочленом указанной выше трапеции, то этим соотношением будет

$$T(p,\ q,\ a;\ x) = T(p+a,\ q-1,\ a;\ x) + pxT(p+a-1,\ q-1,\ a;\ x). \tag{38}$$

Последнее соотношение вместе с $T(p,\ 1,\ a;\ x) = 1+px$ полностью определяет все многочлены трапеции. Так, например,

$$T(p,\ 2,\ a;\ x) = 1 + x(2p+a) + x^2p(p+a-1),$$

$$T(p,\ 3,\ a;\ x) = 1 + x(3p+3a) + x^2[3p(p-1) + 6ap + 2a^2 - a] + \\ + x^3p(p+a-1)(p+2a-2).$$

Положим

$$T(p,\ q,\ a;\ x) = \sum_{k=0} T_k(p,\ q,\ a)x^k$$

и заметим, что

$$T_1(p,\ q,\ a) = pq + a\binom{q}{2},$$

$$T_2(p,\ q,\ a) = [(p)_2 + ap(q-1)]\binom{q}{2} + [(3q-1)a^2 - 4a]\binom{q}{3}/4,$$

$$T_q(p,\ q,\ a) = p(p+a-1)(p+2a-2)\ \ldots\ (p+(q-1)(a-1))$$

и

$$T_k(p,\ q,\ a) = T_k(p+a,\ q-1,\ a) + pT_{k-1}(p+a-1,\ q-1,\ a).$$

По-видимому, нет простой формулы для общего случая.

Однако для $a=2$ указанные формулы сводятся к следующим:

$$T_1(p,\ q,\ 2) = q(p+q-1),$$

$$T_2(p,\ q,\ 2) = \binom{q}{2}(p+q-1)_2,$$

$$T_q(p,\ q,\ 2) = (p+q-1)_q.$$

Это обстоятельство наводит на мысль, что

$$T_k(p,\ q,\ 2) = \binom{q}{k}(p+q-1)_k.$$

Последнее предположение можно доказать, воспользовавшись рекуррентным соотношением и математической индукцией. Следовательно,

$$T(p,\ q,\ 2;\ x) = \sum \binom{q}{k}(p+q-1)_k x^k = R_{p+q-1,\ q}(x), \tag{39}$$

где $R_{n,\ m}(x)$ — ладейный многочлен для прямоугольника. Поэтому в задаче о ладьях *трапеция* $(p,\ q,\ 2)$ *эквивалентна* *прямоугольнику вида* $q \times (p+q-1)$. Этот результат можно также получить с помощью повторного использования теоремы 7.3.

Рассмотрим второй интересный случай, когда $a=1$. Введем обозначения $T_{p,q}(x)=T(p, q, 1; x)$ и $T_{1,q}(x)=T_q(x)$, где последний многочлен — ладейный многочлен треугольника. Из общей формулы, приведенной выше, или с помощью непосредственных вычислений получаем

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 1+x, \\ T_2(x) &= 1+3x+x^2, \\ T_3(x) &= 1+6x+7x^2+x^3. \end{aligned}$$

Можно заметить, что коэффициентами являются числа **Стирлинга** второго рода. Это утверждение мы сейчас докажем.

Во-первых, как следует из задачи 4.7, разложения по всем клеткам «главной диагонали» треугольной доски оказываются эквивалентными. Однако вместо полного треугольника более удобно воспользоваться доской, обладающей многочленом $T_{2,q}(x)$, и производить разложение по q клеткам ее диагонали. Многочлен $T_{2,q}(x)$, согласно (36), равен многочлену $T_{q+1}(x)-xT_q(x)$. Рассматриваемые клетки являются разобщенными, и их ладейный многочлен равен $(1+x)^q$. Более того, доска, соответствующая включению k этих клеток, представляет собой треугольник, имеющий многочлен $T_{q-k}(x)$. Следовательно,

$$T_{q+1}(x)-xT_q(x)=(T+x)^q, \quad T^k \equiv T_k(x), \tag{40}$$

что согласуется с приведенным выше результатом.

Положим

$$T(x, y)=\sum_{q=0}^{\infty} T_q(x)\, y^q/q!$$

и обозначим через $T_y(x, y)$ частную производную от $T(x, y)$ по y. Тогда из (40) немедленно следует, что

$$T_y(x, y)=(x+e^{xy})\, T(x, y). \tag{41}$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим граничным условиям $T(x, 0)=T_0(x)=1$, $T(0, y)=e^y$, является

$$T(x, y)=\exp(xy+x^{-1}(e^{xy}-1)). \tag{42}$$

Используя результат задачи 2.14 (а), получаем

$$e^{-xy}T(x, y)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{xy}-1)^k}{k!x^k}=\sum_{q=0}^{\infty} \frac{y^q}{q!} \sum_{k=0}^{q} S(q, k)\, x^{q-k},$$

где $S(q, k)$ — число Стирлинга второго рода. Поэтому

$$(T-x)^q = \sum_{k=0}^{q} S(q, k)\, x^{q-k}, \ T^h \equiv T_h(x). \tag{43}$$

Однако соотношение (41) эквивалентно соотношению

$$(T-x) \exp y (T-x) = \exp yT, \ T^k \equiv T_k(x).$$

Следовательно,

$$T_q(x) = (T-x)^{q+1} = \sum S(q+1, q+1-k)\, x^k, \ T^k \equiv T_k(x), \tag{44}$$

что и требовалось доказать.

Соотношение (44) дает новый комбинаторный смысл числам Стирлинга второго рода, а именно:

Число способов размещения k взаимно неатакующих ладей на доске, имеющей форму прямоугольного равнобедренного треугольника со стороной $q-1$, является числом Стирлинга $S(q, q-k)$.

В отношении многочленов $T_{p,q}(x)$ отметим сначала, что, преобразуя (40), получаем соотношения

$$T_{2,q}(x) = T^q (T-x) = (T+x)^q, \ T^k \equiv T_k(x).$$

Первое из этих соотношений вытекает в случае $p=a=1$ из (38); в случае $a=1$ (38) имеет вид

$$T_{p+1,q}(x) = T_{p,q+1}(x) - pxT_{p,q}(x); \tag{45}$$

отсюда путем итерации приходим к соотношениям

$$T_{p,q}(x) = T^q (T-x)(T-2x) \ldots (T-(p-1)x) = T^{q-1} (T)_p, \ T^k \equiv T_k(x),$$
$$(T)_p = T(T-x)(T-2x) \ldots (T-(p-1)x). \tag{46}$$

Обобщением второго из приведенных выше соотношений служит равенство

$$T_{p,q}(x) = (T-x+px)^q, \ T^k \equiv T_k(x). \tag{47}$$

Это равенство можно доказать методом математической индукции, если заметить, что из соотношения (45) следует равенство

$$T_{p+1}(x, y) = \sum T_{p+1,q}(x)\, y^q/q! = \left(\frac{d}{dy} - px\right) T_p(x, y) \tag{48}$$

и что [см. соотношение, предшествующее (44)]

$$(T-x) \exp y (T-x+px) = \exp y (T+px); \ T^k \equiv T_k(x).$$

Результаты настоящего раздела сводятся в следующую теорему.

Теорема 4. *Ладейный многочлен трапециевидной доски из q строк, в которых имеется соответственно p, $p+a$, ...,*

..., $p+(q-1)a$ клеток, совпадает в случае $a=2$ с ладейным многочленом прямоугольной доски вида $(p+q-1)\times q$. Многочленом треугольника ($p=a=1$) является

$$T_q(x)=\sum S(q+1,\ q+1-k)\,x^k,$$

а многочленом трапециевидной доски при $a=1$ оказывается

$$T_{p,\,q}(x)=(T-x+px)^q=T^{q-1}(T)_{p,x};\quad T^k\equiv T_k(x),$$

где

$$(T)_{p,\,x}=T(T-x)\ldots[T-(p-1)\,x].$$

6. Треугольные перестановки

Многочлен попаданий для перестановок, на которые накладываются ограничения, соответствующие треугольной доске, будем для краткости называть энумератором треугольных перестановок. Если доска имеет сторону, меньшую чем n, то эти перестановки, фигурировавшие в задаче о неполных встречах, будут называться далее неполными треугольными перестановками.

Соответствующие многочлены попаданий допускают двоякое толкование. Во-первых, они перечисляют перестановки по числу элементов, занимающих позиции, определенные треугольной доской. Второе толкование, имеющее важное значение для статистических приложений, состоит в следующем: ограничение, наложенное на клетку $(i,\ j)$, можно понимать как требование того, чтобы i непосредственно следовало за j; тогда перечисление производится по числу «спадов», т. е. по числу случаев, в которых i непосредственно следует за j и меньше чем j. Когда рассматриваются все спады, то на доске они образуют треугольник со стороной $n-1$ и число их всегда меньше числа подъемов (подъемом называется последовательность элементов, каждый из которых больше предшествующего). Так, например, в перестановке 256413 имеется два спада, 64 и 41, и три подъема, 256, 4, 13. Энумератор по числу подъемов оказывается также энумератором по числу «чтений»: «чтениями» называются выборки элементов перестановки, идущие в естественном порядке при чтении перестановки слева направо. Происходит это потому, что для перестановки, требующей r чтений, существует сопряженная с ней перестановка, обладающая тем же числом r подъемов и получающаяся из заданной, если поменять ролями элементы и номера их позиций. Заданная перестановка получается из сопряженной с ней тем же способом. Так, например, для перестановки 256413 сопряженной является 516423, тремя чтениями которой оказываются 123, 4, 56. В связи с операциями, проводимыми при сортировке вагонов по их грузу, чтения называют также передвижениями (Сад [29]). Отметим, что перечисление по числу подъемов требуется в задаче Симона Ньюкомба.

