

*Б. Росси · К. Грейзен*

---

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ  
С ВЕЩЕСТВОМ

*B. ROSSI and K. GREISEN*

# COSMIC-RAY THEORY

*Reviews of Modern Physics*

Vol. 13, No. 4, pp. 240 — 309

OCTOBER,

1941

Б. РОССИ и К. ГРЕЙЗЕН

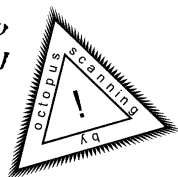
# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ С ВЕЩЕСТВОМ

*Перевод с английского*  
В. Б. БЕРЕСТЕЦКОГО

*под редакцией*  
А. Б. МИГДАЛА

1948

*Государственное издательство*  
**ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**  
*Москва*



## ОТ РЕДАКЦИИ

В книге Росси и Грейзена рассмотрены вопросы, касающиеся взаимодействия заряженных частиц с веществом и особенно подробно изложена каскадная теория ливней. Остальные вопросы теории космических лучей, как, например, влияние магнитного поля Земли, ядерные взаимодействия частиц, теоретический анализ экспериментов, в книге не рассматриваются. Поэтому редакция сочла целесообразным изменить прежнее название книги — Cosmic-Ray Theory.

Изложение некоторых вопросов в книге устарело, особенно это относится к последнему разделу, посвященному поперечным размерам ливней. Исправления и критические замечания по тексту даны в сносках.

Список литературы дополнен наиболее существенными работами советских ученых по теории космических лучей.

## ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие космических лучей с веществом приводит к большому количеству разнообразных вторичных эффектов. Некоторые из них включают в себя ядерные превращения, как это отчетливо показано наличием „звезд“ на фотографических пластинках, облученных космическими лучами. Образование мезотронов есть также, вероятно, ядерный процесс.

Однако ядерные процессы сравнительно редки и, повидимому, не играют существенной роли в более обычных эффектах, наблюдаемых в космических лучах, таких, как поглощение и рассеяние мезотронов или образование ливней электронами и фотонами. Насколько мы знаем, эти явления могут быть интерпретированы как эффекты электромагнитные, т. е. как эффекты, обусловленные взаимодействием между частицами, входящими в состав космических лучей, и электрическими полями ядер и электронов. Количественная теория эффектов, обусловленных электромагнитным взаимодействием, была развита в предположении, что обычные законы квантовой электродинамики могут быть экстраполированы в область энергий, встречающихся в космических лучах. Результаты теории оказались исключительно полезными для расшифровки некоторых очень сложных явлений. Можно надеяться, что они окажут помощь и в отделении электромагнитных эффектов космических лучей от неэлектромагнитных, а также в определении границ применимости квантовой электродинамики.

Частицы первичного космического излучения обладают чрезвычайно высокими энергиями. Однако благодаря взаимодействию с веществом первичная энергия разделяется на все более мелкие порции, пока не преобразуется, в конечном счете, в энергию возбуждения и ионизации атомов. Удобно принять некоторый произвольный предел для энергии  $\eta_0$ , ниже которого частица перестает принадлежать к тому, что мы называем космическим излучением, а ее энергия считается рассеянной. Положим  $\eta_0 = 5 \cdot 10^6 \text{eV}$ , что приблизительно составляет десятикратную энергию покоя электрона. Таким образом, большинство лучей, принадлежащих к области энергий радиоактивности, исклю-

чаются из „космического излучения“. Это ограничение позволит воспользоваться некоторыми упрощениями, допустимыми, когда энергия покоя электрона мала в сравнении с рассматриваемыми кинетическими энергиями.

Главными вторичными эффектами, возникающими при прохождении заряженных частиц через вещество, являются: а) возбуждение атомов, б) выбивание электронов из атомов и в) испускание фотонов. Первые два явления можно рассматривать как результат прямого взаимодействия между первичной частицей и атомным электроном; отнесем их к процессам столкновений без излучения или, коротко, столкновениям. Причиной испускания фотонов является ускорение первичной частицы в кулоновом поле ядра; этот процесс назовем процессом столкновения с излучением или, коротко, излучением.

С фотонами высоких энергий при прохождении через вещество происходят следующие вторичные процессы: а) фотоэлектрический эффект, т. е. поглощение фотона атомом, сопровождающееся испусканием электрона высокой энергии; фотоэлектрический эффект становится все более редким с возрастанием энергии фотона и может вовсе не рассматриваться при энергиях, больших, чем  $\eta_0$ ; б) эффект Комптона, т. е. рассеяние на свободных электронах; в) образование пар, т. е. превращение энергии фотона в положительный и отрицательный электроны.

В первой части этой книги подытожены теоретические формулы, относящиеся к процессам столкновений с излучением и без излучения, а также рассматривается упругое рассеяние. Авторы выражают благодарность профессору Г. Бете за обсуждение вопросов, содержащихся в этой части. Часть II описывает сложные вторичные эффекты (ливни), возникающие от повторения элементарных процессов, рассмотренных в I части. Здесь сделана попытка собрать и дополнить результаты теории ливней, носящие несколько отрывочный характер и рассеянные в литературе. В этой книге мы употребляем всюду систему единиц, предложенную одним из авторов [37], базирующуюся на основных единицах.

В этой системе единицы энергии измеряются в eV, импульсы — в eV/c, массы — в eV/c<sup>2</sup> (e — электрический заряд, V — разность потенциалов, c — скорость света). Масса частицы выражается тем же числом, что и его энергия покоя и характеристический импульс (определяемый как произведение массы на скорость света). Символ  $\mu$  употребляется для обозначения любой из этих трех величин. Мы будем употреблять символы  $\beta$ ,  $E$  и  $p$  для

обозначения соответственно скорости, кинетической энергии и импульса частицы. Энергия фотона будет обозначаться, как правило, через  $W$ . Между  $\beta$ ,  $E$  и  $p$  существуют следующие, хорошо известные соотношения:

$$E = \frac{\mu}{(1 - \beta^2)^{1/2}} - \mu, \quad (1.1)$$

$$E = (p^2 + \mu^2)^{1/2} - \mu, \quad (1.2)$$

$$p = \frac{\mu\beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (1.3)$$

Ниже приведены значения постоянных, которые будут входить в наши вычисления.

#### МИРОВЫЕ ПОСТОЯННЫЕ

Число атомов в грамм-атоме (число Авогадро) . . . . .	$N = 6,02395 \cdot 10^{23}$
Классический радиус электрона . . . . .	$r_0 = 2,8176 \cdot 10^{-13}$ см
Масса электрона . . . . .	$\mu_e = 5,109 \cdot 10^8 eV/c^2$
Масса мезотрона . . . . .	$\mu = 10^8 eV/c^2$
Масса протона . . . . .	$\mu_H = 9,315 \cdot 10^8 eV/c^2$

Эти постоянные были вычислены при помощи следующих значений основных мировых постоянных:

Электрический заряд электрона [12] . . . . .	$e = 4,802 \cdot 10^{-10}$ CGSE
Удельный заряд электрона [12] . . . . .	$e/mc = 1,7591$ CGSM/г
Постоянная тонкой структуры [12] . . . . .	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,036}$
Скорость света [3] . . . . .	$c = 2,99796 \cdot 10^{10}$ см/сек
Число Фарадея [3] . . . . .	$F = 9648,9$ CGSM/г-эквивалент

и следующих формул:

$$N = \frac{Fc}{e}, \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}, \quad \mu_e = \frac{c}{10^8} \cdot \frac{mc^2}{e}, \quad \mu_H = \frac{c}{10^8} \cdot \frac{c}{F}.$$





# ОСНОВНЫЕ ПРОЦЕССЫ

## А. СТОЛКНОВЕНИЯ

### § 1. Применение законов сохранения

В этом и следующем параграфах рассмотрим такие столкновения, в результате которых из атомов выбрасываются электроны с энергиями большими в сравнении с их энергией связи. В таких процессах электрон может считаться свободным, и для определения энергии вторичного электрона как функции угла вылета можно применить законы сохранения энергии и импульса. Результат выражается уравнением (1.4), где  $\mu$  — масса первичной частицы,  $p$  — ее импульс до столкновения,  $\mu_e$  — масса электрона,  $E'$  — его энергия после столкновения,  $\theta$  — угол между начальной траекторией первичной частицы и траекторией вторичного электрона. До столкновения электрон считается покоящимся.

$$E' = 2\mu_e \frac{p^2 \cos^2 \theta}{[\mu_e^2 + (p^2 + \mu^2)^{1/2}]^2 - p^2 \cos^2 \theta} \quad (1.4)$$

$E'$  возрастает с убыванием  $\theta$ ; поэтому максимальная передаваемая энергия  $E'_m$  получится, если в (1.4) положить  $\theta = 0$  (лобовое столкновение):

$$E'_m = 2\mu_e \frac{p^2}{\mu_e^2 + \mu^2 + 2\mu_e (p^2 + \mu^2)^{1/2}} \quad (1.5)$$

Если  $\mu_e \ll \mu$  (мезотроны, протоны), то величиной  $\mu_e^2$  в знаменателе (1.5) можно пренебречь. В предельных случаях малых и больших энергий уравнение (1.5) может быть упрощено следующим образом:

$$p \ll \frac{\mu^2}{\mu_e};$$

$$E'_m = 2\mu_e \left(\frac{p}{\mu}\right)^2 = 2\mu_e \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}; \quad (1.5a)$$

$$p \gg \frac{\mu^2}{\mu_e};$$

$$E'_m = p \approx E. \quad (1.5b)$$

Для сравнительно малых импульсов [уравнение (1.5a)] максимальная передаваемая энергия зависит только от скорости  $\beta$  первичной частицы. Для очень больших импульсов [уравнение (1.5b)] максимальная передаваемая энергия достигает величины самой первичной энергии. Если  $\mu = \mu_e$ , то, очевидно,  $E'_m$  равно  $E$  при всех энергиях. Следует заметить, что  $\frac{\mu^2}{\mu_e}$  порядка  $2.10^{10}$  для мезотронов и  $2.10^{12}$  для протонов. Так как большинство наблюдаемых в космических лучах частиц имеет импульсы порядка  $10^9 \text{eV}/c$ , то условие применимости уравнения (1.5a) выполняется во многих практически важных случаях.

## § 2. Дифференциальная вероятность столкновения

Пусть  $\chi(E, E') dE' dx$  означает вероятность того, что частица массы  $\mu$  заряда  $\pm 1$  и энергии  $E$ , пройдя толщину  $dx$  вещества, передаст свободному электрону энергию от  $E'$  до  $E' + dE'$ . Функцию  $\chi$  назовем дифференциальной вероятностью столкновения. Удобно измерять  $dx$  в  $\text{г}/\text{см}^2$  и ввести константу

$$C = \pi N \frac{Z}{A} r_0^2 = 0,150 \frac{Z}{A}, \quad (1.6)$$

где  $Z$  и  $A$  — атомный номер и атомный вес вещества,  $C$  — полная „площадь“, покрываемая электронами, содержащимися в  $1 \text{ г}/\text{см}^2$ , если их рассматривать как сферы радиуса  $r_0$ .

Взаимодействие между заряженными частицами и электронами определяется главным образом электростатическим притяжением и отталкиванием. Только при очень больших энергиях первичной частицы и малых параметрах столкновения необходимо принимать во внимание другие силы, связанные со спином. Классическая трактовка вопроса дает для малых значений  $E'$  следующее выражение  $\chi$ , известное как формула Резерфорда:

$$\chi(E, E') dE' = \frac{2C\mu_e}{\beta^2} \frac{dE'}{E'^2}. \quad (1.7)$$

Согласно этому выражению, вероятность столкновения  $\chi$  не зависит явно от энергии или массы первичной частицы, а только от ее скорости  $\beta$ . Квантово-механическое рассмотрение приводит опять к формуле (1.7) в пределе малых значений  $E'$ . Однако общее выражение для  $\chi$  отличается от того, которое может быть выведено на основе классической механики, и существен-

ным образом зависит от спина первичной частицы, а также от того, тождественна ли она со вторичным электроном или нет.

а) **Электроны.** Вероятность столкновения для электронов была вычислена Меллером [29] на основе теории Дирака. Для случая, когда энергия  $E$  первичного электрона велика в сравнении с  $\mu_e$ , функция  $\chi$  дается следующим выражением:

$$\chi(E, E') dE' = 2C\mu_e dE' \left[ \frac{E}{E'(E-E')} - \frac{1}{E} \right]^2. \quad (1.7a)$$

(Для электронов  $\beta$  практически равно 1 для любой энергии, большей, чем  $\eta_0$ .)

Так как после столкновения невозможно отличить первичный электрон от вторичного, то уравнение (1.7a) следует понимать так: оно дает вероятность столкновения, после которого один электрон находится в состоянии с энергией  $E'$ , а другой — в состоянии с энергией  $E - E'$ . Таким образом, мы учтем все возможные случаи, полагая  $E'$  меняющимся от 0 до  $\frac{E}{2}$  (а не до  $E$ ). Уравнение (1.7a) симметрично относительно  $E'$  и  $E - E'$  и превращается в (1.7) при  $E' \ll E$ .

б) **Позитроны.** Вероятность столкновения позитронов с электронами была вычислена Баба [11]. Для  $E \gg \mu_e$

$$\chi(E, E') dE' = 2C\mu_e \frac{dE'}{E'^2} \left[ 1 - 2\frac{E'}{E} + 3\left(\frac{E'}{E}\right)^2 - 2\left(\frac{E'}{E}\right)^3 + \left(\frac{E'}{E}\right)^4 \right] \quad (1.7b)$$

Отличие (1.7a) от (1.7b) вызвано тем, что обменные эффекты различны в случае электронов и позитронов.

в) **Мезотроны.** Спин мезотрона пока неизвестен. Поэтому приведем выражения для вероятностей столкновения, отвечающих значениям спина 0,  $1/2$  и 1. Величинами порядка  $\frac{\mu_e}{\mu}$  будем пренебрегать в сравнении с единицей.

Спин 0 [11]:

$$\chi(E, E') dE' = \frac{2C\mu_e}{\beta^2} \frac{dE'}{E'^2} \left( 1 - \beta^2 \frac{E'}{E_m} \right); \quad (1.7c)$$

Спин  $1/2$  [11], [30]:

$$\chi(E, E') dE' = \frac{2C\mu_e}{\beta^2} \frac{dE'}{E'^2} \left[ 1 - \beta^2 \frac{E'}{E_m} + \frac{1}{2} \left( \frac{E'}{E + \mu} \right)^2 \right]; \quad (1.7d)$$

Спин 1 [30], [34]:

$$\chi(E, E') dE' = \frac{2C_{\mu_e}}{\beta^2} \frac{dE'}{E'^2} \left[ \left(1 - \beta^2 \frac{E'}{E'_m}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{1}{3} \frac{E'}{E_c}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{E'}{E + \mu}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{E'}{E_c}\right) \right], \quad (1.7e)$$

где  $E_c = \frac{\mu^2}{\mu_e} \approx 2 \cdot 10^{10} \text{eV}$ .

До тех пор пока  $E'$  мало в сравнении с  $E$  и  $E_c$ , уравнения (1.7d) и (1.7e) сводятся к (1.7с), что означает независимость вероятности столкновения от спина. Уравнение (1.7с) в свою очередь сводится к (1.7) при  $E' \ll E'_m$ . Различие между вероятностями становится заметным, когда  $E'$  сравнимо с  $E_c$  или с  $E$ , а это может быть лишь тогда, когда само  $E$  больше чем  $E_c$  [см. уравнение (1.5)]. Для этих больших значений  $E'$  вероятность столкновения является возрастающей функцией спина. Однако различие между спином  $1/2$  и спином 1 гораздо большее, чем различие между спином 0 и спином  $1/2$ . Рассмотрим, в частности, случай  $E' \ll E'_m$ . Вероятность столкновения при спине 0 или  $1/2$  дается тогда формулой Резерфорда (1.7), в то время как при спине 1 вероятность столкновения становится равной

$$\chi(E, E') dE' = \frac{2C_{\mu_e}}{\beta^2} \frac{dE'}{E'^2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{E'}{E_c}\right). \quad (1.7f)$$

Это выражение содержит дополнительный член, убывающий с ростом энергии, как  $\frac{1}{E'}$ , в то время как резерфордовский член убывает как  $\left(\frac{1}{E'}\right)^2$ . Для энергий, больших, чем  $3E_c$ , этот дополнительный член, представляющий собой результат спинового взаимодействия, становится больше резерфордовского, представляющего кулоновское взаимодействие.

Следует заметить, что влияние спина на вероятность столкновения мезотронов проявляется только при очень тесных соударениях. Теоретические предсказания существенно зависят от гипотезы, что электромагнитное поле мезотрона может быть обычным образом описано даже на расстояниях меньших, чем  $10^{-13}$  см от „центра“ самого мезотрона. Эта гипотеза нуждается, конечно, в экспериментальном подтверждении, однако можно найти некоторое теоретическое оправдание для нее в аргументах Оппенгеймера, показывающих, что даже для очень тесных

соударений взаимодействие между мезотроном и электроном остается малым в сравнении с кинетической энергией мезотрона [34], [35]. Во всяком случае, справедливость формул, выражающих вероятности передачи больших энергий мезотронам и электронам, нельзя пока считать установленной.

d) **Протоны.** В случае протонов спиновыми взаимодействиями можно пренебречь, пока энергии малы в сравнении с  $\frac{\mu_H^2}{\mu_e} \approx 2 \cdot 10^{12} \text{eV}$ . Так как это практически всегда имеет место, то можно для протонов употреблять формулу (1.7с).

### § 3. Потери энергии при столкновениях (ионизационные потери)

Пусть  $K_\eta(E)$  означает среднюю потерю энергии на  $\text{г/см}^2$ , вызванную столкновениями, при которой вторичные электроны приобретают энергию большую, чем  $\eta$ . Если  $\eta$  велико в сравнении с энергией связи электрона, то  $K_\eta$  может быть подсчитано из выражений для вероятности столкновения, данных в § 2:

$$K_\eta(E) = \int_{\eta}^{E'_m} E' \chi(E, E') dE'. \quad (1.8)$$

Например, для мезотронов или протонов при  $\eta \ll E'_m$  уравнения (1.7с) и (1.8) дают:

$$K_\eta(E) = \frac{2C_{\mu_e}}{\beta^2} \left[ \log \frac{E'_m}{\eta} - \beta^2 \right]. \quad (1.8a)$$

Потери, вызванные столкновениями, при которых передаются малые энергии, нуждаются в отдельном рассмотрении, так как при этом электроны не могут считаться свободными. Иными словами, вместо расчета вероятности перехода для системы, состоящей из первичной частицы и электрона, надо рассчитать вероятность перехода для системы, состоящей из первичной частицы и атома. Начальным состоянием атома считается его основной уровень; его конечное состояние представляет собой возбужденный уровень, который может принадлежать как к дискретному, так и к непрерывному спектру (возбуждение или ионизация). Основанная на этом теория была развита Бете путем примене-

ния борновского приближения [4], [6], [26]; результат ее представляется следующим выражением:

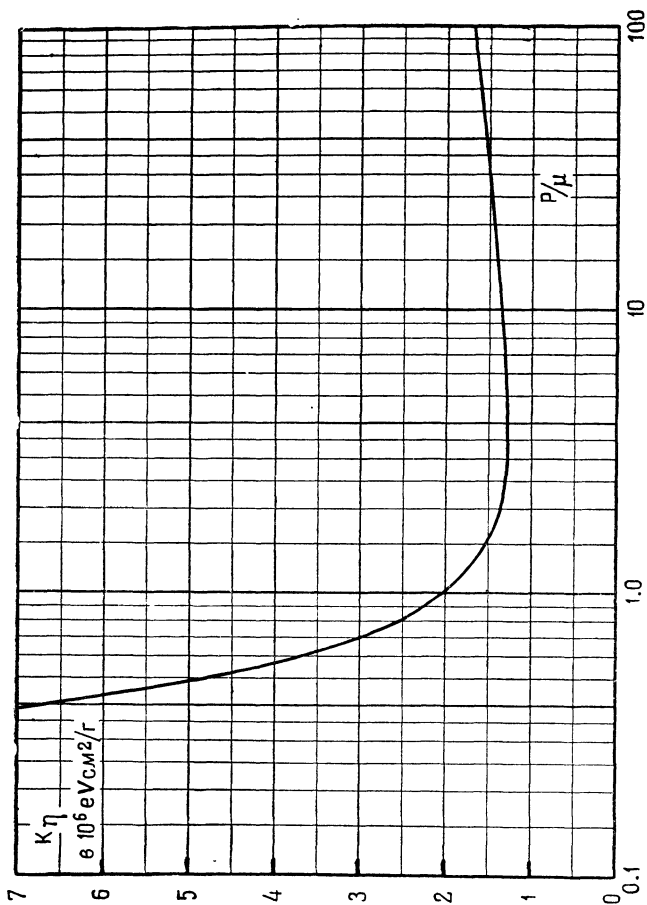
$$k_{\eta}(E) = \frac{2C_{\mu e}}{\beta^2} \left[ \log \frac{2\mu_e \beta^2 \eta}{(1-\beta^2) I^2(Z)} - \beta^2 \right], \quad (1.9)$$

где  $k_{\eta}(E)$  означает потери энергии на  $\text{г/см}^2$ , вызванные такими столкновениями, в которых передается энергия меньшая, чем  $\eta$ , а  $I(Z)$  — средний ионизационный потенциал атома с атомным номером  $Z$ . Функция  $I(Z)$  не может быть определена теоретически с большой точностью, и наиболее надежными значениями  $I(Z)$ , повидимому, являются значения, полученные из опытных данных [26].

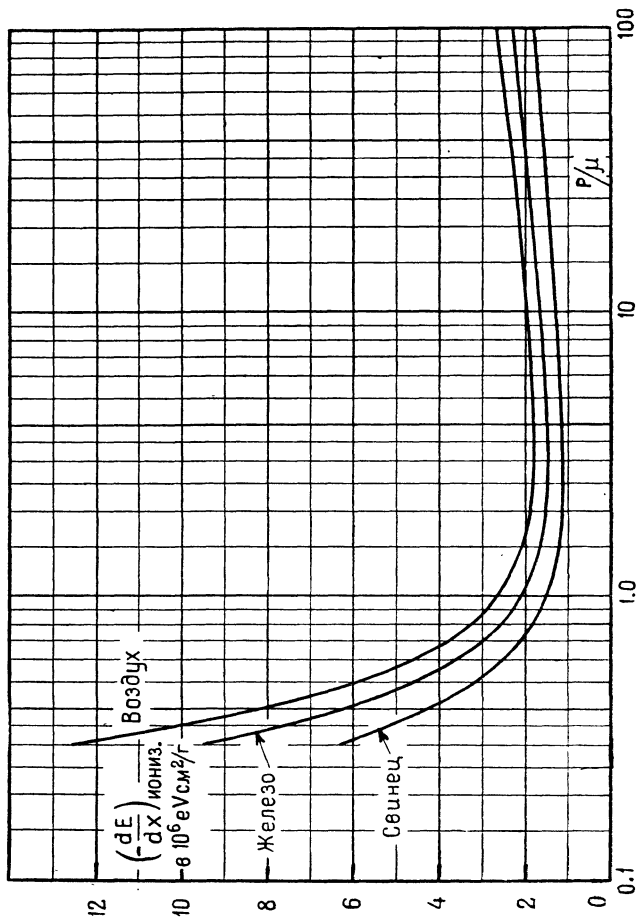
Однако, поскольку  $I(Z)$  встречается только под знаком логарифма, для наших целей будет вполне достаточной приближенная формула, данная Блохом [6]:

$$I(Z) = I_H Z, \quad (1.10)$$

где  $I_H = 13,5 \text{eV}$  — ионизационный потенциал водорода. Уравнение (1.9) справедливо при следующих условиях: а) скорость  $\beta$  первичной частицы велика в сравнении со скоростями атомных электронов; б)  $\eta$  велико в сравнении с энергией связи; в)  $\eta$  мало в сравнении с максимально передаваемой энергией  $E'_m$ .  $k_{\eta}$  при данной скорости  $\beta$  не зависит от массы первичной частицы. Так как  $\frac{\rho}{\mu} = \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}}$ , можно сказать, что  $k_{\eta}$  является функцией только от  $\frac{\rho}{\mu}$ . Эта функция графически представлена на фиг. 1 для  $\eta = 10^4 \text{eV}$  и  $Z = 7,3$  (воздух). Уменьшение  $k_{\eta}$  с увеличением  $\frac{\rho}{\mu}$  вначале вызывается фактором  $\frac{1}{\beta^2}$ . Оно соответствует тому факту, что при данном параметре удара взаимодействие между проходящей частицей и атомом становится слабее, так как время нахождения частицы вблизи атома становится меньше. Когда  $\beta$  приближается к 1 — своему предельному значению, фактор  $\frac{1}{\beta^2}$  становится практически постоянным, и  $k_{\eta}$  возрастает с возрастанием импульса за счет фактора  $\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)}$  под знаком логарифма. Причину этого возрастания можно видеть в лоренцовом сокращении кулоновского поля проходящей частицы, благодаря чему ее действие проявляется на больших расстояниях от ее геометрического пути.



Фиг. 1. Потери при столкновениях  $k\eta$  для  $\eta = 10^6 \text{ eV}$ , в воздухе [из уравнения (1.9)]. Абсцисса  $R/\rho$ , ордината  $10^6 \text{ eV}$  на  $\text{г/см}^2$ . Справедливо для всех частиц с единичным зарядом при условии  $E'm \gg 10^6 \text{ eV}$ .



Фиг. 2. Ионизационные потери энергии  $(-\frac{dE}{dx})_{\text{ион.}}$  мезотронов в воздухе, железе и свинце [из уравнений (1.11), (1.11а)]. Абсцисса  $\rho/\rho_{\text{возд}}$ , ордината  $10^6 \text{ eV на г/см}^2$ . Вычислено для  $v = 10^8 \text{ eV}/c^2$ , но практически пригодно для всех значений  $v$  примерно от  $0,5 \cdot 10^8 \text{ eV}/c^2$  до  $\infty$ .



Для крайне релятивистского случая уравнение (1.9) после подстановки численного значения постоянных приобретает вид:

$$k_{\eta} = 1,53 \cdot 10^5 \frac{Z}{A} \left[ 21,4 + \log \frac{\eta}{10^6} + 2 \log \frac{p}{\mu} - 2 \log Z \right]. \quad (1.9a)$$

Общие потери энергии при столкновениях, называемые ионизационными потерями  $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион.}}$ , получатся сложением  $k_{\eta}$  с  $K_{\eta}$ . Так, для мезотронов или протонов при энергиях меньших, чем  $\frac{\mu^2}{\mu_e}$ , формулы (1.8a) и (1.9) дают:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион.}} = \frac{2C\mu_e}{\beta^2} \left[ \log \frac{2\mu_e \beta^2 E'_m}{(1-\beta^2)I^2(Z)} - 2\beta^2 \right]. \quad (1.11)$$

Ионизационные потери энергии мезотронов в воздухе, железе и свинце как функция от  $\frac{p}{\mu}$  представлены на фиг. 2.

Если  $p \ll \frac{\mu^2}{\mu_e}$ , то  $E'_m$  приближенно дается уравнением (1.5a), и (1.11) переходит в

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион.}} = \frac{2C\mu_e}{\beta^2} \left[ \log \frac{4\mu_e^2 \beta^4}{(1-\beta^2)I^2(Z)} - 2\beta^2 \right]. \quad (1.11a)$$

$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион.}}$ , так же как  $k_{\eta}$ , в пределах применимости (1.11a), является функцией только от  $\beta$  или от  $\frac{p}{\mu}$ . В крайне релятивистском случае (1.11a) может быть записано следующим образом:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион.}} = 1,53 \cdot 10^5 \frac{Z}{A} \left[ 20,5 + 4 \log \frac{p}{\mu} - 2 \log Z \right]. \quad (1.11b)$$

Ионизационные потери энергии электронами и позитронами легко могут быть подсчитаны из формулы (1.9a) и, соответственно, из формул (1.7a) и (1.7b). Результаты для обеих этих частиц почти одинаковы и могут быть с хорошим приближением представлены следующим образом:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион.}} = 1,53 \cdot 10^5 \frac{Z}{A} \left[ 20,2 + 3 \log \frac{p}{\mu} - 2 \log Z \right]. \quad (1.12)$$

Потери импульса легко могут быть получены из потерь энергии. В самом деле, так как  $\frac{dp}{dE} = \frac{1}{\beta}$ , то просто:

$$-\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\beta} \frac{dE}{dx}. \quad (1.13)$$

#### § 4. Эффект плотности

До сих пор при исследовании взаимодействия заряженных частиц с атомами мы считали последние изолированными. Это допустимо, когда частица движется в газе; когда частица движется в конденсированном веществе, атомы могут рассматриваться как изолированные лишь в случае тесных соударений, но не в тех случаях, когда параметр столкновения больше междуатомных расстояний. Для таких далеких столкновений надо принять во внимание экранирование электрического поля проходящей частицы атомами вещества. Экранирование ослабляет взаимодействие и поэтому уменьшает потери. Так как при возрастании скорости далекие столкновения становятся все более существенными, то поправка, которую надо внести в выражения для потерь энергии, является возрастающей функцией скорости. Влияние плотности на потери энергии было впервые указано Своном [41]; количественно оно было исследовано Ферми [20], [21]. Согласно Ферми, из потерь энергии, вычисленных при рассмотрении изолированных атомов, надо вычесть величину, даваемую следующей формулой:

для  $\beta < \varepsilon^{-1/2}$

$$\Delta(\beta) = \frac{2C_{\nu e}}{\beta^2} \log \varepsilon,$$

для  $\beta > \varepsilon^{-1/2}$

$$\Delta(\beta) = \frac{2C_{\nu e}}{\beta^2} \left[ \log \frac{\varepsilon - 1}{1 - \beta^2} + \frac{1 - \varepsilon \beta^2}{\varepsilon - 1} \right],$$

где  $\varepsilon$  означает диэлектрическую постоянную вещества. Более точный анализ Гальперна и Хэлла [23], [47] подтвердил существование зависимости потерь от плотности, но показал, что этот эффект значительно меньше предсказанного Ферми. Численные расчеты, основанные на теории Гальперна и Хэлла, не были до сих пор опубликованы.<sup>1</sup> Но авторы в частном сообщении указали, что в случае мезотронов энергии  $8 \cdot 10^8 \text{eV}$

<sup>1</sup> Работа опубликована в 1948 г. [47a].

поправка составляет  $0,4 \left( \frac{2C\mu_e}{\beta^2} \right)$  для железа и  $0,55 \left( \frac{2C\mu_e}{\beta^2} \right)$  для свинца. Поэтому представляется возможным полностью пренебречь эффектом плотности, по крайней мере, когда кинетическая энергия не очень велика в сравнении с энергией покоя.

На этом основании не будем учитывать поправки на эффект плотности<sup>1)</sup>.

### § 5. Пробеги мезотронов и протонов

Мезотроны и протоны обычных энергий при прохождении через вещество теряют энергию почти исключительно вследствие столкновений. Так как средняя энергия, передаваемая в отдельном столкновении, мала, то требуется большое число столкновений для того, чтобы в значительной степени уменьшить энергию первичной частицы. Вследствие этого флуктуации в потерях энергии малы, и все частицы одной энергии проходят в данном веществе до своей остановки практически одно и то же расстояние  $R$ . Это расстояние называется пробегом и, как функция импульса, удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dR}{dp} = - \frac{1}{\frac{dp}{dx}}, \quad (1.14)$$

которое может быть переписано в виде:

$$\frac{dR}{d\left(\frac{p}{\mu}\right)} = \frac{\mu^3}{2C\mu_e B} = \frac{\mu}{2C\mu_e B} \frac{\left(\frac{p}{\mu}\right)^3}{\left[1 + \left(\frac{p}{\mu}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (1.14a)$$

В случае энергий, малых в сравнении с  $\frac{\mu^2}{\mu_e}$ ,  $B$  является функцией только от  $\frac{p}{\mu}$  (см. § 3):

$$B = \log \frac{4\mu_e^2 \left(\frac{p}{\mu}\right)^4}{I^2(Z)} - 2 \frac{\left(\frac{p}{\mu}\right)^2}{1 + \left(\frac{p}{\mu}\right)^2}. \quad (1.15)$$

Из уравнения (1.14a) видно, что при данном значении  $\frac{p}{\mu}$  пробег прямо пропорционален массе частицы.  $B$  — слабо меняю-

<sup>1)</sup> Критика Галперном и Хэллом работы Ферми неправильна. Подробнее об эффекте плотности см. статью Кунина [58]. (Прим. ред.)

шаяся функция от  $\frac{p}{\mu}$  и в небольшом интервале значений  $\frac{p}{\mu}$  может рассматриваться как постоянная. Уравнение (1.14а) тогда дает [22]:

$$\left(\frac{p_2}{\mu}\right) - R\left(\frac{p_1}{\mu}\right) = \frac{\mu}{2C\mu_e B} \times \left\{ \frac{\left(\frac{p_2}{\mu}\right)^2 + 2}{\left[\left(\frac{p_2}{\mu}\right)^2 + 1\right]^{1/2}} - \frac{\left(\frac{p_1}{\mu}\right)^2 + 2}{\left[\left(\frac{p_1}{\mu}\right)^2 + 1\right]^{1/2}} \right\}. \quad (1.16)$$

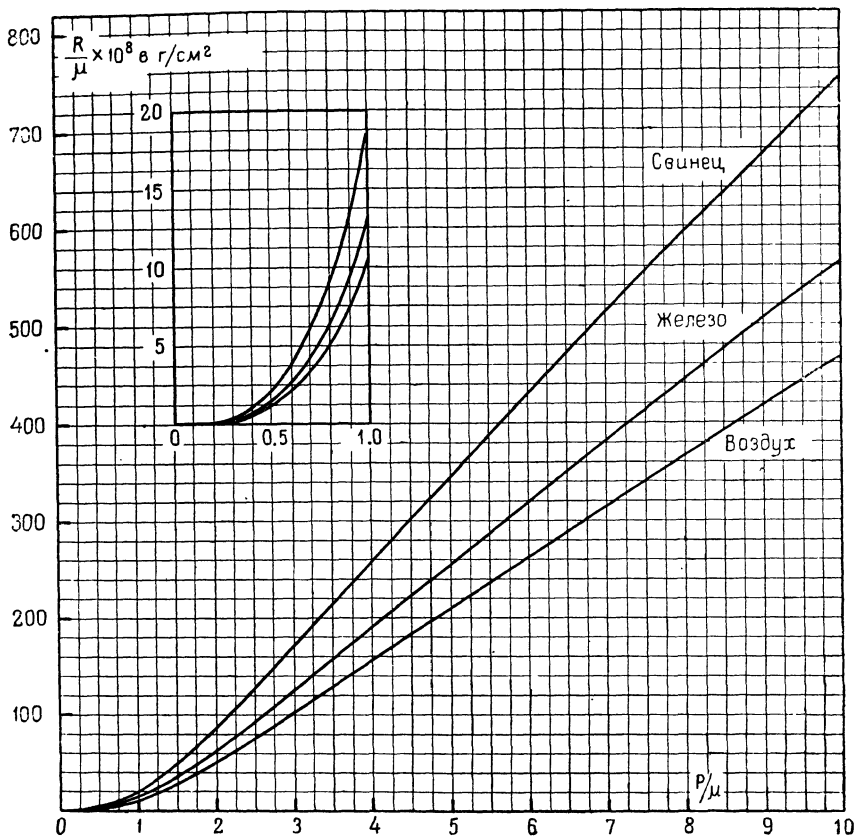
Пробег частиц с данным импульсом  $p$  можно получить, применяя уравнение (1.16) к последовательным интервалам импульсов от 0 до  $p$ . Таким путем построены графики фиг. 3. В этих вычислениях содержится небольшая ошибка, ибо выражение (1.11а) для  $\frac{dE}{dx}$  неприменимо, когда скорость первичной частицы уменьшается до величины, сравнимой со скоростью атомных электронов. Однако эта ошибка в большинстве случаев ничтожна, так как остаточный пробег такой медленной частицы составляет лишь небольшую часть от 1 г/см<sup>2</sup>, в то время как наблюдаемые в космических лучах частицы имеют, вообще говоря, пробеги по крайней мере в несколько г/см<sup>2</sup>. Только при рассмотрении путей мезотронов или протонов, оканчивающихся в газе камеры Вильсона, желательнее более точное определение  $R$ . Соотношение между энергией и пробегом для протонов малой энергии было вычислено Ливингстоном и Бете [26], использовавшими точные выражения для  $\frac{dp}{dx}$ . На основании предыдущих замечаний этот график можно употреблять и для мезотронов.

