Э. Р. РОЗЕНДОРН

ЗАДАЧИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для физико-математических факультетов университетов
и педагогических институтов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

517.4
Р 64
УДК 513.731

АННОТАЦИЯ

Этот задачник содержит задачи по теории кривых и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве.

Он предназначен для студентов физико-математических факультетов университетов и пединститутов.

Эмиль Ренольдович Розендорн

Задачи по дифференциальной геометрии

М., 1971 г., 64 стр.

Редактор *А. Ф. Лапко.*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.* Корректор *Т. А. Панькова.*

Сдано в набор 15/XII 1970 г. Подписано к печати 22/VI 1971 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 2. Условн. печ. л. 3,36. Уч.-изд. л. 3,65.
Тираж 44500 экз. Т-09660. Цена книги 13 коп. Заказ № 1967

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

2-2-3
17-71

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник содержит 170 задач по теории кривых и поверхностей. При его подготовке использованы известные задачники и учебники, перечисленные ниже в списке литературы. Часть задач составлена специально для этого сборника. Задачи на плоские кривые и огибающие в сборник не включены, поскольку эти разделы достаточно полно представлены в задачнике [2]. Звездочкой помечены задачи, к которым даны указания. Для того чтобы усвоение материала не было формальным, целесообразно решение задач сопровождать эскизными рисунками тех геометрических фигур, которые встречаются в процессе решения.

Задачник можно использовать не только при изучении дифференциальной геометрии в качестве самостоятельного предмета, но и в тех случаях, когда теория кривых и теория поверхностей включены в виде отдельных тем в учебный план другого предмета (например, математического анализа). §§ 1 и 5 содержат определения, формулы и теоремы (без доказательств). Каждый из остальных параграфов (§§ 2—4 и 6—10) можно использовать как тему одного занятия со студентами. Если есть возможность на какие-либо из этих тем отвести большее число занятий, то можно привлечь материал третьей главы, где имеются задачи тех же типов, что в §§ 2—4 и 6—10, а также комбинированные задачи.

В заключение автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность всем товарищам, принимавшим участие в обсуждении задачника, особенно профессорам Н. В. Ефимову, Э. Г. Позняку, П. К. Рашевскому и Л. А. Тумаркину и доцентам И. А. Вайнштейну, О. С. Ивашеву-Мусатову, И. Х. Сабитову и З. Я. Шапиро.

ГЛАВА I

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ

§ 1. Предварительные замечания

1.1. Ниже часто встречаются векторы и вектор-функции. Буквы, обозначающие векторные величины, выделены жирным шрифтом. Нулевой вектор обозначен буквой $\boldsymbol{o}$. Операции над векторами обозначены следующим образом:

$|\boldsymbol{A}|$ — *модуль вектора* $\boldsymbol{A}$; $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ — *скалярное произведение*; $\boldsymbol{A}^2$ — *скалярный квадрат* вектора $\boldsymbol{A}$ (т. е. $\boldsymbol{A}^2 = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}|^2$); $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]$ — *векторное произведение*; $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ — *смешанное произведение*.

В записи вида $\boldsymbol{A} = \{x, y, z\}$ всегда будет подразумеваться, что x, y, z — координаты вектора $\boldsymbol{A}$ в некоторой декартовой прямоугольной системе координат.

Радиус-вектор текущей точки кривой чаще всего обозначается буквой $\boldsymbol{r}$.

1.2. Напомним две формулы, известные из векторной алгебры: *тождество Лагранжа*

$$[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}] = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}) & (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \\ (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}) & (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}) \end{vmatrix} \tag{1}$$

и формулу для *двойного векторного произведения*

$$\boldsymbol{A}\times[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}] = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) упрощают выкладки при решении некоторых геометрических задач.

1.3. Производные вектор-функции можно вычислять покоординатно:

$$\text{если } \boldsymbol{A}(t) = \{x, y, z\}, \text{ то } \boldsymbol{A}'(t) = \{x', y', z'\}.$$

Неопределенные и определенные интегралы вектор-функций также можно вычислять покоординатно, например:

$$\int \boldsymbol{A}(t)\,dt = \left\{\int x(t)\,dt, \int y(t)\,dt, \int z(t)\,dt\right\}.$$

1.4. Говорят, что функция или вектор-функция принадлежит *классу* C^0 в некоторой области изменения ее аргумента (или аргументов), если она непрерывна в этой области; принадлежит *классу* C^n ($n = 1, 2, \ldots$), если непрерывны все ее производные до порядка n включительно; принадлежит *классу* C^∞, если непрерывны ее производные всех порядков.

Класс регулярности вектор-функции не зависит от выбора декартовых координат в пространстве.

1.5. Говорят, что линия $\mathscr{L}$ принадлежит классу регулярности C^n ($n = 1, 2, \ldots, \infty$), если ее можно задать формулой вида $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, где вектор-функция $\boldsymbol{r}(t) \in C^n$, причем $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{o}$.

Линия называется *гладкой*, если она принадлежит классу C^1.

Рассматриваемые ниже линии предполагаются гладкими.

Вместо термина «линия» ниже часто употребляется термин «кривая»; при этом прямая линия рассматривается как частный случай кривой.

1.6. Если линия $\mathscr{L}$ класса C^1 задана уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{o}$, то касательная к ней в точке $t = t_0$ коллинеарна вектору $\boldsymbol{r}'(t_0)$. *Орт* (т. е. *единичный вектор*) касательной, направленный в сторону возрастания параметра t, обозначается через $\boldsymbol{\tau}$.

Линия $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(t)$ называется *сферической индикатрисой касательных* линии $\mathscr{L}$. Следует иметь в виду, что сферическая индикатриса касательных гладкой линии $\mathscr{L}$ сама, вообще говоря, не является гладкой.

Плоскость, проходящая через данную точку кривой и ортогональная касательной, называется *нормальной плоскостью*. Любая прямая, пересекающая линию $\mathscr{L}$ ортогонально касательной, называется *нормалью* линии $\mathscr{L}$.

1.7. Длина дуги $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ на кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ равна интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2} |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt.$$

Параметр на кривой называется *натуральным*, если, с точностью до постоянного слагаемого, он равен длине дуги этой кривой, отсчитываемой (со знаком) от какой-либо ее точки в каком-нибудь выбранном направлении.

Натуральный параметр будем обозначать буквой s.

Производную какой-либо величины по натуральному параметру заданной кривой будем обозначать не штрихом, а точкой сверху.

В частности, $\boldsymbol{\tau}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(s)$.

1.8. Если $\mathscr{L} \in C^2$, то определена *кривизна* k кривой $\mathscr{L}$, вычисляемая по формуле

$$k = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}. \tag{3}$$

Точки, где $k = 0$, называются *точками распрямления* кривой.

1.9. Пусть $\mathscr{L} \in C^2$, $k \neq 0$ (т. е. $|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| \neq 0$). Тогда для каждой точки кривой существует соприкасающаяся окружность. Ее радиус $\mathscr{R} = 1/k$ называется *радиусом кривизны*, а ее центр — *центром кривизны* линии в рассматриваемой точке.

Нормаль, проходящая через данную точку кривой и центр кривизны, называется *главной нормалью*. Орт главной нормали, направленный от данной точки кривой в сторону центра кривизны, будем обозначать через $\boldsymbol{\nu}$.

Нормаль, ортогональная главной нормали, называется *бинормалью*. Орт бинормали будем обозначать через $\boldsymbol{\beta}$, считая, что $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}$.

Тройка векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ называется *репером Френе*. Для нахождения этих векторов полезны формулы

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}, \\ \boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau} = -\frac{\boldsymbol{r}' \times [\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'']}{|\boldsymbol{r}'| \cdot |\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

1.10. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}_c$ центра кривизны выражается формулой

$$\boldsymbol{r}_c = \boldsymbol{r} + \mathscr{R}\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{k}\boldsymbol{\nu}. \tag{5}$$

Будем считать, как и выше, что $\mathscr{L}$ имеет уравнение $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. В точке $t = t_0$ построим соприкасающуюся окружность. Радиус-вектор текущей точки соприкасающейся окружности обозначим $\boldsymbol{r}_1(\varphi)$, где φ — параметр на этой окружности, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Имеем:

$$\boldsymbol{r}_1(\varphi) = \boldsymbol{r}(t_0) + \mathscr{R}(t_0)(1 - \cos\varphi)\boldsymbol{\nu}(t_0) + \mathscr{R}(t_0)(\sin\varphi)\boldsymbol{\tau}(t_0). \tag{6}$$

Формула (6) представляет собой уравнение соприкасающейся окружности. На окружности (6) точке соприкосновения соответствуют значения параметра $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$.

Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль, называется *соприкасающейся плоскостью*. В ней располагается соприкасающаяся окружность. Поэтому соприкасающуюся окружность бывает удобно задавать системой двух уравнений, как линию пересечения соприкасающейся плоскости и сферы, центр которой определяется по формуле (5), а радиус равен $\mathscr{R}$.

Плоскость, проходящая через касательную и бинормаль, называется *спрямляющей плоскостью*.

Касательная, главная нормаль, бинормаль и три плоскости — соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая — вместе образуют так называемый *сопровождающий трехгранник* в данной точке кривой.

Линии $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(t)$ и $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(t)$ называются соответственно *сферическими индикатрисами главных нормалей* и *бинормалей* данной кривой $\mathscr{L}$.

1.11. Если $\mathscr{L} \in C^3$, $k \neq 0$, то определено *кручение* кривой (скорость вращения соприкасающейся плоскости вокруг касательной), которое мы обозначим через $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{[\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'']^2}. \tag{7}$$

В тех же предположениях справедливы *формулы Френе*:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\tau}} &= \qquad\quad k\boldsymbol{\nu} \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} &= -k\boldsymbol{\tau} \qquad\quad + \varkappa\boldsymbol{\beta} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \qquad\; -\varkappa\boldsymbol{\nu} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(первая из них имеет место, если $\mathscr{L} \in C^2$, $k \neq 0$).

Если $k \neq 0$, $\varkappa = 0$ во всех точках кривой, то эта кривая *плоская*.

Точки, в которых $\varkappa = 0$, называются *точками уплощения* кривой.

Обратим внимание на то, что в точках распрямления линии (т. е. там, где $k = 0$) кручение не определено. Кривая, на которой в одной-единственной точке $\varkappa$ не определено, а во всех остальных точках $\varkappa = 0$, может не быть плоской (см., например, задачу 103).

Формулы (3) — (8), приведенные в пп. 1.8—1.11, составляют основной аппарат для решения задач о пространственных кривых.

1.12. Равенства вида

$$k = k(s), \qquad \varkappa = \varkappa(s) \tag{9}$$

называются *натуральными уравнениями кривой.*

Теорема существования. *Если в интервале* $s_1 < s < s_2$ *заданы функции* $k(s)$ *и* $\varkappa(s)$, *причем*

$$k(s) > 0, \quad k(s) \in C^n, \quad \varkappa(s) \in C^{n-1}, \quad n \geqslant 1, \tag{10}$$

то существует кривая $\mathscr{L}$ *класса* C^{n+2} *с заданными натуральными уравнениями* (9).

Примечание. Случаи, когда $s_1 = -\infty$, или $s_2 = +\infty$, или $n = \infty$, не исключаются.

Теорема единственности. *При условиях* (10) *кривая с данными натуральными уравнениями* (9) *определена однозначно с точностью до движения в пространстве.*

§ 2. Вектор-функции. Параметрическое задание линий. Касательные

1. Найти линию $\mathscr{L}$, задаваемую уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $t_1 < t < t_2$, зная, что $\boldsymbol{r}'(t) = \lambda(t)\boldsymbol{a}$, где $\lambda(t) > 0$ — непрерывная функция, $\boldsymbol{a}$ — постоянный ненулевой вектор.

2. Найти линию $\mathscr{L}$, зная, что она задается уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $-\infty < t < +\infty$, где $\boldsymbol{r}(t) \in C^2$, $\boldsymbol{r}''(t) = \boldsymbol{a}$ — постоянный ненулевой вектор.

3. Вывести формулу производной произведения функции $f(t)$ на вектор-функцию $\boldsymbol{A}(t)$:

$$(f\boldsymbol{A})' = f'\boldsymbol{A} + f'\boldsymbol{A}'.$$

4*. Вывести формулы для производных скалярного, векторного и смешанного произведений вектор-функций:

а) $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})' = (\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}')$;

б) $[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]' = [\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B}] + [\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}']$;

в) $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})' = (\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}')$.

5. Вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\boldsymbol{r}'' = [\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор. Выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r}'$ следующие величины: а) $[\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'']^2$; б) $(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')$.

6. Кривая называется *сферической*, если она расположена на некоторой сфере. Докажите следующее утверждение. Для того чтобы кривая $\mathscr{L}$ класса C^1 была сферической, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве существовала такая точка O, что для любой точки $A \in \mathscr{L}$ прямая OA служит нормалью к $\mathscr{L}$.

7*. Пусть $\mathscr{L}$ — замкнутая кривая класса C^1. Доказать, что для любого вектора $\boldsymbol{a}$ найдется точка $A \in \mathscr{L}$, в которой касательная к $\mathscr{L}$ ортогональна $\boldsymbol{a}$.

8. Траектория движения точки задана в цилиндрических координатах: $\boldsymbol{r}(t) = \{\rho \cos \varphi,\ \rho \sin \varphi,\ z\}$, где t — время, $\rho\,(t)$, $\varphi\,(t)$, $z\,(t)$ — известные функции.

а) Найти косинус угла α между радиус-вектором движущейся точки и вектором ее мгновенной скорости.

б) В случае движения по цилиндру $\rho = \rho_0$ найти величину ускорения.

9. Траектория движущейся точки задана в сферических координатах: $\boldsymbol{r}\,(t) = \{\rho \cos \varphi \cos \theta,\ \rho \sin \varphi \cos \theta,\ \rho \sin \theta\}$, где t — время, $\rho\,(t)$, $\varphi\,(t)$, $\theta\,(t)$ — известные функции. Найти величину мгновенной скорости.

10*. Для того чтобы кривая $\mathscr{L}$ принадлежала классу C^n, $n \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{r}\,(s) \in C^n$. Доказать.

11. Пусть m — масса точки, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}\,(t)$ — действующая на нее сила, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t)$ — закон движения точки, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\,(t)$ — ее ускорение, $W = W\,(t)$ — кинетическая энергия (t — время, $m = \mathrm{const}$). Из закона Ньютона $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ вывести формулу:

$$dW = (\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}).$$

12. В условиях предыдущей задачи доказать формулу $d\boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}\,dt$, где $\boldsymbol{N}$ — момент количества движения точки относительно произвольно выбранного начала координат O, $\boldsymbol{M}$ — момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно O.

Примечание. Количеством движения материальной точки называется вектор, равный произведению ее массы на скорость. Если какой-либо вектор $\boldsymbol{a}$ приложен к точке P, то моментом вектора $\boldsymbol{a}$ относительно точки O называется вектор $[\overline{OP} \times \boldsymbol{a}]$.

13*. В пространстве движутся две точки так, что расстояние между ними остается постоянным. Доказать, что проекции их скоростей на направление прямой, соединяющей эти точки, равны между собой.

14. Дана вектор-функция $\boldsymbol{r}(t) \neq \boldsymbol{o}$ класса C^1. Можно ли утверждать, что а) $|\boldsymbol{r}'| = |\boldsymbol{r}|'$? б) $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = |\boldsymbol{r}| \cdot |\boldsymbol{r}|'$?

§ 3. Сопровождающий трехгранник, кривизна и кручение

15. Дана винтовая линия:

$$\boldsymbol{r} = \{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\},\quad a > 0,\quad b \neq 0,\quad -\infty < t < +\infty.$$

а) Найти сопровождающий трехгранник в точке $(a, 0, 0)$.

б) В произвольной точке линии найти угол α между касательной и плоскостью $z = 0$, кривизну k и кручение $\varkappa$.

в) Найти соприкасающуюся окружность в точке $(0, a, \pi b/2)$.

г) Пусть $b > 0$. Из каждой точки винтовой линии в направлении вектора $\boldsymbol{\beta}$ откладывается отрезок длины $c = \frac{a}{b}\sqrt{a^2 + b^2}$; найти геометрическое место концов этих отрезков.

Примечание. При таком расположении винтовой линии относительно системы координат (x, y, z), как в задаче **15**, прямая $x = y = 0$ называется *осью винтовой линии*, величина a — ее *радиусом* («радиусом винта»), величина $h = 2\pi|b|$ — ее *шагом* («шагом винта»). Пусть система координат (x, y, z) — правая. Тогда рассматриваемая винтовая линия называется *правой*, если $b > 0$, *левой*, если $b < 0$.

16*. *Кривой Вивиани* называется линия пересечения боковой поверхности круглого цилиндра радиуса R и сферы радиуса $2R$, центр которой находится на образующей цилиндра.

а) Составить параметрическое уравнение кривой Вивиани.

б) Вычислить ее кривизну. Есть ли на кривой Вивиани точки распрямления?

в) Вычислить кручение кривой, найти точки уплощения и дуги с кручением постоянного знака.

г) Найти репер Френе в точках уплощения и самопересечения.

д) Найти соприкасающиеся окружности в тех же точках.

17. На кривой $\boldsymbol{r} = \{x, \sin x, \sin 3x\}$ найти точки распрямления, точки уплощения и дуги, на которых $\varkappa$ сохраняет знак.

18. На кривой $\boldsymbol{r} = \{\cos t, \sin t, t^3 - 9t\}$ найти точки распрямления, точки уплощения и дуги, на которых $\varkappa$ сохраняет знак.

19. На кривой $\boldsymbol{r} = \{t - \sin t, 1 - \cos t, \sin t\}$ найти:

а) k и $\varkappa$ в произвольной точке;

б) репер Френе и соприкасающуюся окружность при $t = 0$;

в) репер Френе и соприкасающуюся окружность при $t = \pi/2$.

20. На кривой $\boldsymbol{r} = \{2t, \ln t, t^2\}$, $t > 0$, найти:

а) k и $\varkappa$ в произвольной точке;

б) репер Френе и соприкасающуюся окружность при $t = 1$.

§ 4. Натуральные уравнения. Формулы Френе

21. Составить натуральные уравнения кривой

$$\boldsymbol{r} = \{e^t, t\sqrt{2}, e^{-t}\}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

22*. Найти кривую с натуральными уравнениями $k = f(s) > 0$, $\varkappa = 0$, $-\infty < s < +\infty$ ($f(s)$ — данная функция), если даны начальные условия: $\boldsymbol{r} = \{0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{\tau} = \{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{\nu} = \{0, 1, 0\}$ при $s = 0$.

23*. Найти все кривые с натуральными уравнениями $k(s) = k_0$, $\varkappa(s) = \varkappa_0$, где $k_0, \varkappa_0$ — заданные числа, $k_0 > 0$.

24*. Движение точечного электрического заряда в магнитном поле с напряженностью $\boldsymbol{H}$ определяется дифференциальным уравнением

$$\boldsymbol{r}'' = c\,[\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{H}],$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ — радиус-вектор точки, в которой находится заряд, t — время, $c = \text{const}$. Доказать, что если заряд движется под действием магнитного поля с постоянной напряженностью $\boldsymbol{H}$, то его скорость постоянна по величине, а его траекторией может быть лишь какая-либо из следующих линий:

1) прямая, коллинеарная вектору $\boldsymbol{H}$;

2) окружность в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{H}$;

3) винтовая линия с осью, коллинеарной $\boldsymbol{H}$.

25*. Линия называется *линией откоса*, если касательная к ней образует постоянный угол с какая-либо прямой.

