ЗАПАДНО-СИБИРСКИЙ ФИЛИАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Ю. Б. РУМЕР

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО 5-ОПТИКЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956

13-5-4

АННОТАЦИЯ

Монография, основанная на работах автора, посвященных пятимерной теории поля. Рассчитана на аспирантов и научных работников, специализирующихся в области теоретической физики.

Румер Юрий Борисович.

Исследования по 5-оптике.

Редактор *В. Т. Хозяинов.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.* Корректор *И. Л. Едкся.*

Сдано в набор 6/I 1956 г. Подписано к печати 11/IV 1956 г. Бумага $84 \times 108^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 4,75. Условн. печ. л. 7,79. Уч.-изд. л. 7,63. Тираж 3000 экз, Т-04112. Цена книги 3 р. 80 коп. Заказ № 941.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности. 4-я типография им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Проблема построения единой теории электричества и тяготения возникла почти непосредственно вслед за появлением теории тяготения Эйнштейна. Представлялось естественным и заманчивым получить уравнения тяготения и электродинамики, исходя из единого общего принципа; казалось, что построение единой теории поля приведет к более глубокому пониманию природы и даст возможность предсказать и обнаружить новые, специфические, электрогравитационные эффекты.

Эти надежды пока не оправдались. Все предложенные до сих пор многочисленные варианты единой теории поля приводили лишь к формальному объединению уравнений Эйнштейна и Максвелла, но не к новому познанию природы. Неудачи в попытках достигнуть на этом пути прогресса привели к тому, что интерес физиков к этой, перешедшей к нам по наследству от доквантовой физики проблеме в значительной степени остыл и ею продолжали заниматься больше математики-геометры, чем физики.

Причина этому заключается в том, что при исследовании свойств электромагнитного и гравитационного полей физик-экспериментатор обладает существенно различными возможностями.

В случае электродинамики он может создавать в лабораторной обстановке переменные в пространстве и времени поля и исследовать их свойства. Уравнения Максвелла являются математической формулировкой результатов экспериментов Фарадея. Предсказанные теорией электромагнитные волны были экспериментально обнаружены и нашли широкое применение в технике.

В случае тяготения экспериментатор лишен возможности создавать переменные в пространстве и времени гравитационные поля, доступные наблюдению на опыте; единственные поля, находящиеся в его распоряжении, это постоянные гравитационные поля Земли и Солнца. Следует считать скорее случайностью возможность наблюдать релятивистские эффекты векового движения перигелия Меркурия и искривление лучей света вблизи Солнца. Обнаружение предсказываемых теорией гравитационных волн лежит далеко за пределами возможностей эксперимента. Поэтому, в отличие от уравнений электродинамики, уравнения теории тяготения были получены не в результате математической формулировки обнаруженных на опыте закономерностей, а исходя из принципиальных соображений о возможности общековариантной формулировки законов природы в произвольной системе координат.

Поэтому естественно, что все попытки обобщения теории тяготения в направлении единой теории тяготения и электричества неизбежно носили формально математический характер и не могли опираться на эксперимент.

В попытках построения единой теории поля сразу же наметились два направления.

Первое заключается в отказе от мероопределения Римана в четырехмерном пространственно-временном континууме общей теории относительности и в переходе к более общим неримановым геометриям. Обнаружилось, что перед исследователем-математиком открывается большой простор в выборе возможных вариантов таких геометрий. Почти при любом выборе удается получить геометрические величины, которые могут быть интерпретированы как потенциалы электромагнитного поля. Неоднозначность в выборе вариантов неримановой геометрии и отсутствие общего физического принципа, который сделал этот выбор однозначным, лишает это направление интереса и физического содержания.

Второе заключается в введении пятого дополнительного измерения пространства при сохранении мероопределения Римана в пятимерном пространстве. Для того чтобы прийти к согласованию с опытом, который не обнаруживает зависимости макроскопических полей от пятой дополнительной координаты, на мероопределение в пятимерном пространстве накладывается дополнительное жесткое требование независимости метрических потенциалов от вводимой дополнительной пятой координаты, так называемое *условие цилиндричности*.

Неудовлетворительность этого направления сразу очевидна. В самом деле, введение пятого дополнительного измерения пространства, существование которого, однако, не может быть обнаружено, поскольку одновременно постулируется независимость всех полей от пятой дополнительной координаты, представляется крайне искусственным.

Однако, как показали в 1938 г. Эйнштейн и Бергман, можно ввести представление о пятимерном пространстве, не вступая в конфликт с обнаруживаемой на опыте четырехмерностью макроскопических полей и не налагая на метрику условия цилиндричности. Для этого достаточно предположить, что пятимерное пространство топологически замкнуто в пятом измерении и что период пятой координаты имеет микроскопическую величину, которую в первом приближении можно положить равной нулю.

Наглядной двумерной моделью такого топологического замкнутого в одном из измерений пространства является поверхность бесконечно протяженного цилиндра, радиус которого обозначим через $b/2\pi$. Пусть на поверхности такого цилиндра задано какое-нибудь скалярное поле $W(x, S)$, периодичное в координате S с перидом b. Рассмотрим два предельных случая.

1. *Макроскопическое поле*, когда изменениями поля на расстояниях порядка b можно пренебречь. Такое поле приближенно удовлетворяет условию цилиндричности и в своих проявлениях обнаруживается как одномерное, зависящее только от координаты x.

2. *Ультрамикроскопическое поле*, когда радиус цилиндра $b/2\pi$ велик по сравнению с расстояниями, на которых заметно изменяется поле. При рассмотрении такого поля (на небольшой части поверхности цилиндра) можно пренебречь топологической замкнутостью поверхности. В своих проявлениях такое поле обнаруживается как двумерное, зависящее от двух равноправных координат x и S.

Промежуточный случай осуществляет *микроскопическое поле*, которое заметно изменяется на расстояниях порядка b. В этом случае учет топологической замкнутости поверхности цилиндра является существенным.

Возвратимся к пятимерному пространству Эйнштейна и Бергмана и обозначим пятую координату через S и период ее через b. Составляющие любого поля в таком пространстве являются функциями всех пяти координат: $W(x, y, z, t, S)$, причем периодическими в пятой координате S с периодом b.

Пока мы имеем дело с макроскопическими полями, мы можем пренебрегать их периодической зависимостью от пятой координаты и рассматривать их как четырехмерные.

При переходе к рассмотрению микроскопических полей учет периодической зависимости от пятой координаты становится существенным. Принципиально должны существовать эффекты, в которых проявляется эта периодичность. По существу, речь идет о введении в теорию поля новой мировой постоянной b, причем классические (макроскопические) теории получаются лишь в результате предельного перехода $b \to 0$.

Остается, однако, открытым вопрос о физическом смысле и размерности пятой дополнительной координаты, в силу чего вся теория сохраняет формальный характер.

Можно, однако, прийти к представлению о топологически замкнутом пятимерном пространстве совершенно с «другого конца», независимо от попыток построения единой теории тяготения и электричества. Этот путь ведет к обнаружению возможности приписать пятой координате S физический смысл действия, ее периоду b численную величину постоянной Планка h и приводит к глубокому синтезу геометрических идей, заложенных в общей теории относительности с идеями квантовой теории. Привычное в современной физике разделение на «макроскопику» и «микроскопику», связанное с величиной постоянной Планка h, находит свое геометрическое отображение в понятиях «четырехмерия» и «пятимерия».

Путь к «пятимерию», о котором идет речь в этой книге, заключается в обнаружении до сих пор не отмеченной, далеко идущей симметрии уравнений релятивистской механики в пространстве, времени и действии. Наряду с трехмерной формулировкой Эйнштейна и четырехмерной формулировкой Минковского оказывается возможной новая пятимерная формулировка уравнений релятивистской механики.

В пятимерной формулировке задача классической релятивистской механики о движении заряженной материальной точки в заданных внешних гравитационном и электромагнитном полях оказывается эквивалентной задаче геометрической оптики о распространении лучей света в пятимерном пространстве Римана координат, времени и действия, на мероопределение которого наложено условие цилиндричности. Поэтому вся излагаемая в этой книге теория получила название пятимерной оптики.

Было бы, однако, неверным рассматривать пятимерную оптику только как один из вариантов единой теории поля; ее основное содержание заключается скорее в геометризации основных понятий квантовой физики, поскольку в ней квантование обнаруживается как проявление периодической зависимости всех физических полей от пятой координаты действия. Поскольку само «пятимерие» оказывается квантовым эффектом, становятся понятными неудачи всех предшествующих попыток построения пятимерных единых теорий поля на базе одних лишь классических представлений без существенного привлечения квантовых понятий.

Перейдем к краткому изложению содержания книги. В первой главе обнаруживается далеко идущая симметрия уравнений классической релятивистской механики в пространстве, времени и действии и показана целесообразность интерпретации действия как пятой дополнительной координаты пространства.

Во второй главе классическая релятивистская механика заряженной материальной точки излагается как геометрическая оптика в пятимерном пространстве координат, времени и действия.

В третьей главе излагается классическая («макроскопическая») единая теория поля тяготения и электричества в предположении, что периодической зависимостью составляющих метрического 5-тензора от пятой координаты действия можно пренебречь.

Первые три главы излагают те разделы пятимерной оптики, которые условно можно назвать классическими, поскольку в них рассматривался только предельный случай $h \to 0$.

В четвертой и шестой главах излагается квантовая механика как волновая оптика в пятимерном пространстве координат, времени и действия, топологически замкнутом в координате действия с периодом, равным h. В связи с этим отметим, что задача о распространении волн в многомерных пространствах часто рассматривалась в математической физике. Но никто никогда не ставил перед собой задачи исследовать волновое движение в пространствах, топологически замкнутых в одном из измерений. Всякий, кто приступил бы к подобному исследованию, был бы поражен, встретив столь характерные черты «квантовых» явлений, возникающих в связи с топологической замкнутостью пространства, в котором исследуется волновое движение.

В пятой главе излагается специальный математический аппарат, удобный для ковариантной формулировки уравнений поля в пятимерном пространстве Римана. Этот аппарат эквивалентен обычному тензорному анализу, но удобен в том отношении, что позволяет сразу записать уравнения волновой пятимерной оптики в градиентно-инвариантном виде.

Следуя задачам, которые ставит перед собой эта монография, при изложении квантовой механики как волновой пятимерной оптики всегда рассматривается лишь частный случай, когда зависимостью метрических полей от пятой координаты действия можно пренебречь. Переход к рассмотрению общего случая, когда эта зависимость учитывается, является предметом дальнейших исследований.

Пятимерная оптика по-новому ставит вопрос о взаимосвязи пространства, времени и материи. Следует особенно подчеркнуть, что пятимерное пространство координат, времени и действия не является физическим пространством общей теории относительности (расширенным на одно дополнительное измерение), а конфигурационным пространством для частицы, движение которой рассматривается. Об этом подробно говорится в § 7. Однако сказанного там далеко недостаточно для полного разъяснения возникающих вопросов. Пятимерная оптика дает новое, чисто геометрическое обоснование квантовой механики, и возникающие в связи с этим философские и методологические вопросы требуют тщательного анализа и углубленного изучения. Автор надеется вернуться к этим вопросам в специальной работе.

ГЛАВА I

ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

§ 1. История вопроса

В 1891 г. Ф. Клейн по поводу работ Гамильтона по оптике и механике писал:

«Гамильтон встретился тут с представлениями корпускулярной теории, по которой определение траектории светового луча, проходящего через какую-нибудь неоднородную (но изотропную) среду, является специальным случаем обычной механической задачи о движении материальной точки.

Мы можем сейчас же добавить, что ограничение имеющимся здесь частным случаем несущественно и что каждая механическая задача о движении материальной точки с помощью пространства высшего числа измерений может быть сведена к определению пути светового луча, проходящего в соответствующей среде» [1].

В примечаниях Клейн указывает, что в лекциях, читанных в 1891 г. в Геттингене, он вывел всю теорию Гамильтона — Якоби из системы квазиоптических представлений в пространстве высшего числа измерений.

Десять лет спустя он с горечью отмечает, что эти идеи, изложенные на съезде естествоиспытателей в Галле, «не встретили того общего признания, на которое я рассчитывал» [2].

Отметим, что приведенные слова Клейна написаны за много лет до появления теории относительности и квантовой механики.

С началом нашего столетия интерес Клейна к этому кругу идей начинает остывать и до конца жизни он к ним уже не возвращается. Ни открытие релятивистской механики, ни появление и развитие гипотезы световых квантов не побудили его вернуться к разработке покинутого круга идей.

В нашем столетии дальнейшее развитие идей, столь близких когда-то Клейну, началось, как это часто бывает в истории науки, настолько с других позиций, что не привлекло его внимания и оставило безучастным. Мы имеем в виду развитие «пятимерных» единых теорий тяготения и электричества.

Что же касается обнаруженной Клейном возможности интерпретировать механику как квазиоптику в пространстве бо́льшего числа измерений, то она вплоть до наших дней оставалась позабытой и незамеченной авторами многочисленных пятимерных обобщений общей теории относительности. Мы увидим, однако, что между идеями «пятимерия» и оптико-механической аналогии существует тесная и глубокая связь.

Наша задача состоит сейчас в том, чтобы вывести основные уравнения геометрической оптики и классической релятивистской механики в таком виде, чтобы по возможности полнее выявить их сходство и различие и усмотреть, в каком смысле задача оптики является частным случаем задачи механики. Начнем с оптики.

§ 2. Принцип наименьшего времени в оптике

Рассмотрим задачу о траекториях лучей света в неоднородной (но изотропной) оптической среде, показатель преломления $N(\boldsymbol{r})$ которой не зависит от времени. Согласно принципу наименьшего времени траектория луча света, проходящего через две точки $\underline{\boldsymbol{r}}$ и $\overline{\boldsymbol{r}}$, выделяется из семейства бесконечно близких кривых, соединяющих эти две точки тем, что время $T(\underline{\boldsymbol{r}}, \overline{\boldsymbol{r}})$, затрачиваемое на прохождение луча вдоль действительной траектории, оказывается минимальным:

$$\delta T(\underline{\boldsymbol{r}}, \overline{\boldsymbol{r}}) = \delta \int\limits_{\underline{\boldsymbol{r}}}^{\overline{\boldsymbol{r}}} \frac{N}{c}\, d\sigma. \qquad (1,1)$$

Здесь $d\sigma$ — элемент дуги луча, c — скорость света в пустоте. Обозначая через n_i единичный вектор, касательный к траектории луча, имеем:

$$d\sigma = n_i\, dx^i, \quad n_i = dx^i/d\sigma, \quad \sigma_{ik} n_i n_k = 1, \qquad (1,2)$$

и, следовательно,

$$d\sigma^2 = \delta_{ik}\, dx^i\, dx^k, \qquad \delta\, d\sigma = n_i\, d\delta x^i.$$

Выполняя варьирование, получаем:

$$\delta T(\underline{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{c}\int\limits_{\underline{\boldsymbol{r}}}^{\bar{\boldsymbol{r}}} (\delta N\, d\sigma + N\delta\, d\sigma) = \frac{1}{c}\int\limits_{\underline{\boldsymbol{r}}}^{\bar{\boldsymbol{r}}} (\delta N n_k\, dx^k + N n_i\, d\delta\, x^i) -$$

$$= \frac{1}{c}\int\limits_{\underline{\boldsymbol{r}}}^{\bar{\boldsymbol{r}}} \left\{\frac{\partial N}{\partial x^i} n_k\, dx^k - d(N n_i)\right\} \delta x^i + \frac{1}{c}\left\{\overline{N n_i}\,\overline{\delta x^i} - \underline{N n_i}\,\underline{\delta x^i}\right\}, \quad (1,3)$$

где через $\underline{f}$ и $\bar{f}$ обозначены значения функции $f(\boldsymbol{r})$ в точках $\underline{\boldsymbol{r}}$ и $\bar{\boldsymbol{r}}$.

Если вариации на концах исчезают: $\overline{\delta x^i} = \underline{\delta x^i} = 0$, условие экстремума дает уравнение движения лучей в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{d\sigma}(N n_i) - \frac{\partial N}{\partial x^i} = 0, \quad (1,4)$$

$$n_i = \frac{dx^i}{d\sigma}. \quad (1,4')$$

Из трех уравнений (1,4) только два независимых. В самом деле, умножая (1,4) на n_i, получаем:

$$n_i \frac{d}{d\sigma}(N n^i) - \frac{\partial N}{\partial x^i} n^i = \frac{dN}{d\sigma} + N n_i \frac{dn_i}{d\sigma} - \frac{dN}{d\sigma} \equiv 0. \quad (1,5)$$

Будем теперь рассматривать время $T(\underline{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{r}})$, затрачиваемое лучом света на прохождение от точки $\underline{\boldsymbol{r}}$ до точки $\bar{\boldsymbol{r}}$, как функцию шести координат $\underline{\boldsymbol{r}}$ и $\bar{\boldsymbol{r}}$. Тогда из (1,3), поскольку вдоль действительной траектории луча интеграл исчезает, имеем:

$$\delta T(\underline{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{c}\left\{\overline{N n_i}\,\overline{\delta x^i} - \underline{N n_i}\,\underline{\delta x^i}\right\}, \quad (1,6)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial \overline{x^i}} = \frac{\overline{N n_i}}{c}, \quad (1,7)$$

откуда заключаем, что функция $T(r, \bar{r})$ при $\bar{r} = \text{const}$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 = \frac{N^2}{c^2}, \tag{1,8}$$

которое назовем *уравнением 3-эйконала.*

Преобразуем теперь уравнение (1,8) и введем, как это обычно принято в теории дифференциальных уравнений первого порядка, зависимое переменное T в качестве четвертого дополнительного переменного, т. е. будем искать зависящее от одного параметра Σ_0 решение уравнения (1,8) в неявном виде,

$$\Sigma(x, y, z, T) = \Sigma_0. \tag{1,9}$$

Имеем:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x^i} + \frac{\partial \Sigma}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x^i} = -\frac{\partial \Sigma}{\partial x^i} \Big/ \frac{\partial \Sigma}{\partial T} \tag{1,10}$$

и, подставляя в уравнение (1,8), получаем для функции Σ дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial y}\right)^3 + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial z}\right)^2 - \frac{N^2}{c^2}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial T}\right)^2 = 0, \tag{1,11}$$

которое назовем *уравнением 4-эйконала.*

Уравнение (1,11) выявляет релятивистский характер задачи о распространении световых лучей, который в эквивалентном ему уравнении (1,8) остается скрытым.

Отметим, что в нашем изложении введение времени в качестве четвертой координаты происходит независимо от соображений релятивистской симметрии и является обычным методическим приемом, хорошо известным в теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Наоборот, наш способ изложения может служить (конечно, далеко не физическим и достаточно искусственным) самостоятельным методом введения представлений релятивистской симметрии пространства — времени в описание оптических явлений.

С точки зрения теории тяготения задача о распространении лучей света в оптически неоднородной среде, формулируемая уравнением 4-эйконала (1,11), есть частный случай общей задачи о распространении лучей света в четырехмерном пространстве Римана:

$$x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3, \quad icT = x^4, \tag{1,12}$$

метрический тензор которого имеет специальный вид:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^2 \end{pmatrix} \tag{1,13}$$

и не зависит от четвертой координаты x^4.

В общем случае уравнение 4-эйконала

$$g^{ik}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^k} = 0 \tag{1,14}$$

формулирует задачу геометрической оптики о распространении лучей света в произвольном гравитационном поле.

Сделаем к этому два существенных замечания:

I. Уравнение 4-эйконала (1,14) *однородно* в метрических потенциалах g^{ik}. Это означает, что в задачах геометрической оптики имеют значение не десять метрических потенциалов g^{ik}, а только девять отношений между ними. Это, однако, не имеет больше места, если от приближения геометрической оптики перейти к формулировке той же задачи в рамках волновой оптики, поскольку уравнения Максвелла в гравитационном поле:

$$\frac{\partial \sqrt{-g}F^{ik}}{\partial x^k} = 0, \qquad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 \tag{1,15}$$

уже неоднородны в потенциалах g^{ik}.

II. Уравнение 4-эйконала выведено нами из принципа наименьшего времени. Этот вывод существенно связан с предположением, что показатель преломления N (или, в общем случае, метрические потенциалы g^{ik}) не зависят явно от времени. Однако хорошо известно, что уравнение 4-эйконала остается законным и тогда, когда метрические потенциалы g^{ik} зависят от всех четырех координат. В общем случае уравнение 4-эйконала может быть выведено как дифференциальное уравнение для характеристического многообразия $\Sigma(x^1, x^2, x^3, x^4) = \Sigma_0$ системы уравнений Максвелла.

Такой вывод дан в приложении.

§ 3. Принцип наименьшего действия в механике

Рассмотрим задачу о траекториях электрона [масса m, заряд $(-e)$] в электромагнитном поле. Будем все вычисления проводить в четырехмерной форме. Согласно принципу наименьшего действия траектория электрона (отрезок мировой линии), проходящая через два события $\underline{R}=(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{t})$ и $\overline{R}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t})$, выделяется из семейства бесконечно близких мировых линий, соединяющих эти два события тем, что действие $S(\underline{R}, \overline{R})$ вдоль действительной траектории оказывается минимальным *):

$$\delta S(\underline{R}, \overline{R}) = -\delta mc \int_{\underline{R}}^{\overline{R}} \{ds + g_i dx^i\} = 0. \qquad (1,16)$$

Здесь ds — элемент дуги мировой линии, $g_i = \frac{e}{mc^2} A_i$, где A_i — электромагнитные потенциалы.

Обозначая через u^i вектор 4-скорости, имеем:

$$ds = -u_i dx^i, \quad u^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad \delta_{ik} u^i u^k = -1, \qquad (1,17)$$

и, следовательно,

$$ds^2 = -\delta_{ik} dx^i dx^k, \qquad \delta ds = -u_i d\delta x^i.$$

Выполняя варьирование, получаем:

$$\delta S(\underline{R}, \overline{R}) = -mc \int_{\underline{R}}^{\overline{R}} \{\delta ds + \delta(g_i dx^i)\} =$$

$$= mc \int_{\underline{R}}^{\overline{R}} \left\{u_i d\delta x^i - \frac{\partial g_i}{\partial x^k} \delta x^k dx^i - g_i d\delta x^i\right\} =$$

$$= mc \int_{\underline{R}}^{\overline{R}} \left\{-du_i + \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^k} - \frac{\partial g_k}{\partial x^i}\right) dx^k\right\} \delta x^i +$$

$$+ mc \{(\overline{u}_i - \overline{g}_i)\delta \overline{x}^i - (\underline{u}_i - \underline{g}_i)\delta \underline{x}^i\}. \qquad (1,18)$$

*) Ср. [12], стр. 52.

Если вариации на концах исчезают: $\delta \underline{x}^i = \delta \bar{x}^i = 0$, то условие экстремума дает уравнения движения электрона в форме Лоренца:

$$\frac{du_i}{ds} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^k} - \frac{\partial g_k}{\partial x^i}\right) u_k, \tag{1,19}$$

$$\frac{dx^i}{ds} = u^i. \tag{1,19'}$$

Из четырех уравнений (1,19) только три независимых. В самом деле, умножая на u^i, получаем:

$$u^i \frac{du_i}{ds} \equiv 0. \tag{1,20}$$

Будем теперь рассматривать действие, взятое вдоль действительной траектории как функцию восьми координат $\underline{x}^i$ и $\bar{x}^i$.

Тогда интеграл в (1,18) исчезает и мы имеем:

$$\delta S(\underline{R}, \bar{R}) = mc\,\{(\bar{u}_i - \bar{g}_i)\,\delta \bar{x}^i - (\underline{u}_i - \underline{g}_i)\,\delta \underline{x}^i\}, \tag{1,21}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{x}^i} + \bar{g}_i mc = mc\bar{u}_i, \tag{1,22}$$

откуда следует, принимая во внимание $\delta_{ik} u^i u^k = -1$, что функция $S(\underline{R}, \bar{R})$, рассматриваемая как функция R при $\underline{R} = \mathrm{const}$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta_{ik}}{m^2c^2} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} + 2g_i \frac{1}{mc} \frac{\partial S}{\partial x^i} + (1 + \delta_{ik} g_i g_k) = 0, \tag{1,23}$$

так называемому релятивистскому уравнению Гамильтона — Якоби.

Используем теперь обнаруженную Клейном возможность, что каждая механическая задача о движении материальной точки с помощью пространства высшего числа измерений может быть сведена к определению пути светового луча, проходящего в соответствующей среде.

Для этого введем зависимую функцию $S(\underline{R}, R)$ в качестве пятой дополнительной независимой переменной, т. е.

будем искать зависящее от одного параметра Σ_0 решение уравнения (1,23) в неявном виде:

$$\Sigma(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ S) = \Sigma_0. \tag{1,24}$$

Имеем

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i} + \frac{\partial\Sigma}{\partial S}\cdot\frac{\partial S}{\partial x^i} = 0; \qquad \frac{\partial S}{\partial x^i} = -\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\Big/\frac{\partial\Sigma}{\partial S}, \tag{1,25}$$

и, подставляя в уравнение (1,23), получаем для функции Σ дифференциальное уравнение:

$$\delta_{ik}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\Sigma}{\partial x^k} - 2g_i\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\Sigma}{\partial S}mc + (1 + g_i g_k \delta_{ik})\, m^2c^2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial S}\right)^2 = 0, \tag{1,26}$$

которое назовем *уравнением 5-эйконала.*

Уравнение (1,26) легко обобщить на случай присутствия внешнего гравитационного поля, если записать его в общековариантном виде, как

$$g^{ik}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^k} - 2g^{ik}g_k\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\Sigma}{\partial S}mc + (1 + g^{ik}g_i g_k)\, m^2c^2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial S}\right)^2 = 0. \tag{1,26'}$$

С точки зрения геометрической оптики задача, формулируемая уравнением (1,26′), является частным случаем общей задачи геометрической пятимерной оптики, формулируемой уравнением 5-эйконала *)

$$G^{\mu\nu}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\Sigma}{\partial x^\nu} = 0 \tag{1,27}$$

о распространении лучей света в пятимерном пространстве Римана координат, времени и действия:

$$x = x^1,\quad y = x^2,\quad z = x^3,\quad ict = x^4;\quad \frac{S}{mc} = x^5. \tag{1,28}$$

*) Начиная с этого места и далее мы употребляем для обозначения 5-тензоров греческие индексы, сохраняя для обозначения 4-тензоров латинские индексы.

Контравариантный метрический 5-тензор этого пространства имеет следующий специальный вид:

$$G^{\mu\nu}=\left\lbrace\begin{array}{ccccc} g^{11} & g^{12} & g^{13} & g^{14} & -g^{1} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} & g^{24} & -g^{2} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} & g^{34} & -g^{3} \\ g^{41} & g^{42} & g^{43} & g^{44} & -g^{4} \\ -g^{1} & -g^{2} & -g^{3} & -g^{4} & 1+g^{ik}g_i g_k \end{array}\right\rbrace \tag{1,29}$$

и не зависит от пятой координаты действия x^5.

Мы переписываем (1,29) в сокращенном виде:

$$G^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} g^{ik} & -g^{i} \\ -g^{k} & 1+g^{ik}g_i g_k \end{pmatrix} \tag{1,29'}$$

и вычисляем ковариантные составляющие метрического тензора $G_{\mu\nu}$,

$$G_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} g_{ik}+g_i g_k & g_i \\ g_k & 1 \end{pmatrix}. \tag{1,30}$$

Выражения (1,30) легко проверить, вычисляя выражения

$$G_{\mu\nu}G^{\sigma\nu}=\delta_{\mu}^{\sigma}.$$

Обращаем внимание, что согласно (1,30)

$$G_{55}=1. \tag{1,31}$$

Сделаем к этому два существенных замечания:

I. Уравнение 5-эйконала *однородно* в метрических потенциалах $G^{\mu\nu}$. Это означает, что в задачах геометрической 5-оптики (классической релятивистской механики) имеют значение не пятнадцать метрических потенциалов $G_{\mu\nu}$, а только четырнадцать отношений между ними.

Поэтому ограничение $G_{55}=1$ несущественно и, следовательно:

Общая задача геометрической 5-оптики о распространении лучей света в пятимерном пространстве координат времени и действия, метрический 5-тензор которого $G_{\mu\nu}$ ограничен лишь одним условием — не зависеть от пятой координаты действия, эквивалентна задаче классической релятивистской механики о движении заряженной частицы с заданным отношением $\frac{e}{m}$ в гравитационном и электромагнитном полях:

$$g_{ik}=\frac{G_{ik}}{G_{55}}-\frac{G_{i5}}{G_{55}}\cdot\frac{G_{k5}}{G_{55}},\qquad A_i=\frac{mc^2}{e}\cdot\frac{G_{i5}}{G_{55}}. \tag{1,32}$$

II. Ограничение, налагаемое требованием независимости метрического тензора от пятой координаты действия, более существенно. Мы получили уравнение 5-эйконала из вариационного принципа наименьшего действия. Этот вывод существенно связан с предположением, что функция Лагранжа не зависит от пятой координаты действия. За сохранение этого требования говорят, как будто, и физические соображения. Все встречающиеся в природе макроскопические гравитационные и электромагнитные поля четырехмерны и не обнаруживают зависимости от дополнительной пятой координаты.

Поэтому мы пока сохраним это ограничение и перейдем к историческому обзору пятимерных обобщений общей теории относительности. Мы не ставим перед собой задачи дать здесь систематическое изложение многочисленных вариантов подобных обобщений, а остановимся только на выявлении связей заложенных в них идей с идеями оптико-механической аналогии.

§ 4. Пятимерные обобщения теории тяготения

После появления теории тяготения Эйнштейна *Т. Калуца* [3] (1921) был первым, обнаружившим возможность построения приближенной единой теории тяготения и электричества путем расширения четырехмерного пространственно-временного континуума общей теории относительности на одно дополнительное измерение. Ему удалось пока.ать, что траектория заряженной частицы может быть приближенно интерпретирована как геодезическая линия в пятимерном пространстве Римана, метрика которого существенно зависит от отношения заряда к массе рассматриваемой частицы, но не зависит от пятой дополнительной координаты (*условие цилиндричности*). Для того чтобы установить однозначное соответствие между пятнадцатью метрическими потенциалами пятимерного пространства $G_{\mu\nu}$

и четырнадцатью потенциалами тяготения и электромагнетизма (g_{ik}, A_i), следует согласно Т. Калуце положить

$$G_{ik}=g_{ik}, \quad G_{i5}=\frac{e}{mc^2}A_i, \quad G_{55}=1. \tag{1,33}$$

Независимо от Т. Калуцы к идее пятимерного обобщения теории тяготения пришел *Г. А. Мандель* [4] (1926), развивший эту идею значительно дальше Т. Калуцы.

В 1926 г., в связи с открытием волновой механики, появились, независимо друг от друга, две сходные по содержанию работы *О. Клейна* [5] и *В. А. Фока* [6], означавшие значительный шаг вперед. Отметим, что Клейн заимствовал идею пятимерия у Калуцы, а В. А. Фок у Манделя. Обоим авторам удалось показать, что траектория заряженной частицы может быть строго интерпретирована как геодезическая линия нулевой длины (геометрический луч) в пятимерном пространстве Римана, метрический тензор которого имеет вид (1.30), т. е.

$$G_{ik}=g_{ik}+\frac{e^2}{m^2c^4}A_iA_k, \quad G_{i5}=\frac{e}{mc^2}A_i, \quad G_{55}=1. \tag{1,33'}$$

Фактически эти авторы установили эквивалентность задачи классической механики и геометрической пятимерной оптики, т. е. независимо от Ф. Клейна обнаружили возможность сформулировать механику как квазиоптику в пространстве высшего числа измерений.

Больше того, они обнаружили, что и соответствующая задача волновой механики о движении частицы со спином нуль может быть сформулирована как задача волновой оптики о распространении скалярных волн в пятимерном пространстве, если на зависимость скалярной волновой функции W от пятой координаты наложить *условие цикличности*:

$$W(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)=U(x^1, x^2, x^3, x^4)\exp\left(\frac{imcx^5}{\hbar}\right). \tag{1,34}$$

В самом деле, если в волновое уравнение для 5-пространства

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=5}\frac{\partial^2 W}{\partial x^\alpha\,\partial x^\alpha}=0 \tag{1,35}$$

подставить выражение (1,34), то для функции $U(x^1, x^2, x^3, x^4)$ получается хорошо известное уравнение для волн материи:

$$\left\{\square - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right\} U(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0. \tag{1,36}$$

Однако дальнейшее развитие эти идеи не получили в основном потому, что физический смысл пятой дополнительной координаты оставался неизвестным. По этой же причине не удалось понять в их взаимной связи условие цилиндричности, налагаемое на метрические потенциалы пятимерного пространства, и условие цикличности, налагаемое на волновую функцию. Кроме того, очень скоро выяснилось, что для успешного развития волновой механики и ее многочисленных приложений привлечение представлений о пятимерном пространстве оказывается излишним.

Пятимерные теории оставались чисто формальными, объединяющими уже существующие, но не выводящими за их рамки, не приводящими к предсказанию новых специфических электрогравитационных эффектов, доступных, хотя бы принципиально, проверке на опыте.

Значительный прогресс мы находим в работе *Эйнштейна* и *Бергмана* [7] (1938), в которой пятое измерение получает некоторый физический смысл. В этой работе авторы отказываются от условия цилиндричности, налагаемого на метрические потенциалы в предыдущих работах. Поскольку, однако, наблюдаемые в природе макроскопические гравитационные и электромагнитные поля четырехмерны и не обнаруживают зависимости от пятой дополнительной координаты, необходимо допустить, что пятимерное пространство, по крайней мере приближенно, цилиндрично относительно пятого измерения. Из этих соображений авторы предположили, что пятимерное пространство топологически замкнуто в пятом измерении и что период пятой координаты (обозначаемый через b) имеет микроскопическую величину, которую в первом приближении можно положить равной нулю. Таким образом, в этой работе условие цилиндричности ослабляется и заменяется требованием микроскопической периодичности метрических потенциалов в пятой координате.

Поверхность бесконечно протяженного цилиндра радиуса $b/2\pi$ является двумерной моделью рассматриваемого пятимерного пространства. Пространственный слой толщины b, ограниченный двумя параллельными плоскостями, соответствующие точки которых отождествлены друг с другом, дает трехмерную модель пространства Эйнштейна и Бергмана.

Отказ от строгой цилиндричности влечет за собой далеко идущие физические следствия. Принципиально должны существовать эффекты, в которых проявляется постулируемая периодическая зависимость составляющих полей от пятой координаты. По существу дело идет о введении в теорию поля новой мировой постоянной b, причем классические теории поля получаются лишь в результате предельного перехода $b \to 0$.

Во всех приведенных работах остаются открытыми следующие вопросы:

1. Вопрос о физическом смысле и размерности пятой дополнительной координаты.

2. Вопрос о физическом смысле условия цилиндричности для метрических потенциалов и условия цикличности для волновых функций (Калуца, Мандель, О. Клейн, Фок).

3. Если отказаться от условия цилиндричности и заменить его, следуя Эйнштейну и Бергману, требованием микроскопической периодичности, то возникает вопрос, в каких явлениях природы эта постулируемая периодичность проявляется.

§ 5. Геометрический смысл постоянной Планка

Сопоставляя изложенное в предыдущих параграфах, мы можем считать установленным, что в приведенных работах пятая дополнительная координата имеет отчетливый физический смысл действия и что в этих работах нашли свое развитие забытые идеи Ф. Клейна о механике как квазиоптике в пространстве высшего числа измерений.

Одновременно мы получили и ответ на вопрос, в каком смысле задача оптики является частным случаем задачи механики. Обнаруживается, что задача оптики, формулируемая уравнением 4-эйконала, является четырехмерным частным случаем общей пятимерной задачи механики, формулируемой уравнением 5-эйконала.

Обращаясь специально к работе Эйнштейна и Бергмана, мы приходим к выводу, что новая мировая постоянная b — период пятой координаты — имеет размерность действия и что представляется разумным отождествить ее с постоянной Планка h.

Это и сделано в предложенной автором 5-оптике [8], основное содержание которой заключается в обосновании и развитии следующего положения.

Задача волновой оптики о распространении (тензорных и спинорных) волновых полей в пространстве Римана пяти измерений координат, времени и действия, которое топологически замкнуто в координате действия с периодом h, эквивалентна задаче квантовой механики о движении частицы с заданным отношением e/m (целым или полуцелым спином) в заданном внешнем поле.

Таким образом, 5-оптика приводит к несколько неожиданному синтезу идей квантовой механики с геометрическими идеями, заложенными в общей теории относительности, поскольку в ней постоянная Планка получает отчетливый геометрический смысл периода пятой координаты действия.

5-оптика дает следующие ответы на вопросы, оставшиеся открытыми в работах предшествующих авторов:

1. Пятая координата имеет физический смысл и размерность действия.

2. Условие цилиндричности для метрических потенциалов и условие цикличности для волновых функций заменяется единым требованием микроскопической периодической зависимости всех физических полей (гравитационного, электромагнитного и квантовых ψ-полей) от координаты действия. Период пятой координаты действия имеет универсальную величину постоянной Планка h.

3. Периодическая зависимость всех физических полей в природе от пятой координаты действия проявляется в квантовых явлениях. При переходе к классике $h \to 0$ все физические поля оказываются независимыми от координаты действия, т. е. удовлетворяют условию цилиндричности.

§ 6. Градиентная инвариантность

Возможность и целесообразность интерпретировать действие как дополнительную координату становится особенно ясной, если рассмотреть группу общих точечных преобразований всех пяти координат:

$$\left.\begin{aligned} x^i &= \bar{x}^i + f^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4, \bar{S}), \\ S &= \bar{S} + f(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4, \bar{S}). \end{aligned}\right\} \qquad (1,37)$$

Топологическая замкнутость 5-пространства в координате S накладывает на элементы группы (1,37) то существенное ограничение, что допускаются лишь функции f^i и f, которые периодичны в координате S с периодом h:

$$\left.\begin{aligned} f^i(x^1, x^2, x^3, x^4, S+h) &= f^i(x^1, x^2, x^3, x^4, S), \\ f(x^1, x^2, x^3, x^4, S+h) &= f(x^1, x^2, x^3, x^4, S). \end{aligned}\right\} \tag{1,38}$$

В связи с этим отметим, что «пятимерная группа Лоренца» — группа линейных преобразований всех пяти координат, оставляющих инвариантными квадратичную форму:

$$dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2+dS^2,$$

не является подгруппой группы (1,37), поскольку ее элементы не удовлетворяют дополнительным условиям (1,38).

Однако, как легко видеть, истинная группа Лоренца преобразований четырех координат x^1, x^2, x^3, x^4 является подгруппой группы (1,37).

В классическом приближении $h \to 0$ группа (1,37) переходит в подгруппу преобразований:

$$\left.\begin{aligned} x^i &= \bar{x}^i + f^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4), \\ S &= \bar{S} + f(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4), \end{aligned}\right\} \tag{1,39}$$

которая в свою очередь распадается на:

1. Подгруппу общих преобразований четырех координат x^1, x^2, x^3, x^4

$$\left.\begin{aligned} x^i &= \bar{x}^i + f^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4), \\ S &= \bar{S}. \end{aligned}\right\} \tag{1,40}$$

2. Подгруппу градиентных преобразований:

$$\left.\begin{aligned} x^i &= \bar{x}^i, \\ S &= \bar{S} + f(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4). \end{aligned}\right\} \tag{1,41}$$

Мы видим, что в 5-оптике группа градиентных преобразований не стоит особняком, а объединяется с группой общих преобразований четырех координат в группу общих преобразований всех пяти координат.

Из изложенного особенно ясно вытекает, что действие является величиной «координатного типа», поскольку оно, как и другие четыре координаты, определено лишь с точностью до аддитивной произвольной функции.

Это свойство действия было хорошо известно уже в дорелятивистской классической механике. Обнаружение этого же свойства у других четырех координат оказалось возможным лишь в общей теории относительности.

Если законы природы формулируются в виде ковариантных уравнений между 5-тензорами, то их градиентная инвариантность очевидна, поскольку группа градиентных преобразований является подгруппой общих преобразований пяти координат. При переходе к четырехмерной записи уравнений и выделения координаты действия следует следить за тем, чтобы градиентная ковариантность сохранялась. Выведем общие формулы преобразования 5-тензоров при градиентных преобразованиях (1,41).

По общим формулам

$$A^{\mu}=\bar{A}^{\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\nu}};\quad A_{\mu}=\bar{A}_{\nu}\frac{\partial \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \tag{1,42}$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned} &A^{i}=\bar{A}^{i}; && A_{i}=\bar{A}_{i}-\bar{A}_{5}\frac{\partial f}{\partial x^{i}};\\ &A^{5}=\bar{A}^{5}+\bar{A}^{i}\frac{\partial f}{\partial x^{i}}; && A_{5}=\bar{A}_{5}, \end{aligned}\right\} \tag{1,43}$$

откуда вытекает следующее правило.

Градиентно-инвариантными составляющими 5-тензора являются такие, которые контравариантны в индексах ($i=1$, 2, 3, 4) и ковариантны в индексе $\mu=5$.

В качестве примера рассмотрим составляющие метрического тензора $G_{\mu\nu}$. Согласно указанному правилу градиентно-инвариантными составляющими являются

$$G^{ik}=g^{ik},\quad G_{55}. \tag{1,44}$$

Составляющие G_{i5} преобразуются по формулам (1,43)

$$G_{i5}=\bar{G}_{i5}-\bar{G}_{55}\frac{\partial f}{\partial x^{i}}, \tag{1,45}$$

откуда, принимая во внимание (1,32), следует формула для преобразования электромагнитных потенциалов

$$A_{i}=\bar{A}_{i}-\frac{\partial f}{\partial x^{i}}. \tag{1,46}$$

§ 7. Физический смысл 5-пространства

Обратим внимание на формулы (1,32). Мы видим, что связь гравитационных потенциалов g_{ik}, фигурирующих в теории тяготения с метрическими потенциалами $G_{\mu\nu}$ 5-пространства, является *универсальной*, в то время как в выражениях связи электромагнитных потенциалов A_i с $G_{\mu\nu}$ входит отношение e/m для частицы, движение которой рассматривается.

