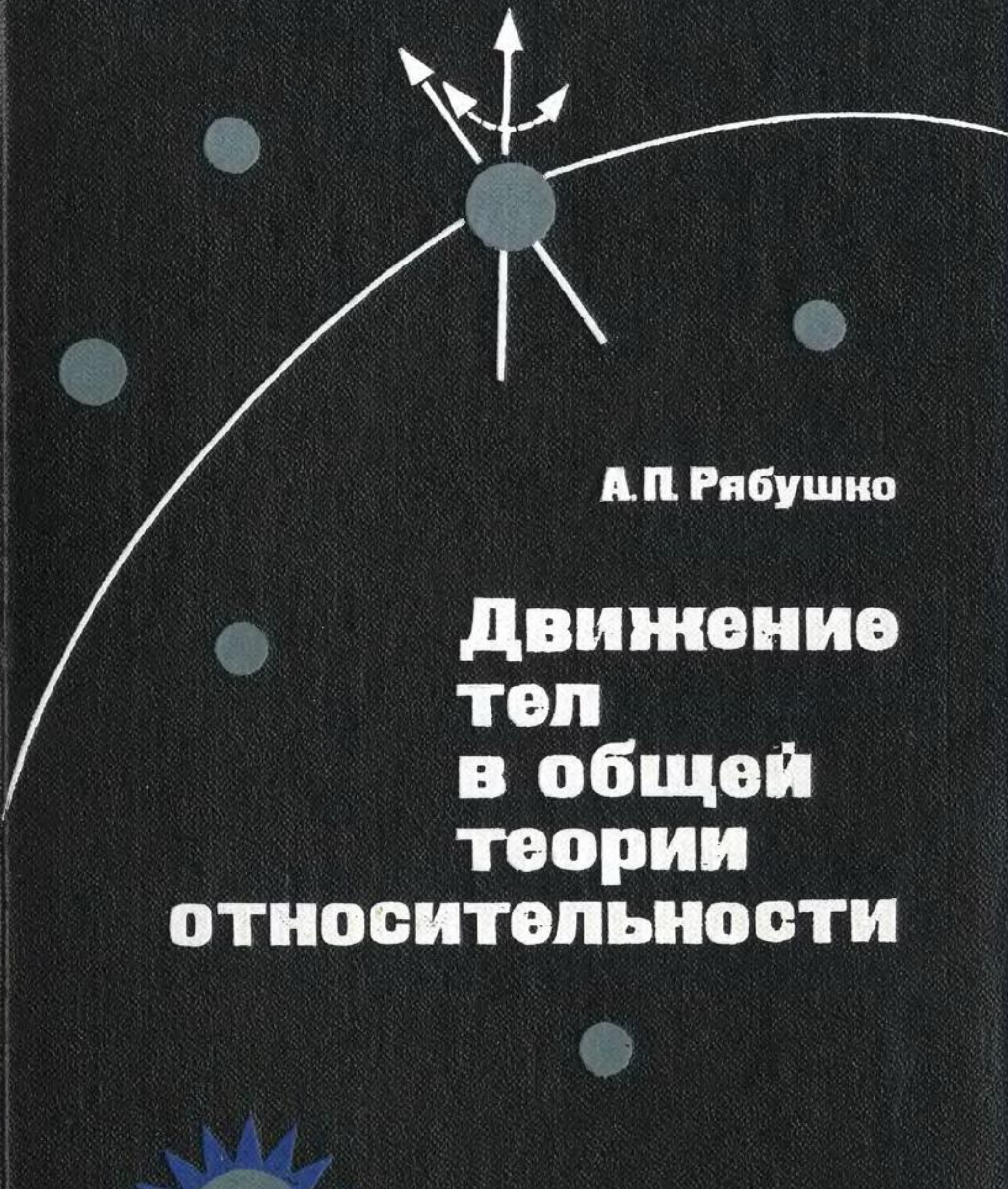

А. П. Рябушко

Движение тел в общей теории относительности

А. П. Рябушко

Движение тел в общей теории относительности

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1979

530.1
Р98
УДК 530.12(087.2)

Рецензент: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Украинского республиканского центра метрологии и стандартизации Госстандарта СССР профессор *К. А. Пирагас*

Р $\frac{20402-042}{М304(05)-79}$ —79

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III. **Интегрирование уравнений движения. Задача одного и двух тел в ОТО**

Глава IV. **Задача трех тел в ОТО**

Глава V. **Проблема устойчивости движения тел и проблема сходимости приближенных методов в ОТО**

Глава VI. **Приложения полученных закономерностей релятивистского движения**

В мире нет ничего, кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени

В. И. Ленин

ВВЕДЕНИЕ

ПРОБЛЕМА ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ЭЙНШТЕЙНОВОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Предлагаемая вниманию читателя монография посвящается одной из важнейших проблем общей теории относительности (ОТО) — проблеме движения тел. Описание и обсуждение основных физических принципов, математического аппарата, важнейших классических следствий ОТО и их экспериментальной проверки содержится как в работах самого создателя теории относительности А. Эйнштейна [1], так и в известных монографиях [2—19], которые снабжены обширной библиографией. Поэтому общеизвестные положения, уравнения и следствия ОТО будут приведены в последующих главах без обоснований и доказательств и только в той мере, в какой это понадобится для изложения проблемы движения. Последняя же будет рассмотрена достаточно подробно.

Отметим некоторые обстоятельства. В последние годы интерес к ОТО значительно повысился. Из науки чисто теоретической она начала превращаться в науку и экспериментальную. Это объясняется рядом взаимосвязанных объективных факторов. Прежде всего теоретические следствия ОТО находят непосредственное приложение в таких областях знания и деятельности человека, как астрономия, астрофизика, космогония и космология (сверхплотные конфигурации, радиогалактики, квазары, пульсары, гравитационный коллапс, черные и белые дыры, реликтовое излучение, расширение метагалактики [7, 11, 13, 15—30]). Кроме того, уровень экспериментальной техники возрос настолько, что оказалось возможным планировать и осуществлять новые тонкие эксперименты по проверке ОТО (четвертая проверка, обнаружение гравитационных волн, прецессия гироскопа и др. [9, 31—58]), а также уточнять результаты, относящиеся к основам ОТО и классическим релятивистским эффектам (принцип эквивалентности, смещение перигелия Меркурия, искривление лучей света, гравитационное смещение спектральных линий [13, 14, 17, 19, 31—36]). Кроме того, повышение интереса к экспериментальным исследованиям в ОТО объясняется тем, что в настоящее время имеется несколько вариантов теории тяготения, конкурирующих с ОТО: скалярно-тензорные теории Бранса — Дикке и Сена — Данна, тетрадная и аффинная теории тяготения в пространстве с кручением, модель Йордана с переменной постоянной тяготения, тетрадная теория Тредера и др. [43, 45, 48, 52, 59—67]. Окончательный выбор одной из теорий тяготения зависит от экспериментов, которые до сих пор свидетельствуют в пользу ОТО или по крайней мере ей не противоречат.

Таким образом, налицо отмеченные еще Петровым в [68] тенденции: поставить ОТО на более прочную экспериментальную базу и, как следствие, отыскать новые конкретные задачи и следствия ОТО, допускающие проверку наблюдениями. Известно, что источником таких задач являются, в частности, закономерности движения тел в эйнштейновой теории гравитации (ОТО).

В настоящее время имеется несколько десятков значительных работ, посвященных проблеме движения тел в ОТО. Эти работы опубликованы в различных отечественных и зарубежных журналах, некоторые из них труднодоступны, являются библиографической редкостью и излагают проблему в сжатом виде. Поэтому подробное ознакомление с указанной проблемой по журнальным статьям и ее изучение представляют значительные трудности. Имеется несколько монографий, в которых более или менее подробно излагаются вопросы движения тел в ОТО. Однако даже в наиболее значительных из них, таких, как [6, 11, 13—17, 19, 69, 70], вовсе не рассматриваются влияния электромагнитных сил на движение тел сравнимых масс, задача трех тел в ОТО, а также вопросы устойчивости их движения, которым в наше время должна отводиться значительная роль в релятивистской теории движения.

В предлагаемой монографии излагаются достигнутые к настоящему времени успехи в проблеме релятивистского движения тел. В книгу включены: достаточно полный обзор литературы по теме; вывод уравнений движения и соответствующих им законов сохранения в случае систем тел, обладающих сравнимыми между собой массами, электрическими зарядами, собственными угловыми моментами и магнитными полями; интегрирование уравнений движения в случае одного (уравнений геодезических и Папапетру), двух и трех тел вплоть до численных расчетов, помогающих определить возможности экспериментальной проверки предсказываемых ОТО релятивистских эффектов и их приложений к некоторым вопросам космогонии Солнечной системы; введение в релятивистскую теорию устойчивости движения тел; начала исследования сходимости применяемого аппроксимационного метода.

Монография предполагает знакомство читателя с основами теории относительности и рассчитана на широкий круг научных работников, аспирантов и студентов, занимающихся или интересующихся проблемами теории относительности. Книгу можно также использовать для чтения спецкурсов студентам и аспирантам физических и математических факультетов университетов и педагогических институтов и некоторых физико-технических институтов.

Цитированная литература приведена в конце книги и распределена по главам с автономной нумерацией. Во избежание повторений источник, на который делается ссылка в последующих главах (а он дан ранее), имеет в тексте специальное обозначение. Например, символы [В.10] или [В.123] означают, что делается ссылка на источники [10] или [123] введения, а символы [I.21] или [III.8] имеют в виду источник [21] к гл. I или источник [8] к гл. III. В книге принята сквозная нумерация параграфов и формулы занумерованы обычным образом: первое число в круглых скобках указывает на параграф, в котором дана формула, а второе число — ее номер в этом пагаграфе. Например, (23.17) указывает, что формула находится в § 23 под номером 17.

§ 2. ИСТОРИЯ ВОПРОСА, ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

К 1915—1916 гг. оформилась одна из значительнейших теорий XX в.— ОТО. Ядро этой теории составляли полевые уравнения гравитационного поля — знаменитые уравнения тяготения Эйнштейна [71, 72]. Уравнения движения пробных тел во внешнем поле постулировались независимо от полевых уравнений в виде принципа геодезических линий. Под влиянием работ Вейля, Леви-Чивиты и других возникла гипотеза: уравнения движения являются следствием релятивистских полевых уравнений. В 1926 г. Де-Донде доказал [73], что движение частиц, образующих пылевидную материю, происходит по геодезическим линиям поля (см. также [6], § 63). Доказательство опиралось на специальный вид тензора энергии — импульса материи $T^{\alpha\beta}$, который фигурировал в правой части полевых уравнений. Именно поэтому Эйнштейн считал подобное доказательство гипотезы неудовлетворительным, ибо присутствие в полевых уравнениях $T^{\alpha\beta}$ делает невозможным определение того, насколько полученные результаты не зависят от специального выбора структуры материи. В 1927 г. Эйнштейн совместно с Громмером публикует работу [74], в которой впервые доказано, что если массу рассматривать как сингулярность гравитационного поля, то закон движения полностью определяется полевыми уравнениями ОТО в пустоте ($T^{\alpha\beta}\equiv 0$). Законом движения оказывается геодезическая линия. В том же году в работе [75] Эйнштейн доказал, что известные уравнения движения заряженной частицы (см., например, [13], (90.7)) также являются следствием релятивистских полевых уравнений. Таким образом, принципиальный вопрос: «Содержатся ли уравнения движения в полевых уравнениях ОТО?» — решился положительно, по крайней мере в разобранных частных случаях движения легкого (пробного) тела во внешнем гравитационном поле.

В период с 1915 по 1927 г. уравнения движения (уравнения геодезических) тщательно исследуются в ряде работ. Из них следует отметить прежде всего работу Эйнштейна [76], в которой объясняется наблюдаемая аномалия в движении перигелия Меркурия ($\approx 43''$ в столетие). В важной работе Лензе и Тирринга [77] исследовано на основе приближенного решения уравнений тяготения Эйнштейна и уравнений геодезической линии влияние собственного вращения центрального тела на движение планет и их спутников. Основные итоги работы следующие. Собственное вращение центрального тела вызывает дополнительное очень малое вековое смещение перигелия $\Delta\varphi$. В системе Солнце — планеты в максимуме (для Меркурия) оно достигает $-0'',01$. В системе планета — спутник оно может быть значительно больше. Так, например, для V спутника Юпитера $\Delta\varphi \approx -3'46''$, а для спутника Сатурна Mimas $\Delta\varphi \approx -41''$ (знак минус указывает на обратное смещение по сравнению со смещением перигелия в [76]). Кроме того, указывается на существование другого релятивистского векового эффекта: если плоскость орбиты легкого тела не перпендикулярна к оси вращения центрального тела, то эта плоскость должна медленно прецессировать около оси вращения центрального тела, т. е. происходит вековое смещение линии узлов, которое вдвое меньше, чем $|\Delta\varphi|$, и противоположно направлено. Кроме отмеченных работ [76, 77], можно указать еще наиболее известные статьи и книги [78—83], в которых подробно обсуждались релятивистские эффекты, возникающие при движении планет согласно теории тяготения Эйнштейна.