Считая, что рассматриваются только кривые с отличной от нуля кривизной, доказать следующие утверждения:

а) Для того чтобы кривая класса C^2 была линией откоса, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные нормали были параллельны некоторой плоскости.

б) Для того чтобы кривая класса C^2 была линией откоса, необходимо и достаточно, чтобы все ее спрямляющие плоскости были параллельны некоторой прямой.

в) Для того чтобы кривая класса C^3 была линией откоса, необходимо и достаточно, чтобы $\varkappa(s) = ck(s)$, $c = \text{const}$. При этом $|c| = \operatorname{ctg}\alpha$, где α — угол, о котором идет речь в определении линии откоса.

г) Для того чтобы кривая класса C^4 была линией откоса, необходимо и достаточно, чтобы $(\dot{\boldsymbol{\tau}}, \ddot{\boldsymbol{\tau}}, \dddot{\boldsymbol{\tau}}) = 0$.

26*. Линия $\mathscr{L}^*$ называется *эволютой* линии $\mathscr{L}$, если каждая касательная к $\mathscr{L}^*$ служит нормалью к линии $\mathscr{L}$. Считая, что $\mathscr{L} \in C^3$, $k \neq 0$, доказать следующее.

а) Всевозможные эволюты данной кривой $\mathscr{L}$ задаются формулой

$$\boldsymbol{r}^*(s) = \boldsymbol{r}(s) + \mathscr{R}(s)\,\boldsymbol{\nu}(s) + [\mathscr{R}(s)\operatorname{tg}\theta(s)]\,\boldsymbol{\beta}(s),$$

где $\theta(s) = -\int \varkappa(s)\,ds$, величины $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}, \mathscr{R}, \varkappa, s$ относятся к данной кривой $\mathscr{L}$.

б) Если $\mathscr{L}$ — плоская кривая, не содержащая дуг окружностей, то все ее эволюты являются линиями откоса, а одна из них — плоская и совпадает с геометрическим местом центров кривизны линии $\mathscr{L}$.

27. *Эвольвентой* линии $\mathscr{L}$ называется такая линия $\mathscr{L}^*$, которая пересекает под прямым углом касательные к линии $\mathscr{L}$. Доказать, что всевозможные эвольвенты данной кривой $\mathscr{L}$ задаются формулой $\boldsymbol{r}^*(s) = \boldsymbol{r}(s) - (s - s_0)\,\boldsymbol{\tau}(s)$, где величины $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\tau}, s$ относятся к линии $\mathscr{L}$, s_0 — постоянная, зависящая от выбора эвольвенты.

Примечание. Пусть на дугу AB кривой $\mathscr{L}$ наложена гибкая нерастяжимая нить, один конец которой закреплен в точке B. Пусть, далее, нить разматывается с кривой так, что в каждый момент часть нити продолжает лежать на некоторой дуге BC линии $\mathscr{L}$, а другая ее часть вытянута по касательной к $\mathscr{L}$ в точке C. Точка C — переменная. Когда C пробегает дугу AB, свободный конец нити описывает в пространстве кривую $\mathscr{L}^*$, которая (вследствие формулы из задачи 27) является эвольвентой линии $\mathscr{L}$. В связи с этим эвольвенту часто называют *разверткой* данной кривой. Если $\mathscr{L}^*$ — эвольвента линии $\mathscr{L}$, то $\mathscr{L}$ — эволюта для $\mathscr{L}^*$. Если $\mathscr{L}$ — эволюта линии $\mathscr{L}$, то $\mathscr{L}$ — эвольвента для $\widetilde{\mathscr{L}}$.

28. *Косой окружностью* называется любая не плоская кривая с постоянной кривизной $k \neq 0$. Пусть $\mathscr{L}$ — косая окружность класса C^5, у которой $\varkappa \neq 0$.

а) Доказать, что геометрическое место $\mathscr{L}^*$ ее центров кривизны — тоже косая окружность. Найти кривизну k^* и кручение $\varkappa^*$ линии $\mathscr{L}^*$.

б) Найти геометрическое место центров кривизны косой окружности $\mathscr{L}^*$.

Примечание. Обратить внимание на взаимное расположение сопровождающих трехгранников в соответствующих точках линий $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^*$.

29*. Найти общий вид кривых, имеющих постоянное кручение $\varkappa_0 \neq 0$.

30*. Пусть $\mathscr{L}$ — сферическая кривая класса C^4, кручение которой отлично от нуля. Пусть $\mathscr{R}$ — радиус кривизны линии $\mathscr{L}$, s^* — натуральный параметр на ее сферической индикатрисе бинормалей. Найти вид функции $\mathscr{R}(s^*)$.

ГЛАВА II

ПОВЕРХНОСТИ

§ 5. Краткие сведения из теории поверхностей

5.1. Во многих случаях поверхность удобно задавать *параметрическим векторным уравнением* вида

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(u, v), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор текущей точки, параметры (точнее, аргументы) u, v пробегают некоторую область на вспомогательной плоскости (u, v). Линии $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ образуют на поверхности координатную сеть, вообще говоря, криволинейную.

5.2. Сеть линий на поверхности S будем называть *правильной*, если

1) через каждую точку на S проходит по одной линии каждого из двух семейств сети;

2) каждая из линий одного семейства сети пересекает каждую из линий другого семейства и притом в единственной точке.

Сеть линий на S будем называть *локально-правильной* в некоторой области, если для каждой точки этой области найдется такая окрестность, в которой сеть правильна.

Заметим, что локально-правильная сеть может не быть правильной в целом (см., например, сеть прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, а также задачу 42).

5.3. Буквенными индексами снизу будем обозначать частные производные по соответствующим переменным. Например, $\boldsymbol{R}_u = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}$, $\boldsymbol{R}_{uv} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial u \partial v}$ и т. п.

5.4. Если поверхность S задана уравнением (1), где $\boldsymbol{R}(u, v) \in C^1$, $|\boldsymbol{R}_u \times \boldsymbol{R}_v| \neq 0$, то координатная сеть (u, v) локально-правильна на S.

5.5. Говорят, что поверхность S принадлежит классу регулярности C^n (или C^∞), $n \geqslant 1$, если в окрестности каждой ее точки эту поверхность можно задать уравнением вида (1), где $\boldsymbol{R}(u, v) \in C^n$ (соответственно C^∞), причем $|\boldsymbol{R}_u(u, v) \times \boldsymbol{R}_v(u, v)| \neq 0$.

Поверхности класса C^1 называют *гладкими*. Все рассматриваемые ниже поверхности предполагаются гладкими.

Если $S \in C^n$, то мы будем считать, что поверхность S (по крайней мере локально) задается уравнением вида (1), где $\boldsymbol{R}(u, v) \in C^n$, $|\boldsymbol{R}_u \times \boldsymbol{R}_v| \neq 0$.

Формулы, наиболее важные для решения задач о поверхностях, включенных в сборник, приведены в следующих пунктах (см. (2) — (25)).

5.6. *Касательная плоскость* к поверхности проходит через точку касания и векторы $\boldsymbol{R}_u$ и $\boldsymbol{R}_v$, найденные в этой точке. *Нормалью* к поверхности S в точке A называется прямая, проходящая через точку A ортогонально касательной плоскости. Орт нормали будем обозначать $\boldsymbol{n}$, считая, что тройка векторов $\boldsymbol{R}_u$, $\boldsymbol{R}_v$, $\boldsymbol{n}$ ориентирована так же, как тройка ортов координатных осей x, y, z. Тогда

$$\boldsymbol{n}(u, v) = \frac{\boldsymbol{R}_u(u, v) \times \boldsymbol{R}_v(u, v)}{|\boldsymbol{R}_u(u, v) \times \boldsymbol{R}_v(u, v)|}. \tag{2}$$

5.7. Пусть S^* — сфера единичного радиуса с центром в начале координат. Отображение поверхности S на сферу S^*, которое произвольной точке на S с координатами (u, v) ставит в соответствие точку на S^* с радиус-вектором $\boldsymbol{n}(u, v)$, называется *гауссовым сферическим отображением* данной поверхности. При этом S^* называется *гауссовой сферой*.

Пусть поверхность S задана уравнением вида $z = z(x, y)$. Тогда

$$\boldsymbol{n} = (1 + z_x^2 + z_y^2)^{-1/2} \{-z_x, -z_y, 1\}. \tag{2a}$$

В этом случае для построения сферического образа поверхности (т. е. образа S на гауссовой сфере) удобно использовать вспомогательное отображение, которое точке $A(x, y, z(x, y))$ ставит в соответствие точку $B(p, q, 1)$ на касательной плоскости к сфере S^* по формулам

$$p = -z_x(x, y), \qquad q = -z_y(x, y). \tag{3}$$

Искомый образ $A^* \in S^*$ точки A получается как центральная проекция точки B на сферу S^* из начала координат.

5.8. *Дифференциал ds длины дуги* гладкой кривой на гладкой поверхности S выражается формулой

$$ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2, \tag{4}$$

где

$$E = \boldsymbol{R}_u^2, \quad F = (\boldsymbol{R}_u, \boldsymbol{R}_v), \quad G = \boldsymbol{R}_v^2. \tag{5}$$

ds^2 называется *первой квадратичной формой поверхности*.

Если две линии на S пересекаются в некоторой точке и имеют в этой точке направления (du_1, dv_1) и (du_2, dv_2), то угол α между ними выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{Edu_1du_2 + F\,(du_1dv_2 + du_2dv_1) + Gdv_1dv_2}{ds_1ds_2}, \tag{6}$$

где $ds_i = \sqrt{Edu_i^2 + 2Fdu_idv_i + Gdv_i^2}$ $(i = 1, 2)$.

Координатная сеть (u, v) ортогональна тогда и только тогда, когда $F\,(u, v) = 0$.

Площадь $\sigma(\mathscr{D})$ области $\mathscr{D} \subset S$ вычисляется так:

$$\sigma(\mathscr{D}) = \iint\limits_{\mathscr{D}'} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \tag{7}$$

где $\mathscr{D}'$ — прообраз области $\mathscr{D}$ на плоскости (u, v).

5.9. Две поверхности называются *изометричными*, если между ними можно установить (поточечное) взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие линии имеют равные длины. Такое соответствие называется *изометрией*.

Две поверхности называются *локально-изометричными*, если между ними можно установить соответствие, при котором изометричны достаточно малые окрестности соответствующих точек.

Пример. Плоскость и боковая поверхность бесконечного круглого цилиндра локально-изометричны, но не изометричны в целом.

Изгибанием поверхности называется непрерывная деформация поверхности, сохраняющая длины линий на ней. Изгибание поверхности можно рассматривать как семейство изометричных поверхностей, непрерывно зависящих от параметра. Две поверхности называются *наложимыми*, если одну из них можно перевести в другую посредством изгибания.

Для изометрии достаточно, чтобы при надлежащем выборе криволинейных координат совпали первые квадратичные формы рассматриваемых поверхностей.

5.10. В этом и в следующих пунктах будем считать, не оговаривая этого дополнительно, что рассматриваемая поверхность имеет регулярность, по крайней мере, класса C^2. В тех случаях, когда потребуется более высокая регулярность, будем отмечать это специально.

Нормальным сечением поверхности S в точке A называется линия пересечения поверхности с произвольной плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в точке A. Пусть $\boldsymbol{\nu}$ — орт главной нормали некоторого нормального сечения в точке A. Кривизну такого сечения в точке A будем обозначать k_n, считая, что $k_n > 0$, если $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n}$, и $k_n < 0$, если $\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{n}$.

Для произвольной точки $A \in S$ справедливо следующее утверждение: либо существуют два взаимно ортогональных направления, называемых *главными направлениями*, в которых k_n имеет экстремальные значения:

$$k_1 = \min_A k_n, \quad k_2 = \max_A k_n \tag{8}$$

($k_1 < k_2$); либо кривизна всех нормальных сечений одинакова ($k_n = k_1 = k_2$). В последнем случае точка называется *омбилической*, а все направления в ней считаются *главными*.

Величины k_1 и k_2 называют *главными кривизнами поверхности* в точке A.

Если нормальное сечение образует угол φ с первым главным направлением, то для кривизны k_n этого сечения имеет место формула Эйлера:

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi. \tag{9}$$

Для отыскания главных направлений часто бывает полезна

Теорема Родрига. *Главные направления и только они характеризуются равенством* $d\boldsymbol{n} = \lambda\, d\boldsymbol{R}$, *причем* $\lambda = -k_j$ $(j = 1, 2)$.

Те направления, в которых $k_n = 0$, называются *асимптотическими направлениями*.

5.11. Пусть A — произвольная точка поверхности S. Введем в пространстве декартовы прямоугольные координаты ξ, η, ζ с началом в точке A, расположив оси так, чтобы ось ξ шла по первому главному направлению, ось

η — по второму главному направлению, положительная полуось ζ — в сторону вектора $\boldsymbol{n}$. Тогда поверхность второго порядка

$$\zeta = \frac{1}{2}(k_1\xi^2 + k_2\eta^2) \tag{10}$$

называется *соприкасающимся параболоидом поверхности* S в точке A.

В частном случае, когда S имеет уравнение вида $z = f(x, y)$, причем $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, соприкасающийся параболоид в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ имеет такое уравнение:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}[f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \\ + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2]. \tag{10a}$$

5.12. *Гауссовой кривизной поверхности* называется величина $K = k_1k_2$. *Средней кривизной поверхности* называется величина $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. Если вектор $\boldsymbol{n}$ заменить на $(-\boldsymbol{n})$, то K не изменится, H сменит знак.

В зависимости от K и H точки поверхности классифицируются следующим образом.

Точка называется *эллиптической*, если в этой точке $K > 0$; *гиперболической*, если $K < 0$; *параболической*, если $K = 0$, $H \neq 0$ и *точкой уплощения*, если $K = H = 0$.

В частном случае поверхности вида $z = z(x, y)$ типы точек можно распознавать так: если $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 > 0$, то точка эллиптическая; если $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 < 0$, то гиперболическая; если $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0$, но $z_{xx}^2 + z_{xy}^2 + z_{yy}^2 \neq 0$, то точка является параболической; если $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = 0$, то имеем точку уплощения.

Омбилические точки, о которых шла речь выше, в п. **5.10**, характеризуются условием $K = H^2$ и подразделяются на точки уплощения и *шаровые точки*, в которых $K = H^2 > 0$.

Поверхность называется *минимальной*, если во всех ее точках $H = 0$.

Поверхность называется *развертывающейся*, если во всех ее точках $K = 0$.

5.13. Пусть $\mathcal{D}$ — область на поверхности, $\mathcal{D}^*$ — сферический образ области $\mathcal{D}$. Площадь $\sigma(\mathcal{D}^*)$ образа $\mathcal{D}^*$

выражается формулой

$$\sigma(\mathscr{D}^*) = \iint\limits_{\mathscr{D}} |K|\, d\sigma, \tag{11}$$

где $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ — элемент площади на S.

Нужно иметь в виду, что $\mathscr{D}^*$ может иметь самоналожения. В этом случае при подсчете $\sigma(\mathscr{D}^*)$ каждая область гауссовой сферы учитывается столько раз, сколько разных участков области $\mathscr{D}$ на нее отобразилось.

5.14. *Второй квадратичной формой поверхности* называется выражение

$$(d^2\boldsymbol{R}, \boldsymbol{n}) = L(u, v)\, du^2 + 2M(u, v)\, du\, dv + N(u, v)\, dv^2, \tag{12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{(\boldsymbol{R}_u, \boldsymbol{R}_v, \boldsymbol{R}_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ M &= \frac{(\boldsymbol{R}_u, \boldsymbol{R}_v, \boldsymbol{R}_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ N &= \frac{(\boldsymbol{R}_u, \boldsymbol{R}_v, \boldsymbol{R}_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

а E, F, G определяются согласно формулам (5).

Имеют место формулы

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{14}$$

5.15. Пусть на поверхности S дана линия $\mathscr{L} \in C^2$, k — кривизна этой линии, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ — орты касательной и главной нормали. Тогда $k\boldsymbol{\nu} = a\boldsymbol{n} + b\,[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\tau}]$, где a, b — некоторые коэффициенты. Величина a называется *нормальной кривизной* линии $\mathscr{L}$, величина b — *геодезической кривизной* этой линии.

Теорема Менье. *Нормальная кривизна линии $\mathscr{L}$ в произвольной точке A равна кривизне нормального сечения поверхности S, проходящего через точку A в направлении линии $\mathscr{L}$.*

Учитывая теорему Менье, в дальнейшем будем нормальную кривизну обозначать k_n. Геодезическую кривизну обозначим k_g. Итак,

$$k\boldsymbol{\nu} = k_n\boldsymbol{n} + k_g\,[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\tau}]. \tag{15}$$

Замечание. В случае $k = 0$ нужно считать, что $k\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{o}$.

Отметить, что если вектор $\boldsymbol{\tau}$ заменить на $(-\boldsymbol{\tau})$ (т. е. изменить направление движения по $\mathscr{L}$), то k_g изменит знак. Если $\boldsymbol{n}$ заменить на $(-\boldsymbol{n})$, то изменят знаки k_g и k_n.

Если линия $\mathscr{L}$ имеет направление (du, dv), то

$$k_n = \frac{(d^2\boldsymbol{R}, \boldsymbol{n})}{ds^2}. \tag{16}$$

Обратим внимание на то, что теорема Менье и формула Эйлера позволяют найти кривизну линии $\mathscr{L}$, расположенной на поверхности S и имеющей не асимптотическое направление, если в рассматриваемой точке известны:

главные кривизны поверхности;

угол между $\mathscr{L}$ и первым главным направлением;

двугранный угол между соприкасающейся плоскостью кривой и касательной плоскостью поверхности.

5.16. Линия на поверхности называется *линией кривизны*, если в каждой своей точке она имеет главное направление. Линии кривизны определяются дифференциальным уравнением

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Если $S \in C^3$ и на S нет омбилических точек, то сеть линий кривизны локально-правильна.

$M(u, v) = F(u, v) = 0$ в области $\mathscr{D}$ на S в том и только в том случае, когда в этой области координатные линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ являются линиями кривизны. В таком случае обе квадратичные формы ds^2 и $(d^2\boldsymbol{R}, \boldsymbol{n})$ имеют канонический вид во всех точках области $\mathscr{D}$.

5.17. Линия на поверхности называется *асимптотической*, если $k_n = 0$ во всех ее точках. Асимптотические линии определяются дифференциальным уравнением $(d^2\boldsymbol{R}, \boldsymbol{n}) = 0$. Если $S \in C^3$, $K < 0$, то сеть асимптотических линий локально-правильна. Для поверхности $z = z(x, y)$ дифференциальное уравнение асимптотических линий имеет вид $d^2z = 0$.

5.18. Предположим, что сеть линий (u, v) ортогональна (т. е. $F = 0$). Положим $A = \sqrt{E}$, $B = \sqrt{G}$.

Тогда

$$ds^2 = A^2(u, v)\,du^2 + B^2(u, v)\,dv^2.$$

Пусть линия $\mathscr{L}$ класса C^2 задается уравнениями $u = u(s)$, $v = v(s)$, где s — натуральный параметр. Обозначим через α угол между ортом касательной к координатной линии $v = \text{const}$ и ортом касательной к $\mathscr{L}$. Тогда геодезическая кривизна k_g линии $\mathscr{L}$ выражается формулой

$$k_g = \dot{\alpha} - \frac{A_v}{B}\dot{u} + \frac{B_u}{A}\dot{v}, \tag{18}$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{Bdv}{Adu}$; точкой обозначена производная по s.