### § 6. Первичная удельная ионизация

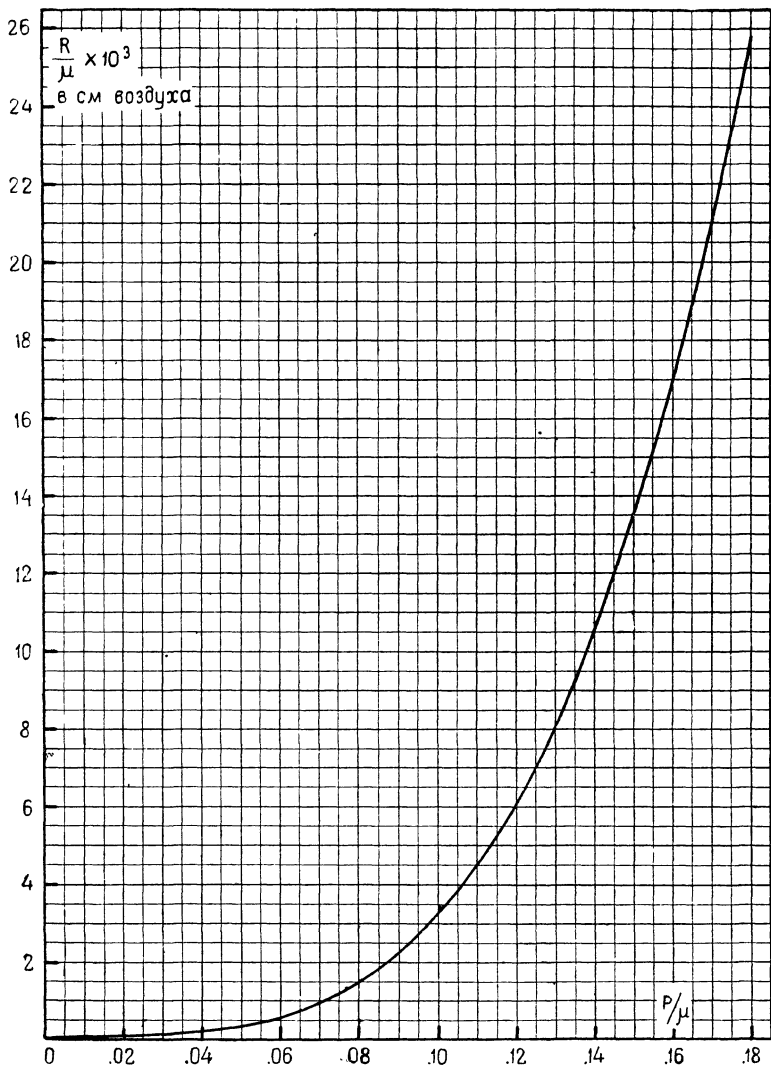
Под первичной удельной ионизацией мы понимаем число столкновений на г/см<sup>2</sup>, в результате которых происходит ионизация атомов. Первичная удельная ионизация в водороде была определена теоретически Бете и выражается следующим образом:

$$j_p = \frac{2C\mu_e a}{\beta^2 I_0} \left[ \log \frac{2\mu_e \beta^2}{(1-\beta^2) I_0} + b - \beta^2 \right], \quad (1.17)$$

где  $I_0 = I_H = 13,5 \text{ eV}$  — ионизационный потенциал, а постоян-



Фиг. 3. Пробег мезотронов или протонов в воздухе, железе и свинце [из уравнения (1.16)]. Абсцисса  $p/\mu$ , ордината  $R \cdot 10^8/\mu$  в  $\text{г/см}^2$ . Для мезотронов с  $\mu = 10^9 \text{eV}/c^2$  ордината дает пробег в  $\text{г/см}^2$ . Графики справедливы для частиц с единичным зарядом и произвольной массой при условии, что другие потери малы по сравнению с ионизационными.



Фиг. 4. Пробег мезотронов или протонов малых энергий в воздухе по вычислениям Ливингстона и Бете [26]. Абсцисса  $p/\mu$ , ордината  $R \cdot 10^3/\mu$  в см воздуха при нормальных условиях. Для мезотронов с  $\mu = 10^8 eV/c^2$  ордината дает пробег непосредственно в см воздуха. График пригоден для частиц единичного заряда и произвольной массы при условии, что другие потери малы в сравнении с ионизационными.

ные  $a = 0,285$ ,  $b = 3,04$  [7]. Первичная удельная ионизация в других газах также может быть представлена уравнением типа (1.17), в котором под  $I_0$  следует понимать ионизационный потенциал наружной оболочки, а постоянные  $a$  и  $b$  имеют другие значения. Теоретическое определение  $a$  и  $b$  как функций от атомного номера не представляется возможным. Однако  $b$  не изменяется значительно, и так как его значение мало в сравнении с логарифмом, то в первом приближении оно может считаться не зависящим от  $Z$ . Тогда единственной неизвестной постоянной остается  $a$ , которая может быть определена на опыте путем измерения первичной удельной ионизации при данной скорости.

Формула (1.17) показывает, что первичная удельная ионизация не зависит от массы частицы при данном значении скорости. При сравнении с уравнением (1.9) можно заметить, что  $k_\eta$  и  $j_P$  имеют весьма сходную функциональную зависимость от  $\beta$ .

## В. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

### § 7. Применение законов сохранения

Эффект Комптона может быть описан как столкновение между фотоном и свободным электроном. Обозначим через  $W$  энергию первичного фотона и примем, что электрон вначале покоится. В результате столкновения фотон отклонится на угол  $\theta$  с уменьшенной энергией  $W'$ , а электрон приобретет энергию  $E = W - W'$ .

Законы сохранения энергии и импульса приводят к следующему соотношению между  $W$ ,  $W'$  и  $\theta$  (формула Комптона):

$$W' = W - E = \frac{W\mu_e}{\mu_e + W(1 - \cos\theta)}; \quad (1.18)$$

$W'$  убывает, а  $E$  возрастает с возрастанием  $\theta$ . Следует отметить, что если  $W \gg \mu_e$ , то  $W'$  — порядка  $\mu_e$ , а  $E$  — порядка  $W$  для всех столкновений, за исключением таких, при которых  $\cos\theta$  очень мало отличается от 1. Заметим также, что минимальное значение  $W'$  есть  $\frac{\mu_e}{2}$ .

### § 8. Дифференциальная вероятность рассеяния

Пусть  $\kappa(W, W') dW' dx$  есть вероятность того, что фотон энергии  $W$ , пройдя толщину вещества  $dx$  г/см<sup>2</sup>, претерпит такое комptonовское столкновение, после которого рассеянный фотон будет иметь энергию от  $W'$  до  $W' + dW'$ . Функция  $\kappa$  была вычислена Клейном и Нишиной [25] и дается следующим равенством:

$$\kappa(W, W') dW' = \frac{C\mu_e}{W} \frac{dW'}{W'} \left[ 1 + \left( \frac{W'}{W} \right)^2 - \frac{W'}{W} \sin^2\theta \right], \quad (1.19)$$

где  $C$  определяется по уравнению (1.6), а  $\theta$  — по уравнению (1.18). Если  $W \gg \mu_e$ , то величина  $W'/W \sin^2\theta$  мала в сравнении с 1, так как  $\frac{W'}{W}$  значительно меньше 1 при всех  $\theta$ , кроме очень близких к 0. Поэтому (1.19) может быть упрощено:

$$\kappa(W, W') dW' = \frac{C\mu_e}{W} \frac{dW'}{W'} \left[ 1 + \left( \frac{W'}{W} \right)^2 \right]. \quad (1.19a)$$



Из уравнения (1.19а) вытекает, что вероятность рассеяния быстро убывает с возрастанием  $W'$ , т. е. с убыванием  $E$ .

### § 9. Полная вероятность рассеяния

Пусть  $\Sigma_c$  означает полную вероятность того, что фотон энергии  $W$  претерпит комптоновское рассеяние в толщине вещества  $dx$  г/см<sup>2</sup>.  $\Sigma_c$  можно получить интегрированием выражения  $\chi dW'$  в пределах от  $\frac{\mu_e}{2}$  до  $W$ . При  $W \gg \mu_e$ , применяя уравнение (1.19а), получим:

$$\Sigma_c(W) = \frac{C\mu_e}{W} \left[ \log \frac{2W}{\mu_e} + \frac{1}{2} \right]. \quad (1.20)$$

Выражение (1.20) для полной вероятности рассеяния получено в предположении, что уравнение (1.19а) справедливо при всех значениях  $W'$ . В действительности, уравнение (1.19а) справедливо только для таких столкновений, в которых энергия электрона отдачи велика в сравнении с энергией связи, потому что в противном случае электрон не может рассматриваться как свободный. Однако допускаемая таким образом ошибка незначительна, ибо электронов отдачи с небольшими энергиями, образующимися вследствие эффекта Комптона, мало в противоположность случаю столкновений, в результате которых большинство вторичных электронов имеет малые энергии, что приводит к необходимости учета сил связи. График полной вероятности рассеяния как функции энергии представлен на фиг. 13 и 13а (для воздуха и свинца).

## С. ИЗЛУЧЕНИЕ

### § 10. Общие замечания

Излучение фотонов заряженными частицами тесно связано с их отклонением в электрическом поле ядра. Согласно классической электромагнитной теории заряженная частица испускает электромагнитные волны всегда, когда она испытывает ускорение, а интенсивность ее излучения прямо пропорциональна квадрату ускорения. Согласно квантовой теории столкновение заряженной частицы с ядром может либо сопровождаться излучением, либо произойти без излучения, причем последнее (упругое рассеяние) более вероятно. Однако некоторые качественные результаты, касающиеся вероятности излучения, могут легко быть получены классическим путем. Так, классически, при данном расстоянии между ядром и частицей, ее ускорение пропорционально заряду ядра; отсюда следует, что радиационные потери представляют собой быстро возрастающую функцию атомного номера. С другой стороны, ускорение обратно пропорционально массе частицы  $\mu$ , поэтому потери на излучение электронов должны быть значительно большими, чем у более тяжелых частиц — мезотронов или протонов. Можно также сказать, что напряженность поля, при котором частица заметным образом излучает, возрастает с возрастанием массы частицы, и поэтому потери на излучение тяжелых частиц происходят за счет гораздо более тесных соударений, чем в случае электронов. Отметим еще, что параметр такого столкновения возрастает с ростом энергии вследствие лоренцового сокращения электрического поля движущейся частицы.

В развитии теории существенную роль играет то расстояние от ядра, на котором происходит излучение. Если это расстояние велико в сравнении с радиусом ядра и мало в сравнении с атомным радиусом, то поле, действующее на излучающую частицу, может рассматриваться как кулоновское поле точечного заряда  $Z$ , сосредоточенного в ядре. Если расстояние от ядра — порядка величины атомного радиуса или больше его, то следует принять в расчет экранирование ядерного поля внешними электронами. Наконец, если это расстояние — порядка

радиуса ядра, то поле ядра не может более рассматриваться как поле точечного заряда.

В процессах излучения энергия  $W$  испущенного фотона не определяется более углом между направлениями движения фотона и первичной частицы, так как часть импульса передается ядру. Однако можно показать, что средний угол, под которым частица массы  $\mu$  испускает фотон с энергией  $W$ , имеет порядок величины  $\frac{\mu}{W}$ .

### § 11. Дифференциальная вероятность излучения электронами

Рассмотрим процесс излучения положительными и отрицательными электронами. Пусть  $U = E + \mu_e$  означает полную энергию электрона, включая его энергию покоя. Под  $\Phi(U, \nu) d\nu dx$  будем понимать вероятность того, что электрон энергии  $U$ , пройдя в веществе толщину  $dx$  г/см<sup>2</sup>, испустит фотон, имеющий относительную долю энергии в пределах от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$  (относительную долю энергии  $\nu$  определим как отношение  $\frac{W}{U}$  энергии фотона к полной энергии первичного электрона). Максимальное значение  $\nu$  есть  $1 - \left(\frac{\mu_e}{U}\right)$ . Так как мы рассматриваем лишь такие энергии, которые велики в сравнении с  $\mu_e$ , то в большинстве случаев можно отождествить полную энергию  $U$  с кинетической энергией  $E$ .

Потери энергии электронов на излучение всегда происходят на таких расстояниях от ядра, которые велики в сравнении с радиусом ядра. Поэтому поле ядра может описываться как поле точечного заряда. Эффект экранирования внешними электронами был рассчитан Бете и Гайтлером [8] на основе модели атома Томаса — Ферми.

Как оказывается, влияние экранирования на процесс излучения определяется величиной

$$\gamma = 100 \frac{\mu_e}{U} \frac{\nu}{1-\nu} Z^{-\frac{1}{3}}, \quad (1.21)$$

причем оно увеличивается с убыванием  $\gamma$ . Для  $\gamma \gg 1$  экранированием практически можно пренебречь. В случае если  $\gamma \approx 0$ , будем называть экранирование „полным“.  $\gamma$  при данном значении  $\nu$  убывает с возрастанием  $U$ . Таким образом, при достаточно большой первичной энергии экранирование практически

может считаться полным для всех значений энергии испущенного фотона.

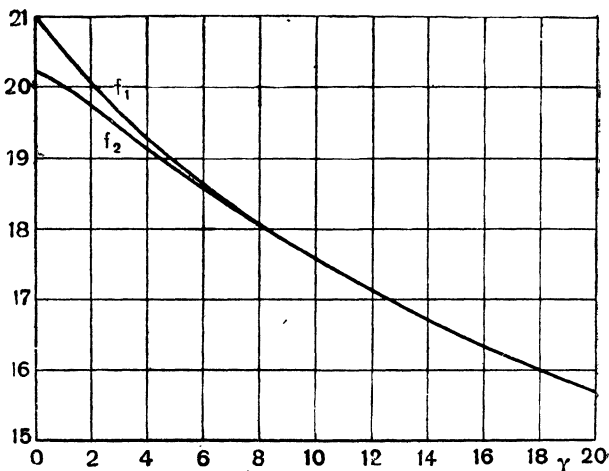
Если  $U$  велико в сравнении с  $\mu_e$ , то  $\Phi(U, v)$  в различных областях значений  $\gamma$  дается следующими выражениями:

*экранирование отсутствует,  $\gamma \gg 1$ :*

$$\Phi(U, v) dv = 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \frac{dv}{v} \left[ 1 + (1-v)^2 - \frac{2}{3}(1-v) \right] \times \left[ \log \left( \frac{2U}{\mu_e} \frac{1-v}{v} \right) - \frac{1}{2} \right]^{11}; \quad (1.22)$$

*полное экранирование,  $\gamma \approx 0$ :*

$$\Phi(U, v) dv = 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \frac{dv}{v} \left\{ \left[ 1 + (1-v)^2 - \frac{2}{3}(1-v) \right] \times \log \left( 183Z^{-\frac{1}{3}} \right) + \frac{1}{9}(1-v) \right\}; \quad (1.23)$$



Фиг. 5. Функции  $f_1(\gamma)$  и  $f_2(\gamma)$  в уравнениях (1.24) и (1.43). Из Бете и Гайтлера [8].

<sup>11</sup> В формуле (1.22) не учтено излучение при столкновениях с атомными электронами. При больших энергиях падающих электронов излучение на каждом из электронов атома такое же, как и на ядре с зарядом 1. Поэтому во всех формулах, связанных с излучением, следует для больших энергий заменить  $Z^2$  на  $Z(Z+1)$  [27]. Такое же исправление следует внести в формулы образования пар. (Прим. ред.)

промежуточные случаи,  $\gamma < 2$ :

$$\Phi(U, v) dv = 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \frac{dv}{v} \left\{ [1 + (1-v)^2] \left[ \frac{f_1(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \log Z \right] - \frac{2}{3} (1-v) \left[ \frac{f_2(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \log Z \right] \right\}; \quad (1.24)$$

$2 < \gamma < 15$

$$\Phi(U, v) dv = 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \frac{dv}{v} \left[ 1 + (1-v)^2 - \frac{2}{3} (1-v) \right] \times \left[ \log \left( \frac{2U}{\mu_e} \frac{1-v}{v} \right) - \frac{1}{2} - c(\gamma) \right]. \quad (1.25)$$

Функции  $f_1(\gamma)$ ,  $f_2(\gamma)$  и  $c(\gamma)$  представлены на фиг. 5 и в табл. 1. Уравнение (1.23) показывает, что в случае, когда экранирование можно считать полным, вероятность потери данной части энергии не зависит от ее начальной величины  $U$ .

## § 12. Средние потери энергии на излучение электронами

Средние потери энергии на  $\text{г/см}^2$ , вызванные излучением, даются следующим выражением:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{изл.}} = U \int_0^1 v^{-\frac{\mu_e}{U}} \Phi(U, v) dv. \quad (1.26)$$

В предельных случаях малых или больших энергий можно воспользоваться, соответственно, уравнениями (1.22) и (1.23); тогда выражение для потерь энергии принимает вид:

$$\mu_e \ll U \ll 137\mu_e Z^{-\frac{1}{3}},$$

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{изл.}} = 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 U \left( \log \frac{2U}{\mu_e} - \frac{1}{3} \right), \quad (1.27)$$

$$U \gg 137\mu_e Z^{-\frac{1}{3}},$$

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{изл.}} = 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 U \left[ \log \left( 183Z^{-\frac{1}{3}} \right) + \frac{1}{18} \right]. \quad (1.28)$$

Таблица 1

Численные значения функции  $c(\gamma)$  в уравнениях (1.25) и (1.44)<sup>1)</sup>

$\gamma$ . . . . . 2	2,5	3	4	5	6	8	10	15
$c(\gamma)$ . . . . . 0,21	0,16	0,13	0,09	0,065	0,05	0,03	0,02	0,01

Для промежуточных случаев интегрирование (1.26) надо проводить численно. Мы видим, что средние потери на излучение растут с увеличением энергии и при больших значениях энергии пропорциональны ей.

### § 13. Радиационная единица длины. Упрощенные формулы

Определим в качестве радиационной единицы длины величину  $X_0$

$$\frac{1}{X_0} = 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \log 183Z^{-1/3} \quad (1.29)$$

и будем обозначать через  $t$  толщину вещества, измеренную в таких единицах<sup>2)</sup>. Введем также дифференциальную вероятность излучения, отнесенную к радиационной единице длины:

$$\varphi(U, \nu) = X_0 \Phi(U, \nu) \quad (1.30)$$

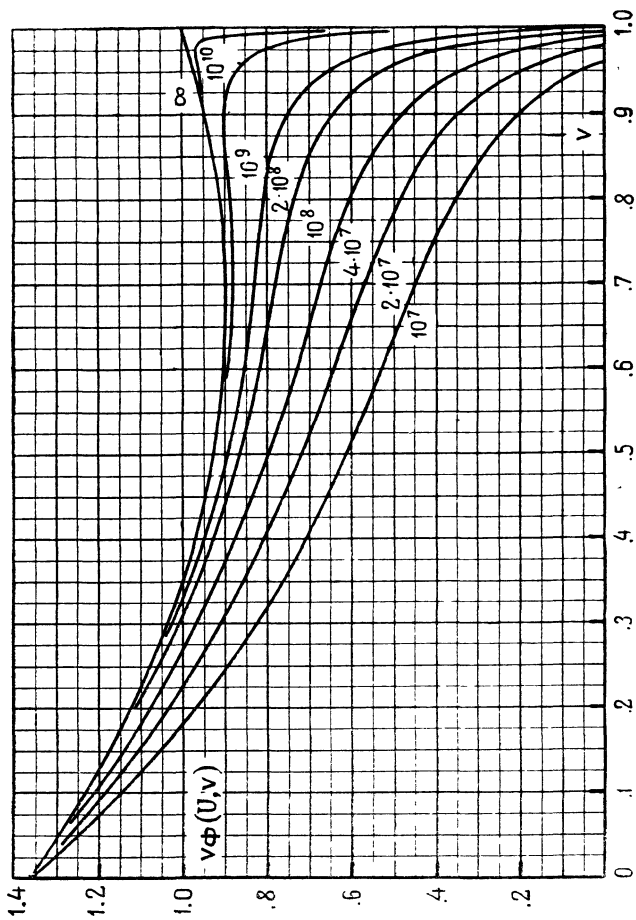
и среднюю относительную потерю энергии на радиационной единице длины:

$$-\frac{1}{E} \left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{изл.}} = -X_0 \frac{1}{E} \left( \frac{dE}{dx} \right)_{\text{изл.}} \approx \int_0^1 \nu \varphi(U, \nu) d\nu. \quad (1.31)$$

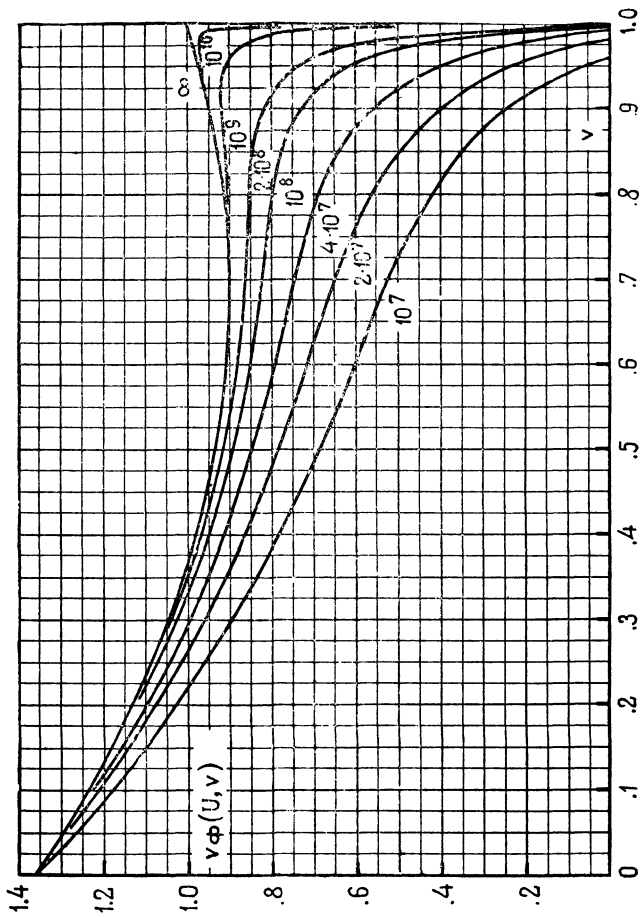
Величина  $\nu \varphi(U, \nu)$  как функция от  $\nu$  при различных  $U$  для двух веществ (воздуха и свинца) изображена графически на фиг. 6 и 7. Средняя относительная потеря энергии  $-\left(\frac{1}{E}\right)\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{изл.}}$  как функция энергии представлена на фиг. 9. Оказывается, что описание явлений излучения, происходящих в различных веществах, весьма мало зависит от атомного номера, если измерить толщины в радиационных единицах. Более того, зависимость от атомного номера ослабляется с ростом энергии и полностью

<sup>1)</sup> Из Бете и Гайтлера [8].

<sup>2)</sup> См. примечание на стр. 24. (Прим. ред.)



Фиг. 6. Дифференциальная вероятность излучения на радиационной единице длины в воздухе для электронов различных энергий. Абсцисса  $\nu = W/U$ , ордината  $\nu\phi(U, \nu)$ . Числа на кривых — энергии  $U$  первичного электрона.



Фиг. 7. Дифференциальная вероятность излучения на радиационной единице длины в свинце для электронов различных энергий. Абсцисса  $\nu = W/U$ ; ордината  $\nu\phi(U, \nu)$ . Числа на кривых — энергии  $U$  первичного электрона.



исчезает при больших энергиях. Действительно, в случае полного экранирования дифференциальная вероятность излучения на радиационной единице длины будет:

$$\varphi_0(v) dv = \left[ 1 + (1 - v)^2 - (1 - v) \left( \frac{2}{3} - 2\epsilon \right) \right] \frac{dv}{v}, \quad (1.23a)$$

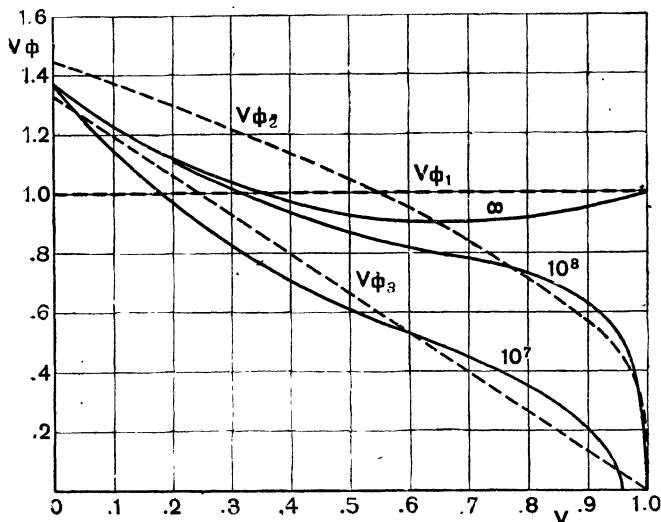
а средняя относительная потеря энергии:

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = 1 + b, \quad (1.28a)$$

где  $b = [18 \log(183Z^{-1/3})]^{-1}$ . Величина  $b$  очень мала в сравнении с 1; ее значение меняется от 0,012 до 0,015 при изменении  $Z$  от 7,3 (воздух) до 82 (свинец). Таким образом, без заметной ошибки можно принять  $b = 0,0135$  для всех элементов.

Равенства (1.23a) и (1.28a) можно применить не только к чистым элементам, но и к другим веществам, если принять:

$$\frac{1}{X_0} = \frac{p_1}{X_1} + \frac{p_2}{X_2} + \dots, \quad (1.29a)$$



Фиг. 8. Сравнение приближенных выражений для вероятности излучения  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  (пунктирные линии) с точным выражением (сплошные линии) при различных энергиях в воздухе.

где  $p_1, p_2, \dots$  — концентрации различных составляющих,  $X_1, X_2, \dots$  — соответствующие радиационные единицы длины. Значения  $X_0$  для различных веществ приведены в табл. 2.

Во многих отношениях удобно заменить точные выражения для вероятности излучения приближенными, имеющими более простую математическую форму. Ниже даются три таких приближенных выражения:

$$\varphi_1(v) dv = \frac{dv}{v}; \quad (1.32)$$

$$\varphi_2(v) dv = -\frac{1}{\log 2} \frac{dv}{\log(1-v)}; \quad (1.33)$$

$$\varphi_3(v) dv = \frac{4}{3} (1-v) \frac{dv}{v}. \quad (1.34)$$

На фиг. 8 видно, в какой степени приближенные формулы аппроксимируют точные выражения при различных энергиях.

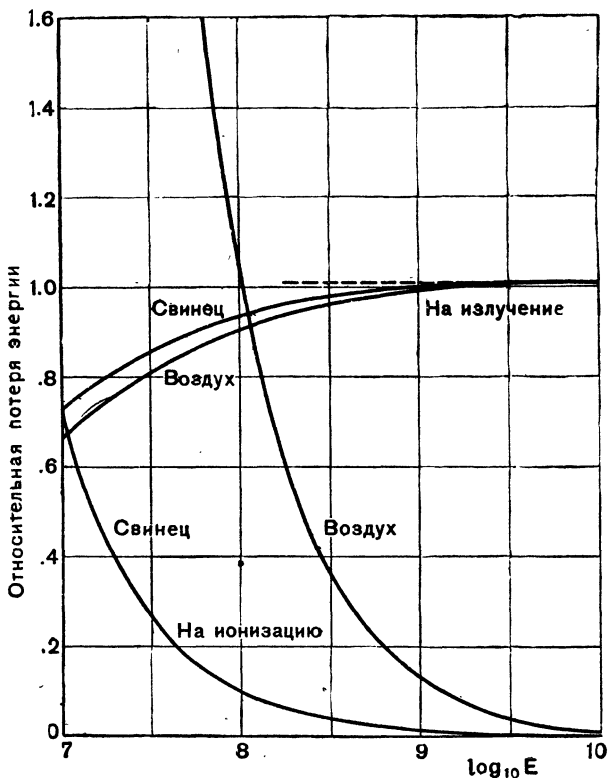
#### § 14. Сравнение потерь на излучение и ионизационных потерь. Флюктуации потерь на излучение

Как уже было отмечено, средняя потеря энергии на излучение быстро растет с возрастанием энергии, в то время как средняя потеря энергии на столкновения остается практически постоянной. Таким образом, при больших энергиях потери на излучение являются гораздо более существенными, чем потери на столкновения (ионизационные потери), а при малых энергиях имеет место обратное соотношение. На фиг. 9 для сравнения с соответствующими потерями изображены кривые, показывающие относительные потери энергии на излучение и ионизационные на радиационной единице длины. Очевидно, что энергия, при которой потери на излучение начинают превышать ионизационные потери, убывает при возрастании атомного номера.

Другое характерное различие между потерями на излучение и ионизационными потерями состоит в том, что потери энергии на излучение происходят более редко, но более крупными порциями, чем ионизационные потери<sup>1)</sup>. Поэтому, в то время как

<sup>1)</sup> Вопрос о флюктуациях ионизационных потерь был рассмотрен Ландау [57]. (Прим. ред.)

электроны, проходя данную толщину вещества, теряют на столкновения практически одну и ту же энергию, для потерь на излучение имеет место значительный разброс. Мы можем задаться



Фиг. 9. Относительная потеря энергии  $-\frac{1}{E} \left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{ион.}}$  и на излучение  $-\frac{1}{E} \left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{изл.}}$  на радиационной единице длины для электронов в воздухе и свинце.

вопросом: какова вероятность того, что электрон с начальной энергией  $U_0$  после прохождения толщины вещества  $t$  будет обладать энергией от  $U$  до  $U + dU$ ? Решение этой задачи было

дано Бете и Гайтлером [8]; для вероятности излучения ими была использована приближенная формула (1.33); результат выражается следующим образом:

$$\omega(U) dU = \frac{dU}{U_0} \frac{\left(\log \frac{U_0}{U}\right)^{\left(\frac{t}{\log 2}\right) - 1}}{\Gamma\left(\frac{t}{\log 2}\right)}. \quad (1.35)$$

Равенство (1.35) справедливо тогда, когда можно пренебречь ионизационными потерями.

### § 15. Процессы излучения мезотронами

Испускание фотонов мезотронами происходит на гораздо меньших расстояниях от ядра, чем испускание фотонов электронами. Поэтому в теории излучения мезотронами экранированием поля ядра внешними электронами можно пренебречь в большей степени, чем в соответствующей теории для электронов. Зато необходимо принять во внимание тот факт, что поле ядра на расстояниях, меньших радиуса ядра, нельзя считать кулоновским полем точечного заряда. В явлениях излучения спин мезотрона играет еще большую роль, чем при столкновениях (§ 2). Это имеет место потому, что параметр столкновения при излучении значительно меньше, чем при столкновениях, а зависящие от спина силы являются короткодействующими. По Кристи и Кусака [15], дифференциальная вероятность излучения на  $\text{г/см}^2$  для мезотронов со спином 0,  $1/2$  или 1 дается, соответственно, следующими выражениями:

*спин 0*

$$\begin{aligned} \Phi(U, v) dv = & \alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \left(\frac{\mu_e}{\mu}\right)^2 \frac{16}{3} \frac{1-v}{v} dv \times \\ & \times \left[ \log \left( \frac{12}{5} \frac{1-v}{v} \frac{U}{\mu Z^{1/3}} \right) - \frac{1}{2} \right]; \end{aligned} \quad (1.36)$$

*спин  $1/2$*

$$\begin{aligned} \Phi(U, v) dv = & \alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \left(\frac{\mu_e}{\mu}\right)^2 \frac{16}{3} \left( \frac{3v}{4} + \frac{1-v}{v} \right) dv \times \\ & \times \left[ \log \left( \frac{12}{5} \frac{1-v}{v} \frac{U}{\mu Z^{1/3}} \right) - \frac{1}{2} \right]; \end{aligned} \quad (1.37)$$

спин 1

$$\begin{aligned} \Phi(U, v) dv = & \alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \left(\frac{\nu_e}{\mu}\right)^2 dv \left\{ \left[ \frac{16}{3} \frac{1-v}{v} + \frac{13}{12} v - \frac{5}{24} \frac{v^3}{1-v} \right] \times \right. \\ & \times \log \left( \frac{2\pi}{5} \frac{1-v}{v} \frac{U}{\mu Z^{1/3}} \right) - \frac{v}{1-v} \left( \frac{10-10v+3v^2}{8} \right) - \\ & - \frac{52}{9} \frac{1-v}{v} + \frac{v}{1-v} \left( \frac{34-34v+7v^2}{24} \right) \log^2 \left( \frac{2\pi}{5} \frac{1-v}{v} \frac{U}{\mu Z^{1/3}} \right) + \\ & \left. + \frac{\pi U}{5\mu Z^{1/3}} \left( \frac{2-2v+7v^2}{12} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

где  $U$  — полная энергия первичного мезотрона, а  $v = \frac{W}{U}$  — доля энергии испущенного фотона. Приведенные выше формулы были получены в предположении, что  $U \gg \mu$ , что экранированием внешними электронами можно пренебречь и что электрический потенциал поля ядра можно считать потенциалом точечного заряда при расстояниях, меньших  $d$ ; величина  $d$  была принята равной  $\left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{r_0 \mu_e}{\alpha \mu}\right) Z^{1/3} = 0,57 r_0 Z^{1/3}$ . Выражение для вероятности излучения мезотронами со спином  $1/2$  весьма сходно с соответствующими выражениями для электронов [см. уравнение (1.22)]. Фактор  $\left(\frac{\nu_e}{\mu}\right)^2$  появляется вследствие разницы в массах, а фактор  $\frac{6}{5} Z^{-1/3}$  под знаком логарифма связан с обрезанием поля ядра на расстоянии  $d$ . Пренебрежение экранированием ставит верхний предел энергии  $U \approx 5 \cdot 10^{11} \text{eV}$  для применимости выражений для вероятности излучения при спине 0 и  $1/2$  [уравнения (1.36) и (1.37)]. Вероятность излучения при спине 1 [уравнение (1.38)] в меньшей степени зависит от экранирования, но это выражение содержит члены, описывающие также процессы, которые не могут быть рассчитаны вполне законным путем существующими теориями, если  $U$  больше чем приблизительно  $2 \cdot 10^{10} \text{eV}$ . Поэтому (1.38) справедливо лишь для первичных энергий, меньших этого предела. Минимальная оценка вероятности излучения для  $U > 2 \cdot 10^{10} \text{eV}$  может быть получена по Кристи и Кусака, если полностью пренебречь этими сомнительными процессами. Поступив так,

можно получить уравнение (1.38) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi(U, v) dv = & \alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \left(\frac{\mu_e}{\mu}\right)^2 dv \left\{ \left[ \frac{16}{3} \frac{1-v}{v} + \frac{13}{12} v - \frac{5}{24} \frac{v^3}{1-v} \right] \times \right. \\ & \times \log \left( \frac{2\pi}{5} \frac{1-v}{v} \frac{U}{\mu Z^{1/3}} \right) - \frac{v}{1-v} \left( \frac{10-10v+3v^2}{8} \right) - \\ & - \frac{52}{9} \frac{1-v}{v} + \frac{v}{1-v} \left( \frac{34-34v+7v^2}{24} \right) \times \\ & \times \left[ \log^2 \left( \frac{2\pi}{5} \frac{1-v}{v} \frac{U}{\mu Z^{1/3}} \right) - \log^2 \left( \frac{\pi}{5A} \frac{U}{\mu Z^{1/3}} \right) \right] + \\ & \left. + \left[ A + A \log \left( \frac{\pi}{5A} \frac{U}{\mu Z^{1/3}} \right) \right] \left( \frac{2-2v+7v^2}{12} \right) \right\}, \quad (1.38a) \end{aligned}$$

где  $A$  — постоянная порядка  $\frac{1}{\alpha} = 137$ .

Сравнение уравнений (1.36), (1.37) и (1.38) показывает, что вероятность больших потерь на излучение значительно больше для мезотронов со спином 1, чем для мезотронов со спином  $1/2$ , и немного больше для мезотронов со спином  $1/2$ , чем для мезотронов со спином 0. Таким образом, вероятность больших потерь на излучение мезотронами зависит от спина так же, как и вероятность больших потерь на столкновения. Численно формулы показывают, что при любом значении спина большие передачи энергии чаще происходят при излучении, чем при столкновениях. Однако полные потери энергии, главным образом, определяются столкновениями, вплоть до энергий, значительно больших, чем в случае электронов.

Следует подчеркнуть, что изложенные выше заключения о потерях на излучение мезотронов не обладают той степенью определенности, как соответствующие результаты, относящиеся к потерям на излучение электронами, потому что в данном случае теория зависит от свойств электромагнитного поля мезотронов на расстояниях, меньших  $10^{-13}$  см от мезотрона (§ 2).

## D. ОБРАЗОВАНИЕ ПАР

### § 16. Общие замечания

Фотон большой энергии при прохождении через сильное электрическое поле вблизи ядра имеет определенную вероятность превратиться в положительный и отрицательный электроны. Сохранение энергии приводит к следующему соотношению между энергией  $W$  первичного фотона и полными энергиями  $U$  и  $U'$  образовавшихся электронов:

$$U + U' = W \quad \text{или} \quad u + u' = 1, \quad (1.39)$$

если ввести для электронов их относительные доли энергий  $u = \frac{u}{W}$  и  $u' = \frac{U'}{W}$ . Относительные доли энергий  $u$  и  $u'$  изменяются от  $\frac{\mu_e}{W}$  до  $\left(1 - \frac{\mu_e}{W}\right)$ . Так как рассматриваемые энергии велики в сравнении с  $\mu_e$ , то в большинстве случаев можно отождествлять полные энергии  $U$  и  $U'$  с кинетическими энергиями  $E$  и  $E'$ .

Процесс образования пар можно рассматривать как фотоэлектрический эффект, при котором электрон переходит из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией, оставляя при этом „дырку“ в бесконечном распределении электронов с отрицательными энергиями. Теория образования пар тесно связана с теорией излучения. В самом деле, в случае излучения электрон совершает переход из одного состояния с положительной энергией в другое, причем испускается фотон. В случае же образования пар фотон поглощается и приводит к переходу электрона из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией.

Распределение энергии между двумя электронами пары не определяется направлением их движения по отношению к направлению движения первичного фотона, так как часть импульса передается ядру. Однако можно показать, что средний угол, в котором испускается электрон энергии  $U$ , — порядка  $\frac{\mu_e}{U}$ .