Условно период с 1915 по 1927 г. можно назвать *первым этапом* в истории развития проблемы движения в ОТО. Для него характерна разработка проблемы движения одного тела. *Второй этап* можно отнести к 1928—1940 гг. В этот период решается более сложная задача: вывести релятивистские уравнения движения в случае системы n тел сравнимых масс. Прежде всего была рассмотрена проблема двух тел. Во втором томе монографии Шази [84], посвященном построению основ релятивистской небесной механики, выводятся релятивистские уравнения движения в случае двух тел. Этой же теме были посвящены серии работ Матиссона [85] и Леви-Чивиты [86—88]. Еще раньше на основе принципа геодезической уравнения движения для тел сравнимых масс были предложены в работах [78, 79, 89]. Во всех упомянутых работах [78, 79, 84—89] уравнения движения выводились разными методами. Результаты получились противоречивыми. Леви-Чивита, исследуя свои уравнения [88], нашел, что центр тяжести двойной звезды должен обладать ускорением. Де Ситтер и Шази, исходя из своих уравнений движения, пришли к среднему ускорению, в пять раз большему, чем у Леви-Чивиты, и противоположно направленному. Существование ненулевого среднего ускорения системы звезда — звезда явилось неожиданным и физически непонятным.

В тридцатые годы Эйнштейн с сотрудниками разрабатывают аппроксимационный метод, с помощью которого ими в 1938 г. получены уравнения движения в следующем за ньютоновым приближении в случае двух тел [90]. Вычисления, сопутствующие выводу этих уравнений движения, были настолько громоздкими, что авторы не сочли возможным опубликовать их в более или менее полном объеме. Рукопись работы [90], содержащая все вычисления (объемом более двухсот страниц), была передана на хранение в Институт высших исследований в Принстоне (США). Уравнения выводились из уравнений поля Эйнштейна в пустом пространстве с использованием некоторых координатных условий, выделяющих координатную систему, галилееву на бесконечности. Тела представлялись сингулярностями гравитационного поля. Физически это обозначает, что тела считаются сферически симметричными бесконечно малых размеров (материальными точками).

Таким образом, в [90] было впервые доказано, что и в случае двух тел сравнимых масс уравнения движения являются следствием уравнений тяготения Эйнштейна. Чуть позже Эддингтон и Кларк получили те же уравнения с помощью вариационного принципа [91].

Полученные уравнения [90] были немедленно проинтегрированы и обсуждены Робертсоном [92]. Оказалось, что периастр относительной орбиты двойной звезды должен смещаться точно так, как перигелий эллиптической орбиты легкого тела, движущегося в поле тяжелого тела, масса которого равна сумме масс компонент двойной звезды. Этот результат находится в согласии с результатом Леви-Чивиты [88]. Но среднее ускорение центра тяжести двойной звезды, согласно уравнениям [90], оказалось равным нулю, как и должно следовать из общих соображений.

В эти же годы Фок с сотрудниками независимо от школы Эйнштейна разработал приближенный метод для получения уравнений движения из уравнений тяготения Эйнштейна, который отличается от приближенного метода, используемого в [90]. Первое отличие состоит в том, что в методе Фока используется определенный тензор энергии-импульса материи $T^{\alpha\beta}$ в уравнениях поля и тела имеют конечные размеры. Тем самым открывается возможность изучать влияние структуры тел на их движение. Исключительная роль в методе Фока принадлежит гармоническим координатным условиям, без существенного использования которых уравнения движения не выводятся. В этом второе отличие метода Фока от метода школы Эйнштейна. Общей чертой обоих методов является разложение всех фигурирующих в проблеме движения геометрических и физических величин в ряды по параметру c^{-1}, где c — скорость света в вакууме. В 1939 г. Фок публикует работу [93], в которой своим методом получает ньютоновы уравнения движения в случае системы из n тел конечных размеров. Применив метод Фока, Петрова в 1940 г. [94] выводит постньютоновы уравнения движения в случае n тел конечных размеров, которые полностью согласуются с уравнениями движения, выведенными Эйнштейном в [90]. Результаты исследования были опубликованы только в 1949 г. [95].

1940 г. можно принять за начало *третьего этапа* в истории развития проблемы движения в ОТО. Для этого этапа характерны следующие направления в исследованиях:

1) совершенствование приближенных методов Эйнштейна и Фока;

2) вывод релятивистских уравнений движения с учетом различных характеристик тел (электрические заряды, собственное вращение, магнитные поля, несферичность тел и т. д.);

3) углубленное исследование полученных уравнений движения, приложение к экспериментальному обоснованию ОТО;

4) проникновение различных качественных методов исследования в ОТО (теория групп, устойчивость движения по Ляпунову и др.).

Остановимся подробнее на каждом из этих взаимно переплетающихся направлений.

Усовершенствование аппроксимационного метода школы Эйнштейна было проведено в работах [96, 97], в которых координатные условия заранее не выбирались, а также был устранен существенный пробел: было доказано, что уравнения поля могут быть разрешены в произвольном приближении. Метод Фока был значительно упрощен Папапетру [98, 99]. Однако оба метода оставались в техническом отношении очень громоздкими. В 1954 г. появилась работа Инфельда [100], в которой было достигнуто с технической точки зрения огромное упрощение вывода уравнений движения благодаря синтезу идей Фока — Папапетру и Инфельда. Решающим фактором в деле упрощения вывода в [100] было использование тензора энергии-импульса материи с компонентами, пропорциональными дираковской δ-функции. Теорию δ-функций см., например, в [101—103]. Таким образом, методы Эйнштейна — Инфельда и Фока — Папапетру значительно сблизились, использование δ-функций явилось еще одним «мостиком» между этими методами. При выводе уравнений движения в [100] Инфельд вынужден был проводить обременительную процедуру перенормировки масс. Чтобы ее избежать, Инфельд совместно с Плебаньским сконструировали модифицированные $\hat{\delta}$-функции Дирака [104, 105]. Использовав эти $\hat{\delta}$-функции, Инфельд добился в работе [106] (см. также [107]) сведе́ния всех вычислений к минимуму (со всеми пояснениями и вычислениями, кроме тривиальных, работа заняла 14 страниц по сравнению с 200 в работе [90]). В монографии [108] собраны окончательные результаты школы Эйнштейна — Инфельда по проблеме движения. Результаты школы Фока — Папапетру по обсуждаемой проблеме изложены в монографии [6].

Достигнутые усовершенствования приближенных методов стимулировали новые исследования. Стало возможным поставить и решить в релятивистской проблеме движения ряд новых и более сложных задач. В 1955 г. выходит в свет монография Фока [6], в которой выводятся постньютоновы уравнения поступательного движения и уравнения вращательного движения в ньютоновом приближении в случае системы n несимметричных вращающихся тел конечных размеров. В 1956 г. в работе Бажаньского [109] методом Инфельда [100] получены уравнения движения двух заряженных тел. Подобная задача была рассмотрена в 1940 г. в докторской диссертации Уаллясом [110] громоздким методом работы [90], а результаты были опубликованы без детальных вычислений в [111]. Исходя из принципа геодезической линии, а не из полевых уравнений ОТО, Бертотти в 1955 г. также рассматривал движение двух заряженных тел [112]. Результаты работ [111, 112] оказались (в отличие от результата в [109]) неверными. В 1956 г. методом Фока — Папапетру уравнения движения вращающихся тел выводил Хейвуд [113]. Однако он пренебрег в добавке на вращение членами, пропорциональными параметру l/r (l — размеры тел, r — расстояние между ними), и получил уравнения движения, в сущности не отличающиеся от уравнений движения невращающихся тел. Выводу приближенных уравнений движения вращающихся тел сравнимых масс посвящены также работы Рябушко, Тульчиева, Калицина, Петровой, Михальской, Габоша, Абдильдина, Брумберга и др. [114—130]. Усовершенствованным методом Эйнштейна — Инфельда в работах Рябушко [131, 132] выведены посленьютоновы уравнения поступательного и вращательного движений для вращающихся тел сравнимых масс с учетом их электромагнитных характеристик.

Продолжается также разработка проблемы одного тела. Отметим наиболее важные работы. В 1949 г. Инфельд и Шильд [133] вновь (несколько иным методом, чем в [73, 74]) показывают, что принцип геодезической должен следовать из уравнений Эйнштейна. В 1951 г. Папапетру [134] выводит с помощью разработанного им метода точные ковариантные уравнения поступательного и вращательного движений вращающегося легкого тела во внешнем гравитационном поле, которые совместно с Кориналдези [135] подробно исследует в случае внешнего поля Шварцшильда [136]. В 1959 г. Керр публикует работы [137—139], в которых разрабатывает лоренц-ковариантный приближенный метод и применяет его к выводу приближенных уравнений поступательного и вращательного движений заряженной и вращающейся пробной частицы. Результаты полностью согласуются в своей общей части с результатами Папапетру [134]. Керр, следуя духу школы Эйнштейна, уравнения движения вывел из уравнений поля вне частицы, в то время как Папапетру непосредственно использовал тензор энергии-импульса. В этом же году выходит в свет работа Тульчиева [140], в которой он, опираясь на метод Матиссона [141], выводит уравнения движения, в точности совпадающие с уравнениями в [134].

Существует еще ряд работ [142—145 и др.], в которых выводились в ОТО различными методами уравнения движения вращающейся частицы, обладающей, кроме того, зарядом и магнитным моментом, а также эти уравнения интегрировались и обсуждались с различных точек зрения, в частности, обсуждались дополнительные условия на спин. В работах [146—152] выведены с помощью вариационного формализма или обсуждены уравнения движения вращающейся частицы с учетом кручения пространства-времени или (и) квадрупольного момента частицы, обобщающие уравнения Папапетру [134]. Интегрированию уравнений Папапетру [134] посвящены работы [153—168].

Интересный анализ релятивистских эффектов движения содержится в работах школы Федорова, Иваницкой (см., например, [169—175] и указанную в этих работах литературу).

Как уже отмечалось выше, третий этап характеризуется также углубленным, тщательным исследованием полученных уравнений движения, выяснением того, насколько сильно отличаются закономерности движения ньютоновой теории гравитации от эйнштейновой, изысканием новых возможностей для экспериментального обоснования ОТО. Обсуждается также ряд вопросов принципиального характера. Остановимся на этом подробнее.

В 1941 г. Фок [176], исходя из уравнений движения в постньютоновом приближении [93—95], нашел в явной форме интегралы движения центра инерции двух конечных масс. Было доказано отсутствие векового движения с ускорением этого центра инерции, что находится в согласии с работой [92]. В 1949 г. Фихтенгольц [177] обобщил этот результат на случай n тел. Кашкаров и Широков дополнили эти исследования [178, 179]. Доказательство существования центра инерции в ОТО также было дано Ландау и Лифшицем в книге [180]. В ней также впервые была сделана попытка представить уравнения движения, выведенные в [90, 91, 93—95], в лагранжевой форме. Но указанный в [180] лагранжиан оказался неточным. Правильный лагранжиан и следующие на основании этого лагранжиана интегралы движения даны Фихтенгольцем [181]. К этой работе примыкает ряд других его работ по проблеме движения [182—188], в которых анализируются релятивистские закономерности движения и обсуждается в этой связи роль координатных условий в ОТО.

Отметим работу [189], в которой делается попытка обосновать старую идею [78, 79, 84, 88, 89, 190, 191], согласно которой уравнения движения тел сравнимых масс можно получить на основе принципа геодезической. Впоследствии эта идея развивалась и уточнялась другими методами, например в монографии [108], работах [192].

Во всех упомянутых выше работах [176—192] обсуждаются уравнения движения невращающихся тел. Впервые уравнения движения вращающихся несимметричных тел получены Фоком [6]. К сожалению, до сих пор эти уравнения детально не изучены. Только в частном случае сферически симметричных тел Петровой проведено некоторое обсуждение этих уравнений и постньютоновых уравнений вращательного движения [193—195]. Последние были выведены не Фоком, а выводились в [118]. Интегрирование этих уравнений движения, получение релятивистских эффектов, их численная оценка — все эти задачи не были рассмотрены.