Это показывает, что 5-пространство 5-оптики не является универсальным пространством общей теории относительности (расширенным на одно дополнительное измерение), а *конфигурационным пространством* для частицы, движение которой мы рассматриваем.

Рассмотрим подробнее вопрос о физическом смысле конфигурационного 5-пространства. Если мы последовательно отказываемся вводить в физику метафизические понятия абсолютного пространства и абсолютного времени, оторванных от материи и противопоставляемых ей, как некоторые самостоятельные сущности, мы принципиально не можем рассматривать движение отдельно взятой частицы вне связи с ее взаимодействием с остальной материей в мире.

Физика создала успешный метод для изучения поведения отдельно взятой частицы, взаимодействующей с остальной материей. Это — метод теории поля. В теории поля выделяемая частица фигурирует как пробная частица, а вся остальная материя в мире, взаимодействующая с ней, выступает в роли силового поля.

Методическое разделение единой материи на пробную частицу плюс внешнее поле дает возможность сопоставить пробной частице четырехмерное многообразие ее (трех пространственных и одной временной) координат. Мы будем это сопоставление называть *координацией* пробной частицы относительно всей материи в мире.

В теории относительности подробно описывают необходимые для координации материальной частицы операции и приспособления, как-то: посылка световых сигналов, тело отсчета, жесткие масштабы, часы. Уже одно это перечисление ясно показывает, что не имеет смысла говорить о координатах и времени изолированной частицы, оторванной от остальной материи.

Возникает вопрос о метрических и топологических свойствах четырехмерного многообразия координат, которые мы будем называть конфигурационным пространством для данной пробной частицы.

Ответ на этот вопрос может дать только опыт, причем с уточнением наших знаний может и должно уточняться содержание ответа на заданный вопрос. Во всяком случае, заранее нет никаких оснований и причин предполагать и постулировать, что метрические и топологические свойства конфигурационного пространства окажутся независимыми от физической природы выделяемой частицы (например, от ее массы, заряда и т. д.).

Приведем ответы, которые последовательно дают на поставленный вопрос специальная теория относительности, теория тяготения и 5-оптика.

1. Специальная теория относительности. Вне зависимости от физических свойств пробной частицы (ее массы, заряда и т. д.) ее конфигурационное пространство является пространством Минковского.

Это позволяет вместо конфигурационного пространства для данной пробной частицы ввести представление об универсальном пространстве специальной теории относительности.

Взаимодействие пробной частицы с остальной материей в мире учитывается путем введения, с одной стороны, силовых полей (гравитационных и электромагнитных), с другой стороны, приписыванием пробной частице ряда характеристик (массы, заряда и т. д.), величина которых определяет поведение пробной частицы в заданном внешнем поле.

2. Теория тяготения. Вне зависимости от физических свойств пробной частицы ее четырехмерное конфигурационное пространство является метрическим пространством Римана, метрика которого определяется характером гравитационного воздействия на пробную частицу всей остальной материи в мире.

Для гравитационного поля имеет место принцип эквивалентности, выражающий одно из основных свойств гравитационного поля. Его можно сформулировать следующим образом:

Тяготение и только оно одно является универсальным в том смысле, что все незаряженные тела, обладающие достаточно малой массой, движутся по одинаковому закону, Только благодаря принципу эквивалентности удается и в теории тяготения сохранить еще представление об универсальном четырехмерном пространстве общей теории относительности.

3. 5-оптика. Пятимерное конфигурационное пространство координат, времени и действия для заданной пробной частицы является метрическим пространством Римана, метрика которого зависит от отношения заряда к массе для данной пробной частицы и определяется характером гравитационного и электромагнитного воздействия на пробную частицу всей остальной материи в мире. Конфигурационное пятимерное пространство топологически замкнуто в координате действия, причем период пятой координаты имеет универсальную величину постоянной Планка h.

Итак, в 5-оптике уже нельзя, как это было еще возможно в теории тяготения, сохранить представление об универсальном пространстве, что, однако, с физической точки зрения оказывается и совсем ненужным.

Трудно переоценить роль и значение принципа эквивалентности в истории физики. Формулируя одно из основных свойств тяготения, он позволил геометризировать поле тяготения, сохраняя при этом привычное представление об универсальном пространстве. Хотя и наделенное неевклидовой метрикой, зависящей от распределения гравитационных масс, универсальное пространство общей теории относительности сохранило еще в себе характерные черты своего прообраза — абсолютного пространства Ньютона. Никогда теория тяготения не могла дать удовлетворительный ответ на вечный и неизбежный вопрос, — каким же образом гравитирующая материя искривляет пространство, в котором она локализована.

В дальнейшем принцип эквивалентности оказался тормозом, задержавшим развитие единой теории поля. Среди физиков укоренилось ошибочное мнение, что построение единой теории тяготения и электричества заключает в себе логическое противоречие.

Если бы так обстояло дело, пришлось бы удивляться, что сам Эйнштейн, потративший последние 25 лет жизни на проблему единой теории поля, не заметил этого противоречия.

5-оптика показывает, что четырехмерное пространство теории тяготения есть конфигурационное пространство для данной нейтральной пробной частицы, отражающее в своих метрических свойствах характер гравитационного воздействия всей остальной материи в мире на данную пробную частицу. Тем самым и вопрос о том, каким образом материя искривляет пространство, в котором она локализована, лишается всякого смысла.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод уравнения 4-эйконала из уравнений Максвелла

Пусть дано некоторое начальное многообразие $\Sigma(x^1, x^2, x^3, x^4) = \Sigma_0$, вдоль которого, в смысле начальных условий Коши, задано значение тензора F_{ik}.

Произведем преобразование координат:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \bar{x}^1(x^1, x^2, x^3, x^4), & \bar{x}^2 &= \bar{x}^2(x^1, x^2, x^3, x^4), \\ \bar{x}^3 &= \bar{x}^3(x^1, x^2, x^3, x^4), & \bar{x}^4 &= \Sigma(x^1, x^2, x^3, x^4), \end{aligned}\right\} \tag{1,47}$$

и запишем уравнения (1,15) в новых координатах, выделяя координату $\bar{x}^4$: $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$,

$$\frac{\partial \bar{F}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^4} + \frac{\partial \bar{F}_{\beta 4}}{\partial \bar{x}^\alpha} + \frac{\partial \bar{F}_{4\alpha}}{\partial \bar{x}^\beta} = 0, \tag{1,48}$$

$$\frac{\partial \sqrt{-\bar{g}}\,\bar{F}^{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\beta} + \frac{\partial \sqrt{-\bar{g}}\,\bar{F}^{\gamma 4}}{\partial \bar{x}^4} = 0, \tag{1,49}$$

$$\frac{\partial \bar{F}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma} + \frac{\partial \bar{F}_{\beta\gamma}}{\partial \bar{x}^\alpha} + \frac{\partial \bar{F}_{\gamma\alpha}}{\partial \bar{x}^\beta} = 0, \qquad \frac{\partial \sqrt{-\bar{g}}\,\bar{F}^{4\beta}}{\partial \bar{x}^\beta} = 0. \tag{1,50}$$

В новых координатах заданное многообразие $\Sigma(x^1, x^2, x^3, x^4) = \Sigma_0$ является координатной поверхностью $\bar{x}^4 = \Sigma_0$. Если из уравнений Максвелла можно вычислить производные в направлении нормали $\frac{\partial \bar{F}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^4}$, $\frac{\partial \bar{F}_{4\beta}}{\partial \bar{x}^4}$, выводящие из многообразия Σ, то оно называется *обыкновенным*, в противном случае *характеристическим*. Производные $\frac{\partial \bar{F}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^4}$ вычисляются из уравнений (1,48). Для вычисления производных $\partial\bar{F}_{4\beta}/\partial\bar{x}^4$ подставляем в (1,49)

$$\bar{F}^{4\alpha} = \bar{g}^{4\beta}\bar{g}^{\alpha\gamma}\bar{F}_{\beta\gamma} + (\bar{g}^{44}\bar{g}^{\alpha\beta} - \bar{g}^{4\beta}\bar{g}^{4\alpha})\bar{F}_{4\beta} \tag{1,51}$$

и получаем для определения $\dfrac{\partial\bar{F}_{4\beta}}{\partial\bar{x}^4}$ систему трех уравнений вида

$$(\bar{g}^{44}\bar{g}^{\alpha\beta} - \bar{g}^{4\beta}\bar{g}^{4\alpha})\frac{\partial\bar{F}_{4\beta}}{\partial\bar{x}^4} = S^\alpha. \tag{1,52}$$

Для того чтобы многообразие Σ было характеристическим, необходимо, следовательно, чтобы было

$$\operatorname{Det}(\bar{g}^{44}\bar{g}^{\alpha\beta} - \bar{g}^{4\beta}\bar{g}^{4\alpha}) = 0. \tag{1,53}$$

Корнем этого уравнения, не зависящим от значений тензора $\bar{g}^{\alpha\beta}$, является

$$\bar{g}^{44} = 0, \tag{1,54}$$

что и дает в системе координат $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$, $\bar{x}^4$ искомое условие, что многообразие $\bar{x}^4 = \Sigma_0$ является характеристическим. Возвращаясь к исходной системе координат, имеем:

$$\bar{g}^{44} = g^{ik}\frac{\partial\bar{x}^4}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{x}^4}{\partial x^k} = g^{ik}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^k} = 0, \tag{1,55}$$

т. е. уравнение 4-эйконала для характеристического многообразия $\Sigma(x^1, x^2, x^3, x^4) = \Sigma_0$.

ГЛАВА II

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ 5-ОПТИКА

§ 8. Уравнение 5-эйконала

В этой главе мы излагаем релятивистскую механику точки как геометрическую 5-оптику в конфигурационном пространстве Римана координат, времени и действия. Естественно, что мы не получим никаких новых результатов, выходящих за рамки классической релятивистской механики. Правда, общие формулы в пятимерной «оптической» формулировке приобретут более изящный и симметричный вид, чем в обычной четырехмерной.

Мы показали в § 3, что общая задача геометрической 5-оптики о распространении лучей в пятимерном пространстве Римана, формулируемая уравнением 5-эйконала

$$G^{\mu\nu}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^{\mu}}\cdot\frac{\partial\Sigma}{\partial x^{\nu}}=0, \tag{2,1}$$

эквивалентна задаче классической релятивистской механики о движении заряженной частицы с заданным отношением e/m в гравитационном и электромагнитном полях:

$$g_{ik}=\frac{G_{ik}}{G_{55}}-\frac{G_{i5}}{G_{55}}\cdot\frac{G_{k5}}{G_{55}},\quad A_i=\frac{mc^2}{e}\frac{G_{i5}}{G_{55}}, \tag{2,2}$$

причем мы обязаны в классическом приближении $h\rightarrow 0$ налагать на потенциалы $G_{\mu\nu}$ условие цилиндричности.

Поскольку уравнение 5-эйконала (2,1) однородно в потенциалах $G^{\mu\nu}$, мы можем, сохраняя общность, на протяжении всей этой главы полагать $G_{55}=1$ и принять для тензора $G_{\mu\nu}$ выражения формул (1,29) и (1,30)

$$G_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} g_{ik}+g_i g_k, & g_i \\ g_k & 1\end{pmatrix};\quad G^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} g^{ik}, & -g^i \\ -g^k, & 1+g^{ik}g_i g_k\end{pmatrix}. \tag{2,3}$$

Подставляя выражения (2,3) в (2,1), перепишем уравнение 5-эйконала в четырехмерной форме:

$$g^{ik}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^k}-2g^{ik}g_k\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^5}+$$
$$+(1+g^{ik}g_ig_k)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial x^5}\right)^2=0. \qquad (2,4)$$

Поскольку в классическом приближении $h\to 0$ поле не зависит от координаты x^5, перейдем к «укороченному» 4-эйконалу $S(x^1, x^2, x^3, x^4)$ по формуле

$$\Sigma(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)=\Pi_5 x^5+S(x^1, x^2, x^3, x^4), \qquad (2,5)$$

где Π_5 — постоянная. Подставляя (2,5) в (2,4), мы получим для функции $S(x^1, x^2, x^3, x^4)$ уравнение

$$g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}-\Pi_5 g_i\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^k}-\Pi_5 g_k\right)+\Pi_5^2=0, \qquad (2,6)$$

которое совпадает с уравнением Гамильтона—Якоби для частицы с массой $|Z|m$ и зарядом $\pm Ze$ (где Z — произвольное число), если постоянной Π_5 придать значение:

$$\Pi_5=\pm Zmc, \qquad (2,7)$$

$$g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\pm\frac{Ze}{c}A_i\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^k}\pm\frac{Ze}{c}A_k\right)+(Zmc)^2=0. \qquad (2,8)$$

Мы видим, что уравнение 5-эйконала (2,1) описывает движение всего семейства частиц с заданным отношением e/m, если рассматривать все семейство как одну и ту же частицу в различных зарядовых, а следовательно, и массовых состояниях, характеризуемых значениями постоянной Π_5. В частном случае, когда Π_5 имеет значение нуль, уравнение 5-эйконала описывает движение частицы в нулевом состоянии массы и заряда и переходит, как это и должно быть, в уравнение 4-эйконала в гравитационном поле:

$$g^{ik}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^k}=0. \qquad (2,9)$$

§ 9. Канонические уравнения Гамильтона

Введем волновой 5-вектор $\Pi_\mu = \frac{\partial \Sigma}{\partial x^\mu}$ и оптическую функцию Гамильтона H^* по формуле

$$H^* = \frac{1}{2} G^{\mu\nu}\Pi_\mu\Pi_\nu, \qquad (2,10)$$

которая в силу (2,1) для действительного луча равна нулю. Запишем систему десяти дифференциальных уравнений для характеристик уравнения (2,1) и получим:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial H^*}{\partial \Pi_\mu} = \Pi^\mu, \qquad (2,11)$$

$$\frac{d\Pi_\mu}{d\tau} = -\frac{\partial H^*}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\Pi_\alpha\Pi_\beta \qquad (2,12)$$

— систему десяти канонических уравнений Гамильтона для лучей в 5-пространстве. Параметр τ, входящий в эти уравнения, определяется из них самих с точностью до аддитивной постоянной.

В самом деле, имеем согласно (2,3)

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu}\Pi^\mu\Pi^\nu &= g_{ik}\Pi^i\Pi^k + (g_i\Pi^i + \Pi^5)^2 = 0, \\ \Pi_5 &= G_{5i}\Pi^i + G_{55}\Pi^5 = g_i\Pi^i + \Pi^5, \end{aligned}\right\} \qquad (2,13)$$

и, следовательно, принимая во внимание (2,11),

$$g_{ik}\Pi^i\Pi^k + \Pi_5^2 = g_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} + \Pi_5^2 = 0. \qquad (2,14)$$

Но $g_{ik}\,dx^i\,dx^k = -ds^2$, где ds — элемент 4-интервала. Следовательно (ср. 2,7),

$$\frac{ds}{d\tau} = |Z|mc; \quad \tau = \tau_0 + \frac{s}{|Z|mc}, \qquad (2,15)$$

если условиться считать, что параметр τ растет вдоль мировой линии.

Уравнения (2,11) являются определением лучевого вектора Π^μ. Составим оптическую функцию Лагранжа L^*

$$L^* = \Pi_\mu\Pi^\mu - H^* = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta}\Pi^\alpha\Pi^\beta, \qquad (2,16)$$

которая для действительного луча равна нулю. Легко доказать формулу

$$\frac{\partial H^*}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial L^*}{\partial x^\alpha}, \tag{2,17}$$

которая получается из

$$G_{\nu\tau}G^{\mu\tau} = \delta^\mu_\nu, \quad G_{\nu\tau}\frac{\partial G^{\mu\tau}}{\partial x^\alpha} = -G^{\mu\tau}\frac{\partial G_{\nu\tau}}{\partial x^\alpha} \tag{2,18}$$

умножением обеих частей на $\Pi_\mu \Pi^\nu$.

Имеем из (2,16)

$$\Pi_\mu = \frac{\partial L^*}{\partial \Pi^\mu}, \tag{2,19}$$

и подставляя в (2,12), получаем, учитывая (2,17),

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \Pi^\mu}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial x^\mu} = 0 \tag{2,20}$$

— уравнение лучей в форме Лагранжа.

Перепишем теперь систему уравнений (2,11) и (2,12), выделив координату действия x^5,

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \Pi^i, \tag{2,11а}$$

$$\frac{dx^5}{d\tau} = \Pi^5, \tag{2,11б}$$

$$\frac{d\Pi_i}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^i}\Pi_\alpha\Pi_\beta, \tag{2,12а}$$

$$\frac{d\Pi_5}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^5}\Pi_\alpha\Pi_\beta = 0 \tag{2,12б}$$

и выясним физический смысл каждой группы уравнений в отдельности.

1. Имеем:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \Pi^i = G^{ik}\Pi_k + G^{i5}\Pi_5 = g^{ik}(\Pi_k - g_k\Pi_5),$$

$$|Z|\,mc\,\frac{dx^i}{ds} = g^{ik}\left(\Pi_k \mp \frac{Ze}{c}A_k\right),$$

$$\Pi_k = |Z|\,mcg_{ki}\frac{dx^i}{ds} \pm \frac{Ze}{c}A_k. \tag{2,11'а}$$

Итак, уравнение (2,11а) выражает обычную связь 4-импульса Π_k и 4-скорости $\frac{dx^i}{ds}$ в присутствии внешнего поля.

2. Имеем (см. 2,13):

$$\frac{dx^5}{d\tau} = \Pi^5 = \Pi_5 - g_i \Pi^i,$$

$$|Z|\, mc \frac{dx^5}{ds} = \pm |Z|\, mc - g_i |Z|\, mc \frac{dx^i}{ds},$$

$$\mp dS = |Z|\, mc\, ds \pm \frac{Ze}{c} A_i\, dx^i. \qquad (2{,}11'б)$$

Итак, уравнение (2,11б) дает (с точностью до двойного знака перед dS) обычное определение элемента действия для пробной частицы в присутствии внешнего поля.

В 5-оптике действие как координата является алгебраической величиной и знак его связан со знаком заряда; при изменении знака действия приходится изменять знак у заряда частицы.

3. Имеем, принимая во внимание (2,17),

$$\frac{d\Pi_i}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^i} \Pi_\alpha \Pi_\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \Pi^\alpha \Pi^\beta =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_m g_n}{\partial x^i} \right) \Pi^m \Pi^n + 2 \frac{\partial g_m}{\partial x^i} \Pi^m \Pi^5 \right\}.$$

Подставляя выражения для Π_i и Π^5 по формулам (2,11'а) и (2,13), получаем:

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ g_{ik} \frac{dx^k}{d\tau} \pm g_i \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^i} \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^n}{d\tau} \pm 2 |Z|\, mc \frac{\partial g_m}{\partial x^i} \frac{dx^m}{d\tau} \right\}.$$

Вводя обозначения

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{in} \left(\frac{\partial g_{nk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{en}}{\partial x^k} \right),$$

$$F_{ik} = \frac{mc^2}{e} \left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i} - \frac{\partial g_i}{\partial x^k} \right),$$

получаем в результате очевидных преобразований уравнения движения в форме Лоренца:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} \pm \frac{e}{mc^2} g^{ni} F_{nk} \frac{dx^k}{ds} = 0. \qquad (2{,}12'а)$$

4. Имеем:

$$\frac{d\Pi_5}{d\tau} = 0, \quad \Pi_5 = \text{const}.$$

Итак, уравнение (2,12б) выражает закон сохранения массы покоя (а следовательно, и заряда) частицы в поле, которое не зависит от x^5, т. е. в классическом приближении $h \to 0$ во всяком поле.

§ 10. Канонические уравнения в несимметричном виде

Канонические уравнения можно писать и в несимметричном виде, исключив параметр τ. Для этого выделим из уравнений (2,11) какое-нибудь одно (выделяемую координату обозначим через x^0)

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \Pi^0 \tag{2,21}$$

и поделим на него все остальные уравнения системы (2,11; 2,12).

Принимая во внимание

$$\frac{\partial H^*}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial H^*}{\partial \Pi_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial x^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial H^*}{\partial \Pi_n} + \frac{\partial H^*}{\partial \Pi_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial \Pi_n} = 0, \tag{2,22}$$

получим систему девяти канонических уравнений:

$$\frac{dx^n}{dx^0} = -\frac{\partial \Pi_0}{\partial \Pi_n} = \frac{\Pi^n}{\Pi^0}, \tag{2,23}$$

$$\frac{d\Pi_n}{dx^0} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial x^n}, \tag{2,23а}$$

$$\frac{d\Pi_0}{dx^0} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial x^0}, \tag{2,23б}$$

где роль независимой переменной играет выделенная координата x^0, а сопряженная ей «механическая функция Гамильтона» Π_0 определяется из решения уравнения

$$2H^* = G^{mn}\Pi_m\Pi_n + 2G^{n0}\Pi_n\Pi_0 + G^{00}\Pi^2 = 0 \tag{2,24}$$

как

$$\Pi_0 = -\frac{G^{0n}}{G^{00}}\Pi_n \pm \frac{1}{G^{00}}\sqrt{(G^{0n}G^{0m} - G^{00}G^{mn})\Pi_m\Pi_n}. \tag{2,25}$$

Раскрывая полную производную $d\Pi_0/dx^0$ и учитывая (2,23а), находим:

$$\frac{d\Pi_0}{dx^0} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Pi_0}{\partial x^n}\frac{dx^n}{dx^0} + \frac{\partial \Pi_0}{\partial \Pi_n}\frac{\partial \Pi^n}{\partial x^0} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial x^0}, \tag{2,26}$$

и заключаем, что уравнение (2,23б) является следствием уравнений (2,23) и (2,23а).

Умножая уравнение (2,23) на Π_n, находим, принимая во внимание $\Pi_n dx^n + \Pi_0 dx^0 \equiv 0$,

$$\Pi_n \left(\frac{dx^n}{dx^0} + \frac{\partial \Pi_0}{\partial \Pi_n}\right) = -\Pi_0 - \Pi_n \frac{\Pi^n}{\Pi^0} \equiv 0. \qquad (2,27)$$

Итак, из девяти уравнений (2,23) только семь независимых.

В механике принято, хотя это и не необходимо, выделять в качестве независимой переменной время $x^0 = x^4 = ict$. В этом случае $\Pi_0 = \Pi_4 = iH/c$, где H — функция Гамильтона механики. Семь независимых уравнений системы (2,23) в этом случае имеют вид

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dx^1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \Pi_1}, \quad \dfrac{dx^2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \Pi_2}; \quad \dfrac{dx^3}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \Pi_3}, \\ \dfrac{d\Pi_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x^1}, \quad \dfrac{d\Pi_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x^2}; \quad \dfrac{d\Pi_3}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x^3}, \\ \Pi_5 = \mathrm{const}, \end{array}\right\} \qquad (2,28)$$

хорошо известный из механики.

§ 11. Закон сохранения 5-импульса

Закон сохранения энергии, импульса и заряда объединены в 5-оптике в один закон сохранения 5-импульса, который формулируется следующим образом:

Если внешнее поле не зависит от какой-нибудь из пяти координат x^0, то сопряженный этой координате импульс Π_0 сохраняется.

Закон сохранения 5-импульса является непосредственным следствием уравнений (2,12). В классическом приближении ($h \to 0$) поле не зависит от координаты действия; поэтому заряд можно принять за универсальную постоянную, а не за интеграл движения.

В волновой 5-оптике, в которой необходимо, как мы увидим, последовательно учитывать периодическую зависимость поля от координаты действия, закон сохранения заряда в обычном понимании не имеет места.

Мы увидим дальше, что дело идет о новом фундаментальном свойстве частицы переходить (с сохранением e/m) из одного зарядового состояния в другое с испусканием или поглощением заряженных, тяжелых квантов.

§ 12. Вариационные принципы механики

Геометрический смысл действия, как пятой координаты, пробной частицы особенно ярко выступает при формулировке вариационных принципов механики. Докажем следующее предложение.

Если поле $G_{\mu\nu}$ не зависит от одной из пяти координат x^0, то, приняв в качестве определения первую группу канонических уравнений

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}=\frac{\partial H^*}{\partial \Pi_\mu}=\Pi^\mu, \tag{2,29}$$

мы из вариационного принципа

$$\delta\int dx^0=0 \tag{2,30}$$

получаем вторую группу уравнений

$$\frac{d\Pi_n}{d\tau}=-\frac{\partial H^*}{\partial x^n}. \tag{2,31}$$

Имеем:

$$\delta\int\frac{dx^0}{d\tau}\,d\tau=\delta\int\Pi^0\,d\tau, \tag{2,31a}$$

где сопряженная координата x^0 («механическая функция Лагранжа» — Π_0) определяется как решение квадратного уравнения

$$G_{mn}\Pi^m\Pi^n+2G_{m0}\Pi^m\Pi^0+G_{00}(\Pi^0)^2=0, \tag{2,32}$$

$$\Pi^0\equiv-\frac{G_{0n}}{G_{00}}\Pi^n\pm\frac{1}{G_{00}}\sqrt{(G_{n0}G_{m0}-G_{mn}G_{00})\Pi^m\Pi^n}. \tag{2,33}$$

Обратим внимание на различие в формулах (2,25) и (2,33). Уравнения Эйлера в вариационной задаче (2,30) имеют вид:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\Pi^0}{\partial\Pi^n}\right)-\frac{\partial\Pi^0}{\partial x^n}=0. \tag{2,34}$$

Принимая во внимание

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L^*}{\partial x^n}+\frac{\partial L^*}{\partial\Pi^0}\frac{\partial\Pi^0}{\partial x^n}=0,\\ \frac{\partial L^*}{\partial\Pi^n}+\frac{\partial L^*}{\partial\Pi^0}\frac{\partial\Pi^0}{\partial\Pi^n}=0,\end{aligned}\right\} \tag{2,35}$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^0}{\partial x^n} &= -\frac{1}{\Pi_0}\frac{\partial L^*}{\partial x^n} = \frac{1}{\Pi_0}\frac{\partial H^*}{\partial x^n}, \\ \frac{\partial \Pi^0}{\partial \Pi^n} &= -\frac{1}{\Pi_0}\frac{\partial L^*}{\partial \Pi^n} = \frac{1}{\Pi_0}\frac{\partial H^*}{\partial \Pi^n}. \end{aligned}\right\} \qquad (2,36)$$

Подставляя эти выражения в (2,34) и принимая во внимание, что по условию $\Pi_0 = \mathrm{const}$, получаем (2,31). Предложение доказано.

Если выделяемая координата — действие $x_0 = x^5$, то (2,30) есть принцип Гамильтона; если выделяемая координата — время $x^0 = x^4 = ict$, то (2,30) есть принцип Ферма. Поскольку в геометрической 5-оптике вследствие $h \to 0$ все поля не зависят от x^5, принцип Гамильтона можно считать универсальным принципом классической механики, а принцип Ферма частным принципом, справедливым лишь в том случае, когда поле не зависит от времени.

ГЛАВА III

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

§ 13. Уравнения метрического поля

В предыдущей главе мы показали, что задача пятимерной геометрической оптики о распространении лучей в конфигурационном 5-пространстве Римана координат, времени и действия, на метрический 5-тензор которого $G_{\mu\nu}$ наложено лишь одно ограничение — не зависеть от пятой координаты действия, эквивалентна задаче классической релятивистской механики о движении частицы с заданным отношением e/m в заданных гравитационном и электромагнитном полях:

$$g_{ik} = \frac{G_{ik}}{G_{55}} - \frac{G_{i5}}{G_{55}} \cdot \frac{G_{k5}}{G_{55}}, \quad A_i = \frac{mc^2}{e} g_i = \frac{mc^2}{e} \frac{G_{i5}}{G_{55}}. \qquad (3.1)$$

В этой главе мы рассматриваем задачу об определении метрического поля $G_{\mu\nu}$ по заданным источникам метрического поля $Q_{\mu\nu}$. Мы покажем, что общая теория метрического поля $G_{\mu\nu}$, содержащая, как частный случай, единую теорию тяготения и электричества, заключена в уравнениях Эйнштейна для 5-пространства координат, времени и действия

$$P_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} G_{\lambda\mu} P = \varkappa Q_{\lambda\mu}, \qquad (3{,}2)$$

где $P_{\lambda\mu}$ — свернутый 5-тензор Римана.

В отличие от уравнения 5-эйконала, пятнадцать уравнений (3,2) неоднородны в потенциалах $G_{\mu\nu}$ и потому, сохраняя общность, мы не можем, как в предыдущей главе, произвольно полагать $G_{55} = 1$.

Обозначая $G_{55}=N$, мы должны подставить в (3,2) метрический тензор по формулам

$$G_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} N(g_{ik}+g_i g_k) & N g_k \\ N g_i & N \end{pmatrix};\quad G^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \frac{g^{ik}}{N} & -\frac{g^{ik}g_k}{N} \\ -\frac{g^{ik}g_i}{N} & \frac{1}{N}+\frac{1}{N}g^{ik}g_i g_k \end{pmatrix} \tag{3,3}$$

и определять из уравнений (3,2), кроме гравитационных полей g_{ik}, фигурирующих в теории тяготения и электромагнитных полей g_i, фигурирующих в электродинамике, еще и нормирующий множитель $N=G_{55}$.

Далее в задачах геометрической 5-оптики дело идет об описании движения материальной точки в заданном внешнем поле как оптического процесса распространения лучей в пятимерном *конфигурационном* пространстве координат, времени и действия.

Мы увидим, что для того, чтобы прийти к согласию с опытом, мы должны при решении уравнений поля (3,2) величине $\frac{mc^2}{e}$, фигурирующей в выражениях (3,1), придать универсальное значение $\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}}$, где $\varkappa$ — гравитационная постоянная.

Следовательно, определив из уравнений (3,2) по заданным источникам $Q_{\lambda\mu}$ метрические потенциалы $G_{\lambda\mu}$, мы по формулам

$$g_{ik}=\frac{G_{ik}}{G_{55}}-\frac{G_{i5}}{G_{55}}\cdot\frac{G_{k5}}{G_{55}},\qquad A_i=\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}}\,g_i=\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}}\,\frac{G_{i5}}{G_{55}} \tag{3,1a}$$

определяем возбуждаемое источниками $Q_{\lambda\mu}$ метрического поля гравитационное и электромагнитное поля.

Для того чтобы яснее подчеркнуть создавшуюся ситуацию, мы вводим, наряду с конфигурационными пространствами, метрика которых связана с потенциалами g_{ik} и A_i формулами (3,1), дополнительное *фундаментальное* пространство, метрика которого связана с потенциалами g_{ik}, A_i формулами (3,1a). Поскольку две задачи: а) определение движения материальной точки в заданном внешнем поле (конфигурационное пространство) и б) определение составляющих поля по заданным источникам (фундаментальное пространство) в рассматриваемом приближении решаются раздельно, мы не будем вводить специальных обозначений для метрических потенциалов конфигурационных и фундаментальных пространств и сохраним обозначение $g_i = \frac{e}{mc^2} A_i$ или $g_i = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}} A_i$ в зависимости от того, какую мы задачу решаем.

В этой главе мы рассматриваем лишь классическую теорию поля и потому в предельном случае $h \to 0$ будем накладывать в уравнениях (3,2) на метрические потенциалы $G_{\mu\nu}$ условие цилиндричности, т. е. считать их независимыми от пятой координаты действия.

При переходе к четырехмерной записи уравнений поля (3,2) и выделении координаты действия следует следить за тем, чтобы сохранялась градиентная инвариантность уравнений. Согласно указанному в § 6 правилу градиентно-инвариантной формой записи уравнений поля (3,2) будет следующая:

$$\left.\begin{aligned} P^{ik} - \frac{1}{2} G^{ik} P &= \varkappa Q^{ik}, \\ P_5^k &= \varkappa Q_5^k, \\ P_{55} - \frac{1}{2} G_{55} P &= \varkappa Q_{55}. \end{aligned}\right\} \qquad (3,4)$$

§ 14. Истинные и эффективные гравитационные потенциалы; χ-поле

Для дифференциала дуги $d\sigma$ в 5-пространстве имеем тождественно:

$$\begin{aligned} + d\sigma^2 &= - G_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = \\ &= - G_{ik}\, dx^i\, dx^k - 2G_{i5}\, dx^i\, dx^5 - G_{55}\, (dx^5)^2 = \\ &= - G_{55} \left(\frac{G_{ik}}{G_{55}} - \frac{G_{i5}}{G_{55}} \cdot \frac{G_{5k}}{G_{55}} \right) dx^i\, dx^k - \frac{1}{G_{55}} (G_{i5}\, dx^i + G_{55}\, dx^5)^2 = \\ &= - N g_{ik}\, dx^i\, dx^k - \frac{1}{N} (dx_5)^2, \end{aligned} \qquad (3,5)$$

где мы воспользовались формулой

$$dx_5 = G_{5i}\, dx^i + G_{55}\, dx^5.$$

Выражение (3,5) дает градиентно-инвариантное разбиение 5-пространства на 4-пространство координат — времени и ортогональное к нему линейное пространство. Формула

$$ds^2 = - N g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (3,6)$$

устанавливает мероопределение в градиентно-инвариантном 4-подпространстве. Мы вводим истинные гравитационные потенциалы в 4-пространстве формулами

$$\tilde{g}_{ik} = N g_{ik}, \quad \tilde{g}^{ik} = \frac{1}{N} g^{ik}, \tag{3,7}$$

определяющие истинные интервалы между двумя событиями, и называем обычные гравитационные потенциалы g_{ik}, g^{ik}, фигурирующие в теории тяготения, эффективными гравитационными потенциалами.

Истинные и эффективные потенциалы совпадают лишь в том частном случае, когда $N = G_{55} = 1$.

Эффективные гравитационные потенциалы g_{ik}, фигурирующие в теории тяготения, не имеют в пятимерном пространстве простого геометрического смысла и поэтому следует ожидать, что уравнения поля (3,2) приобретут более ясный смысл, если мы их запишем, воспользовавшись истинными гравитационными потенциалами $\tilde{g}_{ik}$ и $\tilde{g}^{ik}$. Поэтому, вводя обозначение

$$G_{55} = N = 1 + \chi, \tag{3,8}$$

запишем, принимая во внимание (3,7), выражение для метрических потенциалов $G_{\mu\nu}$ по формулам (3,3) в виде

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \tilde{g}_{ik} + (1+\chi) g_i g_k & (1+\chi) g_k \\ (1+\chi) g_i & 1+\chi \end{pmatrix}; \\ G^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \tilde{g}^{ik} & -\tilde{g}^{ik} g_k \\ -\tilde{g}^{ik} g_i & \dfrac{1}{1+\chi} + \tilde{g}^{ik} g_i g_k \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{3,9}$$

Мы видим, что в 5-оптике, кроме гравитационных и электромагнитных полей современной физики, появляется еще новое скалярное χ-поле, связанное с потенциалом G_{55} формулой (3,8).

Почему же до сих пор это χ-поле не было обнаружено в природе? Дело заключается в том, что в пределах применимости геометрической 5-оптики (классической механики) воздействие на пробную частицу истинного гравитационного поля $\tilde{g}_{ik}$ и χ-поля не могут быть отделены друг от друга, поскольку их общее воздействие выражается эффективными гравитационными потенциалами $g^{ik}=N\tilde{g}^{ik}$, которые одни только и фигурируют в формулах классической механики. Другими словами, в задачах геометрической 5-оптики (классической механики) метрическое поле $\{\tilde{g}^{ik}, g_k, \chi\}$ полностью эквивалентно метрическому полю $\{g^{ik}, g_k, 0\}$. Эта эквивалентность не имеет больше места при переходе к волновой 5-оптике, поскольку уравнения волновой 5-оптики уже неоднородны в потенциалах $G_{\mu\nu}$.

Больше того, мы увидим, что в классической теории поля игнорирование χ-поля, как это делает современная теория тяготения, например, в задаче о поле заряженной точечной массы, является незаконным.

§ 15. Гармоническая система координат

Запишем уравнения (3,4) в специальной гармонической системе координат, с успехом применявшейся многими исследователями (ср. [9]).

В гармонической системе координат составляющие метрического 5-тензора $G^{\mu\nu}$ удовлетворяют следующим условиям

$$\frac{\partial \Lambda G^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=0, \tag{3,10}$$

где введено обозначение

$$\Lambda=\sqrt{|\operatorname{Det}(G_{\mu\nu})|}. \tag{3,11}$$

Замечая, что $\Lambda=\sqrt{|\tilde{g}|(1+\chi)}$ и выделяя координату действия, мы пишем условия (3,10) в виде

$$\frac{\partial\left(\sqrt{(1+\chi)}\sqrt{|\tilde{g}|}\,\tilde{g}^{ik}\right)}{\partial x^{k}}=0, \tag{3,12а}$$

$$\frac{\partial\left(\sqrt{1+\chi}\sqrt{|\tilde{g}|}\,\tilde{g}^{ik}g_k\right)}{\partial x^{i}}=0. \tag{3,12б}$$

Принимая во внимание (3,12а), условие (3,12б) можно записать в виде

$$\tilde{g}^{ik}\frac{\partial g_k}{\partial x^{i}}=0. \tag{3,12в}$$

Мы замечаем, что введение гармонической системы координат в 5-пространстве является обобщением на общий случай метрического $G_{\mu\nu}$ — поля нормировки электромагнитных потенциалов по Лоренцу, применяемого в электродинамике.

В математическом приложении выведены формулы для P, P^{ik}, P^i_5, P_{55} в гармонической системе координат. Принимая во внимание независимость поля от координаты действия, имеем по этим формулам:

$$\left.\begin{aligned} P &= G^{ik}\frac{\partial^2 \ln\sqrt{|\tilde{g}|(1+\chi)}}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{1}{2}G^l_{ik}\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^l} + \\ &\qquad + G^l_{i5}\frac{\partial G^{i5}}{\partial x^l} + \frac{1}{2}G^l_{55}\frac{\partial G^{55}}{\partial x^l}, \\ P^{ik} &= -\frac{1}{2}G^{mn}\frac{\partial^2 G^{ik}}{\partial x^m\,\partial x^n} + G^i_{mn}G^{k,\,mn} + \\ &\qquad + 2G^i_{m5}G^{k,\,m5} + G^i_{55}G^{k,\,55}, \\ P^i_5 &= G^{mn}\frac{\partial G^i_{m5}}{\partial x^n} + G^{k5}\frac{\partial G^i_{55}}{\partial x^k}, \\ P_{55} &= \frac{1}{2}G^{mn}\frac{\partial^2 G_{55}}{\partial x^m\,\partial x^n} - G^{i\alpha}G^{\beta}_{\alpha 5}\frac{\partial G_{5\beta}}{\partial x^i}. \end{aligned}\right\} \quad (3,13)$$

Мы обозначили символы Кристоффеля для 5-пространства через

$$G^{\alpha}_{\mu\nu}; \qquad G^{\alpha,\,\mu\nu} = G^{\mu\tau}G^{\nu\sigma}G^{\alpha}_{\tau\sigma}.$$

§ 16. Вывод уравнений поля

Вычисления выражений по формулам (3,13) связаны с довольно трудоемкими выкладками; они существенно упрощаются, если при вычислении символов Кристоффеля сохранять лишь заведомо градиентно-инвариантные члены, т. е. члены, не содержащие величин g_i, а только их производные, поскольку остальные, которые мы не будем и выписывать, при подстановке в выражения (3,13) все равно сократятся друг с другом*). Обозначая символом $\cong$ «равно с точ-

*) Ср. аналогичный прием в [12] (§ 94, задача).