### § 17. Дифференциальная вероятность образования пар

Пусть  $\Psi(W, u) dudx$  означает вероятность того, что фотон энергии  $W$ , проходя в веществе толщину  $dx$  г/см<sup>2</sup>, образует пару, в которой позитрон обладает относительной долей энергии между  $u$  и  $u + du$ . Как и в явлениях излучения, для учета экранирования поля ядра внешними электронами важно рассматривать то расстояние от ядра, на котором образуется пара. Влияние экранирования определяется величиной

$$\gamma = 100 \frac{\mu_e}{W} \frac{1}{u(1-u)} Z^{-1/3} \quad (1.40)$$

и убывает с ростом  $\gamma$ . В случае  $\gamma \gg 1$  мы будем пренебрегать экранированием, а случай  $\gamma \approx 0$  будем называть „полным“ экранированием. При данном значении  $u$ ,  $\gamma$  убывает с ростом  $W$ . Поэтому при больших энергиях первичного фотона экранирование можно считать полным для всех процессов образования пар.

Бете и Гайтлером даны выражения для  $\Psi(W, u)$  для различных областей значений  $\gamma$ , в предположении  $W \gg \mu_e$ :  
*экранирования нет,  $\gamma \gg 1$*

$$\begin{aligned} \Psi(W, u) du = & 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 du \left[ u^2 + (1-u)^2 + \frac{2}{3} u(1-u) \right] \times \\ & \times \left[ \log \frac{2W}{\mu_e} u(1-u) - \frac{1}{2} \right]^1); \end{aligned} \quad (1.41)$$

*полное экранирование,  $\gamma \approx 0$*

$$\begin{aligned} \Psi(W, u) du = & 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 du \left\{ \left[ u^2 + (1-u)^2 + \frac{2}{3} u(1-u) \right] \times \right. \\ & \left. \times \log(183Z^{-1/3}) - \frac{1}{9} u(1-u) \right\}; \end{aligned} \quad (1.42)$$

*промежуточные случаи:  $\gamma < 2$*

$$\begin{aligned} \Psi(W, u) du = & 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 du \left\{ [u^2 + (1-u)^2] \left[ \frac{f_1(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \log Z \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} u(1-u) \left[ \frac{f_2(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \log Z \right] \right\}; \end{aligned} \quad (1.43)$$

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 24. (Прим. ред.)



$$2 < \gamma < 15$$

$$\Psi(W, u) du = 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 du \left[ u^2 + (1-u)^2 + \frac{2}{3} u(1-u) \right] \times \\ \times \left[ \log \frac{2W}{\mu_e} u(1-u) - \frac{1}{2} - c(\gamma) \right]. \quad (1.44)$$

Здесь функции  $f_1(\gamma)$ ,  $f_2(\gamma)$  и  $c(\gamma)$  те же, что и в выражениях (1.24) и (1.25) для вероятностей излучения; они даны на фиг. 5 и в табл. 1. Функция  $\Psi$  симметрична по отношению к  $u$  и  $(1-u)$ , т. е. по отношению к энергиям электрона и позитрона. В случае полного экранирования [выражение (1.42)]  $\Psi$  является функцией только от  $u$ .

### § 18. Полная вероятность образования пар

Пусть  $\Sigma(W) dx$  означает полную вероятность того, что фотон энергии  $W$  образует пару в толщине вещества  $dx$  г/см<sup>2</sup>; тогда

$$\Sigma(W) = \int_{\frac{\mu_e}{W}}^{1 - \frac{\mu_e}{W}} \Psi(W, u) du. \quad (1.45)$$

В предельных случаях малых и больших энергий (1.41) и (1.42) приводят соответственно к следующим выражениям:

$$\mu_e \ll W \ll 137\mu_e Z^{-1/3}$$

$$\Sigma(W) = 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \left( \frac{7}{9} \log \frac{2W}{\mu_e} - \frac{109}{54} \right), \quad (1.46)$$

$$W \gg 137\mu_e Z^{-1/3}$$

$$\Sigma(W) = \Sigma_0 = 4\alpha \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \left[ \frac{7}{9} \log(183 Z^{-1/3}) - \frac{1}{54} \right]. \quad (1.47)$$

В промежуточных случаях интеграл в (1.45) надо брать численно. Равенство (1.47) показывает, что при больших энергиях полная вероятность образования пар является постоянной для данного вещества.

### § 19. Вероятности, отнесенные к радиационной единице длины. Упрощенные выражения

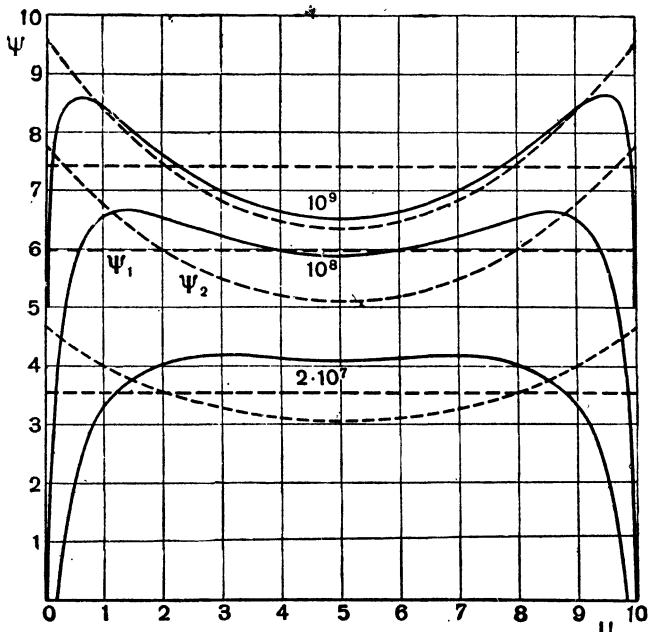
Вероятности образования пар удобно отнести к радиационной единице длины, определенной в § 13. Пусть

$$\psi(W, u) = X_0 \Psi(W, u) \quad (1.48)$$

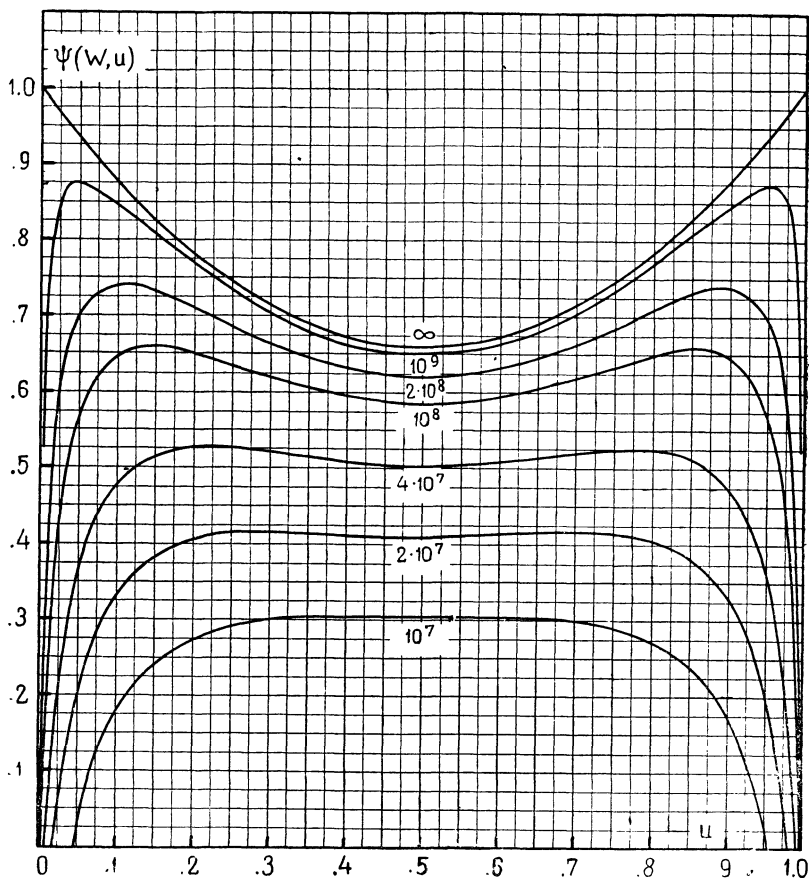
означает дифференциальную вероятность образования пары на пути, равном радиационной единице длины, а

$$\sigma(W) = X_0 \Sigma(W) \quad (1.49)$$

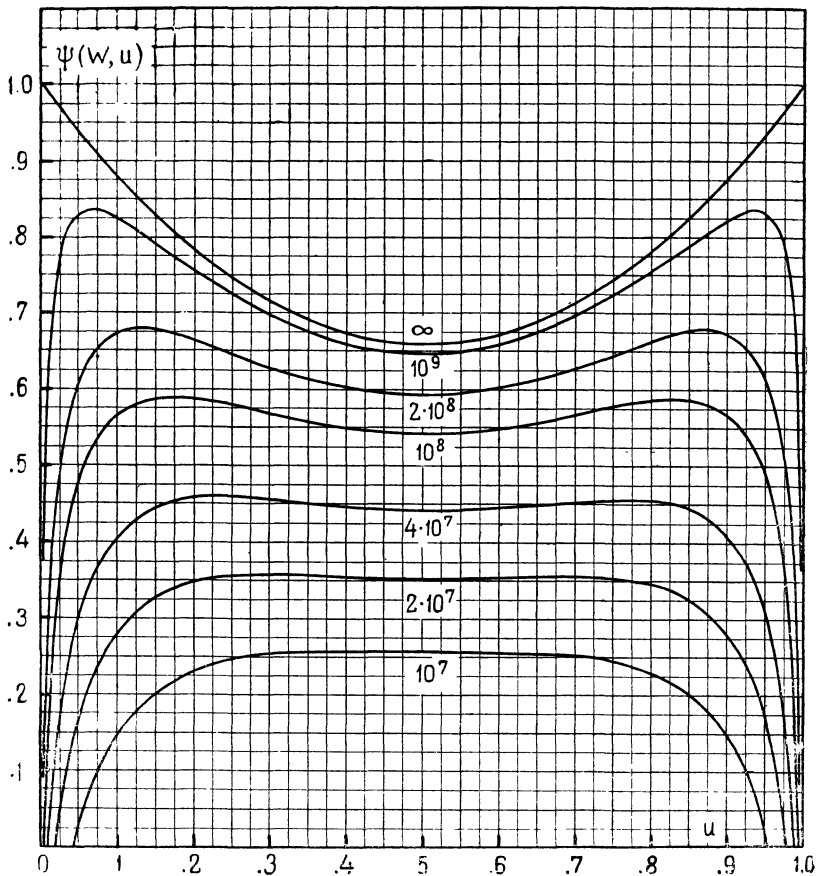
— полную вероятность образования пары на том же пути;  $\psi$  как функция от  $u$  при различных  $W$  изображена графически на фиг. 10 и 11 (для воздуха и свинца);  $\sigma$  как функция  $W$  представлена на фиг. 13 и 13а (также для воздуха и свинца).



Фиг. 12. Сравнение приближенных выражений для дифференциальной вероятности образования пар  $\psi_1, \psi_2$  (пунктирные линии) с точным выражением (сплошные линии). Графики построены для свинца для  $W = 2 \cdot 10^7, 10^8, 10^9$  eV.



Фиг. 10. Дифференциальная вероятность образования пар на радиационной единице длины в воздухе для фотонов различных энергий. Абсцисса  $u = U/W$ , ордината  $\psi(W, u)$ . Числа на кривых — энергии  $W$  первичного фотона.



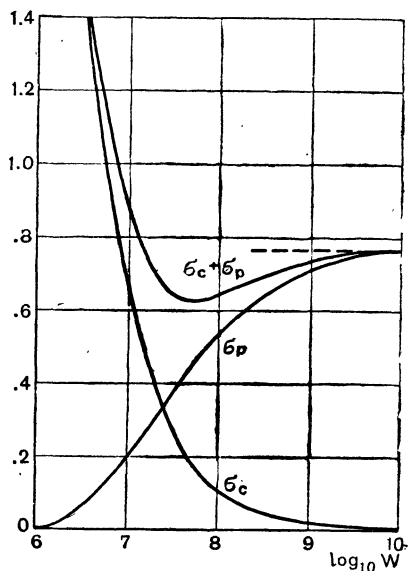
Фиг. 11. Дифференциальная вероятность образования пар на радиационной единице длины в свинце для фотонов различных энергий. Абсцисса  $u = U/W$ ; ордината  $\psi(W, u)$ . Числа на кривых — энергии  $W$  первичного фотона.

В случае полного экранирования можно дать аналитические выражения для  $\psi$  и  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \psi(W, u) du &= \psi_0(u) du = \\ &= \left[ u^2 + (1-u)^2 + \left( \frac{2}{3} - 2b \right) u(1-u) \right] du, \end{aligned} \quad (1.42a)$$

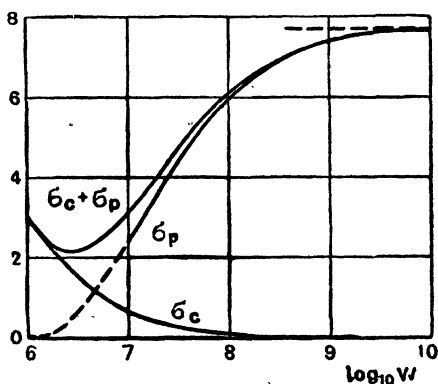
$$\sigma(W) = \sigma_0 = \frac{7}{9} - \frac{b}{3}, \quad (1.47a)$$

где  $b$  то же, что и в уравнениях (1.23a) и (1.28a).



Фиг. 13. Полная вероятность, отнесенная к радиационной единице длины в воздухе, для образования пар ( $\sigma_p$ ) и эффекта Комптона ( $\sigma_c$ ) как функция энергии фотона  $W$ . Приведена также сумма обеих вероятностей ( $\sigma_p + \sigma_c$ ), дающая полный коэффициент поглощения на радиационную единицу длины.  $\sigma_p$  при  $W < 10^7$  eV не может быть вычислено при помощи формул, данных в тексте, которые справедливы только при  $W \gg \mu_e$ ; в этом случае нужно воспользоваться более точными выражениями — см. [8].

Оказывается, что если толщину вещества измерять в радиационных единицах, то выражения, описывающие образование пар, как и аналогичные им, описывающие излучение, очень слабо зависят от атомного номера, а в предельном случае больших энергий вовсе не зависят от  $Z$ . Дифференциальная вероятность  $\psi(W, u)$  при данном  $W$  не очень сильно меняется при



Фиг. 13а.  $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$  и  $\sigma_p + \sigma_c$  для свинца.

изменении  $u$ . Поэтому в первом приближении можно употреблять упрощенное выражение

$$\psi_1(W, u) du = \sigma(W) du \quad (1.50)$$

или при больших энергиях

$$\psi_1(W, u) du = \sigma_0 du \approx \frac{7}{9} du. \quad (1.50a)$$

Приближение (1.50) пригодно и при малых энергиях. В промежуточной области энергий лучшее приближение достигается следующим выражением:

$$\psi_2(W, u) du = \frac{\sigma(W)}{\sigma_0} \psi_0(u) du. \quad (1.50b)$$

Сравнение приближенных выражений  $\psi_1$  и  $\psi_2$  с точным  $\psi$  дано на фиг. 12.

## **§ 20. Сравнение процесса образования пар с эффектом Комптона**

Полная вероятность комптоновского рассеяния (§ 9) быстро убывает с ростом энергии фотона, в то время как полная вероятность образования пар является медленно растущей функцией энергии. Поэтому при больших энергиях большинство фотонов поглощается вследствие образования пар, а при малых энергиях большинство их поглощается из-за эффекта Комптона. Сравнение поглощения фотонов, вызванного образованием пар и эффектом Комптона для воздуха и свинца, произведено на фиг. 13 и 13а; из них видно, что энергия, при которой главенствующую роль начинает играть образование пар, убывает с ростом атомного номера.

## Е. РАССЕЯНИЕ

### § 21. Дифференциальная вероятность упругого рассеяния

Мы уже упоминали, что, когда заряженная частица проходит вблизи ядра, она испытывает отклонения, не сопровождающиеся в большинстве случаев потерей энергии. Это явление, именуемое упругим рассеянием, вызывается тем же электрическим взаимодействием проходящей частицы с кулоновским полем ядра, которое определяет и процессы излучения (§ 10).

При исследовании упругого рассеяния ядро может рассматриваться как неподвижный точечный заряд величины  $Z$ . Обозначим через  $\xi(\Theta) d\omega dx$  вероятность того, что частица с зарядом  $\pm 1$ , импульсом  $p$  и скоростью  $\beta$  при прохождении толщины  $dx$  г/см<sup>2</sup> вещества будет подвержена такому столкновению с ядром, в результате которого ее траектория отклонится на угол  $\Theta$  от направления первоначального движения, попадая при этом внутрь телесного угла  $d\omega$ .

При вычислении  $\xi$  надо принять во внимание спин движущейся частицы. Следующие выражения для  $\xi$  соответствуют значениям спина 0,  $1/2$  и 1:

*спин 0* [45]

$$\xi(\Theta) d\omega = N \frac{Z^2 r_0^2}{A} \frac{\mu_e^2}{4 p^2 \beta^2} \frac{d\omega}{\sin^4 \frac{1}{2} \Theta}; \quad (1.51)$$

*спин  $1/2$*  [28]

$$\xi(\Theta) d\omega = N \frac{Z^2 r_0^2}{A} \frac{\mu_e^2}{4 p^2 \beta^2} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{1}{2} \Theta\right) \frac{d\omega}{\sin^4 \frac{1}{2} \Theta}; \quad (1.51a)$$

*спин 1* [30]

$$\xi(\Theta) d\omega = N \frac{Z^2 r_0^2}{A} \frac{\mu_e^2}{4 p^2 \beta^2} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{p^2 \beta^2}{\mu_e^2} \sin^2 \Theta\right) \frac{d\omega}{\sin^4 \frac{1}{2} \Theta}. \quad (1.51b)$$

Из приведенных формул видно, что вероятность больших отклонений различна для различных значений спина. Для малых



же отклонений члены, зависящие от спина, малы, и мы можем в этом случае для любого спина употреблять следующее выражение:

$$\xi(\Theta) d\omega = 4N \frac{Z^2}{A} r_0^2 \frac{\mu_e^2}{\rho^2 \beta^2} \frac{d\omega}{\Theta^4}. \quad (1.51c)$$

Применимость написанных выше формул имеет границы, определяющиеся конечными размерами ядра в случае больших отклонений и экранированием поля ядра внешними электронами в случае малых отклонений  $\Theta$ . Следуя Вильямсу [45], мы учтем конечные размеры ядра, считая, что его электрический заряд, вместо того чтобы быть сосредоточенным в точке, распределен внутри сферы радиуса  $d$ . Можно показать, что это предположение не меняет существенно вычисленной величины вероятности отклонения  $\xi$  при  $\Theta < \lambda/2\pi d$ , хотя и приводит к тому, что  $\xi$  быстро стремится к нулю при  $\Theta > \lambda/2\pi d$ , где  $\lambda$  дебройлевская длина волны движущейся частицы. Аналогично, если положить  $a = (137)^2 r_0 Z^{-1/3}$  ( $a$  можно рассматривать как радиус атома), можно показать, что экранирование поля ядра внешними электронами не влияет на вероятность рассеяния  $\xi$  для  $\Theta > \lambda/2\pi a$ , но в то же время приводит к тому, что  $\xi$  практически обращается в нуль, когда  $\Theta$  становится меньше, чем  $\lambda/2\pi a$ . Принимая, как и в § 15, для  $d$  значения  $d = 0,57 r_0 Z^{1/3}$ , можно считать, что  $\xi$  дается формулами (1.51) — (1.51c) при  $\Theta_{\min} < \Theta < \Theta_{\max}$ , где

$$\Theta_{\min} = \frac{\lambda Z^{1/3}}{2\pi (137)^2 r_0}, \quad \Theta_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi 0,57 r_0 Z^{1/3}}, \quad (1.52)$$

и практически равно нулю при  $\Theta < \Theta_{\min}$  и  $\Theta > \Theta_{\max}$ .

Конечно, возможно, что в рассеянии частиц, входящих в состав космических лучей, играют роль и неэлектромагнитные силы. Однако эту возможность мы не будем рассматривать.

## § 22. Множественное рассеяние. Вычисление среднего квадрата угла рассеяния

Отклонение, получаемое частицей при прохождении слоя вещества конечной толщины, может быть вызвано либо одиночным столкновением, либо рядом последовательных столкновений.

Можно показать, что большие отклонения чаще происходят вследствие одиночных столкновений, в то время как малые отклонения большей частью вызываются многократными столкновениями.

Результат одиночного столкновения будем называть одиночным рассеянием, результат малого числа столкновений — кратным рассеянием, а результат большого числа столкновений — многократным рассеянием. Теория одиночного рассеяния, имеющая значение для больших отклонений, содержится в формулах предыдущего параграфа. Теория кратного рассеяния весьма сложна, и мы не будем ее здесь рассматривать. Теория многократного рассеяния, существенного для малых отклонений, может быть легко построена при помощи статистических методов. Мы разовьем ее, употребляя (1.51с) в качестве выражения для элементарной вероятности рассеяния. Так как (1.51с) справедливо для всех частиц с единичным зарядом, результаты будут применимы как к электронам, так и к мезотронам и протонам.

Первым делом подсчитаем средний квадрат угла рассеяния в бесконечно тонком слое вещества  $dx$ :

$$\langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср.}(dx)} = dx \int_{\Theta_{\min}}^{\Theta_{\max}} \Theta^2 \xi(\Theta) 2\pi \Theta d\Theta. \quad (1.53)$$

Непосредственно из (1.51с) и (1.52) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср.}(dx)} &= dx 8\pi N \frac{Z^2}{A} r_0^2 \frac{\mu_e^2}{p^2 \beta^2} \log \frac{\Theta_{\max}}{\Theta_{\min}} = \\ &= dx 16\pi N \frac{Z^2}{A} r_0^2 \frac{\mu_e^2}{p^2 \beta^2} \log(181Z^{-1/3}). \end{aligned} \right\} (1.53a)$$

Следует отметить, что  $\langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср.}(dx)}$  зависит от атомного номера почти так же, как потери электронов на излучение [см. (1.28)]. Разнице в численных факторах (183 и 181) под знаком логарифма можно не придавать значения, так как ее влияние на результат ничтожно. Поэтому описание рассеяния будет упрощено, если измерять толщины в радиационных единицах [см. (1.29)]. В самом деле, средний квадрат угла отклонения в толщине  $dt$ , выраженной в радиационных единицах, становится

независящим от атомного номера и дается следующим выражением:

$$\langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср.}(dt)} = \frac{4\pi 137 \mu_e^2 dt}{p^2 \beta^3} \quad (1.53b)$$

Если мы введем постоянную  $E_s$ , имеющую размерность энергии

$$E_s = \mu_e (4\pi 137)^{1/2} = 21 \cdot 10^6 \text{ eV}, \quad (1.54)$$

то (1.53b) примет вид:

$$\langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср.}(dt)} = \left( \frac{E_s^2}{p^2 \beta^3} \right) dt. \quad (1.53c)$$

Согласно общему правилу наложения малых независимых отклонений, среднее квадратичное значение  $\Theta$  для конечной толщины  $t$  можно получить, интегрируя (1.53c) от 0 до  $t$ :

$$\langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср.}(t)} = E_s^2 \int_0^t \frac{dt'}{p^2 \beta^3}. \quad (1.55)$$

Если потери энергии малы, то  $p$  и  $\beta$  можно считать постоянными, и (1.55) приводится к

$$\langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср.}(t)} = \left( \frac{E_s^2}{p^2 \beta^3} \right) t. \quad (1.55a)$$

В общем случае (1.55) можно переписать в виде:

$$\langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср.}(t)} = E_s^2 \int_{p_2}^{p_1} \frac{1}{-\left(\frac{dp}{dt}\right)} \frac{dp}{p^2 \beta^3}, \quad (1.55b)$$

где  $\left(-\frac{dp}{dt}\right)$  — потери импульса на радиационной единице длины, а  $p_1$  и  $p_2$  — импульсы соответственно при толщине 0 и  $t$ . В случае мезотронов согласно (1.11a) и (1.13) имеем:

$$-\frac{dp}{dt} = X_0 \frac{2C\mu_e B \left(\frac{p}{\mu}\right)}{\beta^3}, \quad (1.56)$$

<sup>1</sup> Как указывалось в примечании на стр. 24, в формуле (1.28) следует заменить  $Z^2$  на  $Z(Z+1)$ , благодаря этому правая часть формулы (1.53b) умножится на  $\left(\frac{Z}{Z+1}\right)$ . (Прим. ред.)

где  $B$  — медленно меняющаяся функция от  $\frac{p}{\mu}$ , даваемая выражением (1.15). Если считать  $B$  постоянной, то (1.55b) приводит к

$$\begin{aligned} \langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср.}(t)} &= \frac{1}{X_0} \frac{E_s^2}{2C\mu_e B} \int_{\frac{p_2}{\mu}}^{\frac{p_1}{\mu}} \frac{\beta}{p^2} dp = \\ &= \frac{1}{X_0} \frac{E_s^2}{2C\mu_e B} \cdot \frac{1}{\mu} \int_{\frac{p_2}{\mu}}^{\frac{p_1}{\mu}} \frac{d\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\frac{p}{\mu} \left[ \left(\frac{p}{\mu}\right)^2 + 1 \right]^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{X_0} \frac{E_s^2}{2C\mu_e B} \cdot \frac{1}{\mu} \log \left[ \frac{1 + \left[ 1 + \left(\frac{p_2}{\mu}\right)^2 \right]^{1/2}}{\frac{p_2}{\mu}} \times \frac{\frac{p_1}{\mu}}{1 + \left[ 1 + \left(\frac{p_1}{\mu}\right)^2 \right]^{1/2}} \right]. \end{aligned}$$

В том же приближении ( $B$  постоянно)  $p_1$  и  $p_2$  связаны с толщиной  $t$  соотношением [см. (1.16)]:

$$t = \frac{1}{X_0} \frac{\mu}{2C\mu_e B} \left[ \frac{\left(\frac{p_1}{\mu}\right)^2 + 2}{\left[ \left(\frac{p_1}{\mu}\right)^2 + 1 \right]^{1/2}} - \frac{\left(\frac{p_2}{\mu}\right)^2 + 2}{\left[ \left(\frac{p_2}{\mu}\right)^2 + 1 \right]^{1/2}} \right].$$

Тогда получаем:

$$\langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср.}(t)} = \frac{E_s^2}{\mu^2} t \frac{\log \left[ \frac{1 + y_2}{1 + y_1} \right] \cdot \frac{p_1}{p_2}}{y_1 + \frac{1}{y_1} - y_2 - \frac{1}{y_2}}, \quad (1.57)$$

где  $y = \left[ \left(\frac{p}{\mu}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} = \frac{E + \mu}{\mu}$  — есть отношение полной энергии к энергии покоя. В практических случаях известны толщина  $t$  и конечный импульс  $p_2$ , начальный же импульс  $p_1$  можно получить из графика фиг. 3.

Часто вместо рассмотрения полного отклонения  $\Theta$  удобно рассматривать проекцию отклонения  $\theta$  на плоскость, проходящую через начальную траекторию. Легко показать, что

среднее квадратичное значение для  $\theta$  составляет половину от среднего квадратичного значения  $\Theta$ . Поэтому

$$\langle \theta^2 \rangle_{\text{ср.}(t)} = \frac{1}{2} E_s^2 \int_0^t \frac{dt'}{p^2 \beta^2} \quad (1.58)$$

или, если потери энергии малы,

$$\langle \theta^2 \rangle_{\text{ср.}(t)} = \frac{1}{2} \frac{E_s^2 t}{p^2 \beta^2}. \quad (1.58a)$$

### § 23. Функция распределения<sup>1)</sup>

Рассмотрим параллельный, бесконечно узкий пучок частиц, падающий на слой некоторого рассеивающего вещества. Предположим, что все частицы имеют одинаковые энергии и что потерями энергии в рассеивающем веществе можно пренебречь. Задача состоит в определении пространственного и углового распределения частиц после прохождения ими толщины  $t$  рассеивающего вещества.

Выберем декартову систему координат с началом в точке вхождения частиц в вещество. Одну из осей выберем по направлению начального движения частиц. Эту ось назовем осью  $t$ , а две другие, соответственно,  $y$  и  $z$ . Рассмотрим проекцию движения частиц на плоскость  $(t, y)$  и пусть  $F(t, y, \theta) dy d\theta$  означает число частиц, которые, пройдя толщину  $t$ , приобрели поперечное смещение  $(y, dy)$  и движутся под углом  $(\theta, d\theta)$  к оси  $t$ . По соображениям симметрии та же функция  $F$  описывает пространственное и угловое распределение в плоскости  $(t, z)$ . Так как отклонения в двух взаимно перпендикулярных направлениях  $y$  и  $z$  являются независимыми, то число частиц, имеющих на глубине  $t$  поперечное смещение с составляющими  $(y, dy)$  и  $(z, dz)$  и угловое отклонение с составляющими  $(\theta_y, d\theta_y)$  и  $(\theta_z, d\theta_z)$ , определится как

$$F(t, y, \theta_y) \times F(t, z, \theta_z) dy dz d\theta_y d\theta_z.$$

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа весьма близок к содержанию лекции, прочитанной профессором Ферми в Чикагском университете летом 1940 г., и включает некоторые неопубликованные результаты. Авторы выражают свою искреннюю признательность профессору Ферми за разрешение использовать эти результаты.

Мы должны найти функцию  $F$ , исходя из обычных предположений о малости угла  $\theta$ .

Пусть  $\rho_{\Delta t}(\theta) d\theta$  означает вероятность того, что, пройдя путь  $\Delta t$ , частица отклонится на угол  $(\theta, d\theta)$ . Отклонение  $\theta$  не вызвано обязательно одним столкновением. Поэтому функция  $\rho(\theta)$  не связана непосредственно с функцией  $\xi(\Theta)$ , определенной ранее. По своему определению  $\rho(\theta)$  удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \rho_{\Delta t}(\theta) &= \rho_{\Delta t}(-\theta) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\Delta t}(\theta) d\theta &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \theta \rho_{\Delta t}(\theta) d\theta &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 \rho_{\Delta t}(\theta) d\theta &= \langle \theta^2 \rangle_{\text{ср.}}(\Delta t) = \frac{1}{2} \frac{E_s^2}{2p^2 \beta^2} \Delta t. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Интегралы распространяются на область от  $-\infty$  до  $+\infty$ , так как в действительности  $\rho$  имеет острый максимум при  $\theta = 0$  и быстро спадает до 0 по обе стороны от максимума.

Теперь определим изменение функции  $F$  на участке от  $t$  до  $t + \Delta t$ . Функция  $F$  изменяется потому, что как пространственное, так и угловое распределение видоизменяются при прохождении слоя  $\Delta t$ . Видоизменение пространственного распределения происходит вследствие того, что частицы, двигаясь под углом  $\theta$ , приобретают в слое  $\Delta t$  поперечное смещение  $\theta \Delta t$ . Рассеяние в этом слое дает эффект второго порядка, который можно не учитывать при рассмотрении изменений в пространственном распределении. Отсюда следует, что частицы, имеющие поперечное смещение  $y$  на глубине  $t + \Delta t$ , имели на глубине  $t$  смещение  $y - \theta \Delta t$ . Таким образом, пренебрегая изменением углового распределения, получим:

$$F(t + \Delta t, y, \theta) = F(t, y - \theta \Delta t, \theta) = F(t, y, \theta) - \theta \Delta t \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Для того чтобы рассчитать эффект изменения в угловом распределении, рассмотрим два интервала углов  $(\theta, d\theta)$  и  $(\theta', d\theta')$ .

На глубине  $t$  имеется  $F(t, y, \theta') dy d\theta'$  частиц в интервале углов  $(\theta', d\theta')$  с поперечным смещением  $(y, dy)$ , из них часть  $\rho_{\Delta t}(\theta - \theta') d\theta$ , пройдя слой  $\Delta t$ , рассеется и попадет в интервал углов  $(\theta, d\theta)$ . Отсюда, пренебрегая изменением в пространственном распределении,

$$F(t + \Delta t, y, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t, y, \theta') \rho_{\Delta t}(\theta - \theta') d\theta.$$

Так как  $\rho_{\Delta t}(\theta - \theta')$  отлично от нуля лишь при очень малых значениях аргумента, то  $F$  можно разложить в ряд Тэйлора по  $(\theta - \theta')$ . Опуская члены выше второго порядка и принимая во внимание (1.59), получим:

$$F(t + \Delta t, y, \theta) = F(t, y, \theta) + \frac{1}{4} \frac{E_s^2}{p^2 \beta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \Delta t.$$

Таким образом, полное изменение функции распределения в слое  $\Delta t$  будет:

$$-\theta \frac{\partial F}{\partial y} \Delta t + \frac{1}{4} \frac{E_s^2}{p^2 \beta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \Delta t.$$

Положив

$$w = \frac{2p\beta}{E_s}, \quad (1.60)$$

получим для  $F$  следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\theta \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}. \quad (1.61)$$

Можно заметить, что при больших значениях  $p$  величина  $w$  представляет удвоенную энергию падающей частицы в единицах характеристической энергии  $E_s$ , а при малых  $p$  эта величина равна учетверенной энергии в тех же единицах.

Нас будет интересовать решение уравнения (1.61), отвечающее одной падающей частице. Тогда  $F$  будет вероятностью определенного поперечного смещения и определенного углового отклонения на глубине  $t$ . Нетрудно показать, что таким решением, данным Ферми (см. сноску на стр. 44), будет:

$$F(t, y, \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{w^2}{t^2} e^{-w^2 \left( \frac{\theta^2}{t} - \frac{3y\theta}{t^2} + \frac{3y^2}{t^3} \right)}. \quad (1.62)$$

В самом деле, можно убедиться путем подстановки, что (1.62) удовлетворяет (1.61). То, что при этом удовлетворены и граничные условия, станет очевидным из последующего.

Интегрируя функцию распределения  $F$  по  $y$ , получим функцию  $G(t, \theta)$ , представляющую угловое распределение безотносительно к поперечному смещению:

$$G(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t, y, \theta) dy = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega}{t^{3/2}} e^{-1/4 \frac{\omega^2 \theta^2}{t}}. \quad (1.63)$$

Аналогично, интегрируя функцию  $F$  по  $\theta$ , получим функцию  $H(t, y)$ , дающую пространственное распределение безотносительно к углам:

$$H(t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t, y, \theta) d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega}{t^{3/2}} e^{-3/4 \frac{\omega^2 y^2}{t^3}}. \quad (1.64)$$

Из (1.63) и (1.64) следует, что при любых значениях  $t$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t, \theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, y) dy = 1. \quad (1.65)$$

Далее, на границе при  $t=0$  величина  $G$  обращается в нуль при всех значениях  $\theta$ , за исключением  $\theta=0$ , а  $H$  обращается в нуль при всех значениях  $y$ , кроме  $y=0$ ; таким образом,

$$G(0, \theta) = \delta(\theta); \quad H(0, y) = \delta(y), \quad (1.66)$$

где  $\delta$  — несобственная функция Дирака.

Это доказывает, что решение (1.62) действительно отвечает одной частице, движущейся в точке  $t=0$ ,  $y=0$  в направлении оси  $t$ .

Равенство (1.63) показывает, что на любой глубине угловое распределение, безотносительно к положениям, является гауссовым. Средний квадрат угла рассеяния будет:

$$\langle \theta^2 \rangle_{\text{ср.}}(t) = \frac{2t}{\omega^2} = \frac{1}{2} \frac{E_3^2 t}{p^2 c^2} \quad (1.67)$$

в согласии с (1.58а).

Выражение (1.64) также показывает, что на любой глу-

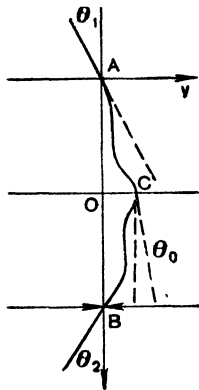


бине пространственное распределение, безотносительно к углам, также гауссово. Средний квадрат смещения

$$\langle y^2 \rangle_{\text{ср.}(t)} = \frac{2t^3}{3\omega^2}, \text{ т. е. } \langle y^2 \rangle_{\text{ср.}(t)} = \frac{1}{6} \frac{E_s^2}{p^2\beta^2} t^3 = \frac{1}{3} t^2 \langle \theta^2 \rangle_{\text{ср.}(t)}. \quad (1.68)$$

Следует отметить, что если мы рассмотрим те частицы, которые на данной глубине имеют определенное смещение, то их угловое распределение не будет гауссовым. Это же замечание относится к пространственному распределению частиц, имеющих на данной глубине определенное угловое отклонение.

Функцию распределения (1.62) можно применить к решению различных задач, возникающих при обсуждении опытов по



Фиг. 14. Иллюстрация расчета распределения боковых отклонений в центре траектории для частиц, проходящих через две фиксированные точки.

исследованию космических лучей. Предположим, например, что нам известно, что пучок частиц прошел через две точки  $A$  и  $B$  (точнее, через две малые площадки вокруг  $A$  и  $B$ ), и мы хотим определить распределение боковых отклонений траекторий частиц относительно прямой, соединяющей  $A$  и  $B$  и относительно середины отрезка  $AB$ . Выберем начало системы координат в точке  $A$ , а ось  $t$  направим по  $AB$  (фиг. 14). Как и ранее, будем рассматривать проекции траекторий на плоскость  $(t, y)$  и будем считать углы, образуемые траекториями с осью  $t$ , малыми. Проведем прямую, перпендикулярную отрезку  $AB$ , через его середину  $O$  и рассмотрим на этой прямой точку  $C$  на расстоянии  $y_0$  от точки  $O$ . Введем  $t_0 = AO = OB$  и рассмотрим три элементарных отрезка:  $dy_1$  у точки  $A$  ( $t=0$ ),  $dy_0$  у точки  $C$  ( $t=t_0$ ) и  $dy_2$  у точки  $B$  ( $t=2t_0$ ). Предположим, что космические частицы приходят в точку  $A$  равномерно со всех направлений; мы интересуемся вероятностью  $f(y_0) dy_0$

бокового отклонения  $(y_0, dy_0)$  при  $t = t_0$ .