Как уже упоминалось выше, проблемой движения вращающихся тел занимался автор настоящей монографии. В работе [114] выводились уравнения поступательного и вращательного движений в постньютоновом приближении для системы сферически симметричных вращающихся тел астрономического типа. Вывод проводился с помощью метода школы Эйнштейна — Инфельда [100]. Существенным в этом методе было использование дираковских δ-функций в тензоре энергии-импульса материи. В работе [196] полученные уравнения были проинтегрированы и подробно обсуждены в случае двух тел. Основные результаты этой работы следующие. Собственные угловые моменты тел должны прецессировать (если пренебречь спин-спиновыми членами) вокруг вектора $\vec{n}$, перпендикулярного к ньютоновой плоскости относительной орбиты. Прецессия совершается в прямом направлении, т. е. в том же направлении, что и движение тел по их относительной орбите. Кроме того, сама ньютонова плоскость относительной орбиты должна совершать прецессию около некоторого постоянного вектора $\vec{S}$. Собственное вращение тел сравнимых масс приводит также к дополнительному смещению периастра относительной орбиты. Первый вековой эффект обобщает на случай тел сравнимых масс результат Кориналдези и Папапетру [135], второй и третий вековые эффекты являются обобщением результатов Лензе и Тирринга [77]. В этом смысле указанные результаты работы [196] были новыми. Более того, в работе [196] обращается внимание на существование нового релятивистского векового эффекта, который в принципе не мог быть указан в работах [77, 135], так как в первой из них не учитывалось вращение легкого тела (планеты), а во второй — вращение центрального тела. Только одновременное существование собственных вращений у обоих тел приводит к вековому изменению угла наклонения i. Впоследствии методика вывода уравнений движения вращающихся тел была усовершенствована в [129, 130]. В результате были получены релятивистские уравнения поступательного движения, которые полностью совпали в случае сферически симметричных тел сравнимых масс с уравнениями, выведенными Фоком [6]. Тем самым было доказано, что приближенные методы школ Эйнштейна — Инфельда и Фока — Папапетру приводят в случае вращающихся тел, как и в случае невращающихся тел, к одним и тем же уравнениям поступательного движения. В работах [130, 197, 198] уравнения движения из [129] были подробно обсуждены: выведены законы сохранения, обобщающие соответствующие интегралы ньютонового движения, уравнения движения проинтегрированы, рассмотрены и оценены релятивистские эффекты вращения сферически симметричных тел.

Задачей движения сплюснутых вращающихся тел занималась Михальская. В работе [121] ею был построен соответствующий лагранжиан, согласующийся с фоковским, и на его основании в [122] выведены релятивистские уравнения поступательного и вращательного движения, интегралы движения и вековые поправки к ньютонову движению. Принципиально новых эффектов не указано.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Фок в своей монографии [6] не вывел посленьютоновых уравнений вращательного движения (они были выведены только в ньютоновом приближении). Естественно, что появились работы [114, 118—120, 122, 124, 126, 127, 129, 130], в которых этот пробел в проблеме движения тел сравнимых масс авторы постарались ликвидировать. Однако уравнения получились разными, хотя они все выведены в гармонической системе координат. Подробное обсуждение этого факта будет дано ниже (§ 10).

В работах [109, 199] изучались уравнения движения двух электрически заряженных тел сравнимых масс. Уравнения движения были записаны в лагранжевой форме, на чем их изучение и закончилось. В работах автора [131, 132, 200, 201] и в настоящей монографии детально рассмотрены уравнения поступательного и вращательного движения n заряженных, магнитных и вращающихся тел сравнимых масс астрономического типа (см. также [202, 203]). Оказалось, что учет только электрических зарядов приводит к единственному релятивистскому эффекту — дополнительному смещению периастра. Если еще учесть у тел магнитные поля дипольного типа, то возникают вековые эффекты, аналогичные эффектам, которые появляются при учете собственных вращений тел (прецессии, изменение угла наклонения i и др.). Показано также, что при одновременном наличии собственных вращений и магнитных полей, согласно ОТО, между ними должна наблюдаться в ньютоновом и постньютоновом приближениях определенная взаимосвязь (обобщение эффекта Эйнштейна — де Гааза [204]).

Следует отметить также ряд более поздних работ группы алма-атинских физиков по выводу уравнений движения вращающихся, заряженных и магнитных тел [205—208].

Как пример более углубленного исследования релятивистских уравнений движения следует выделить несколько работ по знаменитой задаче трех тел. Сведения о достигнутых результатах в решении задачи трех тел в ньютоновой теории тяготения можно найти во многих монографиях [209—223] и статьях [224—252] (см. также ссылки, имеющиеся в указанной литературе). В настоящее время основной проблемой небесной механики (как и раньше) является проблема построения динамической модели Солнечной системы [253]. Решение этой проблемы невозможно без дальнейшей разработки математического фундамента небесной механики — задачи трех тел. Однако в ОТО этой задаче уделяется неоправданно мало внимания, хотя, как выясняется в последнее время, точки либрации (треугольные и коллинеарные) могут получить интересные практические применения в связи с изучением околосолнечного пространства [254, 255], и вообще задача трех тел может быть использована для проверки самой ОТО. Например, в [256] предложено использовать ограниченную треугольную лагранжеву задачу трех тел для эксперимента, выясняющего эквивалентность инерциальной и гравитационной масс третьего (легкого) тела; предложены и другие эксперименты по проверке ОТО [256, 257, 34], связанные с системами Солнце — Юпитер — Троянцы, Солнце — Земля — Луна, Солнце — Земля — ИСЗ (искусственный спутник Земли). Очевидно, что эксперименты по проверке ОТО, опирающиеся на движение трех тел, должны базироваться на более точных теоретических сведениях об этом движении. Первой из работ, уточняющих закономерности движения трех тел на базе эйнштейновой теории тяготения, была работа Де Ситтера [78] (см. также [79, 84]).

Но, как уже отмечалось, релятивистские уравнения движения, которыми пользовался Де Ситтер, были неверными, и оценки вековых эффектов, полученные в [78], следовало уточнить. Это проделал Брумберг в 1958 г. [258]. Были получены уточненные сведения о вековом движении узла и перигея (явление геодезической прецессии) для системы Солнце — Земля — Луна и о замедлении сидерического периода обращения Луны (он должен уменьшаться на 13,95 с в 100 лет). Также был выведен интеграл, обобщающий интеграл Якоби ньютоновой теории. В работе [259] были высказаны только некоторые общие суждения о проблеме трех тел в ОТО. Подробнее ограниченная плоская задача трех тел в ОТО изучалась в работах [260—262] (см. также [263]). Влияние собственных вращений трех тел на их движение обсуждалось в [264, 265]. В результате были обнаружены релятивистские вековые эффекты, аналогичные эффектам при движении двух вращающихся тел. Неограниченная задача трех тел в ОТО рассматривалась в работах [266, 267].

Решение новых более сложных задач в науке немыслимо без применения новых более совершенных и мощных средств исследования, а также без процесса взаимопроникновения уже имеющихся достаточно хороших методов исследования из одной области в другую. В качестве подтверждения этой мысли можно сослаться на опыт работы школ Инфельда, Петрова, Фока, Федорова, Зельдовича и др. Например, Петров и его ученики впервые начали широко применять метод алгебраических и дифференциальных инвариантов и метод теории групп Ли в ОТО, благодаря чему оказалось возможным дать полную классификацию полей тяготения [8] и получить целый ряд других важных результатов, в частности, теорию гравитационных волн [268]. Федоров разработал ряд новых инвариантных методов исследования, применение которых в области кристаллооптики, кристаллоакустики и теории элементарных частиц позволило ему получить серию научных результатов первостепенной важности [269, 270].

Аналогичное явление характерно для школ Инфельда, Фока, Зельдовича (см. монографии [6, 15, 18, 19, 69] и другие работы). Отметим также оригинальный подход к изучению физического содержания ОТО, в частности, проблемы движения тел (так называемая тетрадная формулировка ОТО), разрабатываемые в работах Родичева, Левашева, Иваницкой и др. (см. [169, 271—278] и содержащуюся в них литературу).

Нас особенно будет интересовать одно из новых направлений в исследованиях школы Петрова — применение качественных методов (в частности, теории устойчивости движения по Ляпунову [279]) в ОТО. В настоящее время известно немного работ, посвященных устойчивости движения тел в ОТО. В поле Шварцшильда устойчивость движения пробных частиц (планет) рассматривалась в работе [280], в книге Уиттекера [209], в работе Каплана [281] и в [282]. Применение методов Ляпунова к исследованию вопросов устойчивости (неустойчивости) движения в ОТО успешно начато в работах Пирагаса [283—292], в которых исследуется устойчивость по Ляпунову орбит незаряженных и заряженных частиц в поле незаряженного, заряженного и вращающегося центра (в полях Шварцшильда, Нордстрема — Рейснера и Керра). В поле Керра [293—296], описывающем гравитационное поле вне вращающегося центра, устойчивость в смысле Ляпунова круговых орбит рассматривалась в работах [297, 298]. Отметим еще работу [299], в которой обсуждаются условия устойчивости (неустойчивости) круговых и радиальных траекторий в обобщенном поле Шварцшильда (космологическая постоянная $\Lambda \neq 0$ и заряд центра $e \neq 0$), и [300].

Во всех перечисленных работах исследуются на устойчивость решения уравнений геодезических линий, т. е. обсуждается устойчивость движений легкого тела во внешнем гравитационном поле на основе точных уравнений движения. В случае тел сравнимых масс строгая формулировка задачи устойчивости движения пока не ясна. Дело в том, что в этом случае неизвестны точные уравнения движения. Они выведены только в некотором приближении. Поэтому будет разумной следующая постановка задачи устойчивости для тел сравнимых масс в ОТО. Релятивистские силовые поправки в уравнениях поступательного и вращательного движений можно считать постоянно действующими возмущениями по отношению к ньютоновым уравнениям движения, т. е. можно определять устойчивость ньютонова движения с точки зрения ОТО (первого постньютонова приближения). В такой постановке задача устойчивости движения рассматривалась в работах [197, 198] и будет рассматриваться в настоящей монографии.

С проблемой устойчивости определенным образом связана проблема сходимости тех рядов, в которые разлагаются решения дифференциальных уравнений движения. В ньютоновой небесной механике эти ряды всегда исследуются на сходимость, устанавливаются условия, при которых они сходятся и расходятся. В эйнштейновой теории тяготения проблема сходимости представляется очень сложной. Сходимость аппроксимационных методов, предложенных школами Эйнштейна — Инфельда и Фока — Папапетру, до сих пор не доказана. Только в частном (но очень важном с точки зрения физических приложений) случае поля Шварцшильда удалось доказать сходимость этих методов и получить некоторые оценки [301, 302]. Доказана сходимость методов также в поле Нордстрема—Рейснера.

Кроме упомянутых выше, имеется еще целый ряд работ, относящихся к проблеме движения в ОТО. Одни из них содержат обсуждение вопросов, связанных с экспериментальной проверкой ОТО на основе уже известных эффектов, или указывают на новые эффекты и возможности их обнаружения [303—327]. Другие не содержат существенно новых результатов, но полезны в методическом отношении, так как рассматривают проблему движения разными методами и с разных сторон [328—387] или с учетом гравитационного излучения [388—393].

В работах [11, 291, 292, 394, 395] изучаются и классифицируются всевозможные траектории движения частиц в поле Шварцшильда, Нордстрема — Рейснера и Керра.

В заключение обзора литературы выделим серию работ, специально посвященных роли координатных условий (выбору систем координат) в проблеме движения. В первых же работах по проблеме движения [90, 93—95] Эйнштейн и Фок с сотрудниками обратились к конкретным координатным условиям. Хотя последние были различными, уравнения движения в постньютоновом приближении получились одинаковыми. Причины такого результата позднее неоднократно обсуждались [96—100, 106—108, 186, 396—411]. Это обсуждение превратилось в дискуссию о роли координатных условий в ОТО вообще и, в частности, о физической значимости гармонической системы координат как системы привилегированной [6, 412—427]. Мы не будем здесь вдаваться в детали дискуссии, которые не имеют прямого отношения к делу (обсуждение и сопоставление разных точек зрения см., например, в [426]). Отметим только, что гармонической системе координат, впервые введенной в рассмотрение Де-Донде и Ланчосом [428, 429], в задаче движения системы тел астрономического типа действительно принадлежит исключительная роль. При выводе релятивистских уравнений движения методом школы Эйнштейна — Инфельда, чтобы получить разумные с физической точки зрения решения, приходится пользоваться именно гармонической системой координат, которая выступает в задачах такого рода как привилегированная система.

Глава I

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КАК СЛЕДСТВИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ ОТО, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ДАЛЬНЕЙШЕМ

ОТО является конкретным воплощением идеи о взаимосвязи геометрии и физики, впервые высказанной гениальным Лобачевским в 1826 г. [1], а затем Риманом в 1854 г. [2]. Основными уравнениями ОТО являются уравнения гравитационного поля, называемые также уравнениями Эйнштейна [В.71, В.72], которые можно записать в контравариантных компонентах в виде

$$R^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R=-\frac{8\pi\gamma}{c^4}T^{\alpha\beta}. \tag{3.1}$$

Напомним смысл этих уравнений и входящих в них величин. Материя движется в четырехмерном римановом пространстве — времени V_4 с метрикой

$$ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta,\quad g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha},\quad \operatorname{sign} g_{\alpha\beta}=(+\,-\,-\,-). \tag{3.2}$$

Инвариант ds называется пространственно-временным интервалом между двумя бесконечно близкими событиями, $g_{\alpha\beta}$ — ковариантный метрический тензор, x^α — координаты точек в V_4, γ — ньютонова постоянная тяготения, c — скорость света в вакууме. По повторяющимся, так называемым «немым», индексам α, β, μ и т. д. производится суммирование (это правило будет действовать во всей книге). Греческие индексы α, β, μ, ν, ... принимают значения 0, 1, 2, 3.

