

АКАДЕМИЯ НАУК УССР

РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИЙ

ИНСТИТУТ

ACADEMY OF SCIENCES URSR SSR

INSTITUTE OF RADIO

ASTRONOMY

Ю. А. РОМАНЦОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ
РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Препринт № 47

Харьков 1990

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Ю. А. Романцов

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ
В ПОЛЕ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Препринт № 47

Харьков 1990

УДК 621.385.029.64

Романцов Ю.А. Исследование динамики релятивистских частиц в поле резонансных систем с распределенным взаимодействием (Препринт / РИ АН УССР, № 47. - Харьков, 1990. - 66 с.).

Аналитическими методами исследована динамика релятивистского электрона в поле резонансной системы с распределенным взаимодействием. Получено решение уравнения движения, определяющее зависимость фазы электрона от продольной пространственной координаты, начальных условий, амплитуды и фазы поля резонатора. Показано, что отличительной чертой динамики частиц является асимметрия фазовых траекторий захваченных электронов, которая учтена при изучении эффективности их взаимодействия с волной. Эти результаты использованы для определения оптимальных условий энергообмена пучка релятивистских электронов с полем резонатора и для оценки величины КПД многорезонаторных усилителей *O*-типа. Аналитические зависимости сопоставлены с результатами численных расчетов.

Romantsov Y.A. The investigation of relativistic particles dynamics in the resonant systems with distributed interaction.

The dynamics of relativistic electron in electromagnetic field of resonant systems with extended-interaction has been studied analytically. By solution of motion equation the electrons conditions space dependence has been established. It is shown that phase trace nonsymmetry is peculiarity of trapped electron dynamics which must be taken into account while the wave-particles interaction is considered. These results are used for analytical estimation of efficiency of relativistic resonant amplifiers with distributed interaction. The numerical and analytical results are compared.

Часть I

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИНАМИКЕ ЧАСТИЦ

ВВЕДЕНИЕ

Цель данной работы - теоретическое исследование взаимодействия прямолинейного релятивистского электронного потока с синхронной волной поля резонатора, которая локализована вблизи поверхности замедляющей структуры (ЗС). Электродинамические системы рассматриваемого типа обычно представляют собой объемные или открытые резонаторы с отражающими поверхностями, частично покрытыми периодическими неоднородностями [1 - 3]. Так, в мощных релятивистских генераторах дифракционного излучения (оротронах) широкое распространение получили резонаторы, образованные участками сверхразмерных (диаметр $D > \lambda_{ген}$) гофрированных цилиндрических волноводов, ограниченных запердельным сужением с катодного конца и коническим расширением для вывода излучения со стороны коллектора [4, 5].

Для возбуждения колебаний в подобных электродинамических структурах используют ленточные или тонкие цилиндрические потоки сфокусированные сильным статическим магнитным полем либо электростатическим полем (центробежная электростатическая фокусировка). Эффективная продольная группировка электронов и отбор их кинетической энергии осуществляется в процессе взаимодействия пучка с одной из пространственных гармоник ЗС, для которой выполняется условие черенковского синхронизма. Понятно, что такая одноволновая физическая модель энергообмена электронного потока и поля пространственно ограниченной ЗС применима в том случае, если спектральные линии пространственных гармоник ЗС не перекрываются, т.е. эффективная длина области взаимодействия $L_{эф}$ и ℓ , характерный период ЗС должны удовлетворять соотношению

$$\left(\ell/L_{эф}\right)^2 \ll 1. \quad (1.1)$$

Высокая добротность применяемых колебательных систем позволяет использовать при развитии теории приближение фиксированной структуры поля. Движение частиц будем рассматривать одномерным, влиянием поля пространственного заряда пренебрегаем. Эти допущения соответствуют обычным условиям работы реальных приборов данного класса [6 - 10].

В рамках сделанных предположений поставленная задача сводится к интегрированию одномерного уравнения движения релятивистского электрона в поле синхронной волны. В большинстве работ, в которых оно анализируется (например, [11]), обычно используется

приближение математического маятника, справедливое для приборов с низким электронным КПД. Полное исследование при произвольных амплитудах поля и параметрах пучка проведено только для нерелятивистского уравнения движения, которое при однородном распределении поля волны сводится к уравнению маятника строго [12]. Такой подход позволил качественно проанализировать фазовые колебания частиц в пространстве взаимодействия и получить аналитические оценки энергетических параметров приборов [11 - 14].

В первой части работы представлено решение более общей задачи об анализе динамики частиц в поле распределенных резонансных систем с учетом релятивистских эффектов. Полученные результаты применены для аналитического расчета и оптимизации выходных характеристик резонансных приборов с распределенным взаимодействием.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Рассматриваемый физический объект исследования - электрон в поле бегущей волны является гамильтоновой системой, эволюция состояния которой определяется функцией Гамильтона

$$H_p = \frac{\Phi_p}{\gamma_p (\gamma_0 - 1)} \left[(1 - (v'/c)^2)^{-1/2} - 1 \right] - \frac{F_p}{2} f(\xi) \sin(\psi + \tilde{\varphi}). \quad (1.2)$$

Здесь и далее следующие обозначения:

- v_0 - начальная скорость частицы;
- v_φ - фазовая скорость синхронной волны;
- c - скорость света в вакууме;

$$v' = (v - v_\varphi) / (1 - v v_\varphi / c^2) = c (\sqrt{1 - \gamma^{-2}} - \beta_{\varphi c}) / (1 - \beta_{\varphi c} \sqrt{1 - \gamma^{-2}}) -$$

скорость частицы на траектории v в системе координат, движущейся со скоростью v_φ ;

$\beta_{\varphi c} = v_\varphi / c$; $\gamma_0 = (1 - v_0^2 / c^2)^{-1/2}$ и $\gamma = (1 - v^2 / c^2)^{-1/2}$ - релятивистские факторы электрона в начале области взаимодействия и на траектории;

$v(\xi, \varphi_0) = v_\varphi (1 + \Phi_\varphi^{-1} d\psi/d\xi)^{-1}$ - текущее значение скорости электрона в лабораторной системе координат;

$\xi = y/L$ - пространственная координата электрона y , нормированная на характерный размер L области взаимодействия;

$\psi(\xi, \varphi_0) = \omega t_1(\xi, \varphi_0) - \Phi_\varphi \xi - \tilde{X}(\varphi_0)$ - фаза электрона в поле синхронной волны с учетом предварительной группировки частиц $\tilde{X}(\varphi_0)$;

$t_1(\xi, \varphi_0)$ - время пребывания электрона на траектории, зависящее от лагранжевых координат; ξ и $\varphi_0 = \omega t_0$ - фазы влета в пространство взаимодействия;

$\Phi_\varphi = \omega L / v_\varphi = 2\pi N_3$ - набег фазы синхронной волны на длине L ;

$\omega = 2\pi \nu$ - циклическая частота ν возбуждаемого поля;

$N_3 = L / \lambda_3$ - число "замедленных" длин волн $\lambda_3 = v_\varphi / \nu$, укладываемых на L ;

$\Phi_0 = \omega L / v_0$ - статический угол пролета электрона;

$\mathcal{F}_\varphi = G_\varphi / m_0 e^2 (\gamma_0 - 1) (eL)^{-1}$ - амплитуда электрического поля синхронной волны G_φ , нормированная на величину $m_0 c^2 (\gamma_0 - 1) / eL$ ускоряющего поля;

$f(\xi)$ - функция, описывающая распределение интенсивности поля медленной гармоники вдоль ЗС;

$\Phi_s = \Phi_\varphi (v_\varphi / v_0 - 1)$ - параметр рассинхронизма средней скорости электрона v_0 и фазовой скорости волны v_φ ;

$\tilde{\varphi} = \varphi_0 + \chi_\varphi + \tilde{X}(\varphi_0)$ - начальная фаза частицы с учетом значения χ_φ фазы поля в резонаторе и наличия предварительной группировки электронов;

$\tilde{\Phi}_s = \Phi_s + \tilde{X}_1(\varphi_0)$ - начальный рассинхронизм промодулированного по скорости электронного потока и синхронной гармоники поля резонатора.

Физический смысл гамильтониана очевиден - это (с точностью до нормированного коэффициента) полная энергия электрона на траектории, записанная в системе координат синхронной волны. Канонически сопряженными переменными являются фаза электрона ψ и

$\eta_e = 1 - (\gamma - 1) / (\gamma_0 - 1)$ - относительное изменение его энергии на траектории КЦД. Искомые величины удовлетворяют уравнениям движения:

$$\frac{d\eta_e}{d\xi} = - \frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{\mathcal{F}_\varphi}{2} f(\xi) \cos(\psi + \tilde{\varphi}), \quad (I.3a)$$

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial \eta_e} = \tilde{\Phi}_s + \Phi_0 \left[\frac{1 - (1 - \gamma_0^{-1}) \eta_e}{\sqrt{(1 - \eta_e) \left(1 - \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} \eta_e\right)}} - 1 \right] \quad (I.3b)$$

с нулевыми начальными условиями: $\eta_e|_{\xi=0} = 0$ и $\psi|_{\xi=0} = 0$.

При необходимости (I.3a) и (I.3b) можно свести к одному уравнению относительно фазы ψ . Для этого с помощью (I.3b) устанавливается функциональная зависимость η_e от $d\psi/d\xi$, которую подставим в (I.3a) и получим

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \frac{\gamma_0 - 1}{2\beta_{pc}^2} \frac{\Phi_0 \mathcal{F}_p f(\xi)}{\mathcal{F}_p} \left[\left(1 + \Phi_0^{-1} \frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 - \beta_{pc}^2 \right] \cos(\psi + \tilde{\varphi}), \quad (I.4)$$

$$\frac{d\psi}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \tilde{\Phi}_s; \quad \psi \Big|_{\xi=0} = 0.$$

Уравнения (I.3a), (I.3б), (I.4) описывают динамику электронов во всем интервале физически допустимых параметров. Отметим, что в зависимости от величины релятивистского фактора γ_0 соотношение (I.3б) может быть значительно упрощено. Так, для нерелятивистских частиц ($\gamma_0 \approx 1$) получим

$$d\psi/d\xi \approx \tilde{\Phi}_s + \Phi_0 \left[(1 - \eta_e)^{-1/2} - 1 \right].$$

В случае ультрарелятивистских скоростей ($\gamma_0^2 \gg 1$) можно положить

$$d\psi/d\xi \approx \tilde{\Phi}_s + 0,5 \Phi_0 \gamma_0^{-2} \left[(1 - \eta_e)^{-2} - 1 \right].$$

Если же малой величиной является относительное изменение кинетической энергии электронов (т.е. $\eta_e^2 \ll 1$), то

$$d\psi/d\xi \approx \tilde{\Phi}_s + (\Phi_0/\gamma_0(1+\gamma_0)) \eta_e \quad (I.5)$$

и (I.3a), (I.3б) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} d\eta_e/d\xi &= \mathcal{F}_p/2 f(\xi) \cos(\psi + \tilde{\varphi}), \\ d\psi/d\xi &= \tilde{\Phi}_s + (\Phi_0/\gamma_0(1+\gamma_0)) \eta_e, \end{aligned} \quad (I.6)$$

универсальному для всех приборов 0-типа [II]. Непосредственно из (I.6) следует маятниковое приближение уравнения (I.4)

$$d^2\psi/d\xi^2 = \frac{\mathcal{F}_p \Phi_0}{2\gamma_0(1+\gamma_0)} f(\xi) \cos(\psi + \tilde{\varphi}). \quad (I.7)$$

Понятно, что соотношение (I.7) получается из (I.4), если пренебречь слагаемыми $\sim \Phi_0^{-1} |d\psi/d\xi - \tilde{\Phi}_s|$. С физической точки зрения взаимная обусловленность неравенств $\eta_e^2 \ll 1$, $\Phi_0^{-1} |\psi' - \tilde{\Phi}_s| \ll 1$ понятна, поскольку второе неравенство эквивалентно условию

$(v(\xi) - v_0)/v_0 \ll 1$. Здесь необходимо отметить, что использование переменных Лагранжа t_A и φ_0 позволяет в рамках аналогичной постановки задачи свести уравнение движения нерелятивистской частицы ($\gamma_0 \approx 1$) к уравнению маятника, не ограничивая величину η_e [12]. Однако получаемые при этом аналитические зависимости характеристик движения частиц от t_A и φ_0 нельзя непосредственно использовать для вычисления интегральных характеристик электронных приборов [15], поскольку зависимость времени

нахождения электронов на траектории от φ_0 , L , Φ_s , \mathcal{F}_p и других параметров задачи задается трансцендентным уравнением [6]. Для релятивистских частиц аналогичный результат отсутствует.

Такого рода проблемы в значительной степени снимаются при использовании в качестве независимой переменной координаты ξ , которая применяется в (I.3a), (I.3б) и (I.4). Ниже мы покажем, что их решение можно найти в явном виде, если пренебречь неоднородностью распределения поля возбуждаемой моды вдоль пространства взаимодействия, т.е. когда $f'(\xi) = \dot{1}$. Данное приближение оправдано и в тех ситуациях, когда знакопостоянная функция $f(\xi)$ имеет ярко выраженный максимум. Тогда можно выделить область эффективного взаимодействия $L_{эф}$ ($e^e \ll L_{эф}^2 \ll L^2$), в пределах которой изменением $f'(\xi)$ можно пренебречь, а вне $L_{эф}$ считать процесс взаимодействия линейным. Такая возможность подтверждается результатами численных расчетов (например, [16]). Процедура выделения $L_{эф}$ может быть основана на сопоставлении характерных размеров спектральных плотностей аппроксимирующей Π -образной функции и функции $f(\xi)$, поскольку от характерной ширины ее спектральной плотности зависит величина максимального КПД резонансных приборов 0-типа [17].

Если же неоднородность поля оказывает заметное влияние, то основываясь на изначальном предположении о медленности изменения $f(\xi)$ на периоде ЗС (см. (I)), можно учесть это обстоятельство в рамках теории адиабатических инвариантов [18]. Малым параметром тогда будет величина относительной вариации $f(\xi)$ на шаге ЗС, т.е.

$$(f'(\xi)/f(\xi)) e/L_{эф} \ll 1.$$

Конечно, при определении адиабатического инварианта необходимо учитывать те особенности, которые возникают в ситуациях, когда фазовые траектории частиц переходят через сепаратрису [19].

Аналитическое решение исходной системы уравнений для однородного распределения поля ($f(\xi) = \dot{1}$) играет ключевую роль в анализе взаимодействия электронного потока с синхронной волной, поскольку служит начальным приближением для построения алгоритма асимптотического интегрирования (I.3a), (I.3б) при $f(\xi) \neq const$. Вместе с тем такое решение позволяет непосредственно изучить характерные особенности процесса группировки пучка и отбора энергии от частиц.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ МАЯТНИКА

Рассмотрим предварительно случай, когда относительное изменение кинетической энергии частиц мало и исходное уравнение движения сводится к уравнению математического маятника (I.7) относительно фазы Ψ . Техника интегрирования этого уравнения хорошо известна [2, 12]. Поэтому ниже мы приводим соотношения, необходимые только для целостности представления полученных физических результатов.

Первый интервал уравнения (I.7) при $f(\xi) = 1$ следует из закона сохранения энергии

$$(d\Psi/d\xi)^2 = \tilde{\Phi}_s^2 \tilde{A}_0 k_0^{-2} \left[1 - k_0^2 \sin^2 \left(\frac{\Psi + \tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (\text{I.8})$$

Здесь $\tilde{A}_0 = \mathcal{F}_p / (\mathcal{F}_{tr})_0$ - амплитуда периодического потенциала \mathcal{F}_p , нормированная на величину $(\mathcal{F}_{tr})_0 = \tilde{\Phi}_s^2 \delta_0 (1 + \delta_0) / 2 \Phi_0$. Значение параметра $k_0^2 = \tilde{A}_0 \left[1 + \tilde{A}_0 \sin^2(\tilde{\varphi}/2 - \pi/4) \right]^{-1}$ полностью определяет характер движения частиц пучка. Из соотношения (I.8) следует, что для всех электронов с $k_0^2 < 1$ величина рассинхронизма на траектории $d\Psi/d\xi = \tilde{\Phi}_p \left(\frac{v_\Psi}{v(\xi)} - 1 \right)$ не изменяет знака, т.е. эти частицы, "пролетая" через периодический потенциал синхронной волны, не захватываются ею и остаются свободными. Фаза пролетных частиц Ψ вращается с переменной угловой скоростью, которая осциллирует в пределах от $(2\mathcal{F}_p \Phi_0 / \delta_0 (1 + \delta_0) k_0^2)^{1/2}$ до $(2\mathcal{F}_p \Phi_0 / \delta_0 (1 + \delta_0))^{1/2} \sqrt{1 - k_0^2} / k_0$. При $k_0^2 > 1$ значение Ψ может изменяться только в определенном интервале согласно условию

$$1 - k_0^2 \sin^2(\tilde{\varphi}/2 - \pi/4) \gg 0.$$

Физически это соответствует тому, что частицы захватываются синхронной волной и совершают фазовые колебания вблизи минимумов ее периодического потенциала. При этом текущее значение рассинхронизма $d\Psi/d\xi$ осциллирует относительно нулевого значения с амплитудой $(2\mathcal{F}_p \Phi_0 / \delta_0 (1 + \delta_0) k_0^2)^{1/2}$.

Изображающие точки электронов с начальными условиями, удовлетворяющими равенству $k_0^2(A_0, \tilde{\varphi}) = 1$, перемещаются на фазовой плоскости по сепаратрисе исходного уравнения, которая разделяет траектории пролетных ($k_0^2 < 1$) и захваченных ($k_0^2 > 1$) частиц.

Эти закономерности проиллюстрированы на рис. I.1, где показаны характерные траектории на фазовой плоскости $(d\Psi/d\xi, \tilde{\Psi})$.

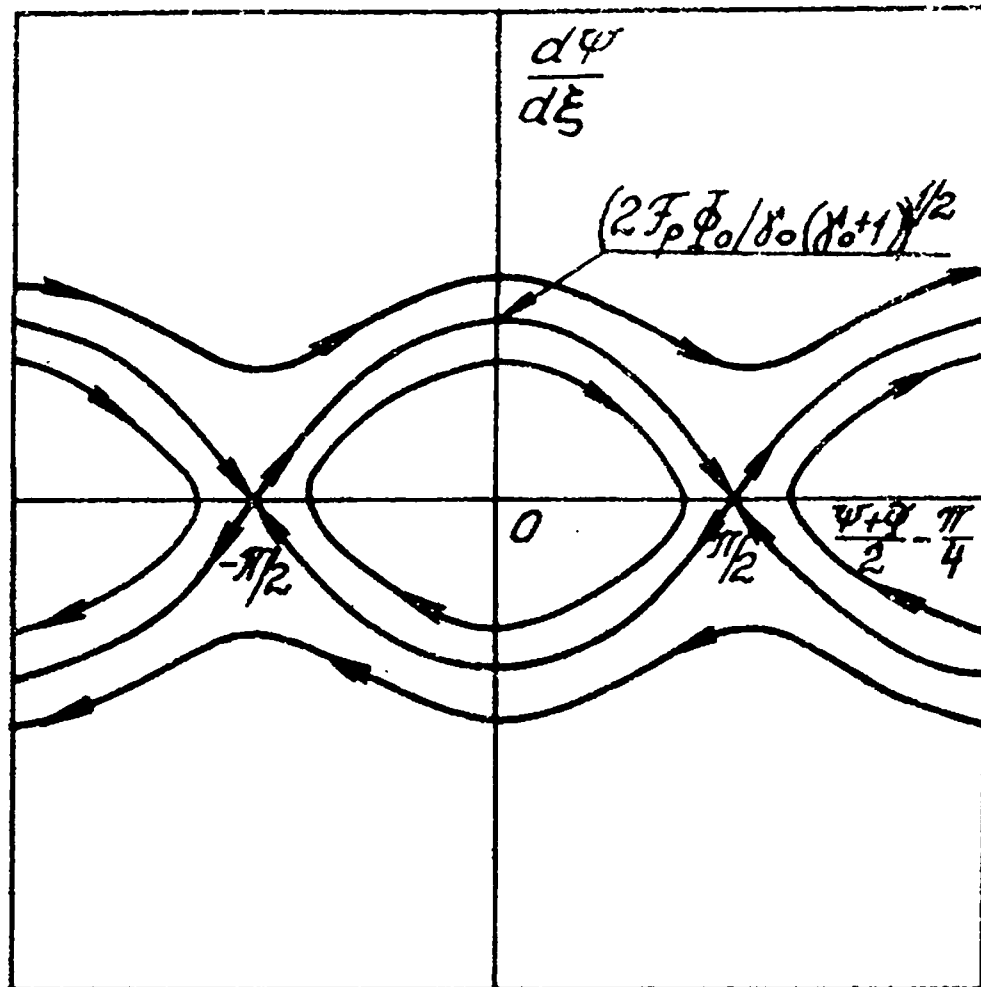


Рис. I. I. Фазовый портрет уравнения движения в приближении маятника при $f(\xi) = 1$

Жирной линией выделена сепаратриса $k_o^e = 1$.

Дополним сказанное анализом влияния предварительной модуляции параметров пучка электронов на условия их захвата. Если глубина модуляции скорости частиц $|\tilde{X}_1(\varphi_o)/\Phi_s|$ мала, то на плоскости параметров $(A_o, \tilde{\varphi}/2 - \pi/4)$ захваченным частицам соответствуют точки, лежащие выше линии

$$A_o = 1/\cos^2\left(\frac{\tilde{\varphi}(\varphi_o)}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (I.9)$$

на которой $k_o^e = 1$. Область ниже кривой (I.9) принадлежит пролетным электронам. На рис. I.2 приведена кривая (I.9) для различных уровней \tilde{X} монохроматической накачки на частоте колебаний поля в резонаторе, т.е. $\tilde{\varphi} = \varphi_o + \gamma_e + X \cos \varphi_o$. Разность фаз накачки и возбуждаемой моды γ_e полагалась для простоты кратной 2π , поскольку ее наличие приводит лишь к сдвигу кривых по оси абсцисс. Условием захвата частицы полем синхронной волны с амплитудой \mathcal{F}_p является неравенство

$$\mathcal{F}_p > (\mathcal{F}_{tr})_o (1 + \tilde{X}_1(\varphi_o)/|\Phi_s|)^2 / \cos^e(\tilde{\varphi}/2 - \pi/4), \quad (I.10)$$

где $(\mathcal{F}_{tr})_o = \Phi_s^2 \gamma_o (1 + \gamma_o) / 2 \Phi_o$ - минимальная амплитуда захвата при $\tilde{X}_1 = 0$. Поэтому из соотношения (I.9) и иллюстраций к нему следует, что предварительная группировка пучка приводит к возникновению на фазовой плоскости $d\psi/d\xi, \tilde{\psi}$ сгустка частиц, включающего электроны с различными фазами влета φ_o , но с близкими по величине значениями k_o^e , см. рис. I.2. Центр локализации частиц (см. рис. I.1) приходится на значение φ_o , удовлетворяющее уравнению $\tilde{\varphi}(\varphi_o) \approx \pi/2$ (в нашем примере $\varphi_o = \pi/2$). При оптимальных уровнях группировки ($X_{on} \approx 1 - 1,84$ и $A_o \approx 2$) в поле синхронной волны может когерентно осциллировать большая часть влетевших в пространство взаимодействия электронов. Для достижения аналогичного эффекта при несгруппированном потоке ($X = 0$) требуются значительно большие амплитуды поля ($A_o > 5$), поскольку в этом случае доля захваченных частиц определяется формулой

$$(\Delta\varphi_o)_{tr}/2\pi = 2 \arcsin \sqrt{1 - A_o^{-1}} / \pi. \quad (I.11)$$

Однако разброс соответствующих значений $k_o^e(\varphi_o)$ более существенен и частоты колебаний электронов с различными φ_o будут заметно отличаться друг от друга.