Пусть  $K d\theta_1 dy_1$  означает число частиц, падающих на  $dy_1$  в интервале углов  $(\theta_1, d\theta_1)$ . Расстояние точки  $C$  от их первоначальной траектории будет  $y_0 - t_0\theta_1$ ; отсюда следует, что число этих частиц, которые пересекут  $dy_0$  под углом  $(\theta_0, d\theta_0)$ , составит

$$K d\theta_1 dy_1 F(t_0, y_0 - t_0\theta_1, \theta_0 - \theta_1) d\theta_0 dy_0,$$

а полное число частиц, приходящих со всех направлений и пересекающих  $dy_0$  под углом  $(\theta_0, d\theta_0)$ , будет <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} K dy_1 dy_0 d\theta_0 \int_{-\infty}^{\infty} F(t_0, y_0 - t_0 \theta_1, \theta_0 - \theta_1) d\theta_1 = \\ = K dy_1 dy_0 \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \frac{w}{t_0^{3/2}} e^{-3/4 \frac{w^2}{t_0^3} (y_0 - t_0 \theta_0)^2} d\theta_0. \end{aligned}$$

Частица, прошедшая через  $dy_0$  под углом  $\theta_0$ , имеет вероятность  $H(t_0, -y_0 - t_0 \theta_0) dy_2$  пройти через отрезок  $dy_2$  в точке  $B$ . Отсюда, для числа частиц, прошедших  $dy_1, dy_0$  и  $dy_2$ , получаем

$$K dy_1 dy_0 dy_2 \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \frac{w}{t_0^{3/2}} e^{-3/2 \frac{w^2 y_0^2}{t_0^3}},$$

в то время как полное число частиц, пронизывающих  $dy_1$  и  $dy_2$ , равно

$$\frac{1}{2t_0} K dy_1 dy_2.$$

Вероятность  $f(y_0) dy_0$  есть отношение этих двух чисел, поэтому

$$f(y_0) dy_0 = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{w}{t_0^{3/2}} e^{-3/2 \frac{w^2 y_0^2}{t_0^3}} dy_0$$

(Ферми, см. сноску на стр. 44).

<sup>1)</sup> Этот результат является непосредственным следствием (1.64), если мы представим себе частицу движущейся в противоположном направлении.

## КАСКАДНЫЕ ЛИВНИ

### § 24. Общие замечания

В первой части было показано, что заряженные частицы, проходя через вещество, теряют энергию вследствие столкновений и излучения. Большая часть энергии, потерянной при столкновениях, расходуется на возбуждение атомов или выбивание из атомов электронов с малыми энергиями и может в соответствии с нашим определением (см. Введение) считаться потерянной; в противоположность этому энергия, потерянная на излучение, распределена довольно равномерно между вторичными фотонами всех энергий — от нулевой до энергии, равной энергии самой первичной частицы. Для электронов малых энергий и для мезотронов практически всех энергий потери на столкновения преобладают над потерями на излучение. Поэтому взаимодействие с веществом мезотронов и электронов малых энергий сводится, в основном, к потерям энергии. Электроны же больших энергий, наоборот, большую часть своей энергии теряют на излучение. Поэтому при взаимодействии электронов больших энергий с веществом только малая доля их энергии рассеивается, а большая часть превращается в фотоны с большой энергией. Вторичные фотоны в свою очередь либо образуют пары, либо претерпевают комптоновские столкновения. В результате обоих этих процессов возникают электроны с энергией, сравнимой с энергией фотона. Эти новые электроны опять излучают фотоны, которые вновь образуют пары или комптоновские электроны. На каждой следующей ступени число частиц возрастает, а их средняя энергия убывает. В ходе этого процесса все большее число частиц оказывается в области энергий, меньших, нежели предел  $\eta_0$ , пока вся энергия первичного электрона не окажется полностью потерянной.

Описанное выше явление называется каскадным ливнем. Ясно, что ливень может быть создан не только электроном большой энергии, но и фотоном большой энергии. Мезотрон, производя электрон или фотон большой энергии, может также дать начало вторичному ливню.

Теория каскадных ливней была впервые развита независимо Карлсоном и Оппенгеймером [14] и Баба и Гайтлером [10].

В дальнейшем теория была развита в работах Ландау и Румера [27], Снайдера [39], Сербера [40], Нордгейма и Хебба [31] и других авторов [19, 24, 17, 22, 1, 44, 2, 32, 42]. Математическая сторона теории была детально проанализирована Скоттом [43].

В нашем изложении рассмотрим сначала задачу как одномерную, т. е. будем считать, что ливневые частицы (электроны и фотоны) движутся в том же направлении, что и первичная частица, создавшая ливень. Расширение ливня, вызванное рассеянием, будет исследовано дальше (§ 44). Основание для рассмотрения процесса развития ливня отдельно от его поперечного распространения состоит в том, что изменение длины пути частиц, вызываемое рассеянием, вообще мало.

### § 25. Определения, обозначения, типы приближений

Так как явления, приводящие к образованию ливней, — это излучение и образование пар, то удобно в дальнейшем измерять толщины вещества в радиационных единицах (§ 13). Далее мы вводим следующие определения и обозначения:

а) Дифференциальный спектр электронов  $\pi(E, t) dE$  — среднее число электронов (положительных и отрицательных) на глубине  $t$  с энергией между  $E$  и  $E + dE$ . Если потребуется отметить, что ливень создается электроном энергии  $E_0$  или фотоном энергии  $W_0$ , то будем писать соответственно  $\pi(E_0, E, t) dE$  или  $\pi(W_0, E, t) dE$ .

б) Дифференциальный спектр фотонов  $\gamma(W, t) dW$  — среднее число фотонов на глубине  $t$  с энергией между  $W$  и  $W + dW$  [аналогично будем употреблять обозначения  $\gamma(E_0, W, t) dW$  или  $\gamma(W_0, W, t) dW$  в случае ливня, образованного электроном энергии  $E_0$  или фотоном энергии  $W_0$ ].

в) Интегральный спектр электронов  $\Pi(E, t)$  — среднее число электронов, имеющих энергию большую, чем  $E$ , на глубине  $t$  [ $\Pi(E_0, E, t)$  или  $\Pi(W_0, E, t)$  для ливня, созданного электроном энергии  $E_0$  или фотоном энергии  $W_0$ ]:

$$\Pi(E, t) = \int_E^{\infty} \pi(E', t) dE'; \quad (2.1)$$

г) Интегральный спектр фотонов  $\Gamma(W, t)$  — среднее число фотонов, энергия которых превышает  $W$  на глубине  $t$  [ $\Gamma(E_0, W, t)$ ]

или  $\Gamma(W_0, W, t)$  для ливня, созданного электроном энергии  $E$  или фотоном энергии  $W_0$ ]

$$\Gamma(W, t) = \int_W^\infty \gamma(W', t) dW'. \quad (2.2)$$

е) Дифференциальный пробег электронов  $z_\pi(E) dE$ :

$$z_\pi(E) = \int_0^\infty \pi(E, t) dt. \quad (2.3)$$

Аналогично

$$z_\gamma(W) = \int_0^\infty \gamma(W, t) dt \quad (2.4)$$

определяет дифференциальный пробег фотонов  $z_\gamma(W) dW$ .

ф) Интегральный пробег электронов  $z_\Pi(E)$ :

$$z_\Pi(E) = \int_E^\infty z_\pi(E') dE' = \int_0^\infty \Pi(E, t) dt, \quad (2.5)$$

Аналогично

$$z_\Gamma(W) = \int_W^\infty z_\gamma(W') dW' = \int_0^\infty \Gamma(W, t) dt \quad (2.6)$$

определяет интегральный пробег фотонов  $Z_\Gamma(W)$ .

Функции  $z_\pi$ ,  $z_\gamma$ ,  $z_\Pi$  и  $z_\Gamma$  легче определить, чем соответствующие  $\pi$ ,  $\gamma$ ,  $\Pi$ ,  $\Gamma$ , и знания их достаточно для решения ряда задач, например для определения числа электронов и фотонов, находящихся в равновесии с пучком мезотронов (§ 40).

г) Удельная ионизация  $j(t) dt$  — число пар ионов, образованных всеми частицами ливня в слое вещества между  $t$  и  $t + dt$ .

и) Полная ионизация  $J$  — общее число пар ионов, образованных всеми частицами ливня до полного поглощения ливня:

$$J = \int_0^\infty j(t) dt. \quad (2.7)$$

и) Центр тяжести  $t_{\pi}(E)$  — положение центра тяжести ливневых электронов с энергией  $E$  — определяется как

$$\bar{t}_{\pi}(E) = \frac{\int_0^{\infty} t \pi(E, t) dt}{\int_0^{\infty} \pi(E, t) dt} = \frac{1}{z_{\pi}(E)} \int_0^{\infty} t \pi(E, t) dt. \quad (2.8)$$

Аналогичными формулами определяются центры тяжести:  $\bar{t}_{\gamma}(W)$  — фотонов с энергией  $W$ ;  $\bar{t}_{\Pi}(E)$  — электронов с энергией, превышающей  $E$ ;  $\bar{t}_{\Gamma}(W)$  — фотонов с энергией, превышающей  $W$ , и  $\bar{t}_j$  — ионизации.

ж) Продольный размер ливня  $\tau$ . Продольный размер ливня  $\tau_{\pi}(E)$  по ливневым электронам с энергией  $E$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} [\tau_{\pi}(E)]^2 &= \frac{\int_0^{\infty} [t - \bar{t}_{\pi}(E)]^2 \pi(E, t) dt}{\int_0^{\infty} \pi(E, t) dt} = \\ &= \frac{1}{z_{\pi}(E)} \int_0^{\infty} t^2 \pi(E, t) dt - [\bar{t}_{\pi}(E)]^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Аналогичные выражения определяют продольный размер:  $\tau_{\gamma}(W)$  по фотонам с энергией  $W$ ;  $\tau_{\Pi}(E)$  — по электронам с энергией, превышающей  $E$ ;  $\tau_{\Gamma}(W)$  — по фотонам с энергией, превышающей  $W$ , и  $\tau_j$  — ионизации.

Определенные выше величины описывают среднее поведение ливней. Истинное поведение отдельного ливня может заметным образом отличаться от среднего. Таким образом, возникает задача об отыскании вероятности определенного поведения ливня (например, вероятности того, что на глубине  $t$  окажется  $N$  электронов с энергией, превышающей  $E$ , и т. п.). Эта задача, называемая проблемой флуктуаций, не нашла до сих пор своего удовлетворительного решения. Она будет вкратце изложена в § 43.

Исследование среднего поведения ливней тоже не может быть математически проведено без определенных упрощений.

Мы неоднократно упоминали, что при больших энергиях главенствующими процессами являются излучение электронами и образование пар фотонами. При уменьшении энергии становятся существенными столкновения, а при значительно меньших энергиях — эффект Комптона. Удобно ввести величину  $\epsilon$ , называемую критической энергией, которая определяется как энергия, теряемая электроном на ионизацию на радиационной единице длины, причем энергия электрона тоже равна  $\epsilon$ . Учитывая, что для электронов космических лучей энергия практически совпадает с импульсом, получим из (1.9а) при  $\eta = 5 \cdot 10^6 \text{ eV}$  следующую формулу для  $\epsilon$ :

$$\epsilon = 1,53 \cdot 10^5 \frac{Z}{A} X_0 \left( 23,0 + 2 \log \frac{\epsilon}{\mu_e} - 2 \log Z \right). \quad (2.10)$$

Значения  $\epsilon$  для различных веществ приведены в табл. 2.

Таблица 2

Атомный номер  $Z$ , атомный вес  $A$ , радиационная единица длины  $X_0$  и критическая энергия  $\epsilon$  для различных веществ <sup>1)</sup>

Вещество	$Z$	$A$	$X_0$ (г/см <sup>2</sup> )	$\epsilon$ (10 <sup>6</sup> eV)
Водород . . . . .	1	1	138	815
Углерод . . . . .	6	12	40*	120
Азот . . . . .	7	14	35,4*	103
Кислород . . . . .	8	16	32,1*	90
Алюминий . . . . .	13	27	22,7*	37,2*
Аргон . . . . .	18	39,9	18*	37
Железо . . . . .	26	55,84	12,5*	18,4*
Медь . . . . .	29	63,57	13,3	22,4
Свинец . . . . .	82	207,2	5,2*	6,4*
Воздух . . . . .	{ N 76,9 <sup>0</sup> / <sub>100</sub> <sup>2)</sup> O 21,8 <sup>0</sup> / <sub>100</sub> A 1,3 <sup>0</sup> / <sub>100</sub>		34,2*	72*
Вода . . . . .	{ H 11,1 <sup>0</sup> / <sub>100</sub> <sup>2)</sup> O 88,9 <sup>0</sup> / <sub>100</sub>		33,9*	111

<sup>1)</sup> Значения  $X_0$  и  $\epsilon$ , отмеченные звездочкой, получены более точным усреднением ионизационного логарифма с учетом экранирования по экспериментальным данным по рассеянию рентгеновских лучей [55]. Исправленные значения  $X_0$  и  $\epsilon$  на 10 — 20% меньше данных автором. Эти значения взяты из книги С. З. Беленького [52]. (Прим. ред.)

<sup>2)</sup> По весу.

Список формул, графиков и таблиц для вычисления различных величин, описывающих ливни

Величина	Ссылка	Примечания
$\pi(E_0, E, t)$ . . . . .	Формула (2.55)	Прибл. $A; \varepsilon \ll E \ll E_0$
$\pi(W_0, E, t)$ . . . . .	Формула (2.98)	Прибл. $B; \sim 2\varepsilon < E \ll E_0$
$\gamma(E_0, W, t)$ . . . . .	Формула (2.58)	Прибл. $A; \varepsilon \ll E \ll W_0$
§ 36		Прибл. $B; \sim 2\varepsilon < E \ll W_0$
Формула (2.56), фиг. 16		Прибл. $A; \varepsilon \ll W \ll E_0$
Табл. 9		Прибл. $A; W$ порядка $E_0$
Формула (2.99)		Прибл. $B; \sim 2\varepsilon < W \ll E_0$
Формула (2.59)		Прибл. $A; \varepsilon \ll W \ll W_0$
Табл. 10		Прибл. $A; W$ порядка $W_0$
§ 36		Прибл. $B; \sim 2\varepsilon < W \ll W_0$
Формула (2.57), фиг. 15		Прибл. $A; \varepsilon \ll E \ll E_0$
Табл. 7		Прибл. $A; E$ порядка $E_0$
Формула (2.100)		Прибл. $B; \sim 2\varepsilon < E \ll E_0$
Формула (2.104), фиг. 19		Прибл. $B; E = 0$
Формула (2.60)		Прибл. $A; \varepsilon \ll E \ll W_0$
Табл. 8		Прибл. $A; E$ порядка $W_0$
§ 36		Прибл. $B; \sim 2\varepsilon < E \ll W_0$
Формула (2.105)		Прибл. $B; E = 0$
Формула (2.108)		Прибл. $A; \varepsilon \ll E \ll E_0$
Формула (2.110)		Прибл. $A; E$ порядка $W_0$
Формула (2.44)		Прибл. $B; \sim 2\varepsilon < E \ll W_0$
Формула (2.96)		Прибл. $B$
$J(E_0), J(W_0)$ . . . . .		Прибл. $A; \varepsilon \ll W \ll E_0$
$j(E_0, t), j(W_0, t)$ . . . . .		Прибл. $B; \sim 2\varepsilon < E \ll E_0$
$z_\pi(E_0, E), z_\gamma(E_0, W)$ . . . . .		Прибл. $B; \sim 2\varepsilon < E \ll E_0$



$z_{\Pi}(E_0, E)$ . . . . .	Формула (2.44)	Прибл. А; $\varepsilon \ll E \ll E_0$
	Формула (2.96)	Прибл. В; $\sim 2\varepsilon < E \ll E_0$
	Формула (2.106)	Прибл. В; $E = 0$
$z_{\pi}(W_0, E), z_{\gamma}(W_0, W)$ . . . . .	Формула (2.45)	Прибл. А; $\varepsilon \ll W \ll W_0$
	Формула (2.97)	Прибл. В; $\sim 2\varepsilon < W \ll W_0$
	Формула (2.107)	Прибл. А; $\varepsilon \ll E \ll W_0$
	Формула (2.97)	Прибл. В; $\sim 2\varepsilon < E \ll W_0$
	Формула (2.107)	Прибл. В; $E = 0$
$\bar{t}_{\pi}(E_0, E), \bar{t}_{\gamma}(E_0, W), \bar{t}_{\pi}(W_0, E), \bar{t}_{\gamma}(W_0, W)$	Формула (2.46)	Прибл. А; $\varepsilon \ll W \ll W_0$
	§ 36	Прибл. В; $\sim 2\varepsilon < W \ll W_0$
$\bar{t}_{\Pi}(E_0, E), \bar{t}_{\Pi}(W_0, E)$ . . . . .	Формула (2.46)	Прибл. А; $\varepsilon \ll E \ll W_0$
	§ 36	Прибл. В; $\sim 2\varepsilon < E \ll W_0$
	Формулы (2.106), (2.107)	Прибл. В; $E = 0$
$\tau_{\pi}(E_0, E), \tau_{\gamma}(E_0, W), \tau_{\pi}(W_0, E), \tau_{\gamma}(W_0, W)$	Формула (2.47)	Прибл. А; $\varepsilon \ll W \ll W_0$
	§ 36	Прибл. В; $\sim 2\varepsilon < W \ll W_0$
$\tau_{\Pi}(E_0, E), \tau_{\Pi}(W_0, E)$ . . . . .	Формула (2.47)	Прибл. А; $\varepsilon \ll E \ll W_0$
	§ 36	Прибл. В; $\sim 2\varepsilon < E \ll W_0$
	Формулы (2.106), (2.107)	Прибл. В; $E = 0$

В первом приближении  $\epsilon$  оказывается обратно пропорциональным атомному номеру, так как  $X_0$  приближенно пропорционально  $\frac{A}{Z^2}$ .

В области энергий, больших критической, теория ливней может быть развита на основе рассмотрения только явлений излучения и образования пар. Если, кроме того, рассматриваемые энергии велики в сравнении с  $137\mu_e Z^{-1/3}$ , то излучение и образование пар можно описывать асимптотическими формулами, относящимися к случаю полного экранирования. В дальнейшем будем называть „приближением А“ такое приближение, в котором пренебрегают столкновениями и эффектом Комптона, а для излучения и образования пар употребляются асимптотические формулы.

При энергиях, близких к критической, эффектом Комптона можно все еще пренебрегать, но столкновения надо учитывать. Однако существенно будет рассматривать лишь их влияние на потери энергии электронами, на образование же быстрых вторичных электронов столкновения заметно не влияют. Так как ионизационные потери медленно меняются с энергией, то они могут считаться постоянными, равными  $\epsilon$  на радиационную единицу длины. „Приближением В“ будем называть такое приближение, в котором пренебрегают эффектом Комптона, ионизационные потери считаются постоянными, а для излучения и образования пар употребляют асимптотические формулы.

При энергиях, малых в сравнении с критической, и эффект Комптона, и столкновения существенно сказываются как в поглощении, так и в образовании ливневых частиц. Например, в воздухе (фиг. 13) для фотона с энергией  $2,4 \cdot 10^7 \text{eV}$  вероятности эффекта Комптона и образования пар равны друг другу. Вероятность того, что электрон энергии  $E'$  появится в результате столкновения ( $\delta$ -электрон) или в результате образования пары фотоном энергии  $W$ , дается приближенно следующей формулой [в соответствии с (1.7) и (1.50)]:

$$\frac{\delta\text{-электроны}}{\text{пары}} = \frac{2CX_0 \mu_e W}{\sigma(W) (E')^2}.$$

В воздухе средняя энергия ливневых частиц имеет порядок  $10^8 \text{eV}$ ; считая, что количество электронов и фотонов одинакового порядка, мы получим, что в области энергий, близкой к  $\eta_0 = 5 \cdot 10^8 \text{eV}$ , более вероятно образование  $\delta$ -электрона, чем пары.

Как будет показано ниже, задача о ливнях в приближении  $A$  может быть решена полностью. Если рассматриваемые энергии не слишком близки к начальной, то может быть применен аналитический метод на основе принципов, проведенных Карлсоном и Оппенгеймером и Ландау и Румером (§ 26—30). Для энергий, близких к начальной, пригоден метод, развитый Баба и Гайтлером (§ 31).

Задача о ливнях в приближении  $B$  была частично решена в случае ливней, создаваемых первичной частицей, имеющей энергию, большую в сравнении с критической. Следуя методу, впервые развитому Снайдером, возможно рассчитать удельную ионизацию как функцию глубины (§ 32, 34, 35 и 37) и энергетический спектр ливневых частиц вплоть до энергий около  $2\varepsilon$  (§ 32, 33, 34 и 35).

Некоторые вычисления производились и для малых энергий, для которых нельзя воспользоваться ни приближением  $A$ , ни приближением  $B$ . Однако в этих вычислениях начальная энергия попрежнему считалась большой в сравнении с  $\varepsilon$  (§ 38). Теоретические данные о ливнях, образуемых первичными электронами и фотонами с энергиями порядка критической, получить трудно, хотя Дрезденом, Скоттом и Уленбеком было показано, что, по крайней мере принципиально, эта задача может быть решена по методу, аналогичному методу Баба и Гайтлера ([16]; см. также Скотт [43]).

Для удобства читателей в табл. 3 приведены основные величины, описывающие ливни, сопровождая их ссылками на формулы, таблицы и графики, при помощи которых эти величины могут быть вычислены. Интегральный спектр фотонов  $\Gamma$  и другие функции, связанные с  $\Gamma$ , не имеют большого практического применения, поэтому они не были вычислены в явной форме.

## А. ТЕОРИЯ ЛИВНЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ А

### § 26. Кинетические уравнения

Мы будем здесь рассматривать только явления излучения и образование пар, употребляя при этом для определения вероятностей асимптотические формулы, отвечающие случаю полного экранирования. Согласно предшествовавшему рассмотрению, такая теория будет давать точные результаты для ливневых частиц, энергия которых велика в сравнении с двумя величинами:  $\epsilon$  и  $137\mu_e Z^{-1/3}$ .

В случае легких элементов применимость теории будет ограничиваться первой величиной, а в случае тяжелых элементов — второй.

Энергия покоя электрона будет мала в сравнении с кинетической энергией, поэтому мы не будем делать различия между кинетической энергией электрона и его полной энергией.

Уравнения для определения дифференциальных спектров  $\pi(E, t)$  и  $\gamma(W, t)$  можно получить следующим образом. В данной толщине  $dt$  число электронов с энергией между  $E$  и  $E + dE$  изменяется благодаря следующим эффектам:

а) Фотоны с энергией  $W$  большей, чем  $E$ , образуют определенное число электронов обоего знака в области энергий  $(E, dE)$ . Это число равно

$$dEdt \cdot 2 \int_E^{\infty} \gamma(W, t) \psi_0\left(\frac{E}{W}\right) \frac{dW}{W} = dEdt \cdot 2 \int_0^1 \gamma\left(\frac{E}{u}, t\right) \psi_0(u) \frac{du}{u},$$

где  $\psi_0$  дано формулой (1.42а), а  $u = \frac{E}{W}$ .

б) Некоторые электроны с энергией  $E'$  большей, чем  $E$ , излучая часть своей энергии, оказываются в интервале энергий  $(E, dE)$ : Их число равно

$$dEdt \int_E^{\infty} \pi(E't) \varphi_0\left(\frac{E' - E}{E'}\right) \frac{dE'}{E'} = dEdt \int_0^1 \pi\left(\frac{E}{1-v}, t\right) \varphi_0(v) \frac{dv}{1-v},$$

где  $\varphi_0$  дается формулой (1.23а), а  $v = (E' - E)/E'$ .

с) Некоторые электроны, энергия которых первоначально лежала в области  $(E, dE)$ , оказываются, вследствие потерь на излучение, вне этой области. Их число составляет

$$\pi(E, t) dEdt \int_0^E \varphi_0 \left( \frac{W}{E} \right) \frac{dW}{E} = \pi(E, t) dEdt \int_0^1 \varphi_0(v) dv,$$

где  $v = \frac{W}{E}$ . Интегралы (b) и (с) расходятся, ибо  $\varphi_0(v)$  ведет себя как  $\frac{1}{v}$  („инфракрасная катастрофа“). Однако их разность остается конечной.

Число фотонов с энергией между  $W$  и  $W + dW$  изменяется в слое  $dt$  благодаря следующим эффектам:

а) Электроны с энергией  $E$  большей, чем  $W$ , излучают определенное число фотонов с энергией, лежащей в интервале  $(W, dW)$ . Это число равно

$$dW dt \int_W^\infty \pi(E, t) \varphi_0 \left( \frac{W}{E} \right) \frac{dE}{E} = dW dt \int_0^1 \pi \left( \frac{W}{v}, t \right) \varphi_0(v) \frac{dv}{v},$$

где  $v = \frac{W}{E}$ .

б) Некоторые фотоны, энергия которых первоначально лежала в интервале  $(W, dW)$ , поглощаются вследствие образования пар. Согласно (1.47a) их число равно

$$dW dt \cdot \gamma(W, t) \sigma_0.$$

Мы приходим к следующим уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(E, t)}{\partial t} = & 2 \int_0^1 \gamma \left( \frac{E}{u}, t \right) \psi_0(u) \frac{du}{u} - \int_0^1 \left[ \pi(E, t) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{1-v} \pi \left( \frac{E}{1-v}, t \right) \right] \varphi_0(v) dv; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \gamma(W, t)}{\partial t} = \int_0^1 \pi \left( \frac{W}{v}, t \right) \varphi_0(v) \frac{dv}{v} - \sigma_0 \gamma(W, t). \quad (2.12)$$

Функции  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  не зависят от атомного номера, поэтому решения уравнений (2.11) и (2.12) одни и те же для всех веществ, имея в виду, конечно, что толщины вещества измеряются в радиационных единицах. Далее, функции  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  зависят только от отношения между первичной энергией и энергией излученной частицы. Поэтому решения уравнений (2.11) и (2.12) останутся справедливыми, если все энергии умножить на постоянную.

### § 27. Элементарные решения

Покажем, что уравнения (2.11) и (2.12) имеют решения с разделенными переменными типа

$$\pi(E, t) = F_\pi(E) f(t), \quad \gamma(W, t) = F_\gamma(W) f(t). \quad (2.13)$$

По подстановке в кинетические уравнения (2.11) и (2.12), получим:

$$F_\pi(E) \frac{df(t)}{dt} = f(t) \left\{ 2 \int_0^1 F_\gamma\left(\frac{E}{u}\right) \psi_0(u) \frac{du}{u} - \int_0^1 \left[ F_\pi(E) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{1-v} F_\pi\left(\frac{E}{1-v}\right) \right] \varphi_0(v) dv \right\},$$

$$F_\gamma(W) \frac{df(t)}{dt} = f(t) \left\{ \int_0^1 F_\pi\left(\frac{W}{v}\right) \varphi_0(v) \frac{dv}{v} - \sigma_0 F_\gamma(W) \right\}.$$

Величины, заключенные в фигурные скобки, являются функциями только от  $E$  или  $W$ . Поэтому отношение  $\frac{df(t)}{f(t)}$  не зависит от  $t$  и равно некоторой постоянной  $\lambda$ :

$$\frac{df(t)}{dt} = \lambda f(t),$$

откуда

$$f(t) = \text{const } e^{\lambda t}$$

и

$$\left. \begin{aligned} \lambda F_{\pi}(E) &= 2 \int_0^1 F_{\gamma}\left(\frac{E}{u}\right) \psi_0(u) \frac{du}{u} - \int_0^1 \left[ F_{\pi}(E) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1-v} F_{\pi}\left(\frac{E}{1-v}\right) \right] \varphi_0(v) dv, \\ \lambda F_{\gamma}(W) &= \int_0^1 F_{\pi}\left(\frac{W}{v}\right) \varphi_0(v) \frac{dv}{v} - \sigma_0 F_{\gamma}(W). \end{aligned} \right\} (2.14)$$

Уравнения (2.14) могут быть решены и, следовательно, кинетические уравнения удовлетворяются функциями, имеющими форму (2.13). Прежде чем рассматривать решение этих уравнений, отметим тот факт, что решение в форме (2.13) будет существовать и в том случае, если мы включим в кинетические уравнения члены, описывающие столкновения и эффект Комптона, а также будем пользоваться более сложными выражениями для вероятностей излучения и образования пар. Иными словами, всегда можно найти такие решения кинетических уравнений, в которых число ливневых частиц изменяется с глубиной по экспоненциальному закону, а отношение числа фотонов к числу электронов и форма их спектров остаются неизменными при изменении глубины. Эти решения будем называть элементарными решениями кинетических уравнений.

Уравнения (2.14) удовлетворяются степенными функциями энергии

$$F_{\pi}(E) = aE^{-(s+1)}, \quad F_{\gamma}(W) = bW^{-(s+1)}, \quad (2.15)$$

где  $s$  — положительное число.

Подставляя (2.15) в (2.14), получим:

$$\lambda a = -A(s)a + B(s)b, \quad \lambda b = C(s)a - \sigma_0 b, \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_0^1 [1 - (1-v)^s] \varphi_0(v) dv, & C(s) &= \int_0^1 v^s \varphi_0(v) dv, \\ B(s) &= 2 \int_0^1 u^s \psi_0(u) du, & \sigma_0 &= \int_0^1 \psi_0(u) du. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Уравнения (2.16) разрешимы, если  $\lambda$  удовлетворяет квадратному уравнению:

$$[\lambda + A(s)](\lambda + \sigma_0) - B(s)C(s) = 0. \quad (2.18)$$

Отсюда для каждого значения показателя степени  $s$  величина  $\lambda$  может иметь два значения:

$$\begin{aligned}\lambda_1(s) &= -\frac{A(s) + \sigma_0}{2} + \frac{1}{2} \{ [A(s) - \sigma_0]^2 + 4B(s)C(s) \}^{1/2}, \\ \lambda_2(s) &= -\frac{A(s) + \sigma_0}{2} - \frac{1}{2} \{ [A(s) - \sigma_0]^2 + 4B(s)C(s) \}^{1/2}\end{aligned}\quad (2.19)$$

Отношение коэффициентов  $a$  и  $b$  составляет

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{B(s)}{A(s) + \lambda_1(s)} = \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{C(s)} \quad \text{или} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{B(s)}{A(s) + \lambda_2(s)} = \frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{C(s)} \quad (2.20)$$

соответственно двум возможным выборам  $\lambda$ . Таким образом, мы имеем следующие два ряда элементарных решений кинетических уравнений (2.11) и (2.12):

$$\left. \begin{aligned}\pi(E, t) &= a_1 E^{-(s+1)} e^{\lambda_1(s)t}, \\ \gamma(W, t) &= \frac{a_1 C(s)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} W^{-(s+1)} e^{\lambda_1(s)t}, \\ \pi(E, t) &= a_2 E^{-(s+1)} e^{\lambda_2(s)t}, \\ \gamma(W, t) &= \frac{a_2 C(s)}{\sigma_0 + \lambda_2(s)} W^{-(s+1)} e^{\lambda_2(s)t},\end{aligned}\right\} \quad (2.21)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — произвольные постоянные, а  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  даются формулами (2.19).

Путем подстановки выражений для  $\varphi_0(v)$  и  $\psi_0(u)$ , даваемых формулами (1.23а) и (1.42а), в (2.17) легко получить явные выражения для  $A(s)$ ,  $B(s)$  и  $C(s)$ . Результат таков:

$$\begin{aligned}A(s) &= \left(\frac{4}{3} + 2b\right) \left(\frac{d}{ds} \log s! + \gamma - 1 + \frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \\ &= 1,36 \frac{d}{ds} \log(s+1)! - \frac{1}{(s+1)(s+2)} - 0,0750, \\ B(s) &= 2 \left[ \frac{1}{s+1} - \left(\frac{4}{3} + 2b\right) \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right) \right] = \\ &= 2 \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{1,36}{(s+2)(s+3)} \right], \quad (2.17a) \\ C(s) &= \left(\frac{4}{3} + 2b\right) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+2} + \frac{1,36}{s(s+1)} \\ \sigma_0 &= \frac{7}{9} - \frac{b}{3} = 0,773.\end{aligned}$$



Используя вместо (1.23а) и (1.42а) формулы (1.32) и (1.49а), можно получить приближенные выражения в более простой математической форме:

$$A(s) = \left(\frac{d}{ds}\right) \log s! + 0,5772, \quad B(s) = \frac{2\sigma_0}{s+1} \quad (2.17b)$$

$$C(s) = \frac{1}{s}, \quad \sigma_0 = \frac{7}{9}.$$

В (2.17а) и (2.17b) <sup>1)</sup>

$$\frac{d}{ds} \log s! = \int_0^1 \frac{1-x^s}{1-x} dx - \gamma$$

обозначает логарифмическую производную от гамма-функции;  $\gamma = 0,5772$  есть постоянная Эйлера,  $b = 0,0135$  определено в § 13. Значения  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $C(s)$ ,  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_2(s)$  при различных значениях  $s$  приведены в табл. 5.

Элементарные решения имеют и непосредственный физический смысл. Рассмотрим пучок электронов и фотонов, входящий в вещество при  $t=0$ ; пусть  $\pi(E,0)dE$  — число падающих в секунду электронов с энергией между  $E$  и  $E+dE$ , а  $\gamma(W,0)$  — число падающих в секунду фотонов с энергией, между  $W$  и  $W+dW$ . Предположим, что для энергий, больших некоторого  $\eta$ , величины  $\pi(E,0)$  и  $\gamma(W,0)$  являются степенными функциями энергии с одинаковым показателем степени

$$\pi(E,0) = K_\pi E^{-(s+1)}, \quad \gamma(W,0) = K_\gamma W^{-(s+1)}.$$

Тогда дифференциальные спектры электронов и фотонов для  $E$  и  $W$ , больших  $\eta$ , даются на любой глубине  $t$  линейными комбинациями двух элементарных решений, отвечающих показателю степени  $s+1$ :

$$\pi(E,t) = E^{-(s+1)} [a_1 e^{\lambda_1(s)t} + a_2 e^{\lambda_2(s)t}],$$

$$\gamma(W,t) = W^{-(s+1)} \left[ \frac{a_1 C(s)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} e^{\lambda_1(s)t} + \frac{a_2 C(s)}{\sigma_0 + \lambda_2(s)} e^{\lambda_2(s)t} \right], \quad (2.22)$$

<sup>1)</sup> См. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых. М.—Л., 1933, т. 2, стр. 189. (Прим. ред.)

причем постоянные  $a_1$  и  $a_2$  должны быть выбраны так, чтобы удовлетворить граничным условиям:

$$a_1 + a_2 = K\pi, \quad a_1 \frac{C(s)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} + a_2 \frac{C(s)}{\sigma_0 + \lambda_2(s)} = K\gamma.$$

Таким образом, для энергий, больших  $\eta$ , распределение электронов и фотонов по энергиям не зависит от пройденной ими толщи вещества. Изменение числа электронов с глубиной отлично от изменения числа фотонов и зависит от начального отношения между их числами. Однако на больших глубинах члены, содержащие  $e^{\lambda_2(s)t}$ , становятся малыми в сравнении с членами, содержащими  $e^{\lambda_1(s)t}$ , так как  $\lambda_2$  всегда отрицательно и по абсолютной величине больше, чем  $\lambda_1$ . Таким образом, для  $t \gg 1$  (2.22) переходит в

$$\left. \begin{aligned} \pi(E, t) &= a_1 E^{-(s+1)} e^{\lambda_1(s)t}, \\ \gamma(W, t) &= \frac{a_1 C(s)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} W^{-(s+1)} e^{\lambda_1(s)t}, \end{aligned} \right\} (2.22a)$$

что означает, что на достаточно больших глубинах числа электронов и фотонов находятся в постоянном отношении и изменяются по экспоненциальному закону; при этом скорость их изменения с глубиной зависит от  $s$  и, следовательно, от начального распределения по энергиям. Согласно табл. 5,  $\lambda_1$  положительно при  $s < 1$ , равно нулю при  $s = 1$  и отрицательно при  $s > 1$ ; при стремлении  $s$  к бесконечности  $\lambda_1$  стремится к значению  $-\sigma_0 = -0,7733$ . В первом случае число ливневых частиц растет с глубиной, во втором случае остается неизменным и в третьем случае убывает. Случай независимости числа частиц от глубины имеет практическое значение; соответствующие спектры фотонов и электронов мы будем называть нормальными спектрами. В приближении А нормальный спектр имеет вид:

$$\pi_0(E) = \frac{a_1}{E^2}, \quad \gamma_0(W) = \frac{a_1 C(1)}{\sigma_0} \cdot \frac{1}{W^2} = \frac{1,31 a_1}{W^2}. \quad (2.23)$$

### § 28. Интегралы Меллина и Лапласа от $\pi$ , $\gamma$ , П

При попытке решения кинетических уравнений (2.11) и (2.12) с произвольными граничными условиями, в частности, с граничными условиями, отвечающими входящему в вещество одиночному электрону или фотону, мы сталкиваемся с более трудной

математической задачей. В задачах подобного типа весьма эффективным оказывается метод функциональных преобразований. В последующем рассмотрении мы часто будем пользоваться преобразованиями, известными под именем преобразований Меллина и Лапласа. Для удобства читателей в дополнении I приведены основные свойства этих преобразований.