ностью до градиентно-неинвариантных членов», имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&G^i_{kl}\cong\tilde{\Gamma}^i_{kl};\quad G^i_{m5}\cong\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}f_{mk}(1+\chi);\\
&\qquad\qquad\qquad G^i_{55}\cong-\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}\frac{\partial\chi}{\partial x^k},\\
&G^{i,\,kl}\cong\tilde{\Gamma}^{i,\,kl};\quad G^{i,\,m5}\cong\frac{1}{2}f^{mi};\\
&\qquad\qquad\qquad G^{i,\,55}\cong\frac{1}{2(1+\chi)^2}\tilde{g}^{ik}\frac{\partial\chi}{\partial x^k},\\
&G^5_{i5}\cong\frac{1}{2(1+\chi)}\frac{\partial\chi}{\partial x^i},\quad G^5_{55}\cong 0;\quad f_{ik}=\frac{\partial g_k}{\partial x^i}-\frac{\partial g_i}{\partial x^k}.
\end{aligned}\right\}\quad(3,14)$$

Обозначая через $\tilde{R}^{ik}$ и $\tilde{R}$ свернутый тензор Римана и скаляр кривизны для 4-пространства, составленного из $\tilde{g}_{ik}$, подставляем выражения (3,14) в формулы (3,13), отбрасывая опять последовательно члены, содержащие неградиентно-инвариантные величины g_i, получим (см. Математическое приложение, п. 5):

$$\left.\begin{aligned}
P&=\left\{\tilde{R}+\frac{\partial\tilde{\Gamma}^i}{\partial x^i}+\tilde{\Gamma}^i_{ik}\tilde{\Gamma}^k\right\}+\frac{1}{4}(1+\chi)f_{ik}f^{ik}+\\
&\quad+\tilde{g}^{ik}\frac{\partial^2\ln\sqrt{1+\chi}}{\partial x^i\,\partial x^k}+\frac{1}{4}\frac{\tilde{g}^{ik}}{(1+\chi)^2}\frac{\partial\chi}{\partial x^i}\frac{\partial\chi}{\partial x^k}=\\
&=\tilde{R}+\frac{1}{4}(1+\chi)f_{ik}f^{ik}+\frac{\tilde{g}^{ik}}{1+\chi}\frac{\partial^2\chi}{\partial x^i\,\partial x^k}-\\
&\qquad\qquad-\frac{\tilde{g}^{ik}}{(1+\chi)^2}\frac{\partial\chi}{\partial x^i}\frac{\partial\chi}{\partial x^k},\\
P^{ik}&=\left\{\tilde{R}^{ik}+\tilde{g}^{is}\left(\frac{\partial\tilde{\Gamma}^k}{\partial x^s}+\tilde{\Gamma}^k_{sl}\tilde{\Gamma}^l\right)\right\}+\\
&\quad+\frac{1}{2}(1+\chi)\tilde{g}_{mn}f^{im}f^{kn}-\frac{1}{4}\frac{\tilde{g}^{in}\tilde{g}^{km}}{(1+\chi)^2}\frac{\partial\chi}{\partial x^n}\frac{\partial\chi}{\partial x^m}=\\
&=\tilde{R}^{ik}+\frac{1}{2}(1+\chi)\tilde{g}_{mn}f^{im}f^{kn}+\frac{1}{2}\frac{\tilde{g}^{kn}\tilde{g}^{im}}{1+\chi}\times\\
&\times\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^n\,\partial x^m}-\frac{3}{2}\frac{1}{(1+\chi)}\frac{\partial\chi}{\partial x^n}\frac{\partial\chi}{\partial x^m}\right)-\frac{1}{2}\frac{\tilde{\Gamma}^{m,\,ik}}{(1+\chi)}\frac{\partial\chi}{\partial x^m},\\
P^i_5&=\frac{1}{2}\tilde{g}^{mn}\frac{\partial}{\partial x^n}(1+\chi)\tilde{g}^{ik}f_{mk},\\
P_{55}&=\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}\frac{\partial^2\chi}{\partial x^i\,\partial x^k}-\frac{1}{4}(1+\chi)^2f_{ik}f^{ik}-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{2}\frac{\tilde{g}^{ik}}{1+\chi}\frac{\partial\chi}{\partial x^i}\frac{\partial\chi}{\partial x^k}.
\end{aligned}\right\}\quad(3,13')$$

Подставляя эти выражения в уравнение поля (3,4), получаем, используя формулу (3,12),

$$\left\{\tilde{R}^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}\tilde{R}\right\}+\frac{1}{2}(1+\chi)\left\{\tilde{g}_{mn}f^{im}f^{kn}-\frac{1}{4}\tilde{g}^{ik}f_{mn}f^{mn}\right\}+$$
$$+\frac{1}{2(1+\chi)}\left\{\left[\tilde{g}^{in}\tilde{g}^{km}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^n\,\partial x^m}-\frac{3}{2(1+x)}\frac{\partial\chi}{\partial x^n}\frac{\partial\chi}{\partial x^m}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\tilde{\Gamma}^{m,\,ik}\frac{\partial\chi}{\partial x^m}\right]-g^{ik}\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial x^i\,\partial x^k}-\frac{1}{(1+\chi)}\frac{\partial\chi}{\partial x^m}\frac{\partial\chi}{\partial x^n}\right]\right\}=\varkappa Q^{ik},$$
$$(3,15)$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}\,(1+\chi)}\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\sqrt{|\tilde{g}|}\,(1+\chi)^{\frac{3}{2}}f^{ki}\right\}=\varkappa Q^i_5, \qquad (3,16)$$

$$-\frac{1}{2}(1+\chi)\left\{\tilde{R}+\frac{3}{4}(1+\chi)f_{ik}f^{ik}\right\}=\varkappa Q_{55}. \qquad (3,17)$$

К этим уравнениям, которые выведены в предположении, что система координат гармоническая, следует присоединить в качестве дополнительного условия нормировки уравнения (3,12а) и (3,12б).

§ 17. Сравнение с классическими теориями поля

Для того чтобы сравнить полученные нами уравнения поля с уравнениями поля тяготения и электродинамики в современной физике, которая игнорирует χ-поле, мы должны в них положить $\chi=0$; $\tilde{g}_{ik}=g_{ik}$, $\tilde{R}^{ik}=R^{ik}$.

Мы получим:

$$R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R+\frac{1}{2}\left\{g_{mn}f^{im}f^{kn}-\frac{1}{4}g^{ik}f_{mn}f^{mn}\right\}=\varkappa Q^{ik},$$
$$(3,15а)$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{|g|}\,f^{ki}\right)=\varkappa Q^i_5, \qquad (3,16а)$$

$$-\frac{3}{8}f_{ik}f^{ik}-\frac{1}{2}R=\varkappa Q_{55}, \qquad (3,17а)$$

к которым следует присоединить добавочное условие нормировки:

$$\frac{\partial\sqrt{|g|}\,g^{ik}}{\partial x^k}=0; \quad \frac{\partial\sqrt{|g|}\,g^i}{\partial x^i}=0. \qquad (3,18)$$

Уравнения (3,15а) и (3,16а) суть в точности уравнения Эйнштейна — Максвелла единой теории поля тяготения и электричества, если положить

$$g_i = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\, A_i, \quad Q_5^i = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}}\, s^i, \tag{3,19}$$

где s^i — 4-вектор тока, а A_i — 4-вектор электромагнитных потенциалов.

Уравнение (3,17а) служит для последующего определения составляющей Q_{55} 5-тензора источников, которая не может задаваться независимо. Итак, уравнение (3,17а) есть условие отсутствия χ-поля.

Мы убедились в необходимости при решении задачи об определении поля по заданным источникам перейти к представлению о фундаментальном пространстве, метрический тензор которого имеет универсальный вид

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{g}^{ik}, & -\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\, A^i, \\ -\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\, A^k, & \frac{1}{1+\chi} + \frac{\varkappa}{2\pi} A_i A^i \end{pmatrix},$$

в то время, как в случае конфигурационного пространства он зависел от отношения e/m для материальной точки, движение которой описывается как оптический процесс распространения лучей в конфигурационном 5-пространстве.

§ 18. Энергия и импульс источников поля

Характерной чертой 5-оптики является возможность перенимать без нового вывода общие формулы, полученные в теории тяготения, в частности, все формулы, получающиеся как математическое следствие из уравнений Эйнштейна для гравитационного поля.

В теории тяготения доказывается ([12], § 98), что 4-импульс материи (включая электромагнитное поле), заключенный внутри замкнутой поверхности, определяется значениями гравитационных потенциалов и их первых производных на этой поверхности и может быть выражен через поверхностный интеграл

$$P^k = \frac{1}{2\varkappa c}\int \frac{\partial}{\partial x^i}\left\{ |g| (g^{k\alpha} g^{4i} - g^{k4} g^{\alpha i}\right\} df_\alpha, \tag{3,20}$$

где α пробегает значение $\alpha = 1, 2, 3$ и df_α означает элемент поверхности. Поскольку формула (3,20) является математическим следствием уравнений Эйнштейна, мы можем ее перенять в 5-оптику и записать в виде

$$P^k = \frac{1}{2\varkappa c}\int \frac{\partial}{\partial x^i}\{|G|(G^{k\gamma}G^{4i} - G^{k4}G^{\gamma i})\}\, df_\alpha =$$
$$= \frac{1}{2\varkappa c}\int \frac{\partial}{\partial x^i}\{|g|(1+\chi)(g^{k\alpha}g^{4i} - g^{4k}g^{\alpha i})\}\, df_\alpha. \quad (3,21)$$

Сохранение в формуле (3,21) четырехмерной дивергенции вместо пятимерной законно, поскольку в классическом приближении потенциалы не зависят от пятой координаты действия.

Мы видим, что в тех случаях, когда χ-поле отсутствует, формула 5-оптики (3,21) совпадает с формулой теории тяготения (3,20). В общем случае 4-импульс, заключенный внутри замкнутой поверхности, определяется, кроме значений гравитационных потенциалов и их производных, также и значениями χ-потенциала и его производных на поверхности.

§ 19. Проблема Шварцшильда для 5-пространства

Найдем статическое сферическо-симметрическое решение уравнений метрического поля в пустоте, когда $Q_{\mu\nu} = 0$. Составляющие (G_{14}, G_{24}, G_{34}) и (G_{15}, G_{25}, G_{35}) можно рассматривать как два 3-вектора, которые по соображениям симметрии должны быть равны нулю. Поэтому, сохраняя общность, можно принять, что тензор $G_{\mu\nu}$ имеет вид

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta_{ik} + (e^\nu - 1)n_i n_k & 0 & 0 \\ 0 & e^\mu + e^\lambda g^2 & e^\lambda g \\ 0 & e^\lambda g & e^\lambda \end{pmatrix}. \quad (3,22)$$

В этом параграфе латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3; n_i — единичный 3-вектор, λ, μ, ν, g — четыре функции радиуса-вектора, исчезающие на бесконечности, причем g чисто мнимая.

Вычисление контравариантных составляющих дает:

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta_{ik} + (e^{-\nu} - 1) n_i n_k & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mu} & -e^{-\mu} g \\ 0 & -e^{-\mu} g & e^{-\lambda} + e^{-\mu} g^2 \end{pmatrix}. \tag{3,23}$$

Уравнения поля мы получим из вариационного принципа

$$\delta \int L 4\pi r^2 \, dr = 0, \tag{3,24}$$

где L — функция Лагранжа, которую мы перенимаем из теории тяготения:

$$\begin{aligned} L = \sqrt{|G|}\, G^{\alpha\beta} (G^{\sigma}_{\alpha\beta} G^{\tau}_{\sigma\tau} - G^{\sigma}_{\alpha\tau} G^{\tau}_{\beta\sigma}) = \\ = \sqrt{|G|} \left(\frac{1}{2} G^{i}_{\alpha\beta} \frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^i} - G^{ik} \frac{\partial \ln \sqrt{|G|}}{\partial x^i} \frac{\partial \ln \sqrt{|G|}}{\partial x^k} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \ln \sqrt{|G|}}{\partial x^i} \frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k} \right). \end{aligned} \tag{3,25}$$

Вычисления дают:

$$\left. \begin{aligned} G^{i}_{kl} &= \left[\frac{1}{2} \nu' n_k n_l + \frac{1 - e^{-\nu}}{r} (\delta_{kl} - n_k n_l) \right] n_i, \\ G^{i}_{44} &= -\frac{1}{2} e^{\lambda - \nu} (e^{\mu - \lambda} \mu' + g^2 \lambda' + 2 g g') n_i, \\ G^{i}_{45} &= -\frac{1}{2} e^{\lambda - \nu} (\lambda' g + g') n_i, \\ G^{i}_{55} &= -\frac{1}{2} e^{\lambda - \nu} \lambda' n_i, \\ \sqrt{|G|} &= \exp(\lambda + \mu + \nu). \end{aligned} \right\} \tag{3,26}$$

Подставляя эти выражения в (3,25), получаем после простых вычислений

$$\begin{aligned} L = \exp\left(\frac{\lambda + \mu - \nu}{2} \right) \left\{ \frac{e^{\nu} - 1}{r} (\lambda' + \mu' + \nu') - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \lambda' \mu' + \frac{1}{2} e^{\lambda - \mu} g'^2 \right\}. \end{aligned} \tag{3,27}$$

Перейдем в (3,24) к новой переменной $u=\frac{1}{r}$ и получим:

$$\delta \int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\left\{\frac{e^\nu-1}{u}(\dot\lambda+\dot\mu+\dot\nu)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\dot\lambda\dot\mu-\frac{1}{2}e^{\lambda-\mu}\dot g^2\right\}du=0, \qquad (3,28)$$

где точка обозначает дифференцирование по u.

Уравнения поля являются уравнениями Эйлера к вариационной задаче (3,28) и имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^\nu-1}{u^2}+\frac{\dot\lambda+\dot\mu}{u}-\frac{\dot\lambda\dot\mu}{4}+\frac{1}{4}e^{\lambda-\mu}\dot g^2&=0,\\ \frac{e^\nu-1}{u^2}-\frac{\dot\nu}{u}+\frac{\dot\nu\dot\lambda}{4}-\frac{\ddot\lambda}{2}-\frac{\dot\lambda^2}{4}+\frac{1}{4}e^{\lambda-\mu}\dot g^2&=0,\\ \frac{e^\nu-1}{u^2}-\frac{\dot\nu}{u}+\frac{\dot\nu\dot\mu}{2}-\frac{\ddot\mu}{2}-\frac{3}{4}e^{\lambda-\mu}\dot g^2&=0,\\ \frac{d}{du}\left[\dot g\exp\left(\frac{3\lambda-\mu-\nu}{2}\right)\right]&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3,29)$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\dot g = i\varepsilon\exp\left(\frac{\mu+\nu-3\lambda}{2}\right), \qquad (3,30)$$

где ε — вещественная постоянная, имеющая размерность длины. Исключая функцию $\dot g$ из уравнений (3,29) и (3,30), получаем для определения трех функций λ, μ, ν три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} C_1&\equiv\frac{e^\nu-1}{u^2}+\frac{\dot\lambda+\dot\mu}{u}-\frac{\dot\lambda\dot\mu}{4}-\frac{\varepsilon^2}{4}e^{\nu-2\lambda}=0,\\ C_2&\equiv\frac{e^\nu-1}{u^2}-\frac{\dot\nu}{u}+\frac{\dot\nu\dot\lambda}{4}-\frac{\varepsilon^2}{4}e^{\nu-2\lambda}-\frac{\ddot\lambda}{2}-\frac{\dot\lambda^2}{4}=0,\\ C_3&\equiv\frac{e^\nu-1}{u^2}-\frac{\dot\nu}{u}+\frac{\nu\dot\lambda}{4}+\frac{3}{4}\varepsilon^2e^{\nu-2\lambda}-\frac{\ddot\mu}{2}-\frac{\dot\mu^2}{4}=0. \end{aligned}\right\} (3,31)$$

Для решения этой системы удобно перейти к следующим линейным комбинациям:

$$\left.\begin{aligned} C_1-C_2 &\equiv \frac{\dot\lambda+\dot\mu+\dot\nu}{u}-\frac{\dot\lambda(\dot\nu+\dot\mu)}{4}+\\ &\qquad\qquad +\frac{\ddot\lambda}{2}+\frac{\dot\lambda^2}{4}=0,\\ 2C_1+C_2+C_3 &\equiv \frac{2(\dot\lambda+\dot\mu+\dot\nu)}{u}+\frac{\dot\nu(\dot\lambda+\dot\mu)}{4}-\\ &\quad -\frac{(\ddot\lambda+\ddot\mu)}{2}-\frac{(\dot\lambda+\dot\mu)^2}{4}+4\left(\frac{e^\nu-1}{u^2}-\frac{\dot\nu}{u}\right)=0,\\ C_1-C_3 &\equiv \frac{\dot\lambda+\dot\mu+\dot\nu}{u}-\frac{\dot\mu(\dot\lambda+\dot\nu)}{4}+\\ &\qquad\qquad +\frac{\ddot\mu}{2}+\frac{\dot\mu^2}{4}-\varepsilon^2 e^{\nu-2\lambda}=0. \end{aligned}\right\} \quad (3{,}32)$$

Для дальнейших вычислений выберем специальную систему координат *), наложив на метрические потенциалы дополнительное условие

$$|G|=1. \qquad (3{,}33)$$

В такой специальной системе координат имеем согласно (3,26)

$$\lambda+\mu+\nu=0 \qquad (3{,}33')$$

и, следовательно, по формуле (3,32)

$$\left.\begin{aligned} C_1-C_2 &\equiv \frac{1}{2}(\ddot\lambda+\dot\lambda^2)=0,\\ 2C_1+C_2+C_3 &\equiv 4\left(\frac{e^\nu-1}{u^2}-\frac{\dot\nu}{u}\right)+\frac{1}{2}(\ddot\nu-\dot\nu^2)=0, \end{aligned}\right\} \quad (3{,}34)$$

$$C_1-C_3\equiv\frac{1}{2}\{(\dot\lambda+\dot\nu)^2-(\ddot\lambda+\ddot\nu)\}-\varepsilon^2e^{\nu-2\lambda}=0, \quad (3{,}35)$$

$$\dot g = i\varepsilon e^{-2\lambda}. \qquad (3{,}36)$$

Интегрирование системы (3,34) дает

$$e^\lambda=1+\lambda u; \quad e^\nu=\frac{1}{1-\beta u}, \qquad (3{,}37)$$

где α, β — две постоянные интегрирования, имеющие размерность длины.

---

*) О возможности такого выбора см. [15], § 49.

Подставляя (3,37) в (3.33′) и (3,35), получаем:

$$c^{\mu} = \frac{1-\beta u}{1+\alpha u}, \tag{3,38}$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta - \varepsilon^2 = 0. \tag{3,39}$$

Интегрируя (3,36), получаем:

$$g = \frac{i\varepsilon u}{1+\alpha u}. \tag{3,40}$$

Итак, мы нашли решение, зависящее в силу (3,39) от двух произвольных постоянных:

$$\left.\begin{aligned} e^{\nu} = \frac{1}{1-\frac{\beta}{r}}, \quad e^{\mu} = \frac{1-\frac{\beta}{r}}{1+\frac{\alpha}{r}}, \quad e^{\lambda} = 1+\frac{\alpha}{r}, \\ A_4 = \sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}}\, g = \sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}}\, \frac{i\varepsilon}{r+\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{3,41}$$

Переходим к вычислению постоянных α, β и ε. На больших расстояниях r потенциал A_4 должен принимать кулоновское значение $A_4 = \frac{e'i}{r}$, где e' — заряд источника. Постоянная ε имеет, следовательно, смысл электрического радиуса источника:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\, e'. \tag{3,42}$$

Далее вычислим по формуле (3,21) энергию заряженной точечной массы и приравняем ее $m'c^2$. Имеем:

$$m'c^2 = icP^4 = -\frac{1}{2\varkappa}\int \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left\{ |G|\, G^{\alpha\beta} G^{44} \right\} df_{\beta}. \tag{3,43}$$

Интегрирование распространим по сфере радиуса R, который затем устремим к бесконечности.

Имеем по формулам (3,22′), (3,26), (3,41):

$$|G| = e^{\lambda+\mu+\nu} = 1,$$

$$G^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + (e^{-\nu}-1)\, n_{\alpha} n_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\beta}{R}\, n_{\alpha} n_{\beta}, \quad \frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{\beta}{R^2}\, n_{\beta},$$

$$G^{44} = e^{-\mu} = \frac{1+\frac{\alpha}{R}}{1-\frac{\beta}{R}} \cong 1 + \frac{\alpha+\beta}{R}, \quad \frac{\partial G^{44}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{(\alpha+\beta)}{R^2}\, n_{\alpha},$$

и, следовательно,

$$m'c^2 = -\frac{1}{2\varkappa}\left\{4\pi R^2\left[\frac{\partial}{\partial R}(|G|\,G^{\alpha\beta}G^{44})\right]n_\alpha n_\beta\right\}_{R\to\infty} = \\ = \frac{2\pi}{\varkappa}(\alpha+2\beta). \qquad (3,43')$$

Обозначая через

$$\gamma = \frac{\varkappa}{2\pi}\frac{m'c^2}{2}$$

гравитационный радиус, соответствующий массе m', получаем из (3,43′)

$$\alpha = 2(\gamma-\beta). \qquad (3,44)$$

Подставляя это выражение в (3,39), получаем для определения постоянной β квадратное уравнение

$$4(\gamma-\beta)^2 + 2(\gamma-\beta)\beta - \varepsilon^2 = 0. \qquad (3,45)$$

Решая это уравнение и подставляя выражение для β в (3,44), получаем выражения для постоянных α и β через гравитационный радиус γ и электрический радиус ε:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \left\{\sqrt{1+2\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^2}-1\right\}\gamma, \\ \beta &= \left\{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+2\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^2}\right\}\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (3.46)$$

Знак перед корнем выбран таким, чтобы при $\varepsilon\to 0$ решение (3,41) переходило в классическое решение Шварцшильда для поля точечной нейтральной массы:

$$e^\nu = \frac{1}{1-\frac{\gamma}{r}}, \quad e^\mu = 1-\frac{\gamma}{r}, \quad e^\lambda = 1, \quad A_4 = 0. \qquad (3,41')$$

Если допустимо пренебречь гравитационным радиусом γ по сравнению с электрическим радиусом ε, то

$$\left.\begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon|; \\ \alpha &= \sqrt{2}|\varepsilon|, \end{aligned}\right\} \qquad (3,46')$$

и мы получаем решение:

$$e^{\nu}=\frac{1}{1+\frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}r}}; \qquad e^{\mu}=\frac{\sqrt{1+\frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}r}}}{1+\frac{\sqrt{2}|\varepsilon|}{r}};$$

$$e^{\lambda}=1+\frac{\sqrt{2}|\varepsilon|}{r}; \quad A_4=\frac{ie'}{r+\sqrt{2}|\varepsilon|}, \tag{3,41''}$$

соответствующее полю точечного заряда.

§ 20. Поле заряженной точечной массы по теории тяготения

Задача, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе, решается и в теории тяготения. Мы получим решение теории тяготения, если в уравнениях (3,31) положим $\lambda=0$ (т. е. будем игнорировать χ-поле), и откинем уравнение $C_3=0$, которое получено в результате варьироваиия по функции λ. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &\equiv \frac{e^{\nu}-1}{u^2}+\frac{\dot{\mu}}{u}-\frac{\varepsilon^2}{4}e^{\nu}=0,\\ C_2 &\equiv \frac{e^{\nu}-1}{u^2}-\frac{\dot{\nu}}{u}-\frac{\varepsilon^2}{4}e^{\nu}=0,\\ \dot{g} &= i\varepsilon\exp\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3,47}$$

Из уравнения $C_1-C_2=0$ следует $\mu+\nu=0$. Интегрируя уравнение $C_2=0$, получаем:

$$e^{\nu}=\left[1-\gamma u+\frac{\varepsilon^2}{4}u^2\right]^{-1}; \quad g=i\varepsilon u \tag{3,48}$$

или

$$e^{\nu}=\left[1-\frac{\gamma}{r}+\frac{\varepsilon^2}{4r^2}\right]^{-1}; \quad e^{\mu}=\left[1-\frac{\gamma}{r}+\frac{\varepsilon^2}{4r^2}\right];$$

$$e^{\lambda}=1; \quad A_4=\frac{ie'}{r}. \tag{3,48'}$$

Мы видим, что 5-оптика, учитывающая χ-поле, и теория тяготения, игнорирующая χ-поле в задаче о поле заряженной точечной массы, приходят к различным решениям.

Отметим, что в теории тяготения кулоновский потенциал имеет обычный классический вид, в то время как по 5-оптике он не имеет в точке $r=0$ особенности.

§ 21. Обобщенная проблема Кеплера

В качестве упражнения рассмотрим задачу о движении пробной частицы в поле заряженной точечной массы. Уравнение 5-эйконала имеет вид:

$$\{(e^{-\nu}-1)n_i n_k+\delta_{ik}\}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^k}+e^{-\mu}\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial x^4}\right)^2+$$
$$\left(e^{-\lambda}+e^{-\mu}\frac{e^2}{m^2c^4}A_4^2\right)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial x^5}\right)^2-2\frac{e}{mc^2}A_4\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial x^5}\right)e^{-\mu}=0. \quad (3{,}49)$$

Переходя к укороченному 3-эйконалу $S(x^1,\ x^2,\ x^3)$, по формуле

$$\Sigma=\Pi_5x^5+\Pi_4x^4+S(x^1,\ x^2,\ x^3) \quad (3{,}50)$$

получаем для функции S уравнение Гамильтона—Якоби:

$$e^{-\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2+e^{-\mu}\left(\Pi_4-\frac{e}{mc^2}A_4\Pi_5\right)^2+e^{-\lambda}\Pi_5^2=0, \quad (3{,}51)$$

где $\Pi_5=\pm mc$, $E=-\Pi_4ic$ (энергия).

По общему правилу ищем решение уравнения (3,51) в виде

$$S=M\varphi+f(r) \quad (3{,}52)$$

и находим (M — момент количества движения)

$$S=M\varphi+$$
$$+\int\sqrt{e^{-(\nu+\mu)}\left(\frac{E}{cM}+\frac{eA_4i}{mc^2M}\Pi_5\right)^2-\frac{e^{-\nu}}{r^2}-e^{-(\lambda+\nu)}\left(\frac{\Pi_5}{M}\right)^2}\,dr. \quad (3{,}53)$$

Уравнение траектории получаем в виде $\partial S/\partial M=\text{const}$.

Полагая опять $r=\frac{1}{u}$, получаем уравнение траектории в виде

$$\varphi=\int\frac{du}{\sqrt{e^{-(\nu+\mu)}\left(\frac{E}{cM}+\frac{eA_4i}{mc^2M}\Pi_5\right)^2-u^2e^{-\nu}-e^{-(\lambda+\nu)}\left(\frac{\Pi_5}{M}\right)^2}}. \quad (3{,}54)$$

Рассмотрим три частных случая:

I. Подставляя решение (3,41′), получим ($\Pi_5 = \pm mc$):

$$\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{E}{cM}\right)^2 - u^2(1-\gamma u) - \left(\frac{mc}{M}\right)^2(1-\gamma u)}} \tag{3,55}$$

— хорошо известное уравнение орбиты Кеплера в теории тяготения Эйнштейна.

II. Подставляя решение (3,41″), получим ($\Pi_5 = \pm mc$), если устремить $\varepsilon \to 0$

$$\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{E}{cM} \pm \frac{ee'u}{cM}\right)^2 - u^2 - \left(\frac{mc}{M}\right)^2}}. \tag{3,56}$$

— классическую орбиту заряда $\pm e$, движущегося в кулоновском поле e'/r.

III. В случае траектории луча света в поле заряженной точечной массы следует в (3,54) положить $\Pi_5 = 0$. Уравнение траектории имеет вид

$$\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{e^{-(\nu+\mu)}}{R^2} - u^2 e^{-\nu}}}, \tag{3,57}$$

где $R = \frac{Mc}{E}$ — прицельный параметр луча. Интеграл (3,57) приводится к эллиптическим. Дифференциальное уравнение траектории луча имеет вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{e^{-(\nu+\mu)}}{R^2} - u^2 e^{-\nu}. \tag{3,58}$$

Если подставить решение 5-оптики (3,41), то получаем:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1+\alpha u}{R^2} - u^2(1-\beta u). \tag{3,59}$$

Приближенное интегрирование дает следующую формулу угла Δ_φ между асимптотами:

$$\Delta_\varphi = \frac{\alpha + 2\beta}{R} = \frac{2\gamma}{R}. \tag{3,60}$$

Если подставить решение по теории тяготения (3,48), то получим:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{R^2} - u^2\left(1 - \gamma u + \frac{\varepsilon^2}{4}u^2\right), \tag{3,61}$$

и для угла между асимптотами

$$\Delta_{\varphi}=\frac{2\gamma}{R}+\frac{3\pi}{16}\frac{\varepsilon^2}{R^2}. \tag{3,62}$$

Сравнивая формулы, мы видим, что согласно 5-оптике электрический заряд не оказывает влияния на величину угла между асимптотами, в то время как теория тяготения дает дополнительный член, квадратичный в (ε/R).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Гармоническая система координат в пространстве Римана

В этом приложении мы рассматриваем общий случай пространства Римана n-измерений.

1. Если метрический тензор g^{ik} удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial\sqrt{|g|}\,g^{ik}}{\partial x^k}=0, \tag{3,63}$$

то система координат называется гармонической. Ковариантная производная тензора g^{ik} равна нулю:

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^s}+g^{ir}\Gamma^k_{rs}+g^{kr}\Gamma^i_{rs}=0. \tag{3,64}$$

Свертывая по индексам k, s, принимая во внимание $\Gamma^s_{is}=\frac{\partial\ln\sqrt{|g|}}{\partial x^i}$, получаем:

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\,g^{ik})}{\partial x^k}+\sqrt{|g|}\,g^{rs}\Gamma^i_{rs}=0 \tag{3,65}$$

и, следовательно, условие гармоничности может быть записано в виде:

$$\Gamma^i=g^{rs}\Gamma^i_{rs}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial(\sqrt{|g|}\,g^{ik})}{\partial x^k}=0, \tag{3,66}$$

где Γ^λ — псевдовектор ангармоничности.

2. Из формул преобразования символов Кристоффеля

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\bar{x}^\alpha}\frac{\partial\bar{x}^\beta}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\bar{x}^\gamma}{\partial x^\nu}+\frac{\partial^2\bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\bar{x}^\alpha} \tag{3,67}$$

вытекают в результате умножения на $g^{\mu\nu}$ формулы преобразования для псевдовектора Γ^{λ}:

$$\Gamma^{\lambda}=\left(\overline{\Gamma}^{\lambda}+g^{\sigma\tau}\frac{\partial^2\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\tau}}\right)\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial\overline{x}^{\alpha}}, \tag{3,68}$$

откуда следует, что система координат остается гармонической, если в формулах преобразования

$$\overline{x}^{\alpha}=x^{\alpha}+f^{\alpha}(x^1x^2\ldots x^n) \tag{3,69}$$

функции f^{α} удовлетворяют уравнениям

$$g^{ik}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^i\,\partial x^k}=0. \tag{3,70}$$

При переходе от одной гармонической системы координат к другой составляющие тензора $G^{\mu\nu}$ преобразуются по формулам

$$\overline{G}^{\mu\nu}=G^{\mu\nu}+G^{\mu\alpha}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}+G^{\nu\alpha}\frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}+G^{\alpha\beta}\frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\beta}}, \tag{3,71}$$

где функции f^{ν} удовлетворяют уравнениям (3,70).

3. При вычислениях удобно, наряду с величинами Γ^i_{kl}, вводить величины

$$\Gamma^{i,\,mn}=g^{mk}g^{nl}\Gamma^i_{kl}. \tag{3,72}$$

Умножая (3,64) на g^{st}, получаем:

$$g^{st}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^s}+\Gamma^{k,\,it}+\Gamma^{i,\,kt}=0. \tag{3,73}$$

Решая эти уравнения относительно $\Gamma^{k,\,it}$, находим:

$$\Gamma^{k,\,it}=\frac{1}{2}\left\{g^{ks}\frac{\partial g^{it}}{\partial x^s}-g^{is}\frac{\partial g^{kt}}{\partial x^s}-g^{ts}\frac{\partial g^{ki}}{\partial x^s}\right\}. \tag{3,74}$$

4. Вычисление составляющих свернутого тензора Римана. По определению имеем:

$$R^h_{kij}=\frac{\partial\Gamma^h_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^h_{ki}}{\partial x^j}+\Gamma^h_{il}\Gamma^l_{kj}-\Gamma^h_{jl}\Gamma^l_{ik}.$$

Умножая на g^{ik} и принимая во внимание

$$\Gamma^h=g^{ik}\Gamma^h_{ik},\quad \Gamma^h_{lk}\left(\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^j}+2g^{ik}\Gamma^l_{ij}\right)=0,$$

получаем:

$$R_j^h = g^{ik}\frac{\partial \Gamma_{kj}^h}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^h}{\partial x^j} + \Gamma_{lk}^h\left(\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^j} + g^{ik}\Gamma_{ij}^l\right) - \Gamma^l\Gamma_{lj}^h =$$

$$= g^{ik}\frac{\partial \Gamma_{kj}^h}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\Gamma_{lk}^h\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^j} - \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^h\Gamma^l\right). \qquad (3,75)$$

Свертывая по индексам h, j, получаем:

$$R = g^{ik}\frac{\partial^2 \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{1}{2}\Gamma_{lk}^h\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^h} - \left(\frac{\partial \Gamma^h}{\partial x_h} + \Gamma_{lh}^h\Gamma^l\right). \quad (3,76)$$

Умножая (3,75) на g^{sj}, получаем:

$$R^{sh} = g^{ik}\frac{\partial g^{sj}\Gamma_{kj}^h}{\partial x^i} - g^{ik}\Gamma_{kj}^h\frac{\partial g^{sj}}{\partial x^i} +$$

$$+ \frac{1}{2}\Gamma_{lk}^h\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^j}g^{sj} - g^{sj}\left(\frac{\partial \Gamma^h}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^h\Gamma^l\right).$$

Симметризуя первый член в индексах h, s и второй член в индексах k, j, получаем, учитывая формулы (3,64) и (3,73):

$$R^{sh} = -\frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial^2 g^{sh}}{\partial x^i\,\partial x^k} + \Gamma_{kj}^h\Gamma^{s,\,kj} - g^{sj}\left(\frac{\partial \Gamma^h}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^h\Gamma^l\right). \quad (3,77)$$

Умножая (3,75) на g_{sh}, получаем:

$$R_{sj} = g^{ik}\frac{\partial \Gamma_{s,kj}}{\partial x^i} - g^{ik}\Gamma_{kj}^h\frac{\partial g_{sh}}{\partial x^i} +$$

$$+ \frac{1}{2}\Gamma_{s,\,lk}\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^j} - g_{sh}\left(\frac{\partial \Gamma^h}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^h\Gamma^l\right).$$

Симметризуя первый член в индексах s, j, получаем:

$$R_{sj} = \frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial^2 g_{sj}}{\partial x^i \partial x^k} - g^{ik}\Gamma_{kj}^h\frac{\partial g_{sh}}{\partial x^i} +$$

$$+ \frac{1}{2}\Gamma_{s,\,lk}\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^j} - g_{sh}\left(\frac{\partial \Gamma^h}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^h\Gamma^l\right). \qquad (3,78)$$

В гармонической системе координат в формулах (3,75), (3,76), (3,77) и (3,78) следует положить $\Gamma^h = 0$, и мы получаем формулы, приводимые в тексте (§ 15).

5. При переходе от формул (3,13) к формулам (3,13′) следует помнить, что система координат в 4-пространстве не будет гармонической. Имеем по условию гармоничности в 5-пространстве (3,12а):

$$\frac{\partial\sqrt{1+\chi}}{\partial x^k}\sqrt{|\tilde{g}|}\,\tilde{g}^{ik}+\sqrt{1+\chi}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\sqrt{|\tilde{g}|}\,\tilde{g}^{ik}=0,$$

откуда по формуле (3,66) получаем:

$$\tilde{\Gamma}^i=-\frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}\frac{\partial\sqrt{|\tilde{g}|}\,\tilde{g}^{ik}}{\partial x^k}=\tilde{g}^{ik}\frac{\partial\ln\sqrt{1+x}}{\partial x^k}=\frac{1}{2}\frac{\tilde{g}^{ik}}{1+\chi}\frac{\partial\chi}{\partial x^k},$$

и далее:

$$\tilde{g}^{ks}\left(\frac{\partial\tilde{\Gamma}^i}{\partial x^s}+\tilde{\Gamma}^i_{sl}\Gamma^l\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\tilde{g}^{in}\tilde{g}^{km}}{1+\chi}\left\{\frac{\partial^2\chi}{\partial x^n\,\partial x^m}-\frac{1}{(1+\chi)}\frac{\partial\chi}{\partial x^n}\frac{\partial\chi}{\partial x^m}-\Gamma^l_{nm}\frac{\partial\chi}{\partial x^l}\right\},$$

$$\frac{\partial\tilde{\Gamma}^i}{\partial x^i}+\tilde{\Gamma}^i_{ik}\tilde{\Gamma}^k=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{g^{ik}}{(1+\chi)}\left\{\frac{\partial^2\chi}{\partial x^i\,\partial x^k}-\frac{3}{2(1+\chi)}\frac{\partial\chi}{\partial x^i}\frac{\partial\chi}{\partial x^k}\right\}. \qquad (3,79)$$

ГЛАВА IV

ВОЛНОВАЯ 5-ОПТИКА В 5-ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

§ 22. Введение

В предыдущих двух главах мы изложили те разделы 5-оптики, которые можно условно назвать «классическими», поскольку мы в них всегда рассматривали предельный случай $h \to 0$.

Мы приступаем сейчас к изложению квантовой механики как волновой 5-оптики, т. е. к подробному обоснованию следующего основного положения:

Задача волновой оптики о распространении волновых полей в конфигурационных пространствах Римана пяти измерений координат, времени и действия, которые топологически замкнуты в координате действия с периодом h, эквивалентна задаче квантовой механики о движении частицы с заданным отношением e/m в заданном внешнем поле.

В связи с этим подчеркнем, что в дальнейшем мы будем иметь дело только с конфигурационными пространствами.

Фундаментальное пространство, с которым мы имели дело в III главе, далее совсем не будет встречаться.

Мы видели, что в геометрической 5-оптике движение пробной частицы описывается уравнением 5-эйконала. Это уравнение является универсальным в том смысле, что описывает движение любой пробной частицы, вне зависимости от ее спина. При переходе к волновой 5-оптике мы не имеем универсального волнового уравнения или систем волновых уравнений. Это связано с тем, что для частиц с различными спинами мы имеем различные системы волновых уравнений.

В волновой 5-оптике движение пробной частицы описывается как оптический процесс распространения волновых полей в конфигурационных 5-пространствах координат, времени и действия. Движение частиц с целым спином описывается тензорными полями, а движение частиц с полуцелым спином — спинорными полями. Мы рассмотрим в этой главе различные примеры тензорных и спинорных волновых полей в 5-пространстве. При этом мы будем пока предполагать, что внешнее поле отсутствует, то есть, что метрика 5-пространства есть метрика Минковского. В главе VI мы будем рассматривать те же поля в 5-пространстве Римана, т. е. учитывать присутствие внешнего поля.

В дальнейшем мы будем пользоваться единицами Паули, т. е. полагать $\hbar = 1$, $c = 1$. Мы обозначаем «квантовый радиус» частицы через $\frac{1}{\mu} = \frac{\hbar}{mc}$, следовательно, μ есть измеренная в единицах Паули масса пробной частицы. Следуя Паули, мы условно назовем частицы с целым спином мезонами.

Учитывая, что 5-пространство периодично в координате действия, мы будем каждую составляющую поля разлагать в ряд Фурье:

$$W^{(r)}(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = \sum_{Z=-\infty}^{Z=+\infty} \exp(iZ\mu x^5)\, U^{(r)}(Z \mid x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad (4,1)$$

и рассматривать $W^{(r)}$ как набор составляющих Фурье

$$U^{(r)}(Z \mid x^1, x^2, x^3, x^4).$$

Условимся в дальнейшем под операцией $\int A(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)\, dx^5$ понимать усреднение по периоду пятой координаты:

$$\int A\, dx^5 = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\mu}} A\, dx^5 = \overline{A}(x^1, x^2, x^3, x^4). \qquad (4,2)$$

Пусть поле задано функцией Лагранжа:

$$L\left(W^{(r)};\ \frac{\partial W^{(r)}}{\partial x^{\sigma}}\right). \qquad (4,3)$$

Имеем согласно нашим обозначениям

$$\int L\left(W^{(r)};\ \frac{\partial W^{(r)}}{\partial x^{\sigma}}\right) dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4\,dx^5 =$$
$$= \int \overline{L}\left(U^{(r)}(Z\,|\,\ldots);\ \frac{\partial U^{(r)}(Z\,|\,\ldots)}{\partial x^k}\right)(dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4). \quad (4,4)$$

Последовательный переход от функций пяти координат $W^{(r)}(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ к составляющим Фурье $U^{(r)}(Z\,|\,x^1, x^2, x^3, x^4)$, зависящих от четырех координат x^1, x^2, x^3, x^4, есть переход от q-представления относительно координат x^1, x^2, x^3, x^5 к смешанному представлению: p-представлению относительно координаты x^5 и q-представлению относительно координат x, y, z. В таком представлении все формулы приобретают привычный четырехмерный вид.

При помощи канонического формализма мы получаем из функции Лагранжа уравнения поля

$$\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial W^{(r)}}{\partial x^{\sigma}}\right)}\right) - \frac{\partial L}{\partial W^{(r)}} = 0 \quad (4,5)$$

и выражения для канонического 5-тензора

$$T_{\mu\nu} = \sum_{(r)} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial W^{(r)}}{\partial x^{\nu}}\right)} \cdot \frac{\partial W^{(r)}}{\partial x^{\mu}} - \delta_{\mu\nu} L, \quad (4,6)$$

который в силу уравнений поля (4,5) удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \quad (4,7)$$

В дальнейшем при рассмотрении частных случаев полей мы будем в формулах (4,5)—(4,7) переходить к представлению через составляющие Фурье, что позволит дать физическое истолкование пятимерным формулам.

§ 23. Задача о распространении звуков волн в плоско-параллельном слое

Прежде чем обратиться к изучению специальных случаев полей, полезно в иллюстративных целях рассмотреть задачу о распространении звуковых волн в неограниченном плоско-параллельном слое. Нам будет удобно выражать толщину слоя l через некоторую фиктивную массу m, связанную с l формулой

$$m = \frac{h}{al}, \tag{4,8}$$

где a — скорость звука. Для монохроматической волны частоты ω имеем уравнение Гельмгольца

$$\Delta W + \frac{\omega^2}{a^2} W = 0. \tag{4,9}$$

Выбирая ось z перпендикулярно слою, разлагаем функцию $W(x, y, z)$ в ряд Фурье:

$$W(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} U(n \mid x, y) \exp\left(\frac{inmaz}{\hbar}\right) \tag{4,10}$$

и будем рассматривать $W(x, y, z)$ как набор составляющих Фурье $U(n \mid x, y)$, т. е. совершим относительно координаты z переход от q-представления к p-представлению.

Мы можем теперь рассматривать всю задачу как двумерную. Функции $U(n \mid x, y) \equiv U_n$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{a^2} - \left(\frac{nma}{\hbar}\right)^2\right) U_n = 0. \tag{4,11}$$

Для того чтобы двумерные волны $U(n \mid x, y)$ были незатухающими, необходимо согласно (4,11), чтобы было

$$\hbar\omega > nma^2 \quad \text{или} \quad \lambda < \frac{l}{n},$$

где λ — длина волны звука.