По мере роста уровня группировки пучка ($X > X_{on}$) захватываемые

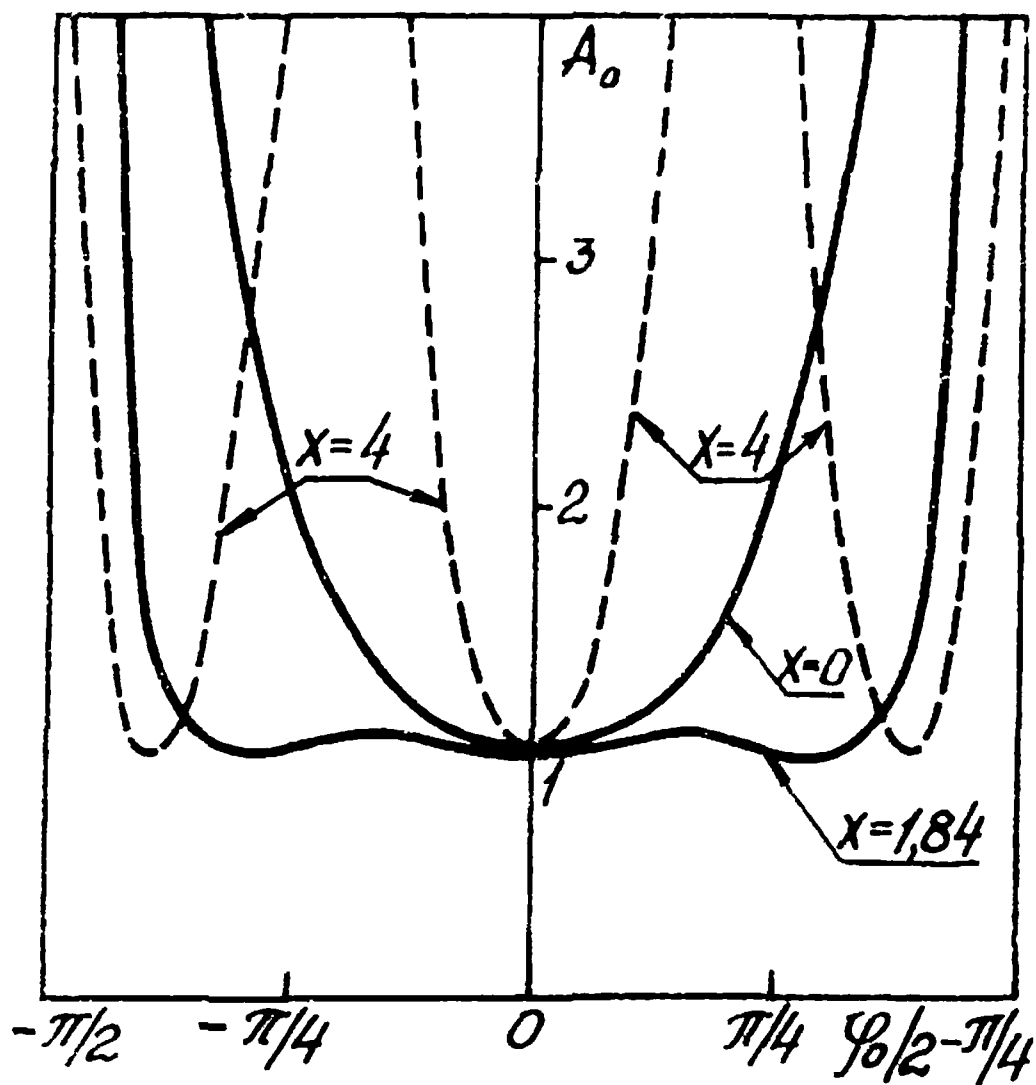


Рис. I.2. Линии уровня $k_0^2(A_0, \varphi) = 1$ на плоскости параметров $A_0 = \mathcal{F}_p / \mathcal{F}_{tr}$ и $\varphi_0/2 - \pi/4$ при $\tilde{\varphi} = \varphi_0 + X \cos \varphi_0$.

волной частицы распадаются на три совокупности некогерентно осциллирующих электронов (на рис. 1.2 пунктирная линия для $X = 4$). Отметим сходство полученных закономерностей с известными из теории клистронов [22] условиями формирования электронных сгустков. Например, известно, что в клистронах максимум первой гармоники сгруппированного тока достигается, если $X = 1,84$.

Продолжим анализ первого интеграла движения (1.8). Выпишем явное выражение для искомой фазы $\Psi(\xi, \varphi_0)$ электрона в пространстве взаимодействия. Для этого используем стандартную технику обращения второго интеграла исходного уравнения движения (1.8). В результате приходим к выражению [23]

$$F\left(\frac{\Psi + \tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4} k_0^2\right) = \frac{\tilde{\Phi}_s}{2} \sqrt{\frac{A_0}{k_0^2}} \xi + F\left(\frac{\tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (1.12)$$

где $F(\varphi, k_0^2)$ - эллиптический интеграл первого рода. В зависимости от величины модуля k_0^2 формулы (1.12), (1.13а), (1.13в) трансформируются следующим образом:

а) для $k_0^2 < 1$ (пролетные частицы)

$$\text{SIN}\left(\frac{\Psi + \tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sn}\left[\frac{\tilde{\Phi}_s}{2} \sqrt{\frac{A_0}{k_0^2}} \xi + F\left(\frac{\tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4}\right), k_0^2\right],$$

откуда

$$\Psi = \frac{\pi}{2} - \tilde{\varphi} + 2 \text{am}\left[0,5 \frac{\tilde{\Phi}_s}{2} \sqrt{\frac{A_0}{k_0^2}} \xi + F\left(\frac{\tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4}\right), k_0^2\right]; \quad (1.13а)$$

б) для $k_0^2 > 1$ (захваченные частицы)

$$\text{SIN}\left(\frac{\Psi + \tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = k_0^{-1} \text{sn}\left[0,5 \frac{\tilde{\Phi}_s}{2} \sqrt{A_0} \xi + F\left(\arcsin \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{A_0}}, k_0^{-2}\right), k_0^{-2}\right]$$

$$\text{или } \Psi = \frac{\pi}{2} - \tilde{\varphi} + 2 \arcsin \left[k_0^{-1} \text{sn}\left[0,5 \frac{\tilde{\Phi}_s}{2} \sqrt{A_0} \xi + F\left(\arcsin \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{A_0}}, k_0^{-2}\right), k_0^{-2}\right] \right]; \quad (1.13б)$$

в) для $k_0^2 = 1$ (движение по сепаратрисе)

$$\text{SIN}\left(\frac{\Psi + \tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{th}\left[0,5 \frac{\tilde{\Phi}_s}{2} \sqrt{A_0} \xi + \lambda\left(\frac{\tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]; \quad (1.13в)$$

т.е.

$$\Psi = \frac{\pi}{2} - \tilde{\varphi} + 2 \arcsin \text{th}\left[0,5 \frac{\tilde{\Phi}_s}{2} \sqrt{A_0} \xi + \lambda\left(\frac{\tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Здесь $\text{am}(x, k_0^2)$ и $\text{sn}(x, k_0^2)$ - эллиптические функции Якоби (амплитуда и синус); $\lambda(x) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right]$ - лямбда функция. Индексами f , t и s выделены величины, соответ-

вующие пролетным *free* и захваченным *trapped* частицам, а также электронам, попавшим на сепаратрису *separatrix*. Непосредственно из (I.5) и (I.13a), (I.13б), (I.13в) следуют формулы для величины относительного изменения энергии частиц на траектории соответственно для каждого из указанных характерных случаев:

$$(\eta_e)_f \approx \gamma_0(\gamma_0+1) \left(\frac{-\tilde{\Phi}_s}{\tilde{\Phi}_0} \right) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{A_0}{k_0^2}} \operatorname{dn} \left[\frac{\tilde{\Phi}_s}{2} \sqrt{\frac{A_0}{k_0^2}} \xi + F \left(\frac{\tilde{\varphi}_s}{2} - \frac{\pi}{4}, k_0^2 \right), k_0^2 \right] \right\}, \quad (I.14a)$$

$$(\eta_e)_t \approx \gamma_0(1+\gamma_0) \left(\frac{-\tilde{\Phi}_s}{\tilde{\Phi}_0} \right) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{A_0}{k_0^2}} \operatorname{cn} \left[\frac{\tilde{\Phi}_s}{2} \sqrt{A_0} \xi + F(\operatorname{arcsin} \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{A_0}}, k_0^{-2}), k_0^{-2} \right] \right\}, \quad (I.14б)$$

$$(\eta_e)_s \approx \gamma_0(1+\gamma_0) \left(\frac{-\tilde{\Phi}_s}{\tilde{\Phi}_0} \right) \left\{ 1 - \sqrt{A_0} \operatorname{ch}^{-1} \left[\frac{\tilde{\Phi}_s}{2} \sqrt{A_0} \xi + \lambda \left(\frac{\tilde{\varphi}_s}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}, \quad (I.14в)$$

где $\operatorname{dn}(x, k^2)$ и $\operatorname{cn}(x, k^2)$ - эллиптические функции дельта амплитуды и косинус. Заметим, что свойства эллиптических функций и интегралов позволяют осуществлять непрерывное "сшивание" в окрестности сепаратрисы формул (I.13a), (I.13б), (I.13в) и (I.14a), (I.14б), (I.14в) для пролетных и захваченных частиц.

Совместный анализ фазового портрета рис. I.1 и соотношений (I.14a), (I.14б) и (I.14в) позволяет оценить предельное уменьшение энергии частиц и соответствующее значение электронного КПД. Примем во внимание то, что наибольшие изменения претерпевает энергия тех частиц, участок фазовой траектории которых начинается в окрестности $\tilde{\Psi}/\xi = 0$ (т.е. при $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$) и заканчивается через $n + \frac{1}{2}$ колебательных или вращательных циклов. Поскольку в этом случае $k_0^2 \approx A_0$, тогда минимумы стоящих в (I.14a), (I.14б), (I.14в) эллиптических функций реализуются, если

$$\xi = 4 \left(n + \frac{1}{2} \right) K(A_0) / |\tilde{\Phi}_s| \quad \text{при } k_0^2 \leq 1; \quad (I.15a)$$

$$\xi = 8 \left(n + \frac{1}{2} \right) K(A_0^{-1}) / \sqrt{A_0} |\tilde{\Phi}_s| \quad \text{при } k_0^2 > 1, \quad (I.15б)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Полагая, что все эти условия удовлетворены, получим

$$(\eta_e)_{\max} \approx \gamma_0(1+\gamma_0) \left(\frac{-\tilde{\Phi}_s}{\tilde{\Phi}_0} \right) (1 - \sqrt{1 - A_0}) \quad \text{для } A_0^2 \leq 1; \quad (I.16a)$$

$$(\eta_e)_{\max} \approx 2\gamma_0 (1 + \gamma_0) (-\tilde{\Phi}_s / \Phi_0), \quad \text{для } A_0 > 1. \quad (\text{I.166})$$

В предельном случае $\gamma_0 \approx 1$ формула (I.166) переходит в известные соотношения для максимальных значений КПД нерелятивистских резонансных генераторов и усилителей с распределенным взаимодействием 0-типа [6,15].

Применим (I.5) для оценки некоторых характеристик резонансных приборов с распределенным взаимодействием - усилителей и генераторов. Так, для линейного режима усиления слабых сигналов и на начальном этапе самовозбуждения генераторов, когда $A_0 \ll 1$, формула (I.15a) дает нам оценку величины оптимальной длины пространства взаимодействия

$$L_{оп} \approx \pi L / |\tilde{\Phi}_s| = \pi v_0 / \omega |1 - v_0 / v_\varphi|, \quad (\text{I.17})$$

совпадающую с полученными ранее в [12].

Следующий пример непосредственно относится к усилителям мощности. Известно, что для рассматриваемого класса устройств наиболее эффективными конструкциями являются многорезонаторные системы с предварительной группировкой пучка внешним сигналом [24].

При оптимальном уровне группировки электронного потока для большинства частиц имеем $k_0^2 \approx A_0$ (например, рис. I.2 при

$X = 1,84$). Тогда в нелинейном режиме работы такого прибора ($A_0 > 1$) происходит захват предварительно сформированного сгустка электронов. Наиболее полный отбор его энергии на длине пространства взаимодействия реализуется, если

$$L_{оп} \approx 2(n + 1/2) \lambda_3 v_\varphi / \sqrt{A_0} v_0' \quad (\text{I.18})$$

или $(\mathcal{F}_p \Phi_0)_{оп} \approx 8 (1/2 + n)^2 \pi^2 \gamma_0 (1 + \gamma_0)$,

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

При выводе (I.18) мы полагали $K(A_0^{-1}) \approx \pi/2 (1 + A_0^{-1})/4$ и учли, что

$$(\eta_e)_{\max}^2 \approx 4\gamma_0^2 (1 + \gamma_0)^2 \tilde{\Phi}_s^2 / \Phi_0^2 \ll 1.$$

В заключение данного раздела сформулируем критерий применимости маятникового приближения при решении уравнения движения. Будем рассматривать только захваченные частицы, поскольку для них достигается максимально возможное изменение энергии $(\eta_e)_{\max}$.

Подставим в условие захвата частицы

$$\mathcal{F}_p > \gamma_0 (1 + \gamma_0) \tilde{\Phi}_s^2 / 2\Phi_0$$

оптимальное значение амплитуды, полученное из соотношения (I.18). В результате находим ограничение сверху на оптимальную величину параметра $\tilde{\Phi}_s$

$$|\tilde{\Phi}_s| < 2\pi.$$

Тогда из неравенства $\eta_e^2 \ll 1$ следует искомый критерий

$$\tilde{\Phi}_s^2 \gg 16\pi^2 \gamma_0^2 (1 + \gamma_0)^2 \text{ или } (L/\lambda_3)^2 \gg 4(\gamma_0^2 - 1)(\gamma_0 + 1)^2 / \beta_{oc}^2, \quad (I.19)$$

где λ_3 - длина волны синхронной гармоники ЗС, $\beta_{oc} = v_0/c$. Например, для релятивистских приборов маятниковое приближение выполняется, если $(L/\lambda_3)^2 \gg 8$. В случае ультрарелятивистских скоростей электронных потоков ($\gamma_0^2 \gg 1$) в соответствии с (I.19) оптимальная длина пространства взаимодействия возрастает с увеличением энергии частиц по закону (см. также [11])

$$L \sim \lambda_3 \gamma_0^2. \quad (I.20)$$

Суммируя вышесказанное, можно заключить, что описание в рамках маятникового приближения характеристик движения электрона как функций его пространственной координаты является вполне обоснованным для широкого круга резонансных приборов 0-типа.

3. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Поскольку гамильтониан $H_p(d\Psi/d\xi, \Psi)$ на траектории движения электрона при $f(\xi) = 1$ сохраняется, то первый интеграл уравнений движения (I.3а), (I.3б) можно записать в виде

$$H_p(d\Psi/d\xi, \Psi) = (H_p)_0, \quad (I.21)$$

где $(H_p)_0$ - начальное значение гамильтониана в точке $\xi = 0$. Выделим из (I.21) явную форму взаимосвязи фазовых переменных $d\Psi/d\xi$ и Ψ :

$$d\Psi/d\xi = \Phi_p (1 - \beta_{pc}^2) \text{sign} \tilde{\Phi}_s \frac{2E}{\beta_{pc} k_p} \Delta(\Psi, k_p^2) \left\{ \frac{\sqrt{1 + \frac{2E^2}{k_p^2} \Delta^2}}{\sqrt{1 + \frac{E^2}{k_p^2} \Delta^2}} - \text{sign} \tilde{\Phi}_s \frac{2E}{\beta_{pc} k_p} \Delta \right\}. \quad (I.22)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\Delta(\Psi, k_p^2) = \pm \sqrt{1 - k_p^2 \sin^2 \left(\frac{\Psi + \tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4} \right)};$$

$$k_p^2 = A_p / (1 + A_p \sin^2(\tilde{\varphi}/2 - \pi/4));$$

$$A_p = \mathcal{F}_p / \mathcal{F}_{\text{ex}}; \quad \mathcal{F}_{\text{ex}} = \Phi_\varphi \gamma_\varphi^{-1} (\gamma_0' - 1) / (\gamma_0 - 1) \quad - \text{минимальная}$$

амплитуда захвата;

$\gamma_0' = (1 - (v_0'/c)^2)^{-1/2}$ - начальный релятивистский фактор в системе координат синхронной волны;

$$\epsilon^2 = \frac{e C \chi L \gamma_\varphi}{2 m_0 c^2} / \Phi_\varphi = \mathcal{F}_p (\gamma_0 - 1) \gamma_\varphi / 2 \Phi_\varphi = \frac{e C \chi \lambda_{3p}}{2} / m_0 c^2 -$$

параметр, определяющий отношение максимально возможного изменения энергии частицы на периоде ЗС ($\lambda_{3p} = \lambda_3 / 2\pi \sqrt{1 - \beta_{\varphi e}^2} = \gamma_\varphi L / \Phi_\varphi$) к энергии покоя электрона $m_0 c^2 \approx 0,511$ МэВ.

Введем также параметр

$$G_p = |v_0'/v_\varphi| \sqrt{2(\gamma_0')^2 / (1 + \gamma_0')} = \sqrt{\frac{2(\gamma_0')^2}{1 + \gamma_0'}} \left| (1 + \gamma_\varphi^2 \Phi_s / \Phi_\varphi)^{-1} - 1 \right|, \quad (I.23)$$

тогда $2\epsilon / k_p \beta_{\varphi c} = G_p \sqrt{A_p / k_p^2}$ и $\epsilon^2 = \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p / 4$.

Физическое содержание G_p мы раскроем ниже, хотя уже из нерелятивистского предела ($\beta_{\varphi c} \rightarrow 0$) $G_p = |\Phi_s| / \Phi_0$ очевидна взаимосвязь G_p и максимальных электронных КПД (I.16a), (I.16б).

Здесь, как и в предыдущем случае, в зависимости от величины параметра k_p^2 частицы делятся на пролетные ($k_p^2 < 1$) и захваченные ($k_p^2 > 1$), которым соответствует вращательное и колебательное изменение фазы Ψ . В последнем случае амплитуда осцилляций Ψ равна $2 \arcsin(1/k_p^2)$. Изображающая точка электронов с $k_p^2 = 1$ движется по сепаратрисе уравнения из начального положения к седловой особой точке с координатами $\Psi = \pm \pi$ и $d\Psi/d\xi = 0$. На такой траектории фаза Ψ и ее производная $d\Psi/d\xi$ изменяются монотонно.

Вторые интегралы движения частиц с различными типами фазовых траекторий находятся из (I.22). Для пролетных частиц формула (I.22) остается без изменения, т.к. Ψ может принимать любые значения, а величина $\Delta > 0$. Поэтому второй интеграл для пролетных частиц формулируется следующим образом:

$$\left[(1 + \gamma_\varphi^2 \Phi_s / \Phi_\varphi) \sqrt{2(1 + \gamma_0')} / \Phi_s \gamma_0' \sqrt{A_p / k_p^2} \right] \left[2(1 + n^2 / k^2) \Pi(-n^2, \varkappa / k^2) - F(\varkappa, k^2) \right] - 2\tilde{\Psi} \gamma_\varphi^2 / \Phi_\varphi = V(\xi, \tilde{\varphi}(\varphi_0)), \quad (I.24a)$$

где $F(x, k^2) = \int_0^x (1 - k^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt$ - неполный эллиптический интеграл первого рода;

$\Pi(n^2, x \setminus k^2) = \int_0^x (1 - n^2 \sin^2 t)^{-1} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt$ - неполный эллиптический интеграл третьего рода;

$$k^2 = k_p^2 / [1 + \varepsilon^2 (1 - k_p^2) / k_p^2]; \quad n^2 = \varepsilon^2 k^2 / k_p^2; \quad k_{pn}^2 = \varepsilon^2 / (1 + n^2 / \varepsilon^2);$$

$$x = \arcsin \left[(1 - k_{pn}^2) \sin^2 \tilde{\psi} / (1 - k_{pn}^2 \sin^2 \tilde{\psi}) \right]^{1/2}; \quad \tilde{\psi} = \frac{\psi + \tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4};$$

$$V(\xi, \tilde{\varphi}) = \xi - (\tilde{\varphi} - \pi/2) \gamma_\varphi^2 / \Phi_\varphi + \left[(1 + \gamma_\varphi^2 \Phi_s / \Phi_\varphi) \sqrt{1 + \gamma_0'} / \gamma_0' \Phi_s \sqrt{A_p / k_p^2} \right] \times \\ \times \left[2(1 - n^2 / k^2) \Pi(-n^2, x_0 \setminus k^2) - F(x_0, k^2) \right];$$

$$x_0 = x|_{\xi=0}.$$

Можно показать, что $k^2 = 1$ только при $k_p^2 = 1$, причем всегда $k_{pn}^2 < k_p^2$.

Фазовые траектории захваченных частиц представляют собой замкнутые кривые на фазовой плоскости $(\tilde{\psi}, d\tilde{\psi}/d\xi)$. Поэтому удобно ввести угловую координату изображающей точки

$$x_t = \arcsin \left[k_p \sin \tilde{\psi} / \sqrt{(1 + n_t^2)(1 - k_{pn}^2 \sin^2 \tilde{\psi})} \right],$$

относительно которой второй интеграл движения может быть представлен в таком виде:

$$\left[(1 + \gamma_\varphi^2 \Phi_s / \Phi_\varphi) \sqrt{2(1 + \gamma_0')} / \gamma_0' \Phi_s \sqrt{A_p} \right] \left[2(1 + n_t^2) \Pi(-n_t^2, x_t \setminus k_t^2) - \right. \\ \left. - F(x_t, k_t^2) \right] - 2 \arcsin \left[k_p^{-1} \sqrt{1 + n_t^2} \sin x_t / \sqrt{1 + n_t^2 \sin^2 x_t} \right] \times \\ \times \gamma_\varphi^2 / \Phi_\varphi = U(\xi, \tilde{\varphi}). \quad (I.246)$$

Здесь $k_t^2 = k_p^2 [1 - \varepsilon^2 (1 - k_p^2)] < 1$; $n_t^2 = \varepsilon^2 / k_p^2$;

$$U(\xi, \tilde{\varphi}) = \xi - \gamma_\varphi^2 (\tilde{\varphi} - \pi/2) / \Phi_\varphi + \left[(1 + \gamma_\varphi^2 \Phi_s / \Phi_\varphi) \sqrt{2(1 + \gamma_0')} / \gamma_0' \Phi_s \sqrt{A_p} \right] \times \\ \times \left[2(1 + n_t^2) \Pi(-n_t^2, x_{t_0} \setminus k_t^2) - F(x_{t_0}, k_t^2) \right]; \\ x_{t_0} = \arcsin \left(\sqrt{2 / (1 + \gamma_0')} k_p \sin(\tilde{\varphi}/2 - \pi/4) \right).$$

Можно показать, что при соблюдении критерия (I.19) параметр $k_p^2(A_p, \tilde{\varphi})$ совпадает с введенным для маятникового приближения модулем $k_0^2(A_p, \tilde{\varphi})$. При этом точные формулы для первого (I.22) и второго (I.24a), (I.24б) интегралов аппроксимируются приближенными соотношениями (I.8) и (I.12) соответственно. Отбрасываемые при этом слагаемые имеют величину порядка $G_p^2 \sim \varepsilon^2$. Это влечет за собой потерю не только количественной, но и качественной информации. Наиболее наглядно это проявляется при анализе фазовых траекторий, построенных на плоскости $d\Psi/d\xi, \tilde{\psi}$ по формуле (I.22) (рис. I.3). В отличие от фазового портрета, полученного в маятниковом приближении (см. рис. I.1), здесь четко прослеживается асимметрия фазовых траекторий относительно оси $(0, \tilde{\psi})$. Отличие фазовых кривых в полуплоскостях $d\Psi/d\xi > 0$ и $d\Psi/d\xi < 0$ становится все больше с ростом параметра $2\varepsilon/\beta_{\varphi c} \sim G_p \sqrt{\mathcal{F}_p}$.