Обозначим через $A_{n,m}(t)$ многочлен попаданий, соответствующий треугольнику со стороной $n-m$, имеющему ладейным многочленом

$$T_{n-m}(x) = \sum S(n-m+1,\ k)\, x^{n-m+1-k}.$$

Тогда из соотношения (7.1) следует, что

$$A_{n,m}(t) = \sum S(n-m+1,\ n-m+1-k)(n-k)!\,(t-1)^k. \qquad (49)$$

С помощью рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга соотношение (2.37)]

$$S(n+1,\ k) = S(n,\ k-1) + kS(n,\ k)$$

и соотношения

$$(t-1)A'_{n,m}(t) = (n+1)A_{n,m}(t) - \\ - \sum S(n-m+1,\ k-m+1)(k+1)!\,(t-1)^{n-k},$$

полученного дифференцированием (49), выводим, что

$$A_{n+1,m}(t) = (n+1)tA_{n,m}(t) + m(1-t)A_{n,m}(t) + t(1-t)A'_{n,m}(t) = \\ = (m+(n-m+1)t)A_{n,m}(t) + t(1-t)A'_{n,m}(t). \qquad (50)$$

Поэтому, если

$$A_{n,m}(t) = \sum A_r(n,\ m)\, t^r,$$

то

$$A_r(n+1,\ m) = (m+r)A_r(n,\ m) + (n-m-r+2)A_{r-1}(n,\ m).$$

Отметим, что для $A_{r-m}(n,\ m)$ и $A_r(n,\ 0)$ имеет место одно и то же рекуррентное соотношение, а именно:

$$A_r(n+1,\ 0) = rA_r(n,\ 0) + (n-r+2)A_{r-1}(n,\ 0).$$

Последнее равенство соответствует соотношению

$$A_{n+1,0}(t) \equiv A_{n+1}(t) = (n+1)tA_n(t) + t(1-t)A'_n(t),$$

вытекающему из (50) при $m=0$. Это соотношение уже встречалось в задаче 2.2. Ему удовлетворяли многочлены $a_n(x)$, связанные с числами Эйлера. Отметим, что граничные условия имеют аналогичный вид: $A_0(t)=1$, $A_1(t)=1+(t-1)=t$. Следовательно, числа $A_r(n,\ 0)$ являются числами Эйлера. Из задачи 2.2 можно усмотреть, что

$$A(t,\ u) = A_0(t) + A_1(t)\,u + A_2(t)\,u^2/2! + \ldots = \frac{1-t}{1-t\exp u(1-t)}.$$

Числа Эйлера связаны также с многочленами $A_{n,1}(t)$, а **именно**:

$$tA_{n,1}(t) = A_n(t), \quad n > 0.$$

Это утверждение можно доказать следующим образом. Из общего соотношення $A_{,n}(t) = n!$ вытекает, что $A_{1,1}(t) = 1$, поэтому $tA_{1,1}(t) = t = A_1(t)$. Далее при $m = 1$ соотношение (50) принимает вид

$$A_{n+1,1}(t) = (1 + nt)A_{n,1}(t) + t(1-t)A'_{n,1}(t).$$

Положив $tA_{n,1}(t) = A_n(t)$, приходим к соотношению (50), отвечающему значению $m=0$.

Таблица 4

Числа Эйлера $A_{n,k}$

$A_{n,k} = kA_{n-1,k} + (n-k+1)A_{n-1,k-1}$

n k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	4	11	26	57	120	247	520	1013
3			1	11	66	302	1191	4293	14608	47840
4				1	26	302	2416	15619	88234	455192
5					1	57	1191	15619	156190	1310354
6						1	120	4293	88234	1310354
7							1	247	14608	455192
8								1	502	47840
9									1	1013
10										1

В табл. 4 даны числа Эйлера для $n=1(1)10$.

Как видно из таблицы, асимптотическое представление распределения $A_{n,1}(t)/n!$ не является модификацией использованной выше формулы распределения Пуассона. Напротив, оно близко к нормальному распределению (Лапласа — Гаусса). Биномиальные моменты даются соотношением

$$(n)_k B_k(n) = S(n, n-k).$$

Поэтому среднее значение $B_1(n)$ равно $(n-1)/2$, а дисперсия $(n+1)/12$.

7. Задача Симона Ньюкомба

Как уже сказано в разд. 7.1, задача Симона Ньюкомба состоит в следующем. Колода карт произвольной спецификации складывается в одну сторону до тех пор, пока выпадают карты в возрастающем порядке. При этом одинаковые карты считаются идущими в возрастающем порядке. Каждое появление младшей карты кладет начало образованию новой стопки. Спрашивается, сколько среди всевозможных расположений карт в колоде имеется таких, при которых образуется точно k стоп?

Таким образом, поставленная задача совпадает с задачей перечисления по числу подъемов перестановок из n перенумерованных элементов (среди элементов могут быть и одинаковые) при условии, что стоящие рядом одинаковые элементы считаются идущими в возрастающем порядке.

Когда все элементы различны и перечисление ведется по числу подъемов, то ответ на поставленный выше вопрос дается с помощью многочленов $A_n(t)$ из предыдущего раздела. При перечислении по числу спадов ответ дается многочленом $A_{n,1}(t)$. Второму случаю отвечает доска в виде треугольника со стороной n—1 и ладейным многочленом $T_{n-1}(x)$.

Перечисление по числу спадов оказывается более удобным в общем случае, т. е. когда колода карт имеет спецификацию $(1^{n_1}2^{n_2}\ldots s^{n_s})$, где $n_1+2n_2+\ldots+sn_s=n$ (в колоде имеется n_1 различных элементов по одному каждого вида, n_2 различных пар одинаковых элементов, n_3 различных троек одинаковых элементов и т. д.). Соответствующая шахматная доска находится следующим образом. Предположим сначала, что все элементы от 1 до n различны (спецификация 1^n); тогда доской, определяющей спады, является треугольник со стороной n—1. Предположим далее, что два элемента являются одинаковыми. Без ущерба для общности их можно считать расположенными последовательно, как, например, 1 и 2. Тогда 21 не дает спада и клетка на одном конце гипотенузы треугольника удаляется.

Отметим, что, согласно задаче 7.4, все клетки гипотенузы эквивалентны друг другу. Поэтому несущественно, какая именно пара одинаковых элементов рассматривается. Подобно этому при трех одинаковых элементах 1, 2, 3 пары 31, 32 и 21 не дают спадов и из доски удаляется треугольник со стороной 2. Этот треугольник имеет две клетки на гипотенузе и одну на ближайшей к ней параллели. В этом случае опять-таки согласно задаче 7.4 вид доски не зависит от того, какие элементы были выбраны для отождествления.

При отождествлении $k+1$ последовательных элементов удаляется треугольник со стороной k и доской для общего случая служит треугольник с вырезами, имеющий вид нисходящей лестницы.

Доски для всевозможных спецификаций четырех элементов имеют следующую форму (точки обозначают удаленные клетки):

×	.	.	.	.
× ×	× ×	× .	. .	. .
× × ×	× × ×	× × ×	× × ×	. . .
1^4	21^2	2^2	31	4

Чтобы определить ладейный многочлен, предположим сначала, что спецификация имеет вид $1^{n-s}s$. Тогда в качестве доски можно взять треугольник со стороной $\tilde{n}-1$, в котором удалены первые $s-1$ строк или, что то же самое, трапецию $(s, n-s, 1)$. В этом случае из соотношений (46) и (48) получаем, что ладейный многочлен

$$R(1^{n-s}s,\ x)=T(s,\ n-s,\ 1)=(T-x+sx)^{n-s}=T^{n-s-1}(T)_{s,\,x}, \qquad (51)$$

где $(T)_{s,\,x}=T(T-x)\ldots(T-(s-1)x)$ и $T^n\equiv T_n(x)$ — многочлен треугольника.

Более поучительной является вторая форма, так как она более тесно связана с заданной спецификацией. Действительно, эта форма доски подсказывает следующий общий результат:

$$R(1^{n_1}2^{n_2}\ldots s^{n_s};\ x)=T^{n_1-1}(T)^{n_2}_{2,\,x}\ldots(T)^{n_s}_{s,\,x}. \qquad (52)$$

Прежде чем перейти к его доказательству, отметим, что все возможные спецификации четырех элементов, кроме спецификации 2^2, учитываются соотношением (51). Доска, отвечающая спецификации 2^2, является квадратом с многочленом $1+4x+2x^2$, что согласуется с (52):

$$T^{-1}(T)^2_2=T(T-x)^2=T_3-2xT_2+x^2T_1=1+4x+2x^2.$$

Доска, отвечающая спецификации $(1^{n-2k}2^k)$, является треугольником со стороной $n-1$, в котором удалены k клеток главной диагонали. В этом случае, согласно (52),

$$\begin{aligned} R(1^{n-2k}2^k,\ x)&=T_{n-1}-kxT_{n-2}+\ldots+\binom{k}{j}(-x)^jT_{n-1-j}+\ldots=\\ &=T^{n-1-k}(T-x)^k \qquad T^j\equiv T_j(x),\\ &=T^{n-2k-1}(T)^k_{2x}.\end{aligned}$$

Доказательство соотношения (51) проводится с помощью индукции следующим образом. Спецификации для любого числа элементов располагаются в порядке убывания частей соответствующих разбиений: (1^n), $(2\,1^{n-2})$, $(3\,1^{n-3})$, (2^21^{n-4}) и т. д. Расположенные таким образом спецификации группируются по возрастающим значениям n. Индукция проводится путем выражения многочлена, отвечающего заданной спецификации, через многочлены спецификаций, предшествующих заданной. Во избежание усложнений в обозначениях, которые ничего не добавляют к существу вопроса, этот процесс демонстрируется на нескольких простых случаях. Единственной спецификацией пяти элементов, не учтенной уже доказанными результатами, является спецификация (23).