Контравариантный метрический тензор $g^{\alpha\beta}$ связан по определению с $g_{\alpha\beta}$ и символом Кронекера δ^α_β ($\delta^\alpha_\beta=0$, если $\alpha\neq\beta$, и $\delta^\alpha_\beta=1$, если $\alpha=\beta$) соотношением

$$g^{\alpha\mu}g_{\mu\beta}=\delta^\alpha_\beta. \tag{3.3}$$

Тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ получается в результате операции свертки тензора кривизны Римана — Кристоффеля

$$R^{\mu}_{\cdot\alpha\beta\nu}\equiv\frac{\partial\Gamma^\mu_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}+\Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\beta\sigma}-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\nu\sigma} \tag{3.4}$$

по значкам μ и ν, т. е.

$$R_{\alpha\beta} \equiv R_{\cdot\alpha\beta\mu}^{\mu} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} = R_{\beta\alpha}. \quad (3.5)$$

Величины $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$, называемые символами Кристоффеля второго рода, выражаются через метрический тензор известными формулами

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} \right), \ \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}. \quad (3.6)$$

Поднимание и опускание индексов производится с помощью метрического тензора. Инвариант R (скалярная кривизна V_4) получен из $R_{\alpha\beta}$ путем поднимания одного из индексов, например β, и последующей свертки полученного тензора R_{α}^{β} по индексам α и β:

$$R_{\alpha}^{\beta} \equiv g^{\beta\sigma} R_{\alpha\sigma}, \ R \equiv R_{\alpha}^{\alpha}. \quad (3.7)$$

Тензор энергии-импульса материи $T^{\alpha\beta}$ связан с геометрией пространства-времени V_4, в котором движется эта материя, уравнениями (3.1). Система уравнений (3.1) является системой десяти дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно десяти неизвестных функций $g^{\alpha\beta}(x^{\nu})$. Изменение правой части в (3.1) влечет за собой изменение решения системы. В тензор энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$, кроме физических величин (масс, зарядов, скоростей, угловых и магнитных моментов тел и т. д.), характеризующих рассматриваемую материальную систему, входит метрика $g_{\alpha\beta}$. Это означает, что не только материя вызывает изменение свойств пространства и времени, но и обратно — порожденные материей свойства пространства и времени влияют на ее распределение и движение.

Налицо диалектическая взаимосвязь между материей и формами ее существования — пространством и временем. Как уже упоминалось в обзоре литературы, определяемая системой (3.1) взаимосвязь оказывается настолько глубокой, что уравнения движения тел являются следствием полевых уравнений, т. е., другими словами, содержатся в (3.1). Это свойство уравнений Эйнштейна определяется, во-первых, их нелинейностью, и, во-вторых, существованием четырех тождеств, которым удовлетворяют десять уравнений (3.1) [B.97]. Эти тождества, называемые тождествами Бианки, выражают результат фундаментальной важности для ОТО: ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна $G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R$ тождественно равна нулю, т. е.

$$G_{;\,\beta}^{\alpha\beta} \equiv 0, \quad (3.8)$$

где точка с запятой обозначает ковариантную частную производную.

Следствием этого тождества в силу полевых уравнений (3.1) будет выполнение равенства

$$T_{;\,\beta}^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.9)$$

которое наряду с полевыми уравнениями (3.1) играет основную роль в проблеме движения.

Пока ограничимся перечисленными выше сведениями из римановой геометрии, тензорного анализа и ОТО. Подробное изложение этих вопросов можно найти во многих монографиях, например в [B.5, B.6, B.13; 3, 4].

§ 4. ДИРАКОВСКИЕ δ-ФУНКЦИИ И ИХ МОДИФИКАЦИЯ

Как известно, δ-функции впервые начали применяться в теоретической физике Дираком с 1926 г. δ-функции принадлежат к так называемым обобщенным функциям, строгая теория которых вначале не была известна. Строгая с математической точки зрения теория δ-функций была построена только в послевоенные годы [B.102, B.103], что, однако, не мешало физикам успешно пользоваться δ-функциями и значительно раньше.

Приведем определение дираковских δ-функций и самые необходимые для дальнейшего рассмотрения свойства этих функций (без доказательств), отсылая читателя за подробностями к упоминавшимся выше источникам [B.101—B.105, B.108] (см. также [5]).

Трехмерные $\delta(\vec{x})$-функции Дирака аксиоматически определяются следующим образом [B.103].

1. $\delta(\vec{x})$ имеет производные всех порядков, т. е. существуют производные $\dfrac{\partial^{p+q+r}\delta(\vec{x})}{(\partial x^1)^p(\partial x^2)^q(\partial x^3)^r}$, где $p, q, r=0, 1, 2, \dots$.

2. $\delta(\vec{x})=0$ при $\vec{x}\neq 0$ и $\delta(0)=+\infty$.

3. Для любой трехмерной окрестности $V(\vec{x}_0)$ точки $\vec{x}_0$ и произвольной непрерывной в точке $\vec{x}_0$ функции $f(t, \vec{x})$ выполняется соотношение

$$\int\limits_{V(\vec{x}_0)} f(t, \vec{x})\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)dV=f(t, \vec{x}_0). \tag{4.1}$$

Из данного аксиоматического определения следует, что если $f=f(t)$, то

$$\int\limits_{V(\vec{x}_0)} f(t)\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)dV=f(t). \tag{4.2}$$

Можно показать [B.101, B.108], что множество таким образом определенных $\delta(\vec{x})$ функций не пустое. В частности, $\delta(\vec{x})$ можно получать как пределы некоторых непрерывных функций $\delta(\varepsilon, \vec{x})$ при $\varepsilon\to 0$:

$$\delta(\vec{x})=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon, \vec{x}), \tag{4.3}$$

где, например [B.103],

$$\delta(\varepsilon, \vec{x})=(2\pi)^{-3/2}\varepsilon^{-3}e^{-1/2\,|\vec{x}|\,\varepsilon^{-2}}. \tag{4.4}$$

Использование дираковских δ-функций в проблеме движения оказывается не совсем удобным. Дело в том, что при выводе уравнений движения методом Эйнштейна — Инфельда приходится вычислять интегралы, в которых $f(\vec{x})$ разрывна как раз там, где δ-функция обращается в бесконечность. Чтобы вычислить такие интегралы, приходится «размывать» $\delta(\vec{x})$, т. е. переходить к $\delta(\varepsilon, \vec{x})$, и проводить специальное исследование на сходимость полученного интеграла, что фактически и проводилось в работах [B.100, B.109, B.114, B.131]. Это обстоятельство значительно удлиняло вычисления.

В работах [B.104, B.105] Инфельд и Плебаньский построили модифицированные $\hat{\delta}$-функции, которые, кроме трех указанных выше аксиом, удовлетворяют еще четвертой аксиоме.

4. Для любого объема $V(\vec{x}_0)$, содержащего внутри себя точку $\vec{x}_0$,

$$\int\limits_{V(\vec{x}_0)} \frac{\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^k}\, dV=0, \quad k=1, 2, 3, \ldots, N. \tag{4.5}$$

Модифицированная $\hat{\delta}$-функция может также рассматриваться как предел некоторой непрерывной функции [B.104, B.105, B.108].

Построение модифицированной $\hat{\delta}(\vec{x})$-функции снимает отмеченную выше трудность, что в свою очередь делает ненужной обременительную процедуру перенормировки масс, проводившуюся в работах [B.100, B.109, B.114, B.131].

В заключение параграфа укажем важную формулу, которой мы будем неоднократно пользоваться при выводе уравнений движения:

$$\int\limits_{V(\vec{x}_0)} f(\vec{x})\, \frac{\partial^{p+q+r}\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)}{(\partial x^1)^p(\partial x^2)^q(\partial x^3)^r}\, dV= \\ =(-1)^{p+q+r}\frac{\partial^{p+q+r} f(\vec{x}_0)}{(\partial x_0^1)^p(\partial x_0^2)^q(\partial x_0^3)^r}. \tag{4.6}$$

В частности,

$$\int\limits_{V(\vec{x}_0)} f(\vec{x})\, \frac{\partial\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\partial x^s}\, dV=-\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_0^s}, \quad s=1, 2, 3. \tag{4.7}$$

Эти формулы верны как для обычной дираковской δ-функции, так и для модифицированной. В дальнейшем мы будем пользоваться только модифицированными $\hat{\delta}$-функциями. Поэтому вместо «модифицированная $\hat{\delta}$-функция» будем для краткости писать «δ-функция».

§ 5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД

В этом параграфе изложим предложенный в [В.100, В.108] метод вывода уравнений поступательного движения для системы n тел сравнимых масс (в [В.100] рассматривалась система из двух тел).

Итак, пусть рассматривается задача о движении системы n гравитирующих точечных тел. При этом предполагается, что тела не обладают, кроме массы, иными общими характеристиками и что мировые линии тел не пересекаются. Тогда в качестве плотности тензора энергии-импульса $\bar{T}^{\alpha\beta}\equiv\sqrt{-g}\,T^{\alpha\beta}$ (g является определителем, составленным из $g_{\alpha\beta}$, черта над коренной буквой всегда будет обозначать умножение величины на $\sqrt{-g}$) выбирается величина

$$\bar{T}^{\alpha\beta}=\sum_a \bar{T}_a^{\alpha\beta},$$

$$\bar{T}_a^{00}=m_a\delta_a,\quad \bar{T}_a^{0i}=m_a\frac{da^i}{dx^0}\delta_a,\quad \bar{T}_a^{ij}=m_a\frac{da^i}{dx^0}\frac{da^j}{dx^0}\delta_a. \qquad (5.1)$$

Здесь суммирование производится по всем n телам системы, которые мы будем обозначать малыми буквами $a, b, \ldots$; суммирование по повторяющимся значкам $a, b, \ldots$ предполагаться не будет; m_a — функция только временной координаты x^0; $a^i(x^0)$ — координаты a-го тела; $\delta_a\equiv\delta(\vec{r}-\vec{a})=\delta(x^1-a^1)\delta(x^2-a^2)\delta(x^3-a^3)$ является трехмерной дираковской (модифицированной Инфельдом и Плебаньским) δ-функцией, относящейся к телу a; векторы $\vec{r}$ и $\vec{a}$ имеют соответственно координаты x^i и a^i. Латинские индексы $i, j, k, l, s, \ldots$ принимают значения 1, 2, 3, относясь только к пространству.

Выражение (5.1) для $\bar{T}^{\alpha\beta}$ выводится из тензорной плотности тензора энергии-импульса для пылевидной материи

$$\bar{T}^{\alpha\beta}=\sqrt{-g}\,\rho\,u^\alpha u^\beta,\quad u^\alpha\equiv\frac{dx^\alpha}{ds}, \qquad (5.2)$$

где для плотности материи ρ принимается $\rho=\sum_a \rho_a=\sum_a m_a^*\delta_a$. Это означает, что каждое сферически симметричное скопление материи (тело конечных размеров), описываемое функцией ρ_a, заменяется материальной точкой с координатами a^i, имеющей ту же массу, что и скопление, и находящейся в центре тяжести последнего. Поэтому

$$m_a=\sqrt{-g}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 m_a^*. \qquad (5.3)$$

Интегрируя соотношение $\sqrt{-g}\,T^{\alpha\beta}_{;\beta}=0$, которое непосредственно следует из (3.9), по трехмерному объему V_a, содержащему a-е тело и не содержащему других тел, получаем 4 уравнения

$$\int\limits_{V_a} \sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\, dV=0, \tag{5.4}$$

из которых и выводятся уравнения поступательного движения тела a. Заметим, что уравнения (5.4) нековариантны, т. е. их левая часть не есть 4-вектор. Однако они «почти» ковариантны: умножив (5.4) на dx^0_a/ds_a (x^0_a и s_a — значения временно́й координаты и интервала на мировой линии тела a), получаем слева 4-вектор. Действительно, проинтегрируем ковариантное соотношение

$$\sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\, d\Omega \equiv \sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\, dV dx^0=0$$

по произвольному 4-объему Ω_a, содержащему соответствующую a-му телу мировую точку x^α_a (и не содержащему мировых точек, соответствующих другим телам). Тогда, как известно из тензорного анализа [В.13, 3, 4], если сделать предельный переход $\Omega_a \to 0$ (что возможно в силу пропорциональности $T^{\alpha\beta}$ δ-функциям), то опять получим ковариантное выражение. Границы трехмерного объема V_a можно считать произвольными (опять же в силу пропорциональности $T^{\alpha\beta}$ δ-функциям), а к интегралу по dx^0 применим теорему о среднем. Все это приводит к цепи равенств

$$\int\limits_{\Omega_a} \sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\, d\Omega = \int\limits_{\Delta x^0} dx^0 \int\limits_{V_a} \sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\, dV =$$

$$=\Delta x^0 \left[\int\limits_{V_a} \sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\, dV + O(\Delta x^0) \right] =0,$$

где $O(\Delta x^0) \to 0$ при $\Delta x^0 \to 0$ и является величиной более высокого порядка малости, чем Δx^0. Разделив последнее равенство на инвариант ds_a и делая затем предельный переход $\Delta x^0 \to 0$ (т. е. переход к пределу $\Omega_a \to 0$), получаем

$$(dx^0_a/ds_a) \int\limits_{V_a} \sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta} \cdot dV=0. \tag{5.5}$$

Так как $\lim\limits_{\Omega_a \to 0} \int\limits_{\Omega_a} \sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\, d\Omega$ является 4-вектором, то выражение (5.5) ковариантное, что и требовалось показать.