Рассмотрим интегралы Меллина от  $\pi$  и  $\gamma$  по отношению к энергии, т. е. величины

$$\mathfrak{M}_\pi(s, t) = \int_0^\infty E^s \pi(E, t) dE, \quad \mathfrak{M}_\gamma(s, t) = \int_0^\infty W^s \gamma(W, t) dW, \quad (2.24)$$

где  $s$  — комплексный параметр.  $\mathfrak{M}_\pi$  и  $\mathfrak{M}_\gamma$  определены для таких  $s$ , при которых интегралы сходятся. Так как  $\pi$  и  $\gamma$  тождественно равны нулю при энергиях больших, чем начальная энергия, то достаточно исследовать сходимость интегралов на нижнем пределе. Это исследование приводит к следующему: область сходимости интегралов  $\mathfrak{M}_\pi$  и  $\mathfrak{M}_\gamma$  есть полуплоскость  $\text{Re}(s) > s_0$ , где  $\text{Re}$  означает вещественную часть, а  $s_0$  — вещественную постоянную. Ниже будет показано, что  $s_0 = 0$ .

Рассмотрим также интегралы Лапласа от  $\pi$  и  $\gamma$  по отношению к  $t$ , т. е. величины

$$\mathfrak{L}_\pi(E, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \pi(E, t) dt; \quad \mathfrak{L}_\gamma(W, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \gamma(W, t) dt. \quad (2.25)$$

$\mathfrak{L}_\pi$  и  $\mathfrak{L}_\gamma$  также определены при тех комплексных параметрах  $\lambda$ , при которых соответствующие интегралы сходятся. Область сходимости есть полуплоскость  $\text{Re}(\lambda) > \lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — вещественная постоянная. Ниже будет показано, что  $\lambda_0 = -\sigma_0$ .

Наконец, рассмотрим интегралы Меллина по энергии от интегралов Лапласа по толщине, т. е. величины

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_\pi(s, \lambda) &= \int_0^\infty E^s dE \int_0^\infty e^{-\lambda t} \pi(E, t) dt, \\ \mathfrak{N}_\gamma(s, \lambda) &= \int_0^\infty W^s dW \int_0^\infty e^{-\lambda t} \gamma(W, t) dt, \end{aligned} \right\} (2.26)$$

являющиеся функциями двух комплексных параметров  $s$  и  $\lambda$ .

Оправданием введения преобразованных величин  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{N}$  является то, что их значительно легче определить, чем исходные функции  $\pi$  и  $\gamma$ . Многие свойства ливней могут быть выяснены непосредственно из этих интегралов. Сами же функции  $\pi$  и  $\gamma$  могут быть получены из преобразований посредством обратных формул, приведенных в дополнении I.

Граничные условия задачи определяются функциями  $\pi(E, 0)$  и  $\gamma(W, 0)$ , описывающими входящий пучок частиц. Рассмотрим, в частности, граничные условия, отвечающие:

а) одиночному первичному электрону с энергией  $E_0$

$$\pi(E, 0) = \delta(E - E_0); \quad \gamma(W, 0) = 0, \quad (2.27)$$

б) одиночному первичному фотону с энергией  $W_0$

$$\pi(E, 0) = 0; \quad \gamma(W, 0) = \delta(W - W_0), \quad (2.28)$$

где  $\delta$  — несобственная функция Дирака.

Как было указано Ландау и Румером [27], интегралы Меллина удовлетворяют простой системе дифференциальных уравнений, которые можно получить, если умножить обе стороны (2.11) и (2.12) соответственно на  $E^s$  или  $W^s$  и проинтегрировать по энергии от 0 до  $\infty$ .

Интегралы правой части могут быть преобразованы следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} E^s dE \cdot 2 \int_0^1 \gamma\left(\frac{E}{u}, t\right) \psi_0(u) \left(\frac{du}{u}\right) = \\ & = \int_0^{\infty} W^s \gamma(W, t) dW \cdot 2 \int_0^1 u^s \psi_0(u) du = \mathfrak{M}_\gamma(s, t) \cdot B(s), \end{aligned} \quad \left(W = \frac{E}{u}\right);$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} E^s dE \int_0^1 \left[ \pi(E, t) - \frac{1}{1-v} \pi\left(\frac{E}{1-v}, t\right) \right] \varphi_0(v) dv = \\ & = \int_0^{\infty} \pi(E, t) E^s dE \int_0^1 \varphi_0(v) dv - \int_0^{\infty} (E')^s \pi(E', t) dE' \int_0^1 (1-v)^s \varphi_0(v) dv = \\ & = \int_0^{\infty} E^s \pi(E, t) dE \int_0^1 [1 - (1-v^s)] \varphi_0(v) dv = \mathfrak{M}_\pi(s, t) \cdot A(s); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} W^s dW \int_0^1 \pi\left(\frac{W}{v}, t\right) \varphi_0(v) \left(\frac{dv}{v}\right) &= \\ &= \int_0^{\infty} E^s \pi(E, t) dE \int_0^1 v^s \varphi_0(v) dv, \\ &\quad \left(E = \frac{W}{v}\right) = \mathfrak{M}_{\pi}(s, t) \cdot C(s). \end{aligned}$$

Мы приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{M}_{\pi}(s, t)}{\partial t} &= -A(s) \mathfrak{M}_{\pi}(s, t) + B(s) \mathfrak{M}_{\gamma}(s, t); \\ \frac{\partial \mathfrak{M}_{\gamma}(s, t)}{\partial t} &= C(s) \mathfrak{M}_{\pi}(s, t) - \sigma_0 \mathfrak{M}_{\gamma}(s, t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Если теперь умножить обе стороны (2.29) на  $e^{\lambda t}$  и проинтегрировать по  $t$  от 0 до  $\infty$ , то это дает следующую систему алгебраических уравнений для  $\mathfrak{N}_{\pi}$  и  $\mathfrak{N}_{\gamma}$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda \mathfrak{N}_{\pi}(s, \lambda) - \mathfrak{M}_{\pi}(s, 0) &= -A(s) \mathfrak{N}_{\pi}(s, \lambda) + B(s) \mathfrak{N}_{\gamma}(s, \lambda); \\ \lambda \mathfrak{N}_{\gamma}(s, \lambda) - \mathfrak{M}_{\gamma}(s, 0) &= C(s) \mathfrak{N}_{\pi}(s, \lambda) - \sigma_0 \mathfrak{N}_{\gamma}(s, \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

где  $\mathfrak{M}_{\pi}(s, 0)$  и  $\mathfrak{M}_{\gamma}(s, 0)$  — интегралы Меллина от  $\pi(E, 0)$  и  $\gamma(W, 0)$ . В частности:

а) в случае первичного электрона с энергией  $E_0$

$$\mathfrak{M}_{\pi}(s, 0) = E_0^s, \quad \mathfrak{M}_{\gamma}(s, 0) = 0; \quad (2.31)$$

б) в случае первичного фотона с энергией  $W_0$

$$\mathfrak{M}_{\pi}(s, 0) = 0, \quad \mathfrak{M}_{\gamma}(s, 0) = W_0^s. \quad (2.32)$$

Решениями уравнений (2.30) являются:

а) в случае первичного электрона с энергией  $E_0$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_{\pi}(E_0, s, \lambda) &= \frac{(\sigma_0 + \lambda) E_0^s}{[A(s) + \lambda](\sigma_0 + \lambda) - B(s)C(s)} = \\ &= \frac{(\sigma_0 + \lambda) E_0^s}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]}; \\ \mathfrak{N}_{\gamma}(E_0, s, \lambda) &= \frac{C(s) E_0^s}{[A(s) + \lambda](\sigma_0 + \lambda) - B(s)C(s)} = \\ &= \frac{C(s) E_0^s}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]}; \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

б) в случае первичного фотона с энергией  $W_0$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_\pi(W_0, s, \lambda) &= \frac{B(s) W_0^s}{[A(s) + \lambda] (\sigma_0 + \lambda) - B(s)C(s)} = \\ &= \frac{B(s) W_0^s}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]}; \\ \mathfrak{N}_\gamma(W_0, s, \lambda) &= \frac{[A(s) + \lambda] W_0^s}{[A(s) + \lambda] (\sigma_0 + \lambda) - B(s)C(s)} = \\ &= \frac{[A(s) + \lambda] W_0^s}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]}, \end{aligned} \right\} (2.34)$$

где  $\lambda_1(s)$  и  $\lambda_2(s)$  — функции, определенные формулами (2.19).

Непосредственно решая уравнения (2.39) или применяя обратные преобразования Лапласа к  $\mathfrak{N}_\pi$  и  $\mathfrak{N}_\gamma$  (см. дополнение I), легко получить выражения для  $\mathfrak{M}$ :

а) в случае первичного электрона с энергией  $E_0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\pi(E_0, s, t) &= \frac{E_0^s}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \{ [\sigma_0 + \lambda_1(s)] e^{\lambda_1(s)t} - \\ &\quad - [\sigma_0 + \lambda_2(s)] e^{\lambda_2(s)t} \}; \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\mathfrak{M}_\gamma(E_0, s, t) = \frac{C(s) E_0^s}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \{ e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t} \};$$

б) в случае первичного фотона с энергией  $W_0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\pi(W_0, s, t) &= - \frac{W_0^s}{C(s)} \frac{[\sigma_0 + \lambda_1(s)] [\sigma_0 + \lambda_2(s)]}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \cancel{=} \\ &\quad \cancel{=} \{ e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t} \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\gamma(W_0, s, t) &= - \frac{W_0^s}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \{ [\sigma_0 + \lambda_2(s)] e^{\lambda_1(s)t} - \\ &\quad - [\sigma_0 + \lambda_1(s)] e^{\lambda_2(s)t} \}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

При произвольном значении  $t$  функции, стоящие в правой части уравнений (2.35) и (2.36), регулярны при  $s > 0$  и обращаются в бесконечность в пределе  $s = 0$ , так как при этом  $\lambda_1(s)$  обращается в положительную бесконечность. Это показывает, что область сходимости для  $\mathfrak{M}_\pi$  и  $\mathfrak{M}_\gamma$  есть положительная полуплоскость. Выражения (2.35) и (2.36) представляют  $\mathfrak{M}_\pi$  и  $\mathfrak{M}_\gamma$  только в этой полуплоскости; в отрицательной полуплоскости они представляют аналитические продолжения  $\mathfrak{M}_\pi$  и  $\mathfrak{M}_\gamma$ .

Интегралы Лапласа  $\mathfrak{L}_\pi$  и  $\mathfrak{L}_\gamma$  можно получить, применяя обратные преобразования Меллина к  $\mathfrak{N}_\pi$  и  $\mathfrak{N}_\gamma$  (см. дополнение I):

а) в случае первичного электрона с энергией  $E_0$

$$\mathfrak{L}_\pi(E_0, E, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{(\sigma_0 + \lambda) ds}{[\lambda - \lambda_1(s)] [\lambda - \lambda_2(s)]}; \quad (2.37)$$

$$\mathfrak{L}_\gamma(E_0, W, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \left(\frac{E_0}{W}\right)^s \frac{C(s) ds}{[\lambda - \lambda_1(s)] [\lambda - \lambda_2(s)]};$$

б) в случае первичного фотона с энергией  $W_0$

$$\mathfrak{L}_\pi(W_0, E, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{W_0}{E}\right)^s \frac{B(s) ds}{[\lambda - \lambda_1(s)] [\lambda - \lambda_2(s)]}; \quad (2.38)$$

$$\mathfrak{L}_\gamma(W_0, W, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \left(\frac{W_0}{W}\right)^s \frac{[A(s) + \lambda] ds}{[\lambda - \lambda_1(s)] [\lambda - \lambda_2(s)]}.$$

Путь интегрирования в написанных выше интегралах проходит параллельно мнимой оси справа от всех полюсов. В случае  $\lambda > -\sigma_0$ , в положительной полуплоскости  $s$  имеется только один полюс; этот полюс лежит на вещественной оси и определяется уравнением

$$\lambda_1(s) = \lambda. \quad (2.39)$$

Легко показать, что отрицательная полуплоскость содержит бесконечное число полюсов, что объясняется поведением логарифмической производной гамма-функции, входящей в  $A(s)$ .

Рассмотрим выражение для  $\mathfrak{L}_\pi$  в (2.37). При  $E < E_0$  подинтегральное выражение стремится к 0 в пределе  $s = -\infty$ . Поэтому, дополняя контур интегрирования влево полуокружностью бесконечно большого радиуса, можно представить интеграл в виде суммы по вычетам от всех полюсов. Каждый полюс

дает член, пропорциональный  $\left(\frac{E_0}{E}\right)^s$ . Поэтому, если  $E \ll E_0$ , то слагаемое, происходящее от полюса, лежащего на вещественной положительной оси, значительно превосходит те, у которых  $\text{Re}(s) < 0$ . Аналогичные заключения можно сделать и в отношении других интегралов Лапласа. Поэтому для энергий, малых в сравнении с первичной,  $\mathfrak{L}_\pi$  и  $\mathfrak{L}_\gamma$  даются следующими выражениями:

а) в случае первичного электрона с энергией  $E_0$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\pi(E_0, E, \lambda) &= -\frac{1}{E} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)}, \\ \mathfrak{L}_\gamma(E_0, W, \lambda) &= -\frac{1}{W} \left(\frac{E_0}{W}\right)^s \frac{C(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)};\end{aligned}\quad (2.40)$$

б) в случае первичного фотона с энергией  $W_0$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\pi(W_0, E, \lambda) &= -\frac{1}{E} \left(\frac{W_0}{E}\right)^s \frac{B(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)}; \\ \mathfrak{L}_\gamma(W_0, W, \lambda) &= -\frac{1}{W} \left(\frac{W_0}{W}\right)^s \frac{A(s) + \lambda_1(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)}.\end{aligned}\quad (2.41)$$

В написанных выше формулах  $s$  определяется из условия (2.39), так что  $\lambda$  совпадает с  $\lambda_1(s)$ . Символ  $\lambda_1'(s)$  означает производную  $\lambda_1$  по  $s$ ; она дана как функция от  $s$  в табл. 5. При  $\lambda = -\sigma_0$ ,  $s = +\infty$  и выражения (2.40) и (2.41) обращаются в бесконечность. Отсюда следует, что область сходимости интегралов Лапласа есть полуплоскость, лежащая справа от точки  $\lambda = -\sigma_0$ .

Напишем также выражение для интегралов от  $\Pi$ , которые легко получить из формулы (Д. 8) дополнения I<sup>1)</sup>:

а) случай первичного электрона с энергией  $E_0$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_\Pi(E_0, s-1, t) &= \frac{1}{s} \frac{E_0^s}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \{[\sigma_0 + \lambda_1(s)] e^{\lambda_1(s)t} - \\ &\quad - [\sigma_0 + \lambda_2(s)] e^{\lambda_2(s)t}\}, \\ \mathfrak{L}_\Pi(E_0, E, \lambda) &= -\frac{1}{s} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)};\end{aligned}\quad (2.42)$$

<sup>1)</sup> Выражения для интегралов Меллина были даны Ландау и Румером [27]. Выражения для интегралов Лапласа не были ранее опубликованы.



б) случай первичного фотона с энергией  $W_0$

$$\mathfrak{M}_{\Pi}(W_0, s-1, t) = -\frac{W_0^s}{sC(s)} \frac{[\sigma_0 + \lambda_1(s)] [\sigma_0 + \lambda_2(s)]}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \cancel{\times} \\ \cancel{\neq} e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t}. \quad (2.43)$$

$$\mathfrak{L}_{\Pi}(W_0, E, \lambda) = -\frac{1}{s} \left( \frac{W_0}{E} \right)^s \frac{B(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)}.$$

### § 29. Пробег, центр тяжести, продольные размеры

Выражения для пробега  $z$ , положения центра тяжести  $\bar{t}$  и продольных размеров  $\tau$  (с индексами  $\pi$ ,  $\gamma$ ,  $\Pi$ ) можно непосредственно вывести из выражений для соответствующих интегралов Лапласа. В самом деле, легко видеть, что:

$$z = (\mathfrak{L})_{\lambda=0}, \quad \bar{t} = \left( -\frac{1}{\mathfrak{L}} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0}, \\ \tau^2 = \left[ \frac{1}{\mathfrak{L}} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \lambda^2} - \left( \frac{1}{\mathfrak{L}} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda} \right)^2 \right]_{\lambda=0} = \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{\mathfrak{L}} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda} \right) \right]_{\lambda=0}.$$

Используя результаты предыдущего параграфа и численные значения, приведенные в табл. 5, получим <sup>1)</sup>

а) случай первичного электрона с энергией  $E_0$

$$z_{\pi}(E_0, E) = \frac{\sigma_0}{\lambda_2(1) \lambda_1'(1)} \frac{E_0}{E^2} = 0,437 \frac{E_0}{E^2} \\ z_{\gamma}(E_0, W) = \frac{C(1)}{\lambda_2(1) \lambda_1'(1)} \frac{E_0}{W^2} = 0,572 \frac{E_0}{W^2} \quad (2.44) \\ z_{\Pi}(E_0, E) = \frac{\sigma_0}{\lambda_2(1) \lambda_1'(1)} \frac{E_0}{E} = 0,437 \frac{E_0}{E};$$

б) случай первичного фотона с энергией  $W_0$

$$z_{\Pi}(W_0, E) = \frac{B(1)}{\lambda_2(1) \lambda_1'(1)} \frac{W_0}{E^2} = 0,437 \frac{W_0}{E^2} \\ z_{\gamma}(W_0, W) = \frac{A(1)}{\lambda_2(1) \lambda_1'(1)} \frac{W_0}{W^2} = 0,572 \frac{W_0}{W^2} \quad (2.45) \\ z_{\Pi}(W_0, E) = \frac{B(1)}{\lambda_2(1) \lambda_1'(1)} \frac{W_0}{E} = 0,437 \frac{W_0}{E}.$$

<sup>1)</sup> Выражения для пробегов были даны Нордгеймом и Хеббом [31]. Другие выражения не были до сих пор опубликованы.

Выражения для центров тяжести имеют вид:

$$\bar{t} = -\frac{1}{\lambda_1'(1)} y + h = 1,01y + h, \quad (2.46)$$

где  $y$  — логарифм отношения начальной энергии ( $E_0$  или  $W_0$ ) к рассматриваемой ( $E$  или  $W$ ), а  $h$  — постоянные, различные в случае разных индексов и аргументов функции  $\tau$ ; они приведены в табл. 4. Выражения для продольных размеров имеют форму:

$$\tau^2 = -\frac{\lambda_1''(1)}{[\lambda_1'(1)]^3} y + k = 1,61y + k, \quad (2.47)$$

где  $y$  имеет такой же смысл, как в (2.46), а  $k$  — постоянные, также данные в табл. 4. Можно заметить, что зависимость пробега от энергии такая же, как в случае нормального спектра, определенного в § 27. Конечно, приведенные выше выражения неприменимы в случае энергий, приближающихся к значению энергии первичной частицы.

Таблица 4

Значения  $h$  в формуле (2.46) и  $k$  в формуле (2.47)

Величина	$\bar{t}_\pi(E_0, E)$	$\bar{t}_\gamma(E_0, W)$	$\bar{t}_{II}(E_0, E)$	$\bar{t}_\pi(W_0, E)$	$\bar{t}_\gamma(W_0, W)$	$\bar{t}_{II}(W_0, E)$
$h$ . . . . .	1,0	1,2	0,03	1,8	2,0	0,8
$k$ . . . . .	-0,1	1,0	-0,7	1,1	2,1	0,5

### § 30. Дифференциальный и интегральный спектры

Выражения для дифференциального и интегрального спектров электронов и фотонов можно получить из формул (2.35), (2.36), (2.42) и (2.43), применяя к ним обратные преобразования Меллина. Например,

$$\pi(E, t) dE = \frac{1}{2\pi i} \frac{dE}{E} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} E^{-s} \mathfrak{M}_\pi(s, t) ds,$$

причем путь интегрирования представляет прямую, параллельную мнимой оси, лежащую в положительной полуплоскости.

Аналогичные выражения имеют место для  $\gamma$  и  $\Pi$ . Введя еще логарифм энергии, получим:

а) в случае первичного электрона с энергией  $E_0$

$$\begin{aligned} \pi(E_0, E, t)dE = & -\frac{dy}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds H_1(s) e^{[ys + \lambda_1(s)t]} - \\ & -\frac{dy}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds H_2(s) e^{[ys + \lambda_2(s)t]}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

где

$$y = \log\left(\frac{E_0}{E}\right), \quad H_1(s) = \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)},$$

$$H_2(s) = -\frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}$$

$$\begin{aligned} \gamma(E_0, W, t)dW = & -\frac{dy}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds L(s) \left\{ e^{[ys + \lambda_1(s)t - \frac{1}{2} \log s]} - \right. \\ & \left. - e^{[ys + \lambda_2(s)t - \frac{1}{2} \log s]} \right\}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где

$$y = \log\left(\frac{E_0}{W}\right) \quad \text{и} \quad L(s) = \frac{\sqrt{s} C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}$$

$$\begin{aligned} \Pi(E_0, E, t) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds H_1(s) e^{[ys + \lambda_1(s)t - \log s]} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds H_2(s) e^{[ys + \lambda_2(s)t - \log s]}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где  $y$ ,  $H_1(s)$  и  $H_2(s)$  те же, что в (2.48);

б) в случае первичного фотона с энергией  $W$

$$\begin{aligned} \pi(W_0, E, t)dE = & -\frac{dy}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds M(s) \left\{ e^{[ys + \lambda_1(s)t + \frac{1}{2} \log s]} - \right. \\ & \left. - e^{[ys + \lambda_2(s)t + \frac{1}{2} \log s]} \right\}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где

$$y = \log \left( \frac{W_0}{E} \right) \quad \text{и} \quad M(s) = - \frac{[\sigma_0 + \lambda_1(s)] [\sigma_0 + \lambda_2(s)]}{\sqrt{s} C(s) \lambda_1(s) - \lambda_2(s)}.$$

$$\gamma(W_0, W, t) dW = - \frac{dy}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} ds H_2(s) e^{[ys + \lambda_1(s)t]} -$$

$$- \frac{dy}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} ds H_1(s) e^{[ys + \lambda_2(s)t]}, \quad (2.52)$$

где  $y = \log \left( \frac{W_0}{W} \right)$ , а  $H_1(s)$ ,  $H_2(s)$  те же, что в (2.48);

$$\Pi(W_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} ds M(s) \left\{ e^{(ys + \lambda_1(s)t - \frac{1}{2} \log s)} - \right.$$

$$\left. - e^{(ys + \lambda_2(s)t - \frac{1}{2} \log s)} \right\}, \quad (2.53)$$

где  $y$  и  $M(s)$  те же, что в (2.51).

В приведенных выше формулах каждое из подынтегральных выражений представляет собой произведение слабо меняющейся функции от  $s$  [ $H_1(s)$ ,  $H_2(s)$ ,  $L(s)$  или  $M(s)$ ] на экспоненциальную функцию вида  $e^{(ys + \lambda(s)t - n \log s)}$ .

Экспоненциальный множитель имеет точку перевала  $\bar{s}$ , определяемую уравнением

$$y + \lambda'(\bar{s})t - \frac{n}{\bar{s}} = 0. \quad (2.54)$$

Точка  $\bar{s}$  лежит на вещественной положительной полуоси, экспоненциальный множитель имеет острый минимум при изменении независимой переменной вдоль вещественной оси. Но так как для каждой аналитической функции  $f(x + iy)$  должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

то экспоненциальный множитель должен иметь в точке  $\bar{s}$  столь же острый максимум, если двигаться перпендикулярно вещественной оси, что совпадает с направлением пути интегриро-

вания. Если выбрать контур интегрирования так, чтобы он проходил через точку  $\bar{s}$ ; то наибольшую часть интеграла дает тот участок контура, который непосредственно примыкает к  $\bar{s}$ . Поэтому можно считать медленно меняющиеся функции от  $s$  постоянными, взяв для них значения в точке перевала. У нас останутся интегралы типа

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{s} - i\infty}^{\bar{s} + i\infty} e^{ys + \lambda(s)t - n \log s} ds,$$

которые могут быть вычислены путем разложения показателя в ряд Тэйлора по  $(s - \bar{s})$ , пренебрегая в этом разложении членами выше второго порядка. Используя (2.54), получим:

$$ys + \lambda(s)t - n \log s = y\bar{s} + \lambda(\bar{s})t - n \log \bar{s} + \left[ \lambda''(\bar{s})t + \frac{n}{\bar{s}^2} \right] \frac{(s - \bar{s})^2}{2}.$$

Так как контур интегрирования представляет прямую, параллельную мнимой оси, то можно положить  $(s - \bar{s}) = ix$ ; тогда интеграл принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} e^{[y\bar{s} + \lambda(\bar{s})t - n \log \bar{s}]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} \left[ \lambda''(\bar{s})t + \frac{n}{\bar{s}^2} \right]} dx = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\left[ \lambda''(\bar{s})t + \frac{n}{\bar{s}^2} \right]^{1/2}} e^{[y\bar{s} + \lambda(\bar{s})t - n \log \bar{s}]} = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\bar{s}^n} \frac{(e^y)^{\bar{s}}}{\left[ \lambda''(\bar{s})t + \frac{n}{\bar{s}^2} \right]^{1/2}} e^{\lambda(\bar{s})t}. \end{aligned}$$

Таким образом, каждая из функций  $\pi$ ,  $\gamma$ ,  $\Pi$  выражается в виде суммы двух величин, одна из которых пропорциональна  $e^{\lambda_1(\bar{s})t}$ , а другая  $e^{\lambda_2(\bar{s})t}$ . Так как  $\lambda_2$  всегда отрицательна и превосходит по абсолютной величине  $\lambda_1$ , то при не слишком малых  $t$

вторым членом можно пренебречь. Окончательно получим, опуская черту над  $s$ <sup>1)</sup>;

а) случай первичного электрона с энергией  $E_0$

$$\pi(E_0, E, t) dE = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{H_1(s)}{[\lambda_1''(s)t]^{1/2}} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{dE}{E} e^{\lambda_1(s)t}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \log\left(\frac{E_0}{E}\right), \quad (2.55)$$

$$\gamma(E_0, W, t) dW = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{L(s)}{[\lambda_1''(s)t + \frac{1}{2s^2}]^{1/2}} \left(\frac{E_0}{W}\right)^s \frac{dW}{W} e^{\lambda_1(s)t}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[ \log\left(\frac{E_0}{W}\right) - \frac{1}{2s} \right], \quad (2.56)$$

$$\Pi(E_0, E, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{s} \frac{H_1(s)}{[\lambda_1''(s)t + \frac{1}{s^2}]^{1/2}} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s e^{\lambda_1(s)t}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[ \log\left(\frac{E_0}{E}\right) - \frac{1}{s} \right]; \quad (2.57)$$

б) случай первичного фотона с энергией  $W_0$

$$\pi(W_0, E, t) dE = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \sqrt{s} \frac{M(s)}{[\lambda_1''(s)t - \frac{1}{2s^2}]^{1/2}} \left(\frac{W_0}{E}\right)^s \frac{dE}{E} e^{\lambda_1(s)t}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[ \log\left(\frac{W_0}{E}\right) + \frac{1}{2s} \right], \quad (2.58)$$

$$\gamma(W_0, W, t) dW = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{H_2(s)}{[\lambda_1''(s)t]^{1/2}} \left(\frac{W_0}{W}\right)^s \frac{dW}{W} e^{\lambda_1(s)t}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \log\left(\frac{W_0}{W}\right), \quad (2.59)$$

<sup>1)</sup> См. Иваненко и Соколов [24], Снайдер [39], Шенберг [42].

$$\Pi(W_0, E, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{M(s)}{\left[\lambda_1''(s)t + \frac{1}{2s^2}\right]^{1/2}} \left(\frac{W_0}{E}\right)^s e^{\lambda_1(s)t}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[ \log\left(\frac{W_0}{E}\right) - \frac{1}{2s} \right]. \quad (2.60)$$

Формулы (2.55) — (2.60) дают решение нашей задачи. Вычисления по ним должны проводиться следующим образом. При данной первичной энергии  $E_0$  или  $W_0$  и данной энергии  $E$  или  $W$ , для которой мы хотим определить значение  $\pi$ ,  $\gamma$  или  $\Pi$ , прежде всего надо подсчитать  $t$  для ряда значений параметра  $s$ , а затем подставить соответствующие значения  $s$  и  $t$  в формулу, выражающую требуемую функцию. Величины  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_1'(s)$ ,  $\lambda_1''(s)$ ,  $H_1(s)$ ,  $H_2(s)$ ,  $L(s)$  и  $M(s)$ , входящие в формулы (2.55) — (2.60), даны как функции от  $s$  в табл. 5 и 6.

Выражения для дифференциального и интегрального спектров зависят только от глубины  $t$  и от отношения начальной энергии к энергии наблюдаемых ливневых частиц — результат, совпадающий с тем, что было отмечено в § 26.

Для каждого данного значения этого отношения как дифференциальное, так и общее число частиц сперва возрастает с увеличением  $t$ , достигает максимума и затем убывает. Оптимальная глубина  $T$  приблизительно совпадает с тем значением  $t$ , при котором функция  $e^{ys + \lambda_1 t - n \log s}$  имеет максимум, так как остальные факторы медленно меняются при изменении  $t$ . Таким образом,  $T$  определяется уравнением

$$\left[ y + \lambda_1'(s) T - \frac{n}{s} \right] \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)_{t=T} + \lambda_1(s) = 0.$$

Учитывая, что при этом должно удовлетворяться и уравнение (2.54), получим:

$$\lambda_1'(s) = 0.$$

Отсюда, согласно табл. 5:

$$s = 1, \quad T = -\frac{y-n}{\lambda_1'(1)} = 1,01(y-n). \quad (2.61)$$

Максимальное значение функций  $\pi$ ,  $\gamma$  и  $\Pi$  легко получить, положив в формулах (2.55) — (2.60)  $s = 1$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $t = T$ . Эти

максимальные значения и оптимальные толщины в явном виде даны в формулах (2.62)—(2.67):

а) случай первичного электрона с энергией  $E_0$

$$T_{\pi}(E_0, E) = 1,01 \log \frac{E_0}{E},$$

$$\pi(E_0, E, T_{\pi}) dE = \frac{0,137}{\left[\log \frac{E_0}{E}\right]^{1/2}} \cdot \frac{E_0}{E^2} dE, \quad (2.62)$$

$$T_{\gamma}(E_0, W) = 1,01 \left[ \log \frac{E_0}{W} - \frac{1}{2} \right],$$

$$\gamma(E_0, W, T_{\gamma}) dW = \frac{0,180}{\left[\log \frac{E_0}{W} - 0,18\right]^{1/2}} \frac{E_0}{W^2} dW, \quad (2.63)$$

$$T_{\Pi}(E_0, E) = 1,01 \left[ \log \frac{E_0}{E} - 1 \right],$$

$$\Pi(E_0, E, T_{\Pi}) = \frac{0,137}{\left[\log \frac{E_0}{E} - 0,37\right]} \frac{E_0}{E}; \quad (2.64)$$

б) случай первичного фотона с энергией  $W_0$

$$T_{\pi}(W_0, E) = 1,01 \left[ \log \frac{W_0}{E} + \frac{1}{2} \right],$$

$$\pi(W_0, E, T_{\pi}) dE = \frac{0,137}{\left[\log \frac{W_0}{E} + 0,18\right]^{1/2}} \frac{W_0}{E^2} dE, \quad (2.65)$$

$$T_{\gamma}(W_0, W) = 1,01 \log \frac{W_0}{W},$$

$$\gamma(W_0, W, T_{\gamma}) dW = \frac{0,180}{\left[\log \frac{W_0}{W}\right]^{1/2}} \frac{W_0}{W^2} dW, \quad (2.66)$$

$$T_{\Pi}(W_0, E) = 1,01 \left[ \log \frac{W_0}{E} - \frac{1}{2} \right],$$

$$\Pi(W_0, E, T_{\Pi}) = \frac{0,137}{\left[\log \frac{W_0}{E} - 0,183\right]^{1/2}} \frac{W_0}{E}. \quad (2.67)$$



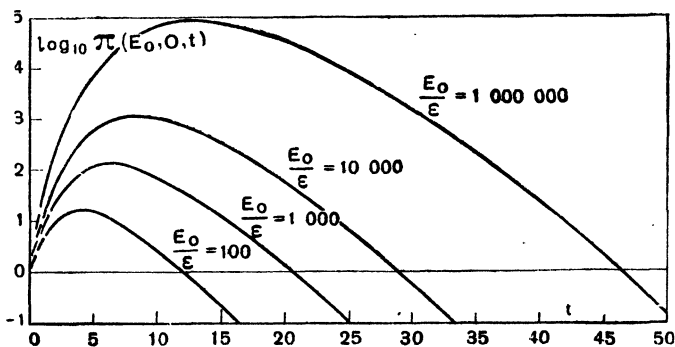
Таблица 5

s	A (s)	B (s)	C (s)	$\lambda_2$ (s)	$\lambda_1$ (s)	$\lambda_1'$ (s)	$\lambda_1''$ (s)
0,0	0,0000	1,546		—	+	—	+
0,1	0,1520	1,400	12,842	— 4,715	+ 3,789	— 25,005	
0,2	0,2863	1,280	6,123	— 3,330	2,270	— 9,488	+ 75
0,3	0,4067	1,180	3,923	— 2,749	1,569	— 5,415	+ 26
0,4	0,5152	1,095	2,846	— 2,415	1,127	— 3,654	12,5
0,5	0,6146	1,022	2,214	— 2,201	0,813	— 2,693	7,6
0,6	0,706	0,959	1,802	— 2,055	0,576	— 2,093	4,95
0,7	0,791	0,905	1,513	— 1,953	0,389	— 1,685	3,50
0,8	0,870	0,855	1,3014	— 1,878	0,235	— 1,389	2,55
0,9	0,943	0,812	1,1400	— 1,824	0,108	— 1,1660	1,97
1,0	1,0135	0,7733	1,0135	— 1,7868	0,000	— 0,9908	1,5634
1,1	1,078	0,7383	0,9112	— 1,760	— 0,092	— 0,8501	1,275
1,2	1,142	0,7065	0,8276	— 1,744	— 0,171	— 0,7333	1,060
1,3	1,200	0,6778	0,7580	— 1,734	— 0,239	— 0,6362	0,893
1,4	1,257	0,6514	0,6988	— 1,732	— 0,298	— 0,5531	0,764
1,5	1,311	0,6272	0,6484	— 1,734	— 0,350	— 0,4825	0,655
1,6	1,363	0,6049	0,6047	— 1,741	— 0,395	— 0,4214	0,565
1,7	1,412	0,5842	0,5666	— 1,751	— 0,435	— 0,3691	0,487
1,8	1,460	0,5650	0,5329	— 1,762	— 0,470	— 0,3238	0,423
1,9	1,506	0,5473	0,5032	— 1,780	— 0,500	— 0,2841	0,370
2,0	1,550	0,5306	0,4767	— 1,797	— 0,526	— 0,2498	0,320
2,1	1,592	0,5148	0,4528	— 1,816	— 0,550	— 0,2202	0,277
2,2	1,634	0,5004	0,4313	— 1,837	— 0,570	— 0,1943	0,241
2,3	1,674	0,4866	0,4117	— 1,859	— 0,589	— 0,1719	0,210
2,4	1,713	0,4736	0,3940	— 1,882	— 0,605	— 0,1523	0,182
2,5	1,750	0,4614	0,3776	— 1,904	— 0,619	— 0,1354	0,159
2,6	1,787	0,4499	0,3627	— 1,928	— 0,632	— 0,1205	0,138
2,7	1,821	0,4389	0,3489	— 1,951	— 0,643	— 0,1077	0,120
2,8	1,857	0,4285	0,3362	— 1,977	— 0,654	— 0,0964	0,107
2,9	1,892	0,4186	0,3243	— 2,003	— 0,663	— 0,0863	0,093
3,0	1,923	0,4093	0,3134	— 2,026	— 0,671	— 0,0777	0,080
4,0	2,211	0,3352	0,2347	— 2,264	— 0,720	— 0,0307	
5,0	2,448	0,2847	0,1882	— 2,480	— 0,742	— 0,0146	
6,0	2,648	0,2479	0,1574	— 2,669	— 0,752	— 0,0080	
7,0	2,822	0,2198	0,1354	— 2,837	— 0,759	— 0,0048	
8,0	2,977	0,1975	0,1189	— 2,988	— 0,763	— 0,0031	
9,0	3,115	0,1794	0,1060	— 3,123	— 0,765	— 0,0021	
10,0	3,239	0,1644	0,0957	— 3,246	— 0,766	— 0,0015	

Таблица 6

$s$	$H_1(s)$	$H_2(s)$	$L(s)$	$M(s)$
0,0	0,500	0,500	0,469	0,533
0,1	0,537	0,463	0,478	0,521
0,2	0,543	0,457	0,489	0,507
0,3	0,542	0,458	0,498	0,499
0,4	0,536	0,464	0,508	0,489
0,5	0,526	0,474	0,520	0,480
0,6	0,513	0,487	0,531	0,471
0,7	0,496	0,504	0,541	0,463
0,8	0,477	0,523	0,551	0,453
0,9	0,456	0,544	0,560	0,443
1,0	0,4328	0,5672	0,5672	0,4328
1,1	0,408	0,592	0,573	0,422
1,2	0,383	0,617	0,576	0,410
1,3	0,357	0,643	0,578	0,397
1,4	0,331	0,669	0,577	0,384
1,5	0,306	0,694	0,574	0,370
1,6	0,281	0,719	0,568	0,355
1,7	0,257	0,743	0,561	0,340
1,8	0,235	0,765	0,554	0,325
1,9	0,213	0,787	0,542	0,310
2,0	0,194	0,806	0,530	0,295
2,1	0,176	0,824	0,518	0,280
2,2	0,160	0,840	0,505	0,266
2,3	0,145	0,855	0,492	0,252
2,4	0,132	0,868	0,478	0,240
2,5	0,120	0,880	0,465	0,227
2,6	0,109	0,891	0,451	0,215
2,7	0,099	0,901	0,438	0,204
2,8	0,090	0,910	0,425	0,193
2,9	0,082	0,918	0,412	0,183
3,0	0,075	0,925	0,401	0,173
4,0	0,034	0,966	0,304	0,108
5,0	0,018	0,982	0,242	0,073

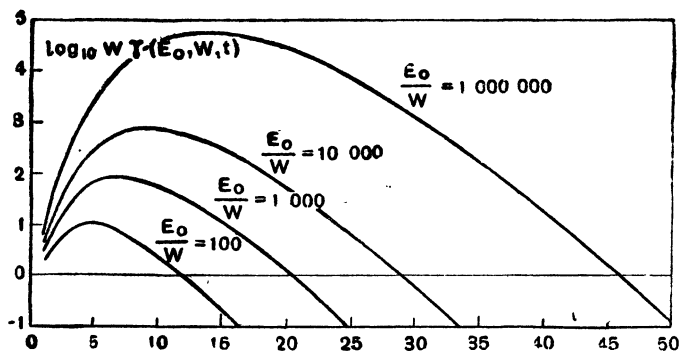
Заметим, что оптимальная глубина  $T$  в каждом случае приблизительно на одну радиационную единицу больше, чем оптимальная глубина  $T_{II}$ . Этого и следовало ожидать, ибо соответствующий максимум при энергиях больших, чем  $E$ , наступает на меньших глубинах, чем максимум при энергии  $E$ . Из формул видно также, что максимальное число электронов, энергия которых больше  $E$ , пропорционально отношению начальной энергии к  $E$ . Из сравнения выражения для оптимальной глубины  $T$  с соответствующими выражениями для центров тяжести  $\bar{t}$ , данными в (2.46), видим, что  $\bar{t}$  превышает  $T$  на независящую от энергии величину. Это означает, что возрастание числа частиц с глубиной



Фиг. 15. Интегральный спектр электронов  $\Pi(E_0, E, t)$  для ливней, создаваемых электронами, вычисленный в приближении  $A$  согласно формуле (2.57).