Однако путем разложения, указанного схемой

$$\begin{bmatrix} \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} - x[\times \ \times \ \times],$$

получаем, что

$$R(23,\ x) = R(1^23,\ x) - xR(13,\ x) =$$

$$= T(T)_3 - x(T)_3 = T(T-x)^2(T-2x) = T^{-1}(T)_2(T)_3,$$

где краткости ради $(T)_k \equiv (T)_{k,\,x}$. Аналогично

$$R(123,\ x) = R(1^33,\ x) - xR(1^23,\ x) =$$

$$= T^2(T)_3 - xT(T)_3 = (T)_2(T)_3.$$

Наконец,

$$R(23^2,\ x) = R(12^23,\ x) - 2xR(2^23,\ x) =$$

$$= (T)_2^2(T)_3 - 2xT^{-1}(T)_2^2(T)_3 = T^{-1}(T)_2(T)_3^2.$$

Из приведенных примеров ясно, что способ разложения формы подсказывается самим видом соотношения (51) и что для этого имеются многочисленные возможности. Например, соотношение

$$R(23^2,\ x) = R(1^23^2,\ x) - xR(13^2,\ x)$$

дает иную форму решения последнего примера.

Многочлены попаданий, дающие ответ на задачу Симона Ньюкомба, как можно было предположить на основе соотношения (51), удается компактно выразить через многочлены $A_{n,\,1}(t)$ треугольных перестановок из предыдущего раздела. Обозначим для краткости через $[s]$ спецификацию $(1^{n_1}2^{n_2}\ldots s^{n_s})$ и через $A_{[s]}(t)$ — многочлен попаданий. Тогда

$$A_{[s]}(t) = 1!^{n_1}2!^{n_2}\ldots s!^{n_s}a_{[s]}(t) = A^{n_1}(A)_2^{n_2}\ldots(A_s)^{n_s}, \tag{53}$$

где

$$(A)_s = A(A+1-t)(A+2-2t)\ldots[A+s-1-(s-1)t]$$

и

$$A^n \equiv A_n \equiv A_{n,\,1}(t).$$

Доказательство соотношения (53), так же как и (52), проводится методом индукции. И на этот раз во избежание усложнения в обозначениях обратимся к простым примерам. Прежде всего отметим, что при $[s] = (1^n)$ соотношение (53) справедливо по самому определению многочлена $A_n(t)$. Далее, при $[s] = (2\,1^{n-2})$ имеет место соотношение

$$A_{[s]}(t) = R(21^{n-2},\ (t-1)/E)\,n! =$$

$$= T_{n-1}[(t-1)/E]\,n! - (t-1)\,T_{n-2}[(t-1)/E]\,(n-1)! =$$

$$= A_n(t) + (1-t)\,A_{n-1}(t).$$

Наконец, в качестве иллюстрации покажем, что

$$\begin{aligned} A_{[232]}(t) &= R(12^23,\ (t-1)/E)\,8! - 2(t-1)\,R(2^23,\ (t-1)/E)\,7! = \\ &= A_{[1223]}(t) + 2(1-t)\,A_{[223]}(t) = \\ &= A(A)_2^2(A)_3 + 2(1-t)\,(A)_2^2(A)_3 = (A)_2(A)_3^2. \end{aligned}$$

В задачах можно найти новые примеры использования соотношения (53).

8. Задача о слонах

Сколькими способами на шахматной доске вида $n \times n$ можно разместить k слонов так, чтобы никакие два из них не атаковали друг друга. Так как слоны перемещаются по диагоналям, то очевидно, что вся доска распадается на две отдельные доски, составленные соответственно из черных или из белых клеток, и что перечисляющий многочлен для всей доски оказывается произведением многочленов для досок из черных и белых клеток. Повернув доску на 45°, мы превратим поставленную задачу в задачу о ладьях с ромбовидной доской. Обозначим черные и белые клетки соответственно через B и W. Тогда для случая $n=3$ две упомянутые выше доски можно изобразить в виде

$$\begin{array}{ccccc} & B & & & \\ & & & W & W \\ B & B & B & & \\ & & & W & W \\ & B & & & \end{array}$$

Для $n=4$ эти доски имеют вид

$$\begin{array}{ccccccc} & B & & & & & \\ & & & & W & W & \\ B & B & B & & & & \\ & & & W & W & W & W \\ B & B & B & & & & \\ & & & & W & W & \\ & B & & & & & \end{array}$$

и обладают одним и тем же ладейным многочленом.

Обозначим через $B_n(x)$ ладейный многочлен для доски из черных клеток, а через $W_n(x)$ — многочлен для доски из белых клеток. Далее, переставляя клетки так, чтобы они составили усеченные треугольники, найдем, что

$$\begin{aligned} B_3(x) &= T(T)_2 = T^2(T-x), \\ W_3(x) &= T^{-1}(T)_2^2 = T(T-x)^2, \\ B_4(x) &= W_4(x) = (T)_2^2 = T^2(T-x)^2. \end{aligned}$$

Все эти соотношения отвечают частным случаям задачи Симона Ньюкомба.

Общие результаты даются следующими соотношениями:

$$B_{2n}(x) = W_{2n}(x) = (T)_2^n = T^n (T - x)^n, \qquad T^k \equiv T_k(x),$$

$$B_{2n+1}(x) = T\,(T)_2^n = T^{n+1}(T - x)^n,$$

$$W_{2n+1}(x) = T^{-1}(T)_1^{n+1} = T^n (T - x)^{n+1}.$$

Из соотношения (42) получаем

$$T^n (T - x) = (T + x)^n, \ T^k \equiv T_k(x).$$

Дифференцируя соотношение (42) по переменной y, **находим**

$$T^n (T - x)^2 = T\,(T + x)^n, \ T^k \equiv T_k(x).$$

Это соотношение приводит к равенству

$$T^n (T - x)^m = T^{m-1}(T + x)^n,$$

которое легко проверяется методом индукции (с использованием экспоненциальных производящих функций).

Полученный результат позволяет придать соотношениям (54) иной вид:

$$B_{2n}(x) = W_{2n}(x) = T^{n-1}(T + x)^n, \ T^k = T_k(x),$$

$$B_{2n+1}(x) = T^{n-1}(T + x)^{n+1},$$

$$W_{2n+1}(x) = T^n (T + x)^n.$$

Приводим многочлены, отвечающие нескольким первым значениям n:

$B_2(x) = 1 + 2x,$

$B_3(x) = 1 + 5x + 4x^2,$

$B_4(x) = 1 + 8x + 14x^2 + 4x^3,$

$B_5(x) = 1 + 13x + 46x^2 +$
$+ 46x^3 + 8x^4,$

$B_6(x) = 1 + 18x + 98x^2 +$
$+ 184x^3 + 100x^4 + 8x^5,$

$W_3(x) = 1 + 4x + 2x^2,$

$W_5(x) = 1 + 12x + 38x^2 + 32x^3 + 4x^4,$

$B_8(x) = 1 + 32x + 356x^2 + 1704x^3 +$
$+ 3532x^4 + 2816x^5 + 632x^6 + 16x^7.$

Можно заметить, что

$$B_{2n+1}(x) = W_{2n+1}(x) + xB_{2n}(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворпицкий (Worpitzky J.), Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, *J. für die reine und angewandte Math.*, **94** (1883), 203—232.

2. Джейкоб (Jacob S. M.), The enumeration of Latin rectangle of depth three, *Proc. London Math. Soc.*, **31** (1930), 329—354.

3. Капланский (Kaplansky I.), Solution of the «Problème des ménages», *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 784—785.
4. Капланский (Kaplansky I.), Symbolic solution of certain problems in permutations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 906—914.
5. Капланский, Риордан (Kaplansky I. and Riordan J.), The problème des ménages, *Scripta Mathematica*, **12** (1946), 113—124.
6. Карлиц (Carlitz L.), Note on a paper of Shanks, *Amer. Math. Monthly*, **59** (1952), 239—241.
7. Карлиц (Carlitz L.), Congruences for the ménage polynomials, *Duke Math. J.*, **19** (1952) 549—552.
8. Карлиц (Carlitz L.), Congruences connected with three-line Latin rectangles, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 9—11.
9. Карлиц (Carlitz L.), Congruence properties of the ménage polynomials, *Scripta Mathematica*, **20** (1954), 51—57.
10. Карлиц, Риордан (Carlitz L. and Riordan J.), Congruences for Eulerian numbers, *Duke Math.*, *J.*, **20** (1953), 339—344.
11. Керавала (Kerawala S. M.), The enumeration of the Latin rectangle of depth three by means of a difference equation, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **33** (1941), 119—127.
12. Керавала (Kerawala S. M.), The asymptotic number of three-deep Latin rectangles, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **39** (1947), 71—72.
13. Керавала (Kerawala S. M.), Asymptotic solution of the «problème des ménages», *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **39** (1947), 82—84.
14. Кэли (Cayley A.), On a problem of arrangements, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **9** (1878), 338—342.
15. Кэли (Cayley A.), Note on Mr. Muir's solution of a problem of arrangement, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **9** (1878), 388—391.
16. Люка (Lucas E.), Théorie des nombres, Paris, 1891, pp. 491—495.
17. Мендельсон (Mendelsohn N. S.), The asymptotic series for a certain class of permutation problems, *Canadian J. of Math.*, **8** (1956), 243—244.
18. Мьюир (Muir T.), On Professor Tait's problem of arrangement, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 9 (1878), 382—387.
19. Мьюир (Muir T.), Additional note on a problem of arrangement, Proc. *Royal Soc. Edinburgh*, **11** (1882), 187—190.
20. Нетто (Netto E.), Lehrbuch der Combinatorik, 2nd ed., Berlin, 1927, pp. 75—80.
21. Риордан (Riordan J.), Three-line Latin rectangles, *Amer. Math. Monthly*, **51** (1944), 450—452.
22. Риордан (Riordan J.), Three-line Latin rectangles-II, *Amer. Math. Monthly*, **53** (1946), 18—20.
23. Риордан (Riordan J.), Discordant permutations, *Scripta Mathematica*, **20** (1954), 14—23.
24. Риордан (Riordan J.), Triangular permutation numbres, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 404—407.
25. Риордан (Riordan J.), A recurrence relation for three-line Latin rectangles, *Amer. Math. Monthly*, **59** (1952), 159—162.
26. Сад (Sade A.), Enumeration des carrés Latins de côté 6, Marseille, 1948, 2 p.
27. Сад (Sade A.), Enumeration des carrés Latins. Application au 7^e ordre. Conjecture pour les ordres supérieurs, Marseille, 1948, 8 p.
28. Сад (Sade A.), Sur les suites hautes des permutations, Marseille, 1949, 12 p.
29. Сад (Sade A.), Décomposition des locomotions en facteurs de classe haute donnée, Marseille, 1949, 8 p.
30. Сад (Sade A.), An omission in Norton's list of 7×7 squares, *Ann. Math. Statist.*, 22 (1951), 306—307.