Рассматривая распространение незатухающих плоских двумерных волн в слое, мы получаем для волнового 2-вектора $\vec{k}_n$ характеристическое уравнение

$$k_n^2 + \left(\frac{nma}{\hbar}\right)^2 = \frac{\omega^2}{a^2}. \tag{4,12}$$

Определим теперь 2-векторы групповой скорости $\vec{v}_n$

и фазовой скорости $\vec{w}_n$ формулами:

$$\vec{v}_n = \frac{d\omega}{d\vec{k}_n} = a^2 \frac{\vec{k}_n}{\omega}, \tag{4,13}$$

$$\vec{w}_n = \frac{\omega}{\vec{k}_n}, \tag{4,13'}$$

$$v_n w_n = a^2. \tag{4,13''}$$

Если в звуковом поле представлены только длинные волны $\lambda > l$, мы имеем дело с двумерными волнами с $n = 0$. Они распространяются без дисперсии $v_0 = w_0 = a$ и соответствуют обычным двумерным фононам, для которых $hk_0 = \frac{h\omega}{a}$. Если в звуковом поле представлены и короткие волны $\lambda < \frac{l}{n}$, то мы должны учитывать и двумерные волны с $n \neq 0$, для которых имеем, подставляя (4,13) в (4,12),

$$hk_n = \frac{(nm)\, v_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_n}{a}\right)^2}}; \quad \hbar\omega_* = \frac{(nm)\, a^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_n}{a}\right)^2}}. \tag{4,14}$$

Этим двумерным волнам, распространяющимся с дисперсией, соответствуют двумерные «тяжелые фононы» с дискретным спектром масс.

Принимая во внимание, что в силу (4.10) имеем

$$\overline{W}(x, y) = \frac{1}{l} \int_0^l W(x, y, z)\, dz = U(0 \mid x, y), \tag{4,15}$$

мы можем усреднить уравнение (4,9) по координате z и получить для функции $\overline{W}(x, y)$ двумерное уравнение Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{a^2} \overline{W} = 0. \tag{4,16}$$

Итак, когда мы имеем дело со звуковым полем в слое, в котором не представлены короткие волны $\lambda > l$, мы можем описывать звуковое поле усредненным уравнением (4,16) и игнорировать «тяжелые фононы». При наличии коротких волн мы стоим перед альтернативой:

1) Отказаться от двумерного описания звукового поля и вернуться к исходному трехмерному уравнению,

2) либо, сохраняя двумерное описание для звукового поля, ввести наряду с обычными двумерными фононами «тяжелые фононы».

Рассмотренный пример окажется очень полезным для понимания дальнейшего.

§ 24. Скалярные мезоны

Начнем с рассмотрения простейшего действительного скалярного поля, функция Лагранжа для которого имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial x^{\nu}}\cdot\frac{\partial W}{\partial x^{\nu}}. \tag{4,17}$$

По формулам (4,5), (4,6) и (4,7) получаем:

уравнение поля

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\nu}} = 0, \tag{4,18}$$

выражение для 5-тензора

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial W}{\partial x^{\mu}}\cdot\frac{\partial W}{\partial x^{\nu}} - \delta_{\mu\nu}L, \tag{4,19}$$

который удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{4,20}$$

Перейдем в формулах (4,17)—(4,20) к представлению в составляющих Фурье. Принимая во внимание, что для действительного поля

$$U(-Z\,|\,x^1, x^2, x^3, x^4) = U^*(Z\,|\,x^1, x^2, x^3, x^4) \tag{4,21}$$

имеем, подставляя в формулы, разложение (4,1)

$$L = \frac{1}{2}\sum_{Z}\sum_{Z'}\int\left\{\frac{\partial U(Z')}{\partial x^k}\,\frac{\partial U(Z)}{\partial x^k} - \right.$$

$$\left. - Z'Z\mu^2 U(Z')\,U(Z)\right\}\exp\left(i(Z+Z')\,\mu x^5\right)dx^5 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{Z=-\infty}^{Z=+\infty}\left\{\frac{\partial U^*(Z)}{\partial x^k}\,\frac{\partial U(Z)}{\partial x^k} + Z^2\mu^2 U^*(Z)\,U(Z)\right\} =$$

$$= L(0) + \sum_{Z=1}^{Z=\infty} L(Z), \tag{4,17'}$$

где для сокращения обозначено

$$\left.\begin{aligned} L(0) &= \frac{1}{2}\frac{\partial U(0)}{\partial x^k}\frac{\partial U(0)}{\partial x^k}, \\ L(Z) &= \frac{\partial U^*(Z)}{\partial x^k}\frac{\partial U(Z)}{\partial x^k} + Z^2\mu^2 U^*(Z)\,U(Z). \end{aligned}\right\} \tag{4,22}$$

Выделяя координату действия, получим из (4,19):

$$\left.\begin{aligned} \overline{T}_{ik} &= \overline{T}_{ik}(0) + \sum_{Z=1}^{Z=\infty} \overline{T}_{ik}(Z), \\ \overline{T}_{5k} &= \sum_{1}^{\infty} i\,|Z|\,\mu\left\{U(Z)\frac{\partial U^*(Z)}{\partial x^k} - U^*(Z)\frac{\partial U(Z)}{\partial x^k}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{4,19'}$$

где

$$\overline{T}_{ik}(0) = \frac{\partial U(0)}{\partial x^i}\frac{\partial U(0)}{\partial x^k} - L(0)\,\delta_{ik},$$

$$\overline{T}_{ik}(Z) = \frac{\partial U^*(Z)}{\partial x^i}\frac{\partial U(Z)}{\partial x^k} + \frac{\partial U^*(Z)}{\partial x^k}\frac{\partial U(Z)}{\partial x^i} - \delta_{ik}L(Z).$$

Уравнения поля в компонентах Фурье имеют вид

$$\left.\begin{aligned} (\Box - Z^2\mu^2)\,U(Z\,|\,\ldots) &= 0; \\ (\Box - Z^2\mu^2)\,U^*(Z\,|\,\ldots) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4,18'}$$

Усредняя по координате действия, имеем из (4,20), выделяя координату действия:

$$\frac{\partial \overline{T}_{ik}}{\partial x^k} = 0, \qquad \frac{\partial \overline{T}_{5k}}{\partial x^k} = 0. \tag{4,20'}$$

Мы завершили переход к формулировке в составляющих Фурье. Для того чтобы выяснить физический смысл полученных выражений, сделаем предположение, что в разложении Фурье (4,1) представлены только два члена, соответствующие $Z = \pm 1$:

$$W = U\exp(i\mu x^5) + U^*\exp(-i\mu x^5). \tag{4,23}$$

В этом частном случае система формул принимает вид:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{функция Лагранжа} \\
\qquad \overline{L} = \dfrac{\partial U^*}{\partial x^k}\dfrac{\partial U}{\partial x^k} + \mu^2 U^* U; \\
\text{уравнения поля} \\
\qquad (\square - \mu^2)\, U = 0; \quad (\square - \mu^2)\, U^* = 0, \\
\text{составляющие тензора } T_{\mu\nu} \\
\qquad \overline{T}_{ik} = \dfrac{\partial U^*}{\partial x^i}\dfrac{\partial U}{\partial x^k} + \dfrac{\partial U^*}{\partial x^k}\dfrac{\partial U}{\partial x^i} - \delta_{ik}\overline{L}; \\
\qquad \overline{T}_{5k} = i\mu\left(\dfrac{\partial U^*}{\partial x^k}U - \dfrac{\partial U}{\partial x^k}U^*\right),
\end{array}\right\} \qquad (4,24)$$

Система формул (4,24) в точности совпадает с системой формул, описывающих в теории Паули—Вейскопфа скалярные мезоны с массой $m = \mu\hbar/c$. 4-тензор $\overline{T}_{ik}$ есть симметричный тензор энергии — импульса, а 4-вектор $\overline{T}_{5k}$ отличается лишь множителем $mc/\hbar c$ от 4-вектора тока. Фурье-составляющие U и U^* описывают частицы, сопряженные по заряду; в самом деле, при замене U на U^* 4-вектор тока $\overline{T}_{5k}$ меняет знак.

Формулы (4,20′) выражают законы сохранения энергии и заряда, которые в 5-оптике объединяются в один закон сохранения. Поэтому 5-тензор $T_{\mu\nu}$ мы будем в дальнейшем называть 5-тензором энергии — импульса — заряда.

Возвращаясь к общему случаю разложения Фурье (4,1), мы заключаем, что действительное скалярное поле $W(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ описывает все семейство скалярных мезонов с массами $|Z|\,m$ и зарядами Ze, где Z — целое положительное или отрицательное число, включая нуль. Другими словами, все это семейство скалярных мезонов следует рассматривать как одну поличастицу в различных дискретных зарядовых состояниях.

Пока мы имеем дело со свободными частицами (внешнее поле отсутствует) или пока мы пренебрегаем (как это незаконно делает современная квантовая механика) периодической зависимостью внешнего поля от координаты действия (условие цилиндричности), переход частицы из одного зарядового состояния в другое запрещен. Однако в последовательной квантовой теории такие переходы должны приниматься во внимание.

Особого рассмотрения заслуживает частный случай $Z = 0$, когда скалярный мезон находится в состоянии нулевого заряда и массы. В этом случае составляющая Фурье $U(0)$ действительна, и мы имеем вместо (4,24) систему формул:

$$\left.\begin{aligned} \overline{L} &= \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x^k}\frac{\partial U}{\partial x^k}; \quad \square U = 0; \\ \overline{T}_{ik} &= \frac{\partial U}{\partial x^i}\frac{\partial U}{\partial x^k} - \overline{L}\delta_{ik}; \quad \overline{T}_{5k} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4,25}$$

описывающих классическое скалярное поле, ассоциируемое с частицами нулевой массы, нулевого заряда и нулевого спина.

Современная физика проводит резкую границу между комплексными Ψ-полями, описывающими поведение заряженной частицы, с отличной от нуля массой покоя и действительными классическими полями, описывающими поведение нейтральных частиц с нулевой массой покоя.

Такая резкая граница обусловлена в основном тем, что с точки зрения современной физики Ψ-поля локализованы в соответствующих конфигурационных пространствах, в то время как классические поля локализованы в универсальном 4-пространстве теории относительности.

Естественно, что в 5-оптике, которая радикально отказывается от представления об универсальном пространстве, принципиальная граница между квантовыми и классическими полями исчезает.

§ 25. Векторные мезоны

1. *Уравнения поля.* Предыдущий пример действительного скалярного поля служил лишь для иллюстрации нашей точки зрения и не привел к новым результатам, выходящим за рамки современной теории. Существенно новые результаты мы получим, если перейдем к рассмотрению действительного векторного поля.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла для 5-пространства. В обозначениях, которые не требуют объяснений, мы имеем для составляющих поля $W_{\lambda\mu} = -W_{\mu\lambda}$ систему уравнений:

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu}}{\partial x^{\mu}} = Q_{\lambda}, \tag{4,26}$$

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial W_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial W_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0. \tag{4,27}$$

Составляющие поля выражаются через потенциалы поля по формулам

$$W_{\lambda\mu} = \frac{\partial W_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial W_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}. \tag{4,28}$$

Потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 W_{\lambda}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial W_{\nu}}{\partial x^{\nu}}\right) = -Q_{\lambda} \tag{4,29}$$

и могут быть подвергнуты преобразованию калибровки:

$$W_{\lambda} = W'_{\lambda} + \frac{\partial F}{\partial x^{\lambda}}. \tag{4,30}$$

Функция Лагранжа и симметричный 5-тензор энергии — импульса — заряда имеют вид

$$L = \frac{1}{4} W_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu}, \tag{4,31}$$

$$\Theta_{\lambda\mu} = W_{\lambda\nu} W_{\mu\nu} - \delta_{\lambda\mu} L. \tag{4,32}$$

Для того чтобы выяснить физический смысл этих пятимерных уравнений, необходимо их переписать в компонентах Фурье. Для простоты последующих формул примем, что в разложении Фурье представлены только две составляющие $Z = \pm 1$. Обобщение на общий случай не представит труда.

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} W_{\lambda} &= U_{\lambda} \exp(i\mu x^5) + \overset{*}{U}_{\lambda} \exp(-i\mu x^5), \\ W_{\lambda\mu} &= U_{\lambda\mu} \exp(i\mu x^5) + \overset{*}{U}_{\lambda\mu} \exp(-i\mu x^5), \\ F &= f \exp(i\mu x^5) + f^* \exp(-i\mu x^5), \\ Q_{\lambda} &= q_{\lambda} \exp(i\mu x^5) + \overset{*}{q}_{\lambda} \exp(-i\mu x^5). \end{aligned}\right\} \tag{4,33}$$

В компонентах Фурье имеем следующую систему формул:

$$\frac{\partial U_{mk}}{\partial x^k} + i\mu U_{m5} = q_m; \quad \frac{\partial U_{5n}}{\partial x^n} = q_5, \tag{4.26'}$$

$$i\mu U_{nm} + \frac{\partial U_{n5}}{\partial x^m} + \frac{\partial U_{m5}}{\partial x^n} = 0; \quad \frac{\partial U_{mk}}{\partial x^k} + \frac{\partial U_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial U_{km}}{\partial x^n} = 0, \tag{4,27'}$$

$$U_{mn} = \frac{\partial U_n}{\partial x^m} - \frac{\partial U_m}{\partial x^n}; \quad U_{m5} = \frac{\partial U_5}{\partial x^m} - i\mu U_m, \tag{4,28'}$$

$$\left.\begin{aligned} (\Box - \mu^2) U_m - \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial U_n}{\partial x^n} + i\mu U_5\right) &= -q_n, \\ \Box U_5 - i\mu\left(\frac{\partial U_n}{\partial x^n}\right) &= -q_5, \end{aligned}\right\} \tag{4,29'}$$

$$U_m = U'_m + \frac{\partial f}{\partial x^m}; \quad U_5 = U'_5 + i\mu f. \tag{4,30'}$$

Соответствующую систему комплексно-сопряженных уравнений не выписываем:

$$\overline{L} = \frac{1}{2} U^*_{\lambda\mu} U_{\lambda\mu}, \tag{4,31'}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Theta}_{ik} &= U^*_{i\sigma} U_{k\sigma} + U^*_{k\sigma} U_{i\sigma} - \delta_{ik}\overline{L}, \\ \overline{\Theta}_{5k} &= U^*_{5\sigma} U_{k\sigma} + U_{5\sigma} U^*_{k\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{4,32'}$$

В выражениях (4,32′) нам удобнее перейти к трехмерной записи и воспользоваться временной координатой $x^0 = -ix^4$ вместо обычно употребляемой у нас координаты x^4.

Имеем, принимая во внимание

$$U_{0n} = -\left(\frac{\partial U_n}{\partial x_0} + \frac{\partial U_0}{\partial x^n}\right); \quad U_{n0} = \frac{\partial U_0}{\partial x^n} + \frac{\partial U_n}{\partial x^0}, \tag{4,34}$$

плотность энергии ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$)

$$\overline{\Theta}_{00} = \left\{ \frac{1}{2} U^*_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} + U^*_{\beta5} U_{\beta5} + U^*_{\beta0} U_{\beta} + U^*_{50} U_{50} \right\}; \tag{4,35}$$

плотность импульса

$$\overline{\Theta}_{\alpha0} = \{ U^*_{\alpha\beta} U_{0\beta} + U^*_{\alpha5} U_{05} + U_{\alpha\beta} U^*_{0\beta} + U_{\alpha5} U^*_{05} \};$$

плотность заряда

$$\overline{\Theta}_{50} = \{ U^*_{0\beta} U_{5\beta} + U_{0\beta} U^*_{5\beta} \}; \tag{4,36}$$

плотность тока

$$\overline{\Theta}_{5\alpha} = \{ U^*_{\alpha\beta} U_{5\beta} - U^*_{\alpha0} U_{50} + U_{\alpha\beta} U^*_{5\beta} - U_{\alpha} U^*_{50} \}.$$

2. *Калибровка потенциалов.* До сих пор мы не воспользовались возможностью надлежащей калибровки потенциалов. Выберем теперь такую калибровку, чтобы удовлетворялось

$$\frac{\partial U_i'}{\partial x_i} = 0. \tag{4,37}$$

Уравнения (4,29′) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} (\Box - \mu^2) U_\alpha' &= -q_\alpha + i\mu \frac{\partial U_5'}{\partial x^\alpha}, \\ (\Box - \mu^2) U_0' &= -q_0 + i\mu \frac{\partial U_5'}{\partial x^0}, \\ \Box U_5' &= -q^5, \end{aligned}\right\} \tag{4,38}$$

откуда следует

$$U_5'(r, x^0) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q_5(r', x^0 - |r - r'|)}{|r - r'|} dV' + \tilde{U}_5'(r, x^0), \tag{4,39}$$

где $\tilde{U}_5'$ — любое решение однородного волнового уравнения $\Box U_5' = 0$.

Если $q_\lambda = 0$ во всем пространстве, т. е. рассматриваемое поле чисто волновое, то мы можем положить $U_5' = 0$, выбрав при этом $\tilde{U}_5' = 0$. Система уравнений (4,26′), (4,27′) принимает вид (мы отбрасываем теперь значок штрих):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U_{mn}}{\partial x^n} + \mu^2 U_m = 0, \quad \frac{\partial U_n}{\partial x^n} = 0, \\ &U_{mn} = \frac{\partial U_n}{\partial x^m} - \frac{\partial U_m}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial U_{mn}}{\partial x^k} + \frac{\partial U_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial U_{km}}{\partial x^n} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4,40}$$

а система выражений (4,35), (4,36) — вид

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Theta}_{00} &= \left\{ \frac{1}{2} U_{\alpha\beta}^* U_{\alpha\beta} + U_{\beta 0}^* U_{\beta 0} + \mu^2 (U_\beta^* U_\beta + U_0^* U_0) \right\}, \\ \overline{\Theta}_{0\alpha} &= \{ U_{\alpha\beta}^* U_{0\beta} + U_{\alpha\beta} U_{0\beta}^* + \mu^2 (U_\alpha^* U_0 + U_\alpha U_0^*) \}, \\ \overline{\Theta}_{05} &= i\mu \{ U_{0\beta}^* U_\beta - U_{0\beta} U_\beta^* \}, \\ \overline{\Theta}_{\alpha 5} &= i\mu \{ U_{\alpha\beta}^* U_\beta - U_{\alpha\beta} U_\beta^* + U_{\alpha 0}^* U_0 - U_{\alpha 0}^* U_0 \}. \end{aligned}\right\} \tag{4,41}$$

Система формул (4,40) и (4,41) в точности совпадает с системой формул, описывающих векторные мезоны Прока.

Итак, мы показали, что пятимерное поле Максвелла, в случае отсутствия источников ($Q_\lambda \equiv 0$), при надлежащей калибровке потенциалов (4,37) описывает все семейство векторных мезонов Прока с массами $|Z|\, m$ и зарядами Ze, где Z — любое положительное и отрицательное целое число. Случай $Z=0$ включает в себя, очевидно, классическую электродинамику и не нуждается здесь в рассмотрении.

Уместно еще раз подчеркнуть, что в 5-оптике исчезает принципиальное различие между комплексными ψ-полями и действительными классическими полями.

В электродинамике, как показал В. Гинзбург (см. Математическое приложение), при надлежащей калибровке потенциалов можно разделить поле на поле фотонов (поперечные волны) плюс поле кулоновского взаимодействия непрерывно распределенных зарядов. Выделение поперечных волн, очевидно, по существу не лоренц-инвариантно.

Проведем, следуя Гинзбургу, аналогичную калибровку потенциалов и в нашей теории. Потребуем, чтобы удовлетворялась следующая релятивистско-неинвариантная калибровка ($\alpha = 1, 2, 3$):

$$\frac{\partial U''_\alpha}{\partial x^\alpha} + i\mu U''_5 = 0. \tag{4,42}$$

Уравнения (4,29′) принимают теперь вид

$$\left.\begin{aligned} (\Box - \mu^2)\, U''_\alpha &= -q_\alpha + \frac{\partial^2 U''_0}{\partial x^\alpha\, \partial x^0}, \\ (\Delta - \mu^2)\, U''_0 &= -q_0, \\ (\Box - \mu^2)\, U''_5 &= -q_5 + i\mu \frac{\partial U''_0}{\partial x^0}, \end{aligned}\right\} \tag{4,43}$$

откуда следует

$$U_0(r,\, x^0) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q_0(r',\, x^0)}{|r' - r|}\, e^{-\mu\,|r'-r|}\, dv'. \tag{4,44}$$

Преобразуем выражение $\widetilde{\Theta}_{00}$ по формуле (4,35), принимая во внимание условие калибровки (4,42). Отбрасывая значки двойных штрихов получим:

$$\begin{aligned}\overline{\Theta}_{00} = \Big\{ \frac{1}{2} U^*_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} + \frac{\partial U^*_\alpha}{\partial x^0}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x^0} + \\ + \frac{\partial U^*_5}{\partial x^0}\frac{\partial U_5}{\partial x^0} + \frac{\partial U^*_5}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U_5}{\partial x^\alpha} + \mu^2 U^*_\alpha U_\alpha + 2\mu^2 U_5 U^*_5 \Big\} + \\ + \frac{1}{2}\left\{ U^*_0 (\mu^2 - \Delta) U_0 + U_0 (\mu^2 - \Delta) U^*_0 \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Big\{ i\mu U^*_\beta U_5 + U_0 \frac{\partial U^*_\beta}{\partial x^0} + \frac{1}{2} U^*_0 \frac{\partial U}{\partial x^\beta} - \\ - i\mu U_\beta U^*_5 + U^*_0 \frac{\partial U_\beta}{\partial x^0} + \frac{1}{2} U_0 \frac{\partial U^*_0}{\partial x^\beta} \Big\}. \end{aligned} \tag{4,45}$$

Интегрируя по объему, получаем:

$$G_0 = G^{\mathrm{I}}_0 + \frac{1}{4\pi}\int \frac{q_0(r', x^0)\, q^*_0(r'', x^0)}{|r' - r|} e^{-\mu|r'-r''|}\, dV'\, dV''. \tag{4,46}$$

Первый член есть, как мы сейчас увидим, энергия волнового поля мезонов, а второй член — энергия взаимодействия непрерывно распределенных зарядов плотности $q_0(r, x^0)$, взаимодействующих по закону Юкавы.

Если мы рассматриваем чистоволновое поле без источников, то второй член в (4,46) равен нулю, и мы согласно (4,44) можем положить $U_0 = 0$.

Сделав это и проделав с формулами (4,36) аналогичные преобразования, как при выводе (4,45), получим для волнового поля мезонов

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Theta}_{\alpha 0} = \Big\{ \frac{\partial U_\beta}{\partial x^0}\frac{\partial U^*_\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial U_5}{\partial x^0}\frac{\partial U^*_5}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial U^*_\beta}{\partial x^0}\frac{\partial U_\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial U^*_5}{\partial x^0}\frac{\partial U_5}{\partial x^\alpha} \Big\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(U^*_\alpha \frac{\partial U_\beta}{\partial x^0} + U_\alpha \frac{\partial U^*_\beta}{\partial x^0} \right), \\ \overline{\Theta}_{00} = \Big\{ \frac{1}{2} U^*_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} + \frac{\partial U^*_\alpha}{\partial x^0}\cdot\frac{\partial U_\alpha}{\partial x^0} + \frac{\partial U^*_5}{\partial x^0}\frac{\partial U_5}{\partial x^0} + \frac{\partial U^*_5}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U_5}{\partial x^\alpha} + \\ + \mu^2 U^*_\alpha U_\alpha + 2\mu^2 U^*_5 U_5 \Big\} + i\mu \frac{\partial}{\partial x^\beta}(U^*_\beta U_5 - U_\beta U^*_5), \\ \overline{\Theta}_{50} = i\mu\left(U^*_\beta \frac{\partial U_\beta}{\partial x^0} + U^*_5 \frac{\partial U_5}{\partial x^0} - U_\beta \frac{\partial U^*_\beta}{\partial x^0} - U_5 \frac{\partial U^*_5}{\partial x^0} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(U^*_5 \frac{\partial U_\beta}{\partial x^0} + U_5 \frac{\partial U^*_\beta}{\partial x^0} \right). \end{aligned}\right\} \tag{4,47}$$

Вычислим теперь выражение для 5-вектора:

$$G_\lambda^1 = \int \Theta_{\lambda 0}\, dV. \tag{4,48}$$

Для этого разложим потенциалы U_α, U_5 на плоские волны $[k_0^2 = k^2 + \mu^2]$:

$$U = (2V)^{-\frac{1}{2}} \sum_{(k)} \{\vec{U}_+(k) \exp[i(\vec{k}\vec{r} - k_0 x^0)] + \\ + \vec{U}_-^*(k) \exp[-i(\vec{k}\vec{r} - k_0 x^0)]\}. \tag{4,49}$$

Тогда из условия (4,42) получим:

$$U_5 = \frac{(2V)^{-\frac{1}{2}}}{\mu} \sum_{(k)} \{-(\vec{k}\vec{U}_+) \exp[i(\vec{k}\vec{r} - k_0 x_0)] + \\ + (\vec{k}\vec{U}_-) \exp[-i(\vec{k}\vec{r} - k_0 x^0)]\}. \tag{4,49'}$$

Подставляя эти выражения в (4,48), получаем:

энергия

$$G_0 = k \sum_{(k)} (N_+(k) + N_-(k)),$$

импульс

$$\vec{G} = \vec{k} \sum_{(k)} (N_+(k) + N_-(k)), \tag{4,50}$$

заряд

$$G_5 = \mu \sum_{k} (N_+(k) - N_-(k)),$$

где для сокращения введены обозначения

$$N(k) = k_0(\vec{U}^*\vec{U}) + \frac{k_0}{\mu^2}(\vec{k}\vec{U}^*)(\vec{k}\vec{U}). \tag{4,51}$$

Для выделения продольной и поперечной составляющей преобразуем билинейную форму (4,51) к главным осям. Для этого положим

$$\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{k_0}}\left[(\vec{e}_1 V_1 + \vec{e}_2 V_2 + \frac{\mu}{k_0}\vec{e}_3 V_3\right], \tag{4,52}$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — три взаимно перпендикулярных единичных вектора, причем $\vec{e}_3 \| \vec{k}$, после чего формы N_+ и N_- принимают нормальный вид

$$N_+ = (\vec{V}^*_+ \vec{V}_+); \qquad N_- = (\vec{V}^*_- \vec{V}_-). \tag{4,53}$$

Из формул (4,52) заключаем, что при увеличении скорости мезонов продольная составляющая в силу $\mu/k_0 \to 0$ постепенно исчезает и поле все больше приближается к поперечному.

Если те же вычисления проделать для случая калибровки Прока, то вместо формул (4,51) и (4,52) получим (см. Паули, [13] стр. 36)

$$N = k_0 (\vec{U}^* \vec{U}) - \frac{1}{k_0} (\vec{k} \vec{U}^*) (\vec{k} U), \tag{4,51'}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{k_0}} \left[\vec{e}_1 V_1 + \vec{e}_2 V_2 + \frac{k_0}{k} \vec{e}_3 V_3 \right]. \tag{4,52'}$$

Из формулы (4,52′) заключаем, что при увеличении скорости мезонов продольная составляющая в силу $k_0/k \to 1$ не исчезает, а стремится по величине сравняться с поперечной, что физически неудовлетворительно.

3. *Электродинамика и векторная мезодинамика.* Мы видели, что 5-оптика объединяет электродинамику и векторную мезодинамику в единую пятимерную теорию Максвелла. Физически это означает, что мы пришли к необходимости учитывать в электромагнитной теории света при наличии коротких волн $\lambda < \frac{h}{mc}$, кроме обычных фотонов, соответствующих $Z = 0$, еще и «тяжелые фотоны» — векторные мезоны.

Для понимания уместно напомнить рассмотренную в § 23 акустическую модель.

Возникает вопрос, в каких случаях законно пользоваться классической электродинамикой и в каких случаях необходимо переходить к пятимерным уравнениям Максвелла.

Если усреднить уравнения (4,22) и (4,27) по координате действия, то мы получим, выделяя координату действия:

$$\frac{\partial \overline{W}_{mn}}{\partial x^n} = \overline{Q}_m, \qquad \frac{\partial \overline{W}_{mn}}{\partial x^k} + \frac{\partial \overline{W}_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial \overline{W}_{km}}{\partial x^n} = 0, \tag{4,54}$$

$$\frac{\partial \overline{W}_{5n}}{\partial x^n} = \overline{Q}_5, \qquad \frac{\partial \overline{W}_{n5}}{\partial x^m} - \frac{\partial \overline{W}_{m5}}{\partial x^n} = 0. \tag{4,55}$$

Система уравнений (4,54) есть в точности система уравнений Максвелла, если отождествить 4-вектор $W_k = U_k(0 \mid x^1, x^2, x^3, x^4)$ с электромагнитными потенциалами. Система уравнений (4,55) есть система для скалярного χ-поля, если отождествить 4-скаляр $W_5 = U_5(0 \mid x^1, x^2, x^3, x^4)$ с χ-потенциалом.

В классическом приближении, когда мы пренебрегаем всеми составляющими Фурье, кроме составляющей $Z = 0$, т. е. пренебрегаем зависимостью составляющих поля от координаты действия, мы имеем простую суперпозицию электромагнитного поля и χ-поля, подобно тому как в статической электродинамике мы имеем простую суперпозицию магнитного и электрического полей.

При учете высших составляющих Фурье, т. е. периодической зависимости составляющих поля от координаты действия, проявляется «индукция по действию», и оба поля оказываются взаимно связанными. В корпускулярной картине этой «индукции по действию» соответствует появление «тяжелых фотонов» — векторных мезонов.

Итак, пока мы имеем дело с электромагнитными волнами с $\lambda \gg \frac{h}{mc}$, законно пользоваться классической (усредненной по координате действия) электромагнитной теорией света.

При наличии коротких волн $\lambda \ll \frac{h}{mc}$ следует уже пользоваться точной пятимерной теорией Максвелла.

Рассмотрим теперь вопрос о характере взаимодействия между двумя непрерывно распределенными зарядами.

Обобщая формулу (4,46) на случай общего разложения Фурье для плотности заряда

$$Q_0(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = \sum_{Z=-\infty}^{Z=+\infty} \exp(iZ\mu x^5)\, q_0(Z \mid x^1, x^2, x^3, x^4), \qquad (4,56)$$

имеем для энергии взаимодействия

$$\frac{1}{8\pi}\int \frac{q_0(0 \mid r', x^0)\, q_0(0 \mid r'', x^0)}{|r' - r''|}\, dV'\, dV'' + \frac{1}{4\pi}\sum_{Z=1}^{Z=\infty}\int \frac{q_0(Z \mid r', x^0)\, \overset{*}{q}_0(Z \mid r'', x^0)}{|r' - r''|}\, e^{-Z\mu|r'-r''|}\, dV'\, dV''. \qquad (4,46')$$

Мы видим, что в точной теории, кроме классического взаимодействия Кулона, появляются силы взаимодействия типа Юкавы с прогрессивно уменьшающимися радиусами действия. Их можно не учитывать, если заряды расположены на расстояниях больше чем $1/\mu$.

В 5-оптике электромагнитное поле и χ-поле являются составляющими $G_{\mu\nu}$-поля, определяющего метрические соотношения в конфигурационном 5-пространстве.

Поэтому изложенная здесь пятимерная теория Максвелла является лишь приближением, законным в том случае, если можно пренебрегать гравитационными явлениями. В дальнейшем она должна войти как составная часть в единую квантовую теорию $G_{\mu\nu}$-поля.

§ 26. Псевдовекторные мезоны

Пусть действительное поле в 5-пространстве задано функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{12} W_{\lambda\mu\nu} W_{\lambda\mu\nu}, \tag{4,57}$$

где составляющие поля $W_{\lambda\mu\nu}$ образуют 5-мультивектор третьего ранга.

Составляющие поля $W_{\lambda\mu\nu}$ выражаются через потенциалы поля $W_{\lambda\mu} = - W_{\mu\lambda}$ по формулам

$$W_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial W_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial W_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial W_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}. \tag{4,58}$$

Потенциалы $W_{\lambda\mu}$ определены с точностью до калибровки

$$W'_{\lambda\mu} = W_{\lambda\mu} + \frac{\partial F_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial F_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}. \tag{4,59}$$

Варьируя (4,57) по потенциалам $W_{\lambda\mu\nu}$, получаем первую группу уравнений поля:

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{4,60}$$

Вторую группу уравнений поля запишем в виде

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial W_{\mu\nu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial W_{\nu\sigma\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial W_{\sigma\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}, \tag{4,61}$$

что эквивалентно (4,58).

Подставляя (4,58) в (4,60), получаем систему волновых уравнений для потенциалов $W_{\lambda\mu}$:

$$\frac{\partial^2 W_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 W_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 W_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0. \tag{4,62}$$

Воспользуемся теперь возможностью калибровки потенциалов и потребуем, чтобы удовлетворялась следующая лоренц-инвариантная нормировка потенциалов:

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial W_{\lambda 5}}{\partial x^5}. \tag{4,63}$$

В этом случае уравнения (4,62) принимают вид

$$\frac{\partial^2 W_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 W_{\mu 5}}{\partial x^\lambda \partial x^5} - \frac{\partial^2 W_{5\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^5} = 0 \tag{4,64}$$

или, выделяя координату действия:

$$\left(\Box + \frac{\partial^2}{\partial x^5 \partial x^5}\right) W_{ik} + \frac{\partial}{\partial x^5}\left(\frac{\partial W_{k5}}{\partial x^i} - \frac{\partial W_{i5}}{\partial x^k}\right) = 0, \tag{4,64'}$$

$$\Box W_{5k} = 0.$$

При калибровке (4,63) мы можем, следовательно, положить $W_{5k} \equiv 0$, и формулы (4,58) принимают вид

$$W_{ikl} = \frac{\partial W_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial W_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial W_{li}}{\partial x^k},$$

$$W_{5kl} = \frac{\partial W_{kl}}{\partial x^5}. \tag{4,58'}$$

Уравнения поля принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W_{ikn}}{\partial x^n} + \frac{\partial W_{ik5}}{\partial x^5} \equiv \frac{\partial W_{ikn}}{\partial x^n} + \frac{\partial^2 W_{ik}}{\partial x^5 \partial x^5} = 0, \\ \frac{\partial W_{5kn}}{\partial x^n} \equiv \frac{\partial}{\partial x^5}\left(\frac{\partial W_{kn}}{\partial x^n}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4,60'}$$

$$\frac{\partial W_{ikl}}{\partial x^n} - \frac{\partial W_{kln}}{\partial x^i} + \frac{\partial W_{lni}}{\partial x^k} - \frac{\partial W_{nik}}{\partial x^l} = 0,$$

$$\frac{\partial W_{ikl}}{\partial x^5} - \frac{\partial W_{kl5}}{\partial x^i} + \frac{\partial W_{l5i}}{\partial x^k} - \frac{\partial W_{5ik}}{\partial x^l} \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial x^5}\left(W_{ikl} - \frac{\partial W_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial W_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial W_{ik}}{\partial x^l}\right) = 0. \tag{4,61'}$$

Для выяснения физического смысла выписанных пятимерных уравнений поля необходимо их переписать в компонентах Фурье. Имеем (для случая $Z = \pm 1$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_{ikn}}{\partial x^n} - \mu^2 U_{ik} = 0, \\ \frac{\partial U_{kn}}{\partial x^n} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4{,}60'')$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U_{ikl}}{\partial x^n} - \frac{\partial U_{kln}}{\partial x^i} + \frac{\partial U_{lni}}{\partial x^k} - \frac{\partial U_{nik}}{\partial x^l} = 0, \\ &U_{ikl} = \frac{\partial U_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial U_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial U_{ik}}{\partial x^l}. \end{aligned}\right\} \qquad (4{,}61'')$$

Если изменить обозначения $\mu^2 U_{ik} \to U_{ik}$, то система уравнений (4,60″) и (4,61″) в точности совпадает с системой уравнений, описывающих псевдовекторные мезоны (ср. [13], стр. 34). Итак, мы показали, что действительное $W_{\lambda\mu\nu}$-поле в 5-пространстве при надлежащей калибровке (4,63) описывает все семейство псевдовекторных мезонов с массами $|Z|m$ и зарядами Ze, где Z — целое положительное или отрицательное число, включая нуль. Случай $Z = 0$ заслуживает особого рассмотрения (см. § 29).

Обобщим уравнения для $W_{\lambda\mu\nu}$-поля на случай присутствия в пространстве источников $W_{\lambda\mu\nu}$-поля и запишем их в виде

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^\nu} = Q_{\lambda\mu}, \qquad \frac{\partial W_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial W_{\mu\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial W_{\nu\sigma\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial W_{\sigma\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0, \qquad (4{,}65)$$

где

$$Q_{\lambda\mu} = q_{\lambda\mu} \exp(i\mu x^5) + q^*_{\lambda\mu} \exp(-i\mu x^5) \qquad (4{,}66)$$

— 5-тензор источников $W_{\lambda\mu\nu}$-поля.

Для выделения волнового поля мезонов воспользуемся калибровкой Гинзбурга и потребуем, чтобы выполнялась следующая, релятивистски неинвариантная нормировка потенциалов:

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial W_{\lambda 4}}{\partial x^4}. \qquad (4{,}67)$$

При калибровке (4,67) уравнения для потенциалов имеют вид

$$\frac{\partial^2 W_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\nu}+\frac{\partial^2 W_{\mu 4}}{\partial x^4 \partial x^\lambda}+\frac{\partial^2 W_{4\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^4}=Q_{\lambda\mu} \tag{4,68}$$

или, записанные в трехмерном виде и компонентах Фурье (α, β, $\gamma=1,\ 2,\ 3$),

$$\left.\begin{aligned}(\square-\mu^2)\,U_{\alpha\beta}+\frac{\partial}{\partial x^4}\left(\frac{\partial U_{\beta 4}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial U_{\alpha 4}}{\partial x^\beta}\right)&=q_{\alpha\beta}\,,\\ (\square-\mu^2)\,U_{\alpha 5}+\frac{\partial}{\partial x^4}\left(\frac{\partial U_{54}}{\partial x^\alpha}-i\mu U_{\alpha 4}\right)&=q_{\alpha 5}\,,\\ (\Delta-\mu^2)\,U_{\alpha 4}&=q_{\alpha 4}\,,\\ (\Delta-\mu^2)\,U_{54}&=q_{54}\,;\end{aligned}\right\} \tag{4,69}$$

отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned}U_{\alpha 4}&=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{q_{\alpha 4}(r',\ x^4)}{|r'-r|}\,e^{-\mu\,|r-r'|}\,dV',\\ U_{54}&=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{q_{54}(r',\ x^4)}{|r'-r|}\,e^{-\mu\,|r-r'|}\,dV'.\end{aligned}\right\} \tag{4,70}$$

Записав (4,57) в общековариантном виде

$$L=\frac{1}{12}\sqrt{|G|}\,W_{\sigma\tau\lambda}W^{\sigma\tau\lambda} \tag{4,57'}$$

и варьируя по метрическим потенциалам $G^{\mu\nu}$, получаем обычным путем выражение для симметричного 5-тензора энергии — импульса — заряда:

$$\Theta_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}\,W_{\lambda\sigma\tau}W_{\mu\sigma\tau}-\delta_{\lambda\mu}L. \tag{4,71}$$

Воспользовавшись временной координатой $x^0=-ix^4$, вычисляем отсюда (α, β, $\gamma=1,\ 2,\ 3$) плотность энергии

$$\overline{\Theta}_{00}=\frac{1}{2}\left(\overset{*}{U}_{0\alpha\beta}U_{0\alpha\beta}+2\overset{*}{U}_{05\alpha}U_{05\alpha}+\frac{1}{3}\overset{*}{U}_{\alpha\beta\gamma}U_{\alpha\beta\gamma}+\overset{*}{U}_{\alpha\beta 5}U_{\alpha\beta 5}\right); \tag{4,72}$$

плотность импульса:

$$\overline{\Theta}_{\alpha 0}=\frac{1}{2}\,(\overset{*}{U}_{\alpha\beta\gamma}U_{0\beta\gamma}+2\overset{*}{U}_{\alpha 5\gamma}U_{05\gamma}+k.\ c.), \tag{4,72'}$$

плотность заряда

$$\overline{\Theta}_{50}=\frac{1}{2}\,(\overset{*}{U}_{5\alpha\beta}U_{0\alpha\beta}+k.\ c.).$$

Принимая во внимание условие калибровки (4,67)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U_{ik}}{\partial x^k} + i\mu U_{i5} = \frac{\partial U_{i4}}{\partial x^4}, \\ &\frac{\partial U_{5k}}{\partial x^k} = \frac{\partial U_{54}}{\partial x^4}, \end{aligned}\right\} \tag{4,67'}$$

мы можем, интегрируя по частям, преобразовать выражения (4,72) к виду

$$\overline{\Theta}_{00} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U^*_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\frac{\partial U_{\alpha\beta}}{\partial x^0} + 2\frac{\partial U^*_{\alpha5}}{\partial x^0}\frac{\partial U_{\alpha5}}{\partial x^0} + \frac{1}{3}U^*_{\alpha\beta\gamma}U_{\alpha\beta\gamma} + U^*_{\alpha\beta5}U_{\alpha\beta5}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left\{U^*_{0\alpha}(\mu^2 - \Delta)U_{0\alpha} + U^*_{05}(\mu^2 - \Delta)U_{05} + k.\ c.\right\} + \\ + \text{пространственная дивергенция}; \tag{4,72'а}$$

$$\overline{\Theta}_{\alpha0} = \left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial U^*_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U_{\beta\gamma}}{\partial x^0} - \frac{\partial U^*_{5\beta}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U_{5\beta}}{\partial x^0} + k.\ c.\right\} + \\ + \frac{1}{4}\left\{U^*_{\alpha\beta}(\mu^2 - \Delta)U_{0\beta} + U^*_{\alpha5}(\mu^2 - \Delta)U_{05} + k.\ c.\right\} + \\ + \text{пространственная дивергенция}; \tag{4,72'б}$$

$$\overline{\Theta}_{50} = i\mu\left\{\frac{1}{2}\left(U^*_{\alpha\beta}\frac{\partial U_{\alpha\beta}}{\partial x^0} - U_{\alpha\beta}\frac{\partial U^*_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right) + \right. \\ + \left(U^*_{\alpha5}\frac{\partial U_{\alpha5}}{\partial x^0} - U_{\alpha5}\frac{\partial U^*_{\alpha5}}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{4}\left\{U^*_{5\alpha}(\mu^2 - \Delta)U_{0\alpha} + k.\ c.\right\} + \\ + \text{пространственная дивергенция}. \tag{4,72'в}$$

Интегрируя по объему и принимая во внимание (4,70) и (4,69), получаем:

$$\int \overline{\Theta}_{00}\,dV = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{\partial U^*_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\frac{\partial U_{\alpha\beta}}{\partial x^0} + \right. \\ \left. + 2\frac{\partial U^*_{\alpha5}}{\partial x^0}\frac{\partial U_{\alpha5}}{\partial x^0} + \frac{1}{3}U^*_{\alpha\beta\gamma}U_{\alpha\beta\gamma} + U^*_{\alpha\beta5}U_{\alpha\beta5}\right\}dV + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\frac{q^*_{0\alpha}(r', x^0)\,q_{0\alpha}(r'', x^0) + q^*_{05}(r', x^0)\,q_{05}(r'', x^0)}{|r' - r''|}\times \\ \times e^{-\mu(r' - r'')}\,dV'\,dV''. \tag{4,73}$$

Второй член дает энергию взаимодействия непрерывно распределенных источников $W_{\lambda\mu\nu}$-поля, взаимодействующих по закону Юкавы. Он равен нулю, если поле чистоволновое, т. е. $q_{\mu\nu}=0$ во всем пространстве. В этом случае остается первый член, который дает энергию волнового поля мезонов.