Это же можно проследить на примере уравнения для сепаратри-

$$\left(\frac{d\Psi}{d\xi}\right)_s = -\gamma_\varphi^{-2} \Phi_\varphi \frac{2\varepsilon}{\beta_{\varphi c}} \cos \tilde{\psi} \left/ \left[\frac{1+2\varepsilon^2 \cos^2 \tilde{\psi}}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos^2 \tilde{\psi}}} + \frac{2\varepsilon}{\beta_{\varphi c}} \cos \tilde{\psi} \right] \right., \quad (I.25)$$

$$\text{где } \gamma_\varphi^{-2} \Phi_\varphi \frac{2\varepsilon}{\beta_{\varphi c}} = \left[2(\gamma_0 - 1) \Phi_\varphi \mathcal{F}_p / \gamma_\varphi (\gamma_\varphi^2 - 1) \right]^{1/2};$$

$$\gamma_\varphi = (1 - \beta_{\varphi c}^2)^{-1/2}.$$

Определим точки экстремумов $(d\Psi/d\xi)_s$ в обеих полуплоскостях фазового пространства

$$\left(\frac{d\Psi}{d\xi}\right)_s = \mp \gamma_\varphi^{-2} \Phi_\varphi \frac{2\varepsilon}{\beta_{\varphi c}} \left/ \left(\frac{1+2\varepsilon^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \pm \frac{2\varepsilon}{\beta_{\varphi c}} \right) \right.,$$

в результате находим характерную ширину резонанса пучка с изолированной синхронной волной

$$\delta \left(\frac{d\Psi}{d\xi}\right)_s = 2\gamma_\varphi^{-2} \Phi_\varphi \left(\frac{2\varepsilon \sqrt{1+\varepsilon^2}}{\beta_{\varphi c} (1+2\varepsilon^2)} \right) \left/ \left(1 - \frac{4\varepsilon^2 (1+\varepsilon^2)}{\beta_{\varphi c}^2 (1+2\varepsilon^2)^2} \right) \right. \quad (I.26)$$

Соотношения (I.25) и (I.26) значительно упрощаются, если считать, что максимально возможное изменение кинетической энергии электрона на периоде ЗС много меньше его энергии покоя (т.е. $\varepsilon^2 \ll 1$). При этом, вообще говоря, пренебрегать величиной комбинации $4\varepsilon^2/\beta_{\varphi c}^2$ нельзя. С учетом этого преобразуем (I.26)

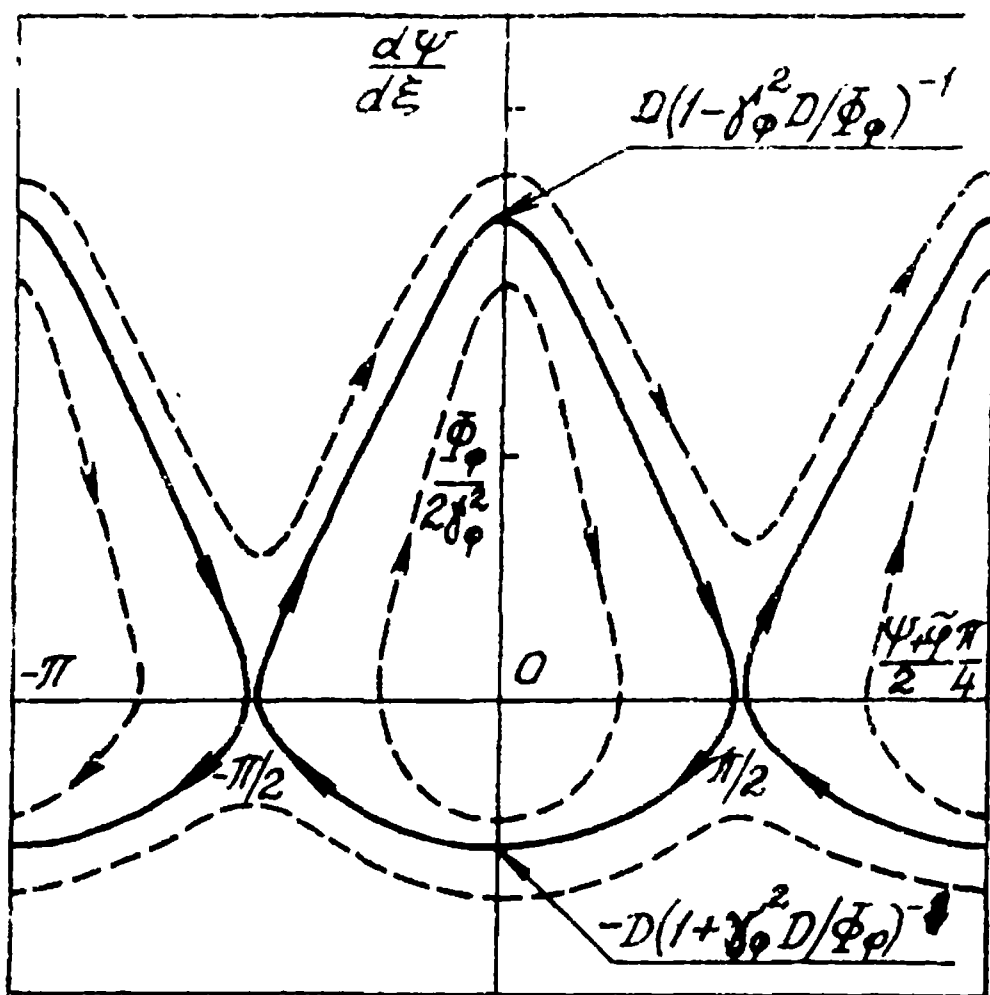


Рис. 1.3. Фазовый портрет уравнения движения при...

$$f(\xi) = 1 \text{ и } v_0'/v_\phi \approx 0,5 \left(D = \left[\frac{2\delta_\phi^2 v_0^2}{\delta_\phi^3 v_\phi^2 (1+\delta_\phi)} \frac{\dot{\Phi}_\phi}{\Phi_\phi} \right]^{1/2} \right)$$

к следующему виду:

$$\delta \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_s \approx 2 \sqrt{\frac{2(\gamma_0 - 1)}{\gamma_\varphi(\gamma_\varphi^2 - 1)} \Phi_\varphi \mathcal{F}_p} \left\{ 1 - \gamma_\varphi^2 \frac{2(\gamma_0 - 1)}{\gamma_\varphi(\gamma_\varphi^2 - 1)} \Phi_\varphi \mathcal{F}_p / \Phi_\varphi^2 \right\}. \quad (I.27)$$

Если параметры системы пучок-волна удовлетворяют критерию (I.19), то $\gamma_0 \approx \gamma_\varphi$, $\Phi_\varphi \approx \Phi_0$, $\mathcal{F}_p \ll \Phi_\varphi$ и соотношения (I.25) - (I.27) переходят в известные результаты приближения маятника.

Обратим внимание на еще одну особенность, следующую из формулы (I.22). Возможна такая ситуация, когда в соответствии с (I.22) $d\psi/d\xi \rightarrow +\infty$, т.е. $v(\xi) = v_\varphi (1 + \Phi_\varphi^{-1} d\psi/d\xi)^{-1} \rightarrow 0$ и происходит полная остановка частицы. Для этого необходимо выполнение условия

$$\text{sign } \tilde{\Phi}_s G_p \sqrt{\frac{A_p}{k_p^2}} \Delta \frac{\sqrt{1 - \frac{\beta_{\varphi c}^2}{4} G_p^2 \Delta^2 A_p^2 / k_p^2}}{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p \Delta^2 / 2k_p^2} = 1. \quad (I.28)$$

Понятно, что в рассматриваемой области параметров

$d\psi/d\xi \geq -\Phi_\varphi (1 - \beta_{\varphi c})$ оно может удовлетворяться в двух случаях: а) при $k_p^2 \leq 1$, если $\tilde{\Phi}_s > 0$ (т.е. $v_0 < v_\varphi$) и $\Delta(\psi, k_p^2)$ - знакопостоянная функция;

б) при $k_p^2 > 1$, если $|\tilde{\Phi}_s| > 0$, когда Δ меняет знак в силу колебательного характера движения захваченных частиц.

Поскольку нас интересует случай $\tilde{\Phi}_s < 0$, то полагаем далее, что $k_p^2 > 1$. Из равенства (I.28) получаем критическое значение величины $G_p^2 \Delta^2 A_p / k_p^2$:

$$(G_p^2 \Delta^2 A_p / k_p^2)_{\text{крит}} = 2(\gamma_\varphi - 1) / \beta_{\varphi c}^2 \quad (I.29)$$

или

$$\mathcal{E}_{\text{крит}}^2 = k_p^2 (\gamma_\varphi - 1) / 2 \Delta^2.$$

В силу соотношений $A_p / k_p^2 \geq 1$ и $(\Delta^2(\psi, k_p^2))_{\text{max}} = 1$,

$$(G_p)_{\text{крит}} = \sqrt{2} (\gamma_\varphi - 1)^{1/2} / \beta_{\varphi c} \quad (I.30)$$

или

$$(\mathcal{E}^2)_{\text{крит}} = (\gamma_\varphi - 1) / 2.$$

При таких значениях параметров электроны, имеющие начальную фазу $\tilde{\varphi}(\varphi_0, X) = \pi/2$ и захваченные полем синхронной волны с

амплитудой

$$(\mathcal{F}_p)_{\text{конт}} \approx \mathcal{F}_p \Big|_{v'_0 = v_p} = \Phi_p \delta_0 (\gamma_p - 1) / \gamma_p^2 (\delta_0 - 1), \quad (1.31)$$

могут оставаться при набеге фазы Ψ , равном π . В этом легко убедиться, подставив параметры, удовлетворяющие (1.28) – (1.31), в формулы для скорости электронов на траектории

$$v(\xi)/v_p = 1 - \text{sign} \Phi_s \cdot \mathcal{F}_p \sqrt{\frac{A_p}{k_p^2}} \Delta \frac{\sqrt{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p \Delta^2 / 4k_p^2}}{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p \Delta^2 / 2k_p^2} \Big/ \left[1 - \beta_{\varphi c}^2 \text{sign} \Phi_s G_p \sqrt{\frac{A_p}{k_p^2}} \Delta \frac{\sqrt{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p \Delta^2 / 4k_p^2}}{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p \Delta^2 / 2k_p^2} \right] \quad (1.32)$$

и соответствующего ей релятивистского фактора

$$\gamma(\xi) = \gamma_p \left[1 - \beta_{\varphi c}^2 \text{sign} \Phi_s G_p \sqrt{\frac{A_p}{k_p^2}} \Delta \frac{\sqrt{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p \Delta^2 / 4k_p^2}}{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p \Delta^2 / 2k_p^2} \right] \Big/ \left[1 - \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 (A_p/k_p^2) \Delta^2 (1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p \Delta^2 / 4k_p^2) / (1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p \Delta^2 / 2k_p^2)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.33)$$

которые непосредственно следуют из (1.22).

Численное интегрирование уравнения движения (1.4) показывает, что при соответствующем выборе параметров пучка и волны аналогичное явление наблюдается и в случае неоднородного распределения $f(\xi)$ поля. В качестве примера на рис. 1.4 представлена проекция на плоскость $(d\Psi/d\xi, (\Psi + \tilde{\varphi})/2 - \pi/4)$ фазовой траектории нерелятивистского электрона ($\beta_{\varphi c} = 0,01$) с $\tilde{\varphi} = 0,457\pi$, который взаимодействует с медленной гармоникой поля открытого резонатора при $f(\xi) = (\omega\sqrt{\pi/2})^{-1/2} \exp((\xi - 0,5)/\omega)^2$, $\omega = 0,25$;

$\Phi_p = 6\pi$; $\Phi_s = -2\pi$; $\mathcal{F}_p = 2,327$. Видно, что величина $d\Psi/d\xi$ на траектории изменяется от -2π до 54π соответственно, скорость частицы приобретает значения $v_{\text{MAX}} = 1,5 v_p$ и $v_{\text{MIN}} = 0,1 v_p$ а величина КЭЭ электрона имеет максимум $(\eta_e)_{\text{MAX}} = 0,9956$.

Необходимо отметить, что в нерелятивистском пределе соотношение (1.28) совпадает с аналогичными оценками, полученными в [12] на основании другой математической модели. Там же отмечалось, что для реальных нерелятивистских приборов подобные условия трудно выполнимы. Аналогичный вывод следует и из наших расчетов, учитывающих релятивистские эффекты.

Обозначим еще одну причину, по которой формулы (1.28) – (1.31) по отношению к реальной ситуации носят лишь оценочный характер. Дело в том, что эти соотношения получены в приближении

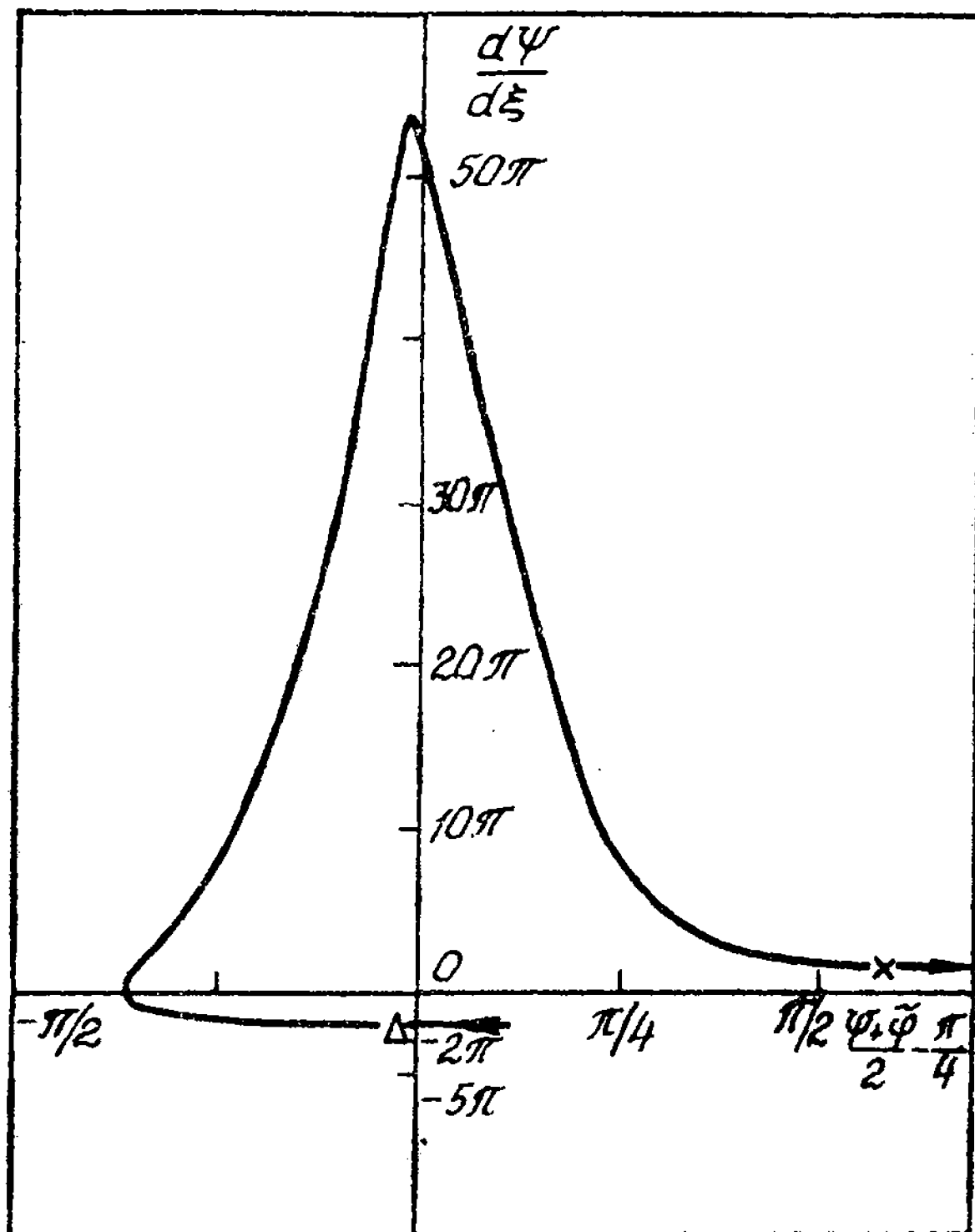


Рис. I.4. Фазовая траектория электрона с $\tilde{\varphi} = 0,457\pi$
 при $f(\xi) = (\sqrt{\pi/2} \omega)^{-1/2} \exp(-(\xi - 0,5)^2/\omega^2)$, $\beta_{\varphi c} = 0,01$,
 $\mathcal{F}_p = 2,3$, $\varphi_\varphi = 6\pi$, $\varphi_s = -2\pi$, $\omega = 0,25$

одноволновой модели, не принимающей во внимание наличие других пространственных гармоник ЭС, например, 2-й гармоники с $U_{\varphi 2} = U_{\varphi}/2$. Исходя из известных результатов [21, 25], можно утверждать следующее. По мере приближения скорости $v(\xi)$ замедляемого электрона к $v_{\varphi}/2$ при конечной амплитуде 2-й гармоники динамика частицы претерпевает существенные изменения - она может совершать хаотические движения в окрестности сепаратрисы. Данное обстоятельство накладывает дополнительные ограничения снизу на скорость захваченного электрона на траектории, которая в рамках одноволнового приближения не может быть меньше $v_{\varphi}/2$. Это условие можно сформулировать в виде следующего неравенства

$$d\psi/d\xi \leq \Phi_{\varphi} \quad (1.34)$$

Далее необходимо учитывать асимметрию фазовых траекторий захваченных частиц. Поэтому при $\Delta(\psi, k_p^2 > 1) = -1$ и $\Phi_s < 0$ минимальное значение $v(\xi)/v_{\varphi}$ следующее:

$$(v(\xi)/v_{\varphi})_{\min} = 1 - \gamma_{\varphi}^{-2} G_p \sqrt{\frac{A_p}{k_p^2}} \frac{\sqrt{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p / 4k_p^2}}{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p / 2k_p^2} \left[1 - \right. \quad (1.35)$$

$$\left. - \beta_{\varphi c}^2 G_p \sqrt{A_p/k_p^2} \sqrt{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p / 4k_p^2} / (1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2 A_p / 2k_p^2) \right].$$

Поскольку величины отношения $A_p/k_p^2 \geq 1$, то из условия

$v(\xi)/v_{\varphi} \geq 0,5$ следует ограничение сверху на параметр

$$G_p \leq (G_p)_{\max} = \left[\sqrt{1 + 16\beta_{\varphi c}^2 / (1 - \beta_{\varphi c}^2)(4 - \beta_{\varphi c}^2)} - 1 \right]^{1/2} / 2\sqrt{2}\beta_{\varphi c} \quad (1.36)$$

Отсюда для электронов с $\tilde{\varphi} = \pi/2$ получаем условия:

$$\Phi_s \geq (\Phi_s)_{\min} = -\Phi_{\varphi} / \gamma_{\varphi}^2 (3 - \beta_{\varphi c}^2),$$

$$v_0/v_{\varphi} \leq (3 - \beta_{\varphi c}^2) / 2, \quad (1.37)$$

$$(v_0'/v_{\varphi}) \leq 1 / (2 - \beta_{\varphi c}^2),$$

достаточные для удовлетворения требования (1.34) при любых \mathcal{F}_p . Вместе с тем для захваченных электронов с $\tilde{\varphi} \neq \pi/2$ может выполняться условие $v(\xi) \leq v_{\varphi}/2$, если

$$\mathcal{F}_p > \mathcal{F}_{tr} \Big|_{v_0' = v_{\varphi}/(2 - \beta_{\varphi c}^2)} = \Phi_{\varphi} (1 + \gamma_{\varphi}^2 - \sqrt{1 + 3\gamma_{\varphi}^2}) / \gamma_{\varphi} (2\gamma_{\varphi}^3 - \sqrt{1 + 3\gamma_{\varphi}^2})$$

Однако, поскольку фазовые траектории этих электронов находятся

в окрестности сепаратрисы, то период их фазовых колебаний заметно превышает период колебаний частиц с $\tilde{\varphi} \approx \pi/2$. Поэтому, если минимальную эффективную длину пространства взаимодействия $L_{эф}$ выбирать исходя из оптимальных условий для электронов с $\tilde{\varphi} \approx \pi/2$, то ограничение (I.34) будет соблюдено в пределах $L_{эф}$ для всех электронов. В данном случае оптимальная длина пространства взаимодействия соответствует половине периода фазовых колебаний захваченной частицы с $\tilde{\varphi} = \pi/2$. При этом оценить максимальное изменение ее энергии можно по формулам:

$$(\eta_e)_{max} = 2(\delta_0 + 1)\delta_0 \left(-\Phi_s/\Phi_0\right) v_\varphi^2 \delta_\varphi^2 / v_0^2 \delta_0^2, \quad (I.38a)$$

$$(\eta_e)_{max} = 4G_p \sqrt{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2/4} / \left[2 \frac{1 - \delta_\varphi^{-1}}{\beta_{\varphi c}^2} + G_p (G_p + 2\sqrt{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2/4}) \right]. \quad (I.38b)$$

Последнее соотношение следует из (I.38a), если воспользоваться эквивалентностью величин δ_0 и $\delta_\varphi (1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p (G_p + 2\sqrt{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_p^2/4})/2)$.

4. ДВИЖЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ОДНОРОДНОЙ СИНХРОННОЙ ВОЛНЫ

Для построения решения исходного уравнения движения (I.4) при $f(\xi) = 1$ за основу примем результаты анализа динамики релятивистского электрона на фазовой плоскости $(d\Psi/d\xi, \tilde{\Psi})$, а именно тот факт, что общим признаком для колебательного и вращательного законов изменения фазы электрона Ψ является цикличность вариаций его скорости на траектории, т.е. периодичность производной $d\Psi/d\xi$ *. Поэтому наиболее удобный вариант интегрирования исходного дифференциального уравнения заключается в разложении производных $d\Psi/d\xi$ для каждого типа траекторий в ряды Фурье, откуда в результате почленного интегрирования можно получить Фурье-представления фазы Ψ . Основные проблемы при таком способе построения искомых зависимостей связаны с опреде-

*Апериодический закон изменения Ψ мы не рассматриваем, поскольку здесь вероятность попадания частицы на сепаратрису равна 0.