31. Спраг (Sprague R.), Über ein Anordnungsproblem, *Mathematische Annalen*, **121** (1949), 52—53.
32. Тейт (Tait P. G.), Scientific Papers, Vol. 1, Cambridge, 1898, p. 287.
33. Тушар (Touchard J.), Sur un problème de permutations, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **198** (1934), 631—633.
34. Тушар (Touchard J.), Permutations discordant with two given permutation, *Scripta Mathematika*, **19** (1953), 108—119.
35. Шёбе (Schöbe W.), Das Lucassche Ehepaarproblem, *Math. Zeitschrift*, **48** (1943), 781—784.
36. Шрутка (Schrutka L. v.), Eine neue Einteilung der Permutationen, *Math. Ann.*, **118**, (1941), 246—250.
37. Эрдёш, Капланский (Erdös P. and Kaplansky I.), The asymptotic number of Latin rectangles, *Amer. J. of Math.*, **68** (1946), 230—236.
38. Ямамото (Yamamoto K.), An asymptotic series for the number of three-line Latin rectangles, *J. Math. Soc. of Japan*, **1** (1949), 226—241.
39. Ямамото (Yamamoto K.), Latin Kukei no zenkinsu to symbolic method, *Sugaku*, **2** (1944), 159—162.
40. Ямамото (Yamamoto K.), Symbolic methods in the problem of three-line Latin rectangles, *J. Math. Soc. of Japan*, **5** (1953), 13—23.
41. Ямамото (Yamamoto K.), On the asymptotic number of Latin rectangles, *Japanese J. of Math.*, **21** (1951), 113—119.
42. Ямамото (Yamamoto K.), Structure polynomial of Latin rectangles and its application to a combinatorial problem, *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ.*, ser. A, **10** (1956), 1—13.

Задачи

1. Даны n элементов, расположенных в строку, причем элементы $i+1, \ldots, i+a$ считаются идущими в естественном порядке. Обобщая лемму из разд. 2, доказать, что число различных способов выбора k элементов, из которых никакие два не идут в естественном порядке, равно

$$f_a(n, k) = \binom{n-ak+a}{k}$$

и что производящая функция

$$f_n(x; a) = \sum f_a(n, k)\, x^k$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$f_n(x; a) = f_{n-1}(x; a) + x f_{n-a-1}(x; a).$$

2. Доказать, что соответствующее число $g_a(n, k)$ для элементов, расположенных по кругу, дается соотношением (Ямамото [42])

$$g_a(n, k) = f_a(n-a, k) + a f_a(n-1-2a, k-1) =$$
$$= \frac{n}{n-ak}\binom{n-ak}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-ak-1}{k-1}$$

и что

$$g_n(x; a) = g_{n-1}(x; a) + x g_{n-a-1}(x; a).$$

3. (a) Показать, опираясь на соотношения (10) и (11), что при $t=0$ и при $U_n(0)\equiv U_n$ имеет место равенство

$$(n-1)\,U_{n+1}=(n^2-n+1)\,(U_n+U_{n-1})+nU_{n-2}.$$

(b) Вывести то же равенство путем итерирования взятого для соответствующих случаев соотношения (19).

4. (a) Определим полиномы Чебышева соотношениями:

$$T_n(x)=\cos n\theta,\ \cos\theta=x,$$
$$U_n(x)=\sin(n+1)\theta/\sin\theta,\ \cos\theta=x$$

при условии, что $T_0=U_0=1$. Показать, что

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)=xT_n(x)-(1-x^2)\,U_{n-1}(x),$$
$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)=xU_n(x)+T_{n+1}(x),$$

и проверить таблицу

n	0	1	2	3	4	5
$T_n(x)$	1	x	$2x^2-1$	$4x^3-3x$	$8x^4-8x^2+1$	$16x^5-20x^3+5x$
$U_n(x)$	1	$2x$	$4x^2-1$	$8x^3-4x$	$16x^4-12x^2+1$	$32x^5-32x^3+6x$

(b) Вывести обратные соотношения

$$t_n(x)=\sum_0^m(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k},\qquad m=[n/2],$$

$$(2x)^n=\sum_0^m\binom{n}{k}t_{n-2k}(x),\qquad m=[n/2]$$

[в которых $t_0(x)=T_0$, $t_n(x)=2T_n(x)$, $n>0$] и

$$U_n(x)=\sum_0^m(-1)^k\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k},$$

$$(2x)^n=\sum_0^m\left[\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}\right]U_{n-2k}(x).$$

(c) Найти производящие функции

$$T(x,y)=1+xy+T_2(x)\,y^2+\ldots+T_n(x)\,y^n+\ldots=$$
$$=(1-xy)\,(1-2xy+y^2)^{-1},$$
$$U(x,y)=1+2xy+U_2(x)\,y^2+\ldots+U_n(x)\,y^n+\ldots=$$
$$=(1-2xy+y^2)^{-1}.$$

5. (a) Используя соотношения (8) и (9), показать, что

$$L(x, y) = 1 + L_1(x)y + L_3(x)y^2 + \ldots + L_{2n-1}(x)y^n + \ldots =$$
$$= (1 - xy)(1 - y - 2xy + x^2y^2)^{-1};$$
$$M(x, y) = 2 + (1 + 2x)y + M_2(x)y^2 + \ldots + M_n(x)y^n + \ldots =$$
$$= (2 - y - 2xy)(1 - y - 2xy + x^2y^2)^{-1} =$$
$$= 1 + (1 - x^2y^2)(1 - y - 2xy + x^2y^2)^{-1} =$$
$$= 1 + (1 + xy)L(x, y)$$

и что

$$l(x, y) = L(-x^{-1}, xy) = (1 + y)(1 - xy + 2y + y^2)^{-1},$$
$$m(x, y) = M(-x^{-1}, xy) = (2 - xy + 2y)(1 - xy + 2y + y^2)^{1}.$$

(b) Разлагая выражение $(1 - y - 2xy + x^2y^2)^{-1}$ на простейшие дроби, установить формулы

$$L_{2n-1}(x) = \frac{(1+\alpha)^{2n+1} - (1-\alpha)^{2n+1}}{2^{2n+1}\alpha}, \quad \alpha = \sqrt{1 + 4x},$$
$$M_n(x) = \left(\frac{1 + 2x + \alpha}{2}\right)^n + \left(\frac{1 + 2x - \alpha}{2}\right)^n.$$

(c) Показать, что при $xy = t$, $(u - 1)2x = 1$ и при обозначениях полиномов Чебышева, принятых в задаче 3, имеет место соотношение

$$L(u, t) = (1 - t)(1 - 2tu + t^2)^{-1} = (1 - t)U(u, t),$$
$$M(u, t) = 2(1 - tu)(1 - 2tu + t^2)^{-1} = 2T(u, t),$$

так что

$$L_{2n-1}(x) = x^n\left[U_n\left(1 + \frac{1}{2x}\right) - U_{n-1}\left(1 + \frac{1}{2x}\right)\right],$$
$$M_n(x) = 2x^nT_n\left(1 + \frac{1}{2x}\right).$$

6. Определим производящие функции четных многочленов Чебышева соотношениями:

$$2T_e(x, y) = T(x, y) + T(x, -y) = 2\Sigma T_{2n}(x)y^n,$$
$$2U_e(x, y) = U(x, y) + U(x, -y) = 2\Sigma U_{2n}(x)y^n.$$

Показать, что

$$[1 + 2y^2 - 4x^2y^2 + y^4]\,T_e(x, y) = 1 + y^2 - 2x^2y^2,$$
$$[1 + 2y^2 - 4x^2y^2 + y^4]\,U_e(x, y) = 1 + y^2$$

и что в обозначениях задачи 5

$$L(-x^{-1}, xy) = U_e(\sqrt{x}/2, \sqrt{y}),$$
$$M(-x^{-1}, xy) = 2T_e(\sqrt{x}/2, \sqrt{y}).$$

Следовательно,

$$x^n L_{2n-1}(-1/x) = U_{2n}\left(\sqrt{x}/2\right),$$
$$x^n M_n(-1/x) = 2T_{2n}\left(\sqrt{x}/2\right).$$