Разлагая потенциалы $U_{\alpha\beta}$ по плоским волнам, имеем в случае волнового поля, принимая во внимание (4,70) и (4,67′):

$$U_{\alpha\beta}=(2V)^{-\frac{1}{2}}\sum_{(k)}\{U^{+}_{\alpha\beta}(k)\exp[i(kr-k_0x^0)]+$$
$$+U^{-*}_{\alpha\beta}(k)\exp[i(-\vec{k}\vec{r}+k_0x^0)];$$
$$-U_{\alpha5}=(2V)^{-\frac{1}{2}}\sum_{(k)}\{U^{+}_{\alpha\beta}k_\beta\exp[i(kr-k_0x^0)]+$$
$$+U^{-*}_{\alpha\beta}k_\beta\exp[i(-kr+k_0x^0)]\},$$
$$U_{\alpha4}=0;\quad U_{54}=0. \tag{4,74}$$

Подставляя эти выражения в (4,72′) и интегрируя по объему, получаем:

$$\int\overline{\Theta}_{00}\,dV=k_0\sum_{(k)}\big(N_+(k)+N_-(k)\big), \tag{4,75а}$$
$$\int\overline{\Theta}_{0\alpha}\,dV=\sum_{(k)}k_\alpha\big(N_+(k)+N_-(k)\big), \tag{4,75б}$$
$$\int\overline{\Theta}_{05}\,dV=\mu\sum_{(k)}\big(N_+(k)-N_-(k)\big), \tag{4,75в}$$

где для сокращения обозначаем

$$N=k_0\left\{\frac{1}{2}U^*_{\alpha\beta}U_{\alpha\beta}+\frac{1}{\mu^2}(k_\alpha U_{\alpha\beta})(k_\gamma U_{\gamma\beta})\right\}. \tag{4,76}$$

Для выделения продольных и поперечных составляющих приведем формулу (4,76) к нормальному виду. Для этого введем псевдовектор $\widetilde{U}_\alpha=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}U_{\beta\gamma}$ и, положив

$$\vec{\widetilde{U}}=\frac{1}{\sqrt{k_0}}\left\{\frac{\mu_0}{k_0}(\widetilde{V}_1\vec{e}_1+\widetilde{V}_2\vec{e}_2)+\widetilde{V}_3\vec{e}_3\right\}, \tag{4,77}$$

где e_1, e_2, e_3 — три взаимно перпендикулярных единичных вектора, причем $e_3\parallel\vec{k}$, получаем:

$$N=(\widetilde{V}^*V). \tag{4,78}$$

При увеличении скорости мезонов продольные составляющие $\widetilde{V}_1=V_{23}$, $\widetilde{V}_2=V_{31}$, в силу $\mu/k_0\to0$, постепенно исчезают, и поле все больше приближается к поперечному. Отметим, что если все выкладки повторить для случая обычной калибровки (4,63), то окажется, что продольные составляющие при увеличении скорости мезона стремятся по величине сравняться с поперечной, что физически неудовлетворительно.

§ 27. Псевдоскалярные мезоны

Рассмотрим 5-поле, описываемое двумя группами уравнений:

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu\nu\sigma}}{\partial x^{\sigma}} = Q_{\lambda\mu\nu}, \tag{4,78а}$$

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu\nu\sigma}}{\partial x^{\tau}} + \frac{\partial W_{\mu\nu\sigma\tau}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial W_{\nu\sigma\tau\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial W_{\sigma\tau\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial W_{\tau\lambda\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} = 0, \tag{4,78б}$$

где составляющие поля $W_{\lambda\mu\lambda\sigma}$ образуют 5-мультивектор четвертого ранга; составляющие 5-тензора источников поля $Q_{\lambda\mu\nu}$ образуют 5-мультивектор третьего ранга. Составляющие поля $W_{\lambda\mu\nu\sigma}$ выражаются через потенциалы $W_{\lambda\mu\nu}$, образующие 5-мультивектор третьего ранга, по формулам

$$W_{\lambda\mu\nu\sigma} = \frac{\partial W_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial W_{\mu\nu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial W_{\nu\sigma\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial W_{\sigma\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}. \tag{4,79}$$

Потенциалы $W_{\lambda\mu\nu}$ определены с точностью до калибровки:

$$\left.\begin{aligned} W'_{\lambda\mu\nu} &= W_{\lambda\mu\nu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}, \\ F_{\lambda\mu} &= -F_{\mu\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{4,80}$$

Подставляя (4,79) в (4,78), мы удовлетворяем (4,78б) тождественно и получаем для потенциалов систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 W_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\,\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 W_{\mu\nu\sigma}}{\partial x^{\sigma}\,\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 W_{\nu\sigma\lambda}}{\partial x^{\sigma}\,\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 W_{\sigma\lambda\mu}}{\partial x^{\sigma}\,\partial x^{\nu}} = Q_{\lambda\mu\nu}. \tag{4,81}$$

Воспользуемся теперь возможностью калибровки потенциалов и потребуем, чтобы удовлетворялась следующая лоренц-инвариантная нормировка потенциалов:

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial W_{\lambda\mu 5}}{\partial x^{5}}. \tag{4,82}$$

Система уравнений (4,81) принимает при этом вид

$$\left\{\Box+\frac{\partial^2}{\partial x^5\,\partial x^5}\right\}W_{ikl}-\frac{\partial}{\partial x^5}\left\{\frac{\partial W_{kl5}}{\partial x^i}+\frac{\partial W_{li5}}{\partial x^k}+\frac{\partial W_{ik5}}{\partial x^l}\right\}=Q_{ikl}, \tag{4,83}$$

$$\Box W_{5kl}=Q_{5kl}. \tag{4,79}$$

Если поле чистоволновое, т. е. $Q_{\lambda\mu\nu}=0$ во всем пространстве, то мы можем положить $W_{5kl}=0$, и формулы (4,79) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} W_{iklm}&=\frac{\partial W_{ikl}}{\partial x^m}-\frac{\partial W_{klm}}{\partial x^i}+\frac{\partial W_{lmi}}{\partial x^k}-\frac{\partial W_{mik}}{\partial x^l},\\ W_{klm5}&=\frac{\partial W_{klm}}{\partial x^5},\end{aligned}\right\} \tag{4,79'}$$

а уравнения поля (4,78) будут

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W_{iklm}}{\partial x^m}+\frac{\partial^2 W_{ikl}}{\partial x^5\,\partial x^5}&=0,\\ \frac{\partial}{\partial x^5}\left(\frac{\partial W_{klm}}{\partial x^m}\right)&=0,\end{aligned}\right\} \tag{4,78'а}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W_{iklm}}{\partial x^n}+\frac{\partial W_{klmn}}{\partial x^i}+\frac{\partial W_{lmni}}{\partial x^k}+\frac{\partial W_{mnik}}{\partial x^l}+\frac{\partial W_{nikl}}{\partial x^m}=0,\\ &\frac{\partial}{\partial x^5}\left(W_{iklm}+\frac{\partial W_{nlm}}{\partial x^i}-\frac{\partial W_{lmi}}{\partial x^n}+\frac{\partial W_{mik}}{\partial x^l}-\frac{\partial W_{ikl}}{\partial x^m}\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{4,78'б}$$

Для выяснения физического смысла выписанных пятимерных уравнений поля необходимо их переписать в компонентах Фурье. Имеем (для случая $Z=\pm 1$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_{iklm}}{\partial x^m}-\mu^2 U_{ikl}&=0,\\ \frac{\partial U_{ikl}}{\partial x^l}&=0,\end{aligned}\right\} \tag{4,78''а}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U_{iklm}}{\partial x^n}+\frac{\partial U_{klmn}}{\partial x^i}+\frac{\partial U_{lmni}}{\partial x^k}+\frac{\partial U_{mnik}}{\partial x^l}+\frac{\partial U_{nikl}}{\partial x^m}=0,\\ &U_{iklm}=\frac{\partial U_{ikl}}{\partial x^m}-\frac{\partial U_{klm}}{\partial x^l}+\frac{\partial U_{lmi}}{\partial x^i}-\frac{\partial U_{mik}}{\partial x^l}.\end{aligned}\right\} \tag{4,78''б}$$

Если заменить обозначения $\mu^2 U_{ikl}\to U_{ikl}$, то система уравнений (4,78″) в точности совпадает с системой уравнений, описывающих псевдоскалярные мезоны ([13], стр. 22).

Итак, мы показали, что действительное $W_{\lambda\mu\nu\sigma}$-поле в 5-пространстве при надлежащей калибровке (4,82) описывает все семейство псевдоскалярных мезонов с массами $|Z|\,m$ и зарядами Ze, где Z — целое положительное или отрицательное число, включая нуль. Случай $Z=0$ заслуживает особого рассмотрения (см. § 29).

Переходя к общему случаю $W_{\lambda\mu\nu\sigma}$-поля при наличии источников поля в пространстве, воспользуемся калибровкой Гинзбурга и потребуем, чтобы выполнялась следующая релятивистски неинвариантная нормировка потенциалов:

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial W_{\lambda\mu 4}}{\partial x^4}. \tag{4,84}$$

Система уравнений (4,81) в компонентах Фурье принимает вид

$$(\Box - \mu^2)\, U_{\alpha\beta\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^4}\left\{\frac{\partial U_{\sigma\beta 4}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial U_{\beta\gamma 4}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial U_{\gamma\sigma 4}}{\partial x^\beta}\right\} = q_{\alpha\beta\gamma},$$

$$(\Box - \mu^2)\, U_{\alpha\beta 5} - \frac{\partial}{\partial x^4}\left\{i\mu U_{\alpha\beta 4} + \frac{\partial U_{\beta 5 4}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial U_{5\alpha 4}}{\partial x^\beta}\right\} = q_{\alpha\beta 5},$$

$$\left.\begin{aligned} (\Delta - \mu^2)\, U_{\alpha\beta 4} &= q_{\alpha\beta 4}, \\ (\Delta - \mu^2)\, U_{\alpha 5 4} &= q_{\alpha 5 4}, \end{aligned}\right\} \tag{4,81'}$$

откуда следует

$$\left.\begin{aligned} U_{\alpha\beta 4} &= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{q_{\alpha\beta 4}(r', x^0)}{|r'-r|}\, e^{-\mu|r'-r|}\, dV', \\ U_{\alpha 5 4} &= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{q_{\alpha 5 4}(r', x^0)}{|r'-r|}\, e^{-\mu|r'-r|}\, dV'. \end{aligned}\right\} \tag{4,85}$$

Выражение для симметричного 5-тензора энергии — импульса — заряда $\Theta_{\lambda\mu}$ получим по общим правилам из функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{48}\sqrt{|G|}\, W_{\sigma\lambda\tau\mu} W^{\sigma\lambda\tau\mu} \tag{4,86}$$

в виде

$$\Theta_{\lambda\mu} = \frac{1}{6} W_{\lambda\sigma\tau\rho} W_{\mu\sigma\tau\rho} - \frac{1}{48}\delta_{\lambda\mu} W_{\sigma\tau\rho\varkappa} W^{\sigma\tau\rho\varkappa}. \tag{4,87}$$

Воспользовавшись временной координатой $x^0 = -ix^4$, вычисляем

плотность энергии

$$\overline{\Theta}_{00} = \frac{1}{6}\left\{U^*_{0\alpha\beta\gamma}U_{0\alpha\beta\gamma} + U^*_{5\alpha\beta\gamma}U_{5\alpha\beta\gamma} + 3U^*_{50\alpha\beta}U_{50\alpha\beta}\right\}, \quad (4{,}88\text{а})$$

плотность импульса

$$\overline{\Theta}_{\alpha 0} = \frac{1}{2}\left\{U^*_{\alpha\beta\gamma 5}U_{0\beta\gamma 5} + k.\ c.\right\}, \quad (4{,}88\text{б})$$

плотность заряда

$$\overline{\Theta}_{50} = \frac{1}{6}\left\{U^*_{0\alpha\beta\gamma}U_{5\alpha\beta\gamma} + k.\ c.\right\}. \quad (4{,}88\text{в})$$

Интегрируя по частям и используя условия калибровки (4,84), мы можем следующим образом преобразовать выражения (4,88) (α, β, $\gamma = 1$, 2, 3):

$$\overline{\Theta}_{00} = \frac{1}{6}\left\{\frac{\partial U^*_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^0}\frac{\partial U_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^0} + 3\frac{\partial U^*_{5\alpha\beta}}{\partial x^0}\frac{\partial U_{5\alpha\beta}}{\partial x^0} + U^*_{5\alpha\beta\gamma}U_{5\alpha\beta\gamma}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{4}\left\{U^*_{0\alpha\beta}(\mu^2 - \Delta)U_{0\alpha\beta} + 2U^*_{05\alpha}(\mu^2 - \Delta)U_{05\alpha} + k.\ c.\right\} +$$
$$+ \text{пространственная дивергенция } j \quad (4{,}89\text{а})$$

$$\overline{\Theta}_{0\alpha} = \frac{1}{6}\left\{\frac{\partial U^*_{\beta\gamma\delta}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U_{\beta\gamma\delta}}{\partial x^0} + 3\frac{\partial U^*_{5\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U_{5\beta\gamma}}{\partial x^0} + k.\ c.\right\} +$$
$$+ \frac{1}{4}\left\{U^*_{\alpha\beta\gamma}(\mu^2 - \Delta)U_{0\beta\gamma} + 2U^*_{\alpha 5\beta}(\mu^2 - \Delta)U_{05\beta} + k.\ c.\right\} +$$
$$+ \text{пространственная дивергенция} \quad (4{,}89\text{б})$$

$$\overline{\Theta}_{05} = \frac{i\mu}{6}\left\{\left(U^*_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial U_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^0} - U_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial U^*_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^0}\right) +\right.$$
$$+ 3\left(U^*_{5\alpha\beta}\frac{\partial U_{5\alpha\beta}}{\partial x^0} - U_{5\alpha\beta}\frac{\partial U^*_{5\alpha\beta}}{\partial x^0}\right) +$$
$$+ \frac{1}{4}\left\{U^*_{5\alpha\beta}(\mu^2 - \Delta)U_{0\alpha\beta} + k.\ c.\right) +$$
$$+ \text{пространственная дивергенция.} \quad (4{,}89\text{в})$$

Интегрируя по объему и принимая во внимание (4,81′) и (4,85), получаем:

$$\int \overline{\Theta}_{00}\, dV =$$
$$= \frac{1}{6}\int \left\{ \frac{\partial U^*_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^0}\frac{\partial U_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^0} + 3\,\frac{\partial U^*_{5\alpha\beta}}{\partial x^0}\frac{\partial U_{5\alpha\beta}}{\partial x^0} + U^*_{5\alpha\beta\gamma}U_{5\alpha\beta\gamma}\right\} dV +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{2}\,\frac{q^*_{0\alpha\beta}(r', x^0)\, q_{0\alpha\beta}(r'', x^0) + 2q^*_{05\alpha}(r', x^0)\, q_{05\alpha}(r'', x^0)}{|r' - r''|} \times$$
$$\times e^{-\mu|r' - r''|}\, dV'\, dV''. \qquad (4,90)$$

Второй член дает энергию взаимодействия непрерывно распределенных источников мезонного поля, взаимодействующих по закону Юкавы. Он равен нулю, если поле чистоволновое. При этом остается первый член, который дает энергию волнового поля мезонов.

Разлагая потенциалы $U_{\alpha\beta\gamma}$ на плоские волны, как и в предыдущем разделе, получаем в случае чистоволнового поля:

$$\int \overline{\Theta}_{00}\, dV = k_0 \sum_{(k)} (N_+(k) + N_-(k)), \qquad (4,91\text{а})$$

$$\int \overline{\Theta}_{0\alpha}\, dV = \sum_{k} k_\alpha (N_+(k) + N_-(k)), \qquad (4,91\text{б})$$

$$\int \overline{\Theta}_{05}\, dV = \mu \sum_{k} (N_+(k) - N_-(k)), \qquad (4,91\text{в})$$

где для сокращения обозначено

$$N(k) = k_0 \left\{ \frac{1}{6} U^*_{\alpha\beta\gamma}U_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2\mu^2}(k_\alpha U^*_{\alpha\beta\gamma})(k_\delta U_{\delta\beta\gamma}) \right\}. \qquad (4,92)$$

Вводя псевдоскаляр $\widetilde{U} = \frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}U_{\alpha\beta\gamma}$, получим:

$$N = k_0 \frac{k_0^2}{\mu^2}\widetilde{U}^* U. \qquad (4,93)$$

При увеличении скорости мезона, в силу $k_0/\mu \to \infty$, имеем $\widetilde{U} = U_{123} \to 0$, как это и должно быть, поскольку единственная составляющая потенциала $U_{\alpha\beta\gamma}$ содержит индекс 3 и должна рассматриваться как продольная.

§ 28. Частицы со спином два (метроны)

Распространение теории слабых гравитационных волн на общий случай слабого метрического поля в 5-пространстве приводит к теории частиц со спином два, для которых в наших сообщениях мы предложили название фундаментона. Более удачно, как нам кажется, название метрон — квант слабого метрического поля, которым мы и будем пользоваться в дальнейшем. Для 5-оптики теория метронов имеет существенное значение, поскольку они обеспечивают обмен энергией, импульсом и зарядом между всеми другими элементарными частицами.

Для слабого метрического 5-поля мы можем положить

$$G_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+H_{\mu\nu}, \quad G^{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}-H_{\mu\nu}, \qquad (4{,}94)$$

где $H_{\mu\nu}$ — малые величины, квадратами которых мы пренебрегаем.

Принимая во внимание

$$G^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \tilde{g}^{ik}, & -\tilde{g}^{ki}g_i, \\ -\tilde{g}^{ik}g_k, & \frac{1}{1+\chi}+\tilde{g}^{ik}g_ig_k \end{pmatrix}, \qquad (4{,}95)$$

находим физический смысл величин $H_{\mu\nu}$

$$H_{ik}=h_{ik}, \quad H_{5k}=g_k, \quad H_{55}=\chi, \quad H=h+\chi, \qquad (4{,}96)$$

где h_{ik} — фигурирующие в теории гравитационных волн составляющие истинного слабого гравитационного поля.

Мы ограничимся здесь рассмотрением чистоволнового поля без источников. Для слабого поля уравнения Эйнштейна $P_{\lambda\mu}-\frac{1}{2}G_{\lambda\mu}P$ принимают вид (первая группа уравнений поля)

$$\frac{\partial G_{\sigma,\lambda\mu}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial G_{\sigma,\lambda\sigma}}{\partial x^{\mu}}-\frac{1}{2}\delta_{\lambda\mu}\left(\frac{\partial G_{\sigma,\tau\tau}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial G_{\sigma,\tau\sigma}}{\partial x^{\tau}}\right)=0. \qquad (4{,}97)$$

Составляющие поля $G_{\sigma,\lambda\mu}$ выражаются через потенциалы поля $H_{\mu\nu}$ по формулам

$$G_{\sigma,\lambda\mu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x^{\sigma}}+\frac{\partial H_{\mu\sigma}}{\partial x}\right). \qquad (4{,}98)$$

Вторую группу уравнений поля мы можем записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\{G_{\sigma,\lambda\mu}+G_{\lambda,\sigma\mu}\}-\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\{G_{\sigma,\lambda\nu}+G_{\lambda,\sigma\nu}\}=0, \quad (4,99)$$

что эквивалентно (4,98).

Потенциалы поля $H_{\mu\nu}$ определены с точностью до калибровки:

$$H'_{\mu\nu}=H_{\mu\nu}+\frac{\partial F_{\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial F_{\nu}}{\partial x^{\mu}}. \quad (4,100)$$

Подставляя (4,98) в (4,97), получаем следующую систему волновых уравнений для потенциалов $H_{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial^2 H_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\tau}\,\partial x^{\tau}}-\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}\left(\frac{\partial H_{\tau\sigma}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial H_{\tau\lambda}}{\partial x^{\sigma}}\right)+\frac{\partial^2 H}{\partial x^{\sigma}\,\partial x^{\lambda}}+$$
$$+\delta_{\sigma\lambda}\left(\frac{\partial^2 H_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 H}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\nu}}\right)=0. \quad (4,101)$$

Для того чтобы выяснить физический смысл этих пятимерных уравнений, необходимо их переписать в компонентах Фурье.

Обозначим

$$H_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}\exp(i\mu x^5)+\overset{*}{A}_{\mu\nu}\exp(-i\mu x^5). \quad (4,102)$$

Волновые уравнения (4,101) принимают вид

$$(\Box-\mu^2)A_{ik}-\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial A_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial A_{lk}}{\partial x^i}\right)-$$
$$-i\mu\left(\frac{\partial A_{5i}}{\partial x^k}+\frac{\partial A_{5k}}{\partial x^i}\right)+\frac{\partial^2 A}{\partial x^i\,\partial x^k}+$$
$$+\delta_{ik}\left(\frac{\partial^2 A_{ln}}{\partial x^l\,\partial x^k}+2\frac{\partial A_{5l}}{\partial x^l}i\mu-\mu^2 A_{55}-(\Box-\mu^2)A\right)=0, \quad (4,103)$$

$$\Box A_{k5}-\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial A_{l5}}{\partial x^l}+(A_{55}-A)i\mu\right]=0, \quad (4,103')$$

$$\frac{\partial^2 A_{ik}}{\partial x^i\,\partial x^k}+\Box(A_{55}-A)=0. \quad (4,103'')$$

Потребуем теперь, чтобы выполнялась следующая лоренц-инвариантная нормировка потенциалов:

$$A_{15}=A_{25}=A_{35}=A_{45}=A_{55}=0. \quad (4,104)$$

Тогда уравнения (4,103) принимают вид

$$(\Box-\mu^2)A_{ik}-\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial A_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial A_{lk}}{\partial x^i}\right)+\frac{\partial^2 A_{nk}}{\partial x^i\,\partial x^k}+$$
$$+\delta_{ik}\left(\frac{\partial^2 A_{lk}}{\partial x^l\,\partial x^k}+(\Box-\mu^2)A_{nn}\right)=0, \qquad (4,105')$$

$$\frac{\mu\,\partial A_{nn}}{\partial x^k}=0, \qquad (4,105'')$$

$$\frac{\partial^2 A_{ik}}{\partial x^i\,\partial x^k}-\Box A_{nn}=0. \qquad (4,105''')$$

Уравнения (4,105′) в точности совпадают с системой уравнений Фирца и Паули, описывающих частицы со спином два (ср. [14], стр. 242 и след.). Там же показано, что из уравнений (4,105′) при $\mu\neq 0$ вытекает как следствие

$$\frac{\partial A_{lk}}{\partial x^k}=0;\quad A_{nn}=0 \qquad (4,106)$$

и, следовательно, уравнения (4,105″) и (4,105‴), отсутствующие у Фирца и Паули, удовлетворяются тождественно, а уравнение (4,105′) принимает вид

$$(\Box-\mu^2)A_{ik}=0. \qquad (4,107)$$

Итак, мы показали, что слабое метрическое поле в 5-пространстве при надлежащей нормировке потенциалов (4,104) описывает все семейство частиц Фирца и Паули с массами $|Z|m$ и зарядами Ze, где Z — целое положительное или отрицательное число. Случай $Z=0$ нуждается в особом рассмотрении (см. ниже § 29).

Воспользуемся теперь калибровкой Гинзбурга и потребуем, чтобы выполнялась следующая, релятивистски неинвариантная нормировка потенциалов

$$A_{41}=A_{42}=A_{43}=A_{44}=A_{45}=0. \qquad (4,108)$$

В дальнейшем, до конца этого параграфа, латинские индексы m, n, p, q пробегают значения 1, 2, 3, 5. Волновые уравнения принимают теперь вид:

$$(\Box-\mu^2)A_{mn}-\frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial A_{pm}}{\partial x^n}+\frac{\partial A_{pn}}{\partial x^m}\right)+\frac{\partial^2 A_{pp}}{\partial x^m\,\partial x^n}+$$

$$+\delta_{mn}\left(\frac{\partial^2 A_{pq}}{\partial x^p\,\partial x^q}-(\Box-\mu^2)A_{pp}\right)=0, \qquad (4,109')$$

$$\frac{\partial}{\partial x^4}\frac{\partial A_{pp}}{\partial x^n}=0, \qquad (4,109'')$$

$$\frac{\partial^2 A_{pq}}{\partial x^p\,\partial x^q}-\Box A_{pp}=0. \qquad (4,109''')$$

Если применить к уравнению (4,109′) слева ряд операторов

$$\frac{\partial}{\partial x^n},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^m\,\partial x^n},\quad \delta_{mn},$$

то последует

$$\frac{\partial^2}{\partial x^4\,\partial x^4}\left(\frac{\partial A_{mn}}{\partial x^n}-\frac{\partial A_{pp}}{\partial x^m}\right)=0, \qquad (4,110')$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^4\,\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 A_{mn}}{\partial x^m\,\partial x^n}-(\Delta-\mu^2)A_{pp}\right)=0, \qquad (4,110'')$$

$$2\,\frac{\partial^2 A_{mn}}{\partial x^m\,\partial x^n}-\left[2(\Delta-\mu^2)+3\,\frac{\partial^2}{\partial x^4\,\partial x^4}\right]A_{pp}=0. \quad (4,110''')$$

Если исключить из рассмотрения статические поля, то из (4,110″) и (4,110‴) следует A_{pp} и тем самым из (4,110′) $\frac{\partial A_{mn}}{\partial x^n}=0$, и уравнение (4,110′) принимает вид

$$(\Box-\mu^2)A_{mn}=0. \qquad (4,111)$$

Калибровка Гинзбурга является обобщением обычной калибровки составляющих слабого гравитационного поля, приводящей к выделению поперечных гравитационных волн (гравитонов), на общий случай слабого метрического поля в 5-пространстве. Хорошо известно, что выделение волнового поля гравитонов в теории тяготения достигается тем, что полагается (ср., например [12], стр. 338)

$$h_{14}=h_{24}=h_{34}=h_{44}=h=0. \qquad (4,112)$$

В заключение выпишем волновые уравнения для метронов. Принимая во внимание (4,96) и обозначая в виде исключения символом $\hat{f}$ компоненту Фурье величины f, имеем:

1. Калибровка Фирца и Паули (уравнения (4,106) и (4,107)):

$$\left.\begin{aligned} (\Box-\mu^2)\,\hat{h}_{ik}&=0;\\ \frac{\partial \hat{h}_{ik}}{\partial x^k}&=0;\\ \hat{h}_{ii}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{4,113}$$

2. Калибровка Гинзбурга (α, $\beta=1$, 2, 3):

$$\left.\begin{aligned} &(\Box-\mu^2)\,\hat{h}_{\alpha\beta}=0; && \frac{\partial \hat{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^3}+i\mu\hat{g}_\alpha=0,\\ &(\Box-\mu^2)\,\hat{g}_\alpha=0; && \hat{h}_{\alpha\alpha}+\hat{\chi}=0,\\ &(\Box-\mu^2)\,\hat{\chi}=0; && \frac{\partial \hat{g}_\alpha}{\partial x^\alpha}+i\mu\hat{\chi}=0. \end{aligned}\right\} \tag{4,114}$$

В обоих случаях на десять величин $(\hat{h}_{ik})$ и $(\hat{h}_{\alpha\beta},\ \hat{g}_\alpha,\ \hat{\chi})$ накладываются пять дополнительных условий, так что независимых составляющих у волновой функции метрона оказывается пять, что соответствует спину два у метрона.

Рассматривая плоскую гармоническую волну, легко убедиться, что в случае (4,114) при увеличении скорости метрона продольная составляющая поля постепенно исчезает, в то время как в случае (4,113) она стремится по величине сравняться с поперечной, что физически неудовлетворительно.

§ 29. Мезоны и метроны в состоянии нулевого заряда

Согласно 5-оптике мезоны и метроны могут находиться в состоянии нулевой массы и нулевого заряда. В разложениях волновых функций в ряды Фурье в этих случаях представлена лишь одна составляющая, соответствующая $Z=0$,

$$W(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)=U(0\,|\,x_1x_2x_3x_4)=\overline{W}.$$

Состояния с $Z=0$ описываются, следовательно, классическими действительными полями в 4-пространстве. Уравнения этих полей мы получим, усреднив соответствующие уравнения для 5-полей по координате действия:

1) Скалярные мезоны —

$$\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial x^i}=0; \quad \frac{\partial \overline{W}_i}{\partial x^k}-\frac{\partial \overline{W}_k}{\partial x^i}=0; \quad \frac{\partial \overline{W}_5}{\partial x^i}=0. \qquad (4,116)$$

Вводим скаляр U; $\overline{W}_i=\frac{\partial U}{\partial x^i}$; $\Box U=0$; $\overline{W}_5=\text{const}$.

Итак, скалярный мезон в состоянии $Z=0$ описывается суперпозицией классического скалярного поля U и постоянного поля $\overline{W}_5=\text{const}$.

2) Векторные мезоны —

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{W}_{ik}}{\partial x^k}=0; \quad \frac{\partial \overline{W}_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial \overline{W}_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial W_{li}}{\partial x^k}=0,\\ &\frac{\partial \overline{W}_{5k}}{\partial x^k}=0; \quad \frac{\partial \overline{W}_{5k}}{\partial x^i}-\frac{\partial \overline{W}_{5i}}{\partial x^k}. \end{aligned}\right\} \qquad (4,117)$$

Вводим скаляр U; $\overline{W}_{5k}=\frac{\partial U}{\partial x^k}$.

Итак, векторный мезон в состоянии $Z=0$ описывается суперпозицией двух полей: электромагнитного поля Максвелла и классического скалярного поля U.

3) Псевдовекторные мезоны —

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{W}_{ikn}}{\partial x^n}=0; \quad \frac{\partial \overline{W}_{ikl}}{\partial x^n}-\frac{\partial \overline{W}_{kln}}{\partial x^i}+\frac{\partial \overline{W}_{lni}}{\partial x^k}-\frac{\partial \overline{W}_{nik}}{\partial x^l}=0,\\ &\frac{\partial \overline{W}_{5kn}}{\partial x^n}=0; \quad \frac{\partial \overline{W}_{5kl}}{\partial x^n}+\frac{\partial \overline{W}_{5ln}}{\partial x^k}+\frac{\partial \overline{W}_{5nk}}{\partial x^l}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (4,118)$$

Вводим 4-псевдовектор $\widetilde{U}_i=\frac{1}{6}\varepsilon_{ikln}\overline{W}_{kln}$ и 4-бивектор $F_{kl}=$ $=\overline{W}_{5kl}$ и переписываем уравнения в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x^l}-\frac{\partial \widetilde{U}_l}{\partial x^i}=0; \quad \frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x^i}=0,\\ &\frac{\partial F_{kn}}{\partial x^n}=0; \quad \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^n}+\frac{\partial F_{ln}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{nk}}{\partial x^l}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (4,118')$$

Вводим 4-псевдоскаляр $\widetilde{U}$; $\widetilde{U}_i=\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x^i}$; тогда псевдовекторный мезон в состоянии $Z=0$ описывается суперпозицией двух полей: электромагнитного поля Максвелла и псевдоскалярного поля $\tilde{U}$.

4) Псевдоскалярные мезоны —

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{W}_{5kln}}{\partial x^n} &= 0; \\ \frac{\partial \overline{W}_{5kln}}{\partial x^m} - \frac{\partial \overline{W}_{5lnm}}{\partial x^k} + \frac{\partial \overline{W}_{5nmk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \overline{W}_{5mkl}}{\partial x^n} &= 0; \\ \frac{\partial W_{ikln}}{\partial x^n} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (4,119)$$

Вводим 4-псевдовектор $\tilde{U}_i = \frac{1}{6}\varepsilon_{ikln}\overline{W}_{5kln}$ и переписываем уравнения в виде

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x^i} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x^i} = 0. \quad (4,119')$$

Вводим 4-псевдоскаляр $\tilde{U}_i = \partial\tilde{U}/\partial x^i$. Итак, псевдоскалярный мезон в состоянии $Z = 0$ описывается суперпозицией двух полей: псевдоскалярного поля $\tilde{U}$ и постоянного поля $\overline{W}_{1234} = \text{const}$.

5) Метроны.

Усредняя уравнения (4,101) по координате действия, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \Box \overline{H}_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial \overline{H}_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial \overline{H}_{lk}}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial x^i\,\partial x^k} + \\ + \delta_{ik}\left(\frac{\partial^2 \overline{H}_{in}}{\partial x^i\,\partial x^n} - \Box \overline{H}\right) = 0, \\ \Box \overline{H}_{5k} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \overline{H}_{5l}}{\partial x^l}\right) = 0; \\ \Box \overline{H}_{55} + \frac{\partial^2 \overline{H}_{ik}}{\partial x^i\,\partial x^k} - \Box \overline{H} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4,120)$$

Принимая во внимание (4,96), заключаем, что метрон в состоянии $Z = 0$ описывается суперпозицией трех полей: слабо гравитационного поля, электромагнитного поля и χ-поля.

Современная физика различает комплексные ψ-поля, описывающие поведение заряженной частицы с отличной от нуля массой покоя и действительные классические поля, описывающие поведение нейтральных частиц с нулевой массой покоя. Такое резкое различие обусловлено в основном тем, что, по воззрению современной физики, ψ-поля локализованы в соответствующих конфигурационных пространствах, в то время как классические поля локализованы в универсальном 4-пространстве теории относительности.

Естественно, что в 5-оптике, которая радикально отказывается от представления об универсальном пространстве, принципиальное различие между комплексными ψ-полями и действительными классическими полями стирается. И те, и другие локализованы в конфигурационных пространствах соответствующих частиц. В математическом аппарате 5-оптики действительные классические поля изображаются нулевым членом в разложении Фурье, а комплексные ψ-поля — соответствующими высшими членами. Этим и исчерпывается все различие между ними.

§ 30. Комплексное спинорное поле (электрон, позитрон, нейтрино)

1. *Уравнения поля.* В 5-пространстве с псевдоевклидовым мероопределением, 5-спинор является четырехкомпонентной комплексной величиной, составляющие которой преобразуются по четырехрядным представлениям группы пятимерных вращений. Если ограничиться преобразованиями подгруппы Лоренца ($x^5 = invar$), то 5-спинор распадается на два 4-полуспинора, трансформационные свойства которых хорошо известны из теории Дирака.

Мы разлагаем каждую из четырех составляющих 5-спинора в ряд Фурье:

$$W_\sigma = \sum U_\sigma(Z \mid x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4) \exp(iZ\mu x^5). \qquad (4{,}121)$$

Для простоты последующих формул мы будем в дальнейшем предполагать, что в разложении Фурье (4,121) представлена только одна составляющая, соответствующая $Z = +1$:

$$W_\sigma = U_\sigma \exp(i\mu x^5). \qquad (4{,}121\text{a})$$

Обобщение на общий случай не представляет труда.

Поскольку спинор является существенно комплексной величиной, имеем в отличие от рассмотренных тензорных полей:

$$U_\sigma(-Z \mid x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4) \neq U_\sigma^*(Z \mid x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4). \qquad (4{,}122)$$

Это означает, что в случае спинорных полей комплексно сопряженные составляющие Фурье не относятся к сопряженным по зарядам частицам, как это имело место в случае тензорных полей.

В дальнейшем мы будем пользоваться матричной записью и обозначать 5-спинор одной буквой W, не выделяя его компонентов.

Простейшее уравнение для спинорного поля, которое мы рассмотрим, имеет вид

$$\left\{\mu(1)\frac{\partial}{\partial x^1}+\mu(2)\frac{\partial}{\partial x^2}+\mu(3)\frac{\partial}{\partial x^3}+\mu(4)\frac{\partial}{\partial x^4}+\mu(5)\frac{\partial}{\partial x^5}\right\}W=0, \tag{4,123}$$

где W — система пяти четырехрядных матриц, удовлетворяющих условиям перестановок:

$$\mu(\alpha)\mu(\beta)+\mu(\beta)\mu(\alpha)=2\delta(\alpha,\ \beta). \tag{4,124}$$

Нам удобно выбрать в качестве матриц $\mu(\alpha)$ следующую систему матриц:

$$\left.\begin{aligned}
\mu(1)&=-i\gamma^2\gamma^3\gamma^4=i\beta\alpha^3\alpha^2,\\
\mu(2)&=i\gamma^1\gamma^3\gamma^4=i\beta\alpha^1\alpha^3,\\
\mu(3)&=-i\gamma^1\gamma^2\gamma^4=i\beta\alpha^2\alpha^1,\\
\mu(4)&=i\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\beta\alpha^1\alpha^2\alpha^3,\\
\mu(5)&=\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4=i\alpha^1\alpha^2\alpha^3,
\end{aligned}\right\} \tag{4,125}$$

где $\{\gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3,\ \gamma^4\}$ и $\{\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \beta\}$ — две системы матриц, фигурирующие в теории Дирака. Из (4,125) получаем:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma^1&=i\mu(1)\mu(5), & \alpha^1&=i\mu(4)\mu(1),\\
\gamma^2&=i\mu(2)\mu(5), & \alpha^2&=i\mu(4)\mu(2),\\
\gamma^3&=i\mu(3)\mu(5), & \alpha^3&=i\mu(4)\mu(3),\\
\gamma^4&=i\mu(4)\mu(5), & \beta&=i\mu(4)\mu(5).
\end{aligned}\right\} \tag{4,126}$$

Мы можем записать уравнение поля (4,123), выделив одну из пяти координат, которую обозначим через x^0. Имеем из (4,123)

$$\frac{\partial W}{\partial x^0}+\mu(0)\mu(n)\frac{\partial W}{\partial x^n}=0, \tag{4,127}$$

где индекс n нумерует все остальные координаты кроме выделяемой.

Выделяя координату действия $x^0 = x^5$, имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial x^5} - \gamma^k \frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial x^k} = 0 \tag{4,127а}$$

или, переходя к формулировке в составляющих Фурье,

$$\gamma_k \frac{\partial U}{\partial x^k} + \mu U = 0. \tag{4,127б}$$

Выделяя координату времени $x^0 = x^4 = ict$, имеем:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} + \left(\vec{\alpha} \frac{\partial W}{\partial \vec{x}}\right) + \beta \frac{\partial W}{\partial x^5} = 0 \tag{4,127в}$$

или, переходя к формулировке в составляющих Фурье,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\vec{\alpha} \frac{\partial U}{\partial \vec{x}}\right) + i\beta\mu U = 0. \tag{4,127г}$$

2. *Сопряженное спинорное поле*. Введем дополнительно сопряженный спинор $\tilde{W}$

$$\tilde{W} = \sum_{Z=-\infty}^{Z=+\infty} \tilde{U}(Z \mid x^1 x^2 x^3 x^4) \exp(-iZ\mu x^5), \tag{4,121'}$$

удовлетворяющий уравнениям поля

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x^1} \mu(1) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x^2} \mu(2) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x^3} \mu(3) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x^4} \mu(4) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x^5} \mu(5) \right\} = 0 \tag{4,123'}$$

или, выделяя координату x^0, уравнению

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x^0} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x^n} \mu(n) \mu(0) = 0. \tag{4,127'}$$

Введем спинор $\overset{(0)}{W}$, определяемый как

$$\overset{(0)}{W} = \tilde{W}\mu(0), \tag{4,128}$$

и будем его называть спинором «сопряженным по координате x^0». Из (4,128) следует: $\tilde{W} = \overset{(0)}{W}\mu(0)$ и, подставляя в (4,127′), получаем для $\overset{(0)}{W}$ уравнение

$$\frac{\partial \overset{(0)}{W}}{\partial x^0} + \frac{\partial \overset{(0)}{W}}{\partial x^n} \mu(0) \mu(n) = 0. \tag{4,129}$$

Выделяя координату действия $x^0 = x^5$, имеем:

$$\frac{\partial \overset{(5)}{W}}{\partial x^5} - \frac{1}{i}\frac{\partial \overset{(5)}{W}}{\partial x^k}\gamma^k = 0, \tag{4,129a}$$

или, в компонентах Фурье,

$$\frac{\partial \overset{(5)}{U}}{\partial x^k}\gamma^k - \mu \overset{(5)}{U} = 0. \tag{4,129б}$$

Выделяя координату времени $x^0 = x^4 = ict$, имеем:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overset{(4)}{W}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \overset{(4)}{W}}{\partial \vec{x}}\vec{\alpha}\right) + \frac{\partial \overset{(4)}{W}}{\partial x^5}\beta = 0, \tag{4,129в}$$

или, в компонентах Фурье,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overset{(4)}{U}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \overset{(4)}{U}}{\partial \vec{x}}\vec{\alpha}\right) - i\mu \overset{(4)}{U}\beta = 0. \tag{4,129г}$$

Из формул (4,127б) и (4,129б) заключаем, что

$$\overset{(4)}{W} = W^*; \quad \overset{(4)}{U} = U^*, \tag{4,130}$$

где через W^* обозначен спинор комплексно-сопряженный и транспонированный к спинору W.