перед максимумом происходит быстрее, чем убывание после максимума. В небольшой области энергий и глубин дифференциальный спектр электронов и фотонов приблизительно представляется степенной функцией с показателем  $-(s+1)$ , а изменение с глубиной идет приблизительно по показательному закону с величиной  $\lambda_1 t$  под знаком экспонента. Соотношение между „коэффициентом поглощения“  $\lambda_1$ , описывающим изменение с глубиной, и показателем степени  $-(s+1)$ , описывающим распределение по энергиям, такое же, как в случае элементарных решений, рассмотренных в § 27. В частности, распределение электронов по энергиям в максимуме ливня приблизительно представляется нормальным спектром (2.23), соответствующим случаю  $\lambda_1 = 0$ .

Приближения, сделанные при выводе дифференциального и интегрального спектров, ограничивают применимость полученных выражений значениями  $t$ , не меньшими, чем приблизительно одна радиационная единица, и значениями энергий, не слишком близкими к начальной энергии. Это явствует из того простого факта, что при  $t=0$  некоторые функции должны превращаться в  $\delta$ -функции, что не может передаваться аналитическим выражением.



Фиг. 16. Дифференциальный спектр фотонов для ливней, создаваемых электронами, вычисленный в приближении А, согласно формуле (2.56). Ордината дает  $\log_{10} W\gamma(E_0, W, t)$ .

На фиг. 15 и 16 по выведенным в этом параграфе формулам построены графики, представляющие  $\Pi(E_0, E, t)$  и  $W\gamma(E_0, W, t)$  как функции от  $t$  при различных значениях отношения  $\frac{E_0}{E}$  или  $\frac{E_0}{W}$ .

### § 31. Метод последовательных столкновений

Баба и Гайтлер развили другой метод подхода к задаче о ливнях, отличающийся от описанного в предыдущих параграфах аналитического метода. Он может быть охарактеризован как метод последовательных столкновений.

Этот метод сводится к следующему. Пусть дан электрон, имеющий энергию  $E_0$  при  $t=0$ . Вычисляем вероятность  $f_0(E_0, E, t)$  того, что этот электрон будет на глубине  $t$  иметь энергию, большую, чем  $E$ . Затем подсчитываем число фотонов с энергией, большей  $E$ , испущенных электроном в различных точках его пути, и число образованных этими фотонами элек-

тронов  $f(E_0, E, t)$ , которые достигают глубины  $t$  с энергией, большей  $E$ . Эти электроны назовем электронами первого поколения. Аналогичным путем определяется число электронов последующих поколений. В конце концов, полное число электронов, имеющих энергию, превышающую  $E$  на глубине  $t$ , представится в виде суммы чисел электронов различных поколений:

$$\Pi(E_0, E, t) = f_0(E_0, E, t) + f_1(E_0, E, t) + f_2(E_0, E, t) + \dots \quad (2.68)$$

Этот ряд сходится достаточно быстро тогда, когда  $E$  не очень мало в сравнении с  $E_0$ , а  $t$  не больше, чем несколько радиационных единиц. Но это как раз тот случай, когда становятся непригодными выражения, выведенные аналитически. Таким образом, эти два метода дополняют друг друга.

В первоначальных вычислениях Баба и Гайтлера, а также в расчетах Арли, расширившего результаты Баба и Гайтлера, делаются следующие приближения. Вероятность  $f_0$  того, что электрон, пройдя путь  $t$ , будет иметь определенную часть своей первичной энергии, вычислялась по формуле (1.35). Числа электронов и фотонов, образованных на данной глубине, выводились из упрощенных выражений для вероятности излучения (1.32) и вероятности образования пар (1.50а). Некоторые численные результаты приведены в табл. 7—10.

Таблица 7

Интегральный спектр электронов  $\Pi(E_0, E)$  для ливней, создаваемых электронами, вычисленный по методу последовательных столкновений в приближении А.  $l = \frac{t}{\log 2}$  <sup>1)</sup>.

$l \backslash \log \frac{E_0}{E}$	2	4	6	8	10
0,2	1,00	1,05	1,08	1,11	1,14
0,4	1,03	1,17	1,30	1,43	1,55
0,6	1,06	1,35	1,64	1,93	2,26
0,8	1,09	1,58	2,09	2,64	3,23
1,0	1,12	1,84	2,65	3,54	4,56
2,0	1,09	3,35	6,78	11,7	18,3
3,0	0,93	4,56	12,64	26,8	50,2
5,0	0,50	5,17	26,21	80,5	206

<sup>1)</sup> По Арли [1].

Таблица 8

Интегральный спектр электронов  $\Pi(W_0, E)$  для ливней, создаваемых фотонами, вычисленный по методу последовательных столкновений в приближении А.  $l = \frac{t}{\log 2}$  <sup>1)</sup>.

$\log \frac{W_0}{E}$ $l$	2	4	6	8	10
0,2	0,200	0,234	0,242	0,246	0,248
0,4	0,350	0,432	0,462	0,482	0,502
0,6	0,484	0,636	0,716	0,782	0,848
0,8	0,598	0,858	1,01	1,16	1,32
1,0	0,694	1,07	1,36	1,65	1,96
2,0	0,926	2,26	4,08	6,44	9,38
3,0	0,940	3,40	8,44	16,5	30,0
5,0	0,494	4,70	19,6	55,4	144

Таблица 9

Дифференциальный спектр фотонов для ливней, создаваемых электронами, вычисленный по методу последовательных столкновений в приближении А.  $l = \frac{t}{\log 2}$ ; цифры, приведенные в таблице, дают  $W_\gamma(E_0, W)$  <sup>2)</sup>.

$\log \frac{E_0}{W}$ $l$	2	4	6	8	10
0,2	0,129	0,130	0,133	0,136	0,138
0,4	0,244	0,251	0,265	0,275	0,293
0,6	0,352	0,389	0,428	0,468	0,504
0,8	0,453	0,543	0,622	0,684	0,795
1,0	0,550	0,724	0,867	1,02	1,22
2,0	0,933	1,91	3,47	5,19	7,41
3,0	1,02	3,16	7,94	14,8	25,1
5,0	0,850	5,89	18,6	50,1	113

<sup>1)</sup> По Арли и Эриксену [2].

<sup>2)</sup> То же.

Таблица 10

Дифференциальный спектр фотонов для ливней, создаваемых фотонами, вычисленный по методу последовательных столкновений в приближении  $A \cdot I = \frac{t}{\log 2}$ ; цифры, приведенные в таблице, дают  $W_{\gamma}(W_c, W)^1$ .

$l$ \ $\log \frac{W_0}{W}$	2	4	6	8	10
0,2	0,0136	0,016	0,016	0,016	0,016
0,4	0,0483	0,0556	0,0588	0,0596	0,0607
0,6	0,0979	0,120	0,130	0,137	0,140
0,8	0,158	0,193	0,225	0,240	0,262
1,0	0,224	0,299	0,350	0,389	0,450
2,0	0,535	0,923	1,40	2,00	3,06
3,0	0,768	2,09	4,23	6,92	11,6
5,0	0,776	4,32	13,4	31,6	83,1

<sup>1)</sup> По Арли и Эриксену [2].

## В. ТЕОРИЯ ЛИВНЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ В

### § 32. Кинетические уравнения

В этом разделе будем считать, что ионизационные потери электронов ливня составляют  $\epsilon$  на радиационной единице длины;  $\epsilon$  считается не зависящим от энергии, а образованием  $\delta$  электронов пренебрегаем. Процессы образования пар и излучения описываются асимптотическими формулами полного экранирования, за исключением случаев, оговоренных отдельно. Пренебрегают также эффектом Комптона. В таких приближениях мы можем ожидать точных результатов, вплоть до энергий порядка критической энергии, по крайней мере для веществ с малым атомным номером. Для веществ с большим атомным номером применимость теории ограничивается тем, что при малых энергиях непригодны асимптотические формулы для излучения и образования пар.

Включение и рассмотрение ионизационных потерь приводит просто к добавлению лишнего члена в уравнение (2.11). Каждый электрон, проходя слой  $dt$ , теряет из-за столкновений энергию  $\epsilon$ . Вследствие этого в интервал энергий  $(E, dE)$  входит  $\pi(E + dE) \epsilon dt$  из области больших энергий и выходит в область меньших энергий  $\pi(E) \epsilon dt$  электронов. Общее изменение числа электронов с энергией между  $E$  и  $E + dE$ , вызванное ионизационными потерями, составит:

$$[\pi(E + dE) - \pi(E)] \epsilon dt = \epsilon \left( \frac{\partial \pi}{\partial E} \right) dE dt,$$

и уравнение (2.11) примет вид:

$$\frac{\partial \pi(E, t)}{\partial t} = 2 \int_0^1 \gamma \left( \frac{E}{u}, t \right) \psi_0(u) \frac{du}{u} - \\ - \int_0^1 \left[ \pi(E, t) - \frac{1}{1-v} \pi \left( \frac{E}{1-v}, t \right) \right] \varphi_0(v) dv + \epsilon \frac{\partial \pi(E, t)}{\partial E}. \quad (2.69)$$



На  $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$  ионизационные потери не оказывают влияния. Поэтому второе кинетическое уравнение (2.12) остается без изменений:

$$\frac{\partial \gamma(W, t)}{\partial t} = \int_0^1 \pi\left(\frac{W}{v}, t\right) \varphi_0(v) \frac{dv}{v} - \sigma_0 \gamma(W, t). \quad (2.12)$$

### § 33. Элементарные решения<sup>1</sup>

Исследуем сначала элементарные уравнения (2.69) и (2.12), т. е. решения следующего типа (§ 27):

$$\pi(E, t) = F_\pi(E) e^{\lambda t}, \quad \gamma(W, t) = F_\gamma(W) e^{\lambda t}. \quad (2.70)$$

После подстановки получаем:

$$\begin{aligned} \lambda F_\pi(E) &= 2 \int_0^1 F_\gamma\left(\frac{E}{u}\right) \psi_0(u) \frac{du}{u} - \\ &- \int_0^1 \left[ F_\pi(E) - \frac{1}{1-v} F_\pi\left(\frac{E}{1-v}\right) \right] \varphi_0(v) dv + \varepsilon \frac{dF_\pi(E)}{dE}, \\ (\sigma_0 + \lambda) F_\gamma(W) &= \int_0^1 F_\pi\left(\frac{W}{v}\right) \varphi_0(v) \frac{dv}{v}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Для энергий, больших в сравнении с  $\varepsilon$ , ионизационным членом можно пренебречь. Тогда уравнение (2.71) перейдет в (2.14), решением которого являются степенные функции (2.15). Исходя из этого, будем искать решения для  $F_\pi(E)$  и  $F_\gamma(W)$  в следующей форме:

$$\begin{aligned} F_\pi(E) &= a E^{-(s+1)} p\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right), \\ F_\gamma(W) &= b W^{-(s+1)} g\left(s, \frac{W}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (2.72)$$

где  $s$  — положительное число, а функции  $p$  и  $g$  обращаются в 1 при энергиях, значительно превышающих  $\varepsilon$ . Тогда  $\lambda$  будет удовлетворять уравнения (2.18) и для каждого значения  $s$  иметь два возможных значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , даваемых выражениями (2.19).

Соответствующие отношения  $a$  и  $b$  даны (2.20). Подставляя выражения (2.72) в кинетические уравнения (2.71), получим, учитывая (2.20),

$$\begin{aligned} \lambda p\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right) &= 2 \frac{C(s)}{\sigma_0 + \lambda(s)} \int_0^1 g\left(s, \frac{E}{\varepsilon u}\right) u^s \psi_0(u) du - \\ &- \int_0^1 \left[ p\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right) - (1-v)^s p\left(s, \frac{E}{\varepsilon(1-v)}\right) \right] \varphi_0(v) dv - \\ &- (s+1) p\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right) \frac{\varepsilon}{E} + \frac{\partial p\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right)}{\partial \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)}, \quad (2.73) \\ C(s) g\left(s, \frac{W}{\varepsilon}\right) &= \int_0^1 v^s p\left(s, \frac{W}{\varepsilon v}\right) \varphi_0(v) dv. \end{aligned}$$

Исключение  $g$  приводит к следующему:

$$\begin{aligned} \lambda p\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right) &= \frac{2}{\sigma_0 + \lambda(s)} \int_0^1 u^s \psi_0(u) du \int_0^1 v^s \varphi_0(v) p\left(s, \frac{E}{\varepsilon uv}\right) dv - \\ &- \int_0^1 \left\{ p\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right) - (1-v)^s p\left[s, \frac{E}{\varepsilon(1-v)}\right] \right\} \varphi_0(v) dv - \\ &- (s+1) p\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right) \frac{\varepsilon}{E} + \frac{\partial p\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right)}{\partial \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)} \quad (2.74) \end{aligned}$$

или, полагая  $\frac{E}{\varepsilon} = x$ ,

$$\begin{aligned} \lambda p(s, x) &= \frac{2}{\sigma_0 + \lambda(s)} \int_0^1 u^s \psi_0(u) du \int_0^1 v^s \varphi_0(v) p\left(s, \frac{x}{uv}\right) dv - \\ &- \int_0^1 \left\{ p(s, x) - (1-v)^s p\left[s, \frac{x}{1-v}\right] \right\} \varphi_0(v) dv - \\ &- (s+1) \frac{p(s, x)}{x} + \frac{\partial p(s, x)}{\partial x}. \quad (2.74a) \end{aligned}$$

Решение уравнения (2.74a) можно найти, проведя преобразование Меллина по переменной  $x$ . Это приводит к выражению

следующего вида <sup>1)</sup>:

$$p(s, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-r)\Gamma(s+r+1)}{\Gamma(s+1)} K(s, r) x^{-r} dr, \quad (2.75)$$

где  $K(s, r)$  есть функция комплексной переменной  $r$  и параметра, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$\left[ \lambda(s) + A(s+r) - \frac{B(s+r)C(s+r)}{\sigma_0 + \lambda(s)} \right] K(s, r) = rK(s, r-1) \quad (2.76)$$

и граничному условию

$$K(s, 0) = 1. \quad (2.77)$$

Контур интегрирования  $b$  (2.75) представляет собой прямую, параллельную мнимой оси слева от полюса  $r=0$  [где обращается в бесконечность множитель  $\Gamma(-r)$ ] и справа от полюса  $r=-(s+1)$  [где обращается в бесконечность  $\Gamma(s+r+1)$ ]. Подробности вывода даны в дополнении II. Для каждого значения  $s$  получается, естественно, два решения  $p_1(s, x)$  и  $p_2(s, x)$  и две функции  $K_1(s, r)$  и  $K_2(s, r)$  в соответствии с двумя возможностями выбора  $\lambda$ .

Второе из уравнений (2.73) приводит к следующему:

$$g(s, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-r)\Gamma(s+r+1)C(s+r)}{\Gamma(s+1)C(s)} K(s, r) x^{-r} dr, \quad (2.78)$$

где  $x = \frac{W}{\varepsilon}$ , а контур интегрирования лежит слева от полюса  $r=0$  и справа от полюса  $r=-s$ .

Подставляя (2.75) и (2.78) в (2.72) и учитывая (2.20), получим следующие выражения для  $F_\pi(E)$  и  $F_\gamma(W)$ :

$$F_\pi(E) = a\varepsilon^{-(s+1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-r)\Gamma(s+r+1)}{\Gamma(s+1)} \times \\ \times K(s, r) x^{-(r+s+1)} dr, \quad (2.79)$$

$$F_\gamma(W) = \frac{a}{\sigma_0 + \lambda(s)} \varepsilon^{-(s+1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-r)\Gamma(s+r+1)}{\Gamma(s+1)} \times \\ \times C(s+r) K(s, r) x^{-(r+s+1)} dr,$$

<sup>1)</sup> См. [39], [40].

где  $\lambda(s)$  и  $K(s, r)$  означают либо  $\lambda_1(s)$ ,  $K_1(s, r)$ , либо  $\lambda_2(s)$ ,  $K_2(s, r)$ .

Выражение для интегрального спектра электронов  $F_{\Pi}(E)$  получится из  $F_{\pi}(E)$  интегрированием по энергии:

$$\begin{aligned} F_{\Pi}(E) &= \int_E^{\infty} F_{\pi}(E') dE' = \varepsilon \int_x^{\infty} F_{\pi}(\varepsilon x') dx' = \\ &= \frac{a}{s} \varepsilon^{-s} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-r)\Gamma(s+r)}{\Gamma(s)} \times \\ &\quad \times K(s, r) x^{-(r+s)} dr, \end{aligned} \quad (2.80)$$

где контур интегрирования лежит слева от полюса  $r=0$  и справа от полюса  $r=-s$ .

Вычислить комплексные интегралы в (2.79) и (2.80) в общем случае трудно. Однако, если  $x \ll 1$ , то подинтегральные выражения быстро убывают при убывании  $r$ , и поэтому интегралы можно вычислить по методу вычетов, замыкая контур интегрирования слева полуокружностью бесконечно большого радиуса. Поведение спектров вблизи  $x=0$  определится вычетом в первом полюсе слева от пути интегрирования, т. е. при  $r=-(s+1)$  для  $F_{\pi}$  и при  $r=-s$  для  $F_{\Gamma}$  и  $F_{\Pi}$ . Принимая во внимание только этот вычет, получим

$$\begin{aligned} F_{\pi}(E) &= \varepsilon^{-(s+1)} \left[ q_1(s) + q_2(s) \log \frac{\varepsilon}{E} \right], \\ F_{\Gamma}(W) &= \varepsilon^{-s} \frac{1}{W} q_3(s), \\ F_{\Pi}(E) &= \varepsilon^{-s} q_4(s), \end{aligned} \quad (2.81)$$

где:

$$\begin{aligned} q_2(s) &= \frac{a}{s} \frac{2,1}{\sigma_0 + \lambda(s)} K(s, -s), \\ q_3(s) &= \frac{a}{s} \frac{1,36}{\sigma_0 + \lambda(s)} K(s, -s), \\ q_4(s) &= \frac{a}{s} K(s, -s). \end{aligned} \quad (2.82)$$

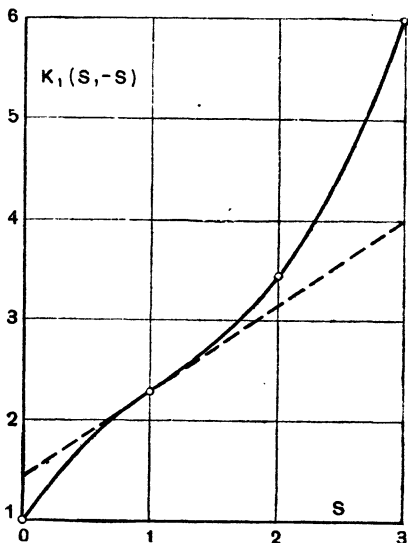
При достаточно малых  $E$  величиной  $q_1(s)$  в выражении для  $F_\pi$  можно, очевидно, пренебречь в сравнении с логарифмическим членом. Выражение для  $q_1(s)$  довольно сложно, поэтому оно не дано в явном виде.

В дополнении II показано, как можно вычислять функции  $K(s, -s)$ . Результаты для  $K = K_1$  представлены на фиг. 17.

Как видно из соответствующих выражений, при стремлении энергии к нулю интегральный спектр электронов остается конечным, дифференциальный спектр электронов расходится, как  $-\log E$ , а дифференциальный спектр фотонов расходится, как  $\frac{1}{W}$ . То, что  $F_{II}(0)$  конечно, есть очевидное следствие ионизационных потерь. И обратно, можно показать, что при пренебрежении ионизационными потерями выражение для  $F_{II}(E)$  будет расходиться при  $E = 0$ , как  $\frac{1}{E^s}$ .

Можно сомневаться в физическом значении этих результатов, так как они получены в предположениях, не оправдывающихся для энергий, малых в сравнении с  $\epsilon$ . Однако заключения, касающиеся поведения  $F_\pi$ ,  $F_\gamma$  и  $F_{II}$  в предельном случае энергий, близких к нулю, качественно правильны. Более того, как будет показано ниже, вычисленный интегральный спектр электронов приводит к правильной оценке удельной ионизации (§ 38).

Можно предложить другой путь решения уравнения (2.74), основывающийся на следующих соображениях [38]. Грубо говоря, ионизационные потери уменьшают энергию каждого электрона в ливне на определенную величину, пропорциональную  $\epsilon$ . Поэтому можно попытаться найти приближенное решение



Фиг. 17. Функция  $K_1(s, -s)$ , определяемая формулами (2.76), (2.77). Кривая построена по значениям  $K_1$ , данным в табл. 13 (дополнение II). Перегиб при  $s=1$ , как это показано в (Д. 16), отмечен пунктирной линией.

уравнений (2.69), (2.12), подставив  $E + m\epsilon$  вместо  $E$  в решения уравнений (2.11) и (2.12), т. е. положив

$$F_{\pi}(E) = a(E + m\epsilon)^{-(s+1)} = a \left[ E \left( 1 + m \frac{\epsilon}{E} \right) \right]^{-(s+1)}. \quad (2.83)$$

Очевидным уточнением выражения (2.83) будет

$$F_{\pi}(E) = a \left[ \mu \left( s, \frac{\epsilon}{E} \right) E \right]^{-(s+1)}, \quad (2.84)$$

$$\mu \left( s, \frac{\epsilon}{E} \right) = 1 + m_1(s) \frac{\epsilon}{E} + m_2(s) \left( \frac{\epsilon}{E} \right)^2 + \dots,$$

что приводит к следующему выражению для  $p$ :

$$p \left( s, \frac{E}{\epsilon} \right) = \left[ \mu \left( s, \frac{\epsilon}{E} \right) \right]^{-(s+1)}. \quad (2.85)$$

Коэффициенты в разложении  $p$  можно определить, используя (2.74). Результат для  $m_1$  и  $m_2$  таков:

$$m_1 = \frac{1}{F(s, 1)}, \quad m_2 = m_1^2 \frac{s+2}{2} - m_1 \frac{s+2}{F(s, 2)}, \quad (2.86)$$

где

$$F(s, n) = \lambda(s) + A(s+n) - \frac{B(s+n)C(s+n)}{\sigma_0 + \lambda(s)}.$$

Получим, опять-таки, две функции  $\mu_1$  и  $\mu_2$  для каждого значения показателя  $s$ , соответственно двум значениям  $\lambda$ .

На фиг. 18 представлены два первых коэффициента  $m_1(s)$  и  $m_2(s)$  в разложении  $\mu_1$  как функции от  $s$ . Оценка членов высшего порядка показывает, повидимому, что ряды сходятся условно. Однако при энергиях, не меньших примерно удвоенной критической энергии, мы получаем достаточно хорошее приближение, оставив в рядах члены до второго порядка в  $\frac{\epsilon}{E}$ .

Можно найти выражения, аналогичные (2.84), и для функций  $F_{\gamma}(W)$  и  $F_{\Pi}(E)$ . Положим:

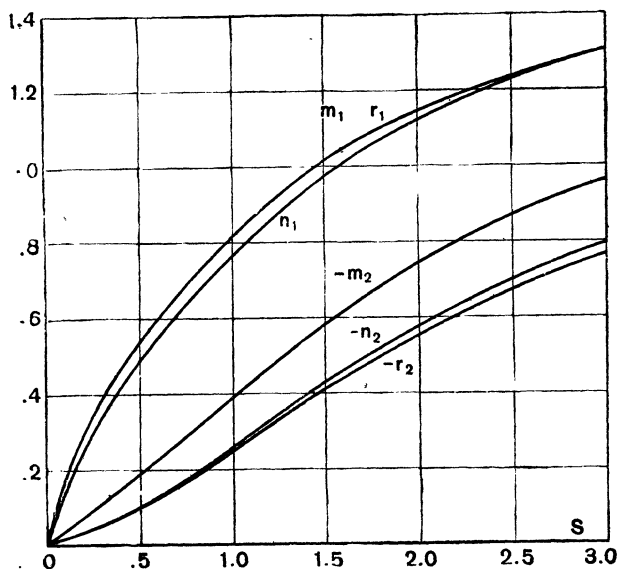
$$\begin{aligned} F_{\gamma}(W) &= a \frac{C(s)}{\sigma_0 + \lambda(s)} \frac{1}{W} \left[ \nu \left( s, \frac{\epsilon}{W} \right) W \right]^{-s}, \\ g \left( s, \frac{W}{\epsilon} \right) &= \left[ \nu \left( s, \frac{\epsilon}{W} \right) \right]^{-s}, \\ \nu \left( s, \frac{\epsilon}{W} \right) &= 1 + n_1(s) \frac{\epsilon}{W} + n_2(s) \left( \frac{\epsilon}{W} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.87)$$

и

$$F_{\Pi}(E) = \frac{a}{s} \left[ \rho \left( s, \frac{\varepsilon}{E} \right) E \right]^{-s}, \quad (2.88)$$

$$\rho \left( s, \frac{\varepsilon}{E} \right) = 1 + r_1(s) \frac{\varepsilon}{E} + r_2(s) \left( \frac{\varepsilon}{E} \right)^2 + \dots$$

Форма выражения  $F_{\gamma}$  выбирается исходя из поведения дифференциального спектра фотонов при малых энергиях — см.



Фиг. 18. Первые и вторые коэффициенты в рядах для  $\mu_1$ ,  $\chi_1$  и  $\rho_1$ , как функции от  $s$  — формулы (2.84), (2.87), (2.88).

(2.81). Коэффициенты рядов для  $\chi$  и  $\rho$  легко выразить через коэффициенты рядов для  $\mu$ , используя второе из уравнений (2.73) и соотношение

$$\int_E^{\infty} \left[ \mu \left( s, \frac{\varepsilon}{E'} \right) E' \right]^{-(s+1)} dE' = \frac{1}{s} \left[ \rho \left( s, \frac{\varepsilon}{E} \right) E \right]^{-s},$$

следующее непосредственно из определения  $\rho$ . Тогда найдем:

$$n_1 = \frac{s+1}{s} \frac{C(s+1)}{C(s)} m_1,$$

$$n_2 = \frac{s+1}{2} n_1^2 + \frac{C(s+2)}{C(s)} \left[ \frac{s+1}{s} m_2 - \frac{(s+1)(s+2)}{2s} m_1^2 \right], \quad (2.89)$$

$$r_1 = m_1,$$

$$r_2 = \frac{s+1}{s+2} m_2.$$

Опять-таки будем иметь два значения  $\nu$  ( $\nu_1$  и  $\nu_2$ ) и два значения  $\rho$  ( $\rho_1$  и  $\rho_2$ ) для каждого значения  $s$ . Первые два коэффициента в разложениях  $\nu_1$  и  $\rho_1$  даны на фиг. 18.

### § 34. Поправки на отклонения $\psi$ от $\psi_0$ .

Мы неоднократно отмечали, что формулы, отвечающие случаю полного экранирования, неточно передают вероятности образования пар и излучения, если энергия невелика в сравнении с  $137 \mu_e z^{-\frac{1}{3}}$ . На фиг. 9, 13, 13а можно увидеть, что это сказывается больше в случае образования пар, чем в случае излучения. Подстановка точных выражений  $\varphi$  и  $\psi$  в кинетические уравнения значительно усложнила бы математическую задачу. Однако в частном случае нормального спектра ( $\lambda=0$ ) возможно сделать, по крайней мере приближенно, поправки на отличие истинной вероятности образования пар от ее асимптотического значения. Для этой цели напишем уравнения (2.71) для случая нормального спектра, подставив вместо  $\sigma_0$  и  $\psi_0(u)$  более точные выражения  $\sigma(W)$  и  $\frac{\sigma(W)}{\sigma_0} \psi_0(u)$  (§ 19):

$$0 = 2 \int_0^1 \frac{\sigma\left(\frac{E}{u}\right)}{\sigma_0} F_\gamma\left(\frac{E}{u}\right) \psi_0(u) \frac{du}{u} -$$

$$- \int_0^1 \left[ F_\pi(E) - \frac{1}{1-v} F_\pi\left(\frac{E}{1-v}\right) \right] \varphi_0(v) dv + \varepsilon \frac{dF_\pi(E)}{dE},$$

$$\sigma(W) F_\gamma(W) = \int_0^1 F_\pi\left(\frac{W}{v}\right) \varphi_0(v) \frac{dv}{v}.$$



Эти уравнения формально тождественны уравнениям (2.71) при  $\lambda = 0$ , если рассматривать в качестве неизвестных вместо функций  $F_\pi(E)$  и  $F_\gamma(W)$  функции  $F_\pi(E)$  и  $\frac{\sigma(W)}{\sigma_0} F_\gamma(W)$ . Поэтому можно взять и решения (2.72), заменив в них  $F_\gamma(W)$  на  $\frac{\sigma(W)}{\sigma_0} F_\gamma(W)$ . Отсюда видно, что выражение для дифференциального спектра электронов остается неизменным, а выражение для дифференциального спектра фотонов умножается на отношение асимптотического значения коэффициента поглощения  $\sigma_0$  к его значению при данной энергии.

### § 35. Решения для случая одиночного первичного электрона или фотона

Если пренебрегать ионизационными потерями, то, как было выведено в § 30, ливень, создаваемый одиночным первичным электроном с энергией  $E_0$ , описывается функциями:

$$\pi(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \left[ \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{\lambda_1(s)t} - \frac{\sigma_0 - \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{\lambda_2(s)t} \right] \frac{E_0^s}{E^{s+1}}, \quad (2.90)$$

$$\gamma(E_0, W, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \frac{C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} [e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t}] \frac{E_0^s}{W^{s+1}},$$

дающими дифференциальные спектры электронов и фотонов на различных глубинах. Функции  $\pi$  и  $\gamma$  могут рассматриваться как линейные комбинации элементарных решений типа (2.21), только параметр  $s$  в них надо считать комплексной величиной. Коэффициентами в этой линейной комбинации являются

$$a_1 = \frac{ds}{2\pi i} \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} E_0^s \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{-ds}{2\pi i} \frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} E_0^s.$$

Как было впервые указано Снайдером [39], при  $E_0 \gg \varepsilon$  можно получить приближенное решение задачи о ливнях с учетом

ионизационных потерь, если подставить в формулы (2.90) вместо элементарных решений уравнений (2.11), (2.12) элементарные решения уравнений (2.69), (2.12). Такая подстановка дает:

$$\pi(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \left\{ \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} p_1 \left( s, \frac{E}{\varepsilon} \right) e^{\lambda_1(s)t} - \frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} p_2 \left( s, \frac{E}{\varepsilon} \right) e^{\lambda_2(s)t} \right\} \frac{E_0^s}{E^{s+1}}, \quad (2.91)$$

$$\gamma(E_0, W, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \frac{C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \left\{ g_1 \left( s, \frac{W}{\varepsilon} \right) e^{\lambda_1(s)t} - g_2 \left( s, \frac{W}{\varepsilon} \right) e^{\lambda_2(s)t} \right\} \frac{E_0^s}{W^{s+1}}.$$

Так как функции  $\pi$  и  $\gamma$ , определенные по формулам (2.91), представляют собой линейные комбинации элементарных решений кинетических уравнений (2.69), (2.12), то тем самым они также являются решениями этих уравнений. Исследуем поведение  $\pi$  и  $\gamma$  при  $t=0$ . Полагая в (2.91)  $t=0$ , получим:

$$\pi(E_0, E, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \left[ \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} p_1 \left( s, \frac{E}{\varepsilon} \right) - \frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} p_2 \left( s, \frac{E}{\varepsilon} \right) \right] \frac{E_0^s}{E^{s+1}}, \quad (2.92)$$

$$\gamma(E_0, W, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \frac{C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \left[ g_1 \left( s, \frac{W}{\varepsilon} \right) - g_2 \left( s, \frac{W}{\varepsilon} \right) \right] \frac{E_0^s}{W^{s+1}}.$$

Величины  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $g_1$  и  $g_2$  отличаются от 1 членами порядка  $\frac{\varepsilon}{E}$  или  $\frac{\varepsilon}{W}$ . Если в (2.92) положить  $p_1=p_2=1$  и  $g_1=g_2=1$ ,

то  $\pi(E_0, E, 0)$  сведется к  $\delta(E - E_0)$ , а  $\gamma(E, W, 0)$  к 0, т. е. мы возвращаемся к тому, что имело место при пренебрежении ионизационными потерями. Таким образом, для энергий, больших в сравнении с  $\epsilon$ ,  $\pi(E_0, E, 0)$  совпадает приближенно с  $\delta(E - E_0)$ , а  $\gamma(E_0, W, 0)$  приближенно равно 0. Далее, при  $E > E_0$  и  $W > E_0$  интегралы в (2.92) можно оценить, сдвигая контур интегрирования вправо, потому что подинтегральное выражение стремится к 0 при  $\text{Re}(s) \rightarrow \infty$ . Так как подинтегральные выражения не имеют полюсов в положительной полуплоскости, то  $\pi(E_0, E, 0)$  и  $\gamma(E_0, W, 0)$  тождественно равны 0 при энергиях  $E$ , больших  $E_0$ . С другой стороны, как  $\pi(E_0, E, 0)$ , так и  $\gamma(E_0, W, 0)$  могут значительно отличаться от нуля при энергиях порядка  $\epsilon$  или меньших. Мы приходим к заключению, что при  $E_0 \gg \epsilon$  выражения для  $\pi$  и  $\gamma$ , даваемые формулами (2.91), приближенно удовлетворяют граничным условиям, отвечающим одному электрону с энергией  $E_0$  при  $t = 0$ . Более того, формулы (2.91) описывают ливень, образующийся от первичного электрона с энергией  $E_0$ , сопровождаемого таким виртуальным распределением электронов и фотонов, что заметное их количество лежит только в области вблизи критической энергии  $\epsilon$ .

Такой ливень не может значительно отличаться от ливня, создаваемого одиночным электроном, так как первичные частицы с малыми энергиями мало что дадут для дальнейшего развития ливня.

Точно таким же способом можно получить выражения для дифференциальных спектров электронов и фотонов в случае одиночного первичного фотона.

### § 36. Явные выражения

Из формул, выведенных в предыдущем параграфе, можно получить явные выражения для различных величин, описывающих ливень<sup>1)</sup>.

Укажем кратко путь вывода и приведем окончательные результаты.

<sup>1)</sup> Выражение для интегрального спектра электронов при  $E = 0$  было дано Снайдером [39] и Сербером [40]. Выражения для других величин ранее не были опубликованы.