лением коэффициентов разложения и периода колебаний. Однако, если нам известны первые два интеграла уравнений движения, то период осцилляций вычисляется стандартным способом [27], а интегральные представления Фурье-амплитуд удастся получить в результате перехода от интегрирования по независимой переменной ξ к интегрированию по фазовой переменной ψ либо по связанной с ней величине.

Рассмотрим траектории захваченных частиц. Период колебаний T_t их фазы ψ_t определим как значение ξ , при котором изображающая точка данной частицы совершает на фазовой плоскости полный оборот. Для вычисления T_t воспользуемся первым интегралом (I.22) и после серии преобразований получим

$$T_t = 8 \left[2(1+n_t^2) \Pi(-n_t^2, \pi/2/k_t^2) - K(k_t^2) \right] / \left[\sqrt{A_p} \sqrt{\frac{2(\delta_0')^2}{1+\delta_0'}} \left| \frac{\Phi}{I_s} / (1+\delta_\varphi^2 \Phi/I_\varphi) \right| \right] \quad (I.39)$$

Из анализа фазового портрета и второго интеграла для захваченных частиц (I.246) следует, что ψ – периодическая нечетная функция от аргумента $U(\xi, \tilde{\varphi})$. Тогда ее производная $d\psi_t/dU$ – четная периодическая функция U , причем при сдвиге аргумента U на $T_t/2$ она изменяет не только знак, но и величину. Данные обстоятельства обосновывают представление $d\psi_t/dU$ в виде разложения по косинусам кратных дуг

$$\frac{d\psi_t}{dU} = \sum_{n=+1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n U/T_t), \quad (I.40)$$

где
$$C_n = \frac{2 \operatorname{sign} \Phi_s}{T_t} \int_0^{T_t} (d\psi/dU) \cos(2\pi n U/T_t) dU.$$

Далее, перейдя в интегральном представлении для C_n к интегрированию по α_t – угловой координате изображающей точки и учитывая взаимосвязь $U(\xi, \tilde{\varphi})$ и α_t , задаваемую соотношением (I.246), получим

$$C_n = \frac{4 \operatorname{sign} \Phi_s}{T_t} \int_0^{2\pi} \cos \frac{2\pi n}{T_t} \left\{ \frac{\beta_{\varphi c} \delta_\varphi^2}{\varepsilon \Phi_p} \left[2(1+n_t^2) \Pi(-n_t^2, \alpha_t/k_t^2) - F(\alpha_t, k_t^2) \right] - \frac{2 \operatorname{sign} \Phi_s \delta_\varphi^2}{\Phi} \arcsin \left(\sqrt{(1+n_t^2)/k_p^2} \sin \alpha_t / \sqrt{1+n_t^2 \sin^2 \alpha_t} \right) \right\} \times \left[\sqrt{(1+n_t^2)/k_p^2} \cos \alpha_t / (1+n_t^2 \sin^2 \alpha_t) \sqrt{1-k_t^2 \sin^2 \alpha_t} \right] d\alpha_t.$$

Для нечетных и четных гармоник имеем:

$$C_{2i-1} = \frac{8 \operatorname{sign} \Phi_s \sqrt{1+n_t^2}}{T_t k_p} \int_0^\pi \cos \left[\frac{4\pi(2i-1)\delta_\varphi^2}{T_t \Phi_\varphi} \arcsin \left(\frac{\sqrt{\frac{1+n_t^2}{k_p^2}} \sin \alpha_t}{\sqrt{1+n_t^2 \sin^2 \alpha_t}} \right) \right] \times$$

$$\times \cos \frac{2\pi(2i-1)\beta_{\varphi c} \delta_\varphi^2}{\varepsilon T_t \Phi_\varphi} \left[2(1+n_t^2) \Pi(-n_t^2, x | k_t^2) - F(x, k_t^2) \right] \times$$

$$\times \left[\cos x / (1+n_t^2 \sin^2 x) \sqrt{1-k_t^2 \sin x} \right] dx;$$

(I.4Ia)

$$C_{2i} = \frac{8\sqrt{1+n_t^2}}{T_t k_p} \int_0^\pi \sin \left[\frac{4\pi(2i)\delta_\varphi^2}{T_t \Phi_\varphi} \arcsin \left(\frac{\sqrt{(1+n_t^2)/k_p^2} \sin x}{\sqrt{1+n_t^2 \sin^2 x}} \right) \right] \times$$

(I.4Iб)

$$\times \sin \frac{4\pi i \delta_\varphi^2 \beta_{\varphi c}}{\varepsilon T_t \Phi_\varphi} \left[2(1+n_t^2) \Pi(-n_t^2, x | k_t^2) - F(x, k_t^2) \right] \times$$

$$\times \left[\cos x / (1+n_t^2 \sin^2 x) \sqrt{1-k_t^2 \sin^2 x} \right] dx,$$

где $i = 1, 2, 3 \dots$

Отметим, что при $\varepsilon^2/\beta_{\varphi c}^2 \ll 1$ (т.е. $(v'_0/v_\varphi)^2 \ll 1$) из соотношения (I.40) вытекает соответствующая зависимость в приближении маятника, поскольку в результате суммирования ряда (I.40) с коэффициентами

$$C_{2i} \sim O(\varepsilon^2/\beta_{\varphi c}^2),$$

$$C_{2i-1} \approx \Phi_s \sqrt{A_0/k_0^2} \frac{2}{\pi(2i-1)} \int_0^\pi \sin \left[\frac{(2i-1)\pi F(x, k_0^2)}{2K(k_0^2)} \right] \sin x dx =$$

$$= \Phi_s \frac{2\pi \sqrt{A_0}}{K(k_0^2)} (q(k_0^2))^{(2i-1)/2} / (1+q^{2i-1})$$

получаем выражение $d^4 \psi_t / d\xi^4$ через эллиптический косинус. Теперь,

поскольку коэффициенты разложения (I.40) нами определены, интегрируя почленно ряд для $d\Psi_t/dU$, устанавливаем искомую зависимость

$$\Psi_t = -\tilde{\varphi} + \pi/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_t C_n}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{T_t} U(\xi, \tilde{\varphi}), \quad (\text{I.42})$$

учитывающую начальное условие $\Psi|_{\xi=0} = 0$. Здесь, напомним,

$$U(\xi, \tilde{\varphi}) = \xi - \delta_\varphi^2 (\tilde{\varphi} - \pi/2) / \Phi_\varphi + \left[(1 + \Phi_s \delta_\varphi^2 / \Phi_\varphi) \sqrt{2(1 + \delta_0')} / \delta_0' \Phi_s \sqrt{A_p} \right] \times \\ \times \left[2(1 + n_t^2) \Pi(-n_t^2, \alpha_{t_0} \backslash k_t^2) - F(\alpha_{t_0}, k_t^2) \right]; \quad \alpha_{t_0} = \arcsin \left[\sqrt{\frac{2}{1 + \delta_0'}} k_p \sin \left(\frac{\tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Перейдем к построению решения уравнения движения для пролетных частиц. Согласно соотношению (I.24a) Ψ_f - есть непериодическая нечетная функция аргумента

$$V(\xi, \hat{\varphi}) = \xi - \delta_\varphi^2 (\tilde{\varphi} - \pi/2) / \Phi_\varphi + \sin \Phi_s \frac{\beta_{\varphi c} k \delta_\varphi^2}{\varepsilon \Phi_\varphi} \left[2(1 + n^2/k^2) \Pi(-n^2, \alpha_0 \backslash k^2) - F(\alpha_0, k^2) \right],$$

но ее производная $d\Psi_f/dV$ будет знакпостоянной периодической четной функцией V , что следует из анализа фазовых траекторий. Поэтому $d\Psi_f/dV$ можно представить в такой форме:

$$d\Psi_f/dV = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \left[2\pi m V(\xi, \tilde{\varphi}) / T_f \right], \\ B_m = \frac{4 \text{sign} \Phi_s}{T_f} \int_0^\pi \cos \frac{2\pi m k \beta_{\varphi c} \delta_\varphi^2}{\varepsilon \Phi_\varphi T_f} \left\{ 2(1 + n^2/k^2) \Pi(-n^2, \alpha(x) \backslash k^2) - F(\alpha(x), k^2) - \text{sign} \Phi_s \frac{2\varepsilon}{\beta_{\varphi c} k} x \right\} dx; \quad \alpha(x) = \arcsin \sqrt{\frac{(1 - k_{pn}^2) \sin^2 x}{1 - k_{pn}^2 \sin^2 x}}, \\ B_0 = \frac{\text{sign} \Phi_s}{T_f} \int_0^{\pi_f} (d\Psi/dV) dV = 2\pi \text{sign} \Phi_s / T_f,$$

(I.43)

$$T_f = \frac{2k\beta_{\varphi c}\delta_{\varphi}^2}{\varepsilon\Phi_{\varphi}} \left[2(1+n^2/k^2)\Pi(-n^2, \pi/2/k^2) - K(k^2) \right] - \text{sign}\tilde{\Phi}_s \cdot 2\pi\delta_{\varphi}^2/\Phi_{\varphi} -$$

период осцилляций скорости пролетной частицы на траектории. Он определяется как значение переменной ξ , при котором $d\psi_f/dV$ совпадает со своей начальной величиной $\tilde{\Phi}_s$. При вычислении коэффициентов B_m мы с помощью второго интеграла движения перешли от интегрирования по V к интегрированию по фазовой переменной $\tilde{\Psi} = (\psi + \tilde{\varphi})/2 - \pi/4$. Проинтегрируем ряд (I.43) почленно и, выбрав константу интегрирования с учетом начального условия $\psi_f/\xi=0 = 0$, получим искомый результат

$$\psi_f = -\tilde{\varphi} + \pi/2 + B_0 V(\xi, \tilde{\varphi}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_f B_m}{2\pi m} \sin \frac{2\pi m}{T_f} V(\xi, \tilde{\varphi}). \quad (\text{I.44})$$

Предельный переход от соотношений (I.43) и (I.44) к соответствующим зависимостям в приближении маятника осуществляется путем пренебрежения компонентами $\sim \varepsilon^2/\beta_{\varphi c}^2$ или $(v_0'/v_{\varphi})^2$.

Полученные аналитические формулы позволяют проследить динамику релятивистских и нерелятивистских электронов в поле синхронной волны с произвольной амплитудой. Однако для расчета колебательных характеристик уравнений возбуждения [15] целесообразно иметь в явном виде не столько саму фазу электрона ψ , а сколько наводимый им высокочастотный ток, реальная и мнимая части которого выражаются через $\cos(\psi + \tilde{\varphi})$ и $\sin(\psi + \tilde{\varphi})$ соответственно. Их аналитические представления найдем, воспользовавшись тем, что $\cos(\psi + \tilde{\varphi})$ и $\sin(\psi + \tilde{\varphi})$ являются периодическими функциями от нечетного по V или u аргумента (см. (I.42) и (I.44)). Поэтому в общем случае при наличии и захваченных и пролетных электронов справедливы соотношения

$$\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\psi + \tilde{\varphi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} S_n^{(1)} \sin \frac{2\pi n}{T_t} u \\ S_n^{(2)} \cos \frac{2\pi n}{T_t} u \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} R_m^{(1)} \sin \frac{2\pi m}{T_f} V \\ R_m^{(2)} \cos \frac{2\pi m}{T_f} V \end{Bmatrix}. \quad (\text{I.45})$$

Здесь мы учли, что $\cos(\psi + \tilde{\varphi})$ - нечетная функция от u и V , в то время как $\sin(\psi + \tilde{\varphi})$ - четная функция этих аргумен-

тов. В этом легко убедиться при непосредственной подстановке явных зависимостей Ψ от U и V . Интегральные представления для Фурье-коэффициентов

$$\begin{cases} S_n^{(1)} \\ S_n^{(2)} \end{cases} = \frac{2}{T_t} \int_0^{T_t} \begin{cases} \cos(\Psi_t + \tilde{\varphi}) \sin \frac{2\pi n}{T_t} U \\ \sin(\Psi_t + \tilde{\varphi}) \cos \frac{2\pi n}{T_t} U \end{cases} dU \quad (I.46)$$

и

$$\begin{cases} R_m^{(1)} \\ R_m^{(2)} \end{cases} = \frac{2}{T_f} \int_0^{T_f} \begin{cases} \cos(\Psi_f + \tilde{\varphi}) \sin \frac{2\pi m}{T_f} V \\ \sin(\Psi_f + \tilde{\varphi}) \cos \frac{2\pi m}{T_f} V \end{cases} dV$$

определим, не прибегая к подстановке явных выражений Ψ_f и Ψ_t . Для этого воспользуемся вторыми интегралами движения и перейдем в (I.46) от интегрирования по независимым переменным U и V к интегрированию по угловой координате α_t , изображающей точки захваченных частиц, и фазовой координате $\tilde{\Psi} = (\Psi + \tilde{\varphi})/2 - \pi/4$ пролетных электронов. Результат представим в следующем виде:

$$\begin{cases} S_n^{(1)} \\ S_n^{(2)} \end{cases} = \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} \begin{cases} -\cos \frac{2\pi n}{T_t} U(\alpha_t) \cos 2\alpha_t \sin \frac{\sqrt{1+n_t^2} \sin \alpha_t}{\sqrt{1+n_t^2 \sin^2 \alpha_t}} \\ \sin \frac{2\pi n}{T_t} U(\alpha_t) \sin 2\alpha_t \sin \frac{\sqrt{1+n_t^2} \sin \alpha_t}{\sqrt{1+n_t^2 \sin^2 \alpha_t}} \end{cases} \times \\ \times \sqrt{1+n_t^2/k_p^2} \cos \alpha_t / (1+n_t^2 \sin^2 \alpha_t) \sqrt{1-k_t^2 \sin^2 \alpha_t} d\alpha_t, \\ \begin{cases} R_m^{(1)} \\ R_m^{(2)} \end{cases} = \frac{2 \text{sign } \Phi_s}{\pi m} \int_0^\pi \begin{cases} -\cos \frac{2\pi m}{T_f} V(\tilde{\Psi}) \cos 2\tilde{\Psi} \\ \sin \frac{2\pi m}{T_f} V(\tilde{\Psi}) \sin 2\tilde{\Psi} \end{cases} d\tilde{\Psi}, \quad (I.47)$$

где функции $V(\tilde{\Psi})$ и $U(\alpha_t)$ задаются соотношениями (I.24a) и (I.24б) соответственно.

Полученные соотношения значительно упрощаются, если параметры системы таковы, что максимально возможное изменение кинетической энергии электрона на расстоянии $\sim \lambda_3$ значительно меньше энергии покоя электрона $m_0 c^2 \approx 0,51$ МэВ, т.е.

$\mathcal{E}^2 = e C_2 \lambda_3 \gamma \varphi / 4\pi m_0 c^2 \ll 1$. Тогда в точных формулах можно пренебречь компонентами $\sim \mathcal{E}^2$ (например, n^2 , n_t^2 , k_{pl}^2),

сохранив при этом величины $\sim \epsilon^2/\beta_{\varphi c}^2 \sim (v_0'/v_{\varphi})^2 \ll 1$. Последствия подобного упрощения сказываются только на количественных отклонениях от точного решения и не затрагивают все основные качественные характеристики движения частицы. Например, легко убедиться, что в таком приближении асимметрия фазовых траекторий сохраняется в отличие от маятниковой модели, когда $(v_0'/v_{\varphi})^2 \ll 1$. Опустим промежуточные выкладки и сформулируем окончательный вариант приближенных выражений для Фурье-коэффициентов и периодов захваченных частиц

$$T_t = 8K_t(k_p^{-2})/\sqrt{A_p} |\Phi_s (1 + \gamma_{\varphi}^2 \Phi_s^2)^{-1}| = 8K_t(k_p^{-2}) \sqrt{\frac{\delta_{\varphi}^2 (\delta_{\varphi}^2 - 1)}{2(\gamma_0 - 1) \mathcal{F}_{\varphi} \Phi_{\varphi}}},$$

$$C_{2i-1} \approx -2\Phi_{\varphi} \gamma_{\varphi}^{-2} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2i-1)\xi \sin \left[\frac{2i-1}{K_t} \pi \frac{\epsilon}{\beta_{\varphi c}} \arcsin(k_p^{-1} \operatorname{sn}(\frac{2K_t \xi}{\pi})) \right] d\xi,$$

$$C_{2i} \approx 2\Phi_{\varphi} \gamma_{\varphi}^{-2} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2i\xi) \cos \left[\frac{2\pi i}{K_t} \frac{\epsilon}{\beta_{\varphi c}} \arcsin(k_p^{-1} \operatorname{sn}(\frac{2K_t \xi}{\pi})) \right] d\xi,$$

$$S_{2i-1}^{(1)} \approx \frac{-2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2i-1)\xi \left\{ \frac{\sin \left[(2 + \alpha_{2i-1}) \arcsin(k_p^{-1} \operatorname{sn}(\frac{2K_t \xi}{\pi})) \right]}{2 + \alpha_{2i-1}} + \frac{\sin \left[(2 - \alpha_{2i-1}) \arcsin(k_p^{-1} \operatorname{sn}(\frac{2K_t \xi}{\pi})) \right]}{2 - \alpha_{2i-1}} \right\} d\xi,$$

$$S_{2i}^{(1)} \approx \frac{-2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2i\xi) \left\{ \frac{\cos \left[(2 - \alpha_{2i}) \arcsin(k_p^{-1} \operatorname{sn}(\frac{2K_t \xi}{\pi})) \right]}{2 - \alpha_{2i-1}} - \frac{\cos \left[(2 + \alpha_{2i}) \arcsin(k_p^{-1} \operatorname{sn}(\frac{2K_t \xi}{\pi})) \right]}{2 + \alpha_{2i}} \right\} d\xi,$$

$$S_{2i-1}^{(2)} = \frac{2 \operatorname{sign} \Phi_s}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2i-1)\xi \left\{ \frac{\sin \left[(2 - \alpha_{2i-1}) \arcsin(k_p^{-1} \operatorname{sn}(\frac{2K_t \xi}{\pi})) \right]}{2 - \alpha_{2i-1}} - \frac{\sin \left[(2 + \alpha_{2i-1}) \arcsin(k_p^{-1} \operatorname{sn}(\frac{2K_t \xi}{\pi})) \right]}{2 + \alpha_{2i-1}} \right\} d\xi,$$

$$S_{2i}^{(2)} = \frac{-2 \operatorname{sign} \Phi_s}{\pi} \int_0^\pi \cos(2i x) \left\{ \frac{\cos \left[(2 + \alpha_{2i}) \arcsin \left(k_p^{-1} \operatorname{sn} \left(\frac{2Kt}{\pi} x \right) \right) \right]}{2 + \alpha_{2i}} + \frac{\cos \left[(2 - \alpha_{2i}) \arcsin \left(k_p^{-1} \operatorname{sn} \left(\frac{2Kt}{\pi} x \right) \right) \right]}{2 - 2\alpha_{2i}} \right\} dx$$

(I.48)

и пролетных электронов

$$T_f \approx \frac{2\pi k_p (1 + \delta_\varphi^2 \Phi_s / \Phi_\varphi)}{\sqrt{A_p} |\Phi_s|} \left(\frac{v_0'}{v_\varphi} \sqrt{A_p / k_p^2} + 2K(k_p^2) / \pi \right),$$

$$B_m \approx \frac{2\Phi_s \sqrt{A_p / k_p^2} (1 + \delta_\varphi^2 \Phi_s / \Phi_\varphi)^{-1}}{2K/\pi + v_0' / v_\varphi \sqrt{A_p / k_p^2}} \frac{1}{\pi} \int \cos 2m \left[\frac{F(x, k_p^2) - \frac{v_0'}{v_\varphi} \sqrt{\frac{A_p}{k_p^2}} x}{2K/\pi + \frac{v_0'}{v_\varphi} \sqrt{\frac{A_p}{k_p^2}}} \right] dx,$$

$$R_{2i-1}^{(1)} = \frac{-4 \operatorname{sign} \Phi_s}{\pi(2i-1)} \int_0^{\pi/2} \cos 2x \cos \left[2(2i-1) \frac{F(x, k_p^2) + \frac{v_0'}{v_\varphi} \sqrt{\frac{A_p}{k_p^2}} x}{2K/\pi + \frac{v_0'}{v_\varphi} \sqrt{\frac{A_p}{k_p^2}}} \right] dx,$$

$$R_{2i}^{(1)} = 0;$$

$$R_{2i-1}^{(2)} = \frac{4 \operatorname{sign} \Phi_s}{\pi(2i-1)} \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sin \left[2(2i-1) \frac{F(x, k_p^2) + \frac{v_0'}{v_\varphi} \sqrt{\frac{A_p}{k_p^2}} x}{2K/\pi + \frac{v_0'}{v_\varphi} \sqrt{\frac{A_p}{k_p^2}}} \right] dx,$$

$$R_{2i}^{(2)} = 0.$$

(I.49)

Здесь $m, i = 1, 2, 3 \dots$; $K_t(k_p^{-2})$ - полный эллиптический интеграл первого рода; $\alpha_p = \pi \ell (v'_0 / v_\varphi) \sqrt{A_p} / 2K_t$.

Из анализа (I.48) и (I.49) следует, что отражением качественного отличия полученных здесь решений от аналогичных соотношений, следующих из маятникового приближения, является появление ненулевых четных гармоник в спектрах колебаний захваченных частиц и величин, связанных с ψ .

В заключение этого раздела уточним область применимости данного приближения. Для этого введем две характерные величины, определяемые исходными параметрами системы: минимальную напряженность захватывающего поля

$$(C_{tz})_{\min} = m_0 c^2 2\pi (\gamma'_0 - 1) / e \lambda_z \gamma_\varphi$$

и напряженность поля C_{kp} , при котором $\mathcal{E}^2 = 1$:

$$C_{kp} = 4\pi m_0 c^2 / \gamma_\varphi e \lambda_z = 2\pi 10^6 (\gamma_\varphi \lambda_z)^{-1} [B/M].$$

Поскольку $\mathcal{E}^2 = 0,5(\gamma'_0 - 1)(C_z / C_{tz})$, то малость $\mathcal{E}^2 \ll 1$ при $C_z / C_{tz} \sim 1$ влечет за собой малость отношения $(v'_0 / c)^2 \ll 1$. Поэтому, если в синхронной системе координат движение электрона нерелятивистское, то условие $\mathcal{E}^2 \ll 1$ всегда выполняется при любых КПД < 1 . Необходимо отметить, что такой подход ($\mathcal{E}^2 \ll 1$) можно использовать, анализируя динамику ультрарелятивистских электронов ($v'_0 / c \lesssim 1$), но только применительно к движению пролетных частиц ($C_z / C_{tz} \ll 1$). Получаемые при этом результаты практически совпадают с теми, которые следуют и из приближения маятника, т.к. здесь уже $\beta_{rc}^2 \lesssim 1$ и $\mathcal{E}^2 / \beta_{rc}^2 \ll 1$. Кроме того, если мы учтем, что в реальных приборах [28] наибольшая напряженность электрического поля в пространстве взаимодействия составляет величину $C_z \sim 10^7 - 10^8 [B/M] \approx C_{kp}$, то анализируя конкретные приборы, заранее не всегда можно полагать $\mathcal{E}^2 = C_z / C_{kp} \ll 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части работы в рамках стандартных приближений аналитическими методами исследована задача о динамике электрона в поле синхронной электромагнитной волны с однородным распределением амплитуды вдоль пространства взаимодействия. Получены точные аналитические соотношения, определяющие зависимость фазы электрона ψ и связанных с ней величин от продольной пространственной координаты, начального состояния электрона, амплитуды и фазы поля резонатора. Для захваченных и пролетных частиц данные соотношения представлены в виде рядов Фурье, коэффициенты разложения которых найдены в квадратурах. Проанализированы два различных подхода к построению приближенных решений уравнения движения. Один из них основывается на известном предположении о малости относительного изменения энергии электрона, тогда его динамика описывается уравнением математического маятника, другой, когда малым параметром является отношение изменения энергии частицы на длине волны синхронной гармоники к собственной энергии электрона $m_0 c^2$. При этом относительное изменение кинетической энергии электрона на траектории может быть большим как в релятивистском, так и в нерелятивистском случаях. Показано, что именно последний подход позволяет наилучшим образом учесть все качественные особенности эволюции состояния электрона в пространстве взаимодействия. Так, отличительной чертой рассмотренной системы является асимметрия фазовых траекторий на плоскости $(d\psi/d\xi, (\psi + \tilde{\varphi})/2 - \pi/4)$ относительно знака производной $d\psi/d\xi$. В точном решении для захваченных волной частиц это проявляется в наличии полного набора гармоник, в то время как в маятниковом приближении ненулевыми являются Фурье-компоненты только с нечетными индексами.