Обозначим через k_{g_1} и k_{g_2} геодезические кривизны координатных линий $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ соответственно. Имеем

$$k_{g_1} = -\frac{A_v}{AB}, \quad k_{g_2} = \frac{B_u}{AB}, \tag{19}$$

а формулу (18) можно записать так:

$$k_g = \dot{\alpha} + k_{g_1}\cos\alpha + k_{g_2}\sin\alpha. \tag{18a}$$

5.19. Линия на поверхности называется *геодезической*, если $k_g = 0$ во всех ее точках. В условиях предыдущего пункта геодезические линии определяются системой дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = \frac{\cos\alpha}{A}, \quad \dot{v} = \frac{\sin\alpha}{B}, \quad \dot{\alpha} = \frac{A_v\cos\alpha - B_u\sin\alpha}{AB}. \tag{20}$$

На поверхности класса C^2 через каждую точку в каждом направлении проходит одна геодезическая линия.

Обратим внимание на то, что первые два из равенств (20) соблюдаются на любой гладкой кривой, если $ds^2 = A^2\,du^2 + B^2\,dv^2$.

5.20. Координаты (u, v) называются *полугеодезическими*, если сеть (u, v) ортогональна, одно из семейств, например, $v = \text{const}$, состоит из геодезических линий, а параметр u является натуральным на какой-либо из линий $v = \text{const}$. В полугеодезических координатах

$$ds^2 = du^2 + B^2(u, v)\,dv^2 \tag{21}$$

(т. е. $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$).

Частным случаем являются так называемые *полярно-геодезические координаты* (ρ, φ). Линии $\varphi = \text{const}$ — геодезические, исходящие из некоторой точки O; φ — угол, который эти линии образуют в точке O с выбранным направлением. Каждая из линий $\rho = \text{const} > 0$ — замкнутая; она представляет собой геометрическое место точек поверхности S, удаленных (по поверхности) на расстояние ρ от точки O и называется *геодезической окружностью* с центром O и радиусом ρ. В полярно-геодезических координатах

$$ds^2 = d\rho^2 + B^2(\rho, \varphi)\, d\varphi^2, \tag{21a}$$

где $B(\rho, \varphi + 2\pi) = B(\rho, \varphi)$, причем $B(\rho, \varphi) \to 0$, $B_\rho(\rho, \varphi) \to 1$ равномерно по φ, если $\rho \to +0$.

Область поверхности, содержащая точку O и ограниченная геодезической окружностью $\rho = \text{const}$, называется *геодезическим кругом* радиуса ρ.

5.21. Пусть на поверхности S дана линия $\mathscr{L}$ с указанным на ней направлением, состоящая из дуг регулярности C^2, разделенных угловыми точками. Будем считать, что угловые точки занумерованы, и что α_i — угол поворота вектора $\boldsymbol{\tau}$ в точке с номером i. Величина

$$\Pi(\mathscr{L}) = \int\limits_{\mathscr{L}} k_g ds + \sum_i \alpha_i \tag{22}$$

называется *поворотом линии* $\mathscr{L}$ на поверхности S.

Случай, когда угловые точки отсутствуют ($\alpha_i = 0$), не исключается.

Пусть $\mathscr{L}$ замкнута, не имеет самопересечений и ограничивает область $\mathscr{D}$ на S, причем направление обхода $\mathscr{L}$ таково, что вектор $[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\tau}]$ направлен внутрь области $\mathscr{D}$. Тогда имеет место *формула Гаусса — Бонне*:

$$\Pi(\mathscr{L}) = 2\pi - \iint\limits_{\mathscr{D}} K d\sigma, \tag{23}$$

где $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$.

5.22. Теорема Гаусса. *Изометричные поверхности имеют равные гауссовы кривизны в точках, соответствующих по изометрии.*

Следствие. *Гауссова кривизна инвариантна относительно изгибания поверхности.*

На поверхности класса C^3 гауссова кривизна выражается через коэффициенты первой квадратичной формы и их частные производные первого и второго порядков. Если при этом $F = 0$, $E = A^2$, $G = B^2$, то формула Гаусса, выражающая K через ds^2, имеет вид

$$K = -\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{A_v}{B}\right)_v + \left(\frac{B_u}{A}\right)_u\right]. \tag{24}$$

В случае, когда $F \neq 0$, читатель может найти формулу Гаусса (а также формулу для k_g) в учебниках [1], [7], [8].

5.23. Пусть на плоскости в каких-либо координатах (u, v) задана первая квадратичная форма (4) при условиях, что $E > 0$, $EG - F^2 > 0$, но безотносительно к какой-либо поверхности. Тогда, наряду с евклидовой геометрией, на плоскости определится другая геометрия (вообще говоря, неевклидова), в которой длины линий определяются как интегралы от ds, углы выражаются формулой (6), площади — формулой вида (7). В этой новой геометрии кривизну линий заменяет геодезическая кривизна k_g, «прямейшими» являются геодезические линии. Если $F = 0$, то k_g выражается формулами (18), (19), а геодезические линии определяются уравнениями (20). Говорят коротко, что на плоскости (u, v) введена метрика ds^2 по формуле (4).

Формула Гаусса — Бонне остается справедливой, входящая в нее величина K выражается равенством (24) (при условии, что $F = 0$) и называется *гауссовой кривизной метрики* ds^2. Она не связана с главными кривизнами (их здесь нет) и имеет другой геометрический смысл. Именно, пусть T — какой-либо криволинейный треугольник, стороны которого являются геодезическими линиями; пусть $\sigma(T)$ — его площадь, α, β, γ — внутренние углы. Величина $\omega(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ называется *избытком треугольника* T. Из формулы (23) следует, что гауссова кривизна $K(X)$ в произвольной точке X может быть выражена так:

$$K(X) = \lim_{T \to X} \frac{\omega(T)}{\sigma(T)}. \tag{25}$$

Равенство (25) принимают за определение кривизны K метрики ds^2.

Разумеется, формула (25) справедлива и для поверхности, лежащей в пространстве. Теорема Гаусса означает, что в случае поверхности предел (25) равен произведению главных кривизн $k_1 k_2$ в точке X, а интеграл от модуля величины, определяемой формулой (25), дает площадь сферического образа (см. выше, п. **5.13**).

5.24. Понятие изометрии (см. выше, п. **5.9**) легко переносится на случай, когда рассматривается область на плоскости с метрикой ds^2 и поверхность в пространстве, или же две области на плоскостях с заданными метриками.

5.25. Ниже в некоторых задачах не указаны классы регулярности рассматриваемых поверхностей, линий, функций и т. п. Решая эти задачи, нужно анализировать, какие условия регулярности приходится использовать в ходе решения.

§ 6. Поверхности вида $z = f(x, y)$. Формула Эйлера

31. Найти орт нормали в произвольной точке параболоида $z = -(x^2 + y^2)$ и сферический образ этого параболоида. Построить на гауссовой сфере образы линий пересечения параболоида с плоскостями $y = Ax$ и цилиндрами $x^2 + y^2 = a^2$.

32. Найти орт нормали в произвольной точке поверхности $z = e^y \sin x$ и сферический образ этой поверхности. Построить на гауссовой сфере образы линий пересечения поверхности $z = e^y \sin x$ с плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$.

33*. Найти нормальную кривизну параболоида $z = x^2 + xy + y^2$ в точке $(0, 0, 0)$ в направлении, образующем угол φ с осью x. Найти главные направления в этой точке.

34. Составить уравнения соприкасающихся параболоидов к данным поверхностям в данных точках:

а) к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке $(0, 0, c)$;

б) к гиперболоиду $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в точке $(0, 1, 0)$;

в) к поверхности $z = 3xy^2 - x^3$ в точке $(0, 0, 0)$.

35. Пусть в некоторой точке поверхности класса C^2 даны кривизны $k_{(1)}, \ldots, k_{(m)}$ таких нормальных сечений, которые образуют между собой углы, равные $\frac{2\pi}{m}$. Доказать, что $\frac{1}{m}[k_{(1)} + \ldots + k_{(m)}] = H$.

36. Доказать, что для поверхности S класса C^2 соприкасающаяся сфера существует в тех и только в тех точках, где $K = H^2 > 0$ (*шаровые точки*).

Примечание. Пусть A — зафиксированная точка, X — текущая точка поверхности S и пусть $\widetilde{S}$ — сфера с центром O. Говорят, что $\widetilde{S}$ является соприкасающейся сферой поверхности S в точке A, если расстояние от точки X до сферы $\widetilde{S}$, измеренное в направлении луча OX, представляет собой при $X \to A$ бесконечно малую более высокого порядка, чем квадрат расстояния AX.

37*. На поверхности S положительной гауссовой кривизны в произвольной точке A проведена касательная плоскость. На расстоянии h от нее проведена параллельная ей секущая плоскость, которая (вместе с частью поверхности S, содержащей точку A) ограничивает тело («горбушку») объемом V. Доказать, что в точке A гауссова кривизна $K = \lim\limits_{h \to +0} \left(\frac{\pi h^2}{V}\right)^2$.

38*. Пусть в условиях предыдущей задачи σ — площадь части поверхности S («шапочки»), ограниченной секущей плоскостью и содержащей точку A. Доказать, что в точке A гауссова кривизна $K = \lim\limits_{h \to +0} \left(\frac{2\pi h}{\sigma}\right)^2$.

39. Пусть $K \leqslant 0$ в некоторой точке поверхности. Выразить через H и K угол ω между асимптотическими направлениями в этой точке.

40. Для того чтобы в данной точке поверхности существовали асимптотические направления, образующие между собой прямой угол, необходимо и достаточно, чтобы $H = 0$ в этой точке. Доказать.

41. Определить типы точек на следующих поверхностях:

а) $z = \sin x \sin y$; б) $z = x^2 + xy + y^2$;

в) $z = e^y \sin x$; г) $z = ax + by + c$;

д) $z = Ax + \ln y$; (a, b, c, A — постоянные, не равные нулю).

42. Найти сеть асимптотических линий поверхности $z = e^y \sin x$.

43. Найти сеть асимптотических линий поверхности $z = xy^2$. Определить типы точек на этой поверхности.

§ 7. Параметрическое задание поверхностей. Касательная плоскость и нормаль

44. Выяснить, какие поверхности задаются указанными ниже уравнениями и правильна ли на них сеть линий:

а) $\boldsymbol{R}(u, v) = \{a \cos u \cos v,\ b \sin u \cos v,\ c \sin v\}$;

б) $\boldsymbol{R}(u, v) = \{(a + b \cos v) \cos u,\ (a + b \cos v) \sin u,\ b \sin v\}$;

в) $\boldsymbol{R}(u, v) = \left\{\frac{1}{c}\sqrt{u^2 + c^2} \cos v,\ \frac{1}{c}\sqrt{u^2 + c^2} \sin v,\ u\right\}$

($a > b > c > 0$). Найти образы этих поверхностей на гауссовой сфере.

Ниже, в задачах 45—54 нужно составить параметрические уравнения поверхностей в виде $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(u, v)$. Следует иметь в виду, что это можно сделать бесконечным множеством способов, так что ответы представляют собой лишь один из возможных вариантов.

45. Даны: кривая $\mathscr{L}$ с уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$, вектор $\boldsymbol{a}$ и точка O с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0$, причем $\boldsymbol{r}(u) \neq \boldsymbol{r}_0$, $[\boldsymbol{r}(u) \times \boldsymbol{a}] \neq \boldsymbol{o}$.

а) Составить уравнение цилиндрической поверхности S_1 с направляющей $\mathscr{L}$ и образующими, параллельными $\boldsymbol{a}$.

б) Найти образ поверхности S_1 на гауссовой сфере.

в) Составить уравнение конической поверхности S_2 с вершиной O и направляющей $\mathscr{L}$.

г) Найти касательную плоскость к S_2 в произвольной точке направляющей, считая, что $[\boldsymbol{r}_u(u) \times (\boldsymbol{r}(u) - \boldsymbol{r}_0)] \neq \boldsymbol{o}$ в этой точке.

46. На плоскости (x, z) дана кривая $x = f(u)$, $z = g(u)$. Эта кривая вращается вокруг оси z.

а) Составить уравнение поверхности вращения.

б) Доказать, что любая нормаль этой поверхности лежит в плоскости, проходящей через ось вращения.

в) В частном случае $x = 2 + \sin u$, $z = u$ построить образ поверхности вращения на гауссовой сфере.

Примечание. Линии пересечения поверхности вращения с плоскостями, проходящими через ось вращения, называются *меридианами*, а линии пересечения этой поверхности с плоскостями, ортогональными оси вращения, называются *параллелями*.

47. Дана плоскость P, на ней прямая AB и отрезок l, середина которого удалена от AB более, чем на половину его длины. Отрезок l равномерно вращается в плоскости P вокруг своей середины. В то же время плоскость P вращается вокруг прямой AB с вдвое большей угловой скоростью. Составить уравнение поверхности, описываемой в пространстве отрезком l, и доказать, что эта поверхность односторонняя.

Примечание. Поверхность называется *односторонней* или *неориентируемой*, если на ней есть замкнутый путь, при обходе которого вектор $\boldsymbol{n}$, изменяющийся непрерывно, переходит в вектор $(-\boldsymbol{n})$.

48. На поверхности S_0 дана эллиптическая, но не шаровая точка O. Обозначим через S геометрическое место соприкасающихся окружностей нормальных сечений поверхности S_0 в точке O. Составить уравнение поверхности S и найти на ней линию самопересечения.

49. В плоскости P дана прямая AB и линия $\mathscr{L}$. Линия равномерно перемещается в плоскости P так, что каждая ее точка движется параллельно AB. В то же время плоскость P равномерно вращается вокруг AB. Поверхность S, описываемая линией $\mathscr{L}$, называется *винтовой поверхностью*. Составить ее уравнение.

50. *Прямым геликоидом* называется винтовая поверхность (см. задачу **49**) в частном случае, когда $\mathscr{L}$ — прямая, ортогональная AB.

а) Составить уравнение прямого геликоида.

б) Найти касательную плоскость в произвольной точке прямого геликоида.

51. Пусть $\mathscr{L}$ — кривая с отличной от нуля кривизной k. Через каждую ее точку проведена нормальная плоскость и в этой плоскости построена окружность с центром на линии $\mathscr{L}$ и заданным радиусом a, причем $a > 0$, $ak < 1$. Геометрическое место таких окружностей образует в пространстве *трубообразную* поверхность S.

а) Составить уравнение поверхности S.

б) Доказать, что любая нормаль поверхности S пересекает линию $\mathscr{L}$ и является нормалью этой линии.

в) Для каждой точки A^* на сферической индикатрисе касательных линии $\mathscr{L}$ построим большую окружность гауссовой сферы, плоскость которой ортогональна радиусу OA^*. Докажите, что геометрическое место всех таких окружностей представляет собой сферический образ поверхности S.

52. Пусть в пространстве даны две кривые, $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$, с уравнениями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u)$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(v)$ соответственно. Предположим, что $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ пересекаются: $\boldsymbol{r}_1(u_0) = \boldsymbol{r}_2(v_0) = \boldsymbol{r}_0$, и удовлетворяют условию: $|\boldsymbol{r}_1'(u) \times \boldsymbol{r}_2'(v)| \neq 0$.

а) Пусть кривая $\mathscr{L}_1$ поступательно перемещается так, что ее точка $u = u_0$ скользит по $\mathscr{L}_2$. Тогда $\mathscr{L}_1$ описывает в пространстве поверхность S, называемую *поверхностью переноса*. Составить уравнение поверхности S.

б) В условиях пункта а) поменять ролями $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$.

в) Пусть кривые $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ неподвижно зафиксированы в своем первоначальном положении. Найти геометрическое место середин отрезков, у которых один конец находится на $\mathscr{L}_1$, а другой — на $\mathscr{L}_2$.

53. Пусть даны: неподвижная цилиндрическая поверхность S_0 с направляющей $\mathscr{L}_0$; подвижная плоскость P с выбранной на ней декартовой прямоугольной системой координат (ξ, η); линия $\mathscr{L}$ на плоскости P, определяемая уравнениями $\xi = f(v)$, $\eta = g(v)$. Пусть плоскость P движется так, что точка $\xi = \eta = 0$ скользит по $\mathscr{L}_0$; ось ξ совпадает с образующей S_0; ось η направлена по нормали к S_0. Составить уравнение поверхности S, которую описывает в пространстве линия $\mathscr{L}$.

54. В условиях предыдущей задачи считать, что S_0 — коническая поверхность с направляющей $\mathscr{L}_0$ и некоторой вершиной O. Составить уравнение поверхности S, получаемой в результате движения линии $\mathscr{L}$.

Примечание. Поверхности, построение которых описано в задачах 53—54, объединяются под названием *резных поверхностей*.

55*. Найти поверхность S, зная, что все ее нормали пересекаются в одной точке O.

§ 8. Первая квадратичная форма поверхности

56. Дана сфера

$$R(\varphi, \theta) = R_0\{\cos\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\cos\theta,\ \sin\theta\}, \qquad R_0 > 0.$$

а) Найти ее первую квадратичную форму.

б) Найти на сфере линии, пересекающие меридианы под данным углом α.

Примечание. Такие линии на сфере называются *локсодромиями*. Штурманы кораблей и самолетов часто прокладывают курс по локсодромии. Хотя такой путь и не является кратчайшим, но по нему удобно двигаться, выдерживая направление с помощью компаса.

57. Найти первую квадратичную форму поверхности вращения $\boldsymbol{R}(u, \varphi) = \{\rho(u)\cos\varphi,\ \rho(u)\sin\varphi,\ z(u)\}$. Проверить, что ее меридианы ($\varphi = \text{const}$) и параллели ($u = \text{const}$) образуют ортогональную сеть. Найти линии, которые делят пополам углы между меридианами и параллямями.

58*. Дана поверхность $\boldsymbol{R} = \{\rho(u)\cos v,\ \rho(u)\sin v,\ z(u)\}$, где $\rho'(u)^2 + z'(u)^2 = 1$, $u_1 < u < u_2$, $0 < v < v_0$, $v_0 < 2\pi$. Доказать, что эту поверхность можно путем изгибания поместить внутри цилиндра $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ сколь угодно малого положительного радиуса ε. При изгибании допускается самоналожение поверхности.

59*. Поверхность S образована касательными к данной кривой $\mathscr{L}$ с положительной кривизной $k(u)$. Кривая $\mathscr{L}$ изгибается с сохранением своей кривизны $k(u)$. Доказать, что при этом происходит изгибание поверхности S.

60. Сеть линий на поверхности называется *сетью Чебышёва*, если у каждого сетевого четырехугольника равны длины противоположных сторон. Доказать, что на поверхности переноса $\boldsymbol{R}(u, v) = \boldsymbol{r}_1(u) + \boldsymbol{r}_2(v)$ координатные линии образуют сеть Чебышёва. Считать, что $|\boldsymbol{r}_1'(u) \times \boldsymbol{r}_2'(v)| \neq 0$.

61. Дан геликоид $\boldsymbol{R} = \{u \sin v,\ u \cos v,\ v\}$. Найти:

а) первую квадратичную форму;

б) площадь криволинейного треугольника $0 \leqslant u \leqslant \operatorname{sh} v$, $0 \leqslant v \leqslant v_0$;

в) длины сторон этого треугольника;

г) углы этого треугольника.

62. Найти поверхность вращения, локально-изометричную геликоиду $\boldsymbol{R} = \{u \sin v,\ u \cos v,\ v\}$.

63. Пусть $\mathscr{L}$ — кривая с уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$, кривизной $k(u)$, кручением $\varkappa(u)$; u — натуральный параметр на $\mathscr{L}$. Пусть S — трубообразная поверхность

$$\boldsymbol{R}(u, \varphi) = \boldsymbol{r}(u) + a\boldsymbol{\nu}(u) \cos \varphi + a\boldsymbol{\beta}(u) \sin \varphi,$$

где $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ — орты главной нормали и бинормали линии $\mathscr{L}$, $a = \text{const} > 0$, $ak(u) < 1$. Считается, что координатам (u, φ) и $(u, \varphi + 2\pi)$ соответствует одна и та же точка на S.