Умножая  $\pi$  и  $\gamma$  на  $e^{-\lambda t}$  и интегрируя по  $t$  от 0 до  $\infty$ , получим соответствующие интегралы Лапласа. Так, например:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\pi}(E_0, E, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \times \\ &\times \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \left[ \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} p_1\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right) e^{\lambda_1(s)t} - \right. \\ &\left. - \frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} p_2\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right) e^{\lambda_2(s)t} \right] \frac{E_0^s}{E^{s+1}}. \end{aligned}$$

Контур интегрирования по  $s$  можно выбрать справа от точки, определяемой уравнением  $\lambda_1(s) = \lambda$ . Тогда  $\text{Re}(\lambda_1 - \lambda) < 0$ , и можно провести сначала интегрирование по  $t$ . Это даст:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\pi}(E_0, E, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \left[ \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \frac{p_1\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right)}{\lambda - \lambda_1(s)} - \right. \\ &\left. - \frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \frac{p_2\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right)}{\lambda - \lambda_2(s)} \right] \frac{E_0^s}{E^{s+1}}. \end{aligned}$$

Комплексный интеграл можно вычислить таким же образом, как ранее при расчетах без учета ионизационных потерь. Когда  $E$  значительно меньше  $E_0$ , то интеграл практически равен вычету подинтегрального выражения в точке  $s$ , определяемой уравнением  $\lambda_1(s) = \lambda$ , поэтому:

$$\mathfrak{L}_{\pi}(E_0, E, \lambda) = \mathfrak{L}_{\pi}^{(0)}(E_0, E, \lambda) p_1\left(s, \frac{E}{\varepsilon}\right), \quad (2.93)$$

где  $\mathfrak{L}_{\pi}^{(0)}(E_0, E, \lambda)$  означает интеграл Лапласа от  $\pi(E_0, E, t)$ , вычисленный без учета ионизационных потерь и даваемый формулой (2.40).

Для энергий, больших, чем примерно  $2\varepsilon$ , можно использовать для  $p_1$  выражение (2.85); тогда

$$\mathfrak{L}_{\pi}(E_0, E, \lambda) = - \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{E_0^s}{\left[ \mu_1\left(s, \frac{\varepsilon}{E}\right) E \right]^{s+1}} \quad (2.93a)$$

и также [см. (2.40), (2.42)]

$$\mathfrak{Q}_{\pi}(E_0, W, \lambda) = - \frac{C(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{E_0^s}{\left[ \nu_1 \left( s, \frac{\varepsilon}{W} \right) W \right]^s} \frac{1}{W}, \quad (2.94)$$

$$\mathfrak{Q}_{\Pi}(E_0, E, \lambda) = - \frac{1}{s} \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{E_0^s}{\left[ \rho_1 \left( s, \frac{\varepsilon}{E} \right) E \right]^s}.$$

Аналогичные выражения имеют место в случае ливня, создаваемого фотоном [см. (2.41), (2.43)]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{\pi}(W_0, E, \lambda) &= \\ &= - \frac{B(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{W_0^s}{\left[ \mu_1 \left( s, \frac{\varepsilon}{E} \right) E \right]^{s+1}}, \\ \mathfrak{Q}_{\gamma}(W_0, W, \lambda) &= \\ &= - \frac{A(s) + \lambda_1(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{W_0^s}{\left[ \nu_1 \left( s, \frac{\varepsilon}{W} \right) W \right]^s} \frac{1}{W}, \quad (2.95) \\ \mathfrak{Q}_{\Pi}(W_0, E, \lambda) &= \\ &= - \frac{1}{s} \frac{B(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{W_0^s}{\left[ \rho_1 \left( s, \frac{\varepsilon}{E} \right) E \right]^s}. \end{aligned}$$

Выражения для пробегов даются интегралом Лапласа при  $\lambda = 0$ :

а) случай первичного электрона с энергией  $E_0$

$$\begin{aligned} z_{\pi}(E_0, E) &= \frac{0,437 E_0}{\left[ \mu_1 \left( 1, \frac{\varepsilon}{E} \right) E \right]^2}, \\ z_{\gamma}(E_0, W) &= \frac{0,572 E_0}{\left[ \nu_1 \left( 1, \frac{\varepsilon}{W} \right) W^2 \right]}, \quad (2.96) \\ z_{\Pi}(E_0, E) &= \frac{0,437 E_0}{\left[ \rho_1 \left( 1, \frac{\varepsilon}{E} \right) E \right]}; \end{aligned}$$

б) случай первичного фотона с энергией  $W_0$

$$\begin{aligned}
 z_{\pi}(W_0, E) &= \frac{0,437 W_0}{\left[ \mu_1 \left( 1, \frac{\varepsilon}{E} \right) E \right]^2}, \\
 z_{\gamma}(W_0, W) &= \frac{0,572 W_0}{\left[ \nu_1 \left( 1, \frac{\varepsilon}{W} \right) W^2 \right]}, \\
 z_{\Pi}(W_0, E) &= \frac{0,437 W_0}{\left[ \rho_1 \left( 1, \frac{\varepsilon}{E} \right) E \right]}.
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Выражения для положения центра тяжести и продольных размеров можно получить по методу, развитому в § 29. Легко видеть, что производными от  $\mu$ ,  $\nu$  и  $\rho$  по  $s$  можно пренебречь, и формулы (2.46) и (2.47) будут попрежнему справедливы, если считать в них  $y = \log \frac{E_0}{\mu E}$  (или  $y = \log \frac{W_0}{\mu E}$ ) в случае дифференциального спектра электронов,  $y = \log \frac{E_0}{\sqrt{W}}$  (или  $y = \log \frac{W_0}{\sqrt{W}}$ ) — в случае дифференциального спектра фотонов,  $y = \log \frac{E_0}{\rho E}$  (или  $y = \log \frac{W_0}{\rho E}$ ) — в случае интегрального спектра электронов.

Комплексные интегралы, входящие в выражения для дифференциальных спектров, можно вычислить по методу перевала. При энергиях, не меньших, чем критическая энергия,  $p$  и  $g$  можно считать медленно меняющимися функциями от  $s$ . Используя опять для  $p$  и  $g$  выражения (2.85) и (2.87) и проведя дальнейшие выкладки, как в § 30, получим:

$$\begin{aligned}
 \pi(E_0, E, t) dE &= \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{H_1(s)}{[\lambda_1''(s)t]^{1/2}} \frac{E_0^s}{\left[ \mu_1 \left( s, \frac{\varepsilon}{E} \right) E \right]^{s+1}} e^{\lambda_1(s)t} dE, \tag{2.98}
 \end{aligned}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \log \left( \frac{E_0}{E} \right),$$

$$\begin{aligned} & \gamma(E_0, W, t) dW = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{L(s)}{\left[\lambda_1''(s)t + \frac{1}{2s^2}\right]^{1/2}} \frac{E_0^s}{\left[v_1\left(s, \frac{\varepsilon}{W}\right)W\right]^s} \frac{1}{W} e^{\lambda_1(s)t} dW, \quad (2.99) \end{aligned}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[ \log\left(\frac{E_0}{W}\right) - \frac{1}{2s} \right],$$

$$\begin{aligned} & \Pi(E_0, E, t) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{s} \frac{H_1(s)}{\left[\lambda_1''(s)t + \frac{1}{s^2}\right]^{1/2}} \frac{E_0^s}{\left[\rho_1\left(s, \frac{\varepsilon}{E}\right)E\right]^s} e^{\lambda_1(s)t}, \quad (2.100) \end{aligned}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[ \log\left(\frac{E_0}{E}\right) - \frac{1}{s} \right].$$

Подобным же образом можно получить выражение для  $\pi(W_0, E, t)$ ,  $\gamma(W_0, W, t)$  и  $\Pi(W_0, E, t)$ , подставляя в (2.58)  $(\mu_1 E)^{-(s+1)}$  вместо  $E^{-(s+1)}$ , в (2.59)  $(v_1 W)^{-s}/W$  вместо  $W^{-(s+1)}$  и в (2.60)  $(\rho_1 E)^{-s}$  вместо  $E^{-s}$ .

Мы видим, что вследствие ионизационных потерь число частиц уменьшается. Например, число электронов, энергия которых превышает  $E$ , оказывается таким, каким было бы число электронов с энергией, превышающей  $\rho_1 E$  при отсутствии ионизационных потерь.

Для энергий, малых в сравнении с  $\varepsilon$ , для  $p$  можно использовать выражение (2.75). Мы получим для  $\pi(E_0, E, t)$ :

$$\begin{aligned} \pi(E_0, E, t) = & -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} E_0^s \varepsilon^{-(s+1)} e^{\lambda_1(s)t} \times \\ & \times \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-r)\Gamma(s+r+1)}{\Gamma(s+1)} K_1(s, r) x^{-(s+r+1)} dr + \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} E_0^s \varepsilon^{-(s+1)} e^{\lambda_2(s)t} \times \\ & \times \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-r)\Gamma(s+r+1)}{\Gamma(s+1)} K_2(s, r) x^{-(s+r+1)} dr \quad (2.101) \end{aligned}$$

и для интегрального спектра электронов:

$$\begin{aligned}
 \Pi(E_0, E, t) = & -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{ds}{s} \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s e^{\lambda_1(s)t} \times \\
 & \times \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-r)\Gamma(s+r)}{\Gamma(s)} K_1(s, r) x^{-(s+r)} dr + \\
 & + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{ds}{s} \frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s e^{\lambda_2(s)t} \times \\
 & \times \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-r)\Gamma(s+r)}{\Gamma(s)} K_2(s, r) x^{-(s+r)} dr.
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Интегралы по  $r$  в выражении для  $\Pi$  в случае  $E \ll \varepsilon$  практически равны вычетам подинтегральных выражений в точке  $r = -s$  (§ 33). В пределе при  $E = 0$  получаем точно

$$\begin{aligned}
 \Pi(E_0, 0, t) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{ds}{s} \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s K_1(s, -s) e^{\lambda_1(s)t} - \\
 & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{ds}{s} \frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s K_2(s, -s) e^{\lambda_2(s)t}.
 \end{aligned} \tag{2.103}$$

Вторым членом в (2.103) можно пренебречь в сравнении с первым. Его можно оценить методом перевала, считая  $K_1(s, -s)$  медленно меняющейся функцией от  $s$ . Вычисления здесь точно такие же, как те, при помощи которых выведена формула (2.57). В результате получаем

$$\Pi(E_0, 0, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{s} \frac{H_1(s) K_1(s, -s)}{\left[\lambda_1''(s)t + \frac{1}{s^2}\right]^{1/2}} \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s e^{\lambda_1(s)t}, \tag{2.104}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[ \log \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{s} \right].$$

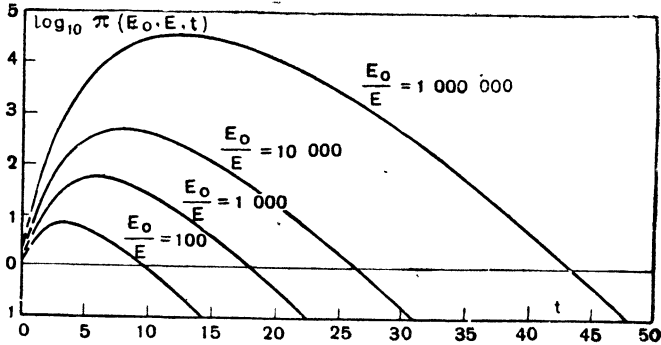


Аналогично

$$\Pi(W_0, 0, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{V\bar{s}} \frac{M(s)K_1(s, -s)}{\left[\lambda_1''(s)t + \frac{1}{2s^2}\right]^{1/2}} \left(\frac{W_0}{\varepsilon}\right)^s e^{\lambda_1(s)t},$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[ \log\left(\frac{W_0}{E}\right) - \frac{1}{2s} \right]. \quad (2.105)$$

Можно заметить, что выражение для интегрального спектра при  $E=0$ , вычисленное в приближении  $B$ , весьма сходно



Фиг. 19. „Полное“ число электронов  $\Pi(E_0, 0, t)$  для ливней, создаваемых электроном, вычисленное в приближении  $B$  по формуле (2.104). Умноженное на  $\varepsilon/V_0$ , оно дает удельную ионизацию  $j(E_0, t)$  — см. формулу (2.110).

с выражениями для интегрального спектра при  $E = \varepsilon$ , вычисленными в приближении  $A$ . На фиг. 19 графически представлено  $\Pi(E_0, 0, t)$  как функция от  $t$  при различных значениях  $\frac{E_0}{\varepsilon}$ .

Если (2.103) умножить на  $e^{-\lambda t}$  и проинтегрировать от  $t=0$  до  $t=\infty$ , то получится выражение для интеграла Лапласа от  $\Pi(E_0, 0, t)$ , которое весьма сходно с (2.37) и может быть вычислено тем же путем. Из выражения для интеграла Лапласа легко получить выражения для пробега, положения центра

тяжести и продольных размеров. Мы приведем прямо результаты:

а) случай первичного электрона с энергией  $E_0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\Pi}(E_0, 0, \lambda) &= -\frac{1}{s} \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} K_1(s, -s) \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s, \\ z_{\Pi}(E_0, 0) &= 0,437 K_1(1, -1) E_0/\varepsilon = E_0/\varepsilon, \\ \bar{t}_{\Pi}(E_0, 0) &= 1,01 \log \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right) + 0,4, \\ \tau_{\Pi}^a(E_0, 0) &= 1,61 \log \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right) - 0,2; \end{aligned} \quad (2.106)$$

б) случай первичного фотона с энергией  $W_0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\Pi}(W_0, 0, \lambda) &= -\frac{1}{s} \frac{B(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} K_1(s, -s) \left(\frac{W_0}{\varepsilon}\right)^s, \\ z_{\Pi}(W_0, 0) &= 0,437 K_1(1, -1) W_0/\varepsilon = \frac{W_0}{\varepsilon}, \\ \bar{t}_{\Pi}(W_0, 0) &= 1,01 \log \frac{W_0}{\varepsilon} + 1,2, \\ \tau_{\Pi}^a(W_0, 0) &= 1,61 \log \frac{W_0}{\varepsilon} + 0,9. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Формулы для  $z_{\Pi}(E_0, 0)$  и  $z_{\Pi}(W_0, 0)$  выражают тот очевидный факт, что суммарный пробег всех электронов ливня равен начальной энергии, деленной на ионизационные потери на единице длины [46], [36]. Здесь этот результат получен в пренебрежении отрицательными степенями  $\frac{E_0}{\varepsilon}$  или  $\frac{W_0}{\varepsilon}$ ; он подтверждает, что развитый метод является точным в случае, когда  $E_0$  или  $W_0$  велики в сравнении с  $\varepsilon$  [39].

## С. ОБЩАЯ И УДЕЛЬНАЯ ИОНИЗАЦИЯ. КОНЕЦ СПЕКТРА СО СТОРОНЫ МАЛЫХ ЭНЕРГИЙ

### § 37. Общая ионизация

Хорошо известно из экспериментов, что полное число пар ионов, образуемых при поглощении альфа- или бета-частицы в газе, пропорционально энергии частицы и при данной энергии одинаково для обоих типов частиц. Поэтому полное число пар ионов, образуемых альфа- или бета-частицей с энергией  $E_0$ , равно:

$$J = \frac{E_0}{V_0}, \quad (2.108)$$

где  $V_0$  есть средняя энергия, затраченная на образование пары ионов, которая зависит только от природы газа.

Причина, по которой  $V_0$  не зависит от энергии и природы ионизирующей частицы, становится ясной из следующих соображений. При поглощении первичной частицы в газе ее энергия расходуется на возбуждение атомов и на образование вторичных лучей частично вследствие столкновений, частично вследствие излучения. Вторичные лучи в свою очередь будут возбуждать атомы и образовывать третичные электроны и так далее.

Ясно, что электрон будет продолжать терять энергию все время, пока его энергия больше, чем низший потенциал возбуждения атомов, а фотон легко будет поглощать вследствие фотоэлектрического эффекта, если его энергия больше минимального потенциала ионизации. С другой стороны, если атом приведен в возбужденное состояние благодаря неупругому столкновению или поглощению кванта, то он быстро потеряет эту энергию, испустив фотон или электрон Оже. Из этого видно, что понижение первоначальной энергии будет происходить до тех пор, пока не останется только определенного числа ионизованных атомов на наименьшем энергетическом уровне и определенного числа электронов и фотонов с энергией в несколько eV. Доля начальной энергии, расходуемой на образование ионов, существенно зависит от относительной вероятности ионизации и возбуждения атомов. Но во всяком случае большая часть процессов ионизации и возбуждения происходит за счет вторичных электро-

нов малых энергий и потому не зависит ни от природы первичной частицы, ни от ее энергии. Это приводит к приближенной пропорциональности между числом пар ионов и первичной энергией, выражаемой формулой (2.108).

Приведенные выше соображения дают нам уверенность в том, что эта пропорциональность, установленная на опыте для энергий до нескольких миллионов eV, будет иметь место и для частиц гораздо больших энергий, входящих в состав космических лучей. Поэтому мы будем применять формулу (2.108) для вычисления общей ионизации, вызываемой электроном или фотоном энергии  $E_0$ . Значения постоянной  $V_0$  для различных газов, определенные из опытов с альфа- и бета-частицами,

Таблица 11

Средняя энергия, расходуемая на образование пары ионов в различных газах <sup>1)</sup>

Газ	Z	$V_0$ (eV)
Водород . . . . .	1	33,0
Гелий . . . . .	2	27,8
Азот . . . . .	7	35,0
Кислород . . . . .	8	32,3
Неон . . . . .	10	27,4
Аргон . . . . .	18	25,4
Криптон . . . . .	36	22,8
Ксенон . . . . .	54	20,8
Воздух . . . . .	—	35,0

<sup>1)</sup> E. Rutherford, „Radiations from radioactive substances“, Cambridge, 1930, p. 81.

приведены в табл. 11. Из нее видно, что  $V_0$  не является гладкой функцией атомного номера. Вычислить  $V_0$  теоретически очень трудно, но общую тенденцию хода  $V_0$  легко понять. Можно отметить, что  $V_0$  особенно мало в тех газах, в которых возбуждение менее вероятно, чем ионизация. В противоположность этому значение ионизационного потенциала не сказывается сильно на  $V_0$ , как это может показаться на первый взгляд.

## § 38. Удельная ионизация

Рассмотрим ливень, образованный одиночным первичным электроном с энергией  $E_0$ , и все находящиеся на глубине  $t$  ( $\eta < E_0$ ) частицы ливня с энергией, большей, чем  $\eta$ . Пусть  $\rho_\eta(t) \delta t$  означает общее количество энергии, передаваемое этими частицами в слое  $(t, \delta t)$  вторичным частицам, энергия которых меньше  $\eta$ . В  $\rho_\eta(t) \delta t$  включена энергия всех частиц, которые при прохождении слоя  $\delta t$  попадают в область энергий ниже  $\eta$ . Если  $\eta$  совпадает с предельной энергией  $\eta_0$ , то  $\rho_\eta$  становится тем, что мы условились называть рассеянной энергией. Интегральная

потеря энергии  $\int_0^\infty \rho_\eta(t) dt$ , очевидно, не зависит от  $\eta$  и равна

начальной энергии. Однако потеря энергии в данном слое зависит от  $\eta$ . Если, например,  $\eta$  убывает, то входит в рассмотрение большее число частиц, а энергия, передаваемая вторичным частицам (энергия вторичной частицы меньше  $\eta$ ) каждой частицей, убывает. Таким образом, два эффекта действуют в противоположных направлениях, но могут не компенсировать друг друга.

Энергия  $\rho_\eta(t) \delta t$ , теряемая ливневыми частицами в данном слое  $\delta t$ , будет, в конечном счете, затрачена на образование числа  $\rho_\eta(t) \delta t / V_0$  пар ионов. Вообще говоря, не все эти ионы будут образованы в самом слое  $\delta t$ , так как часть энергии  $\rho_\eta \delta t$  передается таким вторичным частицам, которые до поглощения проходят некоторый путь. С другой стороны, вторичные частицы, образованные в предшествующих слоях, могут проникнуть в слой  $\delta t$  и произвести там некоторую ионизацию. Ясно, что разность между  $\rho_\eta(t) \delta t / V_0$  и истинным числом пар ионов, образовавшихся в слое  $\delta t$ , стремится к нулю при очень малых  $\eta$ . Точнее, эта разность ничтожна, если  $\eta$  таково, что на расстоянии, равном пробегу частиц с энергией  $\eta$ , энергетический спектр ливневых частиц остается неизменным. Окончательно общее выражение для удельной ионизации будет:

$$j(t) = \frac{1}{V_0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho_\eta(t). \quad (2.109)$$

Удельную ионизацию  $j(t)$  можно явно вычислить, если опять использовать упрощающие предположения, сделанные в предыдущем разделе *B*, т. е. если описывать излучение и образование пар асимптотическими формулами случая полного экранирова-

ния, пренебрегать эффектом Комптона и считать, что ионизационные потери энергии происходят бесконечно малыми порциями и составляют  $\epsilon$  eV на радиационную единицу длины.

Величину  $\rho_{\eta}(t)$  можно выразить следующим образом:

$$\rho_{\eta}(t) \delta t = \delta t [\epsilon \Pi(\eta, t) + \epsilon \eta \pi(\eta, t)] +$$

$\overline{+}$  (члены, зависящие от излучения и образования пар), где первый член представляет потери частиц с энергией, большей, чем  $\eta$ , а второй член — энергию частиц, которая вследствие ионизационных потерь опускается ниже предела  $\eta$  при прохождении частицами слоя  $\delta t$ . При стремлении  $\eta$  к нулю первый член стремится к  $\epsilon \Pi(0, t) \delta t$ , а второй исчезает. Отсюда

$$j(t) = \Pi(0, t) \epsilon / V_0. \quad (2.110)$$

$\Pi(0, t)$  есть полное число электронов на глубине  $t$ , независимо от их энергий; оно дано формулами (2.104) и (2.105) для случаев первичного электрона с энергией  $E_0$  и, соответственно, первичного фотона с энергией  $W_0$ .

Центр тяжести  $\bar{t}_j$  и продольные размеры  $\tau_j$  даются теми же формулами, что и соответствующие величины, относящиеся к полному числу электронов  $\Pi(0, t)$  [см. формулы (2.106), (2.107)].

Несмотря на использованные выше значительные упрощения, окончательные выражения для удельной ионизации являются, повидимому, точными. В самом деле, поведение ливневых частиц с большой энергией рассчитано точно, включая процессы образования электронов и фотонов малых энергий. Поведение электронов и фотонов малых энергий описано неточно, т. е. мы допустили некоторую ошибку в вычислении распределения в пространстве ионизации, вызванной поглощением электронов и фотонов с малой энергией. Однако эта ошибка не может значительно повлиять на конечный результат, ибо пробег электронов и фотонов малых энергий мал в сравнении с пробегом всего ливня, а следовательно, точное значение величины их пробега не очень существенно, если при этом общее число ионов подсчитано точно.

### § 39. Конец спектра со стороны малых энергий

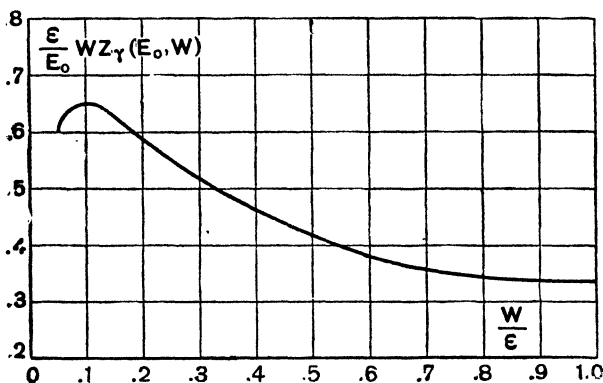
Определение спектра электронов и фотонов при энергиях, малых в сравнении с критической энергией, — очень трудная задача. Как уже подчеркивалось, в области малых энергий нельзя применять асимптотические выражения для вероятностей

образования пар и излучения; должны быть также приняты в рассмотрение эффект Комптона и образование при столкновениях вторичных электронов ( $\delta$ -электронов). В результате уравнения становятся столь сложными, что вряд ли возможна какая-либо попытка найти их аналитическое решение. Поэтому нельзя дать общего выражения для конца спектра со стороны малых энергий, а каждую задачу следует рассматривать отдельно при помощи численных расчетов.

Определение пробегов  $z_{\pi}$  и  $z_{\gamma}$  особенно важно в связи с задачей о спектре электронов и фотонов, находящихся в равновесии с более жестким излучением (§ 40), а также потому, что функции  $z_{\pi}$  и  $z_{\gamma}$  описывают свойства ливня вблизи максимума. В случае ливней, образуемых первичными электронами или фотонами, энергия которых велика в сравнении с  $\epsilon$ , для вычисления  $z_{\pi}$  и  $z_{\gamma}$  можно пользоваться формулами (2.96), (2.97) до энергий  $\eta$ , в два-три раза превышающих критическую энергию  $\epsilon$ . Для меньших значений энергии  $z_{\pi}$  и  $z_{\gamma}$  могут быть вычислены при помощи следующего приема. Сперва вычислим число электронов и фотонов с энергией  $E'$ , меньшей, чем  $\eta$ , образованных электронами и фотонами с энергиями, большими, чем  $\eta$ . Это легко сделать так: умножим соответствующие вероятности образования на единице пути на дифференциальные пробеги электронов и фотонов с энергией, большей, чем  $\eta$ , и проинтегрируем по энергии. Для вероятностей образования пар и излучения можно при этом пользоваться асимптотическими формулами. Число электронов, пересекающих границу  $\eta$  вследствие ионизационного рассеяния энергии, равно  $\epsilon z_{\pi}(\eta)$ . Дифференциальные пробеги электронов малых энергий, непосредственно образованных частицами больших энергий (их можно назвать электронами первого поколения), можно затем получить, умножив число электронов, образованных в различных интервалах энергий ( $E'$ ,  $dE'$ ), на расстояние, которое они проходят за то время, пока их энергия уменьшается от  $E + dE$  до  $E$  ( $E < E'$ ). Подобным же образом можно получить дифференциальный пробег фотонов первого поколения, разделив число фотонов, образованных в различных интервалах энергии ( $W$ ,  $dW$ ), на полный коэффициент поглощения фотонов энергии  $W$ . Аналогичным путем можно вычислить пробеги частиц второго и последующих поколений, причем под  $n$ -м поколением мы понимаем частицы, образованные частицами  $(n - 1)$ -го поколения. Конечно, в этих вычислениях нужно употреблять либо точные выражения для вероятностей различных процессов, либо такие упрощенные

выражения, которые дают хорошее приближение при малых энергиях.

Вычисления такого типа были проведены Бете <sup>1)</sup>, они подтверждают качественные результаты, достигнутые при помощи



Фиг. 20. Спектр фотонов при малых энергиях по Бете. Умножение ординат на  $(E_0/\epsilon)(dW/W)$  дает дифференциальный пробег  $z_\gamma(E_0, W) dW$ .

приближения  $B$  [см. формулу (2.81)], т. е. что в пределе малых энергий дифференциальный спектр фотонов ведет себя, как  $\frac{1}{W}$ . Численные результаты Бете, относящиеся к распределению фотонов малых энергий в воздухе, представлены на фиг. 20.

<sup>1)</sup> Авторы весьма обязаны профессору Бете, давшему возможность использовать его неопубликованные результаты.



## D. ЭЛЕКТРОНЫ И ФОТОНЫ В РАВНОВЕСИИ С БОЛЕЕ ЖЕСТКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

### § 40. Общий метод

Предположим, что электроны или фотоны образуются в веществе некоторыми первичными лучами, например мезотронами, более проникающими, чем сами электроны или фотоны. Вторичные электроны или фотоны породят каскадные ливни, и, когда первичные частицы пройдут достаточную толщину, будет достигнуто условие равновесия между ними и ливневыми частицами.

Для того чтобы получить наиболее общий случай, примем, что электроны или фотоны образуются с произвольным распределением по энергиям. Пусть  $n_{\pi}(E, t_0) dE dt_0$  означает среднее число электронов с энергией  $(E, dE)$ , образованных в слое  $(t_0, dt_0)$ , а  $n_{\gamma}(W, t_0) dW dt_0$  — среднее число фотонов с энергией  $(W, dW)$ , образованных в том же слое. Рассмотрим ливень, порожденный всеми электронами и фотонами, образованными в слое  $(t_0, dt_0)$ . Дифференциальные спектры электронов и фотонов, описывающие этот ливень на расстоянии  $t'$  от слоя  $(t_0, dt_0)$ , очевидно, пропорциональны  $dt_0$  и будут обозначаться  $dt_0 \pi(E, t_0, t')$  и  $dt_0 \gamma(W, t_0, t')$ .

Эти две функции удовлетворяют кинетическим уравнениям каскадной теории [уравнения (2.11), (2.12), если следовать приближению *A*, или уравнения (2.69), (2.12) в приближении *B*] и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \pi(E, t_0, 0) &= n_{\pi}(E, t_0), \\ \gamma(W, t_0, 0) &= n_{\gamma}(W, t_0). \end{aligned} \tag{2.111}$$

Пусть  $\pi_s(E, t)$  и  $\gamma_s(W, t)$  означают дифференциальные спектры электронов и фотонов, наблюдаемые на глубине  $t$ . Эти функции даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \pi_s(E, t) &= \int_0^{\infty} \pi(E, t - t', t') dt', \\ \gamma_s(W, t) &= \int_0^{\infty} \gamma(W, t - t', t') dt'. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Верхние пределы интегралов могут браться  $+\infty$ , если мы предполагаем, что на глубине  $t$  количество вещества, сквозь которое проникли первичные лучи, больше, чем максимальный пробег ливней.

Для того чтобы продвинуться дальше, необходимо сделать некоторые определенные предположения об изменении с глубиной количества образуемых электронов и фотонов. Во многих случаях можно считать, что интенсивность первичного излучения, а следовательно, и число образуемых вторичных частиц, не меняется заметным образом на расстоянии, равном максимальному пробегу ливней. В этом случае можно положить в (2.112)

$$\pi(E, t-t', t') = \pi(E, t, t') \quad \text{и} \quad \gamma(W, t-t', t') = \gamma(W, t, t').$$

Тогда получим:

$$\pi_s(E, t) = \int_0^{\infty} \pi(E, t, t') dt' = z_{\pi}(E, t), \quad (2.113)$$

$$\gamma_s(W, t) = \int_0^{\infty} \gamma(W, t, t') dt' = z_{\gamma}(W, t),$$

где  $z_{\pi}(E, t) dt$  и  $z_{\gamma}(W, t) dt$  означают дифференциальные пробеги электронов и фотонов в ливне, созданном первичными частицами (2.111) в слое  $(t, dt)$ .

Если нельзя пренебречь изменением первичной интенсивности с глубиной, то к истинным условиям часто можно приблизиться, приняв, что число образуемых электронов и фотонов убывает с глубиной экспоненциально, т. е.

$$n_{\pi}(E, t_0 + t') = n_{\pi}(E, t_0) e^{-\mu t'}, \quad (2.114)$$

$$n_{\gamma}(W, t_0 + t') = n_{\gamma}(W, t_0) e^{-\mu t'}.$$

Отсюда следует, что

$$\pi(E, t-t', t') = \pi(E, t, t') e^{\mu t'}, \quad (2.115)$$

$$\gamma(W, t-t', t') = \gamma(W, t, t') e^{\mu t'}$$

$$\text{и} \quad \pi_s(E, t) = \int_0^{\infty} e^{\mu t'} \pi(E, t, t') dt' = \mathfrak{L}_{\pi}(E, -\mu),$$

$$\gamma_s(W, t) = \int_0^{\infty} e^{\mu t'} \gamma(W, t, t') dt' = \mathfrak{L}_{\gamma}(W, -\mu),$$
(2.116)

где  $\mathfrak{L}_{\pi}(E, -\mu)$  и  $\mathfrak{L}_{\gamma}(W, -\mu)$  — интегралы Лапласа при  $\lambda = -\mu$  от функций  $\pi$  и  $\gamma$  при  $t_0 = t$ . Таким образом, задача определения  $\pi_s$  и  $\gamma_s$  сводится к задаче определения интегралов Лапласа от функций  $\pi$  и  $\gamma$ , удовлетворяющих кинетическим уравнениям каскадной теории и граничным условиям (2.111). При  $\lambda = 0$  интегралы Лапласа совпадают с пробегами, что дает решение нашей задачи для случая, когда можно пренебречь изменением первичной интенсивности и глубиной. Напомним, что интегралы Лапласа сходятся только при  $\lambda > -\sigma_0$ . Физически это означает, что равновесие между первичными лучами и вторичными ливневыми частицами может существовать только в том случае, если „коэффициент поглощения“  $\mu$  первичных лучей меньше, чем коэффициент поглощения ливневых фотонов.

#### § 41. Спектры при больших энергиях

Если мы ограничимся ливневыми частицами больших энергий, то будет приложимо приближение  $A$ , и интегралы Лапласа в формулах (2.116) можно вычислить, следуя шаг за шагом приемам, развитым в § 28.

Интегралы Меллина по энергиям от интегралов Лапласа по  $t$  опять определяются из уравнений (2.30), где, однако,  $\mathfrak{M}_{\pi}(s, 0)$  и  $\mathfrak{M}_{\gamma}(s, 0)$  даются формулами

$$\mathfrak{M}_{\pi}(s, 0) = \int_0^{\infty} E^s n_{\pi}(E, t) dE,$$

$$\mathfrak{M}_{\gamma}(s, 0) = \int_0^{\infty} W^s n_{\gamma}(W, t) dW,$$
(2.117)

вместо (2.31) и (2.32).

Решениями уравнений (2.30) будут

$$\mathfrak{M}_\pi(s, \lambda) = \frac{(\tau_0 + \lambda) \mathfrak{M}_\pi(s, 0) + B(s) \mathfrak{M}_\gamma(s, 0)}{[\lambda - \lambda_1(s)] [\lambda - \lambda_2(s)]}, \quad (2.118)$$

$$\mathfrak{M}_\gamma(s, \lambda) = \frac{C(s) \mathfrak{M}_\pi(s, 0) + [A(s) + \lambda] \mathfrak{M}_\gamma(s, 0)}{[\lambda - \lambda_1(s)] [\lambda - \lambda_2(s)]},$$

а обратные преобразования Меллина дадут

$$\mathfrak{Q}_\pi(E, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{(\tau_0 + \lambda) \mathfrak{M}_\pi(s, 0) + B(s) \mathfrak{M}_\gamma(s, 0)}{[\lambda - \lambda_1(s)] [\lambda - \lambda_2(s)]} \frac{1}{E^{s+1}} ds, \quad (2.119)$$

$$\mathfrak{Q}_\gamma(W, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{C(s) \mathfrak{M}_\pi(s, 0) + [A(s) + \lambda] \mathfrak{M}_\gamma(s, 0)}{[\lambda - \lambda_1(s)] [\lambda - \lambda_2(s)]} \frac{1}{W^{s+1}} ds.$$

При вычислении  $\mathfrak{Q}_\pi(E, \lambda)$  для определенного значения энергии  $E$  можно считать  $n_\pi$  и  $n_\gamma$  равными нулю при энергиях, меньших, чем  $E$ , так как ливневые частицы с энергией  $E$  не могут быть образованы электронами или фотонами, энергия которых меньше  $E$ . Используя это, получим для  $\mathfrak{M}_\pi(s, 0)$  и  $\mathfrak{M}_\gamma(s, 0)$

$$\mathfrak{M}_\pi(s, 0) = \int_0^\infty E_0^s n_\pi(E_0, t) dE_0 = \mathfrak{G}_E^{(s)}, \quad (2.120)$$

$$\mathfrak{M}_\gamma(s, 0) = \int_0^\infty W_0^s n_\gamma(W_0, t) dW_0 = \mathfrak{B}_E^{(s)},$$

где  $\mathfrak{G}_E^{(s)}$  и  $\mathfrak{B}_E^{(s)}$  представляют собой соответственно суммы  $s$ -х степеней энергий, переданных на радиационной единице длины жесткой компонентой электронам и фотонам, энергия которых превышает  $E$ . Комплексный интеграл в выражении для  $\mathfrak{Q}_\pi$  можно вычислить через вычеты в полюсах, расположенных слева от пути интегрирования. Каждый полюс дает член вида

$$f_1(s) \frac{\mathfrak{G}_E^{(s)}}{E^{s+1}} + f_2(s) \frac{\mathfrak{B}_E^{(s)}}{E^{s+1}}.$$

На положительной вещественной оси находится только один полюс в точке, определяемой уравнением  $\lambda_1(s) = \lambda$ . Если средняя энергия вторичных электронов и фотонов с энергией, превышающей  $E$ , велика в сравнении с  $E$ , то всеми вычетами в полюсах, расположенных на отрицательной полуплоскости можно пренебречь. Такое же заключение можно сделать и в отношении выражения для  $\mathcal{Q}_\gamma$ . Мы получим

$$\mathcal{Q}_\pi(E, \lambda) = - \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{\mathfrak{G}_E^{(s)}}{E^s + 1} - \frac{B(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{\mathfrak{B}_E^{(s)}}{E^s + 1}, \quad (2.121)$$

$$\mathcal{Q}_\gamma(W, \lambda) = - \frac{C(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{\mathfrak{G}_W^{(s)}}{W^s + 1} - \frac{A(s) + \lambda_1(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{\mathfrak{B}_W^{(s)}}{W^s + 1},$$

где  $s$  определяется из  $\lambda_1(s) = \lambda$ .

Соответствующим выражением для интеграла Лапласа от интегрального спектра будет

$$\mathcal{Q}_\Pi(E, \lambda) = - \frac{1}{s} \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{\mathfrak{G}_E^{(s)}}{E^s} - \frac{1}{s} \frac{B(s)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \lambda_1'(s)} \frac{\mathfrak{B}_E^{(s)}}{E^s}. \quad (2.122)$$

При  $\lambda = 0$ , параметр  $s$  равен 1, и формулы (2.121), (2.122) дают:

$$z_\pi(E) = \frac{0,437}{E^2} (\mathfrak{G}_E^{(1)} + \mathfrak{B}_E^{(1)}),$$

$$z_\gamma(W) = \frac{0,572}{W^2} (\mathfrak{G}_W^{(1)} + \mathfrak{B}_W^{(1)}), \quad (2.123)$$

$$z_\Pi(E) = \frac{0,437}{E} (\mathfrak{G}_E^{(1)} + \mathfrak{B}_E^{(1)}),$$

где  $(\mathfrak{E}_E^{(1)} + \mathfrak{W}_E^{(1)})$  и  $(\mathfrak{E}_W^{(1)} + \mathfrak{W}_W^{(1)})$  представляют собой полную энергию, переданную на радиационной единице длины жесткой компонентой вторичным частицам, энергия которых превышает, соответственно,  $E$  и  $W$ . Эти выражения весьма сходны с выражениями для пробегов в ливнях, образованных одиночным электроном или фотоном [см. формулы (2.44) и (2.45)].