Имеем:

$$\widetilde{W} = \overset{(5)}{W}\mu(5); \quad \widetilde{W} = W^*\mu(4); \quad \overset{(5)}{W} = W^*\mu(4)\mu(5) = -iW^*\gamma^4$$

и, следовательно, в согласии с обозначениями Паули

$$\overset{(5)}{W} = -iW^+.$$

Связь между различными сопряженными спинорами мы сводим в таблицу:

$$\left.\begin{aligned} W &= W^*\mu(4) = -iW^+\mu(5), \\ W^* &= \widetilde{W}\mu(4) = W^+\gamma^4, \\ W^+ &= i\widetilde{W}\mu(5) = W^*\gamma^4, \end{aligned}\right\} \tag{4,131}$$

которой будем часто пользоваться.

Если воспользоваться разложением Фурье (4,121а), то формулы (4,127б) и (4,129б) дают:

$$\gamma_k \frac{\partial U}{\partial x^k} + \mu U = 0; \quad \frac{\partial U^+}{\partial x^k}\gamma^k - \mu U^+ = 0 \tag{4,132}$$

и формулы (4,127б) и (4,129б) —

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\vec{\alpha}\frac{\partial U}{\partial \vec{x}}\right) + i\beta\mu U = 0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial U^*}{\partial t} + \left(\frac{\partial U^*}{\partial \vec{x}}\vec{\alpha}\right) - i\mu U^*\beta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.133}$$

— две знакомые формы уравнений Дирака.

Мы показали, что комплексное спинорное поле в 5-пространстве описывает все семейство частиц со спином половина, обладающих массами $|Z|m$ и зарядами Ze, где Z — целое положительное или отрицательное число, включая нуль. Случаи $Z = -1,\ 0,\ +1$ соответствуют электрону, нейтрино, позитрону, которые следует рассматривать как одну и ту же частицу в различных зарядовых состояниях.

3. *5-тензор энергии — импульса — заряда.* Уравнения поля (4,123) и (4,123′) могут быть получены из функции Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned} L = \frac{1}{2}(\widetilde{W}\mu(\sigma)W_\sigma - \widetilde{W}_\sigma\mu(\sigma)W), \\ W_\sigma = \frac{\partial W}{\partial x^\sigma}; \quad \widetilde{W}_\sigma = \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x^\sigma} \end{aligned}\right\} \tag{4,134}$$

по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \widetilde{W}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial \widetilde{W}} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial W_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial W} = 0. \tag{4,135}$$

Отметим, что для функций, удовлетворяющих уравнениям поля, L исчезает. Канонический 5-тензор энергии—импульса—заряда получаем по формуле

$$T_{\alpha\beta} = \widetilde{W}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \widetilde{W}_\beta} + \frac{\partial L}{\partial W_\beta} W_\alpha - \delta_{\alpha\beta} L. \tag{4,136}$$

Имеем, учитывая, что $L=0$ и выделяя координату действия и используя (4,125) и (4,131),

$$\left.\begin{aligned} T_{ik} &= \frac{1}{2}\left(W^+\gamma^k \frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{\partial W^+}{\partial x^i}\gamma^k W\right), \\ T_{5k} &= \frac{1}{2}\left(W^+\gamma^k \frac{\partial W}{\partial x^5} - \frac{\partial W^+}{\partial x^5}\gamma^k W\right), \\ T_{55} &= \frac{1}{2}\left(W^+ \frac{\partial W}{\partial x^5} - \frac{\partial W^+}{\partial x^5} W\right). \end{aligned}\right\} \qquad (4,137)$$

Переходя к формулировке в компонентах Фурье, будем считать, что в разложении представлена только одна составляющая $Z=+1$. Имеем:

4-тензор энергии — импульса

$$\overline{T}_{ik} = \frac{1}{2}\left(U^+\gamma^k \frac{\partial U}{\partial x^i} - \frac{\partial U^+}{\partial x^i}\gamma^k U\right), \qquad (4,138)$$

4-вектор тока

$$\overline{T}_{5k} = i\mu U^+\gamma_k U, \qquad (4,139)$$

4-скаляр

$$\overline{T}_{55} = \mu U^+ U. \qquad (4,140)$$

В силу уравнений поля 5-тензор $T_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \qquad (4,141)$$

Усредняя по координате действия, получаем:

$$\frac{\partial \overline{T}_{ik}}{\partial x^k} = 0; \quad \frac{\partial \overline{T}_{5k}}{\partial x^k} = 0, \qquad (4.141')$$

т. е. законы сохранения энергии и заряда. Отметим, что в наших формулах 4-вектор тока $\overline{T}_{5k}$ отличается по размерности множителем $\frac{mc}{e\hbar}$ от общепринятого.

Вычислим антисимметричную часть канонического 5-тензора $T_{\alpha\beta}$; имеем из (4,136)

$$T_{\beta\alpha} - T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{\widetilde{W}[\mu(\alpha)\delta(\beta,\rho) - \mu(\beta)\delta(\alpha,\rho)]W_\rho +$$
$$+ \widetilde{W}_\rho[\delta(\alpha,\rho)\mu(\beta) - \delta(\beta,\rho)\mu(\alpha)]W\}. \qquad (4,142)$$

Используя (4,124), выводим:

$$T_{\beta\alpha}-T_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}\tilde{W}(\mu(\alpha)\mu(\beta)-\mu(\beta)\mu(\alpha))\mu(\rho)W_\rho+$$
$$+\frac{1}{4}\tilde{W}_\rho\mu(\rho)(\mu(\alpha)\mu(\beta)-\mu(\beta)\mu(\alpha))W+$$
$$+\frac{1}{4}\tilde{W}(\mu(\alpha)\mu(\rho)\mu(\beta)-\mu(\beta)\mu(\rho)\mu(\alpha))W_\rho+$$
$$+\frac{1}{4}\tilde{W}_\rho(\mu(\alpha)\mu(\rho)\mu(\beta)-\mu(\beta)\mu(\rho)\mu(\alpha))W. \quad (4,142а)$$

В силу уравнений поля, первые два члена в (4,142а) исчезают. Если ввести обозначения:

$$K(\alpha,\ \rho,\ \beta)=\frac{1}{2}\tilde{W}[\mu(\alpha)\mu(\rho)\mu(\beta)-\mu(\beta)\mu(\rho)\mu(\alpha)]W, \quad (4,143)$$

где $K(\alpha,\ \rho,\ \beta)$ — антисимметричный во всех трех индексах 5-тензор третьего ранга, то выражение (4,142а) может быть записано в виде

$$T_{\beta\alpha}-T_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\rho}K(\alpha,\ \rho,\ \beta), \quad (4,142б)$$

поэтому симметричная часть тензора $T_{\alpha\beta}$

$$\theta_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(T_{\alpha\beta}+T_{\beta\alpha})=T_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}(T_{\beta\alpha}-T_{\alpha\beta})=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\tilde{W}\mu(\beta)\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x^\alpha}\mu(\beta)W\right)-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^\rho}K(\alpha\,\rho,\ \beta) \quad (4,143а)$$

удовлетворяет тем же уравнениям (4,141) и может рассматриваться как симметричный 5-тензор энергии — импульса — заряда.

Выделяя координату действия и используя (4,125) и (4,131), имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\theta_{ik}&=\frac{1}{2}\left(W^+\gamma^k\frac{\partial W}{\partial x^i}-\frac{\partial W^+}{\partial x^i}\gamma^kW\right)-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^\rho}K(\rho,\ i,\ k),\\
\theta_{5k}&=\frac{1}{2}\left(W^+\gamma^k\frac{\partial W}{\partial x^5}-\frac{\partial W^+}{\partial x^5}\gamma^kW\right)-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^n}K(n,\ 5k),\\
\theta_{k5}&=\frac{-i}{2}\left(W^+\frac{\partial W}{\partial x^k}-\frac{\partial W}{\partial x^k}W\right)+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^n}K(n,\ 5,\ k),\\
\theta_{55}&=\frac{-i}{2}\left(W^+\frac{\partial W}{\partial x^5}-\frac{\partial W}{\partial x^5}W\right).
\end{aligned}\right\} \quad (4,144)$$

При формулировке в составляющих Фурье имеем, принимая, что в разложении представлена лишь одна составляющая $Z=+1$,

$$\bar{\theta}_{ik}=\frac{1}{2}\left(U^{+}\gamma^{k}\frac{\partial U}{\partial x^{i}}-\frac{\partial U^{+}}{\partial x^{i}}\gamma^{k}U\right)-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^{n}}\bar{K}(n,\ i,\ k), \tag{4,145}$$

$$\bar{\theta}_{5k}=i\mu(U^{+}\gamma^{k}U)+\frac{i}{4}\frac{\partial\bar{M}(k,\ n)}{\partial x^{n}}, \tag{4,146}$$

$$\bar{\theta}_{k5}=-\frac{i}{2}\left(U^{+}\frac{\partial U}{\partial x^{k}}-\frac{\partial U^{+}}{\partial x^{k}}U\right)-\frac{i}{4}\frac{\partial\bar{M}(k,\ n)}{\partial x^{n}}, \tag{4,147}$$

$$\bar{\theta}_{55}=\mu U^{+}U, \tag{4,148}$$

где введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned}\bar{K}(n,\ i,\ k)&=\frac{1}{2}U^{+}(\gamma^{n}\gamma^{i}\gamma^{k}-\gamma^{k}\gamma^{i}\gamma^{n})U,\\ \bar{M}(k,\ n)&=\frac{1}{2}U^{+}(\gamma^{k}\gamma^{n}-\gamma^{n}\gamma^{k})U,\end{aligned}\right\} \tag{4,149}$$

4-тензор $\bar{\theta}_{ik}$ по формуле (4,145) есть в точности симметричный 4-тензор энергии — импульса в теории Дирака. Последний член в нем ответствен за появление спина.

4. *Вектор тока.* Существенно новым фактом по сравнению с теорией Дирака при рассмотрении 4-вектора тока (формулы 4,146) оказывается появление дополнительного члена $\frac{i}{4}\frac{\partial M(k,\ n)}{\partial x^{n}}$, отсутствующего в теории Дирака и соответствующего дополнительному поляризационному току.

Условие симметричности $\bar{\theta}_{5k}=\bar{\theta}_{k5}$, записанное в виде

$$i\mu U^{+}\gamma^{k}U=-\frac{i}{2}\left(U^{+}\frac{\partial U}{\partial x^{k}}-U\frac{\partial U^{+}}{\partial x^{k}}\right)-\frac{i}{2}\frac{\partial M(k,\ n)}{\partial x^{n}}, \tag{4,150}$$

известно в теории Дирака как тождество Гордона и выводится следующим образом. В левую часть уравнения (4,150) подставляем μU и μU^{+} из уравнений (4,132):

$$\mu U=-\gamma_{n}\frac{\partial U}{\partial x^{n}};\quad \mu U^{+}=\gamma_{n}\frac{\partial U^{+}}{\partial x^{n}};$$

тогда получаем:

$$i\mu U^{+}\gamma^{k}U=-\frac{i}{2}\left(U^{+}\gamma^{k}\gamma^{n}\frac{\partial U}{\partial x^{n}}-\frac{\partial U^{+}}{\partial x^{n}}\gamma^{n}\gamma^{k}U\right). \tag{4,151}$$

Отделяя в (4,151) при суммировании по n члены с $k=n$ и члены $k \neq n$, получим:

$$i\mu U^+\gamma^k U = -\frac{i}{2}\left(U^+\frac{\partial U}{\partial x^k} - \frac{\partial U^+}{\partial x^k}U\right) - \\ -\frac{i}{4}\frac{\partial}{\partial x^n}U^+(\gamma^k\gamma^n - \gamma^n\gamma^k)U, \qquad (4,152)$$

что совпадает с (4,150).

Согласно выводам Паули ([18], стр. 51) появление в выражении для 4-тока дополнительного члена $\frac{i}{4}\frac{\partial M(k,n)}{\partial x^n}$ заставляет ожидать появления в уравнениях Дирака при наличии электромагнитного поля дополнительного члена $-\frac{i}{8}f_{mn}\gamma_m\gamma_n U$, соответствующего дополнительному магнитному моменту у частицы. Что это действительно так, мы убедимся в главе VI, § 41.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Калибровка электромагнитных потенциалов по Гинзбургу [11]

Уравнения для потенциалов электромагнитного поля имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \Box\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^k} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= -4\pi\rho, \\ \Box A_i - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^k} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= -\frac{4\pi}{c}j_i. \end{aligned}\right\} \qquad (4,153)$$

Обычно принято на потенциалы φ, A_i накладывать условие Лоренца $\operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ и уравнениям поля придавать вид

$$\Box\varphi = -4\pi\rho, \quad \Box A_i = -\frac{4\pi}{c}j_i. \qquad (4,153')$$

Следуя работе Гинзбурга, наложим на потенциалы условие

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^i} = 0. \qquad (4,154)$$

Уравнения поля (4,153) в этом случае принимают вид

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho; \quad \varphi(r,\ t) = \int \frac{\rho(r',\ t)}{R}\, dV'; \ R = |r - r'|, \tag{4,155}$$

$$c\Delta A_i = -4\pi j_i + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c}\,\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2}. \tag{4,156}$$

Будем решать уравнения (4,156) методом последовательных приближений:

$$A_i = \tilde{A}_i + A_i^{(0)} + \frac{1}{c^2}\, A_i^{(1)} + \frac{1}{c^4}\, A_i^{(2)} + \ldots, \tag{4,157}$$

где $\tilde{A}_i$, удовлетворяющее условию $\frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial x^i}$, — решение однородного волнового уравнения $\Box\tilde{A}_i = 0$ (световая волна) и $A_i^{(0)}$, $A_i^{(k)}$ — решения уравнений

$$\Delta A_i^{(0)} = -4\pi j_i + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \tag{4,156$'$}$$

$$\Delta A_i^{(k)} = \frac{\partial^2 A_i^{(k-1)}}{\partial t^2}; \quad k = 1,\ 2,\ 3 \ldots \tag{4,156$''$}$$

Принимая во внимание формулу (при $k \neq 1$)

$$\Delta R^k = k(k+1)\, R^{k-2}, \tag{4,158}$$

находим:

$$cA_i^{(\ )}(r,\ t) = \int \frac{j_i(r',\ t)}{R}\, dv' + \frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial t}\int \rho(r',\ t)\, R\, dv', \tag{4,159}$$

$$cA_i^{(k)}(r,\ t) = \frac{1}{(2k)!}\int \frac{\partial^{2k} j_i(r',\ t)}{\partial t^{2k}}\, R^{(2k-1)}\, dv' + $$
$$+ \frac{1}{(2k+2)!}\,\frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial t}\int \frac{\partial^{2k}\rho(r',\ t)}{\partial t^{2k}}\, R^{2k+1}\, dv'. \tag{4,159$'$}$$

Принимая во внимание уравнение непрерывности

$$\frac{\partial j_k}{\partial x^k} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

и формулу

$$\frac{\partial^2 R^k}{\partial x^i\, \partial x^s} = k\big(\delta_{is} + n_i n_s (k-2)\big)\, R^{k-2}; \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}, \tag{4,160}$$

интегрируем (4,159) и (4,159′) по частям и получаем:

$$cA_i^{(0)}(r,\ t)=\int\frac{j_i(r',\ t)}{R}\,dV-\frac{1}{2!}\int j_s(r',\ t)\frac{\partial^2 R}{\partial x^i\,\partial x^s}\,dV'=$$
$$=\frac{1}{2!}\int\frac{j_s(r',\ t)\,(\delta_{si}+n_s n_i)}{R}\,dV',\qquad(4{,}161)$$

$$cA_i^{(k)}(r,\ t)=\frac{1}{(2k)!}\,\frac{1}{2(k+1)}\int\frac{\partial^{2k}j_s(r',\ t)}{\partial t^{2k}}\,R^{2k-1}\,[(2k+1)\,\delta_{is}-$$
$$-(2k-1)\,n_i n_s]\,dV'.\qquad(4{,}161')$$

Энергия электромагнитного поля дается выражением

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}+\frac{1}{c}\,\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)^2\right\}dV,\quad(4{,}162)$$

которое, принимая во внимание (4,154), интегрированием по частям преобразуем к виду

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\left\{\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)^2\right\}dV.\quad(4{,}162')$$

Будем теперь считать скорости всех зарядов в системе малыми по сравнению со скоростью света. Мы можем тогда в ряду (4,157) пренебречь всеми членами, начиная с члена $A_i^{(1)}$. Вычислим в этом приближении выражение для энергии W. Подставляя в (4,162′) $A_i=\tilde{A}_i+A_i^{(0)}$, получим:

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\left\{\left(\frac{\partial\tilde{A}_i}{\partial x^k}\right)+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\tilde{A}_i}{\partial t}\right)^2\right\}dV+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial\tilde{A}_i}{\partial t}\,\frac{\partial A_i^{(0)}}{\partial t}-\tilde{A}_i\,\Delta A_i^{(0)}\right\}dV+$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial A_i^{(0)}}{\partial t}\right)^2-A_i^{(0)}\Delta A_i^{(0)}-\varphi\,\Delta\varphi\right\}dV.\quad(4{,}163)$$

В рассматриваемом приближении можно во втором и третьем интеграле пренебречь первыми членами по сравнению с последующими. Вычисления дают

$$-\frac{1}{8\pi}\int\varphi\,\Delta\varphi\,dV=\frac{1}{2}\int\frac{\rho(r',\ t)\,\rho(r,\ t)}{R}\,dV\,dV',$$

$$-\frac{1}{8\pi}\int A_i^{(0)}\,\Delta A_i^{(0)}dV=\frac{1}{2c^2}\int\frac{j_i(r',\ t)\,j_s(r,\ t)}{R}(\delta_{is}+n_i n_s)\,dV\,dV',$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\tilde{A}_i\,\Delta A_i^{(0)}\,dV=\frac{1}{c}\int\tilde{A}_i j_i\,dV.$$

При вычислении последних двух интегралов принято во внимание (4,154). Окончательно имеем:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (\tilde{E}^2 + \tilde{H}^2)\, dV + \frac{1}{c}\int \tilde{A}_i j_i\, dV +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \frac{\rho(r', t)\,\rho(r, t)}{R}\, dV\, dV' +$$
$$+ \frac{1}{2c^2}\int \frac{j_i(r', t)\, j_s(r, t)}{R}(\delta_{is} + n_i n_s)\, dV\, dV'. \quad (4,164)$$

Первый член — энергия поперечных световых волн, второй член — энергия взаимодействия световых волн с системой непрерывно распределенных токов, последние два члена дают энергию мгновенного взаимодействия системы непрерывно распределенных зарядов и токов. Мы видим, что предложенная Гинзбургом калибровка (4,154) выделяет не только энергию поля фотонов и кулоновского взаимодействия зарядов, но и учитывает в том же приближении энергию мгновенного взаимодействия токов (см., например, [12], § 65 — обстоятельство, не отмеченное ее автором в работе [11]).

ГЛАВА V

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ И МЕРООПРЕДЕЛЕНИЕ ЛАМЭ

Введение

Прежде чем перейти к изложению волновой 5-оптики в 5-пространстве Римана, мы в этой главе построим необходимый для этой цели формальный математический аппарат.

Хорошо известно, что нельзя ввести понятие спинора в пространстве Римана, не отказываясь от классической техники исследования в римановой геометрии.

Как еще в 1929 г. показал В. А. Фок [10], преодоление трудности лежит в последовательном введении метрики при помощи коэффициентов Ламэ вместо общепринятых коэффициентов Гаусса.

Мы покажем, что мероопределение Ламэ может быть положено в основу тензорного анализа, который с успехом используется при общековариантной формулировке не только спинорных, но и тензорных уравнений математической физики.

Преимущество излагаемой схемы тензорного анализа заключается в том, что она позволяет единообразно получать из инвариантных интегралов Гильберта уравнения поля и законы сохранения как в случае тензорных, так и в случае спинорных полей.

В дальнейшем мы рассматриваем общий случай n-мерного пространства.

§ 31. Метрический тензор Ламэ

В обычном тензорном анализе мероопределение в пространстве Римана вводится при помощи метрической матрицы Гаусса $\|g_{ik}\|$:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k. \tag{5,1}$$

Мы будем вводить метрику при помощи несимметричной квадратной матрицы $\|\Omega_i(\alpha)\|$ по формуле

$$ds^2 = \sum_{(\alpha)} \Omega_i(\alpha)\,\Omega_k(\alpha)\,dx^i\,dx^k. \tag{5,2}$$

Если матрица $\|\Omega_i(\alpha)\|$ диагональная, то ее элементы $\Omega_k(k)$ суть коэффициенты Ламэ, поэтому мы будем ее называть метрической матрицей Ламэ.

Из (5,1) и (5,2) следует:

$$\sum_{(\alpha)} \Omega_\sigma(\alpha)\,\Omega_\tau(\alpha) = g_{\sigma\tau}; \qquad \|\Omega_\sigma(\alpha)\|^2 = \|g_{\sigma\tau}\|. \tag{5,3}$$

Мероопределение сохраняется, если элементы матрицы Ламэ подвергнуть ортогональному преобразованию:

$$\Omega'_\sigma(\alpha) = \sum_{(\beta)} L(\alpha,\ \beta|x)\,\Omega_\sigma(\beta), \tag{5,4}$$

где $L(\alpha,\ \beta|x)$ — изменяющаяся от точки к точке ортогональная матрица:

$$\sum_{(\alpha)} L(\alpha,\ \beta|x)\,L(\alpha,\ \gamma|x) = \delta(\beta,\ \gamma). \tag{5,5}$$

В самом деле, имеем:

$$g'_{\sigma\tau} = \sum_{(\alpha)} \Omega'_\sigma(\alpha)\,\Omega'_\tau(\alpha) = \sum_{(\alpha)}\sum_{(\beta)}\sum_{(\gamma)} \Omega_\sigma(\beta)\,L(\alpha,\beta)\,\Omega_\tau(\gamma)\,L(\alpha,\gamma) =$$
$$= \sum_{(\alpha)} \Omega_\sigma(\alpha)\,\Omega_\tau(\alpha) = g_{\sigma\tau}. \tag{5,6}$$

Поскольку ортогональное преобразование определяется $\frac{n(n-1)}{2}$ параметрами, матрицу Ламэ всегда можно привести к нормальному треугольному виду

$$\begin{pmatrix} \Omega_1(1) & \Omega_1(2) & \dots & \Omega_1(n) \\ 0 & \Omega_2(2) & \dots & \Omega_2(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Omega_n(n) \end{pmatrix}, \tag{5,7}$$

при котором она, как и симметричная матрица Гаусса $\|g_{\sigma\tau}\|$, определяется лишь $\frac{n(n+1)}{2}$ элементами. Из (5,3) имеем:

$$\Delta = |\operatorname{Det}(\Omega_i(\alpha))| = +\sqrt{\operatorname{Det}(g_{ik})} \neq 0. \tag{5,8}$$

Обозначая через $\Omega^i(\alpha)$ элементы обратной матрицы $\Omega_i \|(\alpha)\|^{-1}$, имеем:

$$\Omega^\tau(\alpha)\,\Omega_\tau(\beta) = \delta(\alpha, \beta); \qquad \sum_{(\alpha)} \Omega^\sigma(\alpha)\,\Omega_\tau(\alpha) = \delta^\sigma_\tau. \qquad (5,9)$$

Пользуясь матрицей Ламэ, мы можем из составляющих контравариантного вектора A^i и ковариантного вектора B_i составить систему величин:

$$A(\alpha) = \Omega_i(\alpha)\,A^i; \quad B(\alpha) = \Omega^i(\alpha)\,B_i, \qquad (5,10)$$

которые остаются инвариантными при общих преобразованиях координат и преобразуются по формулам

$$A'(\alpha) = \sum_{(\beta)} L(\alpha, \beta)\,A(\beta) \qquad (5,11)$$

при ортогональных преобразованиях элементов матрицы Ламэ.

Мы будем называть систему величин $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ инвариантными составляющими векторов A^i и B_i.

Опускание и подъем индексов происходит у нас в два приема, через промежуточные инвариантные индексы

$$A(\alpha) = \Omega_i(\alpha)\,A^i; \quad A_k = \sum_{(\alpha)} \Omega_k(\alpha)\,A(\alpha). \qquad (5,12)$$

Полагая в основу мероопределение Ламэ, мы можем построить тензорный анализ, как теорию одновременных ковариантов двух групп преобразований:

а) группа общих преобразований всех координат

$$x'^i = x^i + f^i(x', \ldots x^n); \qquad (5,13а)$$

в) группа ортогональных преобразований элементов матрицы Ламэ

$$\Omega'_\sigma(\alpha) = \sum_{(\alpha)} L(\alpha, \beta)\,\Omega_\sigma(\beta). \qquad (5,13б)$$

Условимся в дальнейшем опускать знак суммы $\sum\limits_{(\alpha)}$ при суммировании по двум дважды встречающимся инвариантным индексам

$$\sum_{(\alpha)} A(\alpha)\,B(\alpha) \equiv A(\alpha)\,B(\alpha); \quad \Omega'_\sigma(\alpha) = \sum_{(\beta)} L(\alpha, \beta)\Omega_\sigma(\beta) \equiv L(\alpha, \beta)\Omega_\sigma(\beta).$$

Тензоры имеют в общем случае индексы всех трех сортов

$$T_\sigma(\alpha); \quad T^\tau_\sigma(\alpha, \beta)$$

и трансформируются при преобразованиях группы A и B по формулам

$$\overline{T}_{\lambda}^{\sigma\tau}(\xi, \eta) = T_{c}^{kl}(\alpha, \beta)\frac{\partial x^{i}}{\partial \overline{x}^{\lambda}}\frac{\partial \overline{x}^{\sigma}}{\partial x^{k}}\cdot\frac{\partial \overline{x}^{\tau}}{\partial x^{l}}L(\xi, \alpha)L(\eta, \beta). \quad (5,14)$$

В силу $\Omega_k(\alpha) = g_{ki}\Omega^i(\alpha)$ элементы матрицы Ламэ следует воспринимать как ковариантно-инвариантные составляющие метрического тензора g_{ik}, которые при преобразованиях групп A и B преобразуются по формулам

$$\overline{\Omega}_i(\alpha) = \Omega_\sigma(\beta)\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \overline{x}^{i}}L(\alpha, \beta). \quad (5,14')$$

Мы будем поэтому называть величины $\Omega_i(\alpha)$ составляющими метрического тензора Ламэ.

Замечание. Отметим, что при обычном изложении величины $\Omega_i(\alpha)$ воспринимаются как составляющие n ковариантных векторов, образующих в каждой точке пространства локальный прямоугольный репер (n-эдр), в то время как у нас они образуют ковариантно-инвариантный тензор. Преимущество нашего определения станет ясным из дальнейшего.

§ 32. Ковариантное дифференцирование тензоров

Для того чтобы ввести ковариантное дифференцирование, необходимо определить понятие параллельного переноса вектора. Инвариантные составляющие вектора $A(\alpha)$ в двух бесконечно близких точках (x) и $(x+dx)$ должны быть связаны бесконечно малым линейным преобразованием

$$A(\alpha|x+dx) = \{\delta(\alpha, \beta) + \Delta_\sigma(\alpha, \beta)\,dx^{\sigma}\}\,A(\alpha|x). \quad (5,15)$$

Поскольку при параллельном переносе квадрат вектора $A(\alpha)A(\alpha) \equiv A_iA^i$, как скаляр, должен оставаться неизменным, мы заключаем, что в том случае, когда в (5,15) вектор $A(\alpha|x+dx)$ получен из вектора $A(\alpha|x)$ путем параллельного переноса, соответствующее линейное преобразование должно быть бесконечно малым ортогональным преобразованием, т. е. что величина $\Delta_\sigma(\alpha, \beta)$ должна быть антисимметрична в инвариантных индексах α, β:

$$\Delta_\sigma(\alpha, \beta) = -\Delta_\sigma(\alpha, \beta). \quad (5,16)$$

Они называются компонентами вращения или символами Риччи.

Итак, при параллельном переносе вектор $A(\alpha)$ испытывает приращение

$$\delta A(\alpha) = \Delta_\sigma(\alpha, \beta)\, dx^\sigma A(\beta). \tag{5,17}$$

При произвольном переносе вектор $A(\alpha)$ испытывает приращение

$$dA(\alpha) = \frac{\partial A(\alpha)}{\partial x^\sigma} dx^\sigma. \tag{5,18}$$

Разность $dA(\alpha) - \delta(A)\alpha$ есть вектор абсолютного приращения вектора $A(\alpha)$:

$$dA(\alpha) - \delta A(\alpha) = \left\{\frac{\partial A(\alpha)}{\partial x^\sigma} - \Delta_\sigma(\alpha, \beta) A(\beta)\right\} dx^\sigma \tag{5,19}$$

и, следовательно, выражение в фигурных скобках его ковариантная производная

$$\nabla_\sigma A(\alpha) = \frac{\partial A(\alpha)}{\partial x^\sigma} - \Delta_\sigma(\alpha, \beta) A(\beta). \tag{5,20}$$

Из требования

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\sigma A^\tau &= \nabla_\sigma(\Omega^\tau(\alpha) A(\alpha)) = \Omega^\tau(\alpha) \nabla_\sigma A(\alpha), \\ \nabla_\sigma A_\tau &= \nabla_\sigma(\Omega_\tau(\alpha) A(\alpha)) = \Omega_\tau(\alpha) \nabla_\sigma A(\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{5,21}$$

вытекает требование

$$\nabla_\sigma \Omega^\tau(\alpha) = 0; \qquad \nabla_\sigma \Omega_\tau(\alpha) = 0. \tag{5,22}$$

Умножая (5,20) на $\Omega_\tau(\alpha)$ и $\Omega^\tau(\alpha)$, получаем после очевидных преобразований

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\sigma A_\tau &= \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\sigma} - \left\{\frac{\partial \Omega_\tau(\beta)}{\partial x^\sigma} + \Delta_\sigma(\alpha, \beta)\Omega_\tau(\alpha)\right\} \Omega^\lambda(\beta) A_\lambda, \\ \nabla_\sigma A^\tau &= \frac{\partial A^\tau}{\partial x^\sigma} + \left\{\frac{\partial \Omega_\lambda(\beta)}{\partial x^\sigma} + \Delta_\sigma(\alpha, \beta)\Omega_\lambda(\alpha)\right\} \Omega^\tau(\beta) A^\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{5,23}$$

Вводим сокращенные обозначения

$$\Gamma^\lambda_{\sigma\tau} = \Omega^\lambda(\beta) \frac{\partial \Omega_\tau(\beta)}{\partial x^\sigma} + \Delta_{\sigma,\ \tau}^{\ \cdot\ \ \cdot\lambda}, \tag{5,24}$$

$$\Gamma_{\lambda,\ \sigma\tau} = \Omega_\lambda(\beta) \frac{\partial \Omega_\tau(\beta)}{\partial x^\sigma} + \Delta_{\sigma,\ \tau\lambda} \tag{5,24a}$$

и переписываем (5,23) в обычном виде

$$\nabla_\sigma A_\tau = \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\lambda_{\sigma\tau} A_\lambda; \qquad \nabla_\sigma A^\tau = \frac{\partial A^\tau}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\tau_{\sigma\lambda} A^\lambda. \tag{5,23a}$$

Покажем, что определенные формулами (5,24) и (5,24а) символы совпадают с обычными символами Кристоффеля. Для этого переставляем в (5,24а) индексы τ, λ и, принимая во внимание (5,16), получаем:

$$\Gamma_{\lambda,\,\sigma\tau} + \Gamma_{\tau,\sigma\lambda} = \Omega_\lambda(\beta)\frac{\partial \Omega_\tau(\beta)}{\partial x^\sigma} + \Omega_\tau(\beta)\frac{\partial \Omega_\tau(\beta)}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial g_{\lambda\tau}}{\partial x^\sigma}, \tag{5,25}$$

откуда следует

$$\Gamma_{\lambda,\,\sigma\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\tau} - \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\tau\lambda}}{\partial x^\sigma}\right), \tag{5,25'}$$

и утверждение доказано.

Вычисляя по изложенным правилам ковариантную производную от $A^\tau B(\alpha)$, приходим к формулам

$$\nabla_\sigma A^\tau(\alpha) = \frac{\partial A^\tau(\alpha)}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\tau_{\sigma\lambda} A^\lambda(\alpha) - \Delta_\sigma(\alpha,\ \beta) A^\tau(\beta). \tag{5,26}$$

Обобщая, получаем следующее правило ковариантного дифференцирования для тензора любого ранга:

чтобы получить ковариантную производную тензора $A^{\cdot\,\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot}$ по x^σ, к обычной ковариантной производной следует добавить на каждый инвариантный индекс $\alpha\,(A\ldots,\alpha,\ldots)$ член $-\Delta_\sigma(\alpha,\ \beta)\,A(\ldots,\beta,\ldots)$.

Пользуясь этим правилом, раскрываем смысл выражений (5,22):

$$\nabla_\sigma \Omega^\tau(\alpha) = \frac{\partial \Omega^\tau(\alpha)}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\tau_{\sigma\lambda}\Omega^\lambda(\alpha) - \Delta_\sigma(\alpha,\ \beta)\,\Omega^\tau(\beta) = 0, \tag{5,27}$$

$$\nabla_\sigma \Omega_\tau(\alpha) = \frac{\partial \Omega_\tau(\alpha)}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\lambda_{\sigma\tau}\Omega_\lambda(\alpha) - \Delta_\sigma(\alpha,\ \beta)\,\Omega_\tau(\beta). \tag{5.27a}$$

Замечание. Отметим, что при обычном изложении величины $\Omega^\tau(\alpha)$ воспринимаются не как составляющие контравариантно-инвариантного тензора, а как составляющие системы n контравариантных векторов. Поэтому при обычном изложении под ковариантной производной от $\Omega^\tau(\alpha)$

(обозначим ее через $\Omega^{\tau}(\alpha)_{;\sigma}$) понимают величину

$$\Omega^{\tau}(\alpha)_{;\sigma}=\frac{\partial\Omega^{\tau}(\alpha)}{\partial x^{\sigma}}+\Gamma^{\tau}_{\sigma\lambda}\Omega^{\lambda}(\alpha) \tag{5,28}$$

не равную нулю, а равную согласно (5,27)

$$\Omega^{\tau}(\alpha)_{;\sigma}=\Delta_{\sigma}(\alpha,\ \beta)\,\Omega^{\tau}(\beta). \tag{5,29}$$

§ 33. Связь символов Риччи с метрическим тензором Ламэ

Переставляя в (5,24а) индексы τ, σ, получаем:

$$\Delta_{\sigma,\tau\lambda}-\Delta_{\tau,\sigma\lambda}=\Omega_{\lambda}(\alpha)\left\{\frac{\partial\Omega_{\sigma}(\alpha)}{\partial x^{\tau}}-\frac{\partial\Omega_{\tau}(\alpha)}{\partial x^{\sigma}}\right\}. \tag{5,30}$$

Решая эти уравнения относительно $\Delta_{\sigma,\tau\lambda}$, найдем формулу

$$\Delta_{\sigma,\tau\lambda}=\frac{1}{2}\left\{\Omega_{\sigma}(\alpha)\left(\frac{\partial\Omega_{\lambda}(\alpha)}{\partial x^{\tau}}-\frac{\partial\Omega_{\tau}(\alpha)}{\partial x^{\lambda}}\right)+\Omega_{\lambda}(\alpha)\left(\frac{\partial\Omega_{\sigma}(\alpha)}{\partial x^{\tau}}-\frac{\partial\Omega_{\tau}(\alpha)}{\partial x^{\sigma}}\right)+\right.$$
$$\left.+\Omega_{\tau}(\alpha)\left(\frac{\partial\Omega_{\lambda}(\alpha)}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial\Omega_{\sigma}(\alpha)}{\partial x^{\lambda}}\right)\right\}. \tag{5,31}$$

Умножая (5,30) на $\Omega^{\sigma}(\alpha)\,\Omega^{\tau}(\beta)\,\Omega^{\lambda}(\gamma)$, получаем:

$$\Delta(\alpha,\ \beta,\ \gamma)-\Delta(\beta,\ \alpha,\ \gamma)=\frac{\partial\Omega_{\sigma}(\gamma)}{\partial x^{\tau}}\left(\Omega^{\sigma}(\alpha)\,\Omega^{\tau}(\beta)-\Omega^{\tau}(\alpha)\,\Omega^{\sigma}(\beta)\right). \tag{5,30a}$$

Решая эти уравнения относительно $\Delta(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, получим:

$$\Delta(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\Omega_{\sigma}(\alpha)}{\partial x^{\lambda}}\left(\Omega^{\lambda}(\beta)\,\Omega^{\sigma}(\gamma)-\Omega^{\lambda}(\gamma)\,\Omega^{\sigma}(\beta)\right)+\right.$$
$$+\frac{\partial\Omega_{\sigma}(\beta)}{\partial x^{\lambda}}\left(\Omega^{\lambda}(\alpha)\,\Omega^{\sigma}(\gamma)-\Omega^{\lambda}(\gamma)\,\Omega^{\sigma}(\alpha)\right)+$$
$$\left.+\frac{\partial\Omega_{\sigma}(\gamma)}{\partial x^{\lambda}}\left(\Omega^{\lambda}(\beta)\,\Omega^{\sigma}(\alpha)-\Omega^{\lambda}(\alpha)\,\Omega^{\sigma}(\beta)\right)\right\}. \tag{5,31a}$$

Формулы (5,31) и (5,31а) выражают символы Риччи через составляющие метрического тензора Ламэ.

Свертывая (5,27) по индексам σ, τ и принимая во внимание, что $\Gamma^{\sigma}_{\sigma\lambda}=\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial x^{\lambda}}$, получаем формулу

$$\frac{\partial\Lambda\Omega^{\sigma}(\alpha)}{\Lambda\,\partial x^{\sigma}}=\Delta(\beta,\ \alpha,\ \beta). \tag{5,32}$$

§ 34. Инвариантное дифференцирование тензора

Введем два оператора, определяемые как

$$D(\tau) = \Omega^\sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial x^\sigma}, \tag{5,33}$$

$$\nabla(\tau) = \Omega^\sigma(\tau) \nabla_\sigma. \tag{5,33а}$$

Умножая выражение (5,20) на $\Omega^\sigma(\alpha)$, получаем:

$$\nabla(\tau) A(\alpha) = D(\tau) A(\alpha) - \Delta(\tau, \alpha, \beta) A(\beta). \tag{5,34}$$

Это выражение удобно назвать «инвариантной производной» вектора $A(\alpha)$. Вычисляя по формуле (5,34) инвариантную производную от произведения $A(\alpha) B(\beta)$ и $A(\alpha) B(\beta) C(\gamma)$, придем к формулам для инвариантного дифференцирования тензоров второго и третьего ранга:

$$\nabla(\tau) A(\alpha, \beta) = D(\tau) A(\alpha, \beta) - \\ - \Delta(\tau, \alpha, \varepsilon) A(\varepsilon, \beta) - \Delta(\tau, \beta, \varepsilon) A(\alpha, \varepsilon), \tag{5,35а}$$

$$\nabla(\tau) A(\alpha, \beta, \gamma) = D(\tau) A(\alpha, \beta, \gamma) - \Delta(\tau, \alpha, \varepsilon) A(\varepsilon, \beta, \gamma) - \\ - \Delta(\tau, \beta, \varepsilon) A(\alpha, \varepsilon, \gamma) - \Delta(\tau, \gamma, \varepsilon) A(\alpha, \beta, \varepsilon), \tag{5,35б}$$

которые легко обобщить на случай тензора любого ранга. Свертывая выражения (5,34) и (5,35), получим соответствующие формулы для расходимостей

$$\nabla(\tau) A(\tau) = D(\tau) A(\tau) - \Delta(\tau, \tau, \varepsilon) A(\varepsilon), \tag{5,36'}$$

$$\nabla(\tau) A(\alpha, \tau) = D(\tau) A(\alpha, \tau) - \Delta(\tau, \alpha, \varepsilon) A(\varepsilon, \tau) - \\ - \Delta(\tau, \tau\varepsilon) A(\alpha, \varepsilon), \tag{5,36''}$$

$$\nabla(\tau) A(\alpha, \beta, \tau) = D(\tau) A(\alpha, \beta, \tau) - \Delta(\tau, \alpha, \varepsilon) A(\varepsilon, \beta, \tau) - \\ - \Delta(\tau, \beta, \varepsilon) A(\alpha, \varepsilon, \tau) - \Delta(\tau, \tau, \varepsilon) A(\alpha, \beta, \varepsilon). \tag{5,36'''}$$

Подставляя в формулу (5,36′) специально $A(\tau) = D(\tau)\Phi$, найдем выражение для лапласиана скаляра Φ

$$\{ D(\tau) D(\tau) - \Delta(\tau, \tau, \varepsilon) D(\varepsilon) \} \Phi. \tag{5,37}$$

Проверим формулу (5,37). Имеем:

$$\frac{\partial \Lambda g^{\sigma\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\tau}}{\Lambda \partial x^\sigma} = \frac{\partial \Lambda \Omega^\sigma(\alpha) \Omega^\tau(\alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial x^\tau}}{\Lambda \partial x^\sigma} = \frac{\partial \Lambda \Omega^\sigma(\tau)}{\Lambda \partial x^\sigma} D(\tau)\Phi + D(\tau) D(\tau)\Phi.$$

Используя формулу (5,32), получаем (5,37).

По определению, ротором вектора $A(\alpha)$ называется антисимметричный тензор $A(\alpha, \beta) = \nabla(\alpha) A(\beta) - \nabla(\beta) A(\alpha)$.