а) Найти первую квадратичную форму поверхности S.

б) Найти линии на S, ортогональные окружностям $u = \text{const}$.

в) Вычислить площадь области на S, ограниченной окружностями $u = u_1$, $u = u_2$.

г) Доказать, что если кривая $\mathscr{L}$ изгибается с сохранением кривизны $k(u)$, то поверхность S деформируется с сохранением площадей фигур (т. е. каждая область на S переходит в область равной площади на поверхности, полученной в результате деформации).

д) Используя результат пункта в), найти площадь тора, получаемого вращением окружности $(x - A)^2 + z^2 = a^2$, $A > a > 0$, вокруг оси z.

е) Найти площадь поверхности S в частном случае, когда $\mathscr{L}$ — дуга винтовой линии $x = A \cos t$, $y = A \sin t$, $z = Bt$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, $A > a$, $B \neq 0$.

§ 9. Вторая квадратичная форма поверхности. Теорема Родрига

64. Дана поверхность вращения

$$\boldsymbol{R}(u, \varphi) = \{x(u),\ \rho(u) \cos \varphi,\ \rho(u) \sin \varphi\}, \qquad \rho(u) > 0.$$

а) Найти вторую квадратичную форму.

б) Найти K в произвольной точке поверхности. Выяснить зависимость знака K от направления выпуклости меридиана.

в) Вычислить K в частном случае $\rho(u)=u$,

$$x(u)=\pm\left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}-\sqrt{a^2-u^2}\right),\quad a>0$$

(*псевдосфера*).

г) Найти среднюю кривизну H в произвольной точке поверхности вращения.

д) В частном случае $x=u$ выбрать функцию $\rho=\rho(x)$ так, чтобы $H=0$ на всей поверхности.

65. Доказать, что линии кривизны и только они обладают следующим свойством: касательная в произвольной точке линии параллельна касательной в соответствующей точке сферического образа рассматриваемой линии.

Примечание. Возможен особый случай, когда касательная к сферическому образу линии не определена. Этот случай рассмотреть отдельно.

66*. Пусть плоскость P пересекает поверхность S по линии $\mathscr{L}$ так, что во всех точках $\mathscr{L}$ касательные плоскости к поверхности образуют одинаковые двугранные углы с плоскостью P. Доказать, что $\mathscr{L}$ — линия кривизны на S.

67. Найти линии кривизны произвольной поверхности вращения. Придумать разные способы решения этой задачи.

68. Найти линии кривизны резной поверхности

$$\boldsymbol{R}(u,v)=\boldsymbol{r}(u)+f(v)\boldsymbol{a}+g(v)[\boldsymbol{\tau}(u)\times\boldsymbol{a}],$$

где $\boldsymbol{\tau}(u)=\boldsymbol{r}'(u)$, $|\boldsymbol{\tau}(u)|=1$, $(\boldsymbol{\tau}(u),\boldsymbol{a})=0$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор.

69. Доказать, что асимптотические линии и только они обладают следующим свойством: касательная в произвольной точке линии ортогональна касательной в соответствующей точке сферического образа рассматриваемой линии (короче: асимптотическая линия ортогональна своему сферическому образу).

Примечание. Возможен особый случай, когда касательная к сферическому образу линии не определена. Этот случай из рассмотрения исключить.

70. На геликоиде $\boldsymbol{R}(u,v)=\{u\cos v,\ u\sin v,\ av\}$, $a\neq 0$, найти: а) сеть асимптотических линий; б) сеть линий кривизны; в) среднюю кривизну в произвольной точке.

71*. Пусть $\mathscr{D}$ — ограниченная область на ориентируемой поверхности S класса C^2, $\sigma(\mathscr{D})$ — площадь области $\mathscr{D}$. Предположим, что поверхность S деформируется так, что каждая ее точка смещается на расстояние ε в направлении вектора $\boldsymbol{n}$. При этом область $\mathscr{D}$ переходит в некоторую область $\mathscr{D}_\varepsilon$ на новой поверхности. Доказать, что площадь $\sigma(\mathscr{D}_\varepsilon)$ области $\mathscr{D}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ можно представить так:

$$\sigma(\mathscr{D}_\varepsilon) = \sigma(\mathscr{D}) - 2\varepsilon \iint\limits_{\mathscr{D}} H\, d\sigma + o(\varepsilon),$$

где H — средняя кривизна поверхности S, $d\sigma$ — элемент площади на S.

72. Доказать, что омбилические точки характеризуются соотношениями $L : E = M : F = N : G$.

73. Дана поверхность вида $z = z(x, y)$. Записав радиус-вектор текущей точки в форме $R = \{x, y, z(x, y)\}$, составить выражения первой и второй квадратичных форм, гауссовой и средней кривизны.

74*. На эллиптическом параболоиде $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$, $p > q > 0$, найти: а) шаровые точки; б) сеть линий кривизны.

§ 10. Нормальная и геодезическая кривизна линий. Теорема Менье

75. Пусть A — произвольная точка линии $\mathscr{L}$ на поверхности S. Доказать, что

а) нормальная кривизна $\mathscr{L}$ в точке A по абсолютной величине равна кривизне в этой точке проекции линии $\mathscr{L}$ на плоскость нормального сечения, проходящего через точку A и касательную к $\mathscr{L}$;

б) геодезическая кривизна $\mathscr{L}$ в точке A по абсолютной величине равна кривизне в этой точке проекции линии $\mathscr{L}$ на касательную плоскость к S, проведенную в точке A.

76. Пусть A — некоторая точка линии $\mathscr{L}$ на поверхности S; P_1 — касательная плоскость к S в точке A; P_2 — плоскость, проходящая через точку A, нормаль к S и касательную к $\mathscr{L}$. Пусть для точки A известны центры кривизны C_1 и C_2 проекций линии $\mathscr{L}$ на плоскости P_1 и P_2. Как геометрически построить центр кривизны линии $\mathscr{L}$ в точке A?

77. Используя результат задачи 76, найти соприкасающуюся окружность *кривой Вивиани* $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ в точке $(0, 0, 2R)$.

78. Эллипс с полуосями a и b, $a > b > 0$, рассматривается как сечение круглого цилиндра радиуса b. Используя теорему Менье и формулу Эйлера, найти кривизну эллипса в его вершинах.

79. Пусть A — точка на кривой $\mathscr{L}$ класса C^3, k — кривизна, $\varkappa$ — кручение $\mathscr{L}$ в точке A, $k \neq 0$. Пусть $\mathscr{L}^*$ — сферическая индикатриса касательных линии $\mathscr{L}$, A^* — точка на $\mathscr{L}^*$. соответствующая A. Через точку A^* и касательную к $\mathscr{L}^*$ проведена плоскость большого круга и соприкасающаяся плоскость линии $\mathscr{L}^*$. Выразить через k и $\varkappa$ двугранный угол α между этими плоскостями.

80. Пусть $k \neq 0$ на линии $\mathscr{L}$ и пусть поверхность S образована главными нормалями линии $\mathscr{L}$. Доказать, что $\mathscr{L}$ — асимптотическая линия на S.

81. Пусть $k \neq 0$ на линии $\mathscr{L}$ и пусть поверхность S образована бинормалями линии $\mathscr{L}$. Доказать, что $\mathscr{L}$ — геодезическая линия на S.

82. Что можно сказать о линии $\mathscr{L}$, если на поверхности S она является и асимптотической и геодезической?

83*. Пусть $\mathscr{L}$ — асимптотическая линия на поверхности S, k — кривизна, $\varkappa$ — кручение линии $\mathscr{L}$ в точке A, K — гауссова кривизна поверхности S в той же точке, $k \neq 0$.

а) Доказать, что касательная плоскость к поверхности S в точке A является соприкасающейся плоскостью линии $\mathscr{L}$.

б) Доказать, что $\varkappa^2 + K = 0$ (*формула Бельтрами — Эннепера*).

84. Поверхности S_1 и S_2 касаются друг друга по линии $\mathscr{L}$, которая является геодезической на S_1. Доказать, что $\mathscr{L}$ является геодезической и на S_2.

85*. Для того чтобы кривая класса C^2 была линией откоса, необходимо и достаточно, чтобы она была геодезической линией цилиндрической поверхности. Доказать.

86. Доказать, что на поверхности вращения вдоль каждой геодезической линии остается постоянным произведение радиуса параллели на синус угла между этой геодезической и меридианом (*теорема Клеро*), и что дифференциальные уравнения геодезических линий произвольной поверхности вращения интегрируются в квадратурах.

87. Двумя способами найти геодезическую кривизну параллелей $x = \text{const}$ на поверхности вращения

$$\boldsymbol{R}(x, \varphi) = \{x,\ \rho(x)\cos\varphi,\ \rho(x)\sin\varphi\}$$

а) с помощью теоремы Менье;

б) с помощью формулы, выражающей k_g через ds^2.

88. Найти геодезическую кривизну локсодромии на сфере, пересекающей меридианы сферы под данным углом α (см. задачу **56б**).

89. Найти геодезическую кривизну винтовой линии

$$\boldsymbol{r} = \{a\cos v,\ a\sin v,\ bv\}$$

а) на геликоиде $\boldsymbol{R}(u, v) = \{u\cos v,\ u\sin v,\ bv\}$;
б) на цилиндре $\boldsymbol{R}(u, v) = \{a\cos v,\ a\sin v,\ u\}$.

§ 11. Внутренняя геометрия. Теорема Гаусса

90. Поверхность S получена в результате некоторого изгибания части эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, определяемой неравенствами $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Найти площадь σ^* сферического образа поверхности S.

91. Известно, что поверхность $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(u, v)$, $u_1 < u < u_2$, $v_1 < v < v_2$, имеет первую квадратичную форму $ds^2 = du^2 + B^2(u, v)\,dv^2$. Найти площадь σ^* сферического образа этой поверхности.

92. Пусть $\mathscr{L}$ — замкнутая геодезическая линия без самопересечений на замкнутой выпуклой поверхности S. Доказать, что сферический образ линии $\mathscr{L}$ делит гауссову сферу на две равновеликие области.

Примечание. Считать известным, что любая гладкая замкнутая выпуклая поверхность отображается на гауссову сферу взаимно однозначно.

93. Дан геликоид $\boldsymbol{R}(u, v) = \{u\cos v,\ u\sin v, v\}$. а) Вычислить K, пользуясь формулой Гаусса (выражающей K через ds^2). б) Найти геодезическую кривизну k_g и поворот П дуги $u = \operatorname{sh} v$, $0 \leqslant v \leqslant v_0$. в) Найти поворот этой же дуги, применяя формулу Гаусса — Бонне к криволинейному треугольнику $0 \leqslant u \leqslant \operatorname{sh} v$, $0 \leqslant v \leqslant v_0$, и пользуясь результатом задачи **62г**.

94. Пусть на сфере радиуса R_0 дан треугольник T, площадь которого σ, а стороны являются дугами больших окружностей Найти сумму внутренних углов треугольника T.

95. Пусть T — треугольник, стороны которого — геодезические линии, построенный на поверхности с постоянной гауссовой кривизной $K = -a^2 < 0$. Зная площадь σ треугольника T, найти сумму его внутренних углов.

96*. Пусть П (ρ) — поворот геодезической окружности с центром O и радиусом ρ, $s(\rho)$ — длина этой окружности,

$\sigma(\rho)$ — площадь геодезического круга с тем же центром и радиусом. Доказать, что гауссова кривизна $K(O)$ в точке O может быть выражена так:

$$\text{а)}\ K(O) = \lim_{\rho\to+0} \frac{2\pi - \Pi(\rho)}{\pi\rho^2}; \quad \text{б)}\ K(O) = 3\lim_{\rho\to+0} \frac{2\pi\rho - s(\rho)}{\pi\rho^3};$$

$$\text{в)}\ K(O) = 12\lim_{\rho\to+0} \frac{\pi\rho^2 - \sigma(\rho)}{\pi\rho^4}.$$

Примечание Эти формулы справедливы и для поверхности, и для абстрактно заданной метрики ds^2.

97. Пусть на неевклидовой плоскости $ds^2 = d\rho^2 + \operatorname{sh}^2\rho\, d\varphi^2$ в полярно-геодезических координатах (ρ, φ). Найти длину $s(\rho)$, геодезическую кривизну $k_g(\rho)$ и поворот $\Pi(\rho)$ геодезической окружности $\rho = \text{const}$. Вычислить $\lim\limits_{\rho\to+\infty} k_g(\rho)$, $\lim\limits_{\rho\to+\infty} \Pi(\rho)$. Сравнить полученные результаты с аналогичными величинами на евклидовой плоскости.

98*. Пусть дана плоскость P_1 с метрикой $ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 u\, dv^2$, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, и плоскость P_2, на которой $ds^2 = d\rho^2 + \operatorname{sh}^2\rho\, d\varphi^2$ в полярно-геодезических координатах (ρ, φ). Доказать, что плоскости P_1 и P_2 (с заданными на них первыми квадратичными формами) изометричны.

99. На полуплоскости $v > 0$ с метрикой $ds^2 = \dfrac{du^2 + dv^2}{v^2}$ (*полуплоскость Пуанкаре*) найти: а) геодезические линии; б) гауссову кривизну.

100. Пусть $f(u) > 0$, $g(v) > 0$ — произвольные функции класса C^1; a — произвольная постоянная. Доказать, что линии уровня функций

$$z(u, v) = \int \frac{du}{\sqrt{f(u) - a}} \pm \int \frac{dv}{\sqrt{g(v) + a}}$$

являются геодезическими линиями в метрике

$$ds^2 = [f(u) + g(v)](du^2 + dv^2).$$

Примечание. Пусть плоскость, на которой введены декартовы прямоугольные координаты (u, v), заполнена прозрачным веществом с переменным показателем преломления $\Phi(u, v)$. Если в некоторой точке (u_0, v_0) находится источник света, то световые лучи от него распространяются в плоскости (u, v) не по прямым, а по линиям, геодезическим в метрике $ds^2 = \Phi^2(u, v)(du^2 + dv^2)$. Это свойство позволяет дать физическую интерпретацию задачам **99**а и **100**.

ГЛАВА III

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

101. Доказать, что для вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ класса C^{n+1} справедлива формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\boldsymbol{r}^{(k)}(a)(t-a)^k+\frac{1}{n!}\int_a^t \boldsymbol{r}^{(n+1)}(\xi)(t-\xi)^n\,d\xi.$$

102*. Силовое поле называется *центральным*, если линии действия всех сил проходят через одну точку пространства (*центр поля*).

а) Доказать, что траектория материальной точки, движущейся под действием центрального силового поля, является плоской линией и ее плоскость проходит через центр поля.

б) В полярных координатах составить дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием центрального силового поля.

в) Пусть силовое поле центрально, а величина силы обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра. Доказать, что траектория материальной точки, движущейся под действием такого поля, либо прямолинейна, либо является кривой второго порядка, один из фокусов которой находится в центре поля.

103. Для того чтобы линия $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ класса C^3 была плоской, необходимо, чтобы $(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')=0$ во всех ее точках. Докажите это. Является ли указанное условие достаточным? Рассмотрите пример линии $\mathscr{L}$, заданной уравнением

$$\boldsymbol{r}=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\},$$

где

$$x=\begin{cases} e^{1/t}, & \text{если } t<0, \\ 0, & \text{если } t\geqslant 0, \end{cases} \quad y=t, \quad z=\begin{cases} 0, & \text{если } t\leqslant 0, \\ e^{-1/t}, & \text{если } t>0. \end{cases}$$

Найдите точки распрямления линии $\mathscr{L}$. Какому классу регулярности принадлежит эта линия?

104. Найти общий вид кривых с данной сферической индикатрисой касательных $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(t)$, $|\boldsymbol{\tau}(t)|=1$.

105. Дана кривая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $t_1<t<t_2$, класса C^2, имеющая конечную длину и ограниченную кривизну. Доказать, что при $t\to t_1+0$ и при $t\to t_2-0$ существуют пределы вектор-функций $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{\tau}(t)$.

106. Пусть P — нормальная плоскость, O — центр кривизны кривой $\mathscr{L}$ в точке A ($\mathscr{L}\in C^2$, $k\neq 0$ в точке A). Пусть BN — главная нормаль линии $\mathscr{L}$ в точке B. Если существует точка пересечения BN и P, то обозначим ее через C. Доказать, что $\lim\limits_{B\to A} C=O$.

107. На кривой $\boldsymbol{r}=\{t^2\sqrt{3/2},\ 2-t,\ t^3\}$ найти сопровождающий трехгранник и соприкасающуюся окружность при $t=0$.

108. Вычислить кривизну и кручение линий:

а) $\boldsymbol{r}=\{t^2\sqrt{3/2},\ 2-t,\ t^3\}$;

б) $\boldsymbol{r}=\{3t-t^3,\ 3t^2,\ 3t+t^3\}$.

Доказать, что они являются линиями откоса.

109. Составить натуральные уравнения линий
а) $\boldsymbol{r}=e^t\{\sin t,\ \cos t,\ 1\}$;
б) $\boldsymbol{r}=a\{\operatorname{ch} t,\ \operatorname{sh} t,\ t\}$.
Доказать, что они являются линиями откоса.

110*. Найти кривую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $-\pi<t<\pi$, на которой

$$s(t)=\int\limits_0^t \sqrt{2(3+\cos t)}\,dt,$$

$$k(t)=\frac{\sqrt{13+3\cos t}}{2(3+\cos t)^{3/2}}, \quad \varkappa(t)=\frac{3\cos\frac{t}{2}}{13+3\cos t}.$$

111. Доказать, что формулы Френе можно представить в виде

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}=[\boldsymbol{\zeta}\times\boldsymbol{\tau}], \quad \dot{\boldsymbol{\nu}}=[\boldsymbol{\zeta}\times\boldsymbol{\nu}], \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}=[\boldsymbol{\zeta}\times\boldsymbol{\beta}].$$

Найти вектор $\boldsymbol{\zeta}$.

112. Кривая класса C^4 задана натуральными уравнениями $k = k(s) > 0$, $\varkappa = \varkappa(s)$. Найти:

а) кривизну k_1 сферической индикатрисы касательных;

б) кручение $\varkappa_1$ сферической индикатрисы касательных;

в) кривизну k_2 сферической индикатрисы главных нормалей.

113. Кривая класса C^5 задана натуральными уравнениями $k = k(s) > 0$, $\varkappa = \varkappa(s) \neq 0$. Найти:

а) кривизну k^* сферической индикатрисы бинормалей;

б) кручение $\varkappa^*$ сферической индикатрисы бинормалей.

114. Найти общий вид кривых с отличным от нуля кручением и заданной сферической индикатрисой бинормалей $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(t)$, считая, что $|\boldsymbol{\beta}(t)| = 1$, $(\boldsymbol{\beta}(t), \boldsymbol{\beta}'(t), \boldsymbol{\beta}''(t)) > 0$.

115. Пусть $\mathscr{L}$ — замкнутая кривая класса C^3, заданная уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Считая, что $k \neq 0$, вычислить

$$\oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{r}\,dk + \oint_{\mathscr{L}} \varkappa\boldsymbol{\beta}\,ds.$$

116. Кривая $\mathscr{L}$ класса C^3 имеет отличную от нуля кривизну, а все ее соприкасающиеся плоскости параллельны некоторой прямой. Доказать, что кривая $\mathscr{L}$ — плоская.