#### § 42. Удельная ионизация. Спектры при малых энергиях

Назовем общей удельной ионизацией  $j_T$  общее число пар ионов, образованное на радиационной единице длины первичной частицей и всеми ею вызванными вторичными частицами. Если можно пренебречь изменением первичной интенсивности на расстоянии, равном максимальному пробегу ливней, то  $j_T$ , очевидно, равно полной потере энергии первичной частицы, деленной на  $V_0$ :

$$j_T = \frac{1}{V_0} \left( -\frac{dE}{dt} \right)_{\text{полн.}} \quad (2.124)$$

Общую удельную ионизацию не следует смешивать с первичной удельной ионизацией  $j_P$  (определенной в § 6), представляющей собой число пар ионов, образованных непосредственно первичной частицей.

Задача вычисления общей удельной ионизации в том случае, когда нельзя пренебречь изменением первичной интенсивности с глубиной, не нашла до сих пор своего удовлетворительного решения. Главная трудность возникает из того факта, что в общем случае средняя энергия всех электронов и фотонов, образованных непосредственно первичным лучом, невелика в сравнении с критической энергией, и поэтому нельзя применить приемы, развитые в § 35, 36, 38. Та же трудность встречается при попытке вычислить спектр вторичных электронов и фотонов в области энергий, близких к критической энергии.

Тамм и Беленький [44] развили приближенный метод для определения пробегов, пригодный и в случае, когда начальная энергия не может считаться большой в сравнении с  $e$ . Приближение состоит в замене истинных кинетических уравнений несколько отличными уравнениями, обращение с которыми значительно проще, — прием, ранее примененный Карлсоном и Оппенгеймером [14]. За дальнейшими подробностями мы отсылаем читателей к оригинальной статье.

## Е. ФЛЮКТУАЦИИ. ПОПЕРЕЧНЫЕ РАЗМЕРЫ ЛИВНЕЙ

### § 43. Флюктуации <sup>1)</sup>

Мы уже отмечали, что задача отыскания вероятности определенного отклонения ливня от его среднего поведения не нашла пока удовлетворительного решения. Ограничимся поэтому несколькими замечаниями.

Пусть  $\bar{N}(E_0, t)$  означает полное число частиц всех энергий, имеющих в среднем на глубине  $t$ , если при  $t=0$  была одна первичная частица с энергией  $E_0$ . Если бы частицы в ливне были независимы одна от другой, то вероятность  $P(N)$  того, что число частиц на глубине  $t$  будет равно  $N$ , отличному от  $\bar{N}$ , давалась бы законом Пуассона

$$P(N) = e^{-\bar{N}} (\bar{N})^N / N!, \quad (2.125)$$

из которого для среднего квадратичного отклонения от среднего следует

$$\langle (N - \bar{N})^2 \rangle_{\text{ср}} = \langle N^2 \rangle_{\text{ср}} - (\bar{N})^2 = \bar{N}. \quad (2.126)$$

Однако частицы в ливне не независимы, так как они происходят от одного и того же первичного луча. Поэтому применение формул (2.125) и (2.126) не оправдано, хотя существуют некоторые основания полагать, что распределение Пуассона будет грубо справедливо на больших глубинах <sup>2)</sup>.

Фэрри [19] сделал попытку определить функцию  $P(N)$ , используя упрощенную модель ливня. В модели Фэрри ливневые частицы рассматриваются как имеющие одинаковую природу, и предполагается, что каждая частица, проходя слой  $dt$  вещества, имеет определенную, пропорциональную  $dt$  вероятность расщепиться на две одинаковые частицы. Ионизационные потери не учитываются. Такое предположение приводит к значению  $\bar{N}$ , экспо-

<sup>1)</sup> См. [19], [1], [17], [32].

<sup>2)</sup> См., например, [17].

ненциально растущему с глубиной, и к следующему выражению

для  $P(N)$  и  $[\langle (N - \bar{N})^2 \rangle_{\text{cp}}]^{1/2}$ :

$$P(N) = \frac{1}{\bar{N}} \left[ 1 - \frac{1}{\bar{N}} \right]^{N-1}, \quad (2.127)$$

$$\langle (N - \bar{N})^2 \rangle_{\text{cp}} = \bar{N}(\bar{N} - 1). \quad (2.128)$$

Как видно отсюда, в модели Фэрри флюктуации значительно больше, чем вычисленные по формуле Пуассона. В самом деле, средний квадрат отклонения приближенно пропорционален  $(\bar{N})^2$ , а не  $\bar{N}$ . Наиболее серьезным источником ошибок в вычислениях Фэрри является пренебрежение ионизационными потерями. Ионизационные потери становятся все более существенными при возрастании глубины, что видно из того факта, что среднее число частиц в ливне  $\bar{N}$  проходит через максимум и затем убывает, а не растет непрерывно, как это следует из модели Фэрри. Поэтому можно ожидать, что формулы (2.127) и (2.128) приближенно пригодны только для малых глубин.

Недавно Нордсик, Лэмб и Уленбек [32] подошли к проблеме флюктуации с более общей точки зрения, употребляя модель Фэрри, но учитывая, по крайней мере грубо, ионизационные потери энергии. Они не получили замкнутого выражения для  $P(N)$ , но смогли вычислить некоторые значения среднего квадрата отклонения. Результаты приведены в табл. 12.

Т а б л и ц а 12

Средний квадрат отклонения от среднего числа частиц в ливне (по Нордсику и др. [32])  $z = \log \left( \frac{E_0}{0,4\epsilon} \right)$ ;

$$\sigma = \frac{[\langle N^2 \rangle_{\text{cp}} - (\bar{N})^2]}{\bar{N}}$$

$z = 4,75$			$z = 7,0$		
$t$	$\bar{N}$	$\sigma$	$t$	$\bar{N}$	$\sigma$
$2z$	20,4	9,6	$2z$	159	42
$3z$	9,7	6,5	$3z$	60	29
$4z$	2,5	4,4	$4z$	9	16,5

Величина  $\sigma$  равна 1 по формуле Пуассона и  $\bar{N} - 1$  по формуле Фэрри. Мы видим, что действительное значение лежит



между этими крайними значениями, за исключением случая  $t = 4z$ . С другой стороны, авторы указывают, что их результаты при  $t = 4z$  наименее точны. Поэтому представляется оправданным заключение, что, вообще говоря, флюктуации являются промежуточными между вычисленными по формулам Пуассона и Ферри.

#### § 44. Поперечные размеры ливней

До сих пор мы рассматриваем развитие ливней только в продольном направлении. Однако частицы в ливне не следуют в точности направлению движения первичной частицы, породившей ливень, вследствие конечности угла, под которым излучаются фотоны и электроны и вследствие многократного рассеяния электронов. Согласно формуле (1.53с) с учетом того, что энергия и импульс для электронов больших энергий практически совпадают, находим, что средний квадратичный угол рассеяния электронов с энергией  $E$  на радиационной единице длины равен  $\frac{E_s}{E}$ , где  $E_s = 21 \cdot 10^6$  eV. Этот угол можно сравнить со средним углом излучения, который, как в случае фотонов, так и электронов имеет порядок величины  $\frac{h\nu}{E}$  (§ 10 и 16). Отсюда видно, что средний угол излучения значительно меньше, чем средний угол рассеяния на радиационной единице длины. Так как среднее расстояние между двумя процессами излучения как раз порядка величины радиационной единицы длины, то отсюда следует, что при вычислении поперечных размеров ливней необходимо принимать в расчет только рассеяние.

Рассмотрим ливень, распространяющийся в однородной среде. Так как рассеяние обратно пропорционально энергии, то ливневые частицы, имеющие большие энергии, остаются сконцентрированными в узком конусе. Электроны малых энергий, образованные в центральной части ливня, отклоняются в сторону от его оси. Чем меньше энергии, тем под большим углом будут расходиться электроны. С другой стороны, частицы малых энергий полностью поглощаются и не участвуют в дальнейшем развитии ливня. Поэтому ширина ливня не возрастает непрерывно по мере развития ливня в веществе, а достигнув предела, определяемого пробегом частиц малых энергий, остается далее постоянной.

Расчеты поперечного распространения ливней были проведены Эйлером и Вергеландом [21] и Бете [13]. Последовательная теория была развита Нордгеймом [33] следующим

образом. Рассмотрим электрон с энергией  $E_0$ , входящей в вещество при  $t=0$ , и пусть  $\pi(E_0, E, t) dE$  есть среднее число электронов в ливне с энергией между  $E$  и  $E + dE$  на глубине  $t$ . Эти электроны движутся под различными углами по отношению к траектории первичного электрона и поэтому окажутся на различных расстояниях от оси ливня. Мы хотим вычислить средний квадрат угла отклонения  $\langle \Theta^2 \rangle_{\text{cp}}$  и средний квадрат расстояния от оси  $\langle X^2 \rangle_{\text{cp}}$ . Рассмотрим ливень на промежуточной глубине  $t'$ , и пусть  $\pi(E_0, E', t') dE'$  будет числом электронов с энергией  $(E', dE')$  на глубине  $t'$ . Пройдя слой  $dt'$ , эти электроны претерпят рассеяние, причем средний квадрат угла отклонения будет  $\left(\frac{E_s}{E'}\right)^2 dt'$ . Эти же электроны образуют

$$\pi(E_0, E', t') dE' \cdot \pi(E', E, t - t') dE$$

электронов с энергией  $(E, dE)$  на глубине  $t$ . Направление движения положение этих электронов определится тем рассеянием, которое претерпели породившие их электроны в слое  $(t', dt')$ . Такое рассеяние даст в выражении для среднего квадратичного угла отклонения каждого из них член  $\left(\frac{E_s}{E'}\right)^2 dt$  и в выражении для среднего квадратичного отклонения от оси  $\left(\frac{E_s}{E'}\right)^2 (t - t')^2 dt'$ .

Число рассматриваемых нами электронов составляет долю

$$\frac{\pi(E_0, E', t') dE' \cdot \pi(E', E, t - t')}{\pi(E_0, E, t)}$$

от общего числа электронов с энергией  $(E, dE)$  на глубине  $t$ . Значит,  $\langle \Theta^2 \rangle_{\text{cp}}$  и  $\langle X^2 \rangle_{\text{cp}}$  можно вычислить при помощи следующих интегралов

$$\begin{aligned} \langle \Theta^2 \rangle_{\text{cp}} &= \frac{1}{\pi(E_0, E, t)} \int_E^{E_0} dE' \int_0^{t'} dt' \left(\frac{E_s}{E'}\right)^2 \times \\ &\quad \times \pi(E_0, E', t') \pi(E', E, t - t'), \\ \langle X^2 \rangle_{\text{cp}} &= \frac{1}{\pi(E_0, E, t)} \int_E^{E_0} dE' \int_0^{t'} dt' (t - t')^2 \left(\frac{E_s}{E'}\right)^2 \times \\ &\quad \times \pi(E_0, E', t') \pi(E', E, t - t'). \end{aligned} \quad (2.129)$$

Таким образом, задача определения  $\langle \Theta^2 \rangle_{\text{cp}}$  и  $\langle X^2 \rangle_{\text{cp}}$  решена, по крайней мере принципиально, если известна функция  $\pi(E_0, E, t)$ ,

описывающая продольное развитие ливня. Функцию  $\pi(E_0, E, t)$  можно вычислить точно, если ограничиться энергиями, достаточно большими для того, чтобы можно было воспользоваться приближением А (см. часть II, раздел А). В этом случае вычислительные интегралов (2.129) даст:

$$\begin{aligned} \langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср}} &= 0,55 \left( \frac{E_s}{E} \right)^2 (\text{радиан})^2, \\ \langle X^2 \rangle_{\text{ср}} &= 0,60 \left( \frac{E_s}{E} \right)^2 (\text{радиационн. ед.})^2. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Задача определения  $\langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср}}$  и  $\langle X^2 \rangle_{\text{ср}}$  при малых энергиях частиц более трудна, потому что в этом случае функция  $\pi(E_0, E, t)$  не может быть дана в замкнутой форме. Нордгеймом были проделаны численные расчеты для случая воздуха, практически важного в связи с так называемыми ливнями Оже. Среднее квадратичное расстояние от оси ливня для всех электронов безотносительно к их энергиям оказывается равным 100 м в воздухе при нормальной температуре и давлении. Эта цифра находится в согласии с результатами, полученными Бете [13], в то время как вычисления Эйлера и Вергеланда [18] давали меньшее значение<sup>1)</sup>.

Что касается функции распределения, то предполагается, что при данной энергии как распределение по углам, так и по расстояниям в грубом приближении представляется гауссовой функцией. Конечно, если рассматривать частицы всех энергий, то распределение даже приближенно не гауссово.

<sup>1)</sup> Последовательное вычисление  $\langle \Theta^2 \rangle_{\text{ср}}$  и  $\langle X^2 \rangle_{\text{ср}}$  методами каскадной теории было произведено Ландау [48]. Более точный расчет с учетом ионизационных потерь принадлежит Беленькому [52]. (Прим. ред.)

## ДОПОЛНЕНИЕ I

### а) Интеграл Лапласа

Дана функция  $f(x)$  вещественной переменной  $x$ . Интеграл Лапласа определяется как

$$\mathfrak{L}_f(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx, \quad (\text{Д. 1})$$

где  $\lambda$  — комплексный параметр. Мы предполагаем, что интеграл сходится на нижнем пределе. Если интеграл сходится на верхнем пределе при определенном значении  $\lambda$ , равном  $\lambda_a$ , то он сходится также и при всех значениях  $\lambda$ , для которых  $\text{Re}(\lambda) > \text{Re}(\lambda_a)$ ,  $\text{Re}$  означает вещественную часть. С другой стороны, если интеграл расходится при определенном значении  $\lambda$ , равном  $\lambda_b$ , то он расходится также при всех значениях  $\lambda$ , для которых  $\text{Re}(\lambda) < \text{Re}(\lambda_b)$ . Таким образом, в общем случае функция  $\mathfrak{L}_f(\lambda)$  определена в полуплоскости справа от прямой, параллельной мнимой оси.

Легко доказать следующие формулы:

$$\mathfrak{L}_{f'}(\lambda) = \lambda \mathfrak{L}_f - f(0), \quad (\text{Д. 2})$$

$$\text{где } f' = \frac{df}{dx};$$

$$\mathfrak{L}_F(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} [\mathfrak{L}_f(\lambda) - F(0)], \quad (\text{Д. 3})$$

$$\text{где } F(x) = \int_x^{\infty} f(x') dx';$$

$$\left[ \frac{d^n}{d\lambda^n} \mathfrak{L}_f(\lambda) \right]_{\lambda=0} = (-1)^n \int_0^{\infty} x^n f(x) dx. \quad (\text{Д. 4})$$

Важным свойством преобразования Лапласа является то, что при определенных, не очень ограничивающих условиях, соответствие между  $f(x)$  и  $\mathfrak{L}_f(\lambda)$ , установленное формулой (Д.1), однозначно, т. е. существует только одна функция  $f(x)$ , для которой  $\mathfrak{L}_f(\lambda)$  является ее интегралом Лапласа. Если известно  $\mathfrak{L}_f(\lambda)$ , то  $f(x)$  можно определить при помощи обратной формулы

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\lambda x} \mathfrak{L}_f(\lambda) d\lambda, \quad (\text{Д. 5})$$

где контур интегрирования  $s$  есть прямая, параллельная мнимой оси и расположенная в полуплоскости сходимости  $\mathfrak{L}_f(\lambda)$ .

**b) Интеграл Меллина**

Дана функция  $f(y)$  вещественной переменной  $y$ . Интеграл Меллина от  $f(y)$  определяется формулой

$$\mathfrak{M}_f(s) = \int_0^{\infty} y^s f(y) dy, \tag{Д. 6}$$

где  $s$  — комплексный параметр. Если этот интеграл расходится на нижнем пределе при определенном значении  $s$ , равном  $s_a$ , то он расходится и при всех значениях  $s$ , для которых  $\text{Re}(s) < \text{Re}(s_a)$ . Если интеграл расходится на верхнем пределе при определенном значении  $s$ , равном  $s_b$ , то он расходится и при всех значениях  $s$ , для которых  $\text{Re}(s) > \text{Re}(s_b)$ . Таким образом, если интеграл Меллина где-нибудь сходится, то область его сходимости представляет собой полосу, ограниченную двумя прямыми, параллельными мнимой оси.

Легко доказать следующие формулы:

$$\mathfrak{M}_f(s) = -s \mathfrak{M}_f(s-1), \tag{Д. 7}$$

где  $f' = \frac{df}{dx}$ ;

$$\mathfrak{M}_F(s) = \frac{1}{s+1} \mathfrak{M}_f(s+1), \tag{Д. 8}$$

где  $F^{\mathfrak{M}}(y) = \int_y^{\infty} f(y') dy'$ .

Преобразование Меллина, как и преобразование Лапласа, однозначно и может быть обращено по следующей формуле:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C y^{-(s+1)} \mathfrak{M}_f(s) ds, \tag{Д. 9}$$

где контур интегрирования  $C$  представляет собой прямую, параллельную мнимой оси и расположенную внутри полосы сходимости.

**ДОПОЛНЕНИЕ II**

Пусть

$$\mathfrak{M}_p(s, r) = \int_0^{\infty} x^r p(s, x) dx$$

есть интеграл Меллина от функции  $p$ , определенной по (2.74а). Так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} p = 1$ , то интеграл сходится на верхнем пределе только при  $\text{Re}(r) < -1$ . Следовательно, область сходимости  $\mathfrak{M}_p(s, r)$  будет

полоса, простирающаяся от  $r = -1$  до первой особенности слева от этой точки.

Умножая обе части (2.74а) на  $x^r$  и интегрируя по  $x$  от 0 до  $\infty$  получим для  $\mathfrak{M}_p(s, r)$  следующее рекуррентное уравнение:

$$\left[ \lambda(s) + A(s+r+1) - \frac{B(s+r+1)C(s+r+1)}{\sigma_0 + \lambda(s)} \right] \mathfrak{M}_p(s, r) = \\ = -(s+r+1) \mathfrak{M}_p(s, r-1). \quad (\text{Д. 10})$$

Функция  $\mathfrak{M}_p(s, r)$  имеет, как уже упоминалось, особенность при  $r = -1$ ; это подтверждается тем фактом, что коэффициент при  $\mathfrak{M}_p(s, r)$  в (Д. 10) обращается в 0 при  $r = -1$ . Из (Д. 10) непосредственно следует, что другие особые точки будут при  $r = 0$  и  $r = n$ , где  $n$  — произвольное положительное целое число. При  $r = -(s+1)$  коэффициент при  $\mathfrak{M}_p(s, r)$  обращается в бесконечность, а коэффициент при  $\mathfrak{M}_p(s, r-1) = 0$ . Это означает, что  $\mathfrak{M}_p(s, r)$  имеет особенности при  $r = -(s+2)$  и  $r = -(s+n)$ , где  $n$  — произвольное положительное целое число, большее единицы. Удобно исключить часть особенностей, написав  $\mathfrak{M}_p(s, r)$  в виде произведения функций, имеющих простые полюсы при  $r = -1, 0, 1, \dots, r = -(s+2), r = -(s+3), \dots$  и новой неизвестной функции. Поэтому положим

$$\mathfrak{M}_p(s, r-1) = \frac{\Gamma(-r)\Gamma(s+r+1)}{\Gamma(s+1)} K(s, r), \quad (\text{Д. 11})$$

где  $\Gamma(y)$  — гамма-функция, имеющая простые полюсы при  $y = 0, -1, -2, \dots$ .

Подставляя (Д. 11) в (Д. 10) и учитывая, что  $y\Gamma(y) = \Gamma(y+1)$ , получим:

$$\left[ \lambda(s) + A(s+r+1) - \frac{B(s+r+1)C(s+r+1)}{\sigma_0 + \lambda(s)} \right] K(s, r+1) = \\ = (r+1) K(s, r)$$

или

$$\left[ \lambda(s) + A(s+r) - \frac{B(s+r)C(s+r)}{\sigma_0 + \lambda(s)} \right] K(s, r) = rK(s, r-1). \quad (\text{Д. 12})^1$$

Предположим, что уравнение (Д. 12) решено. Подставив решение в (Д. 11) и применив обратное преобразование Меллина, получим

$$p(s, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} x^{-r} \mathfrak{M}_p(s, r-1) dr = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} x^{-r} \frac{\Gamma(-r)\Gamma(s+r+1)}{\Gamma(s+1)} K(s, r) dr, \quad (\text{Д. 13})$$

<sup>1)</sup> См. Снайдер [39]; Сербер [40].

где путь интегрирования лежит параллельно мнимой оси слева от полюса  $r=0$  и справа от полюса  $r=-(s+1)$ . В пределе  $x=\infty$  подинтегральное выражение (Д. 13) обращается в нуль при всех значениях  $r$ , у которых вещественная часть положительна. Следовательно, интеграл равен вычету в точке  $r=0$ , который равен  $2\pi i K(s, 0)$ . Так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(s, x) = 1,$$

то

$$K(s, 0) = 1.$$

При  $r=0$  коэффициенты при  $K(s, r)$  и  $K(s, r-1)$  в (Д. 12) обращаются в 0 и отношение  $K(s, -1) : K(s, 0)$  дается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \frac{K(s, -1)}{K(s, 0)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{r} \left[ \lambda(s) + A(s+r) - \frac{B(s+r)C(s+r)}{\sigma_0 + \lambda(s)} \right] \right\} = \\ &= \frac{dA(s)}{ds} - \frac{1}{\sigma_0 + \lambda(s)} \frac{d}{ds} [B(s)C(s)], \end{aligned}$$

или, так как  $K(s, 0) = 1$ ,

$$K(s, -1) = \frac{dA(s)}{ds} - \frac{1}{\sigma_0 + \lambda(s)} \frac{d}{ds} [B(s)C(s)]. \quad (\text{Д. 14})$$

При помощи повторного применения (Д. 12) легко получить значения  $K(s, r)$  для любого вещественного целого значения  $r$ . Так, например,

$$K(s, -2) = -K(s, -1) \left[ \lambda(s) + A(s-1) - \frac{B(s-1)C(s-1)}{\sigma_0 + \lambda(s)} \right],$$

$$K(s, -3) = -\frac{1}{2} K(s, -2) \left[ \lambda(s) + A(s-2) - \frac{B(s-2)C(s-2)}{\sigma_0 + \lambda(s)} \right],$$

$$\frac{1}{K(s, 1)} = \lambda(s) + A(s+1) - \frac{B(s+1)C(s+1)}{\sigma_0 + \lambda(s)},$$

$$\frac{1}{K(s, 2)} = \frac{1}{2K(s, 1)} \left[ \lambda(s) + A(s+2) - \frac{B(s+2)C(s+2)}{\sigma_0 + \lambda(s)} \right].$$

Можно найти также рекуррентные соотношения для производных  $\frac{\partial K(s, r)}{\partial s}$  и  $\frac{\partial K(s, r)}{\partial r}$ , если продифференцировать (Д. 12) соответственно по  $s$  и по  $r$ . Так как  $K(s, 0) = 1$ , то мы имеем условие  $\frac{\partial K(s, 0)}{\partial s} = 0$ . Отправляясь от этого значения и употребляя рекуррентные соотношения, можно определить  $\frac{\partial K(s, r)}{\partial s}$  при произвольном значении  $s$  и при любом целом значении  $r$ . С другой стороны, уравнение (Д. 12) дает непосред-

ственно логарифмическую производную от  $K(s, r)$  по  $r$  при достаточно большом значении  $r$ . В самом деле, при достаточно большом  $r$

$$\frac{1}{K(s, r_1)} \left( \frac{\partial K(s, r)}{\partial r} \right)_{r=r_1} \approx -\frac{1}{2} \left[ \log \frac{F(s, r_1)}{r_1} + \log \frac{F(s, r_1 + 1)}{r_1 + 1} \right], \quad (\text{Д. 15})$$

где

$$F(s, r) = \lambda(s) + A(s + r) - \frac{B(s + r)C(s + r)}{\sigma_0 + \lambda(s)}.$$

Если  $\frac{\partial K(s, r)}{\partial r}$  известно при некотором целом значении  $r$ , то с помощью рекуррентных формул можно найти это значение для любого другого целого значения.

В практических приложениях нас главным образом интересуют значения функции  $K_1$  при  $r = -s$ , т. е. функции одной переменной  $K_1(s, -s)$ . Производная от этой функции по  $s$  равна

$$\frac{dK(s, -s)}{ds} = \left( \frac{\partial K(s, r)}{\partial s} \right)_{r=-s} - \left( \frac{\partial K(s, r)}{\partial r} \right)_{r=-s}.$$

Значения  $K_1(s, -s)$  при  $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  и  $6$  даны в табл. 13. Производная от  $K_1(s, -s)$  подсчитана для  $s = 1$

$$\left( \frac{dK_1(s, -s)}{ds} \right)_{s=1} = 0,85. \quad (\text{Д. 16})$$

Таблица 13

$s$	0	1	2	3	4	5	6
$K_1(s, -s)$	1,00	2,29	3,45	5,98	10,61	18,15	29,19

При помощи значений  $K_1(s, -s)$ , приведенных в табл. 13, и значения производной при  $s = 1$ , данного в (Д. 16), можно построить достаточно точную интерполяционную кривую, по которой можно определять значение  $K_1(s, -s)$  при нецелых значениях  $s$ . Такая кривая представлена на фиг. 17.



## ЛИТЕРАТУРА

1. N. Arley, Proc. Roy. Soc. A **168**, 519 (1938).
2. N. Arley and B. Eriksen, Danske Videnskabernes Selskab, **17**, No. 11 (1940).
3. R. T. Birge, Rev. Mod. Phys. **1**, 1 (1929).
4. H. A. Bethe, Ann. d. Physik **5**, 325 (1930).
5. H. A. Bethe, Zeits. f. Physik **76**, 293 (1932).
6. F. Bloch, Zeits. f. Physik. **81**, 363 (1933).
7. H. A. Bethe, Handbuch der Physik, Vol. 24/1, 518 (1933).
8. H. A. Bethe and W. Heitler, Proc. Roy. Soc. A **146**, 83 (1934).
9. H. J. Bhabha, Proc. Roy. Soc. **154**, 195 (1936).
10. H. J. Bhabha and W. Heitler, Proc. Roy. Soc. **159**, 432 (1937).
11. H. J. Bhabha, Proc. Roy. Soc. **164**, 257 (1938).
12. R. T. Birge, Phys. Rev. **58**, 658 (1940).
13. H. A. Bethe, Phys. Rev. **59**, 684A (1941).
14. J. F. Carlson and J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **51**, 220 (1937).
15. R. F. Christy and S. Kusaka, Phys. Rev. **59**, 405 (1941).
16. M. Dresden, W. T. Scott and G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev. **59**, 112A (1941).
17. H. Euler, Zeits. f. Physik **110**, 450 (1938).
18. H. Euler and H. Wergeland, Astrophysica Norv. **3**, 165 (1940).
19. W. H. Furry, Phys. Rev. **52**, 569 (1937).
20. E. Fermi, Phys. Rev. **56**, 1242 (1939).
21. E. Fermi, Phys. Rev. **57**, 485 (1940).
22. W. Heisenberg and H. Euler, Ergeb. d. exact. Naturwiss. **17**, 1 (1938).
23. O. Halpern and H. Hall, Phys. Rev. **57**, 459 (1940).
24. D. Iwanenko and A. Sokolow, Phys. Rev. **53**, 910 (1938).
25. O. Klein and Y. Nishina, Zeits. f. Physik **52**, 853 (1929).
26. M. S. Livingston and H. A. Bethe, Rev. Mod. Phys. **9**, 245 (1937).
27. L. Landau and G. Rumer, Proc. Roy. Soc. A **166**, 213 (1938).
28. N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. **124**, 425 (1929).
29. C. Möller, Ann. d. Physik **14**, 531 (1932).
30. H. S. W. Massey and H. C. Corben, Camb. Phil. Soc. **35**, 463 (1939).
31. L. W. Nordheim and M. H. Hebb, Phys. Rev. **56** 494 (1939).
32. A. Nordsieck, W. E. Lamb and G. E. Uhlenbeck, Physica **7**, 344 (1940).
33. L. W. Nordheim, Phys. Rev. **59**, 929A (1941).
34. J. R. Oppenheimer, H. Snyder, and R. Serber, Phys. Rev. **57**, 75 (1940).
35. J. K. Oppenheimer, Phys. Rev. **59**, 462 (1941).
36. B. Rossi, Phys. Rev. **57**, 469 (1940).
37. B. Rossi, Phys. Rev. **57**, 660 (1940).

38. B. Rossi, Phys. Rev. **59**, 929A (1941).
39. H. Snyder, Phys. Rev. **53**, 960 (1938).
40. R. Serber, Phys. Rev. **54**, 317 (1938).
41. W. F. G. Swan n, J. Frank. Inst. **226**, 598 (1938).
42. M. Schönberg, Ann. Acad. Bras. **12**, 281 (1940).
43. W. T. Scott, Диссертация, University of Michigan (не опубликована).
44. I. Tam m and S. Belenky, Journ. of Phys. USSR. **1**, 177 (1939).
45. E. J. Williams, Proc. Roy. Soc. A **169**, 531 (1939).
46. E. J. Williams, Proc. Roy. Soc. A **172**, 194 (1939).
47. G. C. Wick, Ricerca Scient. **11**, 273 (1940).
- 47a. O. Halpern and H. Hall, Phys. Rev. **73**, 477 (1948).

#### Дополнительная литература<sup>1</sup>

48. С. З. Беленький, К теории ливней в тяжелых элементах, ЖЭТФ, **14**, 11 (1944).
49. С. З. Беленький, О влиянии рассеяния в каскадных процессах, ЖЭТФ, **15**, 9 (1945).
50. С. З. Беленький, Каскадная теория с учетом ионизационных потерь, ЖЭТФ, **17**, 189 (1947).
51. С. З. Беленький, О ширине ливня, ЖЭТФ, **14**, 129 (1945).
52. С. З. Беленький, Лавинные процессы в космических лучах, М.—Л. 1948.
53. В. Б. Берестецкий, О пространственной корреляции частиц в космических лучах, I, ЖЭТФ, **15**, 330 (1945).
54. В. Б. Берестецкий, О пространственной корреляции частиц в космических лучах, II, ЖЭТФ, **16**, 665 (1946).
55. А. Кирпичев и И. Померанчук, Уточненное вычисление радиационной длины из экспериментальных данных о рассеянии рентгеновских лучей. ДАН СССР, **45**, 285 (1944).
56. Л. Д. Ландау, Угловое распределение частиц в ливнях, ЖЭТФ, **10**, 1007 (1940).
57. Л. Д. Ландау, О флуктуациях ионизационных потерь, Journ. of Phys. USSR **8**, 204 (1944).
58. „Мезон“. Сборник статей под ред. И. Е. Тамма М.—Л. (1947).
59. А. Б. Мигдал, Об интерпретации экспериментальных данных о ливнях Оже, ЖЭТФ, **15**, 313 (1945).
60. И. Померанчук, Максимальная энергия, которую могут иметь на поверхности Земли первичные электроны космических лучей из-за излучения в земном магнитном поле, ЖЭТФ, **9**, 915 (1939).

---

<sup>1</sup> Добавлено редактором.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	5
--------------------	---

### Часть I

#### ОСНОВНЫЕ ПРОЦЕССЫ

<b>А. СТОЛКНОВЕНИЯ . . . . .</b>	<b>9</b>
1. Применение законов сохранения . . . . .	9
2. Дифференциальная вероятность столкновения . . . . .	10
3. Потери энергии при столкновениях (ионизационные потери)	13
4. Эффект плотности . . . . .	16
5. Пробеги мезотронов и протонов . . . . .	17
6. Первичная удельная ионизация . . . . .	18
<b>В. ЭФФЕКТ КОМПТОНА . . . . .</b>	<b>20</b>
7. Применение законов сохранения . . . . .	20
8. Дифференциальная вероятность рассеяния . . . . .	20
9. Полная вероятность рассеяния . . . . .	21
<b>С. ИЗЛУЧЕНИЕ . . . . .</b>	<b>22</b>
10. Общие замечания . . . . .	22
11. Дифференциальная вероятность излучения электронами . . . . .	23
12. Средние потери энергии на излучение электронами . . . . .	25
13. Радиационная единица длины. Упрощенные формулы . . . . .	26
14. Сравнение потерь на излучение и ионизационных потерь. Флюктуации потерь на излучение . . . . .	28
15. Процессы излучения мезотронами . . . . .	30
<b>Д. ОБРАЗОВАНИЕ ПАР . . . . .</b>	<b>33</b>
16. Общие замечания . . . . .	33
17. Дифференциальная вероятность образования пар . . . . .	34
18. Полная вероятность образования пар . . . . .	35
19. Вероятности, отнесенные к радиационной единице длины. Упрощенные выражения . . . . .	36
20. Сравнение процесса образования пар с эффектом Комптона	38
<b>Е. РАССЕЯНИЕ . . . . .</b>	<b>39</b>
21. Дифференциальная вероятность упругого рассеяния . . . . .	39
22. Многократное рассеяние. Вычисление среднего квадрата угла рассеяния . . . . .	40
23. Функция распределения . . . . .	44

## Часть II

## КАСКАДНЫЕ ЛИВНИ

24. Общие замечания . . . . .	51
25. Определения, обозначения, типы приближений . . . . .	52
<b>A. ТЕОРИЯ ЛИВНЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ А . . . . .</b>	<b>60</b>
26. Кинетические уравнения . . . . .	60
27. Элементарные решения . . . . .	62
28. Интегралы Меллина и Лапласа от $\pi$ , $\gamma$ , $\Pi$ . . . . .	66
29. Пробег, центр тяжести, продольные размеры . . . . .	73
30. Дифференциальный и интегральный спектры . . . . .	74
31. Метод последовательных столкновений . . . . .	84
<b>B. ТЕОРИЯ ЛИВНЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ В . . . . .</b>	<b>88</b>
32. Кинетические уравнения . . . . .	88
33. Элементарные решения . . . . .	89
34. Поправки на отклонения $\psi$ от $\psi_0$ . . . . .	96
35. Решения для случая одиночного первичного электрона или фотона . . . . .	97
36. Явные выражения . . . . .	99
<b>C. ОБЩАЯ И УДЕЛЬНАЯ ИОНИЗАЦИЯ. КОНЕЦ СПЕКТРА СО СТОРОНЫ МАЛЫХ ЭНЕРГИЙ . . . . .</b>	<b>107</b>
37. Общая ионизация . . . . .	107
38. Удельная ионизация . . . . .	109
39. Конец спектра со стороны малых энергий . . . . .	110
<b>D. ЭЛЕКТРОНЫ И ФОТОНЫ В РАВНОВЕСИИ С БОЛЕЕ ЖЕСТКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ . . . . .</b>	<b>113</b>
40. Общий метод . . . . .	113
41. Спектры при больших энергиях . . . . .	115
42. Удельная ионизация. Спектры при малых энергиях . . . . .	118
<b>E. ФЛЮКТУАЦИИ. ПОПЕРЕЧНЫЕ РАЗМЕРЫ ЛИВНЕЙ . . . . .</b>	<b>119</b>
43. Флюктуации . . . . .	119
44. Поперечные размеры ливней . . . . .	121
Дополнение I . . . . .	124
Дополнение II . . . . .	125
Литература . . . . .	129

---

Редактор Я. А. Смородицкий

Техн. редактор А. П. Дронов

Корректор Р. Л. Шейхет

Подписано к печати 26/V 1948 г. А-04833. Печ. л.  $8\frac{1}{4} + 4$  вкл., уч.-изд. л. 7,8,  
формат  $60 \times 92\frac{1}{16}$ , изд. № 2/52. Зак. 1084. Цена 10 руб.

\*

2-я типография „Печатный Двор“ им. А. М. Горького  
треста „Полиграфкнига“ ОГИЗа при Совете Министров СССР.  
Ленинград, Гатчинская, 26.

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
20	6 сл.	$\sin \theta$	$\sin^2 \theta$
27	4 св.	$\left(\frac{3}{2} - 2\right)$	$\left(\frac{3}{2} - 2b\right)$
46	12 св.	$\frac{1}{2} \frac{E_s^2}{2p^{2\beta_2}} \Delta t$	$\frac{E_s^2}{2p^{2\beta_2}} \Delta t$
48	7 св.	$t^{3/2}$	$t^{1/2}$
54	15 сл.	$\frac{1}{z_\pi(E)} \int_0^\infty t^2_\pi(E, t) dt$	$\frac{1}{z_\pi(E)} \int_0^\infty t^{2\pi}(E, t) dt$
73	3 св.	$= e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t}$	$\times (e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t})$
76	2 св.	$\sqrt{s} C(s) [\lambda_1(s) - \lambda_2(s)]$	$\sqrt{s} C(s) [\lambda_1(s) - \lambda_2(s)]$
116	9 и 10 сл.	$\int_0^\infty$	$\int_E^\infty$