Учет асимметрии фазового портрета системы позволяет более точно определить пределы применимости одноволновой модели взаимодействия электронного потока с полем резонатора вблизи периодической структуры. С точки зрения динамики частицы в заданном поле эти условия заключаются в таком ограничении отношения ее начальной скорости v_0 и v_φ , когда при любой амплитуде пространственной гармоники захваченный ею электрон не испытывал заметного влияния других спектральных компонент поля замкнутой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русин Ф.С., Богомолов Г.Д. Оротрон - электронный прибор с открытым резонатором и отражающей решеткой// Изв. вузов. Радиофизика. - 1968. - II, №5. - С. 756-770.
2. Генераторы дифракционного излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн/ И.М. Балаклицкий, Б.К. Скрынник, О.А. Третьяков, В.П. Шестопалов// УФЖ. - 1969. - 14. - С. 539-552.
3. Mizuno K., Ono S., Shibata J. A new electron tube with a Fabry-Perot resonator for the generation of millimeter and submillimeter waves // Proc. Symp. on. submillimeter waves / Polytechn. Inst. Brooklyn, 1970. - P. 115-134.
4. Релятивистские оротроны - мощные источники когерентного миллиметрового излучения/ Братман В.Л., Денисов Г.Г., Корovin С.Д. и др.// Письма в ЖТФ. - 1984. - 10, №13. - С. 807.
5. Исследование релятивистского генератора дифракционного излучения миллиметрового диапазона/ Александров А.Ф., Галузо С.В., Канавец В.И. и др.// Письма в ЖТФ. - 1981. - 7, №10. - С. 587-591.
6. Ваврив Д.М., Третьяков О.А., Шматько А.А. Теория резонансных генераторов с длительным взаимодействием, -Препр./ АН УССР. Физ.-техн. ин-т низких температур. - Харьков, 1978. - 60с.
7. Вайнштейн Л.А., Исаев В.А., Трубецков Д.И. Электронный генератор с открытым резонатором (Обзор теоретических и экспериментальных исследований)// Радиотехника и электрон. - 1983. - 28, №7. - С. 1233-1249.
8. Ваврив Д.М., Третьяков О.А. Потенциальные возможности усилителей на основе эффекта дифракционного излучения// Докл. АН УССР. Сер. А. - 1987. - №7. - С. 47-50.
9. О возможности использования прямолинейных электронных пучков с низкой плотностью тока для усиления и генерации мощного коротковолнового излучения/ Девятков Н.Д., Коненкин А.Д., Симонов В.Г., Черепенин В.А.// Радиотехника и электроника. - 1989. - 34, №10. - С. 8172-8176.
10. Канавец В.И. Тенденции развития релятивистской СВЧ электроники больших мощностей// Генераторы и усилители на релятивистских электронных потоках. - М.: Изд-во МГУ. - 1987. - С. 5-27.
- II. Общие свойства коротковолновых приборов с длительной инерционной группировкой электронов/ Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Ковалев Н.Ф. и др.// Релятивистская высокочастотная

- электроника.-Горький:ИПФ АН СССР,-1979,-С.249.
12. Ваврив Д.М. Анализ движения электронов в резонансной ЛОВ// Радиотехника и электроника.-1982.-27, №8.-С.1576-1581.
 13. Рапопорт Г.Н. Лампа бегущей волны как генератор// Изв.вузов.Радиоэлектроника.-1958.-I, №2.-С.202-208.
 14. Crowne F.I., Leavitt R., Warchesky T. An exactly solvable nonlinear model for a Smith-Parcell free-electron laser // Phys. Rev. - A. - 1981. - 24, No.2. - P.1154-1157.
 15. Ваврив Д.М., Третьяков О.А. Теория резонансных усилителей О-типа.-Киев:Наук.думка,1989.-152с.
 16. Некоторые вопросы оптимизации коаксиального оротрона/ Гуляев Ю.В., Кураев А.А., Нефедов В.И., Оленин В.Д., Слепян Г.Я., Слепян А.Я.// Радиотехн. и электрон.-1983.-38, №9.-С.1791-1798.
 17. Ваврив Д.М., Романцов Ю.А. Влияние структуры поля открытых резонаторов на выходные характеристики усилителей оротронного типа// Электрон.техника.Сер.1.Электрон.СВЧ.-1988.- Вып.7.-С.3-8.
 18. Бакай А.С., Степановский Ю.Н. Адиабатические инварианты,- Киев:Наук.думка,1981.-450с.
 19. Cary I.R., Escande D.F., Tennyson J.L. Adiabatic-invariant change due to senaratrix crossing // Phys. Rev. - A. 1986. - 34, No.5. - P.4256-4275.
 20. Кац А.М., Ильина Е.М., Манькин И.А. Нелинейные явления в СВЧ приборах О-типа с длительным взаимодействием.-М.:Сов. радио,1975.-296с.
 21. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса.-М.:Наука,1988.-368с.
 22. Шевчик В.М. Основы электроники сверхвысоких частот-М.:Сов. радио,1959.-302с.
 23. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям.- М.:Наука,1979-830с.
 24. Ваврив Д.М. Теория усиления, синхронизации и преобразования колебаний в резонансных системах с распределенным взаимодействием и ее приложения в электронике:Автореф.дис. ... д-ра физ.-мат.наук.-Харьков,ХГУ,1987.-160с.
 25. Балакирев В.А., Буц В.А., Толстолужский А.П., Туркин Ю.А. Динамика движения заряженных частиц в поле двух электро-

- магнитных волн. // ЖЭТФ. - 1989. - 95. Вып. 4. - С. 1231-1245.
26. О новом механизме возбуждения генератора дифракционного излучения - лазера на свободных электронах / Ю.И. Евдокименко, К.А. Лукин, И.Д. Ревин и др. // Докл. АН СССР. - 1982. - 265, №2. - С. 318-321.
27. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. - М.: Наука, 1965. - 204с.
28. Диденко А.М. Сверхпроводящие волноводы и резонаторы. - М.: Сов. радио, 1973. - 300с.

Часть II

АНАЛИЗ ЭНЕРГООБМЕНА ПУЧКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ
С ПОЛЕМ РЕЗОНАТОРА

ВВЕДЕНИЕ

В данной части работы результаты исследования динамики релятивистских частиц в поле синхронной волны [1] применяются для анализа и оптимизации энергообмена релятивистского пучка электронов с полем в резонансных приборах с распределенным взаимодействием 0-типа. В общем случае предполагается, что электронный пучок промодулирован на входе в пространство взаимодействия. Это позволило исследовать как режим генерации автоколебаний, так и режим усиления внешнего сигнала. Различные варианты конструкций таких усилителей с нерелятивистскими пучками достаточно полно изучены экспериментально [2-4] и теоретически [5-8].

Динамика возбуждаемых пучком колебаний описывается самосогласованной системой уравнений возбуждения поля в резонаторе

$$\frac{d\mathcal{F}_p}{d\tau} = \left[G S_1(\mathcal{F}_p, \mathcal{X}_r) - 1 \right] \mathcal{F}_p, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\mathcal{X}_r}{d\tau} = 2Q \left(\frac{\omega_r - \omega}{\omega_r} \right) - G S_2(\mathcal{F}_p, \mathcal{X}_r),$$

записанных относительно амплитуды \mathcal{F}_p и фазы \mathcal{X}_r осцилляций, и релятивистскими уравнениями движения (I.3a), (I.3б)-(I.4)* электронов с учетом их предварительной группировки ($\tilde{\varphi} = \varphi_0 + \mathcal{X}_r + X(\varphi_0)$). Взаимное влияние пучка и поля резонатора описывается посредством колебательных характеристик [5] S_1 и S_2 , интегральные представления которых для релятивистских приборов имеют следующий вид

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi \mathcal{F}_p} \int_0^1 f(\xi) \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} [\psi(\xi, \tilde{\varphi}) + \tilde{\varphi}(\varphi_0, \mathcal{X}_r)] d\xi d\varphi_0. \quad (2.2)$$

Эффективность энергообмена пучка и поля характеризуется релятивистским аналогом параметра эффективности взаимодействия [9]

$$G = 2QL^2 I_0 / \omega_r N_r U_p,$$

где Q и ω_r - нагруженная добротность и собственная частота резонатора; N_r - норма возбуждаемых колебаний;

$U_p = m_0 c^2 (\gamma_0 - 1) / e$ - ускоряющее напряжение; I_0 - ток пучка.

*Соотношения, обозначения которых начинаются с цифры I, содержатся в первой части работы [1].

Покажем, что полученные выше результаты анализа микропроцессов взаимодействия пучка и поля позволяют, минуя совместное численное интегрирование уравнений (2.2) и (I.4), оценить зависимости максимальных КПД усилителя от параметров электродинамической системы и пучка. Используем для этого процедуру, аналогичную предложенной в монографии [5] схеме, с тем отличием, что учтем релятивистский фактор и не будем пренебрегать компонентами, характеризующими изменение средней скорости частиц на траектории.

Из самосогласованной системы уравнений следует общее выражение для КПД прибора в установившемся режиме

$$\eta = G \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^1 f(\xi) \int_0^{2\pi} \cos(\psi + \tilde{\varphi}(\varphi_0)) d\xi d\varphi_0 \right]^2 = G R(F_p, \Phi_p, \Phi_s).$$

В то же время из уравнения движения (I.3a), (I.3б) получим

$$\int_0^1 f(\xi) \cos(\psi + \tilde{\varphi}) d\xi = 2 F_p^{-1} \eta_e(F_p, \xi, \tilde{\varphi}) \Big|_{\xi=1},$$

где η_e - текущее значение КПД электрона с фазой влета φ_0 . Поэтому соотношение для функции R можно преобразовать к такому виду

$$R = (2 F_p \pi)^{-2} \left[\int_0^{2\pi} \eta_e(F_p, 1, \tilde{\varphi}(\varphi_0)) d\varphi_0 \right]^2. \quad (2.3)$$

Далее вычислим максимум функции R , учитывая, что основной вклад в КПД прибора вносят захваченные электроны. Поскольку нас интересуют максимальные значения КПД, то считаем все физические параметры оптимальными. Это означает, во-первых, что фиксированная длина $L_{эф}$ области эффективного взаимодействия и безразмерная амплитуда колебаний F_p являются оптимальными. Во-вторых, полагаем предварительную группировку пучка идеальной: подавляющее большинство электронов имеет начальную фазу $\tilde{\varphi}(\varphi_0, X(\varphi_0), Y_c)$, близкую к $\pi/2$ при минимальном разбросе скоростей $\Phi_s \approx \Phi_s$. Рассмотрим детально эти предположения и определим условия, при которых они выполняются.

1. ОПТИМАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ПОЛЯ И ДЛИНЫ ЭС

Из анализа фазового портрета уравнения движения [1] следует, что для захваченных частиц наименьшие значения $v(\xi)$ реали-

зуются при величине фазового угла^{*} $\alpha_t = -\pi(1+2m)$. Поэтому искомое оптимальное соотношение между физическими параметрами может быть получено непосредственно из формулы для второго интеграла движения (I.246)

$$\begin{aligned} (\Phi_{\varphi}^{-2})_{on} = \frac{\beta_{\varphi c}}{\varepsilon} \left\{ 2(1+2m) \left[2(1+n_t^2) \Pi(-n_t^2, \pi/2 \setminus k_t^2) - \right. \right. \\ \left. \left. - K(k_t^2) \right] + 2(1+n_t^2) \Pi(-n_t^2, \alpha_{t_0} \setminus k_t^2) - F(\alpha_{t_0}, k_t^2) \right\} + \tilde{\varphi} - \pi/2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь m — число полных оборотов изображающей точки на фазовой траектории; α_{t_0} — начальное значение фазового угла для электрона с начальной фазой $\tilde{\varphi}$.

Поскольку правая часть выражения (2.4) содержит слагаемые, зависящие только от нормированной амплитуды поля \mathcal{F}_p и начального состояния электрона при влете в пространство взаимодействия ($\tilde{\varphi}(\varphi_0, \gamma_0)$ и Φ_s), то усредняя $(\Phi_{\varphi})_{on}$ по всему ансамблю захваченных частиц

$$-\arcsin(1-A_p^{-1}) < (\tilde{\varphi}/2 - \pi/4) < \arcsin(1-A_p^{-1}),$$

находим приближенную зависимость оптимальной длины L_{on} области взаимодействия от начального рассинхронизма электронного потока с медленной волной и ее амплитуды

$$\begin{aligned} (L_{on})_{tr} \approx \frac{\lambda_3 \delta_{\varphi}^{1/2}}{\sqrt{A_p}} \left(\frac{v_{\varphi}}{v_0'} \right) \sqrt{\frac{1+\gamma_0'}{2(\gamma_0')^2}} \frac{2(1+2m)}{\pi \arcsin(1-A_p^{-1})} \int_0^{\arcsin(1-A_p^{-1})} \left\{ 2(1+n_t^2) \times \right. \\ \left. \times \Pi(-n_t^2, \pi/2 \setminus k_t^2(x)) - K(k_t^2(x)) \right\} dx, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $k_t^2(x) = k_p^{-2}(x) [1 - \varepsilon^2(1 - k_p^{-2}(x))]$; $n_t^2(x) = \varepsilon^2/k_p^2(x)$;

$$k_p^2(x) = A_p / (1 + A_p \sin^2 x) > 1; \quad A_p > 1; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

^{*}Напомним, что отсчет α_t ведется по часовой стрелке в соответствии с направлением движения изображающей точки по фазовым траекториям. Начало отсчета α_t расположено на полусоси $(0, \psi' < 0)$, см. рис. I.2 в [1].

В полученном соотношении не учитываются пролетные частицы, а также возможная начальная модуляция скорости пучка. В то же время, поскольку наличие предварительной группировки учитывается только переменной интегрирования $\chi = \tilde{\varphi}/2 - \pi/4$, то усредненное значение $(L_{on})_{t\tau}$, задаваемое формулой (2.5), не зависит от уровня предварительной модуляции плотности электронного потока. Основными факторами, определяющими величину $(L_{on})_{t\tau}$, является длина λ_3 замедленной волны, отношение скорости пучка в подвижной системе координат $v'_0 = (v_0 - v_\varphi)/(1 - v_0 v_\varphi/c^2)$ к скорости ее движения v_φ , а также отношения A_p амплитуды волны \mathcal{F}_p к минимальной амплитуде захвата $2\pi m_0 c^2 (\gamma'_0 - 1)/e \delta_\varphi \lambda_3$. Наглядное представление о влиянии этих параметров на $(L_{on})_{t\tau}$ можно получить, если пренебречь в (2.5) компонентами $\sim \mathcal{E}^2 = (\gamma'_0 - 1) A_p / 2$, т.е. считать $(v'_0/c)^2 \ll 1$. За исключением случая ультрарелятивистских пучков, когда $v'_0 \lesssim c$, такое предположение вполне оправдано. Тогда после ряда преобразований исходной формулы (2.5), получим

$$(L_{on})_{t\tau} = (1+2m)\lambda_3 \frac{9}{8} \frac{v_\varphi}{v'_0} \frac{\delta_\varphi^2}{\sqrt{A_p}} \left[1 + \frac{2}{9} \left(A_p^{-1} - \frac{(1-A_p^{-1})/A_p(2-A_p^{-1})}{2 \arcsin(1-A_p^{-1})} \right) \right], \quad (2.6)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$; $A_p = \mathcal{F}_p/\mathcal{F}_{t\tau} > 1$; $\delta_\varphi = (1 - \beta_{\varphi c}^2)^{-1/2}$. Можно показать, что во всем диапазоне $A_p > 1$ сомножитель, заключенный в квадратные скобки, незначительно отличается от 1. Поэтому имеем следующие оценки оптимальных значений произведения

$$(\mathcal{F}_p \Phi_0)_{on} \approx \frac{81}{32} \pi^2 \frac{\delta_\varphi^3 (1+\delta_0)}{\delta_0^2} \left(\frac{v_\varphi}{v_0} \right)^3 \left[1 + 0,0878 \frac{\Phi_s^2}{(\pi^2 (1+\delta_0') (1+\delta_\varphi^2 \Phi_s/\Phi_\varphi)^2)} \right] \cdot (1+2m)^2 \quad (2.7)$$

и отношения

$$A_p^0 = (\mathcal{F}_p/\mathcal{F}_{t\tau})_{on} \approx \sqrt{5,06} \frac{\Phi_s^2 \pi^2 (1+2m)^2 (1+\delta_0') (1+\delta_\varphi^2 \Phi_s/\Phi_\varphi)^2}{2\delta_0'} \times \left[1 + 0,0878 \frac{\Phi_s^2}{(\pi^2 (1+\delta_0') (1+\delta_\varphi^2 \Phi_s/\Phi_\varphi)^2)} \right]^2 \quad (2.8)$$

($m = 0, 1, 2, \dots$).

На рис. 2.1 сопоставлены зависимости величины A_p^0 для $m=0$ от отношения v_φ/c , полученные из численных расчетов (---) и по формуле (2.8) (—) при критических значениях параметров (1.37) и $\Phi_s = -\pi$. Видно вполне удовлетворительное соответствие точных результатов и их аналитических оценок вплоть до ультрарелятивистской области ($v_\varphi \geq 0,95c$).

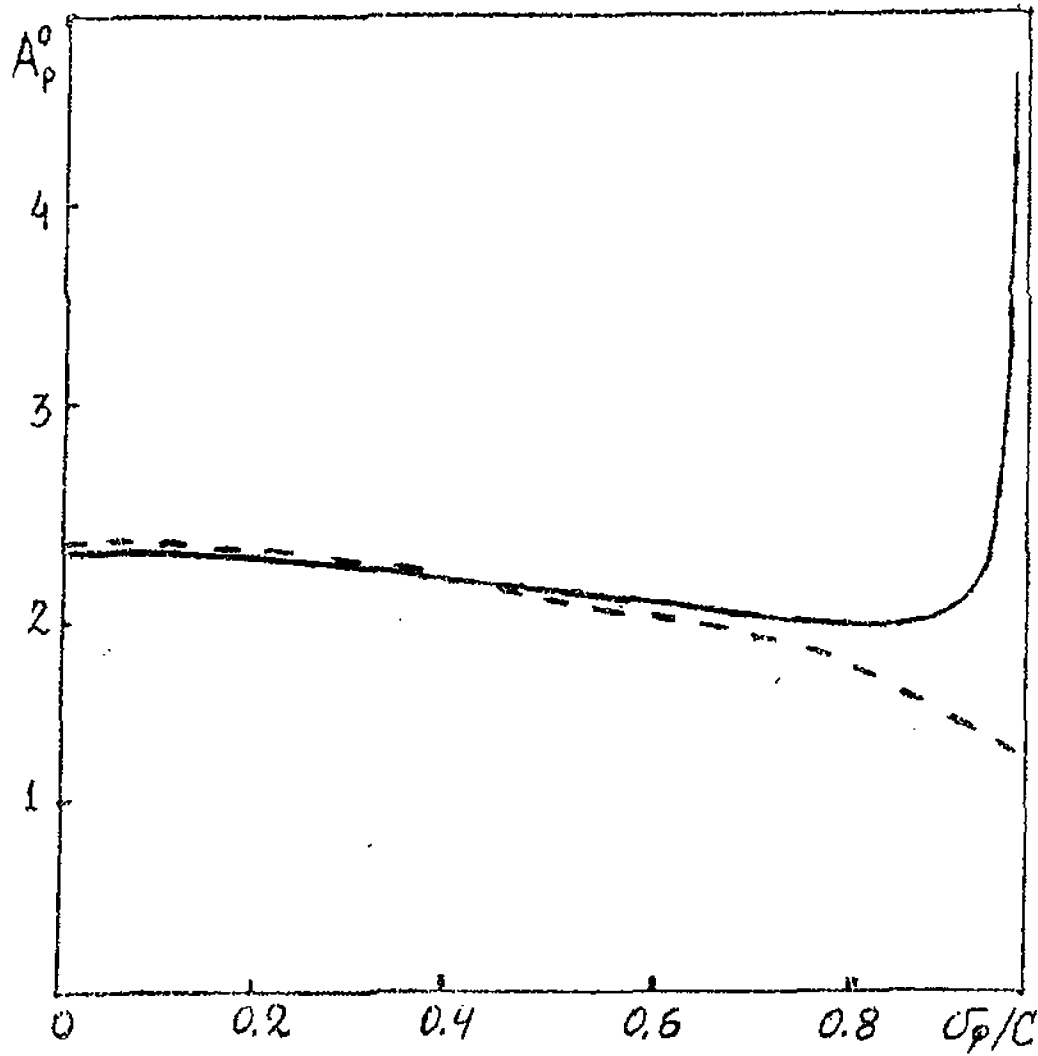


Рис. 2. I. Зависимость оптимального соотношения A_p^0 от величины σ_p/c при $(Q\delta\varphi)_{пред} = \pi(1+2\delta\varphi^2)$, найденная численно (штриховая линия) и аналитически (сплошная линия)

Область применимости соотношений (2.7) и (2.8) ограничена предположением о постоянстве распределения поля синхронной волны $f(\xi) = 1$. Однако они могут быть обобщены и на случай неоднородной зависимости $f(\xi)$. Если можно выделить в пространстве взаимодействия L участок $L_{эф}$, где четко выражен главный максимум функции $f(\xi)$, тогда

$$F_p^0 = 2,53 \pi^2 (v_\varphi/v_0)^3 (\delta_\varphi^3 (1+\delta_0)/\delta_0^2 f_{эф}(\Phi_0)_{эф}) \times \quad (2.9)$$

$$\times \left[1 + 0,08 (\Phi_s)_{эф}^2 / (\pi^2 (1+\delta_0') (1+\delta_\varphi^2 \Phi_s/\Phi_\varphi)^2) \right]^2 \cdot (1+2m)^2$$

$$\text{и } A_p^0 = \sqrt{0,4} 5,06 (\Phi_s)_{эф}^{-2} \pi^2 (1+2m)^2 (1+\delta_0') (1+\delta_\varphi^2 \Phi_s/\Phi_\varphi)^2 \times \quad (2.10)$$

$$\times \left[1 + 0,0878 (\Phi_s)_{эф}^2 / (\pi^2 (1+\delta_0') (1+\delta_\varphi^2 \Phi_s/\Phi_\varphi)^2) \right]^2 \cdot (\delta_0')^2$$

Здесь $(\Phi_0)_{эф} = \omega L_{эф}/v_0$, $(\Phi_\varphi)_{эф} = \omega L_{эф}/v_\varphi$, $(\Phi_s)_{эф} = (\Phi_\varphi)_{эф} (v_\varphi/v_0 - 1)$ и $f_{эф} = L_{эф}^{-1} \int_0^{L_{эф}} f(\eta) d\eta$ - среднее значение $f(\eta)$ на длине $L_{эф}$ участка эффективного взаимодействия. Понятно, что для $f(\eta) = 1$ получим $L_{эф} = L$ и $f_{эф} = 1$. В случае гауссовой конфигурации поля $f(\xi) = (\omega \sqrt{\pi/2})^{-1} \exp(-(\xi - 0,5)^2/\omega^2)$, характерной для открытых резонаторов, имеем $L_{эф} \approx 2\omega L$, $f_{эф} \approx 0,66/\sqrt{\omega}$, где $\omega = r/L$ - отношение радиуса пятна поля r к общей длине L периодической структуры.