По формуле (5,34) находим:

$$A(\alpha, \beta) = D(\alpha) A(\beta) - D(\beta) A(\alpha) - \\ - \{\Delta(\alpha, \beta, \tau) - \Delta(\beta, \alpha, \tau\} A(\tau). \quad (5,38)$$

Ротором антисимметричного тензора $A(\alpha, \beta) = -A(\beta, \alpha)$ называется тензор третьего ранга $A(\alpha, \beta, \gamma) = \nabla(\alpha) A(\beta, \gamma) + \nabla(\beta) A(\gamma, \alpha) + \nabla(\gamma) A(\alpha, \beta)$. Подставляя выражение (5,35а), легко находим:

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = D(\alpha) A(\beta, \gamma) + D(\beta) A(\gamma, \alpha) + D(\gamma) A(\alpha, \beta) + \\ + A(\alpha, \varepsilon)(\Delta(\beta, \gamma, \varepsilon) - \Delta(\gamma, \beta, \varepsilon)) + \\ + A(\beta, \varepsilon)(\Delta(\gamma, \alpha, \varepsilon) - \Delta(\alpha, \gamma, \varepsilon)) + \\ + A(\gamma, \varepsilon)(\Delta(\alpha, \beta, \varepsilon) - \Delta(\beta, \alpha, \varepsilon)). \quad (5,39)$$

Формулы (5,38) и (5,39) легко проверить, вычисляя непосредственно выражения

$$A(\alpha, \beta) = \Omega^{\sigma}(\alpha) \Omega^{\tau}(\beta) \left(\frac{\partial A_{\tau}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial A_{\sigma}}{\partial x^{\tau}}\right),$$

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \Omega^{\sigma}(\alpha) \Omega^{\tau}(\beta) \Omega^{\lambda}(\gamma) \left(\frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial A_{\tau\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial A_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\tau}}\right).$$

В заключение найдем соотношение перестановок для операторов $D(\alpha)$. Имеем:

$$D(\alpha) D(\beta) - D(\beta) D(\alpha) = \left(\Omega^{\sigma}(\alpha) \frac{\partial \Omega^{\tau}(\beta)}{\partial x^{\sigma}} - \Omega^{\sigma}(\beta) \frac{\partial \Omega^{\tau}(\alpha)}{\partial x^{\sigma}}\right) \frac{\partial}{\partial x^{\tau}}. \quad (5,40)$$

Исключая производные $\frac{\partial \Omega^{\tau}(\beta)}{\partial x^{\sigma}}$, $\frac{\partial \Omega^{\tau}(\alpha)}{\partial x^{\sigma}}$ при помощи (5,27а), найдем:

$$D(\alpha) D(\beta) - D(\beta) D(\alpha) = \\ = (\Delta(\alpha, \beta, \varepsilon) - \Delta(\beta, \alpha, \varepsilon)) D(\varepsilon). \quad (5,41)$$

§ 35. Тензор Римана

Вычислим изменение вектора при параллельном переносе вдоль замкнутого контура.

Имеем по формуле (5,17) (применяя теорему Стокса)

$$\oint \delta A(\delta) = \frac{1}{2} \int\int \left\{ \frac{\partial \Delta_\tau(\alpha, \beta) A(\beta)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Delta_\sigma(\alpha, \beta) A(\beta)}{\partial x^\tau} \right\} A(\beta)\, df^{\sigma\tau} =$$
$$= \frac{1}{2} \int\int \left\{ \frac{\partial \Delta_\tau(\alpha, \beta)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Delta_\sigma(\alpha, \beta)}{\partial x^\tau} + \Delta_\tau(\alpha, \varepsilon)\Delta_\sigma(\varepsilon, \beta) - \right.$$
$$\left. - \Delta_\sigma(\alpha, \varepsilon)\Delta_\tau(\varepsilon, \beta) \right\} A(\beta)\, df^{\sigma\tau}, \quad (5,42)$$

где стоящий в фигурных скобках тензор есть ковариантно-инвариантный тензор Римана

$$R_{\sigma\tau}(\alpha, \beta) = \frac{\partial \Delta_\tau(\alpha, \beta)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Delta_\sigma(\alpha, \beta)}{\partial x^\tau} +$$
$$+ \Delta_\tau(\alpha, \varepsilon)\Delta_\sigma(\varepsilon, \beta) - \Delta_\sigma(\alpha, \varepsilon)\Delta_\tau(\varepsilon, \beta). \quad (5,43)$$

Для того чтобы получить обычный тензор Римана $R_{\sigma\tau\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$, умножаем (5,43) на $\Omega_\lambda(\alpha)\Omega^\mu(\beta)$. Получаем:

$$\frac{\partial \Delta_{\tau\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\mu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Delta_{\sigma\lambda}^{\cdot\cdot\mu}}{\partial x^\tau} + \Delta_{\tau\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\varepsilon}\Delta_{\sigma\varepsilon\cdot}^{\cdot\cdot\mu} - \Delta_{\sigma\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\varepsilon}\Delta_{\tau\varepsilon\cdot}^{\cdot\cdot\mu} -$$
$$- \Delta_\tau(\alpha, \beta)\frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\Omega_\lambda(\alpha)\Omega^\mu(\beta)) + \Delta_\sigma(\alpha, \beta)\frac{\partial}{\partial x^\tau}(\Omega_\lambda(\alpha)\Omega^\mu(\beta)).$$

Подставляя выражения для $\Delta_{\tau\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\mu}$ по формуле (5,24) и исключая производные от $\Omega_\lambda(\alpha)$ и $\Omega^\mu(\beta)$ при помощи (5,27), получаем:

$$R_{\sigma\tau}(\alpha, \beta)\Omega_\lambda(\alpha)\Omega^\mu(\beta) =$$
$$= \frac{\partial \Gamma^\mu_{\tau\lambda}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}}{\partial x^\tau} + \Gamma^\varepsilon_{\tau\lambda}\Gamma^\mu_{\sigma\varepsilon} - \Gamma^\varepsilon_{\sigma\lambda}\Gamma^\mu_{\tau\varepsilon} = R_{\sigma\tau\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\mu}. \quad (5,44)$$

Для того чтобы получить инвариантный тензор Римана $R(\alpha, \beta, \mu, \nu)$, умножаем (5,43) на $\Omega^\sigma(\mu)\Omega^\tau(\nu)$. Получаем:

$$\Omega^\sigma(\mu)\left\{ \frac{\partial \Delta(\nu, \alpha, \beta)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Omega^\tau(\nu)}{\partial x^\sigma}\Delta_\tau(\alpha, \beta) \right\} -$$
$$- \Omega^\tau(\nu)\left\{ \frac{\partial \Delta(\mu, \alpha, \beta)}{\partial x^\tau} - \frac{\partial \Omega^\sigma(\mu)}{\partial x^\tau}\Delta_\sigma(\alpha, \beta) \right\} +$$
$$+ \Delta(\nu, \alpha, \varepsilon)\Delta(\mu, \varepsilon, \beta) - \Delta(\mu, \alpha, \varepsilon)\Delta(\nu, \varepsilon, \beta).$$

Исключая производные $\frac{\partial \Omega^{\tau}(\nu)}{\partial x^{\sigma}}$, $\frac{\partial \Omega^{\sigma}(\mu)}{\partial x^{\tau}}$ при помощи (5,27), переходим к формуле

$$R_{\sigma\tau}(\alpha, \beta)\,\Omega^{\sigma}(\mu)\,\Omega^{\tau}(\nu) = R(\mu, \nu, \alpha, \beta) =$$
$$= D(\mu)\Delta(\nu, \alpha, \beta) - D(\nu)\Delta(\mu, \alpha, \beta) +$$
$$+ \Delta(\mu, \varepsilon, \beta)\Delta(\nu, \alpha, \varepsilon) - \Delta(\nu, \varepsilon, \beta)\Delta(\mu, \alpha, \varepsilon) +$$
$$+ \Delta(\mu, \varepsilon, \nu)\Delta(\varepsilon, \alpha, \beta) - \Delta(\nu, \varepsilon, \mu)\Delta(\varepsilon, \alpha, \beta). \quad (5,45)$$

Свертывая по индексам ν, α и изменяя обозначение индексов, получаем инвариантный тензор Риччи

$$R(\alpha, \beta) = D(\alpha)\Delta(\sigma, \sigma\beta) - D(\sigma)\Delta(\alpha, \sigma\beta) +$$
$$+ \Delta(\alpha, \sigma\beta)\Delta(\tau, \tau\sigma) - \Delta(\tau, \sigma\alpha)\Delta(\sigma, \tau\beta). \quad (5,46)$$

Свертывая по индексам α, β, получаем скаляр

$$R = 2D(\sigma)\Delta(\tau, \tau\sigma) - \Delta(\sigma, \sigma\varepsilon)\Delta(\tau, \tau\varepsilon) + \Delta(\sigma, \tau\varepsilon)\Delta(\tau, \varepsilon\sigma). \quad (5,47)$$

§ 36. Спиноры в пространстве Римана

Покажем теперь, следуя работе В. А. Фока [10], что излагаемая схема тензорного анализа позволяет ввести спиноры в пространство Римана.

Построим систему n эрмитовских матриц $\mu(\alpha)$, удовлетворяющих условиям перестановок:

$$\mu(\alpha)\mu(\beta) + \mu(\beta)\mu(\alpha) = 2\delta(\alpha, \beta). \quad (5,48)$$

В спинорном анализе доказывается, что матрицы $\mu(\alpha)$ при $n = 2\nu$ и $n = 2\nu + 1$ должы быть $s = 2^{\nu}$-рядными.

Две комплексные s-компонентные величины:

$$W = (W_1, W_2, \ldots, W_s); \quad \tilde{W} = (\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \ldots, \tilde{W}_s), \quad (5,49)$$

называются сопряженными спинорами, если n эрмитовских форм $\tilde{W}\mu(\alpha)W$ образуют вектор с инвариантными составляющими.

При преобразованиях группы A

$$\tilde{W}'\mu(\alpha)W' = \tilde{W}\mu(\alpha)W \quad (5,50)$$

составляющие спинора остаются инвариантными.

При преобразованиях группы B

$$\tilde{W}'\mu(\alpha)W' = \sum_{(\beta)} L(\alpha, \beta)(\tilde{W}\mu(\beta)W) \tag{5,51}$$

составляющие спинора преобразуются между собой по s-рядному представлению группы ортогональных преобразований

$$W' = SW; \quad \tilde{W}' = \tilde{W}S^{-1}, \tag{5,52}$$

где S — некоторая изменяющаяся от точки к точке s-рядная матрица, связанная с матрицей $\|L(\alpha, \beta)\|$ соотношением

$$S^{-1}\mu(\alpha)S = \sum_{(\beta)} L(\alpha, \beta)\mu(\beta), \tag{5,53}$$

которое вытекает из формулы (5,51).

Для того чтобы вывести формулы ковариантного дифференцирования для спинора, мы должны, следуя работе Фока, определить понятие параллельного переноса для спинора.

Компоненты спинора в двух бесконечно близких точках (x) и $(x+dx)$ должны быть связаны бесконечно малым линейным преобразованием:

$$\left.\begin{aligned} W(x+dx) &= \{I + B_\sigma dx^\sigma\} W(x), \\ \tilde{W}(x+dx) &= \tilde{W}\{I - B_\sigma dx^\sigma\}, \end{aligned}\right\} \tag{5,54}$$

где B_σ — некоторая s-рядная матрица, а I — единичная s-рядная матрица. Для того чтобы преобразование (5,54) определяло параллельный перенос, необходимо, чтобы построенный из спиноров $\tilde{W}$ и W вектор $\tilde{W}\mu(\alpha)W$ испытывал параллельный перенос, т. е. чтобы в согласии с формулами (5,15) и (5,54) имело место

$$\tilde{W}(x)\{I - B_\sigma dx^\sigma\}\mu(\alpha)\{I + B_\sigma dx^\sigma\}W(x) = \\ = \sum_{(\beta)} \tilde{W}\mu(\beta)W\{\delta(\alpha, \beta) + \Delta_\sigma(\alpha, \beta)dx^\sigma\}, \tag{5,55}$$

откуда получаем для матриц Фока B_σ уравнение

$$\mu(\alpha)B_\sigma - B_\sigma\mu(\alpha) = \sum_{(\beta)} \Delta_\sigma(\alpha, \beta)\mu(\beta). \tag{5,56}$$

Общее решение этого уравнения, как легко проверить, будет

$$B_\sigma = \frac{1}{4}\Delta_\sigma(\alpha, \beta)\mu(\alpha)\mu(\beta) + if_\sigma I, \tag{5,57}$$

где f_σ — произвольные функции, а I — единичная матрица.

Итак, для ковариантной производной спинора получаем формулы

$$\nabla_\sigma W = \frac{\partial W}{\partial x^\sigma} - B_\sigma W; \quad \nabla_\sigma \widetilde{W} = \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x^\sigma} + \widetilde{W} B_\sigma \tag{5,58}$$

и для инвариантной производной формулы

$$\nabla(\alpha) W = D(\alpha) W - B(\alpha) W; \qquad \nabla(\alpha)\widetilde{W} = D(\alpha)\widetilde{W} + \widetilde{W} B(\alpha). \tag{5,59}$$

§ 37. Приложение к 5-оптике

В 5-оптике мы имеем дело с пятимерным пространством Римана, метрический тензор которого имеет вид

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{ik} + (1+\chi) g_i g_k & (1+\chi) g_k \\ (1+\chi) g_i & (1+\chi) \end{pmatrix};$$

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{g}^{ik} & -\tilde{g}^{ik} g_k \\ -\tilde{g}^{ki} g_i & \dfrac{1}{1+\chi} + \tilde{g}^{ik} g_i g_k \end{pmatrix}. \tag{5,60}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что соответствующие матрицы Ламэ имеют вид

$$\Omega_\sigma(\alpha) = \begin{pmatrix} \omega_i(n) & \sqrt{1+\chi}\, g_i \\ 0 & \sqrt{1+\chi} \end{pmatrix};$$

$$\Omega^\sigma(\alpha) = \begin{pmatrix} \omega^i(n) & 0 \\ -\omega^i(n) g_i & \dfrac{1}{\sqrt{1+\chi}} \end{pmatrix}, \tag{5,61}$$

где $\|\omega_i(n)\|$ — четырехрядная матрица Ламэ, соответствующая 4-тензору $\tilde{g}_{ik}$.

Например, матрица Ламэ, соответствующая полю Шварцшильда (формула 3,22) имеет, как легко проверить, вид

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_\sigma(\alpha) &= \begin{pmatrix} \delta_i(k) + \left(e^{\frac{\nu}{2}} - 1\right) n_i n(k) & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\mu}{2}} & e^{\frac{\lambda}{2}} g \\ 0 & 0 & e^{\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix}, \\
\Omega^\sigma(\alpha) &= \begin{pmatrix} \delta^i(k) + \left(e^{-\frac{\nu}{2}} - 1\right) n_i n(k) & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\mu}{2}} & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{\mu}{2}} g & e^{-\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}\right\} \quad (5{,}61')$$

Операторы $D(\alpha)$ по формуле (5,33) имеют вид

$$D(n) = \omega^i(n)\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - g_i \frac{\partial}{\partial x^5}\right); \quad D(5) = \frac{1}{\sqrt{1+\chi}} \frac{\partial}{\partial x^5}. \qquad (5{,}62)$$

Особенно важное значение имеет частный случай, когда $G_{\mu\nu}$ — поле чисто-электромагнитное и его зависимостью от пятой координаты действия можно пренебречь. Этот частный случай только рассматривается в современной квантовой механике.

Он выделяется из общего случая условиями:

$$\left.\begin{array}{lr}
\text{1. Гравитационное поле отсутствует} & g_{ik} = \delta_{ik}. \\
\text{2. } \chi\text{-поле отсутствует} & \chi = 0. \\
\text{3. Условие цилиндричности} & \dfrac{\partial g_i}{\partial x^5} = 0. \\
\text{4. Условие гармоничности} & \dfrac{\partial g_i}{\partial x^i} = 0.
\end{array}\right\} \quad (5{,}63)$$

Метрический тензор

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta_{ik} + g_i g_k & g_k \\ g_i & 1 \end{pmatrix}; \quad G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta_{ik} & -g_k \\ -g_i & 1 + g_i g^i \end{pmatrix}. \qquad (5{,}64)$$

Метрический тензор Ламэ

$$\Omega_\sigma(\alpha) = \begin{pmatrix} \delta_{ik} & g_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Omega^\sigma(\alpha) = \begin{pmatrix} \delta_{ik} & 0 \\ -g_k & 1 \end{pmatrix}. \qquad (5{,}65)$$

Для операторов $D(\alpha)$ получаем из (5,62)

$$D(n)=\frac{\partial}{\partial x^n}-g_n\frac{\partial}{\partial x^5};\quad D(5)=\frac{\partial}{\partial x^5}, \tag{5,66}$$

откуда следуют соотношения перестановки

$$\begin{gathered} D(n)D(m)-D(m)D(n)=f(m,\ n)D(5), \\ D(5)D(n)-D(n)D(5)=0. \end{gathered} \tag{5,67}$$

Весьма существенным является, что в силу (5,65) имеем:

$$A^i=\Omega^i(\alpha)A(\alpha)=A(i);\quad A_5=\Omega_5(\alpha)A(\alpha)=A(5), \tag{5,68}$$

т. е. для любого 5-вектора $A(\alpha)$ его градиентно-инвариантные составляющие совпадают с его инвариантными составляющими и, следовательно,

$$\{A^i,\ A_5\}=\{A(i),\ A(5)\}. \tag{5,69}$$

Итак, употребление символики инвариантного дифференцирования обеспечивает в рассматриваемом частном случае получение градиентно-инвариантных выражений.

Вычисляя по формуле (5,30′) символы Риччи, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \Delta(i,\ kl)=0;\quad \Delta(5,\ ik)=\frac{1}{2}f(i,\ k), \\ \Delta(5,\ 5l)=0;\quad \Delta(i,\ k5)=\frac{1}{2}f(k,\ i), \end{aligned}\right\} \tag{5,70}$$
$$\Delta(\beta,\ \beta\alpha)=0.$$

Пользуясь общими формулами § 34, вычисляем, выделяя координату действия:

1. (Инвариантную) расходимость вектора

$$D(n)A(n)+D(5)A(5). \tag{5,71}$$

2. Инвариантную расходимость симметричного тензора

$$\left.\begin{aligned} &D(n)Q(k,\ n)+D(5)Q(k,\ 5)+f(k,\ n)Q(5,\ n), \\ &D(n)Q(5,\ n)+D(5)Q(5,\ 5). \end{aligned}\right\} \tag{5,72}$$

3. Инвариантную расходимость антисимметричного тензора

$$\left.\begin{aligned} &D(n)W(k,\ n)+D(5)W(k,\ 5), \\ &D(n)W(5,\ n)+\frac{1}{2}f(k,\ n)W(k,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{5,73}$$

4. Инвариантную расходимость антисимметричного тензора третьего ранга

$$\left.\begin{aligned}&D(n)K(nik)+D(5)K(5ik),\\&D(n)K(n5k)-\frac{1}{2}f(i,\ n)K(i,\ n,\ k).\end{aligned}\right\}\qquad(5{,}74)$$

5. Ротор вектора

$$\left.\begin{aligned}&D(i)A(k)-D(k)A(i)+f(i,\ k)A(5),\\&D(5)A(k)-D(k)A(5).\end{aligned}\right\}\qquad(5{,}75)$$

6. Ротор антисимметричного тензора

$$D(l)A(i,\ k)+D(i)A(k,\ l)+D(k)A(l,\ i)+f(i,\ k).\qquad(5{,}76)$$

7. Лапласиан скаляра

$$\{D(n)D(n)+D(5)D(5)\}\,\Phi.\qquad(5{,}77)$$

Пользуясь формулами § 36, вычисляем

$$\left.\begin{aligned}&B^i=B(i)=\frac{1}{4}f(i,\ k)\mu(5)\mu(k);\\&B_5=B(5)=\frac{1}{8}f(i,\ k)\mu(i)\mu(k),\\&\mu(\alpha)B(\alpha)+B(\alpha)\mu(\alpha)=-\frac{1}{8}f(i,\ k)\mu(5)\mu(i)\mu(k),\\&\tilde{W}(B(k)\mu(i)+\mu(i)B(k))W=\frac{1}{2}f(k,\ n)K(5,\ n,\ i),\\&\tilde{W}(B(5)\mu(k)+\mu(k)B(5))W=\frac{1}{4}f(m,\ n)K(m,\ n,\ k),\\&\tilde{W}(B(k)\mu(5)+\mu(5)B(k))W=0,\\&\tilde{W}(B(5)\mu(5)+\mu(5)B(5))W=\frac{1}{4}f(m,\ n)K(m,\ n,\ 5),\end{aligned}\right\}\qquad(5{,}78)$$

где $K(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ антисимметричный тензор третьего ранга

$$K(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\frac{1}{2}\tilde{W}(\mu(\alpha)\mu(\beta)\mu(\gamma)-\mu(\gamma)\mu(\beta)\mu(\alpha))W.\qquad(5{,}79)$$

§ 38. Инвариантные интегралы Гильберта

Рассмотрим интеграл

$$\left.\begin{aligned} J &= \int \Delta L\left(\Omega^\sigma(\alpha);\ \frac{\partial\Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau}\right) dx, \\ \Delta &= \operatorname{Det}(\Omega_\sigma(\alpha));\ dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \end{aligned}\right\} \tag{5,80}$$

который остается инвариантным при преобразованиях групп A и B.

Имеем три типа вариации величин $\Omega^\sigma(\alpha)$.

1. Произвольная вариация: $\delta\Omega^\sigma(\alpha)$.

2. Вариация, порождаемая бесконечно малыми преобразованиями группы A: $\delta_1\Omega^\sigma(\alpha)$.

3. Вариация, порождаемая бесконечно малыми преобразованиями группы B: $\delta_2\Omega^\sigma(\alpha)$.

Очевидно, что $\delta J \neq 0$, но всегда $\delta_1 J = \delta_2 J = 0$.

Найдем выражения для $\delta_1\Omega^\sigma(\alpha)$ и $\delta_2\Omega^\sigma(\alpha)$.

I. Группа преобразований A.

Имеем (ε — малый параметр):

$$\left.\begin{aligned} x'^\sigma &= x^\sigma + \varepsilon f^\sigma(x), \\ dx'^\sigma &= dx^\sigma + \varepsilon\left(\frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\tau}\right) dx^\tau, \\ \Omega'^\sigma(x^\sigma + \varepsilon f^\sigma(x) \mid \alpha) &= \Omega^\sigma(x \mid \alpha) + \varepsilon\Omega^\tau(x \mid \alpha)\frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\tau}, \end{aligned}\right\} \tag{5,81}$$

откуда с точностью до членов, линейных в ε,

$$\Omega'^\sigma(\alpha) = \Omega^\sigma(\alpha) + \varepsilon\left(\Omega^\tau(\alpha)\frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\tau} - f^\tau\frac{\partial\Omega^\sigma}{\partial x^\tau}\right) \tag{5,82}$$

и, следовательно,

$$\delta_1\Omega^\sigma(\alpha) = \varepsilon\left(\Omega^\tau(\alpha)\frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\tau} - f^\tau\frac{\partial\Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau}\right). \tag{5,83}$$

II. Группа преобразований B.

Имеем:

$$\Omega'^\sigma(\alpha) = \{\delta(\alpha,\ \beta) + \varepsilon A(\alpha,\ \beta)\}\,\Omega^\sigma(\beta), \tag{5,84}$$

где $\|A(\alpha,\ \beta)\|$ — произвольная антисимметричная матрица.

Следовательно,

$$\delta_2\Omega^\sigma(\alpha) = \varepsilon A(\alpha,\ \beta)\,\Omega^\sigma(\beta). \tag{5,85}$$

Вычислим теперь вариацию интеграла (5,80)

$$\delta J = \int \left\{ \frac{\partial \Lambda L}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)} - \frac{\partial}{\partial x^\tau}\left(\frac{\partial \Lambda L}{\partial \left(\frac{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau}\right)} \right) \right\} \delta\Omega^\sigma(\alpha)\, dx =$$
$$= \int \Lambda\theta_\sigma(\alpha)\, \delta\Omega^\sigma(\alpha)\, dx, \tag{5,86}$$

где введено обозначение

$$\Lambda\theta_\sigma(\alpha) = \frac{\partial \Lambda L}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)} - \frac{\partial}{\partial x^\tau}\left(\frac{\partial \Lambda L}{\partial \left(\frac{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau}\right)} \right). \tag{5,87}$$

Если теперь в (5,86) подставить $\delta\Omega^\sigma(\alpha) = \delta_2\Omega^\sigma(\alpha)$ по формуле (5,85), то получается

$$0 = \varepsilon \int \Lambda\theta_\sigma(\alpha) A(\alpha, \beta)\, \Omega^\sigma(\beta)\, dx = \varepsilon \int \Lambda\theta(\alpha, \beta) A(\alpha, \beta)\, dx, \tag{5,88}$$

откуда, ввиду произвольности $A(\alpha, \beta)$, следует симметрия тензора $\theta(\alpha, \beta)$

$$\theta(\alpha, \beta) = \frac{\Omega^\sigma(\beta)}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda L}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)} - \frac{\Omega^\sigma(\beta)}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x^\tau}\left(\frac{\partial \Lambda L}{\partial \left(\frac{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau}\right)} \right). \tag{5,89}$$

Если теперь в (5,86) подставить $\delta\Omega^\sigma(\alpha) = \delta_1\Omega^\sigma(\alpha)$ по формуле (5,63), то получается

$$0 = \varepsilon \int \Lambda\theta_\sigma(\alpha) \left\{ \Omega^\tau(\alpha) \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\tau} - f^\tau \frac{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau} \right\} dx =$$
$$= -\varepsilon \int \Lambda f^\tau \left\{ \frac{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau} \theta_\sigma(\alpha) + \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda \Omega^\nu(\alpha)\, \theta_\tau(\alpha)}{\partial x^\nu} \right\} dx =$$
$$= -\varepsilon \int \Lambda f^\tau \left\{ \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda \theta_\tau^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau} \Omega^\nu(\alpha)\, \theta_{\sigma\nu} \right\} dx; \tag{5,90}$$

откуда вследствие симметрии тензора $\theta_{\sigma\nu}$ и произвольности функций f^τ следует:

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda \theta_\tau^\nu}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\sigma\nu}}{\partial x^\tau} \theta_{\sigma\nu} = \nabla_\nu \theta_\tau^\nu = 0. \tag{5,91}$$

Воспользовавшись формулой (5,37″), перепишем (5,91) в виде

$$\nabla(\beta)\,\theta(\alpha,\beta)=$$
$$=D(\beta)\,\theta(\alpha,\beta)-\Delta(\beta,\alpha,\tau)\,\theta(\tau,\beta)-\Delta(\beta,\beta\tau)\,\theta(\tau,\alpha)=0. \quad (5{,}91')$$

Рассмотрим важный частный случай, когда $\Omega^\sigma(\alpha)$ и $\frac{\partial\Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau}$ входят в функцию L только в комбинациях

$$\left.\begin{aligned} g^{\sigma\tau}&=\Omega^\sigma(\alpha)\,\Omega^\tau(\alpha);\\ \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\lambda}&=\frac{\partial\Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\lambda}\,\Omega^\tau(\alpha)+\Omega^\sigma(\alpha)\,\frac{\partial\Omega^\tau(\alpha)}{\partial x^\lambda}. \end{aligned}\right\} \quad (5{,}92)$$

В этом частном случае инвариантный интеграл может быть записан в виде

$$J=\int\Delta L\left(g^{\sigma\tau},\ \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\lambda}\right)dx \quad (5{,}93)$$

и его вариация в виде

$$\delta J=\int\left\{\frac{\partial\Delta L}{\partial g^{\sigma\tau}}-\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial\Delta L}{\partial\left(\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\lambda}\right)}\right)\right\}\delta g^{\sigma\tau}\,dx=$$
$$=2\int\left\{\frac{\partial\Delta L}{\partial g^{\sigma\tau}}-\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial\Delta L}{\partial\left(\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\lambda}\right)}\right)\right\}\Omega^\tau(\alpha)\,\delta\Omega^\sigma(\alpha)\,dx. \quad (5{,}94)$$

Сравнивая с общей формулой (5,86), найдем:

$$\Delta\theta_\sigma(\alpha)=2\left\{\frac{\partial\Delta L}{\partial g^{\sigma\tau}}-\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial\Delta L}{\partial\left(\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\lambda}\right)}\right)\right\}\Omega^\tau(\alpha), \quad (5{,}95)$$

откуда в результате умножения на $\Omega_\nu(\alpha)$ получаем:

$$\frac{1}{2}\Delta\theta_{\sigma\tau}=\frac{\partial\Delta L}{\partial g^{\sigma\tau}}-\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial\Delta L}{\partial\left(\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\lambda}\right)}\right). \quad (5{,}96)$$

Симметричность тензора $\theta_{\sigma\tau}$ очевидна из вывода. Если теперь в (5,94) подставить $\delta\Omega^\sigma(\alpha)=\delta_1\Omega^\sigma(\alpha)$ по формуле (5,83), то получается

$$0=\varepsilon\int\Delta\theta_{\sigma\tau}\Omega^\tau(\alpha)\left\{\Omega^\nu(\alpha)\frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\nu}-f^\nu\frac{\partial\Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\nu}\right\}dx=$$
$$=-\varepsilon\int\Delta f^\sigma\left\{\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta\theta^\nu_\sigma}{\partial x^\nu}+\frac{1}{2}\theta_{\tau\nu}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x^\sigma}\right\}dx, \quad (5{,}97)$$

откуда опять следует $\nabla_\nu\theta^\nu_\sigma=0$.

Рассмотренный частный случай был положен Гильбертом в основу выводов законов сохранения в теории тяготения. Следуя Гильберту, мы в следующей главе, при выводе законов сохранения для тензорных полей, будем исходить из инвариантных интегралов типа (5,93), а при выводе законов сохранения для спинорных полей — из инвариантных интегралов более общего типа (5,80).

В заключение в качестве примера рассмотрим инвариантный интеграл

$$J = \int \Delta \Omega^{\sigma}(\alpha)\, \Omega^{\tau}(\beta)\, R_{\sigma\tau}(\alpha, \beta)\, dx, \tag{5,98}$$

где $R_{\sigma\tau}(\alpha, \beta)$ — тензор Римана по формуле (5,32).

Имеем:

$$\delta J = \int \delta \Delta R\, dx + 2 \int \Delta R_{\sigma}(\alpha)\, \delta \Omega^{\sigma}(\alpha)\, dx + \\ + \int \Delta \Omega^{\sigma}(\alpha)\, \Omega^{\tau}(\beta)\, \delta R_{\sigma\tau}(\alpha, \beta)\, dx, \tag{5,99}$$

где введены обозначения

$$R_{\sigma}(\alpha) = \Omega^{\tau}(\beta)\, R_{\sigma\tau}(\alpha, \beta); \quad R = \Omega^{\sigma}(\alpha)\, \Omega^{\tau}(\beta)\, R_{\sigma\tau}(\alpha, \beta).$$

Для вычисления последнего интеграла пользуемся известным искусственным приемом ([12], § 94). Замечаем, что $\delta\Delta_{\alpha}(\alpha, \beta)$ есть тензор и выбираем систему координат, в которой в данной точке все $\frac{\partial \Omega^{\sigma}(\alpha)}{\partial x^{\tau}}$ равны нулю. Имеем:

$$\Omega^{\sigma}(\alpha)\, \Omega^{\tau}(\beta)\, \delta R_{\sigma\tau}(\alpha, \beta) = 2 \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{\Omega^{\sigma}(\alpha)\, \Omega^{\tau}(\beta)\, \delta \Delta_{\tau}(\alpha, \beta)\right\}.$$

В произвольной системе координат имеем:

$$\Omega^{\sigma}(\alpha)\, \Omega^{\tau}(\beta)\, \delta R_{\sigma\tau}(\alpha, \beta) = \frac{2}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{\Delta \Omega^{\sigma}(\alpha)\, \Omega^{\tau}(\beta)\, \delta \Delta_{\tau}(\alpha, \beta)\right\}.$$

Поэтому последний интеграл в (5,99) может быть преобразован в поверхностный и исчезает.

Замечая, что

$$\delta \Delta = \Delta \Omega^{\sigma}(\alpha)\, \delta \Omega_{\sigma}(\alpha) = -\Delta \Omega_{\sigma}(\alpha)\, \delta \Omega^{\sigma}(\alpha), \tag{5,100}$$

получаем:

$$\delta J = \delta \int \Delta R\, dx = 2 \int \Delta \left(R_{\sigma}(\alpha) - \frac{1}{2} \Omega_{\sigma}(\alpha)\, R\right) \delta \Omega^{\sigma}(\alpha)\, dx. \tag{5,101}$$

Если подставить специально $\delta_2\Omega^\sigma(\alpha)$ по формуле (5,85), то получится

$$0 = 2\varepsilon \int \Lambda\Big(R_\sigma(\alpha) - \frac{1}{2}\Omega_\sigma(\alpha) R\Big) A(\alpha, \beta)\, \Omega^\sigma(\beta)\, dx, \qquad (5{,}102)$$

откуда следует симметрия тензора $R(\alpha, \beta)$.

Если подставить специально $\delta_1\Omega^\sigma(\alpha)$ по формуле (5,83), то получается

$$0 = 2\varepsilon \int \Lambda\Big(R_\sigma(\alpha) - \frac{1}{2}\Omega_\sigma(\alpha) R\Big)\Big(\Omega^\tau(\alpha)\frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\tau} - f^\tau \frac{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau}\Big) dx. \qquad (5{,}103)$$

Проделав те же выкладки, что и при выводе (5,90), получим:

$$\nabla(\tau)\Big(R(\sigma, \tau) - \frac{1}{2}\delta(\sigma, \tau) R\Big) = 0. \qquad (5{,}104)$$

Проведенное исследование показывает, что первичными геометрическими образами, определяющими метрику в пространстве Римана, являются элементы метрической матрицы Ламэ, в то время как составляющие метрического тензора g_{ik} являются производными квадратичными образованиями. Пока мы имеем дело с обычными тензорами, которые являются спинтензорами *четного* ранга, мы можем пользоваться обычным мероопределением. Но как только мы переходим к спинтензорам *нечетного* ранга, мы обязаны вернуться к исходному мероопределению Ламэ.

ГЛАВА VI

ВОЛНОВАЯ 5-ОПТИКА В ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА

Введение

Приступая к изложению волновой 5-оптики в пространстве Римана, мы должны были бы последовательно учитывать периодическую зависимость составляющих метрического $G_{\mu\nu}$-поля от координаты действия.

Однако в рамках настоящей монографии мы этого делать не будем и примем, как это и делается в современной квантовой механике, что составляющие $G_{\mu\nu}$-метрического поля не зависят от пятой координаты действия, т. е. удовлетворяют условию цилиндричности.

Учет этой зависимости составляет предмет дальнейших исследований. Дело, очевидно, идет о новом, специфическом 5-оптическом эффекте перехода элементарных частиц (тензорных и спинорных) из одного зарядового состояния в другое с испусканием или поглощением тяжелого заряженного кванта метрического поля — метрона.

Как уже сказано, мы эти эффекты здесь рассматривать не будем, и ограничимся рассмотрением лишь того частного случая, когда метрическое $G_{\mu\nu}$-поле является чисто-электромагнитным, т. е. случая, который в современной квантовой механике только и рассматривается.

§ 39. Вывод общих формул теории тензорных и спинорных полей

В случае тензорного поля $W^{(r)}$ мы можем получить все основные формулы теории поля из инвариантного интеграла Лагранжа

$$\int \Delta L\left(W^{(r)}, \frac{\partial W^{(r)}}{\partial x^{\sigma}} \middle| G^{\sigma\tau}, \frac{\partial G^{\sigma\tau}}{\partial x^{\lambda}}\right) dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4\, dx^5. \quad (6,1)$$

Варьируя по составляющим поля $W^{(r)}$ при постоянных $G^{\sigma\tau}$, получим уравнения поля в общековариантной форме

$$\frac{\partial \Lambda L}{\partial W^{(r)}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial \Lambda L}{\partial \left(\frac{\partial W^{(r)}}{\partial x^{\sigma}} \right)} \right) = 0. \tag{6,2}$$

Варьируя по метрическим потенциалам $G^{\sigma\tau}$, получаем выражение для симметричного 5-тензора энергии, импульса и заряда $\theta_{\sigma\tau}$

$$\frac{1}{2} \Lambda \theta_{\sigma\tau} = \frac{\partial \Lambda L}{\partial G^{\sigma\tau}} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Lambda L}{\partial \left(\frac{\partial G^{\sigma\tau}}{\partial x^{\lambda}} \right)} \right) \tag{6,3}$$

или, принимая во внимание $\dfrac{\partial \Lambda}{\partial G^{\sigma\tau}} = -\dfrac{1}{2} \Lambda G_{\sigma\tau}$,

$$\frac{1}{2} \theta_{\sigma\tau} = \frac{\partial L}{\partial G^{\sigma\tau}} - \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Lambda L}{\partial \left(\frac{\partial G^{\sigma\tau}}{\partial x^{\lambda}} \right)} \right) - \frac{1}{2} G_{\sigma\tau} L. \tag{6,3'}$$

По доказанному в § 36 для него имеет место

$$\nabla_{\tau} \theta_{\sigma}^{\tau} = 0. \tag{6,4}$$

В случае комплексного спинорного поля W, $\tilde{W}$ мы можем получить все основные формулы теории поля из инвариантного интеграла Лагранжа,

$$\int \Lambda L \left(W,\ \tilde{W},\ \frac{\partial W}{\partial x^{\sigma}},\ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x^{\sigma}} \middle| \Omega^{\sigma}(\alpha),\ \frac{\partial \Omega^{\sigma}(\alpha)}{\partial x^{\tau}} \right) dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4\, dx^5. \tag{6,5}$$

Варьируя по составляющим поля $\tilde{W}$ и W при постоянных $\Omega^{\sigma}(\alpha)$, получаем уравнения спинорного поля в общековариантном виде

$$\frac{\partial \Lambda L}{\partial \tilde{W}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial \Lambda L}{\partial \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x^{\sigma}} \right)} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial \Lambda L}{\partial W} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial \Lambda L}{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial x^{\sigma}} \right)} \right) = 0. \tag{6,6}$$

Варьируя по метрическим потенциалам $\Omega^\sigma(\alpha)$, мы получим выражение для симметричного тензора $\theta(\alpha, \beta)$ энергии, импульса и заряда по формуле

$$\Lambda\theta(\alpha, \beta) = \Omega^\sigma(\beta)\frac{\partial \Lambda L}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)} - \Omega^\sigma(\beta)\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \Lambda L}{\partial\left(\frac{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\lambda}\right)}\right) \tag{6,7}$$

или, принимая во внимание $\frac{\partial \Lambda}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)} = -\Lambda\Omega_\sigma(\alpha)$,

$$\theta(\alpha, \beta) = \Omega^\sigma(\beta)\frac{\partial L}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)} - \\ - \frac{\Omega^\sigma(\beta)}{\Lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \Lambda L}{\partial\left(\frac{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\lambda}\right)}\right) - \delta(\alpha, \beta)L. \tag{6,8}$$

По доказанному в § 36 тензор $\theta(\alpha, \beta)$ симметричен и удовлетворяет уравнениям

$$\nabla(\beta)\theta(\alpha, \beta) = 0. \tag{6,9}$$

В приложениях представит интерес рассмотреть более общий, чем (6,5), инвариантный интеграл Лагранжа

$$\int \Lambda L\left(\ldots \mid \Omega^\sigma(\alpha),\ \Omega_\tau(\alpha),\ \frac{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau}\right) dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4\, dx^5, \tag{6,5}$$

где все $\Omega_\tau(\gamma)$ должны рассматриваться как функции от $\Omega^\sigma(\alpha)$. Имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)} = \left(\frac{\partial L}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}\right) + \frac{\partial L}{\partial \Omega_\tau(\gamma)} \cdot \frac{\partial \Omega_\tau(\gamma)}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}, \tag{6,10}$$

где скобки указывают, что производная берется при постоянном $\Omega_\tau(\gamma)$.

Но из $\Omega^\sigma(\alpha)\,\delta\Omega_\tau(\alpha) = -\Omega_\tau(\alpha)\,\delta\Omega^\sigma(\alpha)$ следует в результате умножения на $\Omega_\sigma(\gamma)$

$$\delta\Omega_\tau(\gamma) = -\Omega_\tau(\alpha)\,\Omega_\sigma(\gamma)\,\delta\Omega^\sigma(\alpha);$$

$$\frac{\partial \Omega_\tau(\gamma)}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)} = -\Omega_\tau(\alpha)\,\Omega_\sigma(\gamma). \tag{6,11}$$

Подставляя (6,11) в (6,10), получаем:

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)} = \left(\frac{\partial L}{\partial \Omega^\sigma(\alpha)}\right) - \frac{\partial L}{\partial \Omega_\tau(\gamma)}\,\Omega_\tau(\alpha)\,\Omega_\sigma(\gamma). \tag{6,12}$$

Подставляя (6,12) в (6,8), получаем:

$$\theta(\alpha,\ \beta)=\Omega^{\sigma}(\beta)\left(\frac{\partial L}{\partial\Omega^{\sigma}(\alpha)}\right)-\Omega_{\tau}(\alpha)\frac{\partial L}{\partial\Omega_{\tau}(\beta)}-$$

$$-\frac{\Omega^{\sigma}(\beta)}{\Lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial\Lambda L}{\partial\left(\frac{\partial\Omega^{\sigma}(\alpha)}{\partial x^{\lambda}}\right)}\right)-\delta(\alpha,\ \beta)L. \qquad (6,8')$$

Раскроем теперь физический смысл уравнений (6,4) и (6,9), которые можно по формуле (5,36″) написать в виде

$$D(\tau)\theta(\alpha,\ \tau)-\Delta(\tau,\ \alpha\varepsilon)\theta(\varepsilon,\ \tau)-\Delta(\tau,\ \tau\varepsilon)\theta(\alpha,\ \varepsilon)=0. \qquad (6,13)$$

Для этого рассмотрим частный случай, когда внешнее $G_{\mu\nu}$-поле является чисто-электромагнитным и его зависимостью от x^5 можно пренебречь.