7. (a) Показать, используя результаты задачи 5 (c), что многочлен попаданий задачи о гостях дается соотношениями

$$U_n(t) = 2(t-1)^n T_n\left(\frac{2t+E-2}{2t-2}\right)0!,\ E^k 0! = k!,$$
$$U_n(t) = 2(t-1)^n T_n\left(\frac{2t+e}{2t-2}\right),\ e^n \equiv e_n = (E-2)^n 0!$$

(ср. с задачей 7.8 для чисел e_n), так что

$$U_1(t) = 2t + e_1 = -1 + 2t;\ U_2(t) = (2t+e)^2 - 2(t-1)^2 = 2t^2.$$

В частности (Ямамото [42]), имеют место соотношения

$$U_n(0) \equiv U_n = 2T_n(e/2),\ e^n \equiv e_n,$$
$$U_n(0) = \sum_0^m (-1)^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} e_{n-2k}\, m = [n/2],$$

в которых $U_0 = e_0 = 1$, и [ср. с задачей 4 (b)] соотношения

$$e_n = \sum_0^m \binom{n}{k} U_{n-2k},\ U_0 = 1,\ m = [n/2],$$

или

$$2e_n(U + U^{-1})^n,\ U_0 = 2,\ U^n = U^{-1} \equiv U_n.$$

(b) Вывести следующее асимптотическое разложение:

$$U_n \sim n!e^{-2}\left(1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2!\,(n-1)_2} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!\,(n-1)_k} + \ldots\right),$$

в котором $(n)_k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

8. (a) Примем, как в соотношении (22), что

$$l_n(x) = x^n L_{-n-1}(-x^{-1}),$$
$$m_n(x) = x^n M_n(-x^{-1}).$$

Показать, что

$$x^n = \sum_0^n \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1}\right] l_{n-k}(x) =$$
$$= \sum_0^n \binom{2n}{k} m_{n-}(x),\ m_0 = 1.$$

(b) Вывести обратные формулы

$$n! = \sum_{0}^{n} \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right] (1-t)^k V_{n-k}(t) =$$

$$= \sum_{0}^{n} \binom{2n}{k} (1-t)^k U_{n-k}(t),$$

в которых $U_n(t)$ и $V_n(t)$ — многочлены попаданий для задачи о гостях, причем $U_0(t) = 1$.

9. (a) Из рекуррентного соотношения (13)

$$(n-1)\, kU_{n,k} = n(2n-1-k)\, U_{n-1,k-1} + nkU_{n-1,k}$$

вывести следующие результаты:

$$U_{n,n} = 2, \qquad U_{n,n-2} = 4\binom{n}{4},$$

$$U_{n,n-1} = n(n-2), \qquad U_{n,n-3} = \binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + 12\binom{n}{6}.$$

(b) Аналогично предыдущему с помощью соотношения

$$kV_{n,k} = kV_{n-1,k} + (2n-k)\, V_{n-1,k-1}$$

доказать, что

$$V_{n,n} = 1, \qquad V_{n,n-2} = \binom{n}{3} + 2\binom{n}{4},$$

$$V_{n,n-1} = \binom{n}{2}, \qquad V_{n,n-3} = \binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + 8\binom{n}{5} + 6\binom{n}{6}.$$

10. (a) Показать, опираясь на соотношения (8) и (9), что коэффициенты A_{kj}, B_{kj} в выражениях

$$L_{2n-1,k} = \sum_{j=0} A_{kj} \binom{n-j}{k-j} = \binom{2n-k}{k},$$

$$M_{n,k} = \sum_{j=0} B_{kj} \binom{n-j}{k-j} = \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k}$$

удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$A_{kj} = 2A_{k-1,j} - A_{k-2,j-1},$$

$$B_{kj} = 2B_{k-1,j} - B_{k-2,j-1}.$$

Проверить первые значения

$$L_{2n-1,0} = 1, \qquad M_{n0} = 1,$$

$$L_{2n-1,1} = 2n-1, \qquad M_{n1} = 2n,$$

$$L_{2n-1,2} = 4\binom{n}{2} - 3(n-1), \qquad M_{n2} = 4\binom{n}{2} - (n-1) - 1,$$

$$L_{2n-1,3}=8\binom{n}{3}-8\binom{n-1}{2}+(n-2),$$

$$M_{n3}=8\binom{n}{3}-4\binom{n-1}{2}-2(n-2).$$

(b) Доказать, что

$$B_{kj}=A_{kj}+A_{k-1,\ j-1}.$$

(c) Вывести соотношения для производящих функций

$$a_k(x)=\sum 2^{-k}A_{kj}x^j=a_{k-1}(x)-(x/4)\,a_{k-2}(x),$$

$$b_k(x)=\sum 2^{-k}B_{kj}x^j=b_{k-1}(x)-(x/4)\,b_{k-2}(x)$$

и показать, что, следовательно,

$$a_0=b_0=1,$$

$$a_k(x)=L_{k-1}(-x/4)-(x/2)\,L_{k-2}(-x/4)=$$

$$=L_k(-x/4)-(x/4)\,L_{k-2}(-x/4),$$

$$b_k(x)=L_{k-1}(-x/4)-(x^2/4)\,L_{k-3}(-x/4),$$

где $L_k(x)$ — лестничный многочлен, определенный соотношением (1).

(d) Показать, что

$$A_{kj}=(-1)^j\,2^{k-2j}\left[\binom{k-j}{j}+2\binom{k-j}{j-1}\right],\quad j\leqslant[k/2],$$

$$B_{\ j}=(-1)^j\,2^{k-2j}\left[\binom{k-j}{j}-4\binom{k-j}{j-2}\right],\quad j\leqslant[k/2],$$

$$\sum A_{kj}=1,\quad \sum B_{kj}=2.$$

11. Используя выражение вероятностей через факториальные моменты [соотношение (2.32)] и соотношение

$$r_k=\binom{n}{k}M_{(k)}$$

(r_k — коэффициент ладейного многочлена и $M_{(k)}$ — k-й факториальный момент распределения попаданий), показать, что в обозначениях задачи (10) факториальные моменты прямоугольного и круглого столов даются соответственно выражениями:

$$M_{(k)}=\sum_{j=0} A_{kj}\,(k)_j/(n)_j\quad \text{(прямоугольный стол)},$$

$$M_{(k)}=\sum_{j=0} B_{kj}\,(k)_j/(n)_j\quad \text{(круглый стол)}.$$

Найти разложения

$$\frac{V_{nr}}{n!}=\frac{2^r e^{-2}}{r!}\sum\frac{(-1)^j}{(n)_j}v_j(r),$$

$$\frac{U_{nr}}{n!}=\frac{2^r e^{-2}}{r!}\sum_{j=0}\frac{(-1)^j}{(n-1)_j}F_j(r)=$$

$$=\frac{2^r e^{-2}}{r!}\sum_{j=0}\frac{(-1)^j}{(n)_j}u_j(r),$$

где

$$4^j j!F_j(r)=[(r)-2]^{2j},$$

$$4^j j!u_j(r)=[(r)-2]^{2j}-4j(j-1)][(r)-2]^{2j-2},\quad (r)^j\equiv(r)_j,$$

$$4^j j!v_j(r)=[(r)-2]^{2j}+2j[(r)-2]^{2j-1}.$$

12. Показать, что лестничные многочлены $L_h(x)$, **определенные** равенствами

$$L_0=1,\quad L_1=1+x$$

и

$$L_k(x)=L_{k-1}(x)+xL_{k-2}(x),$$

удовлетворяют соотношениям

$$L_{j+k+1}(x)=L_jL_k+xL_{j-1}L_{k-1}$$

и

$$L_{j+k}=L_jL_k-x^2L_{j-2}L_{k-2}.$$

13. Пусть $f_n(r)=[(r)-2]^n$, $(r)^n\equiv(r)_n$. Показать, что

$$\exp xf(r)=\sum_0^\infty f_n(r)\frac{x^n}{n!}=e^{-2x}(1+x)^r,$$

и вывести рекуррентные соотношения

$$f_{n+1}=(r-n-2)f_n-2_nf_{n-1}=-2f_n+rg_n,$$

в которых $g_n=[(r-1)-2]^2$. Проверить несколько **первых** значений

$$f_0=1,\qquad g_0=1,$$

$$f_1=r-2,\qquad g_1=r-3,$$

$$f_2=r^2-5r+4,\qquad g_2=r^2-7r+10,$$

$$f_3=r^3-9r^2+20r-8,\qquad g_4=r^3-12r^2+41r-38.$$

14. Используя соотношение (7)

$$U_n(t)=V_n(t)-(1-t)V_{n-1}(t)$$

и обозначения задачи (11), доказать, что

$$u_j(r) = v_j(r) + v_{j-1}(r) - (r/2)\, v_{j-1}(r-1).$$

Проверить результат задачи 11, использовав второй результат задачи 13.