117*. Пусть кривая $\mathscr{L} \in C^5$, ее кривизна $k \neq 0$, а все ее спрямляющие плоскости проходят через одну точку O. Доказать, что $\varkappa/k = as + b$, где a, b — некоторые постоянные.

118. Линия на поверхности $z = f(x, y)$, образующая с плоскостью (x, y) в каждой своей точке наибольший из углов, какой возможен в этой точке поверхности, называется линией наибольшего ската. Доказать, что касательная к такой линии и нормаль к поверхности лежат в одной плоскости, проходящей через рассматриваемую точку параллельно оси z.

119. Пусть дана функция $f(x, y) \in C^1$, $\nabla f \neq \boldsymbol{o}$ [1]. Доказать, что

а) линии наибольшего ската поверхности $z = f(x, y)$ (см. задачу 118) и линии пересечения этой поверхности плоскостями $z = \text{const}$ образуют ортогональную сеть;

б) проекции указанных линий на плоскость (x, y) тоже образуют ортогональную сеть.

120. Даны параболоиды: эллиптический $z = A(x^2 + y^2)$ и гиперболический $z = 2Axy$, $A \neq 0$.

---

[1] Напомним, что вектор ∇f (градиент функции f) имеет в плоскости (x, y) координаты $\{f_x, f_y\}$.

а) Найти угол между параболами $x = x_0$ и $y = y_0$ на параболоиде $z = A(x^2 + y^2)$.

б) Найти угол между прямолинейными образующими $x = x_0$ и $y = y_0$ на параболоиде $z = 2Axy$.

в) Пусть $\mathscr{D}_1$ — область на эллиптическом, $\mathscr{D}_2$ — область на гиперболическом параболоиде, имеющие общую проекцию $\mathscr{D}_0$ на плоскость (x, y). Доказать, что площади $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_2$ равны.

г) Доказать, что равны площади сферических образов $\mathscr{D}_1^*$ и $\mathscr{D}_2^*$ областей $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_2$.

121. Доказать, что на поверхности $z = f(x, y)$ средняя кривизна $H = \operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + (\nabla f)^2}}$ [1]).

122*. Вычислить $\iint\limits_{\Omega} H(x, y)\, dx\, dy$, где Ω — область $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ на поверхности $z = \sin^2 x \sin^2 y$.

123. Вычислить K и H на поверхностях:

а) $z = e^x \sin y$; б) $z = x^2 + xy + y^2$;

в) $z = f(x) + g(y)$.

124. Доказать, что если поверхность класса C^2 касается плоскости по кривой $\mathscr{L}$ класса C^2, то все точки поверхности, расположенные на $\mathscr{L}$, являются либо точками уплощения, либо параболическими точками.

125. Пусть на поверхности S класса C^2 имеется область $\mathscr{D}$, ограниченная плоской кривой, но не лежащая в плоскости этой кривой. Доказать, что в области $\mathscr{D}$ существует эллиптическая точка.

126. Доказать, что поверхность, все точки которой являются точками уплощения, целиком расположена в некоторой плоскости.

127. Доказать, что если через некоторую точку поверхности проходит прямолинейная образующая, то $K \leqslant 0$ в этой точке.

128. Доказать, что на поверхности отрицательной гауссовой кривизны $K < 0$ линии кривизны в каждой точке делят пополам углы между асимптотическими линиями.

129. Найти асимптотические линии и линии кривизны гиперболического параболоида $z = Axy$.

130*. Найти асимптотические линии поверхности $z = x^3 - 3xy^2$.

131. Дана неподвижная плоскость P и ортогональная ей неподвижная прямая AB. Поверхность S образована дви-

---

[1]) По поводу символа ∇f см. сноску на стр. 38.

жением прямой, которая в каждый момент времени пересекает AB и параллельна плоскости P. Найти общий вид уравнения поверхности S.

132. *Коноидом* называется поверхность, образованная движением прямой, которая остается параллельной фиксированной плоскости P, пересекает неподвижную прямую AB и неподвижную кривую $\mathscr{L}$. Составить уравнение коноида, считая P, $\mathscr{L}$ и AB заданными.

133. *Косым геликоидом* называется винтовая поверхность (см. задачу 49) в том случае, когда линия $\mathscr{L}$ — прямая, образующая с осью AB острый угол α.

а) Составить уравнение косого геликоида.

б) Найти на гауссовой сфере образы его прямолинейных образующих.

134. *Развертывающимся геликоидом* называется поверхность образованная касательными к винтовой линии.

а) Составить уравнение развертывающего геликоида.

б) Найти его образ на гауссовой сфере.

135. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

а) Составить параметрическое уравнение этой сферы, приняв за параметры сферические координаты пространства. Найти первую квадратичную форму и с ее помощью вычислить площадь сферы.

б) Найти вторую квадратичную форму и линии кривизны сферы.

в) Двумя способами вычислить среднюю кривизну сферы: 1) пользуясь определением H; 2) по формуле, выражающей H через коэффициенты первой и второй квадратичных форм.

г) Тремя способами вычислить гауссову кривизну сферы: 1) пользуясь определением K; 2) по формуле, выражающей K через дискриминанты первой и второй квадратичных форм; 3) по формуле, выражающей K через коэффициенты ds^2.

д) На сфере (радиуса a) найти геодезическую кривизну окружности радиуса r $(0 < r < a)$.

е) Найти геодезические линии сферы.

136. Пусть $\mathscr{L}$ — плоская кривая. Прямая AB расположена в плоскости линии $\mathscr{L}$. Пусть длина отрезка касательной к $\mathscr{L}$ от точки касания до пересечения с AB постоянна для всех точек $\mathscr{L}$ и равна $a > 0$. Тогда $\mathscr{L}$ называется *трактрисой*, или *линией погони*, а ее поверхность вращения вокруг AB — *псевдосферой* радиуса a.

а) Составить параметрические уравнения трактрисы, считая, что она расположена в плоскости (x, z), пересекает ось x при $x = a$ и что AB совпадает с осью z. За параметр принять угол между осью z и касательной к $\mathscr{L}$.

б) Составить уравнение псевдосферы, исследовать ее регулярность и найти образы ее меридианов и параллелей на гауссовой сфере.

в) Найти первую квадратичную форму и площадь псевдосферы.

г) Найти вторую квадратичную форму и линии кривизны псевдосферы.

д) Двумя способами вычислить среднюю кривизну псевдосферы: 1) пользуясь определением H и теоремой Менье; 2) по формуле, выражающей H через коэффициенты первой и второй квадратичных форм.

е) Тремя способами вычислить гауссову кривизну псевдосферы: 1) пользуясь определением K и теоремой Менье; 2) по формуле, выражающей K через дискриминанты первой и второй квадратичных форм; 3) по формуле, выражающей K через коэффициенты ds^2.

ж) Найти геодезическую кривизну параллелей псевдосферы.

з) Найти асимптотические линии псевдосферы.

и) Найти геодезическую кривизну асимптотических линий псевдосферы, вычислить поворот П асимптотической линии и поворот П бесконечной дуги асимптотической линии, ограниченной с одной стороны точкой пересечения этой линии с ребром псевдосферы.

к) На псевдосфере перейти к полугеодезическим координатам, приняв за координатную сеть меридианы и параллели. В этих координатах составить уравнение псевдосферы и ее первую квадратичную форму.

л) Найти геодезические линии псевдосферы.

137. Катеноид образован вращением цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ вокруг оси x.

а) Составить уравнение этого катеноида, найти ds^2 и гауссову кривизну.

б) Найти площадь σ области $|x| < a$ на катеноиде и площадь σ^* сферического образа этой области.

в) Найти вторую квадратичную форму и среднюю кривизну катеноида.

г) Найти асимптотические линии катеноида, их геодезическую кривизну и поворот дуги $0 < x < a$ асимптотической линии.

д) Найти образы асимптотических линий катеноида на гауссовой сфере.

е) Найти (в квадратурах) уравнение геодезической линии катеноида, проходящей через точку (x_0, φ_0) под углом α_0 к меридиану.

138. Пусть поверхность S задана в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) уравнением $\rho = \rho(\varphi, z)$, где $\rho > 0$. Пусть $\mathscr{L}$ — линия пересечения поверхности S с плоскостью $z = \text{const}$. Обозначим через α угол между нормалью к $\mathscr{L}$ и лучом $\varphi = \text{const}$, проходящим через рассматриваемую точку линии $\mathscr{L}$ в плоскости $z = \text{const}$. Пусть, далее, k — кривизна линии $\mathscr{L}$, взятая со знаком, причем $k > 0$, если центр кривизны линии $\mathscr{L}$ и точка $\rho = 0$ лежат в плоскости $z = \text{const}$ по одну сторону от касательной к $\mathscr{L}$, $k < 0$ в противном случае. Доказать, что на S

$$K = -\frac{k\rho_{zz}\cos\alpha + \alpha_z^2}{[1 + (\rho_z \cos\alpha)^2]^2}.$$

139. Дано семейство поверхностей вращения, получаемое смещением одной из них вдоль ее оси. Строится новая поверхность вращения, имеющая ту же ось и пересекающая поверхности семейства под прямым углом. Доказать, что гауссова кривизна новой поверхности в каждой ее точке равна по абсолютной величине и противоположна по знаку гауссовой кривизне, которую имеет в этой же точке проходящая через нее поверхность семейства (*теорема Бельтрами*).

140*. Пусть S_0 — поверхность вращения $\boldsymbol{R}(x, \varphi) = \{x, \rho(x)\cos\varphi, \rho(x)\sin\varphi\}$, $\rho(x) > 0$, $\rho''(x) \geqslant 0$. В каждой из плоскостей $x = \text{const}$ производится сжатие к прямой $z = 0$ с положительным коэффициентом $\lambda = \lambda(x) \in C^2$. В результате S_0 переходит в новую поверхность S. Доказать, что если линии пересечения S с плоскостью $y = 0$ обращены выпуклостью в сторону оси x, то $K \leqslant 0$ на S.

141. Пусть $\mathscr{L}$ — линия кривизны поверхности S_0 и пусть поверхность S образована нормалями к S_0, построенными в точках линии $\mathscr{L}$. Найти гауссову кривизну поверхности S.

142. Найти среднюю кривизну круглого конуса, у которого угол между осью и образующей равен α.

143. Дана кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ с натуральным параметром u, кривизной $k = k(u) \neq 0$ и кручением $\varkappa = \varkappa(u) \neq 0$. Пусть $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(u)$ — орт касательной к этой кривой. Для поверхности касательных

$$\boldsymbol{R}(u, v) = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{\tau}(u), \qquad v > 0;$$

а) найти K;

б) найти H;

в) составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение линий кривизны.

144. Найти H на поверхности

$$\boldsymbol{R}(u, v) = \{3u + 3uv^2 - u^3,\ v^3 - 3v - 3u^2v,\ 3(u^2 - v^2)\}$$

(*поверхность Эннепера*).

145*. Пусть S_0 — поверхность постоянной положительной кривизны $K = 1/\rho^2 > 0$, на которой нет шаровых точек. На нормалях к S_0 в обе стороны от S_0 откладываются отрезки длины ρ. Геометрическое место их концов образует две поверхности, S_1 и S_2. Найти H на S_1 и на S_2.

146. Плоская кривая $\mathscr{L}$ задана уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$, где u — натуральный параметр; $k = k(u)$ — ее кривизна, $0 < k < 1/a$; $\boldsymbol{\nu}$ — орт главной нормали к $\mathscr{L}$, $\boldsymbol{e}$ — орт нормали к плоскости линии $\mathscr{L}$. Поверхность S имеет уравнение

$$\boldsymbol{R}(u, \varphi) = \boldsymbol{r}(u) + a\boldsymbol{\nu}(u)\cos\varphi + a\boldsymbol{e}\sin\varphi$$

(*каналовая поверхность*).

а) Найти гауссову кривизну поверхности S.

б) Найти среднюю кривизну поверхности S.

в) Найти линии кривизны поверхности S.

г) Для тех точек поверхности S, через которые проходят ее асимптотические линии, найти углы между асимптотическими линиями и координатными u-линиями.

д) В частном случае, когда $k(u) = 1/b = \text{const}$ (тор), найти (в квадратурах) уравнение геодезической линии, которая проходит через точку $u = u_0$, $\varphi = \pi/2$ под углом α_0 к координатной u-линии (параллели тора).

147*. Найти линии кривизны трубообразной поверхности $\boldsymbol{R}(u, \varphi) = \boldsymbol{r}(u) + a\boldsymbol{\nu}(u)\cos\varphi + a\boldsymbol{\beta}(u)\sin\varphi$; здесь $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ — орты главной нормали и бинормали линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$, имеющей натуральный параметр u, кривизну $k(u) < 1/a$ и кручение $\varkappa(u)$.

148. Найти линии кривизны поверхности

$$\boldsymbol{R}(u, v) = \left\{u\left(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3}\right),\ v\left(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3}\right),\ 2uv\right\}.$$

149. Доказать, что если асимптотическая линия $\mathscr{L}$ на поверхности S является линией кривизны, то нормаль к S постоянна вдоль $\mathscr{L}$, а гауссова кривизна поверхности S в точках линии $\mathscr{L}$ равна нулю.

150. Пусть $\mathscr{L}$ — плоская кривая на поверхности S и пусть во всех точках линии $\mathscr{L}$ нормаль к S ортогональна плоскости этой кривой. Доказать, что $\mathscr{L}$ является линией кривизны на S и что $K = 0$ во всех точках линии $\mathscr{L}$.

151. Пусть $\mathscr{L}$ — линия кривизны поверхности S, причем нормальная кривизна линии $\mathscr{L}$ постоянна: $k_n = a \neq 0$. Доказать, что поверхность S касается по линии $\mathscr{L}$ некоторой сферы радиуса $\rho = 1/|a|$.

152. Доказать, что если геодезическая линия $\mathscr{L}$ является линией кривизны, то $\mathscr{L}$ — плоская линия.

153. Пусть на поверхности S геодезическая линия $\mathscr{L}$ является плоской и ее нормальная кривизна не обращается в нуль. Доказать, что $\mathscr{L}$ — линия кривизны поверхности S.

154. Поверхности S_1 и S_2 пересекаются по линии $\mathscr{L}$, которая является асимптотической на S_1. В каждой точке линии $\mathscr{L}$ касательные плоскости к S_1 и к S_2 ортогональны. Доказать, что $\mathscr{L}$ — геодезическая на S_2.

155. Поверхность S задана уравнением вида $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(u, v) \in C^2$. Проверить, что величина $d\boldsymbol{n}^2 = (d\boldsymbol{n}, d\boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{n}$ — орт нормали к поверхности S, представляет собой квадратичную форму относительно дифференциалов du, dv (так называемая *третья квадратичная форма поверхности* S). Выразить $d\boldsymbol{n}^2$ через первую и вторую квадратичные формы поверхности S.

156. Тор образован вращением окружности $(x - a)^2 + z^2 = b^2$, $a > b > 0$, вокруг оси z. Найти соприкасающиеся параболоиды в следующих точках тора:

а) $(a + b, 0, 0)$; б) $(a, 0, -b)$; в) $(0, a - b, 0)$.

157. Пусть $\mathscr{L}$ — кривая класса C^2, P — ее соприкасающаяся плоскость в точке A, $\mathscr{L}'$ — проекция $\mathscr{L}$ на плоскость P. Доказать, что $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ имеют в точке A одинаковую кривизну.

158. Найти кривизну и соприкасающуюся окружность линии $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = b^2$, $0 < a < b$ в точке $(0, a, b)$.

159. Найти кривизну и соприкасающуюся окружность линии

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y = \frac{1}{2} bx^2 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

в точке $(0, 0, a)$.

160. Пусть поверхность S_0 представляет собой область площади σ на сфере радиуса R, поверхность S получена в результате некоторого изгибания поверхности S_0. Найти площадь σ^* образа поверхности S на гауссовой сфере.

161*. Доказать, что на поверхности S, заданной уравнениями

$$x=\frac{1}{2}\cos u\cos\varphi,\quad y=\frac{1}{2}\cos u\sin\varphi,$$
$$z=\int\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 u}\,du$$

замкнуты все геодезические линии, отличные от ее меридианов. Считать, что $-\pi/2\leqslant u\leqslant\pi/2$ и что значениям координат (u,φ) и $(u,\varphi+2\pi)$ соответствует одна и та же точка поверхности S.

162. Найти (в квадратурах) геодезические линии геликоида

$$\boldsymbol{R}(u,v)=\{u\cos v,\ u\sin v,\ Av\}.$$

163. На конической поверхности $\boldsymbol{R}(u,v)=u\boldsymbol{r}(v)$, где $|\boldsymbol{r}(v)|=|\boldsymbol{r}_v(v)|=1$, по инерции без трения движется точка. Найти ее траекторию, зная, что она проходит через точку $u=1$, $v=v_0$ ортогонально прямолинейной образующей конической поверхности.

164. Дифференциальное уравнение движения точечного электрического заряда в поле магнитного полюса имеет вид

$$\boldsymbol{r}''(t)=c\,|\boldsymbol{r}(t)|^{-3}\,[\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)],\qquad c=\text{const}.$$

Доказать, что траектория заряда является геодезической линией круглого конуса.

165*. Дана функция $\rho(u)$ класса C^2, обладающая следующими свойствами:

$$\rho(0)=\sqrt{2},\quad \rho(-u)=\rho(u)>0,\quad |\rho'(u)|<1.$$

Для некоторого $u_0>0$ соблюдаются условия:

$$\rho(u_0)=1;\quad \int\limits_0^{u_0}\frac{du}{\rho(u)\sqrt{\rho^2(u)-1}}=\frac{\pi}{3};\quad \rho'(u)<0,$$

если $0<u\leqslant u_0$. Пусть S — поверхность вращения:

$$\boldsymbol{R}(u,\varphi)=\left\{\rho(u)\cos\varphi,\ \rho(u)\sin\varphi,\ \int\limits_0^u\sqrt{1-\rho'(u^2)}\,du\right\};$$

$\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — геодезические на S, проходящие через точку

$(\sqrt{2}, 0, 0)$. В этой точке $\mathscr{L}_1$ образует угол $\pi/4$ с меридианом $\varphi = 0$, $\mathscr{L}_2$ образует угол $\pi/2$ с этим меридианом. Доказать, что $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — гладкие замкнутые кривые, и найти точки их пересечения.

166. На плоскости (u, v) с метрикой

$$ds^2 = (u^2 + \cos v + 2)(du^2 + dv^2)$$

найти геодезическую линию, проходящую через точку $(0, \pi)$ в направлении $\{du, 0\}$.

167. На плоскости с метрикой $ds^2 = du^2 + B^2(u)\, dv^2$ найти геодезическую кривизну:

а) линии $v = v(u)$;

б) линии $v = \ln \operatorname{ch} u$ в случае, когда $B(u) = \operatorname{ch} u$.

168. На плоскости задана метрика $ds^2 = du^2 + B^2(u, v)\, dv^2$, причем известно, что линия $u = 0$ — геодезическая. Двумя способами найти поворот дуги $u = u_0$, $v_1 < v < v_2$ $(u_0 \neq 0)$:

а) как интеграл от k_g;

б) применяя формулу Гаусса — Бонне к области $u \in (0, u_0)$, $v \in (v_1, v_2)$.

169. Доказать, что гауссова кривизна метрики $ds^2 = \Phi(u, v)(du^2 + dv^2)$ может быть представлена в виде: $K = -\frac{1}{2\Phi}\Delta \ln \Phi$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ — *оператор Лапласа.*

170*. Доказать, что две поверхности с равной постоянной гауссовой кривизной локально изометричны.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ И ОТВЕТЫ

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

4. Выразить произведения через координаты сомножителей.

7. Применить теорему Ролля к функции $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0))$.