2. АНАЛИЗ ФОРМИРОВАНИЯ СГУСТКА ЗАХВАЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

В силу специфики черенковского механизма фазировки ансамбля частиц полем синхронной волны эффективный отбор энергии электронного потока реализуется при соблюдении двух требований.

Во-первых, начальная группировка потока должна характеризоваться минимальными отклонениями начальных фаз большинства частиц $\tilde{\varphi}(\varphi_0, \gamma_z)$ от величины $\tilde{\varphi} = \pi/2$, поскольку электроны с фазой влета φ_0 , удовлетворяющей уравнению $\varphi_0 + \gamma_z + X(\varphi_0) = \frac{\pi}{2}$, являются центрами формирования захватываемого волной сгустка. Можно показать, что оптимальные условия торможения частиц с $\tilde{\varphi} = \pi/2$ незначительно отличаются от соотношений (2.9) и (2.10), полученных в результате усреднения по всему ансамблю захваченных электронов. При этом небольшие отклонения начальных фаз $\tilde{\varphi}$ от $\pi/2$ приводят к заметному разбросу энергий частиц в конце пространства взаимодействия. Иллюстрацией последнего утвер-

ждения может служить рис.2.2, где изображены фазовые траектории двух пар частиц с одинаковыми k_p^2 , но различными $\tilde{\varphi}$. Уравнение движения (1.4) интегрировалось численно при $f(\xi) = 1$, знаками Δ и X выделены состояния электронов соответственно в начале ($\xi = 0$) и конце ($\xi = 1$) пространства взаимодействия.

Во-вторых, важно, чтобы амплитуда \mathcal{F}_p волны в несколько раз превышала минимально необходимую величину $\mathcal{F}_{tz} = \Phi_\varphi \delta_\varphi^{-1} (\delta_0^2 - 1) / (\delta_0 - 1)$, поскольку эволюция начального сгустка электронов существенным образом зависит от значения $A_p = \mathcal{F}_p / \mathcal{F}_{tz}$. Об этом можно судить по рис.2.3, где для $\delta_\xi = 0$ и различных A_p изображены нормированные на $\delta_\varphi^2 \alpha_\varphi / \alpha_0' \Phi_\varphi$ периоды фазовых осцилляций T_t захваченных частиц при $\tilde{\varphi} = \varphi_0 + 1,84 \cos \varphi_0$. Анализируя эти графики в совокупности с показанной на рис.2.4 зависимостью $T_t \alpha_0' \Phi_\varphi / \delta_\varphi^2 \alpha_\varphi$ от $(k_p^2)_{\max} = A_p$, приходим к следующему выводу. Если фазовые траектории рассматриваемых электронов находятся вблизи сепаратрисы ($A_p \gtrsim 1$), то малые отклонения модуля

$k_p^2 = A_p / (1 + A_p \sin^2(\tilde{\varphi}/2 - \pi/4))$ от $(k_p^2)_{\max}$ приводят к существенным вариациям периодов колебаний T_t электронов с различными фазами влета φ_0 . По мере удаления фазового сгустка от сепаратрисы (т.е. с увеличением $A_p > 1$) разброс значений $T_t(\varphi)$ заметно уменьшается и, начиная с $A_p \gtrsim 2$, большая часть захваченных частиц будет осциллировать с практически одинаковым периодом

$$(T_t)_{\text{коз}} \approx 4\pi |v_\varphi / v_0'| \delta_\varphi^2 / (\Phi_\varphi)_{\text{эф}} \sqrt{A_p} = 4\pi \frac{\sqrt{\delta_\varphi (\delta_\varphi^2 - 1)} \delta_\varphi}{2(\delta_0 - 1) \mathcal{F}_p (\Phi_\varphi)_{\text{эф}}}, \text{ который}$$

при соблюдении оптимальных условий (2.10) равен $1,8 \sqrt{f_{\text{эф}}}$. Относительное число таких когерентных электронов рассчитывается по формуле

$$N_{tz} \approx \frac{2}{\pi} \left\{ 0,8 \alpha \gamma c \sin \sqrt{1 - A_p^{-1}} + X (J_0(X) + 0,5 J_2(X)) \frac{\sqrt{A_p - 1}}{A_p} \right\}, \quad (2.11)$$

где $J_0(X)$ и $J_2(X)$ - функции Бесселя. Графики $N_{tz}(A_p)$ при $X = 1,84$, $X = 0$ показаны на рис.2.5. В силу этого величина N_{tz} может служить количественным показателем качества формирования и динамики сгустка в поле синхронной волны. Согласно (2.11) и по очевидным физическим соображениям качество захваченного сгустка определяется не только числом захваченных электронов

$\sim 0,8 \alpha \gamma c \sin \sqrt{1 - A_p^{-1}}$, но и наличием их фазировки при конечных уровнях ($X_{\text{оп}} \lesssim 2$) предварительной группировки пучка. Отсутст-

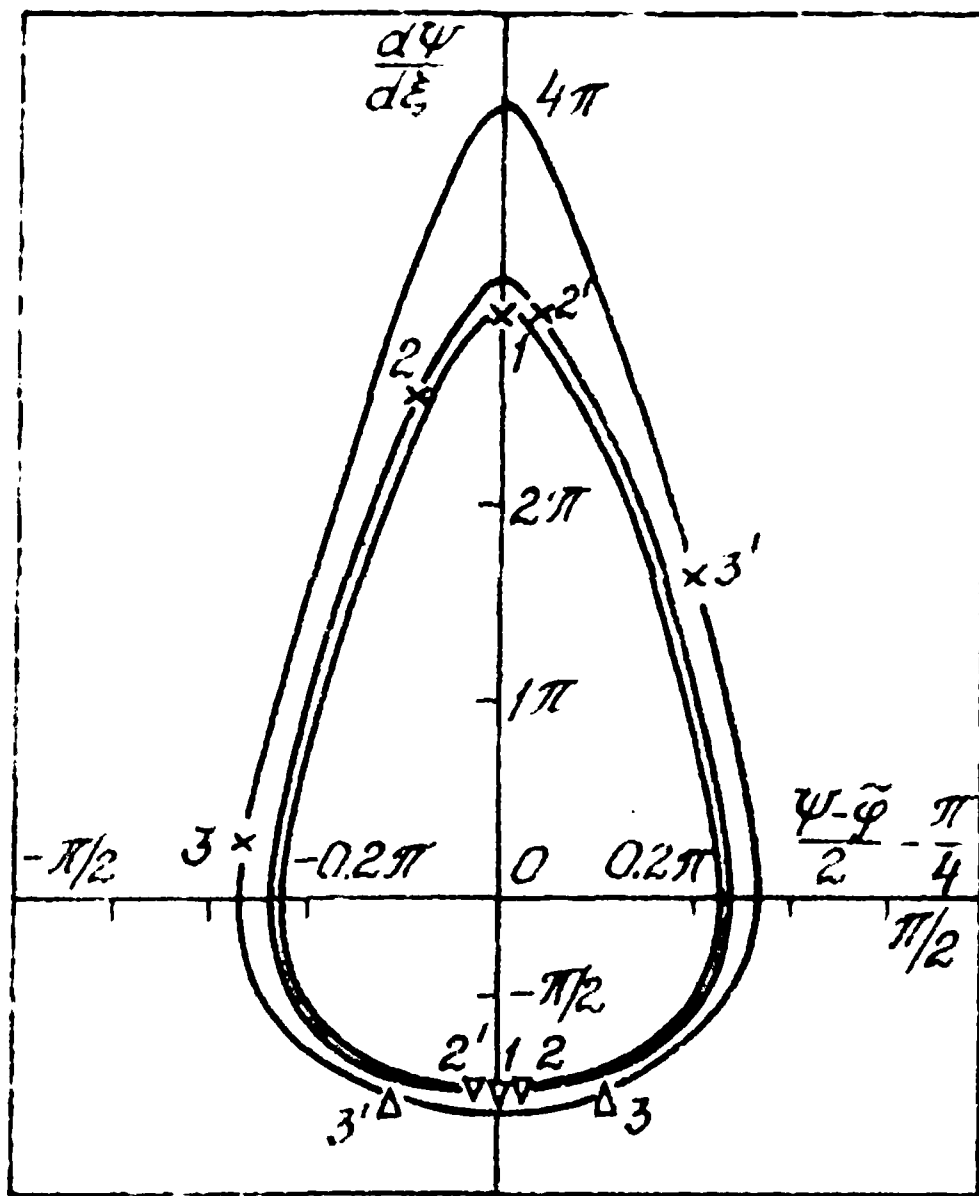


Рис. 2.1. Численные траектории электронов:
 $\varphi_0 = \pi/2$ (точки 1), $\varphi_0 = 1.1\pi$ (2),
 $\varphi_0 = 1.9\pi$ (2'), $\varphi_0 = 1.2\pi$ (3) и
 $\varphi_0 = 1.8\pi$ (3'). $\tilde{\varphi} = \varphi_0 + 1.84 \cos \varphi_0$;
 $A_p = 2, 3$, $\tilde{\varphi}_\varphi = 3\pi$, $\tilde{\varphi}_s = -\pi$, $\beta_{\text{pec}} = 0.01$
 ("Δ" - $\xi = 0$, "X" - $\xi = 1$)

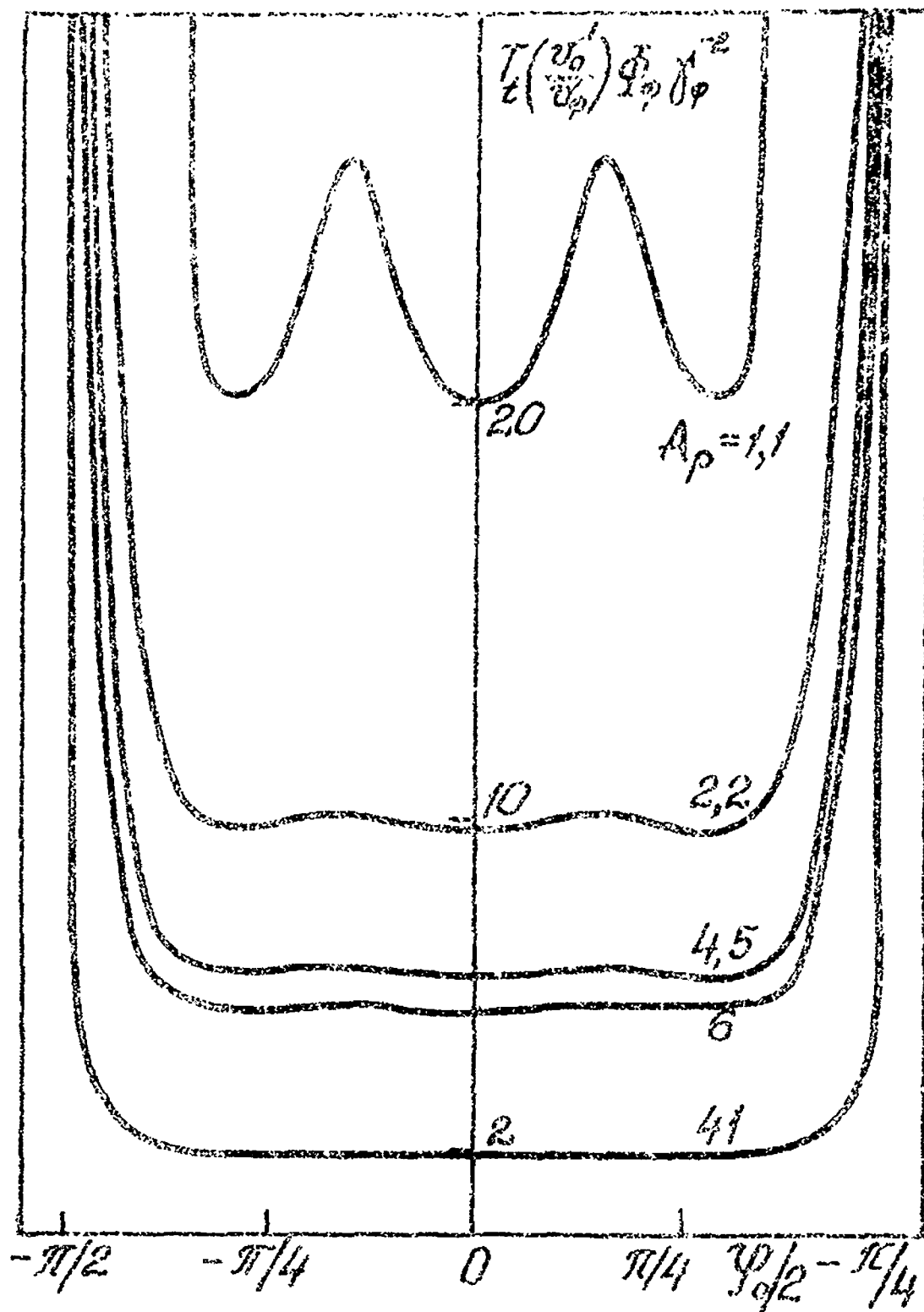


Рис. 2.3. Зависимость нормированного периода фазовых колебаний захваченных частиц от их фазы влета φ_0 при $\varphi = \varphi_0 + 1,84 \cos \varphi_0$ и различных A_p

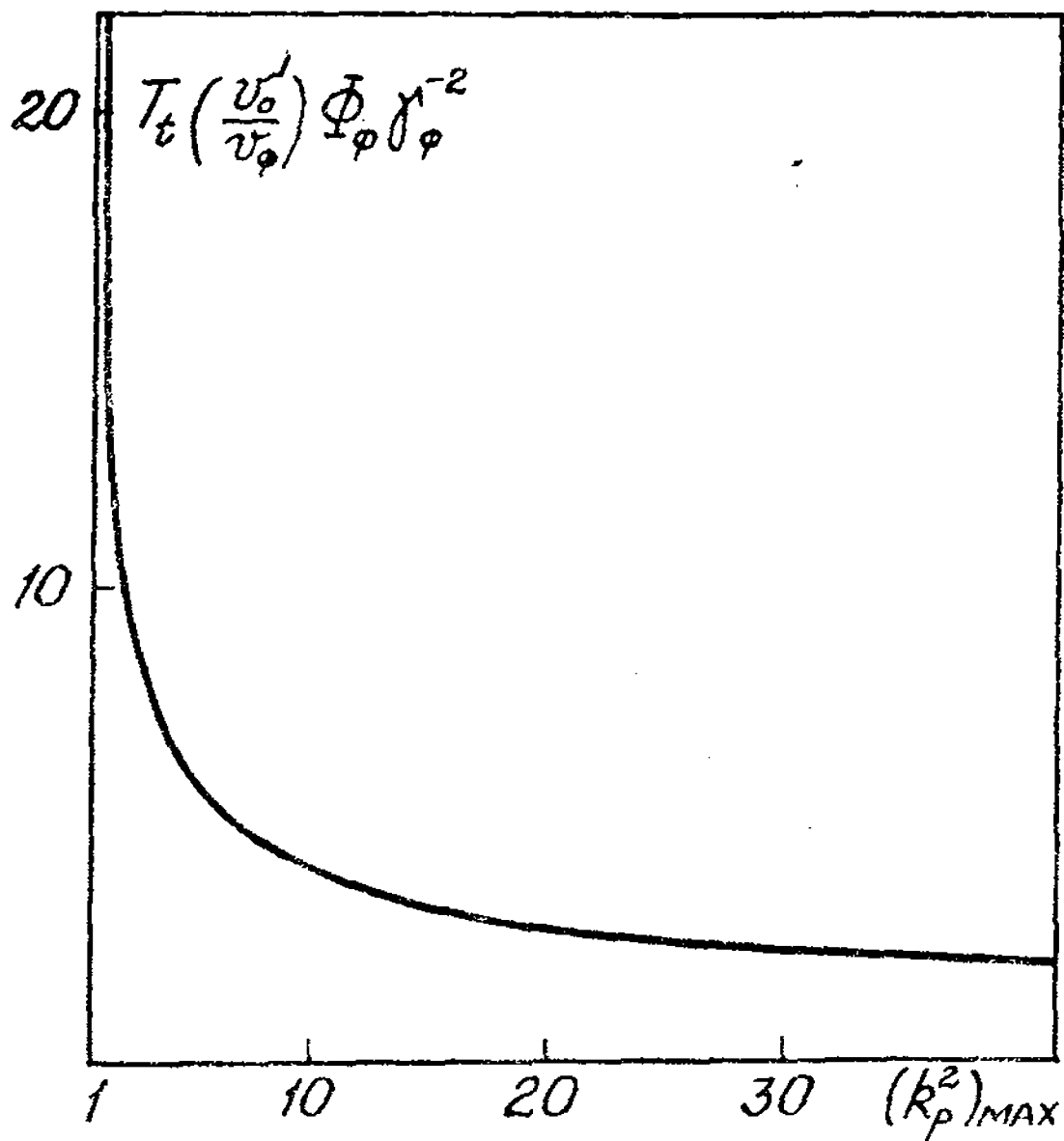


Рис. 2.4. Нормированный период фазовых колебаний захваченных частиц как функция $(k_p^2)_{\max} = A_p$

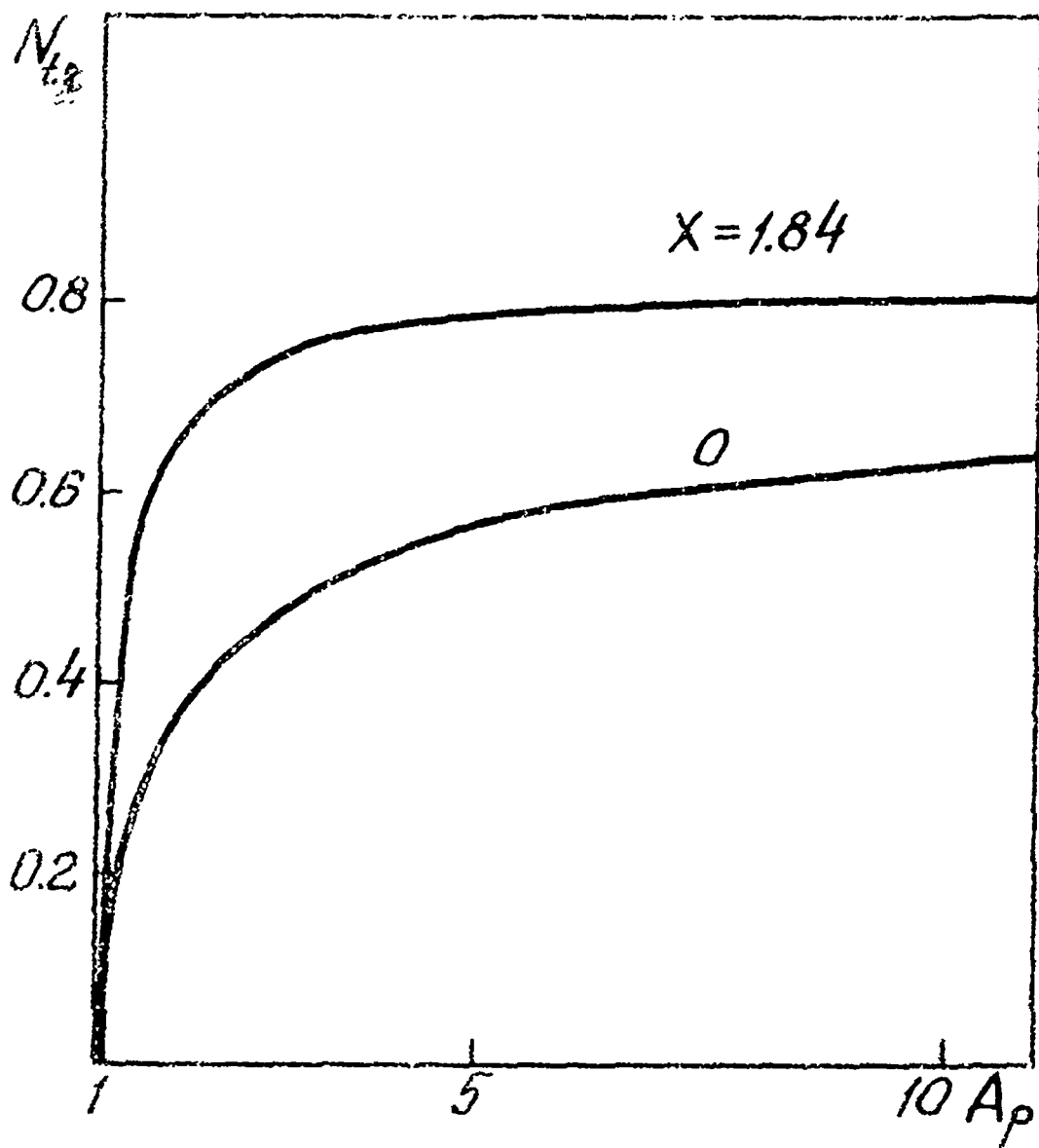


Рис. 2.5. Зависимости показателя качества группировки $N_{т.г.}$ от A_p при $X=1.84$ и $X=0$

вие последнего фактора ($X = 0$) приводит к заметному разбросу периодов колебаний частиц с различными фазами влета, что проиллюстрировано на рис. 2.6. В свою очередь, перегруппировка потока ($X > 2$) также снижает эффективность взаимодействия, поскольку при этом вместо когерентного сгустка электронов образуются три группы частиц с индивидуальными периодами осцилляций (рис. 2.7).

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНЫХ КПД

Используя результаты предыдущих параграфов, выпишем оценку для максимального КПД

$$\eta_{\text{MAX}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_e d\varphi_0 \approx 4N_{t2}(X^0, A_p^0)(v_0'/v_\varphi)(1+v_0'/v_\varphi)^{-2},$$

где $v_0'/v_\varphi = -\delta_\varphi^2 (\Phi_s/\Phi_\varphi)/(1+\delta_\varphi^2 \Phi_s/\Phi_\varphi)$, $X^0 = X_{\text{оп}}$, откуда находим искомую величину R_{MAX}

$$R_{\text{MAX}} \approx 0,026 \left(\frac{v_0}{v_\varphi}\right)^4 \frac{\delta_0^4 N_{t2}^2(X^e, A_p^e) f_{\text{эф}}^2 (\Phi_s)_{\text{эф}}^2 (1+\delta_\varphi^2 \Phi_s/\Phi_\varphi)^2}{\delta_\varphi^2 (1+\delta_0)^2} \quad (2.12)$$

Совокупность величин $(\mathcal{F}_p \Phi_{0\text{эф}})_{\text{оп}}$ и R_{MAX} является достаточной для оценки влияния параметров электродинамической системы и пучка на максимальные КПД прибора. Так, соотношение

$$\eta_{\text{MAX}} \approx R_{\text{MAX}} G = \frac{0,0512 \delta_\varphi^2 N_{t2}^2 f_{\text{эф}}^2 (\Phi_s)_{\text{эф}}^2 (1+\delta_\varphi^2 \Phi_s/\Phi_\varphi) Q^2 L^2}{(\delta_\varphi^2 - 1)^2 \omega_z N_z (m_0 c^2/e)} I_0 U_p \quad (2.13)$$

устанавливает зависимость максимальной эффективности взаимодействия пучка и поля от основных физических характеристик и параметров.