Итак, множитель dx^0_a/ds_a обеспечивает 4-векторный характер уравнений движения (5.5) (см. [6], где это утверждение доказывается иным путем). Опуская его, приходим к (5.4). Ковариантность (5.5) дает возможность не фиксировать вначале систему координат. Однако в процессе вывода уравнений движения из (5.4) (или (5.5)) приходится решать полевые уравнения (3.1). Выбор разумных с физической точки зрения решений (3.1) автоматически приводит к выбору разумной системы координат, которая (как это будет видно ниже) оказывается гармонической.

Подынтегральная функция в (5.4), кроме $4n$ неизвестных величин $m_a(x^0)$, $m_b(x^0)$, ..., $a^i(x^0)$, $b^i(x^0)$, ..., характеризующих поведение тел системы, содержит метрику V_4, которая должна находиться из (3.1). Но, чтобы искать $g_{\alpha\beta}$ из (3.1), нужно знать тензор $T^{\alpha\beta}$, который выражается через неизвестные величины m_a, m_b, ..., a^i, b^i, ... Таким образом, нужно проводить совместное рассмотрение и решать $10+4n$ уравнений (3.1), (5.4) для $10+4n$ неизвестных функций $g_{\alpha\beta}(x^\nu)$, $m_a(x^0)$, $m_b(x^0)$, ..., $a^i(x^0)$, $b^i(x^0)$, ...

Для решения этой очень сложной задачи школами Эйнштейна — Инфельда и Фока — Папапетру разработаны приближенные методы.

С помощью приближенного метода школы Эйнштейна — Инфельда уравнения поступательного движения выводятся из (5.4) следующим образом. Все величины, входящие в (3.1), разлагаются в ряды по малому параметру $\lambda=\dfrac{1}{c}$, где, как и ранее, c — скорость света в вакууме. Эти разложения основываются на требовании, чтобы в приближении слабого поля уравнения Эйнштейна (3.1) сводились к уравнению Пуассона ньютоновой теории тяготения, а уравнения (5.4) — к ньютоновым уравнениям движения, которые в случае двух тел имеют структуру:

$$\text{масса}\cdot\text{ускорение}=\frac{\text{масса}\cdot\text{масса}}{(\text{расстояние между телами})^2}. \qquad (5.6)$$

Вводя в рассмотрение время далекого наблюдателя t, которое связано с временно́й координатой x^0 простым равенством $t=\dfrac{x^0}{c}=x\lambda^0$, получаем

$$\frac{da^i}{dx^0}=\frac{1}{c}\,\frac{da^i}{dt}=\lambda\dot{a}^i,\quad \frac{d^2a^i}{dx^{02}}=\frac{1}{c^2}\,\frac{d^2a^i}{dt^2}=\lambda^2\ddot{a}^i.$$

И вообще, дифференцирование любой функции $\varphi(x^0)$ по x^0 повышает порядок функции относительно λ на единицу: $\dfrac{d\varphi}{dx^0}=\lambda\dot{\varphi}$. Так как порядки величин справа и слева в (5.6) должны быть равными, то заключаем, что функция $m_a(t)$ должна начинать свое разложение по λ с членов второго порядка. Принимаем следующее разложение (число под коренной буквой всегда будет указывать на порядок величины по λ):

$$m_a(t)=\lambda^2\underset{2}{m_a}+\lambda^4\underset{4}{m_a}+\dots, \qquad (5.7)$$

которое сразу же приводит к разложению по λ плотности тензора энергии-импульса

$$\left.\begin{aligned}
\bar{T}^{00} &= \lambda^2 \underset{2}{\bar{T}}{}^{00} + \lambda^4 \underset{4}{\bar{T}}{}^{00} + \dots, \\
\bar{T}^{0i} &= \lambda^3 \underset{3}{\bar{T}}{}^{0i} + \lambda^5 \underset{5}{\bar{T}}{}^{0i} + \dots, \\
\bar{T}^{ij} &= \lambda^4 \underset{4}{\bar{T}}{}^{ij} + \lambda^6 \underset{6}{\bar{T}}{}^{ij} + \dots .
\end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Требование галилеевости пространства-времени и системы координат в наинизшем ньютоновом приближении в соединении с (5.8) приводит благодаря связи (3.1) к разложению метрики

$$\left.\begin{aligned}
g_{00} &= 1 + \lambda^2 \underset{2}{h}_{00} + \lambda^4 \underset{4}{h}_{00} + \dots, \\
g_{0i} &= \lambda^3 \underset{3}{h}_{0i} + \lambda^5 \underset{5}{h}_{0i} + \dots, \\
g_{ij} &= -\delta_{ij} + \lambda^2 \underset{2}{h}_{ij} + \lambda^4 \underset{4}{h}_{ij} + \dots
\end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

и всех выражающихся через $g_{\alpha\beta}$ величин (δ_{ij} — кронекерова дельта). Укажем эти разложения, которыми нам неоднократно придется пользоваться в дальнейшем. Прежде всего имеем

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} &= 1 + \lambda^2 \frac{1}{2} (\underset{2}{h}_{00} - \underset{2}{h}_{11} - \underset{2}{h}_{22} - \underset{2}{h}_{33}) + \dots = \\
&= 1 + \lambda^2 \frac{1}{2} (\underset{2}{h}_{00} - \underset{2}{h}_{ss}) + \dots .
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Пользуясь связью (3.3), находим разложение $g^{\alpha\beta}$:

$$\left.\begin{aligned}
g^{00} &= 1 - \lambda^2 \underset{2}{h}_{00} + \lambda^4 (\underset{2}{h}{}^2_{00} - \underset{4}{h}_{00}) + \dots, \\
g^{0i} &= \lambda^3 \underset{3}{h}_{0i} + \lambda^5 (\underset{5}{h}_{0i} - \underset{2}{h}_{00} \underset{3}{h}_{0i} + \underset{3}{h}_{0s} \underset{2}{h}_{is}) + \dots, \\
g^{ij} &= -\delta_{ij} - \lambda^2 \underset{2}{h}_{ij} - \lambda^4 (\underset{4}{h}_{ij} + \underset{2}{h}_{is} \underset{2}{h}_{js}) + \dots .
\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

Если воспользоваться (3.6) и приведенными разложениями $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$, то легко получить разложение по λ символов Кристоффеля $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$. Вводя сокращенную запись для обычных частных производных $g_{\alpha\beta,\nu} \equiv \partial g_{\alpha\beta}/\partial x^{\nu}$, имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \lambda^3 \frac{1}{2} \underset{2}{h}_{00,\underset{1}{0}} + \lambda^5 \frac{1}{2} \left(\underset{4}{h}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2}{h}_{00} \underset{2}{h}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{3}{h}_{0s} \underset{2}{h}_{00,s}\right) + \ldots, \\
\Gamma^i_{00} &= \lambda^2 \frac{1}{2} \underset{2}{h}_{00,i} + \lambda^4 \frac{1}{2} \left(\underset{4}{h}_{00,i} + \underset{2}{h}_{is} \underset{2}{h}_{00,s} - 2\underset{3}{h}_{0i,\underset{1}{0}}\right) + \ldots, \\
\Gamma^0_{0i} &= \lambda^2 \frac{1}{2} \underset{2}{h}_{00,i} + \lambda^4 \frac{1}{2} \left(\underset{4}{h}_{00,i} - \underset{2}{h}_{00} \underset{2}{h}_{00,i}\right) + \ldots, \\
\Gamma^k_{0i} &= \lambda^3 \frac{1}{2} \left(\underset{3}{h}_{0i,k} - \underset{3}{h}_{0k,i} - \underset{2}{h}_{ik,\underset{1}{0}}\right) + \ldots, \\
\Gamma^0_{ik} &= \lambda^3 \frac{1}{2} \left(\underset{3}{h}_{0i,k} + \underset{3}{h}_{0k,i} - \underset{2}{h}_{ik,\underset{1}{0}}\right) + \ldots, \\
\Gamma^l_{ik} &= \lambda^2 \frac{1}{2} \left(\underset{2}{h}_{ik,l} - \underset{2}{h}_{il,k} - \underset{2}{h}_{kl,i}\right) + \ldots .
\end{aligned}\right\} \qquad (5.12)$$

Единица под нуликом подчеркивает отмеченный выше факт, что при дифференцировании по x^0 порядок величины увеличивается на единицу.

Полезно также знать, что

$$\Gamma^\alpha_{0\alpha} = \lambda^3 \frac{1}{2} \left(\underset{2}{h}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2}{h}_{ss,\underset{1}{0}}\right) + \ldots; \quad \Gamma^\alpha_{i\alpha} = \lambda^2 \frac{1}{2} \left(\underset{2}{h}_{00,i} - \underset{2}{h}_{ss,i}\right) + \ldots . \qquad (5.13)$$

Теперь нетрудно получить разложение плотности тензора Риччи $\bar{R}_{\alpha\beta} \equiv \sqrt{-g}\, R_{\alpha\beta}$, если воспользоваться (3.5), (5.10), (5.12) и (5.13):

$$\left.\begin{aligned}
\bar{R}_{00} = &-\lambda^2 \frac{1}{2} \underset{2}{h}_{00,ss} - \lambda^4 \frac{1}{2} \Big[\underset{4}{h}_{00,ss} + \underset{2}{h}_{ss,\underset{11}{00}} - 2\underset{3}{h}_{0s,\underset{1}{s0}} + \underset{2}{h}_{ls} \underset{2}{h}_{00,ls} - \\
&- \frac{1}{2} \underset{2}{h}_{00,s} \underset{2}{h}_{00,s} - \frac{1}{2} \underset{2}{h}_{00,s} \underset{2}{h}_{ll,s} + \underset{2}{h}_{00,s} \underset{2}{h}_{sl,l} + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\underset{2}{h}_{00} - \underset{2}{h}_{ll}\right) \underset{2}{h}_{00,ss}\Big] + \ldots, \\
\bar{R}_{0i} = &\ \lambda^3 \frac{1}{2} \left(-\underset{3}{h}_{0i,ss} + \underset{3}{h}_{0s,si} + \underset{2}{h}_{is,\underset{1}{s0}} - \underset{2}{h}_{ss,\underset{1}{i0}}\right) + \ldots, \\
\bar{R}_{ik} = &\ \lambda^2 \frac{1}{2} \left(-\underset{2}{h}_{ik,ss} + \underset{2}{h}_{00,ik} - \underset{2}{h}_{ss,ik} + \underset{2}{h}_{is,ks} + \underset{2}{h}_{ks,is}\right) + \ldots .
\end{aligned}\right\} \qquad (5.14)$$

При решении полевых уравнений (3.1) будет удобнее пользоваться их иной хорошо известной формой:

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T\right),$$

где $T \equiv T^{\alpha}_{\alpha}$. Переходя к тензорным плотностям, имеем:

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T\right). \tag{5.15}$$

Так как у нас дана в (5.1) структура $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$, а не $T_{\alpha\beta}$, то дадим разложение по λ правой части (5.15) через $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$. Находим:

$$\left.\begin{aligned}
&T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T = \lambda^2 \frac{1}{2} \underset{2}{\mathfrak{T}}{}^{00} + \lambda^4 \frac{1}{2}\left(\underset{4}{\mathfrak{T}}{}^{00} + 2\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{\mathfrak{T}}{}^{00} + \underset{4}{\mathfrak{T}}{}^{ss}\right) + \ldots, \\
&T_{0i} - \frac{1}{2} g_{0i} T = -\lambda^3 \underset{3}{\mathfrak{T}}{}^{0i} + \ldots, \\
&T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T = \lambda^2 \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathfrak{T}^{00} + \ldots.
\end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

Имея в виду, что

$$\sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\beta} \equiv (\mathfrak{T}^{\alpha\beta})_{,\beta} + \Gamma_{\beta\nu}\mathfrak{T}^{\beta\nu}, \tag{5.17}$$

можно, воспользовавшись разложениями (5.8) и (5.12), также разложить в ряды по λ уравнения движения в интегральной форме (5.4), что будет сделано в следующем параграфе.