По общим формулам (5,72) мы переписываем уравнение (6,13) для этого частного случая в виде

$$\left.\begin{aligned}&D(n)\theta(k,\ n)+D(5)\theta(k,\ 5)+f(k,\ n)\theta(5,\ n)=0,\\&D(n)\theta(5,\ n)+D(5)\theta(5,\ 5)\qquad\qquad\qquad\quad =0.\end{aligned}\right\}\qquad(6,14)$$

Усредняя по координате действия, получаем:

$$\frac{\partial\bar\theta(k,\ n)}{\partial x^{n}}+f(k,\ n)\bar\theta(5,\ n)=0, \qquad (6,15)$$

$$\frac{\partial\bar\theta(5,\ n)}{\partial x^{n}}=0. \qquad (6,16)$$

Уравнение (6,15) выражает закон сохранения энергии и импульса в присутствии внешнего электромагнитного поля, не зависящего от x^5, а уравнение (6,16) — закон сохранения для электрического тока. Следовательно, уравнение (6,13) выражает законы сохранения энергии, импульса и заряда в самом общем случае $G_{\mu\nu}$-поля.

§ 40. Действительное тензорное поле в 5-пространстве Римана

В главе IV мы установили полные системы уравнений для мезонных полей при наличии источников поля. Записанные в общековариантном виде они гласят:

1. Скалярные мезоны

$$\frac{\partial\Lambda W^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}}=\Lambda Q; \qquad \frac{\partial W_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial W_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}=0. \qquad (6,17)$$

2. Векторные мезоны

$$\frac{\partial \Lambda W^{\lambda\mu}}{\partial x^{\mu}} = \Lambda Q^{\lambda}; \quad \frac{\partial W_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial W_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial W_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0. \qquad (6,18)$$

3. Псевдовекторные мезоны

$$\frac{\partial \Lambda W^{\lambda\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda Q^{\lambda\mu};$$

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial W_{\mu\nu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial W_{\nu\sigma\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial W_{\sigma\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \qquad (6,19)$$

4. Псевдоскалярные мезоны

$$\frac{\partial \Lambda W^{\lambda\mu\nu\sigma}}{\partial x^{\sigma}} = \Lambda Q^{\lambda\mu\nu};$$

$$\frac{\partial W_{\lambda\mu\nu\sigma}}{\partial x^{\tau}} + \frac{\partial W_{\mu\nu\sigma\tau}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial W_{\nu\sigma\tau\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial W_{\sigma\tau\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial W_{\tau\lambda\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} = 0. \qquad (6,20)$$

Здесь $W_{\lambda\mu}$, $W_{\lambda\mu\nu}$, $W_{\lambda\mu\nu\sigma}$, $Q^{\lambda\mu}$ и $Q^{\lambda\mu\nu}$ — антисимметричные по всем индексам тензоры. Структура уравнений для всех мезонных полей одинакова: первые группы уравнений устанавливают, что расходимость тензора напряженности поля равна тензору плотности источников поля; вторые группы уравнений устанавливают, что ротор напряженности поля во всех четырех случаях равен нулю.

Пользуясь изложенными в § 37 правилами, мы можем записать эти же уравнения при помощи символики инвариантного дифференцирования.

1. Скалярные мезоны

$$\left.\begin{aligned} D(i)\,W(i) + D(5)\,W(5) &= Q, \\ D(i)\,W(k) - D(k)\,W(i) + f(i,\,k)\,W(5) &= 0, \\ D(5)\,W(i)\quad D(i)\,W(5) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6,17')$$

2. Векторные мезоны

$$\left.\begin{aligned} D(i)\,W(k,\,i) + D(5)\,W(k,\,5) &= Q(k), \\ D(i)\,W(5,\,i) - \frac{1}{2}f(i,\,k)\,W(k,\,i) &= Q(5), \\ D(i)\,W(k,\,l) + D(k)\,W(l,\,i) + D(l)\,W(i,\,k) &+ \\ + f(i,\,k)\,W(5,\,l) + f(k,\,l)\,W(5,\,i) &+ \\ + f(l,\,i)\,W(5,\,k) &= 0, \\ D(5)\,W(i,\,k) + D(i)\,W(k,\,5) + D(k)\,W(5,\,i) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6,18')$$

3. Псевдовекторные мезоны

$$\left.\begin{aligned} D(i)\,W(k,\ l,\ i)+D(5)\,W(k,\ l,\ 5)&=Q(k,\ l),\\ D(i)\,W(5,\ l,\ i)-\frac{1}{2}f(i,\ k)\,W(k,\ l,\ i)&=Q(5,\ l), \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &D(i)\,W(k,\ l,\ m)-D(k)\,W(l,\ m,\ i)+\\ &\quad+D(l)\,W(m,\ i,\ k)-D(m)\,W(i,\ k,\ l)+\\ &\quad+f(i,\ k)\,W(5,\ l,\ m)-f(k,\ l)\,W(5,\ m,\ i)+\\ &\quad+f(l,\ m)\,W(5,\ i,\ k)-f(m,\ i)\,W(5,\ k,\ l)=0,\\ &D(5)\,W(i,\ k,\ l)-D(i)\,W(k,\ l,\ 5)+\\ &\qquad+D(k)\,W(l,\ 5,\ i)-D(l)\,W(5,\ i,\ k)=0. \end{aligned}\right\} \quad (6{,}19')$$

4. Псевдоскалярные мезоны

$$\left.\begin{aligned} &D(i)\,W(k,\ l,\ m,\ i)+D(5)\,W(k,\ l,\ m,\ 5)=\\ &\qquad\qquad=Q(k,\ l,\ m),\\ &D(i)\,W(5,\ l,\ m,\ i)-\frac{1}{2}f(i,\ k)\,W(k,\ l,\ m,\ i)=\\ &\qquad\qquad=Q(5,\ l,\ m),\\ &D(i)\,W(k,\ l,\ m,\ n)+D(k)\,W(l,\ m,\ n,\ i)+\\ &\quad+D(l)\,W(m,\ n,\ i,\ k)+D(m)\,W(n,\ i,\ k,\ l)+\\ &\quad+D(n)\,W(i,\ k,\ l,\ m)+f(i,\ k)\,W(5,\ l,\ m,\ n)+\\ &\quad+f(k,\ l)\,W(5,\ m,\ n,\ i)+f(l,\ m)\,W(5,\ n,\ i,\ k)+\\ &\quad+f(m,\ n)\,W(5,\ i,\ k,\ l)+\\ &\qquad\qquad+f(n,\ i)\,W(5,\ k,\ l,\ m)=0,\\ &D(5)\,W(k,\ l,\ m,\ n)+D(k)\,W(l,\ m,\ n,\ 5)+\\ &\quad+D(l)\,W(m,\ n,\ 5,\ k)+D(m)\,W(n,\ 5,\ k,\ l)+\\ &\qquad\qquad+D(n)\,W(5,\ k,\ l,\ m)=0. \end{aligned}\right\} \quad (6{,}20')$$

Поскольку мы пренебрегаем учетом периодической зависимости составляющих электромагнитного поля от координаты действия, переходы мезонов из одного зарядового состояния в другое запрещены. Поэтому является последовательным наложить на составляющие поля условие цикличности

$$\left.\begin{aligned} W(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) &= U(x^1, x^2, x^3, x^4)\exp(i\mu x^5), \\ Q(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) &= q(x^1, x^2, x^3, x^4)\exp(i\mu x^5) \end{aligned}\right\} \tag{6,21}$$

и переписать уравнения в компонентах Фурье.

Если операторы D-дифференцирования действуют на составляющие Фурье, то в них следует заменить $\frac{\partial}{\partial x^5}$ на $i\mu$. Имеем:

$$D(k) = \frac{\partial}{\partial x^k} - i\mu g_k; \qquad D(5) = i\mu, \tag{6,22}$$

и уравнения для мезонных полей принимают следующий вид:

1. Скалярные мезоны

$$\left.\begin{aligned} D(i)U(i) + i\mu U(5) &= q, \\ D(i)U(k) - D(k)U(i) + f(i, k)U(5) &= 0, \\ i\mu U(i) - D(i)U(5) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6,17''}$$

2. Векторные мезоны

$$\left.\begin{aligned} &D(i)U(k, i) + i\mu U(k, 5) = q(k), \\ &D(i)U(5, i) - \frac{1}{2}f(i, k)U(k, i) = q(5), \\ &D(i)U(k, l) + D(k)U(l, i) + \\ &\quad + D(l)U(i, k) + f(i, k)U(5, l) + \\ &\quad\quad + f(k, l)U(5, i) + f(l, i)U(5, k) = 0, \\ &i\mu U(i, k) + D(i)U(k, 5) + D(k)U(5, i) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6,18''}$$

3. Псевдовекторные мезоны

$$\left.\begin{aligned} &D(i)U(k, l, i) + i\mu U(k, l, 5) = q(k, l), \\ &D(i)U(5, l, i) - \frac{1}{2}f(i, k)U(k, l, i) = q(5, l), \\ &D(i)U(k, l, m) - D(k)U(l, m, i) + \\ &\quad + D(l)U(m, i, k) - D(m)U(i, k, l) + \\ &\quad + f(i, k)U(5, l, m) - f(k, l)U(5, m, i) + \\ &\quad + f(l, m)U(5, i, k) - f(m, i)U(5, k, l) = 0, \\ &i\mu U(i, k, l) - D(i)U(k, l, 5) + \\ &\quad\quad + D(k)U(l, 5, i) - D(l)U(5, i, k) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6,19''}$$

4. Псевдоскалярные мезоны

$$\left.\begin{aligned}
&D(i)U(k, l, m, i)+i\mu U(k, l, m, 5)=q(k, l, m),\\
&D(i)U(5, l, m, i)-\frac{1}{2}f(i, k)U(k, l, m, i)\doteq\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad=q(5, l, m),\\
&D(i)U(k, l, m, n)+D(k)U(l, m, n, i)+\\
&+D(l)U(m, n, i, k)+D(m)U(n, i, k, l)+\\
&+D(n)U(i, k, l, m)+f(i, k)U(5, l, m, n)+\\
&+f(k, l)U(5, m, n, i)+f(l, m)U(5, n, i, k)+\\
&+f(m, n)U(5, i, k, l)+f(n, i)U(5, k, l, m)=0,\\
&i\mu U(k, l, m, n)+D(k)U(l, m, n, 5)+\\
&\quad+D(l)U(m, n, 5, k)+D(m)U(n, 5, k, l)+\\
&\qquad\qquad\qquad+D(n)U(5, k, l, m)=0.
\end{aligned}\right\}\quad(6{,}20'')$$

В том случае, если рассматриваемые мезонные поля чисто-волновые, т. е. источники поля отсутствуют, мы можем, перегруппировав уравнения и изменив обозначения

1) скалярные мезоны $U(5)\to i\mu U$,

2) векторные мезоны $U(5, k)\to i\mu U(k)$,

3) псевдовекторные мезоны $i\mu U(k, l, 5)\to U(l, k)$

4) псевдоскалярные мезоны $i\mu U(k, l, m, 5)\to U(k, l, m)$, записать системы для четырех сортов мезонов в следующем виде.

1. Скалярные мезоны

$$\left.\begin{aligned}
&D(i)U(i)-\mu^2U=0,\\
&U(i)=D(i)U,
\end{aligned}\right\}\qquad(A)$$

$$D(i)U(k)-D(k)U(i)+i\mu f(i, k)=0.\qquad(B)$$

2. Векторные мезоны

$$\left.\begin{aligned}
&D(i)U(k, i)=\mu^2U(k)=0,\\
&U(i, k)=D(i)U(k)-D(k)U(i),
\end{aligned}\right\}\qquad(A)$$

$$\left.\begin{aligned}
&D(i)U(k, l)+D(k)U(l, i)+D(l)U(i, k)+\\
&+i\mu\{f(i, k)U(l)+f(k, l)U(i)+f(l, i)U(k)\}=0,\\
&\qquad\mu^2D(i)U(i)+\frac{i\mu}{2}f(i, k)U(k, i)=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(B)$$

3. Псевдовекторные мезоны

$$\left.\begin{aligned} D(i)U(k,l,i)-U(k,l)=0,\\ D(i)U(k,l)+D(k)U(l,i)+D(l)U(i,k)-\mu^2U(i,k,l)=0,\end{aligned}\right\}(A)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu^2\{D(m)U(i,k,l)-D(i)U(k,l,m)+D(k)U(l,m,i)-\\ &-D(l)U(m,i,k)\}+i\mu\{f(i,k)U(l,m)-f(k,l)U(m,i)+\\ &\qquad+f(l,m)U(i,k)-f(m,i)U(k,l)\}=0,\\ &D(i)U(l,i)-\frac{1}{2}i\mu f(i,k)U(k,l,i)=0.\end{aligned}\right\}(B)$$

4. Псевдоскалярные мезоны

$$\left.\begin{aligned} &D(i)U(k,l,m,i)-U(k,l,m)=0,\\ &D(i)U(k,l,m)-D(k)U(l,m,i)+D(l)U(m,i,k)-\\ &\qquad-D(m)U(i,k,l)-\mu^2U(i,k,l,m)=0,\end{aligned}\right\}\quad(A)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu^2\{D(n)U(i,k,l,m)+D(i)U(k,l,m,n)+\\ &+D(n)U(l,m,n,i)+D(l)U(m,n,i,k)+\\ &+D(m)U(n,i,k,l)\}+i\mu\{f(i,k)U(l,m,n)+\\ &+f(k,l)U(m,n,i)+f(l,m)U(n,i,k)+\\ &+f(m,n)U(i,k,l)+f(n,i)U(k,l,m)\}=0,\\ &D(m)U(k,l,m)-\frac{1}{2}i\mu f(i,m)U(k,l,m,i)=0.\end{aligned}\right\}\quad(B)$$

Группа уравнений (A) для каждого сорта мезонов приводится обычно в литературе (см., например, [13]) как волновые уравнения для мезонов. Если исключить из рассмотрения случай $\mu=0$, то группа уравнений (B) является следствием из уравнений группы (A). В самом деле, подействуем оператором D (.) (точка означает один из индексов 1, 2, 3, 4) на второе уравнение группы (A). После альтернирования получаем, приняв во внимание (5,67), первое уравнение группы (B). Подействуем оператором D (.) на первое уравнение группы (A). После свертывания получаем, приняв во внимание (5,67), второе уравнение группы (B).

Для пояснения приведем пример из электродинамики. Запишем систему волновых уравнений для фотона частоты ω

$$\operatorname{rot} H-\frac{i\omega}{c}E=0;\quad \operatorname{rot} E+\frac{i\omega}{c}H=0. \qquad (A)$$

Если исключить из рассмотрения случай $\omega = 0$, то из (A), как следствие, вытекает система уравнений

$$\operatorname{div} H = 0; \quad \operatorname{div} E = 0. \tag{B}$$

Если обратиться к общему случаю электромагнитного поля при наличии источников, то обе системы (A) и (B) объединяются в одну полную систему уравнений Максвелла

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} H - \frac{i\omega}{c} E = \frac{4\pi}{c} j; \quad \operatorname{div} E = 4\pi\rho, \\ &\operatorname{rot} E + \frac{i\omega}{c} H = 0; \qquad \operatorname{div} H = 0, \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

где теперь ω означает оператор $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$.

Мы видим, что 5-оптика дает строгое обоснование правилу, согласно которому учет внешнего электромагнитного поля достигается заменой операторов $\frac{\partial}{\partial x^k}$ на операторы $\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{ie}{\hbar c} A_k$. Если ограничиться только рассмотрением волновых полей для мезонов, то это правило подтверждается (уравнения группы (A)); если же перейти к рассмотрению полной системы уравнений для мезонных полей с источниками, то это правило нарушается, поскольку в уравнениях группы (B) появляются члены, содержащие $f(i, k)$. Иначе обстоит дело, если мы от рассмотрения тензорных полей перейдем к рассмотрению спинорных полей.

§ 41. Комплексное спинорное поле в 5-пространстве Римана

Уравнения спинорного поля и выражение для 5-тензора энергии, импульса и заряда мы получим по общим формулам § 37 из инвариантного интеграла Лагранжа

$$\frac{1}{2}\int \Delta \left\{ \tilde{W}\Omega^\sigma(\alpha)\mu(\alpha)\left(\frac{\partial W}{\partial x^\sigma} - B_\sigma W\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x^\sigma} + B_\sigma \tilde{W}\right)\Omega^\sigma(\alpha)\mu(\alpha) W \right\} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 dx^5. \tag{6,23}$$

Пользуясь формулой (6,33) дополнения, мы можем записать инвариантную функцию Лагранжа в виде

$$L=\frac{1}{2}\Omega^{\sigma}(\sigma)\left\{\tilde{W}\mu(\alpha)\frac{\partial W}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x^{\sigma}}\mu(\alpha)W\right\}+$$
$$+\frac{1}{4}\frac{\partial\Omega^{\tau}(\gamma)}{\partial x^{\sigma}}\Omega_{\tau}(\rho)\Omega^{\sigma}(\alpha)K(\rho,\gamma,\alpha),\Big), \tag{6,24}$$

где $K(\rho, \gamma, \alpha)$ — тензор, определенный формулой (5,79).

По формулам (6,6) получаем уравнения спинорного поля в виде

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda\Omega^{\sigma}(\alpha)\mu(\alpha)\frac{\partial W}{\partial x^{\sigma}}+\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(\Lambda\Omega^{\sigma}(\alpha)\mu(\alpha)W)-\\&\qquad-\Lambda\big(\mu(\alpha)B(\alpha)+B(\alpha)\mu(\alpha)\big)W=0,\\&\Lambda\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x^{\sigma}}\Omega^{\sigma}(\alpha)\mu(\alpha)+\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\big(\Lambda\tilde{W}\Omega^{\sigma}(\alpha)\mu(\alpha)\big)+\\&\qquad+\Lambda\tilde{W}\big(\mu(\alpha)B(\alpha)+B(\alpha)\mu(\alpha)\big)=0.\end{aligned}\right\} \tag{6,25}$$

Принимая во внимание формулу (6,32) дополнения, мы можем переписать уравнения (6,25) в виде

$$\Omega^{\sigma}(\alpha)\mu(\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}-B_{\sigma}\right)W=0;\quad \Omega^{\sigma}(\alpha)\left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x^{\sigma}}+WB_{\sigma}\right)\mu(\alpha)=0. \tag{6,25'}$$

Для вывода выражения для симметричного 5-тензора $\theta(\alpha,\beta)$ мы воспользуемся общей формулой (6,5′) инвариантного интеграла и вычисления проведем по формуле (6,8′).

Имеем

$$\Omega^{\sigma}(\beta)\left(\frac{\partial L}{\partial\Omega^{\sigma}(\alpha)}\right)-\Omega_{\tau}(\alpha)\frac{\partial L}{\partial\Omega_{\tau}(\beta)}=$$
$$=\frac{1}{2}\Omega^{\sigma}(\beta)\left\{\tilde{W}\mu(\alpha)\frac{\partial W}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x^{\sigma}}\mu(\alpha)W\right\}+$$
$$+\frac{1}{4}\frac{\partial\Omega^{\tau}(\gamma)}{\partial x^{\sigma}}\Omega_{\tau}(\rho)\Omega^{\sigma}(\beta)K(\rho,\gamma,\alpha)-$$
$$-\frac{1}{4}\frac{\partial\Omega^{\tau}(\gamma)}{\partial x^{\sigma}}\Omega^{\sigma}(\rho)\Omega_{\tau}(\alpha)K(\gamma,\rho,\beta),$$

$$\frac{\Omega^{\sigma}(\beta)}{\Lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}\left(\frac{\partial\Lambda L}{\partial\left(\dfrac{\partial\Omega^{\sigma}(\alpha)}{\partial x^{\tau}}\right)}\right)=$$
$$=\frac{1}{4\Lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}\big(\Lambda K^{\tau}(\beta,\alpha)\big)-\frac{1}{4}\frac{\partial\Omega^{\tau}(\beta)}{\partial x^{\sigma}}\Omega_{\tau}(\rho)\Omega^{\sigma}(\gamma)K(\rho,\alpha,\gamma).$$

Исключая из этих выражений производные $\frac{\partial \Omega^{\tau}(\gamma)}{\partial x^{\sigma}}$ и $\frac{\partial \Lambda K^{\tau}(\alpha, \beta)}{\partial x^{\tau}}$ при помощи формул

$$\frac{\partial \Omega^{\tau}(\gamma)}{\partial x^{\sigma}} + G^{\tau}_{\sigma\lambda}\Omega^{\lambda}(\gamma) - \Delta_{\sigma}(\gamma, \varepsilon)\,\Omega^{\tau}(\varepsilon) = 0,$$

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial \Lambda K^{\tau}(\beta, \alpha)}{\partial x^{\tau}} - \Delta(\gamma, \beta, \rho) K(\gamma, \rho, \alpha) - \\ - \Delta(\gamma, \alpha, \rho) K(\gamma, \beta, \rho) = \nabla_{\tau} K^{\tau}(\beta, \alpha),$$

вытекающих из формул ковариантного дифференцирования, и принимая во внимание антисимметрию тензора $K(\gamma, \beta, \rho)$, получим по формуле (6,8′)

$$\theta(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\Omega^{\sigma}(\beta)\left(\widetilde{W}\mu(\alpha)\frac{\partial W}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x^{\sigma}}\mu(\alpha) W\right) - \\ - \frac{1}{4}\Delta(\beta, \rho, \gamma) K(\alpha, \rho, \gamma) - \frac{1}{4}\nabla_{\tau} K^{\tau}(\beta, \alpha) - \delta(\alpha, \beta) L. \quad (6,26)$$

Принимая во внимание формулу (6,33) дополнения, переписываем (6,26) окончательно в виде

$$\theta(\alpha, \beta) = \\ = \frac{1}{2}\Omega^{\sigma}(\beta)\left\{\widetilde{W}\mu(\alpha)\left(\frac{\partial W}{\partial x^{\sigma}} - B_{\sigma} W\right) - \left(\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x^{\sigma}} + B_{\sigma}\widetilde{W}\right)\mu(\alpha) W\right\} - \\ - \frac{1}{4}\nabla_{\tau} K^{\tau}(\beta, \alpha) - \delta(\alpha, \beta) L. \quad (6,26')$$

В пространстве Минковского выражение (6,26′) переходит в выражение (4,143) § 30.

Мы получили выражение для $\theta(\alpha, \beta)$ в случае спинорного поля, исходя из инвариантного интеграла Лагранжа, минуя канонический формализм.

Принимая во внимание, что для функций W и $\widetilde{W}$, удовлетворяющих уравнениям поля, функция Лагранжа обращается в нуль и, используя формализм инвариантного дифференцирования, мы можем переписать уравнения поля (6,25) в виде

$$\left.\begin{aligned} &\mu(\alpha)\big(D(\alpha) - B(\alpha)\big) W = 0, \\ &\{D(\alpha)\widetilde{W} + \widetilde{W}B(\alpha)\}\,\mu(\alpha) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6,25'')$$

и тензор энергии — импульса — заряда $\theta(\alpha, \beta)$ в виде

$$\theta(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\left\{ \tilde{W}\mu(\alpha)\big(D(\beta) - B(\beta)\big)W - \right.$$
$$\left. - \big(D(\beta)\tilde{W} - \tilde{W}B(\beta)\big)\mu(\alpha)W\right\} - \frac{1}{4}\nabla(\tau)K(\tau, \alpha, \beta). \quad (6,26'')$$

Рассмотрим теперь частный случай чисто-электромагнитного поля, не зависящего от x^5. По формулам § 37 (5,78) получаем

уравнения поля:

$$\left.\begin{aligned} &\Big\{\mu(k)D(k) + \mu(5)D(5) + \\ &\qquad + \frac{1}{8}\mu(5)\mu(i)\mu(k)f(i, k)\Big\}W = 0, \\ &\Big\{D(k)\tilde{W}\mu(k) + D(5)\tilde{W}\mu(5) - \\ &\qquad - \frac{1}{8}\tilde{W}\mu(5)\mu(i)\mu(k)f(i, k)\Big\} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6,25''')$$

Используя формулы (5,74), получим:

4-тензор энергии — импульса

$$\theta(i, k) = \frac{1}{2}\{\tilde{W}\mu(i)D(k)W - D(k)\tilde{W}\mu(i)W\} -$$
$$- \frac{1}{4}f(k, n)K(5, n, i) - \frac{1}{4}D(n)K(n, k, i) -$$
$$- \frac{1}{4}D(5)K(5, k, i), \quad (6,26'''\text{а})$$

4-вектор тока

$$\left.\begin{aligned} &\theta(5, k) = \frac{1}{2}\{\tilde{W}\mu(5)D(k)W - D(k)\tilde{W}\mu(5)W\} + \\ &\qquad + \frac{1}{4}D(n)K(n, 5, k) + \frac{1}{8}f(i, n)K(i, n, k), \\ &\theta(k, 5) = \frac{1}{2}\{\tilde{W}\mu(k)D(5)W - D(5)\tilde{W}\mu(k)W\} - \\ &\qquad - \frac{1}{4}D(n)K(n, 5, k). \end{aligned}\right\} (6,26'''\text{б})$$

Условие симметрии $\theta(5, k) = \theta(k, 5)$ выражает тождество Гордона в присутствии внешнего поля.

При переходе к представлению в составляющих Фурье сделаем, как обычно, предположение, что в разложении представлена только одна составляющая, соответствующая $Z=1$, т. е. наложим на спиноры W и $\tilde{W}$ условие цикличности

$$W=U\exp(i\mu x^5);\quad \tilde{W}=\tilde{U}\exp(-i\mu x^5) \tag{6,27}$$

и обозначим

$$\left.\begin{aligned}\overline{K}(i,\ k,\ l)&=\frac{1}{2}U^+\big(\gamma(i)\gamma(k)\gamma(l)-\gamma(l)\gamma(k)\gamma(i)\big)U,\\ \overline{M}(i,\ k)&=i\overline{K}(i,\ k,\ 5)=\\ &=\frac{1}{2}U^+\big(\gamma(i)\gamma(k)-\gamma(k)\gamma(i)\big)U.\end{aligned}\right\} \tag{6,28}$$

Мы получим:

уравнения поля

$$\gamma(k)D(k)U+\mu U-\frac{i}{8}\gamma(l)\gamma(k)f(l,\ k)U=0, \tag{6,29}$$

4-тензор энергии — импульса

$$\overline{\theta}(i,\ k)=\frac{1}{2}\{U^+\gamma(i)D(k)U-(D+(k)U^+)\gamma(i)U\}-\\ -\frac{1}{4}\frac{\partial\overline{K}(k,\ in)}{\partial x^n}+\frac{i}{4}f(k,\ l)\overline{M}(i,\ l), \tag{6,30}$$

4-вектор тока

$$\overline{\theta}(k,\ 5)=i\mu(U^+\gamma(k)U)-\frac{i}{4}\frac{\partial\overline{M}(k,\ n)}{\partial x^n}. \tag{6,31}$$

Мы видим (формула (6,29)), что в 5-оптике в уравнение Дирака входит дополнительный член $-\frac{i}{8}\gamma(l)\gamma(k)f(l,\ k)U$. Этот дополнительный член получается в результате требования общей ковариантности уравнений для спинорного поля и появляется в результате замены обычных производных от спинора $\frac{\partial W}{\partial x^\sigma}$ на ковариантные $\frac{\partial W}{\partial x^\sigma}-B_\sigma W$.

Появление этого дополнительного члена показывает, что в случае спинорных полей обычное правило D-формализма оказывается нарушенным. Но, как хорошо известно, уравнение Дирака находится в согласии с опытом, и дополнительный член это согласие резко ухудшает. Мы стоим перед трудностью, значение которой нельзя умалить. Преодоление этой трудности следует ждать от дальнейшего развития теории. Здесь уместно указать направление, в котором, по нашему мнению, должно вестись исследование.

Следует думать, что уравнение (6,29) не учитывает некоторый специфический 5-оптический эффект, который почти полностью (до обычной радиационной поправки) компенсирует влияние дополнительного члена и восстанавливает согласие с опытом. Этот эффект заключается в последовательном учете заряженных (тяжелых) состояний поля излучения, т. е. виртуальных переходов электрона в другие зарядовые состояния (в том числе и переход в состояние нейтрино) с испусканием или поглощением заряженных (тяжелых) квантов. Переход электрона в состояние нейтрино с испусканием тяжелого кванта аналогичен переходу протона в нейтрон с испусканием мезона и является причиной отклонения опытного значения величины магнитного момента электрона, вычисляемого из уравнения Дирака, от теоретического, вычисляемого из уравнения (6,29).

Здесь мы вплотную подходим к еще нерешенным проблемам 5-оптики, обсуждение которых выходит за рамки настоящей монографии.

Если при помощи канонического формализма получаются выражения для 4-тензора энергии — импульса T_{ik} и 4-вектора s_k, то эти величины оказываются неопределенными, поскольку к ним можно добавить выражения вида $\frac{\partial \psi_{ikl}}{\partial x^l}$ и $\frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x^i}$, где ψ_{ikl} и ψ_{ik} антисимметричные тензоры:

$$T'_{ik} = T_{ik} + \frac{\partial \psi_{ikl}}{\partial x^l}; \quad s'_k = s_k + \frac{\partial \psi_{kl}}{\partial x^l}.$$

Это означает, что при заданных значениях интегралов энергии и заряда

$$\int T_{44}\, dx^1\, dx^2\, dx^3; \quad \int s_4\, dx^1\, dx^2\, dx^3$$

плотности этих величин в пространстве остаются неопределенными. Это в свою очередь влечет за собой неопределенность в величине механического и магнитного момента для элементарной частицы.

Теория тяготения устраняет эту неопределенность в отношении плотности энергии и величины механического момента элементарной частицы, придавая симметричному 4-тензору энергии-импульса θ_{ik} непосредственный физический смысл.

Плотность заряда остается, однако, еще неопределенной, что влечет за собой неопределенность в величине магнитного момента у элементарных частиц.

5-оптика, являясь естественным развитием теории тяготения, устраняет неопределенность плотности заряда и, следовательно, в величине магнитного момента.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Вывод формулы

$$\mu(\alpha)\frac{\partial \Lambda\Omega^{\sigma}(\alpha)}{\partial x^{\sigma}} = \Delta\left(B(\alpha)\mu(\alpha) - \mu(\alpha)B(\alpha)\right). \qquad (6,32)$$

По определению имеем

$$\begin{aligned} B(\alpha)\mu(\alpha) - \mu(\alpha)B(\alpha) &= \\ &= \frac{1}{4}\Delta(\alpha, \rho, \gamma)(\mu(\rho)\mu(\gamma)\mu(\alpha) - \mu(\alpha)\mu(\rho)\mu(\gamma)) = \\ &= \frac{1}{2}\Delta(\alpha, \rho, \gamma)(\delta(\alpha, \gamma)\mu(\rho) - \delta(\alpha, \rho)\mu(\gamma)) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha, \rho, \alpha) - \frac{1}{2}\Delta(\alpha, \alpha, \rho)\right)\mu(\rho) = \Delta(\alpha, \rho, \alpha)\mu(\rho). \end{aligned}$$

Умножая формулу (5,32) на $\mu(\alpha)$, получаем:

$$\mu(\alpha)\frac{\partial \Lambda\Omega^{\sigma}(\alpha)}{\Lambda\, \partial x^{\sigma}} = \Delta(\beta, \alpha\beta)\mu(\alpha).$$

Сравнивая, получаем (6,32).

2. Вычисляем

$$\begin{aligned} \tilde{W}[\mu(\alpha)B(\beta) + B(\beta)\mu(\alpha)]\, W &= \\ &= \frac{1}{4}\Delta(\beta, \rho, \gamma)\, \tilde{W}(\mu(\alpha)\mu(\rho)\mu(\gamma) - \mu(\gamma)\mu(\rho)\mu(\alpha))\, W = \\ &= \frac{1}{2}\Delta(\beta, \rho, \gamma)K(\alpha, \rho, \gamma). \end{aligned}$$

3. Свертывая, имеем:

$$\tilde{W}[\mu(\alpha)B(\alpha) + B(\alpha)\mu(\alpha)]\, W = \frac{1}{2}\Delta(\alpha, \rho, \gamma)K(\alpha, \rho, \gamma). \qquad (6,33)$$

Умножая формулу (5,30a) на $K(\alpha, \beta, \gamma)$, получаем:

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma) K(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\partial\Omega_\sigma(\gamma)}{\partial x^\tau} \Omega^\sigma(\alpha) \Omega^\tau(\beta) K(\alpha, \beta, \gamma) =$$
$$= -\frac{\partial\Omega^\sigma(\alpha)}{\partial x^\tau} \Omega_\sigma(\gamma) \Omega^\tau(\beta) K(\alpha, \beta, \gamma).$$

Сравнивая, получаем

$$\widetilde{W}[\mu(\alpha) B(\alpha) + B(\alpha) \mu(\alpha)] W =$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial\Omega^\tau(\gamma)}{\partial x^\sigma} \Omega_\tau(\rho) \Omega^\sigma(\alpha) K(\rho, \gamma, \alpha). \quad (6,34)$$

ПОСЛЕСЛОВИЕ

В своих лекциях по основам квантовой механики Л. И. Мандельштам ставит вопрос о структуре всякой физической теории, всякого физического построения вообще, и отвечает:

«Немного схематично (как всегда) можно сказать, что всякая физическая теория состоит из двух дополняющих друг друга частей... Первая часть учит, как рациональным образом отнести к объектам природы определенные величины, большей частью в виде чисел. Вторая — устанавливает математические соотношения между этими величинами. Без первой части теория иллюзорна, пуста. Без второй, вообще, нет теории. Только совокупность двух указанных сторон дает физическую теорию».

Развивая эту мысль, Мандельштам говорит:

«Современная теоретическая физика, не скажу сознательно, но исторически так оно было, пошла по иному пути, чем классика. Это получилось само собой. Теперь, прежде всего, стараются угадать математический аппарат, оперирующий с величинами, о которых, или о части которых, заранее, вообще не ясно, что они означают... Так, несомненно, поступал Эйнштейн, особенно при создании общего принципа относительности. Это особенно ясно видно и на примере того, как создавалось уравнение Шредингера».

Как обстоит, под углом зрения сказанного, дело в 5-оптике?

Формальный аппарат 5-оптики был, по существу, уже готов много лет назад и построен в работах Калуцы, О. Клейна, Фока, Эйнштейна и Бергмана.

Построение формального аппарата протекало по следующим этапам:

I. *Т. Калуца* (1921 г.).

1. Вводится пятое дополнительное измерение четырехмерного физического пространства теории тяготения. Физи-

ческий смысл этого дополнительного измерения пространства остается открытым.

2. Обнаруживается, что метрические потенциалы 5-пространства не должны зависеть от пятой дополнительной координаты. Физический смысл этого условия цилиндричности остается открытым.

3. Для того чтобы иметь возможность одно-однозначно сопоставить $10+4=14$ потенциалов теории тяготения и электродинамики и 15 метрических потенциалов 5-пространства, выставляется дополнительное требование, что $G_{55}=1$. Остается открытым вопрос о физическом смысле этого требования.

II. *О. Клейн и В. А. Фок* (1926 г.).

1. Уточняется сопоставление 14 потенциалов теории тяготения и электродинамики с метрическими потенциалами 5-пространства и обнаруживается, что траектории заряженной точки соответствует геодезическая линия нулевой длины (геометрический луч) в 5-пространстве. Фактически устанавливается эквивалентность задачи релятивистской классической механики о движении заряженной материальной точки и задачи геометрической оптики о распространении лучей в 5-пространстве.

2. Обнаруживается возможность сформулировать задачу квантовой механики о движении заряженной частицы как задачу волновой оптики о распространении скалярных волн в 5-пространстве, если на волновую функцию в 5-пространстве наложить условие цикличности

$$W(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = \\ = U(x^1, x^2, x^3, x^4) \exp\left(i\left(\frac{mc}{\hbar}\right)x^5\right),$$

сохранив для метрических потенциалов условие цилиндричности.

3. Остаются открытыми вопросы о физическом смысле пятой координаты, условия цилиндричности для метрических потенциалов и условия цикличности для волновой функции. Попрежнему остается открытым вопрос о физическом смысле требования $G_{55}=1$.

III. *А. Эйнштейн и П. Бергман* (1938 г.).

Условие цилиндричности ослабляется и заменяется более слабым требованием периодичности метрических потенциалов в пятой координате. Период принимается микроскопической величины, которую в первом приближении можно положить равной нулю. Тогда условие периодически снова вырождается в условие цилиндричности.

Поскольку для электромагнитного поля не имеет места принцип эквивалентности, во всех этих работах метрический тензор 5-пространства оказывается зависящим от отношения $\frac{e}{m}$ для частицы, движение которой рассматривается, в то время как метрический тензор 4-пространства теории тяготения является универсальным.

Отсюда необходимо сделать вывод, что 5-пространство пятимерных обобщений теории тяготения не может быть (расширенным на одно дополнительное измерение) универсальным физическим пространством общей теории относительности, а должно иметь совсем другой физический смысл.

IV. *5-оптика.*

1. 5-пространство 5-оптики есть (расширенное на одно дополнительное измерение) конфигурационное пространство пробной частицы, движение которой рассматривается. Метрическая и топологическая структура этого пространства отражает характер воздействия на пробную частицу всей остальной материи в мире.

2. Пятая координата конфигурационного пространства получает отчетливый физический смысл действия. В отношении пятой координаты конфигурационное 5-пространство топологически замкнуто.

3. Вместо условия цилиндричности для метрических потенциалов и условия цикличности для волновой функции все физические величины удовлетворяют единому условию периодичности в 5-й координате действия.

4. Обнаруживается, что период пятой координаты имеет универсальную величину постоянной Планка, которая получает отчетливый геометрический смысл.

5. Квантование движения материальной точки есть проявление периодической зависимости физических величин от координаты действия.

6. Возможность полагать $G_{55}=1$ в предшествующих теориях обусловлено тем, что уравнение 5-эйконала

$$G^{\mu\nu}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^{\mu}}\cdot\frac{\partial\Sigma}{\partial x^{\nu}}=0,$$

формулирующее задачу классической механики о движении заряженной материальной точки, *однородно* в метрических потенциалах $G^{\mu\nu}$. Поэтому в этой задаче физический смысл имеет лишь четырнадцать отношений между метрическими потенциалами 5-пространства и требование $G_{55} = 1$ не приводит к противоречию.

7. Иное положение дела мы встречаем в задаче об определении метрических потенциалов по заданным источникам поля, которая формулируется уравнениями Эйнштейна для 5-пространства:

$$P_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} G_{\lambda\mu} P = \varkappa Q_{\lambda\mu},$$

которые неоднородны в метрических потенциалах.

При решении этой задачи следует заменить отношение $\frac{e}{m}$, входящее в выражение метрического тензора для 5-пространства, универсальной величиной $c^2\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}$. Значение потенциала G_{55} должно определяться из уравнений поля. Заранее полагать $G_{55} = 1$ является незаконным и приводит, например, в задаче о поле заряженной точечной массы к неверному решению.

8. Учет периодической зависимости электромагнитного поля от пятой координаты действия автоматически приводит к появлению, наряду с далеко действующими силами взаимодействия типа Кулона, близко действующих сил типа Юкавы (§ 25, п. 3).

9. Во всякой последовательной классической теории мы обязаны полагать $h \to 0$, т. е. пренебрегать периодической зависимостью физических величин от координаты действия. Во всякой последовательной квантовой теории мы обязаны учитывать периодическую зависимость физических величин от координаты действия. Поэтому, с точки зрения 5-оптики, является непоследовательным пренебрегать, как это делает современная квантовая механика, периодической зависимостью составляющих внешнего поля от координаты действия.

Учет этой зависимости должен привести к предсказанию и обнаружению ряда специфических 5-оптических эффектов, которые смогут быть использованы для экспериментальной проверки теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Klein, Ueber neuere englische Arbeiten zur Mechanik. Ges. Abhandlungen, т. II, 601.
2. F. Klein, Zeits. f. Math. a. Phys. (1901), 375.
3. Th. Kaluza, Zum Unitätsproblem der Physik. Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. (1921), 966.
4. H. Mandel, Zur Herleitung der Feldgleichungen iu der allgemeinen Relativitätstheorie Zeits. f. P. **39** (1926), 136.
5. O. Klein, Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. Zeits. f. Phys. **37** (1926), 895.
6. V. Fock, Ueber die invariante Form der Wellen-und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt. Zeits. f. Phys. **39** (1926), 226.
7. A. Einstein and P. Bergmann, On a Generalization of Kaluza's Theory of Electricity. Ann. Math. **39** (1938), 683.
8. Ю. Б. Румер, Действие как координата пространства, ЖЭТФ **19**, вып. 1 (1949); **19**, вып. 3 (1949); **19**, вып. 10 (1949); **21**, вып. 3 (1951); **21**, вып. 12 (1951); **22**, вып. 6 (1952); **23**, вып. 7 (1952); **24**, вып. 1 (1953); **24**, вып. 3 (1953). Ю. Б. Румер, Физический смысл 5-пространства в 5-оптике, ЖЭТФ **24** вып. 3 (1953).
9. В. А. Фок, О движении конечных масс в общей теории относительности, ЖЭТФ **9** (1939).
10. В. А. Фок, Волновое уравнение Дирака и геометрия Римана, ЖРФХО, часть физ., т. 62 (1930).
11. В Л. Гинзбург, ЖЭТФ **9**, стр. 981 (1939).
12. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948.
13. В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.
14. Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1947.
15. А. Эддингтон, Математическая теория относительности, ДНТВУ, Харьков, 1933.