15. Показать, что для многочленов $m_n(x)$ задачи 8 справедливы соотношения

$$m_n(x) = m_1(x)\, m_{n-1}(x) - m_{n-2}(x) = m_2(x)\, m_{n-2}(x) - m_{n-4}(x),$$

и установить методом индукции, что, в соответствии с соотношением (25), имеет место равенство

$$m_n(x) = m_k(x)\, m_{n-k}(x) - m_{n-2k}(x).$$

16. Доказать, что

$$[m_n(x)]^{2k} = \sum_0^{k-1} \binom{2k}{j} m_{2n(k-j)}(x) + \binom{2k}{k},$$

$$[m_n(x)]^{2k+1} = \sum_0^{k} \binom{2k+1}{j} m_{n+2n(k-j)}(x).$$

17. Доска для перестановок, противоречивых перестановкам

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{matrix}$$

состоит из двух главных диагоналей квадрата со стороной n X-образная доска) и имеет ладейный многочлен $[M_2(x)]^p$ для $n = 2p$ и $(1+x) \times [M_2(x)]^p$ для $n = 2p+1$. Показать, что если $A_n(t)$ является соответствующим многочленом попаданий, как в задачах 7.7 и 7.9, то

$$A_{2p}(t) = \sum_{j=0}^{q} \binom{p}{j} (1-t)^{4j}\, U_{2p-4j}(t), \quad q = [p/2],$$

$$A_{2p+1}(t) = \sum_{j=0}^{q} \binom{p}{j} (1-t)^{4j}\, u_{2p+1-4j}(t), \quad q = [p/2],$$

где $U_n(t)$ — многочлен попаданий для задачи о гостях, $U_0 = 1$, и

$$u_n(t) = U_n(t) + (1-t)\, U_{n-1}(t) + (1-t)^2\, U_{n-2}(t).$$

Проверить частные случаи

$$\begin{aligned} A_1(t) &= t, & A_3(t) &= 2(2t + t^3), \\ A_2(t) &= 2t^2, & A_4(t) &= 4(1 + 4t^2 + t^4) \end{aligned}$$

и сравнить с задачами 7.7 и 7.9.

18. Используя результат задачи 6 и интеграл Эйлера

$$(n-k)! = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-k} dx,$$

показать, что

$$U_n = \int_0^\infty e^{-x} m_n(x)\, dx = 16 \int_0^\infty e^{-4x^2} x T_{2n}(x)\, dx,$$

$$V_n = \int_0^\infty e^{-x} l_n(x)\, dx = 8 \int_0^\infty e^{-4x^2} x U_{2n}(x)\, dx$$

(U_n, V_n — числа из задачи о гостях для случаев круглого и прямоугольного столов; $m_n(x)$ и $l_n(x)$ являются присоединенными ладейными многочленами, как в задаче 6; $T_n(x)$ и $U_n(x)$ — полиномы Чебышева).

19. Перепишем соотношение

$$n! = \sum_0^n \binom{2n}{k} (1-t^k) U_{n-k}(t)$$

из задачи 8 (b) в виде

$$n! = (U^{1/2} + (1-t) U^{-1/2})^{2n}, \quad U^n \equiv U_n(t), \quad U_{-n} \equiv 0, \quad n > 0.$$

Показать, используя производящую функцию для функций Бесселя первого рода от мнимого аргумента, а именно

$$\exp[-t(u+u^{-1})] = \sum_{-\infty}^{\infty} u^n I_n(2t),$$

что

$$(1-x)^{-1} \exp[-2x(1-t)] = \sum_0^\infty (1-t)^{-n} U_n(t) I_n(2x-2tx).$$

20. (a) Обозначим через $P_n(x)$ ладейный многочлен доски, содержащей $2(n-1)$ клеток, примыкающих к основной диагонали квадрата со стороной n. Так, например, для случаев $n=2$, 3 и 4 доски имеют вид

$$\begin{array}{cc} \cdot & \times \\ \times & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & \times & \\ \times & \cdot & \times \\ & \times & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \cdot & \times & & \\ \times & \cdot & \times & \\ & \times & \cdot & \times \\ & & \times & \cdot \end{array}$$

Обозначим через $P_n^*(x)$ многочлен той же самой доски с удаленными клетками первого столбца. Показать, что если $L_n(x)$ является многочленом лестницы, определенным соотношением (1), то при $n > 2$

$$P_n(x) = (1+x)P_n^*(x) - x^2L_{n-1}(x)L_{n-4}(x),$$
$$P_n^*(x) = P_{n-1}(x) + xP_{n-1}^*(x),$$

так что

$$P_n(x) = (1+2x)P_{n-1}(x) + x^3L_{n-2}L_{n-5} - x^2L_{n-1}L_{n-4}.$$

Установить путем исследования, что $P_2(x) = (1+x)^2$, $P_2^*(x) = 1+x$, $P_3(x) = (1+2x)^2$, $P_3^*(x) = (1+x)(1+2x)$. Следовательно, первое соотношение оказывается справедливым при $n > 1$, если $L_{-2}(x) = 0$, $L_{-1}(x) = 1$. Второе соотношение оказывается справедливым при тех же значениях n, если $P_1(x) = P_1^*(x) = 1$, что является естественным условием.

(b) Используя задачу 12, установить последовательно, что

$$P_n(x) = (1+2x)P_{n-1}(x) - x^2(L_{2n-4}(x) - 2xL_{2n-6}(x) + \cdots +$$
$$+ 2(-x)^jL_{2n-4-2j}(x) + \cdots),$$
$$P_n(x) + xP_{n-1}(x) = (1+2x)(P_{n-1}(x) + xP_{n-2}(x)) -$$
$$- x^2L_{2n-5}(x) = L_{2n-1}(x),$$
$$P_n(x) = (1+x)P_{n-1}(x) + x(1+x)P_{n-2}(x) - x^3P_{n-3}(x).$$

(c) Показать, что при $P_0(x) = P_1(x) = 1$

$$P(x, y) = P_0(x) + P_1(x)y + P_2(x)y^2 + \cdots =$$
$$= L(x, y)(1+xy)^{-1} = (1-xy)(1+xy)^{-1}(1-y-2xy+x^2y^2)^{-1}$$

и что в обозначениях задачи 5

$$p(x, y) = P(-x^{-1}, xy) = \sum x^nP_n(-1/x)y^n = \sum_0^\infty p_n(x)y^n =$$
$$= l(x, y)(1-y)^{-1} = (1+y)(1-y)^{-1}(1+2y+y^2-xy)^{-1}.$$

(d) из последнего равенства вывести соотношение

$$p_n(x) - p_{n-1}(x) = l_n(x)$$

и его следствие

$$A_n(t) = (1-t)^np_n(E(1-t)^{-1})0! = V_n(t) + (1-t)A_{n-1}(t),$$

в котором $V_n(t)$ является многочленом попаданий для задачи о гостях в случае прямоугольного стола. Проверить первые значения

$$A_0 = 1, \qquad A_2 = 1 + t^2,$$
$$A_1 = 1, \qquad A_3 = 2 + 4t^2.$$

(e) Показать, используя соотношение (20) и результат (d), что

$$(n-1)A_n(t)=[n^2-2-(n-2)t]A_{n-1}(t)-$$
$$-[n^2-2n-1+(n+1)t](1-t)A_{n-2}(t)-$$
$$-n(1-t)^3A_{n-3}(t)-2(t-1)^n,\quad n>1.$$

(f) Пусть

$$\frac{A_{n,r}}{n!}=\frac{2^re^{-2}}{r!}\sum_{j=0}\frac{(-1)^j}{(n)_j}a_j(r).$$

Используя соотношение из задачи (d) и задачу 14, показать, что

$$v_j(r)=a_j(r)+a_{j-1}(r)-(r/2)a_{j-1}(r-1),$$

где $4^jj!\,v_j(r)=f_{2j}+2jf_{2j-1}$ и f_n — как в задаче 13. Вывести соотношения

$$a_0(r)=1,$$
$$4a_1(r)=f_2+4f_1,$$
$$32a_2(r)=f_4+8f_3+16f_2,$$
$$4^jj!a_j(r)=f_{2j}+4jf_{2j-1}+8(j)_2f_{2j-2}+\cdots+2^{k+1}(j)_kf_{2j-k}+\cdots$$
$$\cdots+2^{j+1}j!f_j.$$

21. Обозначим через $S_k(x)$ ладейный многочлен трехслойной лестницы

$$\begin{array}{l}\times\times\times\\ \quad\times\times\times\\ \qquad\cdots\\ \qquad\quad\times\times\times\\ \qquad\qquad\times\times\times\end{array}$$

состоящей из k строк и $k+2$ столбцов. Отметим, что $S_1(x)=1+3x$, $S_2(x)=1+6x+7x^2$. Показать путем разложения относительно клеток первой строки, что

$$S_k(x)=(1+x)S_{k-1}(x)+x[S_{k-1}^*(x)+S_{k-1}^{**}(x)],$$

где $S_{k-1}^*(x)$ — многочлен доски, из которой удалены первая строка и второй столбец, а $S_{k-1}^{**}(x)$ — многочлен доски, из которой удалены первая строка и третий столбец. Показать далее, что

$$S_k(x)=S_k^*(x)+xS_{k-1}(x)=$$
$$=S_k^{**}(x)+x(S_{k-1}^*(x)+S_{k-1}(x)-x^2S_{k-2}^{**}(x)).$$

Отсюда путем исключения вывести, что

$$S_k(x)=(1+3x)S_{k-1}(x)-2x^2S_{k-2}(x)-x^2(1+x)S_{k-3}(x)+x^4S_{k-4}(x).$$

Проверить, что это справедливо для всех k, если $S_0(x)=1$, $S_{-n}(x)=0$, $n>0$.