Определим теперь оптимальные значения отношения тока пучка к его минимальному пусковому значению

$$\frac{I_0}{I_{\text{пуск мин}}} = (G \Phi_0)_{\text{оп}} / (G \Phi_0)_{\text{пуск мин}}. \text{ Согласно [10, 11],}$$

минимальная пусковая величина комбинации

$$(G \Phi_0)_{\text{пуск мин}} = 1 / (dS^2/d\Phi_{sk})_{\text{MAX}}, \text{ а оптимальное значение}$$

2 G получим из стационарного уравнения возбуждения

$$\mathcal{F}_p^2 = (G)_{\text{оп}} \eta(\mathcal{F}_p, \gamma_z),$$

которому при $(\gamma_z)_{\text{оп}}$ и $\eta_{\text{MAX}} \approx (G)_{\text{оп}} R_{\text{MAX}}$ должна удовлетворять оптимальная амплитуда

$$\mathcal{F}_p^0 = (\mathcal{F}_p \Phi_{0\text{эф}})_{\text{оп}} / \Phi_{0\text{эф}}.$$

В результате очевидных преобразований имеем

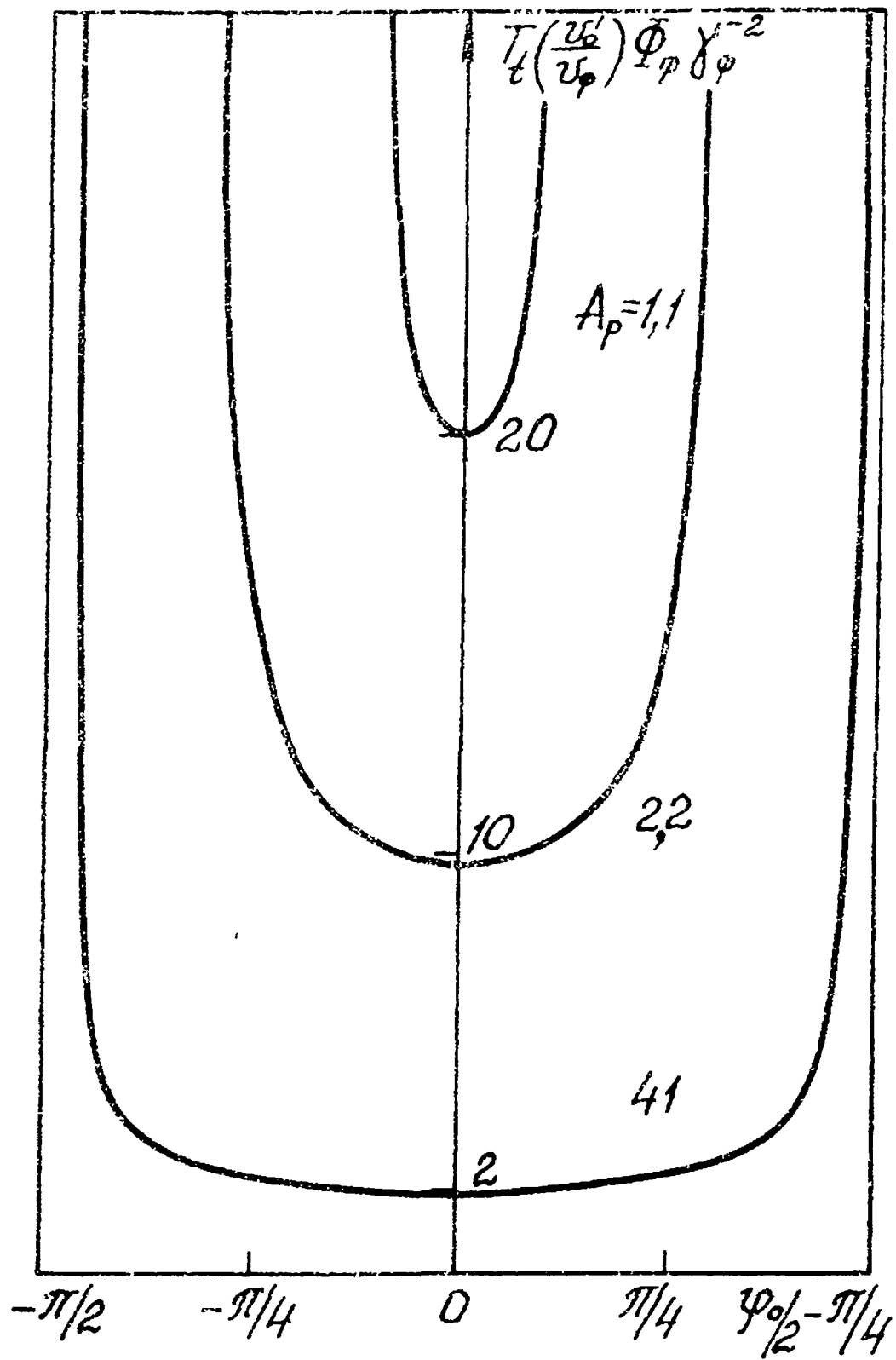


Рис. 2.6. Зависимость $T_t \left(\frac{v'_0}{v'_\varphi} \right) \Phi_\varphi \delta_\varphi^{-2}$ от $\varphi_0/2 - \pi/4$ при отсутствии предварительной группировки пучка ($X=0$)

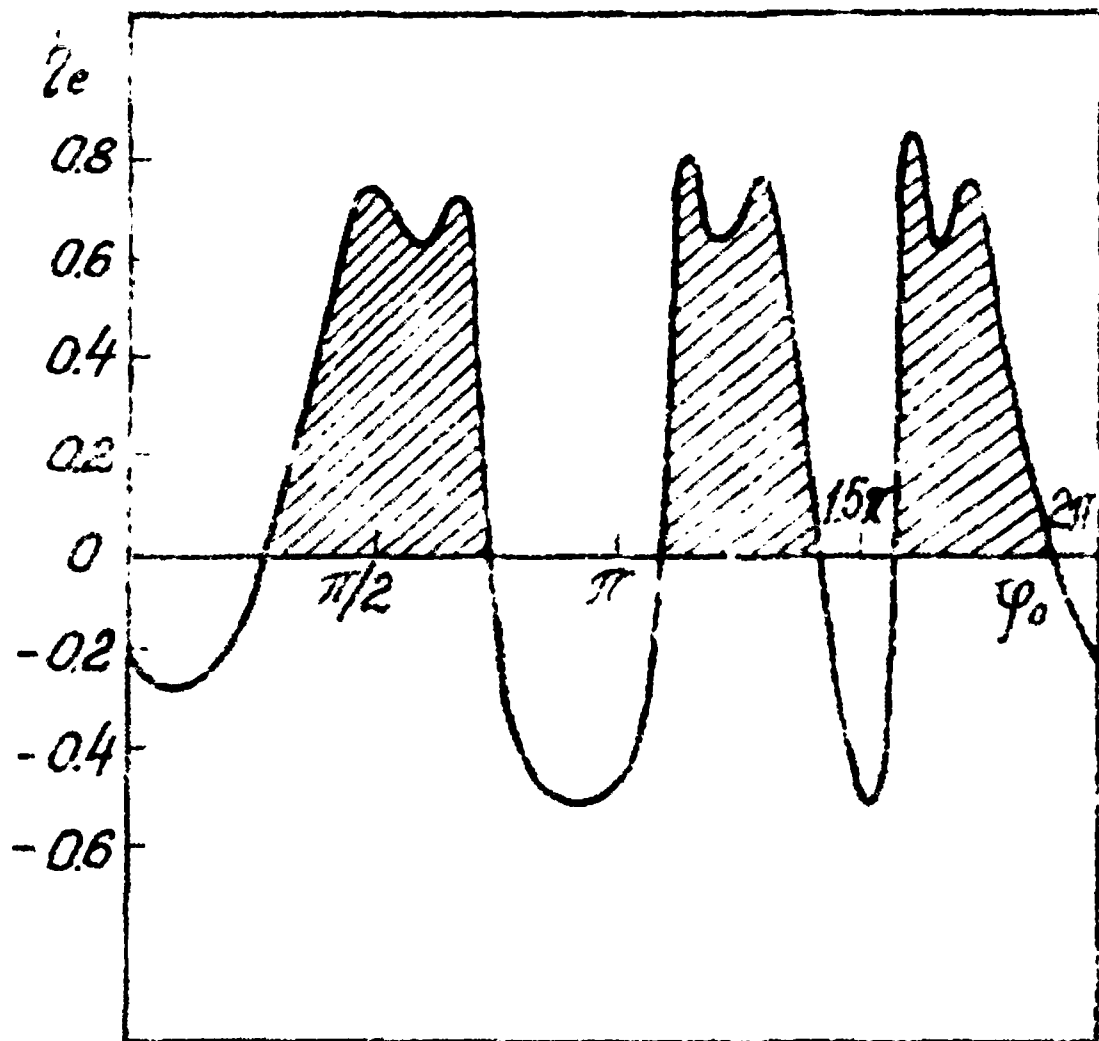


Рис. 2.7 Значения КПД электронов при $\bar{\varphi} = \varphi_0 + 4\cos\varphi_0$ для $f(\xi) = 1$: $\beta_{\varphi c} = 0,9$,
 $A_p = 2,625$, $\Phi_{\varphi} = 10,01\pi$, $\Phi_s = -\pi$

$$\left(I_0 / I_{\text{пуск. мин}} \right)^0 \approx \frac{34,7 \pi^2 (\nu_\varphi / \nu_0)^5 (1 + \delta_0)^2 \delta_\varphi^4 (dS^2 / d\Phi_{sk})_{\text{max}} (L / L_{\text{эф}})}{\delta_0 (1 + \delta_0) f_{\text{эф}}^2 \delta_\varphi^4 N_{tz} |\Phi_3|_{\text{эф}} (1 + \delta_\varphi^2 \Phi_s / \Phi_\varphi)} \quad (2.14)$$

где, напомним, $S^2(\Phi_{sk})$ - квадрат плотности пространственного спектра распределения поля резонатора $f(y) e^{ik_0 y}$ вдоль области взаимодействия L .

В правомерности полученных оценок можно убедиться, сопоставив их с аналогичными характеристиками, установленными в результате численного интегрирования самосогласованной системы уравнений. Такие расчеты проведены в [5] для многорезонаторных усилителей с нерелятивистскими пучками ($\nu_\varphi^2 \ll c^2$). В случае гауссова распределения поля с $\omega = 0,25$ при оптимальном значении

$\Phi_s \approx -2,1\pi$ (т.е. $\Phi_{s\text{эф}} \approx -1,05\pi$) и $\Phi_0 = 100$ ($\Phi_{0\text{эф}} \approx 50$) было показано, что если пренебречь изменением средней скорости частиц на траектории (т.е. $d\psi/d\xi = -\Phi_s$), то $R_{\text{max}} \approx 0,06$ при $(\mathcal{F}_p \Phi_0)_{\text{оп}} \approx 77$. Полученные нами аналитические оценки для этого случая преобразуются к такому виду:

$$\begin{aligned} A_p^0 &\approx 1,25 \pi^2 (\nu_\varphi / \nu_0)^2 / \omega^2 \Phi_s^2, \\ (\mathcal{F}_p \Phi_0)_{\text{оп}} &\approx 37,85 (\nu_\varphi / \nu_0)^3 / \sqrt{\omega}, \\ R_{\text{max}} &\approx 0,01 \omega N_{tz}^2 \Phi_s^2 (\nu_0 / \nu_\varphi)^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Если в соотношения (2.15) подставить соответствующие значения параметров, то при $X^0 = 1,84$, $\nu_0 \approx \nu_\varphi$ получим: $N_{tz} \approx 0,78$; $A_p^0 \approx 4,5$; $(\mathcal{F}_p \Phi_0)_{\text{оп}} \approx 76$; $R_{\text{max}} \approx 0,06084$. Для однородного распределения $f(y) = 1$ подобная процедура сравнения дает схожие результаты. Например, из результатов численного интегрирования при $\Phi_s \approx -1,5\pi$, $\Phi_0 = 100$, $X^0 = 1,84$ следует [5], что оптимальное значение комбинации $(\mathcal{F}_p \Phi_0) \sqrt{R_{\text{max}}} \approx 11$ незначительно отличается от результата аналитической оценки $\sqrt{R_{\text{max}}} (\mathcal{F}_p \Phi_0) \approx 12,1$ при $A_p^0 \approx 2,2$, $N_{tz} \approx 0,7$.

Необходимо отметить, что область применимости полученных оценок ограничена предположением о малости динамического изменения на расстоянии $\sim \lambda_3$ кинетической энергии электрона по сравнению с собственной энергией электрона $m_0 c^2 \approx 0,5$ МэВ.

Кроме того, до проведения численных расчетов оптимальная величина параметра рассинхронизма не известна, мы можем указать только диапазон $(dS^2 / d\Phi_{sk} > 0)$ допустимых значений Φ_s .

Поэтому целесообразно сформулировать более универсальную оценку эффективности преобразования энергии свободных релятивистских электронов в высокочастотное поле резонатора. С этой целью воспользуемся формулой (I.386) для максимального КПД захваченного электрона с начальной фазой $\tilde{\varphi} \approx \pi/2$. Тогда предполагая, что выбраны оптимальные значения $L\omega$, \mathcal{F}_p^0 и X^0 , получим искомую оценку:

$$\eta_{\text{MAX}} \approx \frac{1}{2\pi} \langle \eta_e \rangle_{\tilde{\varphi}_{tz}} \approx N_{tz}(A_p^0, X^0) \frac{4G_k \sqrt{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_k^2 / 4}}{2\delta_{\varphi} / (1 + \delta_{\varphi}) + G_k(G_k + 2\sqrt{1 + \beta_{\varphi c}^2 G_k^2 / 4})}, \quad (2.16)$$

где $G_k = \beta_{\varphi c}^{-1} \sqrt{2} \left[(1 - \beta_{\varphi c}^2 \alpha_k^2)^{-1/2} - 1 \right]^{1/2}$; $\alpha_k = \delta_{\varphi}^2 \delta k / (1 - \delta_{\varphi}^2 \delta k)$;

$$\delta k = -(k - \omega/v_{\varphi}) / (\omega/v_{\varphi}).$$

В соотношении (2.16) нашли отражение следующие особенности рассматриваемого процесса. Во-первых, основной вклад КПД принадлежит захваченным электронам, большинство из которых при оптимальных режимах предварительной группировки и последующего захвата ($A_p^0 > 2$) скомпонованы в когерентные сгустки. Поэтому процедура усреднения $\frac{1}{2\pi} \langle \eta_e \rangle_{\tilde{\varphi}_{tz}}$ по фазам влета захваченных частиц $\tilde{\varphi}_{tz}(\varphi_0)$ эквивалентна умножению (I.386) на показатель качества сгустка N_{tz} . Обоснованность этих предположений подтверждают приведенные на рис. 2.8а, 2.8б, 2.8в зависимости КПД отдельных частиц в конце пространства взаимодействия от их фаз влета φ_0 при $\tilde{\varphi} = \varphi_0 + 1,84 \cos \varphi_0$. Численное интегрирование уравнения движения (I.4) с $f(\xi) = 1$ проводилось при оптимальных для $\beta_{\varphi c} = 0$ 2/3 и 0,9 параметрах. Штриховкой выделены фазы влета φ_0 электронов, образующих когерентный сгусток (см. рис. 2.3 и показанную на рис. 2.8а зависимость $(\dots) \sin^2(\tilde{\varphi}(\varphi_0)/2 - \pi/4)$). Вариации величины КПД обусловлены наличием небольших отклонений начальных фаз $\tilde{\varphi}(\varphi_0)$ этих частиц от $\pi/2$. Во-вторых, взаимное соответствие размеров зоны усиления по параметру Φ_S (ускоряющему напряжению) и характерной ширины $\Phi_{Sk} = L(k - \omega/v_{\varphi})$ участка спектра функции $f(y) \exp(j\frac{\omega}{v_{\varphi}} y)$, на котором квадрат ее спектральной плотности S^2 имеет положительную производную. Поэтому использование формулы (2.16) для оценки максимальных КПД усилителей с различными типами электродинамических структур выходного резонатора зависит от возможности введения универсальной процедуры

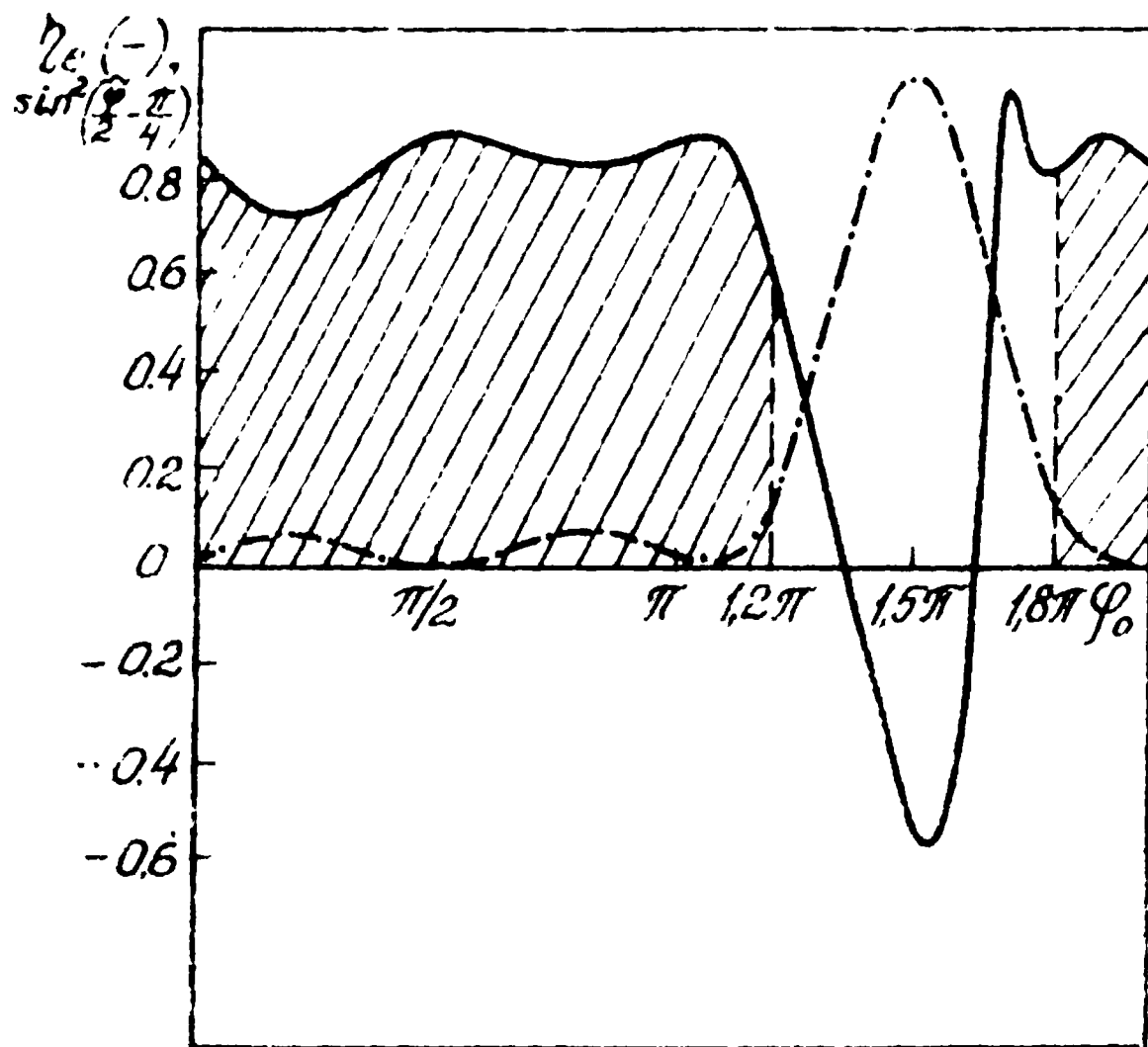


Рис. 2.8а. Зависимость электронных КПД частиц от их фазы влета φ_0 при $\varphi = \varphi_0 + 1,84 \cos \varphi_0$:
 $\beta_{\varphi c} = 0,01$, $A_p = 2,27$, $\varphi_{\varphi} = 3\pi$, $\varphi_s = -\pi$, $f(\xi) = 1$

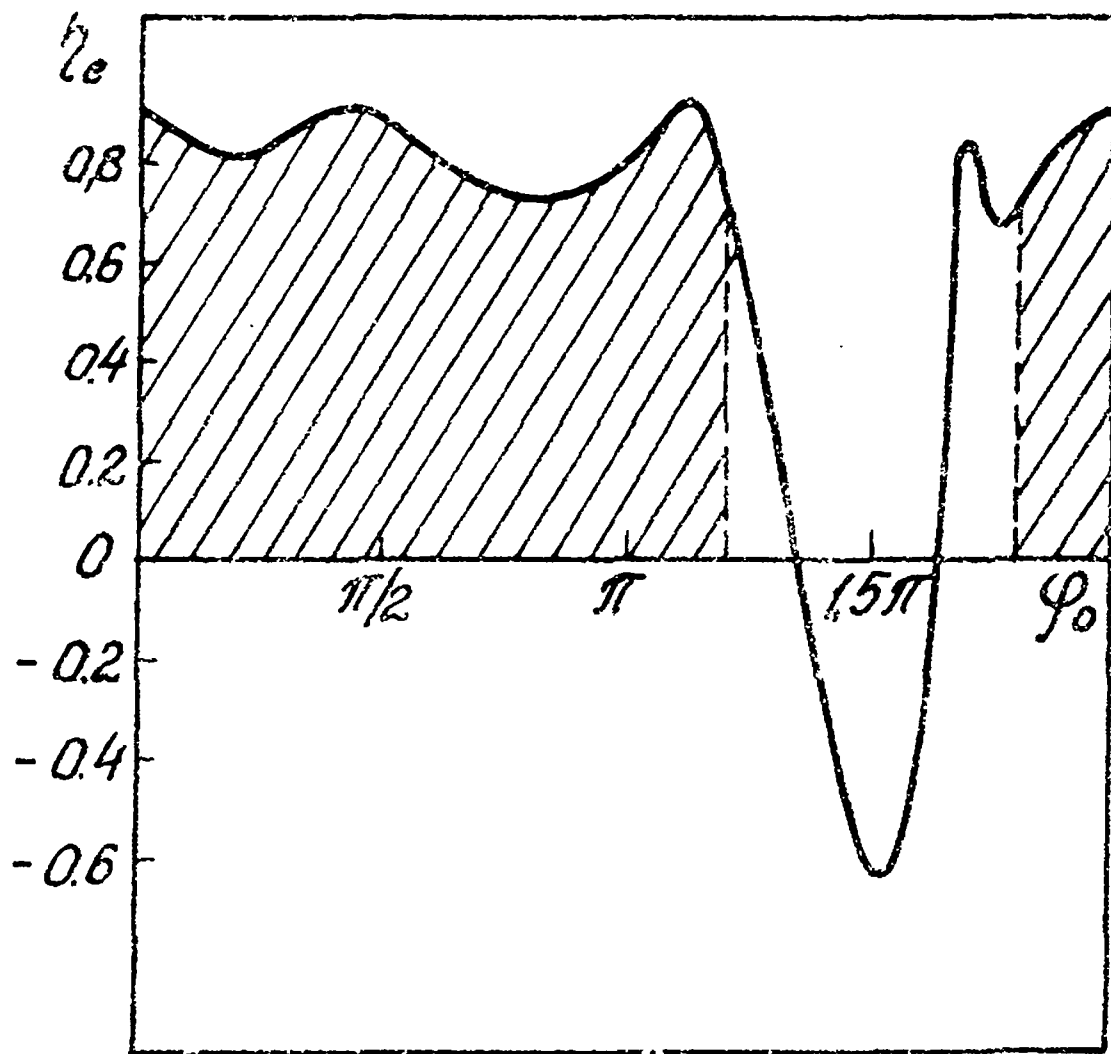


Рис.2.86. Зависимость электронных КЭД частиц от их фазы влета ψ_0 при $\tilde{\psi} = \psi_0 + 1,84 \cos \psi_0$:

$$\beta_{\varphi c} = 2/3, \quad A_p = 2,3, \quad \Phi_{\varphi} = 3,5\pi, \quad \Phi_s = -\pi$$