Как мы видим, во всех разложениях порядки рядом стоящих членов отличаются на две единицы. Подобная же ситуация имеет место и в приближенном методе Фока — Папапетру. Более глубокое исследование проблемы движения показывает [B.6, B.108, 7], что разложение без пропусков обозначало бы учет гравитационного излучения системы.

Например, в работах [8, 9] показано, что члены, связанные с гравитационным излучением, появляются в g_{00} и g_{ij} только в пятом порядке по λ $(\underset{5}{h}_{00}, \underset{5}{h}_{ij})$, что приводит к членам седьмого порядка в тензоре кривизны и членам девятого порядка в уравнениях движения (членам порядка c^{-5} в методе Фока — Папапетру). Так как мы собираемся выводить только посленьютоновы уравнения движения, которые имеют шестой порядок по λ (порядок c^{-2} в методе Фока — Папапетру), то сделанные в разложениях пропуски не влияют на выводимые уравнения.

§ 6. РЕШЕНИЕ ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ И ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Полевые уравнения (5.15) в наинизших втором и третьем порядках по λ, как видно из (5.1), (5.7), (5.14) и (5.16), следующие:

$$\underset{2}{h}_{00,\,ss} = 8\pi\gamma \sum_a m_a \underset{2}{\delta}_a, \tag{6.1}$$

$$\underset{2}{h}_{ik,\,ss} + \underset{2}{h}_{ss,\,ik} - \underset{2}{h}_{is,\,ks} - \underset{2}{h}_{ks,\,is} = \underset{2}{h}_{00,\,ik} + \delta_{ik}\underset{2}{h}_{00,\,ss}, \tag{6.2}$$

$$\underset{3}{h}_{0i,\,ss} - \underset{3}{h}_{0s,\,si} = \underset{2}{h}_{is,\,s\underset{1}{0}} - \underset{2}{h}_{ss,\,i\underset{1}{0}} - 16\pi\gamma \sum_a m_a \dot{a}^i \underset{2}{\delta}_a. \tag{6.3}$$

Решение уравнения (6.1) выбирается так, чтобы произошло согласование с ньютоновым потенциалом:

$$\underset{2}{h}_{00}=-2\sum_a \gamma m_a/r_a,\quad r_a\equiv|\vec{r}-\vec{a}|. \tag{6.4}$$

Решение уравнения (6.2) выбираем таким, чтобы в случае одного тела оно было сферически симметричным и галилеевым на пространственной бесконечности. Тогда находим

$$\underset{2}{h}_{ik}=\delta_{ik}\underset{2}{h}_{00}. \tag{6.5}$$

Уравнение (6.3) в силу (6.5) несколько упрощается:

$$\underset{3}{h}_{0i,\,ss}-\underset{3}{h}_{0s,\,si}=-2\underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0}i}-16\pi\gamma\sum_a \underset{2}{m_a}\dot{a}^i\delta_a. \tag{6.6}$$

Его решение выбирается следующим:

$$\underset{3}{h}_{0i}=4\sum_a\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\dot{a}^i}{r_a}. \tag{6.7}$$

Условия гармоничности

$$(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta})_{,\,\beta}=0 \tag{6.8}$$

в наинизших втором и третьем порядках имеют вид:

$$\underset{2}{h}_{is,\,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,i}-\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{ss,\,i}=0,\quad \underset{3}{h}_{0s,\,s}-\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0}}-\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{ss,\,\underset{1}{0}}=0. \tag{6.8*}$$

Легко проверить, что они найденной метрикой (6.4), (6.5), (6.7) удовлетворяются, т. е. система координат в рассматриваемых приближениях гармоническая.

Чтобы вывести посленьютоновы уравнения поступательного движения, понадобится еще знание величины $\underset{4}{h}_{00}$. Из уравнения (5.15) при $\alpha=\beta=0$ в 4-м порядке для ее определения получаем следующее дифференциальное уравнение, если заменить $\underset{2}{h}_{ik}$ на $\delta_{ik}\underset{2}{h}_{00}$:

$$\underset{4}{h}_{00,\,ss}=2\underset{3}{h}_{0s,\,s\underset{1}{0}}+\underset{2}{h}_{00,\,s}\underset{2}{h}_{00,\,s}-3\underset{2}{h}_{00,\,\underset{11}{00}}+8\pi\gamma(2\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{T}^{00}+\underset{4}{T}^{00}+\underset{4}{T}^{ss}). \tag{6.9}$$

Воспользовавшись тем, что

$$\underset{3}{h}_{0s,\,s}=2\underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0}},\quad \underset{2}{h}_{00}\underset{2}{h}_{00,\,ss}+\underset{2}{h}_{00,\,s}\underset{2}{h}_{00,\,s}=\frac{1}{2}(\underset{2}{h}_{00}^{2})_{,\,ss}\quad\text{и}\quad \underset{2}{h}_{00,\,ss}=8\pi\gamma\underset{2}{T}^{00},$$

а также значениями $\underset{4}{T}^{00}$ и $\underset{4}{T}^{ss}$, получаем из (6.9) уравнение

$$\underset{4}{h}_{00,\,ss}=\underset{2}{h}_{00,\,\underset{11}{00}}+\frac{1}{2}(\underset{2}{h}_{00}^{2})_{,\,ss}+8\pi\gamma\sum_a(\underset{2}{m_a}\underset{2}{h}_{00}+\underset{2}{m_a}\dot{a}^s\dot{a}^s+\underset{4}{m_a}), \tag{6.10}$$

решение которого имеет вид

$$\underset{4}{h}_{00}=2\left(\sum_a \frac{\gamma \underset{2}{m}_a}{r_a}\right)^2+\sum_a\left(-\gamma \underset{2}{m}_a \underset{11}{r_{a,\,00}}-2\gamma \underset{2}{m}_a \frac{\dot a^s \dot a^s}{r_a}-\right.$$

$$\left.-2\frac{\gamma \underset{4}{m}_a}{r_a}+4\sum_{b\neq a}\frac{\gamma^2 \underset{2}{m}_a \underset{2}{m}_b}{r_{ab} r_a}\right), \qquad (6.11)$$

где $r_{ab}\equiv|\vec{b}-\vec{a}|$.

Теперь можно приступить к рассмотрению уравнений движения (5.4). Для этого прежде всего разложим в ряды по λ подынтегральную функцию, используя выражение (5.17), а также разложения (5.8) и (5.12). В итоге получаем, заменив всюду $\underset{2}{h}_{ik}$ согласно (6.5):

$$\sqrt{-g}\,T^{0\beta}_{;\,\beta}=\lambda^3(\underset{2}{\overline{T}}{}^{00}_{,\underset{1}{0}}+\overline{T}{}^{0s}_{,\,s})+$$

$$+\lambda^5\left(\underset{4}{\overline{T}}{}^{00}_{,\underset{1}{0}}+\underset{5}{\overline{T}}{}^{0s}_{,\,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0}}\underset{2}{\overline{T}}{}^{00}+\underset{2}{h}_{00,\,s}\underset{3}{\overline{T}}{}^{0s}\right)+\ldots, \qquad (6.12)$$

$$\sqrt{-g}\,T^{i\beta}_{;\,\beta}=\lambda^4\left(\underset{3}{\overline{T}}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}+\underset{4}{\overline{T}}{}^{is}_{,\,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,i}\underset{2}{\overline{T}}{}^{00}\right)+$$

$$+\lambda^6\left[\underset{5}{\overline{T}}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}+\underset{6}{\overline{T}}{}^{is}_{,\,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,i}\underset{4}{\overline{T}}{}^{00}+\frac{1}{2}(\underset{4}{h}_{00,\,i}+\underset{2}{h}_{00}h_{00,\,i}-2\underset{3}{h}_{0i,\,\underset{1}{0}})\underset{2}{\overline{T}}{}^{00}+\right.$$

$$\left.+(\underset{3}{h}_{0s,\,i}-\underset{3}{h}_{0i,\,s})\underset{3}{\overline{T}}{}^{0s}-\underset{2}{h}_{00,\underset{1}{0}}\underset{3}{\overline{T}}{}^{0i}-\underset{2}{h}_{00,\,s}\underset{4}{\overline{T}}{}^{is}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,i}\underset{4}{\overline{T}}{}^{ss}\right]+\ldots \qquad (6.13)$$

Из (5.4) при $\alpha=0$, согласно (6.12), получаем наинизший 3-й порядок:

$$\int_{V_a}(\underset{2}{\overline{T}}{}^{00}_{,\underset{1}{0}}+\underset{3}{\overline{T}}{}^{0s}_{,\,s})dV=\int_{V_a}\underset{2}{\overline{T}}{}^{00}_{,\underset{1}{0}}dV=\int_{V_a}(\underset{2}{m}_a\delta_a)_{,\underset{1}{0}}dV=\underset{2}{m}_{a,\,\underset{1}{0}}=0. \qquad (6.14)$$

Здесь мы воспользовались тем, что интеграл от $\underset{3}{\overline{T}}{}^{0s}_{a,\,s}$ обращается в нуль, так как по теореме Гаусса он может быть заменен интегралом по поверхности, охватывающей объем V_a, на которой $\underset{3}{\overline{T}}{}^{0s}_a\equiv 0$ в силу пропорциональности $\underset{3}{\overline{T}}{}^{0s}_a$ функции δ_a. В конце вычисления также использовано свойство δ-функций (4.2). Итак, для любого тела a получено

$$\underset{2}{m}_a=\text{const}. \qquad (6.15)$$

При $\alpha=i$ из (5.4) в наинизшем 4-м порядке в соответствии с (6.13) находим

$$\int\limits_{V_a}\left(\underset{3}{T}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}+\underset{4}{T}{}^{is}_{,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,i}\underset{2}{T}{}^{00}\right)dV=0. \tag{6.16}$$

Интеграл от второго слагаемого равен нулю по той же причине, что и в (6.14). Далее имеем, воспользовавшись (4.2), (4.5), (5.1), (6.4) и (6.15):

$$\int\limits_{V_a}\underset{3}{T}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}dV=\int\limits_{V_a}\bar{T}{}^{0i}_{a,\underset{1}{0}}dV=\underset{2}{m_a}\ddot{a}^i.$$

$$\int\limits_{V_a}\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,i}\underset{2}{\bar{T}}{}^{00}dV=-\int\limits_{V_a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m}{}_a^2}{r_a}\right)_{,i}\delta_a dV-$$

$$-\sum_{b\neq a}\int\limits_{V_a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_b}\right)_{,i}\delta_a dV=-\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^i}. \tag{6.16*}$$

Подчеркнем, что здесь впервые встретился интеграл

$$\int\limits_{V_a}\left(\frac{\delta_a}{r_a}\right)_{,i}dV=-\int\limits_{V_a}\frac{x^i-a^i}{r_a^3}\delta_a dV,$$

который в силу свойства (4.5) δ-функции обратился в нуль. В работах [В.100, В.109, В.114] для доказательства этого факта приходилось проводить специальное рассмотрение. В итоге (6.16) дает

$$\underset{2}{m_a}\ddot{a}^i=\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^i}. \tag{6.17}$$

Таким образом, в низших приближениях (5.4) приводит к ньютоновым уравнениям движения, если постоянные интегрирования $\underset{2}{m_a}$, $\underset{2}{m_b}$, ... выбирать положительными и считать ньютоновыми массами тел a, b, ... Ньютоновы уравнения движения содержатся в уравнениях гравитационного поля (3.1).