22. Обозначим через $T_k(x)$ многочлен лестницы из задачи 21 с удаленными первым и последним столбцами. Показать, что

$$T_k(x)=S_k(x)-2xS_{k-1}(x)+x^2S_{k-2}(x),$$

так что $T_0=1$, $T_1=1+x$, $T_2=1+4x+2x^2$. Следовательно,

$$T_k(x)=(1+3x)T_{k-1}(x)-2x^2T_{k-2}(x)-x^2(1+x)T_{k-3}(x)+x^4T_{k-4}(x).$$

23. (a) Удалим из рассмотренной выше доски с многочленом $T_k(x)$ главную диагональ. Получим доску, рассмотренную в задаче 20, которой соответствует многочлен $P_k(x)$. Показать, что путем разложения относительно клеток главной диагонали можно получить соотношение

$$T_n(x)=P_n(x)+x\sum_{k=0} T_k(x)P_{n-1-k}(x),$$

$$\begin{aligned} T(x,\ y)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)y^n &= \\ &=P(x,\ y)+xyP(x,\ y)T(x,\ y)= \\ &=P(x,\ y)[1-xyP(x,\ y)]^{-1}= \\ &=(1-xy)[1-y-2xy-xy^2+x^3y^3]^{-1} \end{aligned}$$

[для получения последней строки использовать задачу 20(c)].

(b) Вывести последнее соотношение из рекуррентного соотношения задачи 22 и убедиться, что в обозначениях задачи 21 имеет место равенство

$$\begin{aligned} S(x,\ y)=\sum S_n(x)y^n &= \\ &=T(x,\ y)(1-xy)^{-2}= \\ &=(1-xy)^{-1}(1-y-2xy-xy^2+x^3y^3)^{-1}. \end{aligned}$$

24. Доска, соответствующая перестановкам, противоречивым трем перестановкам

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & \cdots & 1 & 2, \end{array}$$

имеет вид трехслойной лестницы из задачи 21, в которой треугольник, образованный клетками двух последних столбцов, перенесен влево в два первых столбца. Так, например, для случая $n=5$ эта доска имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} \times & \times & \times & & \\ & \times & \times & \times & \\ & & \times & \times & \times \\ \times & & & \times & \times \\ \times & \times & & & \times \end{array}$$

Обозначим через $R_n(x)$ ладейный многочлен этой доски.

(a) Пусть $S_n(x)$ — многочлен трехслойной лестницы (из задачи 21), а $s_n(x)$ — многочлен той же доски, из которой удалены два последних столбца. Доказать, что

$$s_n(x)=S_{n-1}(x)-xS_{n-2}(x)+xs_{n-1}(x)$$

и, следовательно, что

$$s_n(x)-S_{n-1}(x)=x\left[s_{n-1}(x)-S_{n-2}(x)\right]=x^n,$$

откуда следуют равенства

$$s_0=1, \qquad s_2=1+3x+x^2,$$
$$s_1=1+x, \quad s_3=1+6x+7x^2+x^3.$$

Опираясь на этот результат, показать, что

$$\begin{aligned} s(x,\ y)=\sum_{n=0} s_n(x)\,y^n= \\ =yS(x,\ y)+(1-xy)^{-1}= \\ =(1-2xy-xy^2+x^3y^3)(1-xy)^{-1}(1-y-2xy- \\ -xy^2+x^3y^3)^{-1}=(1-2xy-xy^2+x^3y^3)\,S(x,\ y) \end{aligned}$$

и что

$$s_n(x)=S_n(x)-2xS_{n-1}(x)-xS_{n-2}(x)+x^3S_{n-3}(x).$$

(b) Установить, разлагая доску с многочленом $R_n(x)$ относительно клеток треугольника в нижнем левом углу, что

$$R_n(x)=s_n(x)+xT_{n-1}(x)+2x\tau_{n-1}(x)+x^2s_{n-2}(x)$$

[$T_n(x)$ — многочлен из задачи 22]. $\tau_{n-1}(x)$ является многочленом для доски с удаленными первым столбцом и предпоследней строкой:

$$\tau_n(x)=S_{n-1}(x)-xS_{n-2}(x)+xT_{n-1}(x),$$

таким образом,

$$\begin{aligned} R_n(x)=S_n(x)-xS_{n-1}(x)+(x+x^2)\,S_{n-2}(x)\;-\;2x^2(1+2x)\,S_{n-3}(x)- \\ -x^3(1-2x)\,S_{n-4}(x)+x^5S_{n-5}(x)= \\ =S_n(x)-2x^2S_{n-2}(x)-2x^3(1+x)\,S_{n-3}(x)+3x^4S_{n-4}(x), \end{aligned}$$

и если $R_0=S_0=1$, $R_1=1+3x$, $R_2=1+6x+5x^2$, то

$$R(x,\ y)=\sum R_n(x)\,y^n=$$
$$=[1-2x^2y^2-2x^2(1+x)\,y^3+3x^4y^4]\,S(x,\ y)$$

и

$$r(x,\ y)=R(-x^{-1},\ xy)=$$
$$=(1-2y^2-2(x-1)\,y^3+3y^4)/s(x,\ y),$$

где

$$s(x,\ y)=S^{-1}(-x^{-1},\ xy)=(1+y)\,[(1+y)(1+y-y^2)-xy\,(1-y)].$$

Отметим, что $s(x,\ y)$ *не является* функцией $s(x,\ y)$ из части (а). Отметим также, что $r_0(x)=1$, $r_1(x)=x-3$, $r_2(x)=x^2-6x+5$.

25. Продолжая предыдущую задачу, доказать, что при $r_0(x)=4$

$$r(x,\ y)=4+r_1(x)\,y+r_2(x)\,y^2+\cdots+r_n(x)\,y^n+\cdots=$$
$$=(4-3(x-3)\,y+4y^2+(x-1)\,y^3)/s(x,\ y)=$$
$$=4-ys_y(x,\ y)/s(x,\ y),$$

где $s_y(x,\ y)$, как обычно, означает частную производную, показать (путем разложения на простые дроби), что

$$r^*(x,\ y)=r(x,\ y)-(1+y)^{-1}=$$
$$=[3+4y-xy\,(2-y)]/\Delta(x,\ y)=$$
$$=3-y\Delta_y(x,\ y)/\Delta(x,\ y),$$

где $\Delta(x,\ y)=s(x,\ y)(1+y)^{-1}=(1+y)(1+y-y^2)-xy\,(1-y)$, и если

$$r_n'(x)=nq_{n-1}(x)$$

(штрих означает производную), то

$$q(x,\ y)=q_0(x)+q_1(x)\,y+\cdots+q_n(x)\,y^n+\cdots=(1-y)/\Delta(x,\ y).$$

Вывести рекуррентные соотношения

$$r_n(x)-(x-2)\,r_{n-1}(x)+xr_{n-2}(x)-r_{n-3}(x)=2x\,(-1)^n,\quad n>2,$$
$$q_n(x)-(x-2)\,q_{n-1}(x)+xq_{n-2}(x)-q_{n-3}(x)=0,\quad n>1.$$

26. (а) Показать, что указанные выше производящие функции удовлетворяют соотношению

$$(1-y)^2r^*(x,\ y)-(1-2y-2y^2+2y^3-y^4)\,q(x,\ y)=2-3y+y^2.$$

Вывести рекуррентное соотношение (Ямамото [42])

$$n_n(x)-2r_{n-1}(x)+r_{n-2}(x)-4(-1)^n=q_n(x)-2q_{n-1}(x)-2q_{n-2}(x)+$$
$$+2q_{n-3}(x)-q_{n-4}(x),\quad n>2.$$

(b) Показать, что

$$r(0,\ y)=\frac{4+5y-y^2}{(1+y)(1+y-y^2)}=\frac{2}{1+y}+\frac{2+y}{1+y-y^2},$$

$$q(0,\ y)=\frac{1-y}{(1+y)(1+y-y^2)}=\frac{-2}{1+y}+\frac{3-2y}{1+y-y^2}.$$

Следовательно, если f_n — числа Фибоначчи ($f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$), где $f_0=f_1=1$, то

$$r_n(0)=(-1)^n(2+2f_n-f_{n-1}),$$

$$q_n(0)=(-1)^n(-2+3f_n+2f_{n-1}).$$

Пусть $(-1)^n r_n(0)=a_n$, $(-1)^n q_n(0)=b_n$. Вывести рекуррентные соотношения

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-2,\quad n>1,$$

$$b_n=b_{n-1}+b_{n-2}+2,\quad n>1,$$

и проверить таблицу

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	4	3	5	6	9	13	20	31	49	78	125
b_n	1	3	6	11	19	32	53	87	142	231	375

27. Для многочленов попаданий, соответствующих $r_n(x)$ и $q_n(x)$ из задачи 26, введем обозначения

$$N_n(t)=(1-t)^n r_n[E(1-t)^{-1}]\,0!=\sum N_{nr}t^r,$$

$$M_n(t)=(1-t)^n q_n[E(1-t)^{-1}]\,0!=\Sigma M_{nr}t^r.$$

Используя соотношения $r_n'(x)=nq_{n-1}(x)$ и (7.4), доказать, что

$$(n+1)M_n(t)=N_{n+1}(t)-(1-t)^{n+1}r_{n+1}(0),$$

и проверить таблицу:

n	0	1	2	3	4
$N_n(t)$	4	$-2+3t$	$1-4t+5t^2$	$6t^3$	$1+6t^2+8t^3+9t^4$
$M_n(t)$	1	$-2+3t$	$2-6t+6t^2$	$-2+9t-12t^2+11t^3$	$3-10t+30t^2-18t^3+19t^4$

Доказать, используя рекуррентное соотношение из задачи **26(а)**, равенство (Ямамото [42])

$$N_n(t)-2(1-t)N_{n-1}(t)+(1-t)^2N_{n-2}(t)-4(t-1)^n=$$
$$=M_n(t)-2(1-t)M_{n-1}(t)-2(1-t)^2M_{n-2}(t)+$$
$$+2(1-t)^3M_{n-3}(t)-(1-t)^4M_{n-4}(t).$$