10. Воспользоваться тем, что если функция $s(t)$ класса C^n, $n \geqslant 1$, строго монотонна, то обратная ей функция тоже принадлежит классу C^n.

13. Использовать то, что $(\boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t))^2 = \mathrm{const}$, где $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ — радиус-векторы движущихся точек, t — время.

16а. Принять за начало координат центр сферы, за ось z — образующую цилиндра, за положительную полуось x — луч, пересекающий ось цилиндра. Положить $y = R \sin t$.

22. Для плоской кривой справедливы равенства: $\dot{x} = \cos\alpha$, $\dot{y} = \sin\alpha$, $\dot{\alpha} = k$, где α — угол между положительной полуосью x и вектором $\boldsymbol{\tau}$.

23. Первый способ: использовать задачу 15б и теорему о единственности кривой с данными натуральными уравнениями.

Второй способ. Из формул Френе получается дифференциальное уравнение для $\boldsymbol{\tau}$:

$$\ddot{\boldsymbol{\tau}} + (k_0^2 + \varkappa_0^2)\,\boldsymbol{\tau} = k_0\varkappa_0 \boldsymbol{A}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A}$ — вектор, полученный как постоянная интегрирования. Среди решений уравнения (1) имеются лишние, не удовлетворяющие геометрической задаче. Чтобы их отбросить, нужно использовать ортонормированность репера Френе. В результате получаем

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\pm\sqrt{k_0^2 + \varkappa_0^2}} \{\varkappa_0 e_1 + k_0 [e_2 \cos(\sqrt{k_0^2 + \varkappa_0^2}\, s) + e_3 \sin(\sqrt{k_0^2 + \varkappa_0^2}\, s)\},\tag{2}$$

где $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — произвольная ортонормированная тройка векторов. Интегрируя (2), находим $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$. Выбор знака перед радикалом зависит от ориентации системы координат в пространстве, ориентации тройки векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и заданного знака $\varkappa_0$.

24. Из уравнения $\boldsymbol{r}'' = c[\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{H}]$ следует, что величины $(\boldsymbol{r}')^2$ и $(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{H})$ постоянны во всех точках траектории. Это значит, что постоянны величина скорости и угол α между направлением скорости и вектором $\boldsymbol{H}$. Если $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, то имеем первый случай. Если $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$, то, используя результаты задачи **5**, находим, что $k = \mathrm{const} \neq 0$, $\varkappa = \mathrm{const}$. Далее используем задачу **23**.

25. а) Использовать формулу $\dot{\boldsymbol{\tau}} = k\boldsymbol{\nu}$. б) Утверждение следует из а). в) Использовать формулы Френе, выражающие $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ и $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. г) Рассмотреть сферическую индикатрису касательных и найти ее кручение.

26. Эволюту ищем в виде

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{\nu} + \mu\boldsymbol{\beta},$$

где $\lambda(s)$, $\mu(s)$ — неизвестные функции. Используем необходимое условие $[\dot{\boldsymbol{r}}^* \times (\boldsymbol{r}^* - \boldsymbol{r})] = \boldsymbol{o}$. Принимая за базис векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ и используя формулы Френе, находим $\lambda = \mathscr{R}$, а для μ получаем дифференциальное уравнение

$$\mathscr{R}\dot{\mu} - \mu\dot{\mathscr{R}} + (\mu^2 + \mathscr{R}^2)\varkappa = 0.$$

Для его решения удобно сделать замену искомой функции по формуле $\mu = \mathscr{R}\operatorname{tg}\theta$. Следует иметь в виду, что если $\dot{\mathscr{R}} \neq \mathscr{R}\varkappa\operatorname{tg}\theta$, то эволюта — гладкая кривая. Если же $\dot{\mathscr{R}} = \mathscr{R}\varkappa\operatorname{tg}\theta$, то возможно нарушение регулярности или вырождение эволюты. Например, эволюта окружности вырождена в одну точку.

29. Из формул Френе следует, что на искомой кривой $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\varkappa_0}[\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]$. Отсюда интегрированием находим $\boldsymbol{r}$, считая, что $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(s)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая двум необходимым условиям:

$$|\boldsymbol{\beta}(s)| = 1, \qquad \left|\frac{d\boldsymbol{\beta}(s)}{ds}\right| = \varkappa_0.$$

30. Если кривая $\mathscr{L}$ расположена на сфере радиуса a и центр сферы принят за начало координат, то

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = a. \tag{1}$$

Из равенства (1) путем четырехкратного дифференцирования и использования формул Френе можно получить соотношение

$$\ddot{\mathscr{R}} - \frac{1}{\varkappa}\dot{\mathscr{R}}\dot{\varkappa} + \mathscr{R}\varkappa^2 = 0. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что если (2) разделить на $\varkappa^2$ и сделать замену аргумента по формуле

$$s^* = \pm\int \varkappa(s)\,ds, \tag{3}$$

то получится уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2\mathscr{R}}{d(s^*)^2} + \mathscr{R} = 0. \tag{4}$$

Новый аргумент s^*, определяемый согласно (3), является натуральным параметром на сферической индикатрисе бинормалей. Общее решение уравнения (4), как известно, таково:

$$\mathscr{R}(s^*) = A\sin(s^* + \alpha),$$

где A, α — произвольные постоянные. В данном случае $\mathscr{R} > 0$ по геометрическим соображениям, α зависит от выбора начала отсчета s^*, A зависит от выбора единицы масштаба в пространстве.

33. Перейти к цилиндрическим координатам по формулам

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z.$$

37. Доказать, что рассматриваемый предел не изменится, если поверхность заменить соприкасающимся параболоидом в точке A.

38. Доказать, что рассматриваемый предел не изменится, если площадь «шапочки» заменить площадью ее проекции на касательную плоскость в точке A.

55. Здесь удобно использовать результат задачи **6**.

58. Рассмотреть семейство поверхностей

$$\boldsymbol{R}(u,v,t)=\left\{\widetilde{\rho}(u,t)\cos\frac{v}{t},\ \widetilde{\rho}(u,t)\sin\frac{v}{t},\ \widetilde{z}(u,t)\right\},$$

где $\widetilde{\rho}(u,t)=t\rho(u)$, $\widetilde{z}(u,t)=\int\sqrt{1-t^2\rho'(u)^2}\,du$, $0<t\leqslant 1$.

59. Поверхность, образованную касательными к кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$, где u — натуральный параметр, можно задать уравнением $\boldsymbol{R}(u,v)=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{\tau}(u)$. Тогда $ds^2=[1+k^2(u)\,v^2]\,du^2+2du\,dv+dv^2$, так что ds^2 не зависит от $\varkappa$.

Замечание. Отсюда видно, что поверхность касательных можно изгибанием наложить на плоскость, поэтому по теореме Гаусса $K=0$ на этой поверхности.

66. Доказать, что сферический образ линии $\mathscr{L}$ — дуга окружности. Затем применить теорему Родрига.

71. Воспользоваться тем, что $(d^2\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{n})=-(d\boldsymbol{R},\ d\boldsymbol{n})$, поэтому $L=-(\boldsymbol{R}_u,\ \boldsymbol{n}_u)$, $M=-(\boldsymbol{R}_u,\ \boldsymbol{n}_v)=-(\boldsymbol{R}_v,\ \boldsymbol{n}_u)$, $N=-(\boldsymbol{R}_v,\ \boldsymbol{R}_v)$.

74. а) Воспользоваться результатами задач **72** и **73**.

б) Для нахождения линий кривизны получаем уравнение

$$pxy\,dy^2+[q(p^2+x^2)-p(q^2+y^2)]\,dx\,dy-qxy\,dx^2=0. \tag{1}$$

Умножим (1) на $4\,pq\,xy$ и положим

$$qx^2=u,\quad py^2=v,\quad pq(p-q)=A.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$u\,dv^2+(A+u-v)\,du\,dv-v\,du^2=0. \tag{2}$$

Если (2) разделить на du^2 и продифференцировать по u, то получится уравнение

$$(2uv'-v+u+A)\,v''=0, \tag{3}$$

которое легко решается. Однако среди решений уравнения (3) есть лишние, не удовлетворяющие уравнению (2). Их следует отбросить.

83. а) Утверждение вытекает из определений.

б) Из предыдущего пункта следует, что на асимптотической линии $\boldsymbol{\beta}=\pm\boldsymbol{n}$, поэтому $\varkappa^2=\left(\dfrac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right)^2$ Выберем систему координат $(u,\ v)$ специальным образом так, чтобы в рассматриваемой точке $u=u_0$, $v=v_0$ соблюдались условия: 1) линия $u=\text{const}$ и линия $v=\text{const}$ имеют главные направления; 2) $E(u_0,\ v_0)=G(u_0,\ v_0)=1$. Тогда $F(u_0,\ v_0)=0$ ввиду ортогональности главных направлений; $\boldsymbol{n}_u=-k_1\boldsymbol{R}_u$,

$\boldsymbol{n}_v = -k_2\boldsymbol{R}_v$ по теореме Родрига. Поэтому

$$\left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right)^2 = \left(\boldsymbol{n}_u\frac{du}{ds} + \boldsymbol{n}_v\frac{dv}{ds}\right)^2 = \frac{k_1^2du^2 + k_2^2dv^2}{ds^2}.$$

Пусть φ — угол между линией $v = v_0$ и асимптотическим направлением. Тогда в этом направлении $\frac{du}{ds} = \cos\varphi$, $\frac{dv}{ds} = \sin\varphi$ вследствие того, что $E = G = 1$, $F = 0$. С другой стороны, из формулы Эйлера находим $k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi = 0$. В результате имеем

$$\varkappa^2 = \left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right)^2 = (-k_1k_2\sin^2\varphi - k_1k_2\cos^2\varphi) = -K.$$

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что если $S \in C^n$, $n \geqslant 2$, то асимптотические линии поверхности имеют регулярность C^{n-1}, причем существуют поверхности класса C^2, на которых асимптотические линии гладкие, но не принадлежат классу C^2. Для того чтобы кривая имела кручение, в общем случае требуется регулярность C^3. Однако вывод формулы Бельтрами — Эннепера, план которого указан выше, применим, если $S \in C^2$. Из этого доказательства попутно вытекает, что на асимптотической линии (с отличной от нуля кривизной) определено кручение $\varkappa$ даже тогда, когда сама асимптотическая линия принадлежит лишь классу C^1.

85. Воспользоваться тем, что при развертывании цилиндра на плоскость геодезические линии переходят в прямые. Если на цилиндрической поверхности класса C^1 определить геодезические, как такие линии, которые при развертывании на плоскость переходят в прямые, то утверждение задачи можно распространить и на линии откоса класса C^1.

96. Ввести полугеодезические координаты (ρ, φ) с началом в точке O. В этих координатах $ds^2 = d\rho^2 + B^2(\rho, \varphi)\,d\varphi^2$. Доказать, что

$$B(\rho, \varphi) = \rho - \int_0^\rho d\rho \int_0^\rho K(\rho, \varphi)\,B(\rho, \varphi)\,d\rho.$$

Отсюда, используя непрерывность K в точке O, получить, что $B(\rho, \varphi) = \rho - \frac{1}{6}K(O)\,\rho^3 + o(\rho^3)$, $\quad B_\rho(\rho, \varphi) = 1 - \frac{1}{2}K(O)\,\rho^2 + o(\rho^2)$, и затем вычислить пределы, указанные в задаче.

98. Сначала устанавливаем, что метрики, заданные на P_1 и на P_2, имеют одинаковую кривизну $K = -1$. Затем на плоскости P_2 вводим полугеодезические координаты (ξ, η) так, что:

1) геодезическими являются линии $\eta = \text{const}$ и $\xi = 0$;
2) ξ является натуральным параметром на линии $\eta = 0$;
3) η является натуральным параметром на линии $\xi = 0$.

Тогда $ds^2 = d\xi^2 + B^2(\xi, \eta)\,d\eta^2$, причем

$$B_{\xi\xi}(\xi, \eta) = B(\xi, \eta), \qquad B(0, \eta) = 1, \quad B_\xi(0, \eta) = 0.$$

Из этих равенств следует, что $B(\xi, \eta) = \operatorname{ch}\xi$.

П р и м е ч а н и е. P_1 — *плоскость Лобачевского* с ортогональной системой координат, аналогичной декартовым координатам на евклидовой плоскости. P_2 — та же плоскость Лобачевского с полярными координатами (ρ, φ).

102. а) Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ — уравнение траектории, t — время, вектор $\boldsymbol{r}$ откладывается из центра поля. Доказать, что

$$[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}']' = \boldsymbol{o}. \tag{1}$$

Из (1) следует, что

$$[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}'] = \boldsymbol{c}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

Примечание. Вектор $[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}']$ называется секториальной скоростью точки относительно выбранного начала координат.

б) В полярных координатах формула (2) принимает вид

$$\rho^2\varphi' = c, \tag{3}$$

где $c = |\boldsymbol{c}|$. Пусть m — масса точки, $f = f(\rho, \varphi)$ — величина силы. Соотношения $f = m\,|\boldsymbol{r}''|$ и $\boldsymbol{r}'' \parallel \boldsymbol{r}$ дают, кроме (3), еще одно равенство:

$$m(\rho'' - \rho\cdot(\varphi')^2) = f(\rho, \varphi). \tag{4}$$

Если $c \neq 0$, то, используя (3), можно в (4) перейти к производным по φ. При этом удобно принять за неизвестную функцию $1/\rho$.

в) Можно воспользоваться формулой Бине (см. ответ задачи **102б**) и известными из аналитической геометрии уравнениями кривых второго порядка в полярных координатах.

110. Воспользоваться результатами задачи **16** и теоремой единственности для кривой, заданной натуральными уравнениями.

117. Примем за начало координат точку O. Тогда $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = 0$. Отсюда с помощью трехкратного дифференцирования и формул Френе находим, что

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\varkappa}{k}\right) = 0.$$

122. Удобно использовать результат задачи **121** и формулу Грина.

130. Перейти к полярным координатам, записав уравнение поверхности в виде $\{x, y, z\} = \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \rho^3\sin 3\varphi\}$.

140. Поверхность S имеет, очевидно, уравнение $\boldsymbol{R}(x, \varphi) = \{x, \rho(x)\cos\varphi, \lambda(x)\rho(x)\sin\varphi\}$, а ее кривизна выражается так:

$$K = \frac{-\lambda\rho^3}{(EG - F^2)^2}\left[\lambda\rho'' + (2\lambda'\rho' + \lambda''\rho)\sin^2\varphi + \frac{(\lambda')^2\rho}{4\lambda}\sin^2 2\varphi\right].$$

Оценивая K, удобно рассмотреть два случая: 1) $2\lambda'\rho' + \lambda''\rho \geqslant 0$; 2) $2\lambda'\rho' + \lambda''\rho < 0$.

145. Для упрощения выкладок полезно ввести на S (в окрестности произвольно фиксированной точки) координаты, удовлетворяющие первым двум условиям из указания к задаче **83**.

147. Применив теорему Родрига, доказать, что v-линии образуют одно семейство линий кривизны. Другое семейство найти, пользуясь ортогональностью линий кривизны.

161. Поверхность S можно получить, если сначала так изогнуть полусферу, чтобы две половины ее граничной окружности налегли друг на друга, а затем склеить поверхность по этим полуокружностям. Отсюда следует, что геодезические на поверхности S, не проходящие через ее особые точки (концы меридианов), замыкаются после двукратного обхода вокруг поверхности (т. е. после возрастания φ на 4π).

165. Легко проверить, что $\mathscr{L}_2$ — параллель $z=0$. Рассмотрим $\mathscr{L}_1$. Из теоремы Клеро (см. задачу **86**) следует, что с ростом u на $\mathscr{L}_1$ монотонно растет $\sin\alpha$, достигая единицы при $u=u_0$. Выясним, насколько при этом возрастает φ. Имеем: $\dfrac{d\varphi}{du}=\dfrac{1}{\rho}\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между геодезической и меридианом. Еще раз применяя теорему Клеро, находим, что $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{\rho^2-1}}$ на $\mathscr{L}_1$. Поэтому $\varphi(u_0)=\displaystyle\int_0^{u_0}\frac{du}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}=\frac{\pi}{3}$. Далее картина расположения $\mathscr{L}_1$ на S легко усматривается из осевой симметрии поверхности.

170. На рассматриваемых поверхностях ввести координаты, удовлетворяющие условиям указания к задаче **98**. Отдельно разобрать случаи $K>0$, $K=0$, $K<0$.

ОТВЕТЫ

1. Уравнение искомой линии $\boldsymbol{r}(t)=\mu(t)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{b}$ — постоянный вектор, $\mu(t)$ — первообразная для функции $\lambda(t)$, $t_1<t<t_2$. Геометрически возможны следующие случаи: прямая, коллинеарная $\boldsymbol{a}$, если $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)\,dt$ расходится при $t=t_1$ и при $t=t_2$; луч, имеющий направление вектора $\boldsymbol{a}$, если $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)\,dt$ сходится при $t=t_1$, но расходится при $t=t_2$; луч, имеющий направление вектора $(-\boldsymbol{a})$, если $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)\,dt$ расходится при $t=t_1$, но сходится при $t=t_2$; открытый отрезок, коллинеарный $\boldsymbol{a}$, если $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)\,dt$ сходится.

2. Уравнение искомой линии $\boldsymbol{r}(t)=\dfrac{1}{2}t^2\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — произвольные постоянные векторы. Если $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{o}$, то это уравнение (при фиксированных $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$) задает параболу с осью, имеющей направление вектора $\boldsymbol{a}$. Если $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$, то получим дважды взятый луч, параллельный $\boldsymbol{a}$.

5. а) $(\boldsymbol{r}')^2[\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{a}]^2$; б) $-(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{a})[\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{a}]^2$.

8. а) $$\cos\alpha=\frac{\rho\rho'+zz'}{\sqrt{\rho^2+z^2}\sqrt{(\rho')^2+(\rho\varphi')^2+(z')^2}}=\frac{(\sqrt{\rho^2+z^2})'}{\sqrt{(\rho')^2+(\rho\varphi')^2+(z')^2}};$$

б) $|\boldsymbol{r}''|=\sqrt{\rho_0^2[(\varphi')^4+(\varphi'')^2]+(z'')^2}$;

9. $|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(\rho')^2+\rho^2[(\theta')^2+(\varphi'\cos\theta)^2]}$.

14. а) Равенство соблюдается лишь в частном случае, когда $\boldsymbol{r}' = \lambda \boldsymbol{r}$, $\lambda \geqslant 0$. б) Равенство справедливо.

15. а) Касательная $x = a$, $by - az = 0$. Главная нормаль $y = z = 0$. Бинормаль $x = a$, $ay + bz = 0$. Соприкасающаяся плоскость $by - az = 0$. Нормальная плоскость $ay + bz = 0$. Спрямляющая плоскость $x = a$.

б) $\alpha = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}$, $\quad k = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, $\quad \varkappa = \dfrac{b}{a^2+b^2}$.

в) Соприкасающаяся окружность

$$2bx + 2az = \pi ab, \quad x^2 + \left(y + \frac{b^2}{a}\right)^2 + \left(z - \frac{\pi b}{2}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2},$$

или, что то же самое,

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = \left\{-\sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi,\ a - \frac{a^2+b^2}{a}(1-\cos\varphi),\ b\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sin\varphi\right)\right\}^{1)}.$$

г) Винтовая линия

$$\boldsymbol{r}(t) = \{a\sqrt{2}\cos(t - (\pi/4)),\ a\sqrt{2}\sin(t - (\pi/4)),\ bt + (a^2/b)\}.$$

16. а) $\boldsymbol{r} = R\left\{1 + \cos t, \sin t, 2\sin\dfrac{t}{2}\right\}$. Кривая замкнута, ее однократному обходу соответствует изменение t на 4π.