Переходим к выводу уравнений движения в следующем приближении. Рассмотрим (5.4) при $\alpha=0$ в следующем 5-м порядке. Используя (6.12), получаем

$$\int\limits_{V_a}\left(\underset{4}{T}{}^{00}_{,\underset{1}{0}}+\underset{5}{T}{}^{0s}_{,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\underset{1}{0}}\underset{2}{T}{}^{00}+\underset{2}{h}_{00,\,s}\underset{3}{T}{}^{0s}\right)dV=0. \tag{6.18}$$

Последовательно вычисляем, пользуясь выражениями для T и $\underset{2}{h}_{00}$:

$$\int_{V_a} \underset{4}{\bar T}{}^{00}_{,\underset{1}{0}}\, dV = \int_{V_a} (\underset{4}{m_a}\delta_a)_{,\underset{1}{0}}\, dV = \underset{4}{m}_{a,\underset{1}{0}}; \quad \int_{V_a} \underset{5}{\bar T}{}^{0s}_{,s}\, dV = 0;$$

$$\int_{V_a} \frac{1}{2} \underset{2}{h}_{00,\underset{1}{0}}\, \underset{2}{\bar T}{}^{00} dV = -\int_{V_a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a^2}}{r_a}\right)_{,\underset{1}{0}}\delta_a dV -$$

$$-\sum_{b\neq a}\int_{V_a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_b}\right)_{,\underset{1}{0}}\delta_a dV = -\gamma \underset{2}{m_a^2}\,\dot a^s \int_{V_a}\frac{x^s-a^s}{r_a^3}\,\delta_a dV +$$

$$+\sum_{b\neq a}\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\int_{V_a}\left(\frac{\dot b^s}{r_b}\right)_{,s}\delta_a dV = \sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot b^s;$$

$$\int_{V_a}\underset{2}{h}_{00,s}\,\underset{3}{\bar T}{}^{0s}dV = -2\int_{V_a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a^2}}{r_a}\right)_{,s}\dot a^s\delta_a dV -$$

$$-2\sum_{b\neq a}\int_{V_a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_b}\right)_{,s}\dot a^s\delta_a dV = 2\gamma\underset{2}{m_a^2}\,\dot a^s\int_{V_a}\frac{x^s-a^s}{r_a^3}\,\delta_a dV -$$

$$-2\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot a^s = -2\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot a^s. \qquad (6.18^*)$$

В вычислениях мы опять пользовались свойствами δ-функций (4.1), (4.5). Суммируем полученные результаты:

$$\underset{4}{m}_{a,\underset{1}{0}} - \sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^s}(\dot a^s-\dot b^s) - \sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot a^s = 0,$$

$$\underset{4}{m}_{a,\underset{1}{0}} - \sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,\underset{1}{0}} - \underset{2}{m_a}\dot a^s\ddot a^s =$$

$$= \left(\underset{4}{m_a} - \frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\dot a^s\dot a^s - \sum_{b\neq a}\frac{\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,\underset{1}{0}} = 0.$$

Здесь мы воспользовались ньютоновыми уравнениями движения (6.17). Приходим в результате к следующей оценке $\underset{4}{m_a}$:

$$\underset{4}{m_a} = \frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\dot a^s\dot a^s + \sum_{b\neq a}\frac{\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}} + \underset{4}{C_a}, \qquad (6.19)$$

где $\underset{4}{C_a}$ — произвольная постоянная интегрирования. Как видим, добавка $\underset{4}{m_a}$ к ньютоновой массе $\underset{2}{m_a}$ обязана кинетической и потенциальной энергии тела a. Постоянную $\underset{4}{C_a}$ следует считать нулем (или, если угодно, считать ее включенной в $\underset{2}{m_a}$).

Постньютоновы уравнения движения тела a будут получены из (5.4) при $\alpha=i$, если у подынтегральной функции (6.13), кроме членов 4-го порядка, учесть еще члены 6-го порядка:

$$\int\limits_{V_a}(\sqrt{-g}\,\underset{\to 6}{T^{i\beta}_{;\beta}})dV=\lambda^4\int\limits_{V_a}\left(\underset{3}{\bar T}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}+\underset{4}{\bar T}{}^{is}_{,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h_{00,i}}\underset{2}{\bar T^{00}}\right)dV+$$

$$+\lambda^6\int\limits_{V_a}\Big[\underset{5}{\bar T}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}+\underset{6}{\bar T}{}^{is}_{,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h_{00,i}}\underset{4}{\bar T^{00}}+\frac{1}{2}(\underset{4}{h_{00,i}}+\underset{2}{h_{00}}\underset{2}{h_{00,i}}-2\underset{3}{h_{0i,\underset{1}{0}}})\underset{2}{\bar T^{00}}+$$

$$+(\underset{3}{h_{0s,i}}-\underset{3}{h_{0i,s}})\underset{3}{\bar T^{0s}}-\underset{2}{h_{00,\underset{1}{0}}}\underset{3}{\bar T^{0i}}-\underset{2}{h_{00,s}}\underset{4}{\bar T^{is}}+\frac{1}{2}\underset{2}{h_{00,i}}\underset{4}{\bar T^{ss}}\Big]dV=0. \quad (6.20)$$

Интеграл от членов 4-го порядка уже вычислен. Последовательное вычисление интегралов от членов 6-го порядка с использованием свойств δ-функций (4.1), (4.5)—(4.7) и значений $\bar T^{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$, $\underset{4}{m_a}$ дает:

$$\int\limits_{V_a}\underset{5}{\bar T}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}dV=\int\limits_{V_a}(\underset{4}{m_a}\dot a^i\delta_a)_{,\underset{1}{0}}dV+\sum_{b\neq a}\int\limits_{V_a}(\underset{4}{m_b}\dot b^i\delta_b)_{,\underset{1}{0}}dV=$$

$$=(\underset{4}{m_a}\dot a^i)_{,\underset{1}{0}}=\underset{4}{\dot m_a}\dot a^i+\underset{4}{m_a}\ddot a^i;\quad \int\limits_{V_a}\underset{6}{\bar T}{}^{is}_{,s}dV=0;$$

$$\int\limits_{V_a}\frac{1}{2}\underset{2}{h_{00,i}}\underset{4}{\bar T^{00}}dV=-\sum_b\underset{4}{m_a}\int\limits_{V_a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_b}}{r_b}\right)_{,i}\delta_a dV=$$

$$=-\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{4}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^i}=-\underset{4}{m_a}\ddot a^i;$$

$$\int\limits_{V_a}\frac{1}{2}\underset{4}{h_{00,i}}\underset{2}{\bar T^{00}}dV=2\gamma^2\int\limits_{V_a}\sum_b\frac{\underset{2}{m_b}}{r_b}\sum_c\left(\frac{\underset{2}{m_c}}{r_c}\right)_{,i}\underset{2}{m_a}\delta_a dV-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_b\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\int\limits_{V_a}\dot b^s\dot b^k r_{b,ski}\delta_a dV+\frac{1}{2}\sum_b\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\int\limits_{V_a}\ddot b^s r_{b,si}\delta_a dV-$$

$$-\frac{3}{2}\sum_b\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\int\limits_{V_a}\dot b^s\dot b^s\left(\frac{1}{r_b}\right)_{,i}\delta_a dV+$$

$$+\gamma^2\sum_b\sum_{c\neq b}\int\limits_{V_a}\frac{\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\underset{2}{m_c}}{r_{bc}}\left(\frac{1}{r_b}\right)_{,i}\delta_a dV=$$

$$=2\gamma^2\sum_{b\neq a}\frac{\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b^2}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}+2\gamma^2\sum_{\substack{b\neq a\\ b\neq c}}\sum_{c\neq a}\frac{\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\underset{2}{m}_c}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{ac}}\right)_{,a^i}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b r_{ab,\,a^s a^k a^i}\dot b^s\dot b^k-\frac{3}{2}\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\dot b^s\dot b^s\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}+$$

$$+\sum_{b\neq a}\gamma^2\underset{2}{m}_a^2\underset{2}{m}_b\frac{1}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}+\sum_{\substack{b\neq a\\ b\neq c}}\sum_{c\neq a}\gamma^2\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\underset{2}{m}_c\frac{1}{r_{bc}}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i},$$

так как $r_{ab,\,a^s a^i}\ddot b^s\equiv 0$. Далее имеем:

$$\int\limits_{V_a}\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{h}_{00,\,i}\underset{2}{\overline{T}}{}^{00}dV=2\gamma^2\sum_b\sum_c\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\underset{2}{m}_c\int\limits_{V_a}\frac{1}{r_b}\left(\frac{1}{r_c}\right)_{,\,i}\delta_a dV=$$

$$=2\gamma^2\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\underset{2}{m}_c\frac{1}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{ac}}\right)_{,a^i};$$

$$-\int\limits_{V_a}\underset{3}{h}_{0i,\,\underset{1}{0}}\underset{2}{\overline{T}}{}^{00}dV=-4\sum_b\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\int\limits_{V_a}\left(\frac{\dot b^i}{r_b}\right)_{,\underset{1}{0}}\delta_a dV=$$

$$=-4\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\left[\ddot b^i\frac{1}{r_{ab}}-\dot b^i\dot b^s\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right];$$

$$\int\limits_{V_a}\underset{3}{h}_{0s,\,i}\underset{3}{T}{}^{0s}dV=4\sum_b\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\dot b^s\dot a^s\int\limits_{V_a}\left(\frac{1}{r_b}\right)_{,\,i}\delta_a dV=$$

$$=4\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\dot a^s\dot b^s;$$

$$-\int\limits_{V_a}\underset{3}{h}_{0i,\,s}\underset{3}{T}{}^{0s}dV=-4\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot a^s\dot b^i;$$

$$-\int\limits_{V_a}\underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0}}\underset{3}{T}{}^{0i}dV=2\sum_b\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\dot a^i\int\limits_{V_a}\left(\frac{1}{r_b}\right)_{,\underset{1}{0}}\delta_a dV=$$

$$=-2\sum_{b\neq a}(\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b/r_{ab})_{,a^s}\dot a^i\dot b^s;$$

$$-\int\limits_{V_a}\underset{2}{h}_{00,\,s}\underset{4}{T}{}^{is}dV=2\sum_b\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\dot a^i\dot a^s\int\limits_{V_a}\left(\frac{1}{r_b}\right)_{,\,s}\delta_a dV=$$

$$=2\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot a^i\dot a^s;$$

$$\int_{V_a} \frac{1}{2} \underset{2}{h}_{00,\,i} \underset{4}{T}^{ss} dV = -\sum_b \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \dot{a}^s \dot{a}^s \int_{V_a} \left(\frac{1}{r_b}\right)_{,\,i} \delta_a dV =$$

$$= -\sum_{b \neq a} \left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i} \dot{a}^s \dot{a}^s. \qquad (6.21)$$

Остается только просуммировать вычисленные интегралы в соответствии с (6.20). Сокращаем (6.20) на λ^4, ньютоновы массы $\underset{2}{m_a}$, $\underset{2}{m_b}$, $\underset{2}{m_c}$, ... для простоты обозначаем через m_a, m_b, m_c, ... и, помня, что $\lambda = \frac{1}{c}$, приходим к известным [В.95—В.98] уравнениям поступательного движения тела a в следующем за ньютоновым приближении:

$$m_a \ddot{a}^i - \sum_{b \neq a} \left(\frac{\gamma m_a m_b}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i} = F^i_{a(g)}, \qquad (6.22)$$

где релятивистская силовая добавка

$$F^i_{a(g)} \equiv \sum_{b \neq a} \frac{\gamma m_a m_b}{c^2} \Bigg[\Bigg(\dot{a}^s \dot{a}^s + \frac{3}{2} \dot{b}^s \dot{b}^s -$$

$$- 4 \dot{a}^s \dot{b}^s - 4 \frac{\gamma m_b}{r_{ab}} - 5 \frac{\gamma m_a}{r_{ab}} \Bigg) \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i} +$$

$$+ (4 \dot{a}^s \dot{b}^i - 4 \dot{a}^i \dot{a}^s + 3 \dot{a}^i \dot{b}^s - 4 \dot{b}^i \dot{b}^s) \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s} + \frac{1}{2} r_{ab,\,a^s a^k a^i} \dot{b}^s \dot{b}^k \Bigg] +$$

$$+ \sum_{b \neq a} \sum_{\substack{c \neq a \\ b \neq c}} \frac{\gamma^2 m_a m_b m_c}{2c^2} \left[\frac{7}{r_{ab}} \left(\frac{1}{r_{bc}}\right)_{,\,b^i} - \frac{2}{r_{bc}} \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i} - \right.$$

$$\left. - \frac{8}{r_{ac}} \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i} + (b^s - a^s) \left(\frac{1}{r_{bc}}\right)_{,\,b^s} \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i} \right]. \qquad (6.23)$$

Резюмируя результаты § 5.6, можно отметить, что привлечение к выводу уравнений движения тензора энергии-импульса (вопреки традиции школы Эйнштейна) и введение Инфельдом в этот тензор дираковских δ-функций чрезвычайно упростили всю процедуру: вывод уравнений (6.22), занимавший ранее сложными вычислениями сотни страниц [В.90, В.97], стал легко обозримым.

Будет естественным стремление применить предложенный Инфельдом метод к выводу уравнений движения в более сложных случаях, когда, например, тела обладают собственными вращениями или электромагнитными полями (или тем и другим одновременно).