28. Продолжая решение предыдущей задачи, вывести асимптотическое выражение

$$\frac{N_{nr}}{n!}=\frac{3^re^{-3}}{r!}\left(1-\frac{r^2-7r+9}{3n}+\frac{a_2(r)}{18n(n-1)}\right)+O(n^{-3}),$$

в котором

$$a_2(r)=24\binom{r}{4}-64\binom{r}{3}+84\binom{r}{2}-78r-27.$$

29. В квадрате вида $n\times n$ дополнением треугольника со стороной n служит треугольник со стороной $n-1$. Следовательно, если $T_n(x)$ является ладейным многочленом треугольника, $S_n(x)$ — многочленом квадрата и $S(n, k)$ — числами Стирлинга второго рода, то

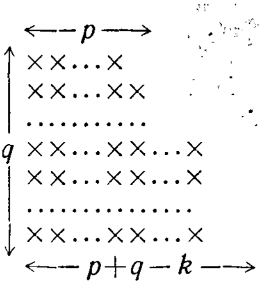
$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n} S(n, n-k)(-x)^kS_{n-k}(x),$$

$$T_{n-1}(x)=\Sigma S(n+1, n+1-k)(-x)^kS_{n-k}(x).$$

Путем обращения этих соотношений показать, что

$$S_n(x)=T(T+x)\ldots(T+(n-1)x),\quad T^k\equiv T_k(x),$$
$$S_n(x)=T^{-1}(T+x)\ldots(T+nx),\quad T^k\equiv T_k(x),\quad T_{-1}=1.$$

30. Пусть $U_k(p, q, 1; x)$ — многочлен усеченной трапеции



которая является дополнением к треугольнику со стороной $q-k$ в прямоугольнике $q\times(p+q-k)$. Показать, что

$$U_k(p, q, 1; x)-kxU_k(p, q-1,1; x)=U_{k+1}(p, q, 1; x)$$

и что, следовательно,

$$U_k(p, q, 1; x) = T^{q-k-1}(T)_{k;\, x}(T)_{p,\, x}, \quad T^k \equiv T_k(x),$$

где $(T)_{k,\, x} = T(T-x)\ldots[T-(k-1)x]$. Отметим, что многочленом дополнения треугольника со стороной k в прямоугольнике $p \times q$ является

$$U_{q-k}(p-k, q, 1; x) = T^{k-1}(T)_{q-k}(T)_{p-k},$$

где $(T)_k \equiv (T)_{k,\, x}$, и

$$U_q(p, q, 1; x) = T^{-1}(T)_p(T)_q = R_{p,\, q}(x),$$

где $R_{p,\, q}(x)$ является многочленом прямоугольника. Путем сравнения с задачей 21 можно заметить следующее тождество:

$$S_n(x) = T(T+x)\ldots[T+(n-1)x] =$$
$$= T(T-x)^2\ldots(T-(n-1)x)^2; \quad T^k \equiv T_k(x).$$

31. (*a*) Пусть $A_{nm}(t)$ — многочлен попаданий для треугольника со стороной n—m в квадрате со стороной n. Показать, что

$$A_{nm}(t) = \sum_{k=0} \binom{n-m}{k}(t-1)^k A_{n-k,\, m+1}(t).$$

(b) Показать, что для случая $m=0$

$$A_1(t, u) = \sum_{n=0} A_{n1}u^n/n! =$$
$$= e^{u(1-t)} \exp uA(t) = \qquad A^n(t) \equiv A_{n0}(t)$$
$$= (1-t)\left[e^{u(t-1)} - t\right]^{-1}.$$

(c) Положим

$$A_m(t, u) = \sum_{n=0} A_{n+m-1,\, m}(t)u^n/n!, \quad A_{m-1,\, m}(t) = (m-1)!$$

Показать, используя (a), что

$$A_{m+1}(t, u) = e^{u(1-t)} \frac{d}{du} A_m(t, u), \quad m > 0$$

и что, следовательно,

$$A_m(t, u) = (m-1)!\,[A_1(t, u)]^m = (m-1)\, A_1(t, u)\, A_{m-1}(t, u),$$

$$A_{n+m-1,\, m}(t) = (m-1) \sum_{k=0} \binom{n}{k} A_{n-k,\, 1}(t)\, A_{k+m-2,\, m-1}(t).$$

32. Для многочлена попаданий $A_{21^{n-2}}(t)$ из задачи Симона Ньюкомба положим, что

$$A_{21^{n-2}}(t) = \sum_{r=0} A_{21^{n-2},\, r}t^r$$

и

$$A_{n1}(t)=A_n(t)=\Sigma E_{n,\,r}t^r.$$

Показать, что

$$A_{21^{n-2},\,r}=A_{n,\,r}+A_{n-1,\,r}-A_{n-1,\,r-1}.$$

33. Используя обозначения задачи 32, составить следующую таблицу для величин $a_{321^{n-5},\,r}$

r n	1	2	3	4	5	6
5	1	6	3			
6	1	17	33	9		
7	1	40	184	168	27	
8	1	87	792	1592	807	81

Заметим, что многочлены $A_{[s]}(t)$, $s=321^{n-5}$, как функции n, удовлетворяют соотношению (50).

34. Если $A_n(t)$ — из задачи 32 и $H_n(t)=(t-1)^{-n}A_n(t)$ — из задачи 22(d), то

$$\exp uH(t)=(1-t)(e^u-t)^{-1}$$

и

$$(H+1)^n=tH_n(t)+(1-t)\,\delta_{n0},\qquad H^k\equiv H_k(t).$$

Показать, что для любого многочлена $f(x)$

$$f(H+1)=tf(H)+(1-t)f(0),\qquad H^k\equiv H_k(t),$$

и, следовательно, что

$$\binom{H+1}{m}=t\binom{H}{m},\qquad m>0,$$

$$\binom{H+r}{m}=t^r\binom{H}{m},\qquad m\geqslant r,$$

$$(t-1)^r\binom{H}{m}=\binom{H}{m-r},\qquad m\geqslant r,$$

$$(t-1)^m\binom{H}{m}=1.$$

35. Используя результат задачи 34 и соотношение

$$A_n(t)=(t-1)^nH_n(t)=\sum_{r=0}^{n-1}A_{nr}t^r,$$

установить, что

$$H_n(t)=\sum_{r=0}A_{nr}\binom{H+r}{n},\qquad H^k\equiv H_k(t)$$

и что, следовательно,

$$x^n = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{x+r}{n} A_{nr} \qquad \text{(Ворпицкий [1]).}$$

В частности,

$$x = \binom{x}{1},$$

$$x^2 = \binom{x}{2} + \binom{x+1}{2},$$

$$x^3 = \binom{x}{3} + 4\binom{x+1}{3} + \binom{x+2}{3}.$$

36. Для задачи Симона Ньюкомба при спецификации (i^k) справедливо соотношение

$$A_k^{(i)}(t) = A_{i^k}(t) = \frac{(A)_i^k}{i!^k} = \binom{A}{i}^k = (t-1)^{ik}\binom{H}{i}^k =$$

$$= \sum_{r=0}^{i(k-1)} A_{k,r}^{(i)} t^r.$$

Вывести соотношение

$$\binom{H}{i}^k = \sum_{r=0} A_{k,r}^{(i)} \binom{H+r}{ik}$$

и вытекающее отсюда равенство

$$\binom{x}{i}^k = \sum_{r=0} A_{k,r}^{(i} \binom{x+r}{ik}.$$

При $i=1$ это сводится к результату предшествующей задачи поэтому $A_{kr}^{(1)} = A_{kr}$.

37. Положим в задаче 36 $i=2$ и придадим x значения: 2, 3, . . . Тогда

$$1 = A_{n,\,2n-2}^{(2)},$$

$$3^n = A_{n,\,2n-3}^{(2)} + (2n+1)\,A_{n,\,2n-2}^{(2)},$$

$$6^n = A_{n,\,2n-4}^{(2)} + (2n+1)\,A_{n,\,2n-3}^{(2)} + \binom{2n+2}{2} A_{n,\,2n-2}^{(2)}$$

и т. д. Показать, что

$$A_{n,\,2n-2-k}^{(2)} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{2n+1}{j} \binom{k+2-j}{2}^n.$$

Проверить таблицу для чисел $A^2{}_{2n,r}$

r n	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	1	4	1				
3	1	20	48	20	1		
4	1	72	603	1168	603	72	1

38. Показать аналогично предыдущему, что для любого i

$$1 = A^{(i)}_{k,\,ik-i},$$

$$(i+1)^k = A^{(i)}_{k,\,ik-i-1} + (ik+1)\,A^{(i)}_{k,\,ik-1},$$

$$\binom{i+2}{2}^k = A^{(i)}_{k,\,ik-i-2} + (ik+1)\,A^{(i)}_{k,\,ik-i-1} + \binom{ik+2}{2} A^{(i)}_{k,\,ik-1}$$

и, следовательно, что

$$A^{(i)}_{k,\,ik-i-j} = \sum_{s=0}^{j} (-1)^s \binom{ik+1}{s} \binom{i+j-s}{i}^k \text{ (Карлиц [6]).}$$

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Д. Риордан

ВВЕДЕНИЕ
В КОМБИНАТОРНЫЙ
АНАЛИЗ

Редактор *И. Л. Никольская*
Художник *В. М. Новоселова*
Технический редактор *З. Д. Горькова*

Сдано в производство 19/V 1962 г.
Подписано к печати 14/IX 1962 г.
Бумага $60 \times 90^1/_{16}$=9,0 бум. л.
18,0 печ. л. Уч.-изд. л. 15,3
Изд. № 1/0128. Цена 1 р. 27 к.
Зак. 273

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 5
Мосгорсовнархоза
Москва, Трехпрудный пер., 9