б) $k = \dfrac{\sqrt{13 + 3\cos t}}{R(3+\cos t)^{3/2}}$, точек распрямления нет.

в) $\varkappa = \dfrac{6\cos\dfrac{t}{2}}{R(13 + 3\cos t)}$. Точки уплощения $(0, 0, \pm R)$ при $t = \pi$ и при $t = 3\pi$; $\varkappa > 0$, если $-\pi < t < \pi$; $\varkappa < 0$, если $\pi < t < 3\pi$.

г) Точка самопересечения имеет координаты $(2R, 0, 0)$ и проходится при $t = 0$ и при $t = 2\pi$.

Если $t = 0$, то $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{0, 1, 1\}$, $\quad \boldsymbol{\nu} = \{-1, 0, 0\}$, $\quad \boldsymbol{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{0, -1, 1\}$.

Если $t = \pi$, то $\boldsymbol{\tau} = \{0, -1, 0\}$, $\quad \boldsymbol{\nu} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\{2, 0, -1\}$, $\quad \boldsymbol{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\{1, 0, 2\}$.

Если $t = 2\pi$, то $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{0, 1, -1\}$, $\quad \boldsymbol{\nu} = \{-1, 0, 0\}$, $\quad \boldsymbol{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{0, 1, 1\}$.

Если $t = 3\pi$, то $\boldsymbol{\tau} = \{0, -1, 0\}$, $\quad \boldsymbol{\nu} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\{2, 0, 1\}$, $\quad \boldsymbol{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\{-1, 0, 2\}$.

---

1) Параметр φ здесь определен согласно п. **1.10** (см. выше, § 1).

д) Соприкасающиеся окружности:

$$y - z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2 \text{ при } t = 0;$$

$$x + 2z - 4R = 0, \quad \left(x - \frac{4}{5}R\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{8}{5}R\right)^2 = \frac{4}{5}R^2 \quad \text{при } t = \pi;$$

$$y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2 \text{ при } t = 2\pi;$$

$$x - 2z - 4R = 0, \quad \left(x - \frac{4}{5}R\right)^2 + y^2 + \left(z + \frac{8}{5}R\right)^2 = \frac{4}{5}R^2$$

при $t = 3\pi$.

17. Точки распрямления $x = n\pi$. Точки уплощения $x = (\pi/2) + n\pi$; $\varkappa < 0$ при $n\pi < x < (\pi/2) + n\pi$; $\varkappa > 0$ при $(\pi/2) + n\pi < x < (n + 1)\pi$ (n — любое целое число).

18. Точек распрямления нет ($k \neq 0$). Точки уплощения $t = \pm 1$; $\varkappa > 0$ при $|t| > 1$; $\varkappa < 0$ при $|t| < 1$.

19. а) $k = \dfrac{\sqrt{3 - 2\cos t}}{(2 - 2\cos t + \cos^2 t)^{3/2}}$, $\quad \varkappa = \dfrac{1}{2\cos t - 3}$

б) $\boldsymbol{\tau} = \{0, 0, 1\}$, $\boldsymbol{\nu} = \{0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{\beta} = \{-1, 0, 0\}$. Соприкасающаяся окружность $x = 0$, $(y - 1)^2 + z^2 = 1$.

в) $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{1, 1, 0\}$; $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\{1, -1, -2\}$; $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\{-1, 1, -1\}$.

Соприкасающаяся окружность $x - y + z = \pi/2 - 1$,

$$\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}.$$

20. а) $k = \dfrac{2t}{(1 + 2t^2)^2}$, $\quad \varkappa = \dfrac{-2t}{(1 + 2t^2)^2}$;

б) $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{1}{3}\{2, 1, 2\}$, $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{1}{3}\{-1, -2, 2\}$, $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{1}{3}\{2, -2, -1\}$;

соприкасающаяся окружность $2x - 2y - z = 3$, $(x - 1/2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = (9/2)^2$.

21. $k(s) = \varkappa(s) = \dfrac{\sqrt{2}}{s^2 + 4}$, где $-\infty < s < +\infty$, $s = 0$ при $t = 0$.

22. $x = \displaystyle\int_0^s \cos\alpha(s)\, ds$, $y = \displaystyle\int_0^s \sin\alpha(s)\, ds$, $z = 0$; здесь $\alpha(s) = \displaystyle\int_0^s f(s)\, ds$.

23. Окружность радиуса $R = 1/k_0$, если $\varkappa_0 = 0$. Винтовая линия с радиусом $a = \dfrac{k_0}{k_0^2 + \varkappa_0^2}$ и шагом $h = \dfrac{2\pi|\varkappa_0|}{k_0^2 + \varkappa_0^2}$, если $\varkappa_0 \neq 0$ (правая, если $\varkappa_0 > 0$, левая, если $\varkappa_0 < 0$).

28. а) $k^* = k$. Пусть A^* — центр кривизны косой окружности $\mathscr{L}$ в точке A, $\varkappa^*$ — кручение $\mathscr{L}^*$ в точке A^*, $\varkappa$ — кручение $\mathscr{L}$ в точке A. Тогда $\varkappa\varkappa^* = k^2$. б) Косая окружность $\mathscr{L}$.

29. $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(s_0)+\frac{1}{\varkappa_0}\int\limits_{s_0}[\boldsymbol{\beta}(s)\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)]\,ds$, где $\boldsymbol{\beta}(s)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая двум условиям: $|\boldsymbol{\beta}(s)|=1$, $|\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)|=|\varkappa_0|$. Геометрически $\pm\beta(s)$ представляет собой единичный вектор бинормали искомой кривой.

30. При надлежащем выборе начала отсчета s^* имеем: $\mathcal{R}(s^*)=A\sin(s^*)$, где A — положительная константа, которая может иметь любое значение, а область изменения s^* содержится в интервале $(0,\pi)$ или совпадает с этим интервалом.

31. $\boldsymbol{n}=(1+4x^2+4y^2)^{-1/2}\{2x,\ 2y,\ 1\}$. Сферический образ параболоида представляет собой полусферу $x^2+y^2+z^2=1$, $z>0$. Отображение взаимно однозначно. Линия пересечения параболоида с плоскостью $y=Ax$ переходит в полуокружность, по которой указанная полусфера пересекается с этой же плоскостью. Окружности $x^2+y^2=a^2$ на параболоиде отображаются в окружности $x^2+y^2=4a^2/(1+4a^2)$ на полусфере. Следует обратить внимание на то, что при $x^2+y^2\to\infty$ искривленность параболоида уменьшается; это видно наглядно, поскольку более широкие кольцевые области вида $a_1^2<x^2+y^2<a_2^2$ отображаются на все более узкие кольцевые зоны вблизи экватора гауссовой сферы.

32. $\boldsymbol{n}=(1+e^{2y})^{-1/2}\{-e^y\cos x,-e^y\sin x,1\}$. Образ поверхности $z=e^y\sin x$ бесконечно много раз покрывает область $0<z<1$ на гауссовой сфере $x^2+y^2+z^2=1$ (открытую верхнюю полусферу с выколотым «северным полюсом»). На плоскости $(x,\ y)$ наряду с декартовыми введем полярные координаты $(\rho,\ \varphi)$, считая, как обычно, что $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Образ линии пересечения поверхности $z=e^y\sin x$ с плоскостью $y=y_0$ бесконечно много раз покрывает на гауссовой сфере окружность $\rho=e^{y_0}(1+e^{2y_0})^{-1/2}$. Линия пересечения поверхности $z=e^y\sin x$ с плоскостью $x=x_0$ имеет своим образом открытую дугу (четверть большого круга), определяемую соотношениями: $0<\rho<1$, $\sin\varphi=-\sin x_0$, $\cos\varphi=-\cos x_0$.

33. В полярных координатах $(\rho,\ \varphi)$, вводимых формулами $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, имеем $k_n=2+\sin 2\varphi$; главные направления $\varphi=\pm\frac{\pi}{4}+m\pi$, где m — целое число.

34. а) $z=c\left(1-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}\right)$; б) $y=\frac{1}{2}(x^2-z^2)+1$; в) $z=0$.

39. $\cos\omega=H/\sqrt{H^2-K}$.

41. а) Все точки являются эллиптическими в областях, определяемых неравенствами: $(\pi/2)+2k\pi<u<(3\pi/2)+2k\pi$, $-(\pi/2)+2l\pi<v<(\pi/2)+2l\pi$ и $-(\pi/2)+2k\pi<u<(\pi/2)+2k\pi$, $(\pi/2)+2l\pi<v<(3\pi/2)+2l\pi$. Все точки являются гиперболическими в областях, определяемых неравенствами: $-(\pi/2)+2k\pi<u<(\pi/2)+2k\pi$, $-(\pi/2)+2l\pi<v<(\pi/2)+2l\pi$ и $(\pi/2)+2k\pi<u<(3\pi/2)+2k\pi$, $(\pi/2)+2l\pi<v<(3\pi/2)+2l\pi$. Здесь $u=x+y$, $v=x-y$. Точки $(k\pi,\ (\pi/2)+l\pi,\ 0)$, а также точки $((\pi/2)+k\pi,\ l\pi,\ 0)$ являются точками уплощения; остальные точки прямолинейных образующих $x+y=(\pi/2)+k\pi$, $z=0$ и $x-y=(\pi/2)+l\pi$, $z=0$ — параболические. $k,\ l$ — произвольные целые числа. б) Все точки эллиптические. в) Все точки гиперболические. г) Все точки являются точками уплощения. д) Все точки параболические.

42. Проекциями асимптотических линий на плоскость (x, y) являются линии: $y = c_1 - \ln \cos^2(x/2)$, $y = c_2 - \ln \sin^2(x/2)$, $y = m\pi$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные, m — любое целое число.

43. Проекциями асимптотических линий на плоскость (x, y) являются: $x = 0$, $y = c_1$, $y = c_2 x^{-2}$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные. При $y \neq 0$ точки гиперболические, при $y = 0$, $x \neq 0$ — параболические; $(0, 0, 0)$ — точка уплощения.

44. а) Эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Локальная правильность сети (u, v) нарушена в точках $(0, 0, \pm c)$. Сферический образ — вся гауссова сфера. б) Тор, получаемый вращением окружности $(x - a)^2 + z^2 = b^2$ вокруг оси z. Сеть (u, v) — правильна. Сферический образ той части тора, на которой $x^2 + y^2 > a^2$, один раз покрывает всю гауссову сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ за исключением двух точек $(0, 0, \pm 1)$. Сферический образ той части тора, на которой $x^2 + y^2 < a^2$, второй раз покрывает ту же область гауссовой сферы. Окружность $x^2 + y^2 = a^2$, $z = -b$ отображается в точку $(0, 0, -1)$. Окружность $x^2 + y^2 = a^2$, $z = b$ отображается в точку $(0, 0, 1)$. в) Однополостный гиперболоид $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Сеть (u, v) — правильна, сферический образ — область $|z| < (1 + c^2)^{-1/2}$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Примечание. В пунктах б) и в) нужно считать, что линии $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на торе, а также линии $u = \text{const}$ на гиперболоиде представляют собой однократно взятые окружности (хотя при изменении параметров каждая из них пробегается бесконечно много раз). При такой точке зрения сети (u, v) являются правильными. Если же указанные линии рассматривать как многократно «обвитые» окружности, то сети (u, v) не будут правильными в целом, но их локальная правильность сохранится.

45. а) $\boldsymbol{R}(u, v) = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{a}$.

б) $\boldsymbol{n}(u, v) = \boldsymbol{n}(u) = |\boldsymbol{r}'(u) \times \boldsymbol{a}|^{-1} \cdot [\boldsymbol{r}'(u) \times \boldsymbol{a}]$. Сферический образ — линия $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(u)$. в) $\boldsymbol{R}(u, v) = v\,\boldsymbol{r}(u) + (1 - v)\,\boldsymbol{r}_0$. г) Касательную плоскость можно задать уравнением $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}') = 0$, где $\boldsymbol{X}$ — радиус-вектор текущей точки, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$, $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'(u)$, $u = \text{const}$.

46. а) $\boldsymbol{R}(u, v) = \{f(u) \cos v,\ f(u) \sin v,\ g(u)\}$; точки (u, v) и $(u, v + 2\pi)$ отождествляются. в) Образ на гауссовой сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ — замкнутая область $|z| \leqslant 1/\sqrt{2}$, покрытая бесконечно много раз.

47. Будем считать, что AB служит осью z, середина отрезка l находится в плоскости (x, y) на расстоянии a от AB, длина l равна $2b$. Тогда поверхность можно задать уравнением:

$$\boldsymbol{R}(u, v) = \left\{\left(a + u\cos\frac{v}{2}\right)\cos v,\ \left(a + u\cos\frac{v}{2}\right)\sin v,\ u\sin\frac{v}{2}\right\},$$

где $|u| \leqslant b$, точки (u, v) и $(-u, v + 2\pi)$ отождествляются. $\boldsymbol{n}$ переходит в $(-\boldsymbol{n})$ при однократном обходе окружности $u = 0$.

48. Пусть k_1, k_2 — главные кривизны S_0 в точке O. Принимаем O за начало координат, орт нормали к S_0 — за орт оси z, касательную к первому главному направлению $(k_n = k_1)$ — за ось x. Тогда поверхность S имеет уравнение:

$$\boldsymbol{R}(u, v) = \frac{\{\cos u \sin v,\ \sin u \sin v,\ \cos v - 1\}}{k_1 \cos^2 u + k_2 \sin^2 u},$$

причем значения координат $(u, v+2\pi)$ и $(u+2\pi, v)$ соответствуют той же точке на S, что и координаты (u, v). Линия самопересечения $v=\pi$; она представляет собой отрезок

$$-2/k_1 \leqslant z \leqslant -2/k_2, \quad x=y=0.$$

Примечание. Дополнительное исследование показывает, что поверхность S односторонняя. Если ее линию самопересечения дополнить двумя лучами до всей оси z, то получится алгебраическая поверхность четвертого порядка:

$$(x^2+y^2+z^2)(k_1x^2+k_2y^2)+2z(x^2+y^2)=0.$$

49. Будем считать, что в плоскости P линия $\mathscr{L}$ задается уравнениями $\xi=\xi(u)$, $\eta=\eta(u)$, где (ξ, η) — декартовы прямоугольные координаты; что прямая AB представляет собой ось z в пространстве и по ней скользит ось η движущейся плоскости P Тогда, при надлежащем выборе осей x, y и положительных направлений на координатных осях имеем $\boldsymbol{R}(u, v)=\{\xi(u)\cos v, \ \xi(u)\sin v, \ \eta(u)+av\}$.

50. а) $\boldsymbol{R}(u, v)=\{u\cos v, \ u\sin v, \ av\}$. б) Касательная плоскость в точке (u_0, v_0) имеет уравнение:

$$(a\sin v_0)\,x-(a\cos v_0)\,y+u_0z=au_0v_0.$$

51. $\boldsymbol{R}(u, v)=\boldsymbol{r}(u)+a\boldsymbol{\nu}(u)\cos v+a\boldsymbol{\beta}(u)\sin v$, где $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$ — уравнение линии $\mathscr{L}$; $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ — орты главной нормали и бинормали этой линии; точки (u, v) и $(u, v+2\pi)$ отождествляются.

52. а) $\boldsymbol{R}(u, v)=\boldsymbol{r}_1(u)+\boldsymbol{r}_2(v)-\boldsymbol{r}_0$. б) Та же самая поверхность S. в) $\boldsymbol{R}(u, v)=\dfrac{1}{2}[\boldsymbol{r}_1(u)+\boldsymbol{r}_2(v)]$ — поверхность, подобная S.

53. Обозначим через $\boldsymbol{a}$ единичный направляющий вектор прямолинейных образующих поверхности S_0, идущей в направлении положительной полуоси ξ. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$ — уравнение линии $\mathscr{L}_0$, причем направление возрастания u выбрано так, что вектор $[\boldsymbol{r}'(u)\times\boldsymbol{a}]$ идет в сторону положительной полуоси η. Тогда для S имеем уравнение:

$$\boldsymbol{R}(u, v)=\boldsymbol{r}(u)+f(v)\,\boldsymbol{a}+g(v)\frac{[\boldsymbol{r}'(u)\times\boldsymbol{a}]}{|\boldsymbol{r}'(u)\times\boldsymbol{a}|}.$$

54. Если считать, что вершина O конуса S_0 находится на положительной полуоси ξ и что вектор $\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})$ имеет направление положительной полуоси η, то

$$\boldsymbol{R}(u, v)=\boldsymbol{r}(u)-f(v)\frac{\boldsymbol{r}(u)-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}(u)-\boldsymbol{r}_0|}+g(v)\frac{(\boldsymbol{r}(u)-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{r}'(u)}{|(\boldsymbol{r}(u)-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{r}'(u)|}.$$

55. Сфера с центром O или область на такой сфере.

56. а) $ds^2=R_0^2(\cos^2\theta\,d\varphi^2+d\theta^2)$;

б) $\varphi=\operatorname{tg}\alpha\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+c$.

57. $ds^2=[\rho'(u)^2+z'(u)^2]\,du^2+\rho^2(u)\,d\varphi^2$;

$$\varphi=\pm\int\sqrt{(\rho')^2+(z')^2}\,\frac{d\rho}{\rho}.$$

61. а) $ds^2 = du^2 + (1+u^2)\,dv^2$; б) $\frac{1}{4}(v_0^2 + \operatorname{sh}^2 v_0)$;

в) v_0, $\operatorname{sh} v_0$, $\sqrt{2}\operatorname{sh} v_0$; г) $\pi/2$, $\pi/4$, $\pi/4$.

62. $\boldsymbol{R}(u, \varphi) = \{\sqrt{1+u^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1+u^2}\sin\varphi,\ \ln(u+\sqrt{1+u^2})\}$, или, что то же самое, $\boldsymbol{R}(z, \varphi) = \{\operatorname{ch} z\cos\varphi,\ \operatorname{ch} z\sin\varphi,\ z\}$. Это — *катеноид*, поверхность вращения цепной линии $x = \operatorname{ch} z$.

63. а) $ds^2 = \{[1 - ak(u)\cos\varphi]^2 + [a\varkappa(u)]^2\}\,du^2 + 2a^2\varkappa(u)\,du\,d\varphi + a^2 d\varphi^2$; б) $\varphi(u) = -\int \varkappa(u)\,du$; в) $2\pi a\,|u_2 - u_1|$; д) $4\pi^2 aA$; е) $2\pi^2 a\sqrt{A^2+B^2}$.

64. а) $(d^2\boldsymbol{R}, \boldsymbol{n}) = \dfrac{(\rho' x'' - \rho'' x')\,du^2 + \rho x' d\varphi^2}{(x')^2 + (\rho')^2}$.

б) $K = \dfrac{x'(\rho' x'' - \rho'' x')}{\rho[(x')^2 + (\rho')^2]^2}$. $K > 0$, если выпуклость меридиана направлена от оси вращения. $K < 0$, если выпуклость меридиана обращена в сторону оси вращения. $K = 0$, если меридиан имеет точку перегиба или если он ортогонален оси вращения (при $\rho \neq 0$). в) $K = -1$, если $x \neq 0$; K не определена при $x = 0$. г) $H = \dfrac{\rho(\rho' x'' - \rho'' x') + x'[(x')^2 + (\rho')^2]}{2\rho[(x')^2 + (\rho')^2]^{3/2}}$; д) $\rho(x) = \dfrac{1}{a}\operatorname{ch} a(x - x_0)$, где x_0 и $a > 0$ — произвольные постоянные (катеноид).