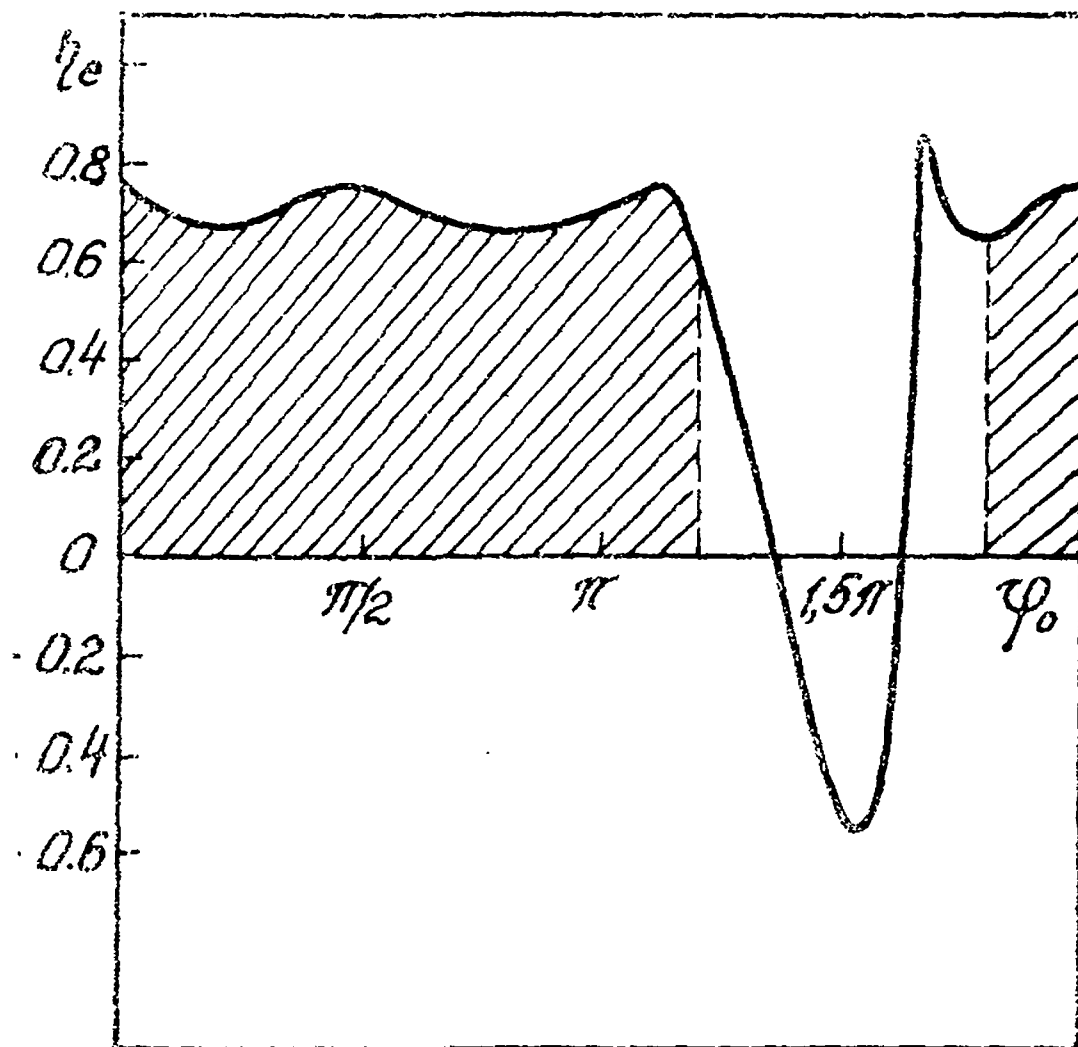


Рис. 2.8в. Зависимость электронных КИД частиц от их фазы влета ψ_0 при $\varphi = \psi_0 + 1,84 \cos \psi_0$:
 $\beta_{\text{фс}} = 0,9$, $A_p = 2,625$, $\varphi_p = 10,01\pi$, $\varphi_s = -\pi$

определения величины δk_y относительной ширины спектра пространственного распределения поля медленной волны. Если обратиться к известным результатам анализа разнообразных резонансных систем с распределенным взаимодействием 0-типа (например, [5, 10, 11]), то прослеживаются характерные особенности: наибольшие КПД приходятся на те зоны усиления, где параметр $\Phi_{sk}^0 < 0$ и ограничен сверху значением $(\Phi_{sk}^0)_{\text{пучк}}$, при котором производная $dS^2/d\Phi_{sk}^0$ максимальная (т.е. пусковой ток автогенерации $\sim 1/(dS^2/d\Phi_{sk}^0)$ минимален). В этой связи необходимо отметить, что детальные исследования нерелятивистских усилителей и генераторов [5, 9, 11] указывают на взаимосвязь максимальных КПД именно с шириной спектральной линии $\sim |\Phi_{sk}^0 - \Phi_{sk}^M|$, где $\Phi_{sk}^M < 0$ — координаты максимума S^2 в рассматриваемом диапазоне изменения параметра Φ_{sk}^0 . Ненулевые значения Φ_{sk}^0 имеют только знакопеременные функции $f(\xi)$, а для монотонных зависимостей $f(\xi)$ максимум S^2 наблюдается при $\Phi_{sk}^M = 0$. Ширину пространственного спектра δk_y можно определить по уровню $S_{\text{max}}^2 e^{-1}$. Тогда достаточно общая оценка δk_y выглядит так:

$$\delta k_y = |\Phi_{sk}^0 - \Phi_{sk}^M| / \Phi_\varphi. \quad (2.17)$$

Например, из формулы для S^2 однородного распределения поля

$$S^2 = \frac{1}{8\pi} \sin^2(\Phi_{sk}/2) / (\Phi_{sk}/2)^2$$

получим $\Phi_{sk}^M = 0$, $(\Phi_{sk}^0)_{\text{пучк}} \approx -0,83\pi > \Phi_{sk}^0 \approx -1,05\pi$ и $\delta k_y = \delta k \approx 1,05\pi / \Phi_\varphi$. Аналогичные расчеты для гауссовой конфигурации поля показывают, что $\Phi_{sk}^M = 0$,

$$(\Phi_{sk}^0)_{\text{пучк}} \approx -\omega^{-1} > \Phi_{sk}^0 = -\sqrt{2}/\omega \text{ и } \delta k_y \approx \sqrt{2}/\omega \Phi_\varphi = 0,9\pi / (\Phi_\varphi)_{\text{эф}}$$

То есть, если известна область эффективного взаимодействия $L_{\text{эф}}$, то δk_y можно оценить по формуле

$$\delta k_y \approx \pi / (\Phi_\varphi)_{\text{эф}}. \quad (2.18)$$

Результаты использования этой оценки для расчетов зависимости η_{max} от $(\Phi_\varphi)_{\text{эф}} \sim L_{\text{эф}}/\lambda_z$ по формуле (2.16) при различных соотношениях U_φ и C показаны на рис. 2.9. Как и в случае нерелятивистских усилителей [5], рост δk_y за счет уменьшения $(\Phi_\varphi)_{\text{эф}}$ приводит к монотонному увеличению КПД $\sim (\Phi_\varphi)_{\text{эф}}^{-1}$ с выходом на предельный уровень $(\eta_{\text{max}})_{\text{пред}}$ и последующим резким срывом до нуля. Отметим, что $(\eta_{\text{max}})_{\text{пред}}$ находятся в окрестности минимальных значений $(\Phi_\varphi)_{\text{эф}}$, подчиняющихся соотношению

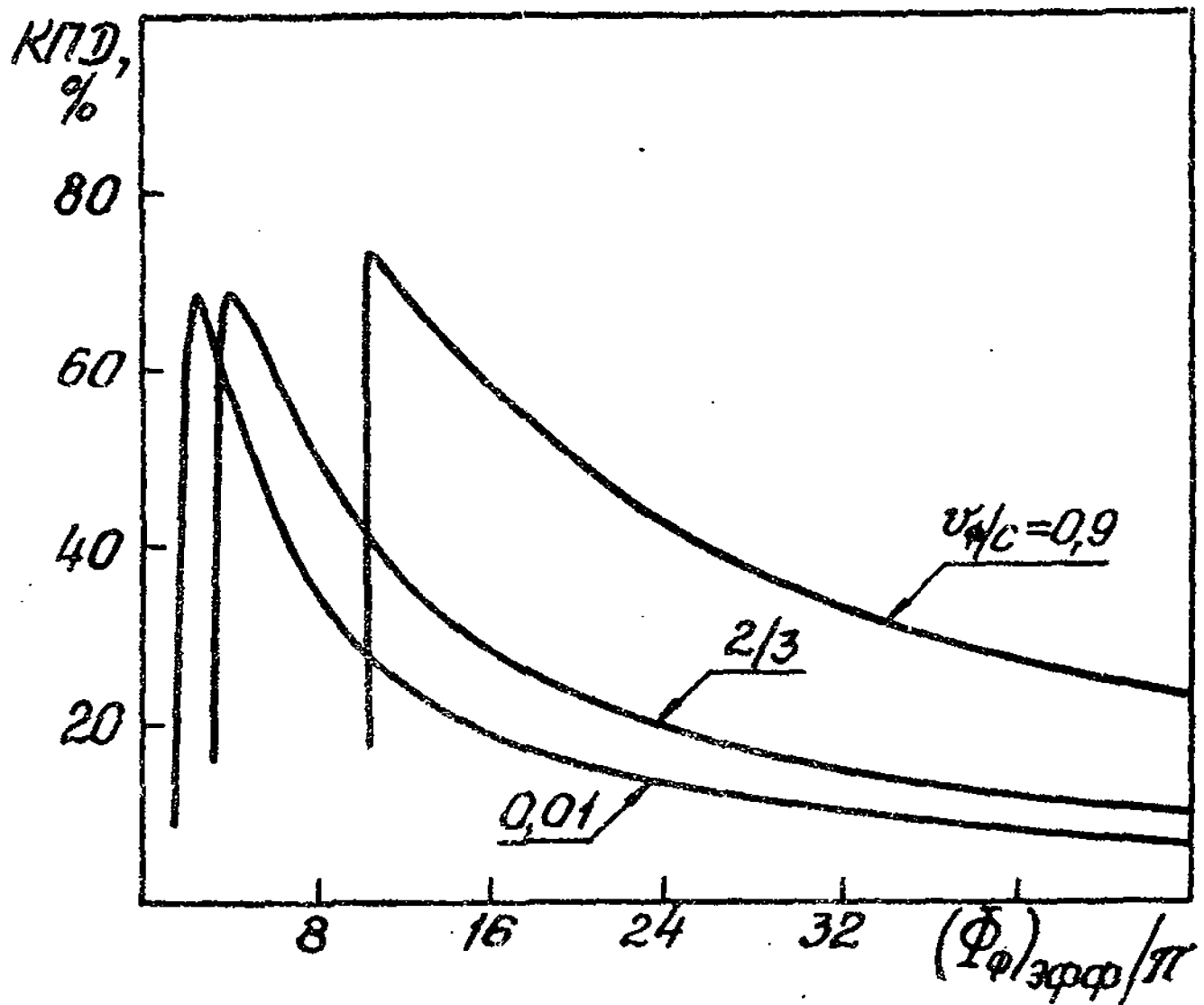


Рис. 2.9. Максимальные КПД усилителя как функции нормированной длины области эффективного взаимодействия $(\Phi_\varphi)_{эф} = 2\pi L_{эф}/\lambda_3$ при различных $\beta_{\varphi c}$

$\delta k_y \ll (1 + 2\delta_\varphi^2)^{-1}$, которое следует из полученных в [1] условий применимости одноволновой модели взаимодействия пучка с полем замедляющей структуры:

$$v_0/v_\varphi \leq 1 + 0,5/\delta_\varphi^2,$$

$$v_0'/v_\varphi \leq \delta_\varphi^2(1 + \delta_\varphi^2)^{-1},$$

$$\Phi_s \geq -\Phi_\varphi(1 + 2\delta_\varphi^2)^{-1}.$$

Тогда с учетом этих ограничений имеем

$$(\Phi_\varphi)_{эф}^0 \approx \pi(1 + 2\delta_\varphi^2) \quad \text{и} \quad (\Phi_0)_{эф}^0 \approx 2\pi\delta_\varphi^2. \quad (2.19)$$

Остановимся более подробно на сравнении аналитических соотношений с известными результатами численных расчетов и экспериментальными данными. Примером реализации предельных параметров на практике может служить 3-резонаторный усилительный клистрон с распределенным взаимодействием, который описан в работе [2]. Наибольший КПД ($\eta_{MAX} \approx 65\%$) в нем был достигнут на частоте $f \approx 1,1$ ГГц ($\lambda \approx 30$ см) при $L_{эф} \approx 8,9$ см $\approx 1,5\lambda_3$, $U_p = 30$ кВ, $\Phi_0^0 \approx 6,244$ и $v_0/v_\varphi \approx 1,57$. Из представленных в [12] данных численного анализа теоретической модели этого прибора следует, что $\eta_{MAX} \approx 70\%$, если $v_0/v_\varphi \approx 1,6$, $\Phi_s \approx -1,15\pi$ и $\Phi_\varphi \approx 3,067\pi$. Близкие результаты следуют из полученных в данной работе аналитических соотношений $\eta_{MAX} \approx 64$; $(v_0/v_\varphi)_{оп} = 1,5$; $(\Phi_\varphi)_{эф}^0 \approx 3\pi$, $(\Phi_0)_{эф}^0 \approx 2\pi$. Подчеркнем, что и для усилителей на основе открытых резонаторов при $w = 1/4$ получено [5] $\eta_{MAX} \approx 65\%$, если $(\Phi_0)_{оп}^0 \approx 12$ или $(\Phi_0)_{эф}^0 \approx 6$. Это подтверждает универсальность и обоснованность предлагаемых аналитических оценок. При переходе в релятивистскую область находим следующий закон изменения предельных уровней КПД (см. также рис. 2.9):

$$(\eta_{MAX})_{пред} \approx N_{tz}(A_p^0, X^0) \cdot 2\delta_\varphi(\delta_\varphi^2 - 1) / (2\delta_\varphi^3 - \sqrt{1 + 3\delta_\varphi^2}) \quad (2.20)$$

при $A_p^0 \approx 5\pi^2(1 + \delta_\varphi^2)^2 / [9(1 + 2\delta_\varphi^2)^2] > 2,43$.

$\beta_{pc} < 0,9$

Полученные аналитические соотношения позволяют объяснить наблюдаемые в численных и натуральных экспериментах зависимости η_{MAX} от $(\Phi_\varphi)_{эф}^0$ или $(\Phi_0)_{эф}^0$. Для наглядности преобразуем (2.16), считая что $(v_0'/c)^2 \sim \beta_{pc}^2$, $G_p \sim \varepsilon^2 \ll 1$, тогда

$$\eta_{MAX} \approx N_{tz}(A_p^0, X^0) \cdot 4\delta_\varphi^2 \delta k_y (1 - \delta_\varphi^2 \delta k_y). \quad (2.21)$$

Для большинства значений $(\bar{\Phi}_\varphi)_{эф}$ наблюдаемое увеличение η_{\max} при сокращении $(\bar{\Phi}_\varphi)_{эф}$ до $(\bar{\Phi}_\varphi)_{эф}^0$ следует непосредственно из соотношения

$$v_0'/v_\varphi = (1 - \gamma_\varphi^2 \delta k_y)^{-1} - 1.$$

Действительно, чем большую часть кинетической энергии пучка мы хотим трансформировать в энергию синхронной волны, тем большей должна быть его начальная скорость v_0' в сопутствующей волне системе координат. При этом оптимальная величина отношения

$$A_p^0 \approx 5,06 \pi^2 (1 - \gamma_\varphi^2 \delta k_y)^2 / (\bar{\Phi}_{эф})^2 > 2 \quad \text{и}$$

$N_{эф} \geq 0,7$. Однако последующее сокращение $L_{эф}$ приводит к уменьшению A_p^0 до 1, т.к. $F_p^0 \sim 1/(\bar{\Phi}_\varphi)_{эф}$, а $F_{эф} \sim 1/(\bar{\Phi}_\varphi)_{эф} (1 - \gamma_\varphi^2 \delta k_y)^2$. Следовательно, для образующих сгусток захваченных электронов резко увеличивается в окрестности сепаратрисы разброс оптимальных

$L_{эф}$ и периодов фазовых колебаний T_t (см. рис. 2.3), в то время как при $A_p^0 > 2$ практически у всех этих частиц был $T_t \approx 1,8 \sqrt{F_{эф}^0}$. То есть, если $(\bar{\Phi}_\varphi)_{эф} < (\bar{\Phi}_\varphi)_{эф}^0$, то $A_p^0 \rightarrow 1$ и показатель качества группировки захваченного сгустка $N_{эф} \rightarrow 0$. Отсюда следует, что резкое падение η_{\max} при $(\bar{\Phi}_\varphi)_{эф} < (\bar{\Phi}_\varphi)_{эф}^0$ связано прежде всего с невозможностью совместить достаточную когерентность фазовых колебаний захваченной совокупности частиц и оптимальные условия для передачи их энергии полю резонансной системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основываясь на аналитическом решении задачи о динамике релятивистских частиц, проведены анализ и оптимизация энергообмена релятивистского потока электронов и поля резонатора с распределенным взаимодействием O -типа.

Установлены оптимальные для КПД соотношения между амплитудой поля и длиной пространства взаимодействия.

Рассмотрены условия формирования сгустка захваченных электронов и эффективного преобразования их энергии в электромагнитное излучение.

Получены аналитические оценки зависимостей максимальных КПД многокаскадных усилителей мощности от физических параметров электродинамической системы и пучка.

Определена оптимальная величина отношения тока пучка к его минимальному пусковому значению.

На основе анализа взаимосвязи КПД и характерной ширины спектра пространственного распределения поля резонатора определена зависимость предельных электронных КПД многокаскадных усилителей от размеров области эффективного взаимодействия.

Полученные аналитические соотношения сопоставлены с данными численных и натуральных экспериментов и установлено их хорошее соответствие. Определены области их применимости.

Автор признателен Д.М.Вавриву за постоянное внимание к работе и плодотворные дискуссии, что стимулировало проведение данных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- I. Романцов Ю.А. Исследование динамики релятивистских электронов в поле резонансных систем с распределенным взаимодействием.
Ч. I. Аналитическое решение задачи о динамике частицы.
- Харьков, 1990. - 66с. - (Препринт АН УССР. Радиоастрономический ин-т; № 47).
2. Chodorow M., Kulke B. An extended-interaction klystron: efficiency and band-width // IEEE Trans. E.D. - 1966. - 13, No.4. - P.439-447.
3. Chodorow M., Wessel-Berg T. A high efficiencies klystron with distributed interaction // IRE Trans. E.D. - 1961. - 8, No.1. - P.44-45.
4. Preist D.H., Leidingh W.J. Experiments with high-power C.W. klystrons using extended interaction catcher // IEEE Trans. E.D. - 1963. - 10, No.3. - P.201.
5. Ваврив Д.М., Третьяков О.А. Теория резонансных усилителей О-типа. - Киев: Наук. думка, 1989. - 152с.
6. Wessel-Berg T. A general theory of klystron with arbitrary, extended interaction fields: Tech. Rep. No.376 / Microwave Lab. Stanf. Univ. - 1957. - 56 p.
7. Бороденко В.Г., Малькова Н.Я., Победоносцев А.С. Нелинейный анализ гибридных приборов типа О : Теория клистрона с распределенным взаимодействием // Электрон. техника. Сер. I. Электрон. СВЧ. - 1968. - Вып. 6. - С. 3-30.
8. Усилительные клистроны с распределенным взаимодействием / В.С. Андрушкевич, В.А. Вьрский, Ю.Г. Гамаюнов, В.М. Шевчик. - Саратов, - Изд-во СГУ, 1977. - 152с.
9. Ваврив Д.М., Третьяков О.А., Шматько А.А. Теория резонансных генераторов с длительным взаимодействием. - Харьков. 1978. - 60 с. - (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низких температур;).
10. Ваврив Д.М., Романцов Ю.А. Влияние структуры поля открытых резонаторов на выходные характеристики усилителей оротронного типа // Электрон. техника. Сер. I. Электрон. СВЧ. - 1988. - Вып. 7. - С. 3-8.
- II. О новом механизме возбуждения генератора дифракционного излучения - лазера на свободных электронах / Ю.И. Евдокименко, К.А. Лунин, И.Д. Ревин и др. // Докл. АН УССР. - 1982. - 265, №2. - С. 318-321.
12. Ваврив Д.М. Теория усиления, синхронизации и преобразования

колебаний в резонансных системах с распределенным взаимодействием и ее приложения в электронике. - Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. - Харьков, ХГУ, 1987. - 370 с.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Часть I | |
| Аналитическое решение задачи о динамике частиц | 3 |
| Введение | 4 |
| 1. Уравнения движения электронов | 5 |
| 2. Решение уравнения движения в приближении маятника | 9 |
| 3. Интегралы движения | 16 |
| 4. Движение релятивистского электрона в поле однородной синхронной волны | 25 |
| Заклучение | 34 |
| Список литературы | 35 |
| Часть II | |
| Анализ энергообмена пучка релятивистских электронов с полем резонатора | 38 |
| Введение | 39 |
| 1. Оптимальное соотношение амплитуды поля и длины ЗС | 40 |
| 2. Анализ формирования сгустка захваченных электронов | 44 |
| 3. Аналитические оценки максимальных КПД | 50 |
| Заклучение | 62 |
| Список литературы | 63 |

Юрий Анатольевич Романцов

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ
В ПОЛЕ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Редактор Л. А. Коломийченко

Подп. к печ. 05. II. 90. Формат 60x84 I/16.

Бумага тип. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,8 Уч.-изд. л. 3,6

Тираж 200. Зак. № Р 1732. План 1990, поз. № 47. Цена 36 коп.

ИИ АН УССР, 310002, Харьков, ул. Краснознаменная, 4.

Отпечатано на ротапринтере Харьковской городской типографии № 16.

310003, Харьков, ул. Университетская, 16.