67. Меридианы и параллели. Кроме того, возможны особые случаи: поверхность вращения — сфера, часть сферы или часть плоскости. На таком участке поверхности любая гладкая кривая является линией кривизны.

68. $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Возможен особый случай, см. ответ задачи 67.

70. а) $u = \text{const}$, $v = \text{const}$; б) $v = c \pm \ln(u + \sqrt{a^2+u^2})$ или, что то же самое, $u = \pm a\operatorname{sh}(v + c_1)$; c, c_1 — произвольные постоянные; в) $H = 0$.

73. $ds^2 = (1+z_x^2)\,dx^2 + 2z_x z_y\,dx\,dy + (1+z_y^2)\,dy^2$;

$$(d^2\boldsymbol{R}, \boldsymbol{n}) = \frac{z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}\,dx\,dy + z_{yy}dy^2}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}};$$

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2};$$

$$H = \frac{(1+z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy}}{2(1+z_x^2+z_y^2)^{3/2}}.$$

74. а) $\left(0,\ \pm\sqrt{q(p-q)},\ \dfrac{p-q}{2}\right)$. б) Проекциями линий кривизны на плоскость (x, y) являются: прямые $x = 0$, $y = 0$; эллипсы $Cqx^2 + py^2 =$

$=\frac{AC}{C-1}$, где $A=pq(p-q)$, $C>1$ — произвольная постоянная; гиперболы $py^2-\widetilde{C}qx^2=\frac{A\widetilde{C}}{1+\widetilde{C}}$, где $\widetilde{C}>0$ — произвольная постоянная. При $p\to q$ шаровые точки сливаются в одну, эллипсы переходят в концентрические окружности, гиперболы — в радикальные прямые.

76. Искомый центр кривизны является основанием перпендикуляра, опущенного из точки A на отрезок C_1C_2.

77. $x+2z=4R$, $\left(x-\frac{4}{5}R\right)^2+y^2+\left(z-\frac{8}{5}R\right)^2=\frac{4}{5}R^2$.

П р и м е ч а н и е. Решение задачи **77** полезно сравнить с решением задачи **16д**).

78. $k=a/b^2$ на концах большой оси, $k=b/a^2$ на концах малой оси.

79. $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{|\varkappa|}{k}$.

82. Прямая или часть прямой.

87. $k_g=\frac{\rho'(x)}{\rho(x)\sqrt{1+\rho'(x)^2}}$.

88. $|k_g|=|\sin\alpha\operatorname{tg}\theta|$.

89. а) $k_g=\frac{a}{a^2+b^2}$; б) $k_g=0$.

90. $\sigma^*=\pi/2$.

91. $\sigma^*=\int\limits_{v_1}^{v_2}dv\int\limits_{u_1}^{u_2}|B_{uu}(u,v)|\,du$.

93. а) $K=\frac{-1}{(1+u^2)^2}$; б) $k_g=\frac{u}{(1+u^2)\sqrt{2}}=\frac{\operatorname{sh}v}{\sqrt{2}\operatorname{ch}^2v}$; $\Pi=\ln\operatorname{ch}v_0$.

94. $\pi+(\sigma/R_0^2)$.

95. $\pi-a^2\sigma$.

97. $s(\rho)=2\pi\operatorname{sh}\rho$; $k_g(\rho)=\operatorname{cth}\rho\to 1$ при $\rho\to+\infty$; $\Pi(\rho)=2\pi\operatorname{ch}\rho\to+\infty$ при $\rho\to+\infty$. На евклидовой плоскости $s(\rho)=2\pi\rho$, $k_g(\rho)=1/\rho\to 0$ при $\rho\to+\infty$, $\Pi(\rho)=2\pi$. Плоскость с метрикой $ds^2=d\rho^2+\operatorname{sh}^2\rho\,d\varphi^2$ является *плоскостью Лобачевского*.

99. а) Линии $u^2+(v-v_0)^2=a^2$, $v>0$, и линии $u=u_0$, $v>0$; a, u_0, v_0 — произвольные постоянные; б) $K=-1$.

102б. Нужно различать два случая. 1) Если $\varphi'(t)=0$ для некоторого момента времени t, то движение происходит по лучу $\varphi=\text{const}$ по закону $m\rho''=f(\rho,\varphi)$, где m — масса точки, $f(\rho,\varphi)$ — величина силы. 2) Если $\varphi'(t)\neq 0$ для некоторого момента t, то это неравенство сохраняется для всех t и (при $\rho>0$) справедливо уравнение

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}+\frac{f(\rho,\varphi)}{am}=0$$

(*формула Бине*). Здесь a — положительная постоянная, равная скалярному квадрату секториальной скорости. (Иначе говоря, $a=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}_t'|^2=\text{const}>0$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор движущейся точки.)

103. $\mathscr{L} \in C^{\infty}$. Точка распрямления $t = 0$.

104. $\boldsymbol{r}(t) = \int f(t)\,\boldsymbol{\tau}(t)\,dt$, где $f(t) > 0$ — произвольная непрерывная функция.

107. Касательная $x = y = 0$. Главная нормаль $y = 2$, $z = 0$. Бинормаль $x = 0$, $y = 2$. Плоскости трехгранника: соприкасающаяся $z = 0$, нормальная $y = 2$, спрямляющая $x = 0$. Соприкасающаяся окружность $z = 0$, $(x - (1/\sqrt{6}))^2 + (y - 2)^2 = 1/6$.

108. а) $k = \varkappa = \dfrac{\sqrt{6}}{(1 + 3t^2)^2}$; б) $k = \varkappa = \dfrac{1}{3(t^2 + 1)^2}$.

109. а) $k = \dfrac{\sqrt{2}}{s\sqrt{3}}$, $\varkappa = \dfrac{-1}{s\sqrt{3}}$; б) $k = \varkappa = \dfrac{a}{2a^2 + s^2}$.

110. Дуга с положительным кручением на кривой Вивиани, ограниченная точками уплощения этой кривой и расположения на сфере радиуса $R = 4$.

111. $\boldsymbol{\zeta} = \varkappa\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\beta}$ (*вектор Дарбу*).

112. а) $k_1 = \dfrac{1}{k}\sqrt{k^2 + \varkappa^2} = |\sec\varphi|$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\varkappa}{k}$;

б) $\varkappa_1 = \dfrac{k\dot{\varkappa} - \dot{k}\varkappa}{k(k^2 + \varkappa^2)} = \dfrac{d\varphi}{ds_1}$, где s_1 — натуральный параметр на сферической индикатрисе касательных;

в) $k_2 = \sqrt{1 + \dfrac{(k\dot{\varkappa} - \dot{k}\varkappa)^2}{(k^2 + \varkappa^2)^3}} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{d\varphi}{ds_2}\right)^2}$, где s_2 — натуральный параметр на сферической индикатрисе главных нормалей.

113. а) $k^* = \dfrac{1}{|\varkappa|}\sqrt{k^2 + \varkappa^2}$; б) $\varkappa^* = \dfrac{\varkappa\dot{k} - \dot{\varkappa}k}{\varkappa(k^2 + \varkappa^2)}$.

114. $\boldsymbol{r}(t) = \int f(t)\,[\boldsymbol{\beta}(t) \times \boldsymbol{\beta}'(t)]\,dt$, где $f(t) \neq 0$ — произвольная непрерывная функция.

115. $\boldsymbol{o}$.

120. а — б). $\cos\alpha = \dfrac{4A^2x_0y_0}{\sqrt{(1 + 4A^2x_0^2)(1 + 4A^2y_0^2)}}$;

в) $\sigma(\mathscr{D}_1) = \sigma(\mathscr{D}_2) = \displaystyle\iint\limits_{\mathscr{D}_0} \sqrt{1 + 4A^2(x^2 + y^2)}\,dx\,dy$;

г) $\sigma(\mathscr{D}_1^*) = \sigma(\mathscr{D}_2^*) = 4A^2 \displaystyle\iint\limits_{\mathscr{D}_0} \dfrac{dx\,dy}{[1 + 4A^2(x^2 + y^2)]^2}$.

122. 0.

123. а) $K = -\dfrac{1}{4\operatorname{ch}^2 x}$, $H = -\dfrac{e^{3x}\sin y}{2(1 + e^{2x})^{3/2}}$;

б) $K = \dfrac{3}{(1 + 3xy + 5z)^2}$, $H = \dfrac{2 + 3z}{(1 + 3xy + 5z)^{3/2}}$;

в) $K = \dfrac{f_{xx}g_{yy}}{(1 + f_x^2 + g_y^2)^2}$, $H = -\dfrac{(1 + g_y^2)\,f_{xx} + (1 + f_x^2)\,g_{yy}}{2\,(1 + f_x^2 + g_y^2)^{3/2}}$.

129. Асимптотические линии $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Проекции линий кривизны на плоскость (x, y) задаются уравнениями:

$$Ay + \sqrt{1 + A^2y^2} = C_1(Ax + \sqrt{1 + A^2x^2}),$$

$$(Ay + \sqrt{1 + A^2y^2})(Ax + \sqrt{1 + A^2x^2}) = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные положительные постоянные.

130. В полярных координатах (ρ, φ) асимптотические линии имеют уравнения: $\varphi = \frac{m\pi}{3}$, $\rho > 0$ $(m = 0, 1, \ldots, 5)$; $\rho = C_1\left|\cos\frac{3\varphi}{2}\right|^{-2/3}$; $\rho = C_2\left|\sin\frac{3\varphi}{2}\right|^{-2/3}$; C_1, C_2 — произвольные положительные постоянные.

131. Пусть (ρ, φ, z) — цилиндрические координаты, $\rho = 0$ на AB, $z = 0$ на плоскости P. Уравнение поверхности S имеет вид $z = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ — произвольная гладкая функция.

132. Если $AB \parallel P$, то поверхность S либо не определена, либо представляет собой часть плоскости, параллельной P. Если $\mathscr{L}$ пересекает AB, то для точки пересечения нельзя однозначно определить прямолинейную образующую искомой поверхности. Предположим поэтому, что AB не пересекается с $\mathscr{L}$, но пересекает плоскость P. Точку пересечения P и AB примем за начало координат, плоскость P — за координатную плоскость $z = 0$. Пусть $\boldsymbol{a} = \{x_0\ y_0, 1\}$ — направляющий вектор прямой AB, $\boldsymbol{r}(u) = \{f(u), g(u), h(u)\}$ — уравнение линии $\mathscr{L}$. Тогда коноид имеет уравнение

$$\boldsymbol{R}(u, v) = v\boldsymbol{r}(u) + (1 - v)\,h(u)\,\boldsymbol{a}$$

или, что то же самое,

$$\boldsymbol{R} = \{x_0h + v(f - x_0h),\ y_0h + v(g - y_0h),\ h\}.$$

Прямолинейные образующие коноида $u = \text{const}$ и $v = 0$.

133. а) При подходящем выборе координат в пространстве и параметров на поверхности имеем

$$\boldsymbol{R}(u, v) = \{u \cos v \sin\alpha,\ u \sin v \sin\alpha,\ av + u\cos\alpha\}.$$

б) Образ прямой $u = 0$ — окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, покрытая бесконечно много раз. Образ прямой $v = v_0$ — открытая полуокружность на окружности $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \cos v_0 \cos\alpha + y \sin v_0 \sin\alpha + z\cos\alpha = 0$, ограниченная точками $\pm(\cos v_0 \cos\alpha,\ \sin v_0 \cos\alpha,\ -\sin\alpha)$.

134. а) $\boldsymbol{R}(u, v) = \{a(\cos v - u\sin v),\ a(\sin v + u\cos v),\ b(u + v)\}$.

б) Сферический образ состоит из двух окружностей: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

135. а) $\boldsymbol{R}(\theta, \varphi) = \{a\cos\theta\cos\varphi,\ a\cos\theta\sin\varphi,\ a\sin\theta\}$; $ds^2 = a^2(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2)$; $\sigma = 4\pi a^2$;

б) $(\boldsymbol{n}, d^2\boldsymbol{R}) = -d\theta^2 - \cos^2\theta\, d\varphi^2$; линиями кривизны являются всевозможные гладкие кривые на сфере;

в) $H = -\frac{1}{a}$; г) $K = \frac{1}{a^2}$; д) $|k_g| = \frac{1}{ar}\sqrt{a^2 - r^2}$;

е) большие окружности сферы.

136. а) $x = a\sin t,\quad z = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right),\ 0 < t < \pi.$

б) $R(t, \varphi) = \left\{a\sin t\cos\varphi,\ a\sin t\sin\varphi,\ a\left(\cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\right\}.$

При $0 < t < \pi/2$ и при $\pi/2 < t < \pi$ поверхность принадлежит классу C^{∞}. При $t = \pi/2$ гладкость нарушена (*ребро* псевдосферы). Меридиан $\varphi = \varphi_0$ отображается на гауссову сферу в меридиан $\varphi = \varphi_0$ с выброшенной точкой $\theta = 0$. Параллель $t = t_0$ отображается в параллель $\theta = -t_0$ при $0 < t_0 < \pi/2$ и в параллель $\theta = t_0 - \pi/2$ при $\pi/2 < t_0 < \pi$. Для ребра псевдосферы ($t = \pi/2$) сферическое отображение не определено.

в) $ds^2 = a^2(\operatorname{ctg}^2 t\, dt^2 + \sin^2 t\, d\varphi^2)$; $\sigma = 4\pi a^2$.

г) $(\boldsymbol{n}, d^2\boldsymbol{R}) = -dt^2 + \sin^2 t\, d\varphi^2$. Линии кривизны — меридианы и все параллели, кроме ребра псевдосферы ($t = \pi/2$).

д) $H = \frac{1}{a}\operatorname{ctg} 2t.$ е) $K = -\frac{1}{a^2}.$ ж) $k_g = \begin{cases} +\frac{1}{a}, & \text{если } 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ -\frac{1}{a}, & \text{если } \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$

з) $\varphi = \varphi_0 \pm \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}.$ и) $k_g = \pm\frac{2\sin t}{a}$, $\Pi = 0$; $\Pi_1 = \pm\pi$.

к) На меридианах вводится новая координата

$u = a\ln\sin t$, если $0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}$, $u = -a\ln\sin t$, если $\frac{\pi}{2} \leqslant t < \pi$. Тогда

$$x = ae^{-\frac{1}{a}|u|}\cos\varphi,\quad y = ae^{-\frac{1}{a}|u|}\sin\varphi,\quad z = u + a[\ln(1+w) - w]\operatorname{sign} u,$$

где $w = \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{a}|u|}}$; $ds^2 = du^2 + e^{-\frac{2}{a}|u|}d\varphi^2$.

л) $\varphi = \varphi_0 \pm \frac{a}{2c}\sqrt{1 - c^2e^{-\frac{2}{a}|u|}}$.

137. а) $R(x, \varphi) = \{x,\ \operatorname{ch} x\cos\varphi,\ \operatorname{ch} x\sin\varphi\}$; $ds^2 = \operatorname{ch}^2 x\,(dx^2 + d\varphi^2)$; $K = -\operatorname{ch}^{-4} x$. б) $\sigma = \pi(2a + \operatorname{sh} 2a)$; $\sigma^* = 4\pi\operatorname{th} a$.

в) $(\boldsymbol{n}, d^2\boldsymbol{R}) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}(d\varphi^2 - dx^2)$; $H = 0$.

г) $\varphi = \varphi_0 \pm x$; $k_g = \pm\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$; $\Pi = \pm\ln\operatorname{ch} a$.

д) На гауссовой сфере введем координаты (φ, θ), так что $x = \sin\theta$, $y = \cos\theta\cos\varphi$, $z = \cos\theta\sin\varphi$. Тогда образы асимптотических линий будут иметь уравнения $\theta = \pm\arcsin\operatorname{th}(\varphi + c)$.

е) $\varphi = \varphi_0 + c\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - c^2}}$, где $c = \operatorname{ch} x_0\sin\alpha_0$.

141. $K = 0$.

142. $H = \frac{1}{2\rho}\cos\alpha = \frac{1}{2l}\operatorname{ctg}\alpha$, где ρ — расстояние рассматриваемой точки конуса от его оси, l — расстояние этой точки от вершины конуса. Знак H выбран исходя из предположения, что $\boldsymbol{n}$ направлен к оси конуса.

143. а) $K=0$; б) $H=\frac{-\varkappa}{2kv}$; в) $u=\text{const}$, $u+v=\text{const}$.

144. $H=0$.

145. $|H|=1/2\rho$ на S_1 и на S_2.

146. а) $K=-\frac{k\cos\varphi}{a(1-ak\cos\varphi)}$; б) $H=-(1-ak\cos\varphi)^2$;

в) $u=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$; г) $\alpha=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak(u)\cos\varphi}{1-ak(u)\cos\varphi}}$;

д) $u=u_0+$

$$+(1-\lambda)\cos\alpha_0\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{a\,dt}{(1-\lambda\cos t)\sqrt{(1-\lambda\cos t)^2-(1-\lambda)^2\cos^2\alpha_0}},$$

где $\lambda=a/b$.

147. $u=\text{const}$, $\varphi=\varphi_0-\int\varkappa(u)\,du$.

148. $u\pm v=\text{const}$.

155. $d\boldsymbol{n}^2=2H(\boldsymbol{n},d^2\boldsymbol{R})-K\,ds^2$.

156. а) $x=a+b-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}y^2+\frac{1}{b}z^2\right)$;

б) $y=a-b+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{b}-\frac{y^2}{a-b}\right)$; в) $z=\frac{1}{2b}(y-a)^2-b$.

158. $k=\frac{1}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$. Соприкасающаяся окружность

$$\begin{cases} ay-bz-a^2+b^2=0,\\ x^2+\left(y-\frac{a^3}{a^2+b^2}\right)^2+\left(z-\frac{b^3}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

159. $k=\frac{1}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$. Соприкасающаяся окружность

$$\begin{cases} bx+az=a^2,\\ \left(x-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{a^3}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

160. $\sigma^*=\sigma/R^2$.

162. $v=c_1\pm\int\frac{c_2\,du}{\sqrt{(u^2+A^2)(u^2+A^2-c_2^2)}}$.

163. Траектория — геодезическая $u=\sec(v-v_0)$.

165. Точки пересечения $u=0$, $\varphi=\frac{2}{3}m\pi$, где m — целое число. Эти же точки являются точками самопересечения линии $\mathscr{L}_1$.

166. $v=\pi$.

167. а) $k_g=\frac{(Bv')'}{[1+(Bv')^2]^{3/2}}+\frac{Bv'}{\sqrt{1+(Bv')^2}}$;

б) $k_g=1$ (эта линия — *орицикл* на плоскости Лобачевского).

168. $\Pi=\int\limits_{v_1}^{v_2}B_u(u_0,v)\,dv$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бляшке В., Дифференциальная геометрия, М.— Л., ОНТИ, 1935.

2. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, том I, М., Гостехиздат, 1957.

3. Житомирский О. К., Львовский В. Д., Милинский В. И., Задачи по высшей геометрии, часть II, Л.— М., ОНТИ, 1937.

4. Моденов П. С., Сборник задач по дифференциальной геометрии, М., Учпедгиз, 1949.

5. Монж Г., Приложение анализа к геометрии, М.— Л., ОНТИ, 1936.

6. Норден А. П., Дифференциальная геометрия, М., Учпедгиз, 1948.

7. Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, М., Наука, 1969.

8. Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, М., Гостехиздат, 1956.

9. Россинский С. Д., Евтушик Л. Е., Дифференциальная геометрия, методические указания для студентов-заочников II курса механико-математических факультетов государственных университетов, М., Изд-во МГУ, 1962.

10. Фиников С. П., Дифференциальная геометрия, М., Изд-во МГУ, 1961.