§ 7. ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

Одним из наиболее ответственных моментов в процессе получения уравнений движения является выбор тензора энергии-импульса. Если тела не вращаются, то $T^{\alpha\beta}$ выбирается в виде (5.1). Если тела обладают собственными угловыми моментами импульса, то к поступательной скорости $\frac{da^i}{dt}$ каждого тела a добавляется некоторая величина, имеющая размерность скорости. Какой вид имеет эта величина и как она войдет в $T^{\alpha\beta}$? Чтобы выяснить это, рассмотрим некоторое тело a конечных размеров, центр тяжести которого движется в евклидовом пространстве со скоростью $\vec{v}_a(t)$, а само тело одновременно вращается наподобие твердого тела с угловой скоростью $\vec{\omega}_a(t)$ вокруг своего центра тяжести. Тогда скорость любой точки тела определяется суммой $\vec{v}_a^{\,*}=\vec{v}_a+[\vec{\omega}_a\,\vec{r}_a]$, где $\vec{r}_a\equiv\vec{r}-\vec{a}$ есть радиус-вектор, проведенный из центра тяжести тела a в точку, скорость которой определяется. Но вращающиеся сферически симметричные тела в используемом методе представляются в виде материальных точек (как это часто делается в классической небесной механике). Поэтому возникает вопрос: чем заменить добавку на вращение $[\vec{\omega}_a\,\vec{r}_a]$ в случае, когда тело a стягивается в точку (в свой центр тяжести)? Использование некоторых аналогий, взятых из гидродинамики в случае вихревого движения и из определения векторного поля в классической теории поля [B.101] (частица со спином соответствует нашему вращающемуся сферически симметричному телу бесконечно малых размеров), позволяет предложить замену $[\vec{\omega}_a\,\vec{r}_a]$ на

$$\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{\sigma}_a\,\delta_a)=-\frac{1}{2}\,[\vec{\sigma}_a\,\vec{\nabla}\delta_a], \tag{7.1}$$

где $\vec{\sigma}_a=\vec{\sigma}_a(t)$ является удельным по массе собственным угловым моментом импульса тела a; оператор $\vec{\nabla}\equiv\vec{e}_s\,\partial/\partial x^s$ применяется к δ_a, $\vec{e}_s$ образуют ортонормированный базис декартовой системы координат.

Таким образом, в $T^{\alpha\beta}$ из (5.1) нужно всюду сделать замену $\frac{da^i}{dx^0}\delta_a$ на

$$\left(\frac{da^i}{dx^0}-\frac{1}{2}\,[\vec{\sigma}_a\,\vec{\nabla}]^i\right)\delta_a. \tag{7.2}$$

Считаем, что порядки скоростей $\frac{d\vec{a}}{dx^0}$ и $[\vec{\omega}_a\,\vec{r}_a]$ одинаковые. Отсюда следует разложение для $\vec{\sigma}_a=\{\sigma_a^i\}$:

$$\vec{\sigma}_a(t)=\lambda\,\underset{1}{\vec{\sigma}_a}+\lambda^3\,\underset{3}{\vec{\sigma}_a}+\ldots. \tag{7.3}$$

Если бы мы имели дело с ньютоновой механикой, то можно было бы ограничиться обычным сложением скоростей da^i/dx^0 и $-\frac{1}{2}[\vec{\sigma}_a \vec{\nabla}]$, как это и сделано в (7.2). Но в римановом пространстве закон сложения скоростей более сложный. Поэтому плотность $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ для системы n вращающихся тел a, b, c, ... должна быть выбрана в виде

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \sum_a \mathcal{T}_a^{\alpha\beta};$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{T}_a^{00} &= (m_a + \underset{a}{m}^{(\sigma)})\,\delta_a, \\ \mathcal{T}_a^{0i} &= (m_a + \underset{a}{m}^{(\sigma)})\left(\frac{da^i}{dx^0} - \frac{1}{2}[\vec{\sigma}_a \vec{\nabla}]^i\right)\delta_a + t_a^{0i}\,\delta_a, \\ \mathcal{T}_a^{ij} &= (m_a + \underset{a}{m}^{(\sigma)})\left(\frac{da^i}{dx^0} - \frac{1}{2}[\vec{\sigma}_a \vec{\nabla}]^i\right)\times \\ &\times\left(\frac{da^j}{dx^0} - \frac{1}{2}[\vec{\sigma}_a \vec{\nabla}]^j\right)\delta_a + t_a^{ij}\,\delta_a. \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

Величина $\underset{a}{m}^{(\sigma)}$ возникает в силу замены (7.2) и как-то связана с энергией вращения тела a. Если ограничиться 4-м порядком по λ, то

$$\underset{a}{m}^{(\sigma)} = \underset{4}{\underset{a}{m}}^{(\sigma)} = -\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\dot{a}^s\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^s + \frac{1}{8}\underset{2}{m_a}\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^s\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^s, \tag{7.5}$$

как это следует из (6.19). Появление добавок t_a^{0i} и t_a^{ij} объясняется неньютоновым законом сложения скоростей и искривленностью пространства в ОТО. Значения этих добавок определятся позднее. А сейчас можно только утверждать, что они должны иметь разложения

$$t_a^{0i} = \lambda^5 \underset{5}{t_a^{0i}} + \ldots\,; \quad t_a^{ij} = \lambda^6 \underset{6}{t_a^{ij}} + \ldots \tag{7.6}$$

и должны слагаться из членов, не содержащих и содержащих оператор $\vec{\nabla}$:

$$\underset{5}{t_a^{0i}} = \underset{5}{\alpha_a^i} + \underset{5}{\beta_a^i}, \quad \underset{6}{t_a^{ij}} = \underset{6}{\alpha_a^{ij}} + \underset{6}{\beta_a^{ij}}, \tag{7.7}$$

где $\underset{5}{\alpha_a^i}$, $\underset{6}{\alpha_a^{ij}}$ не содержат $\vec{\nabla}$ и являются некоторыми функциями t, а $\underset{5}{\beta_a^i}$, $\underset{6}{\beta_a^{ij}}$ содержат $\vec{\nabla}$ и t. Ни те, ни другие не зависят от пространственных координат x^s.

§ 8. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ, МЕТРИКА И ДРУГИЕ СООТНОШЕНИЯ. НЬЮТОНОВО ДВИЖЕНИЕ

Прежде всего отметим, что в случае вращающихся тел увеличивается число неизвестных функций. Кроме m_a, m_b, ..., a^i, b^i, ..., следует искать σ_a^i, σ_b^i, ..., t_a^{0i}, t_b^{0i}, ..., t_a^{ij}, t_b^{ij}, ... Поэтому, кроме уравнений (5.4), нужно использовать уравнения

$$\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)\sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\, dV=0, \tag{8.1}$$

которые также являются следствием полевых уравнений (3.1). Вращающееся сферически симметричное точечное тело — это дипольная частица. Если бы у тела принималось во внимание отклонение от сферической симметрии, то такому телу соответствовала бы квадрупольная частица. В плотности тензора энергии-импульса появились бы соответствующие неизвестные функции, для определения которых нужно было бы использовать уравнения

$$\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)(x^j-a^j)\sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\, dV=0. \tag{8.2}$$

И вообще, если бы наши тела были мультипольными частицами, то для вывода их уравнений движения следовало бы использовать, кроме (5.4), (8.1), (8.2), еще уравнения [B.140, B.141]

$$\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)(x^j-a^j)(x^k-a^k)\sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\, dV=0, \tag{8.3}$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\int\limits_{V_a} (x^{i_1}-a^{i_1})\ldots(x^{i_m}-a^{i_m})\sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\, dV=0, \tag{8.4}$$

которые все также являются следствием полевых уравнений (3.1). Как мы увидим ниже, для вывода посленьютоновых уравнений движения вращающихся тел будет достаточным использование только уравнений (5.4) и (8.1), которые будут удовлетворены в наинизших и следующих приближениях. Уравнения же (8.2)—(8.4) будут удовлетворены только в наинизших приближениях.

Как и в случае невращающихся тел, для вывода посленьютоновых уравнений движения вращающихся тел нужно знать метрику, именно: $\underset{2}{h}_{00}$, $\underset{2}{h}_{ij}$, $\underset{3}{h}_{0i}$, $\underset{4}{h}_{00}$. Уравнения для $\underset{2}{h}_{00}$ и $\underset{2}{h}_{ij}$ будут прежними. Поэтому будут прежними и выражения для $\underset{2}{h}_{00}$, $\underset{2}{h}_{ij}$ (см. (6.4) и (6.5)). Уравнение (6.6) для $\underset{3}{h}_{0i}$ усложняется:

$$\underset{3}{h}_{0i,\,ss}-\underset{3}{h}_{0s,\,si}=-2\underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0i}}-16\pi\gamma\sum_a \underset{2}{m_a\dot{a}^i}\delta_a+$$
$$+8\pi\gamma\sum_a \underset{2}{m_a}\,[\,\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\,\vec{\nabla}\delta_a]. \tag{8.5}$$

Решением этого уравнения будет

$$h_{\underset{3}{0i}}=4\sum_a \frac{\gamma \underset{2}{m_a}\dot{a}^i}{r_a}-2\sum_a \gamma \underset{2}{m_a}\left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}\frac{1}{r_a}\right]^i. \qquad (8.6)$$

Сразу же убеждаемся, что условия гармоничности (6.8*) метрикой (6.4), (6.5), (8.6) также удовлетворяются, т. е. и в случае вращающихся тел система координат в рассматриваемых приближениях гармоническая.

Сравнивая (8.6) с формулой (105.19) в [В.13], убеждаемся в том, что $\vec{\sigma}_a$ действительно является удельным собственным угловым моментом импульса тела a.

Переходим к следствиям из уравнений движения в интегральной форме (5.4), (8.1)—(8.4). Как и прежде, имеем (6.14), из которого следует (6.15): $m_a=\mathrm{const}$. В (6.16) следует рассмотреть интеграл от первого члена, ибо здесь появляется, согласно (7.4), добавка на вращение. Имеем:

$$\int_{V_a}\underset{3}{\bar{T}}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}\,dV=\left\{\int_{V_a}\underset{2}{m_a}\left(\dot{a}^i-\frac{1}{2}\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^i\right)\delta_a dV\right\}_{,\underset{1}{0}}=\underset{2}{m_a}\ddot{a}^i, \qquad (8.6^*)$$

т. е. тот же результат, что и в случае невращающихся тел. Это произошло потому, что в силу свойства δ-функции (4.7)

$$\int_{V_a}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}\delta_a]^i\,dV=0.$$

Следовательно, (6.16) дают опять ньютоновые уравнения движения (6.17). Собственное вращение сферически симметричных тел на их поступательное движение в ньютоновом приближении влияния не оказывает.

Теперь рассмотрим следствия из уравнений (8.1). При $\alpha=0$ в наинизшем 3-м порядке (8.1) тождественно обращаются в нуль:

$$\int_{V_a}(x^i-a^i)\sqrt{-g}\,\underset{3}{T}{}^{0\beta}_{;\beta}\,dV=\int_{V_a}(x^i-a^i)\,(\underset{2}{T}{}^{00}_{,\underset{1}{0}}+\underset{3}{T}{}^{0s}_{,s})\,dV=$$

$$=\int_{V_a}(x^i-a^i)\left\{\underset{2}{m_a}\delta_{a,\underset{1}{0}}+\underset{2}{m_a}\left(\dot{a}^s\delta_a-\frac{1}{2}\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}\delta_a]^s\right)_{,s}\right\}dV=$$

$$=\underset{2}{m_a}\int_{V_a}(x^i-a^i)\left\{-\dot{a}^s\delta_{a,s}+\dot{a}^s\delta_{a,s}-\frac{1}{2}\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}\delta_{a,s}]^s\right\}dV\equiv 0, \qquad (8.7)$$

так как в силу определения $\vec{\nabla}\equiv\vec{e}_k\dfrac{\partial}{\partial x^k}$

$$[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}\delta_{a,s}]^s=[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{e}_k]^s\,\delta_{a,sk}=-[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{e}_s]^k\,\delta_{a,sk}\equiv 0. \qquad (8.8)$$

Рассмотрим теперь (8.1) при $\alpha=k$ в наинизшем 4-м приближении. Согласно (6.13), получаем

$$\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)\sqrt{-g}\,\underset{4}{T^{k\beta}_{;\,\beta}}\,dV=$$

$$=\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)\left(\underset{3}{T}{}^{0k}_{,\,\underset{1}{0}}+\underset{4}{T}{}^{ks}_{,\,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,k}\underset{2}{T}{}^{00}\right)dV=0. \tag{8.9}$$

Последовательно вычисляем в (8.9):

$$\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)\underset{3}{T}{}^{0k}_{,\,\underset{1}{0}}dV=\underset{2}{m_a}\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)\left(\dot a^k\delta_a-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec\sigma_a}\,\vec\nabla\delta_a]^k\right)_{,\,\underset{1}{0}}dV=$$

$$=\underset{2}{m_a}\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)\left\{\ddot a^k\delta_a-\dot a^k\dot a^s\delta_{a,\,s}-\frac{1}{2}[\underset{1}{\dot{\vec\sigma}_a}\,\vec e_s]^k\,\delta_{a,\,s}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec\sigma_a}\,\vec e_s]^k\,\dot a^l\delta_{a,\,sl}\right\}dV=\underset{2}{m_a}\dot a^k\dot a^i+\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}[\underset{1}{\dot{\vec\sigma}_a}\,\vec e_i]^k, \tag{8.10}$$

так как интегралы от первого и четвертого членов равны нулю в силу свойств (4.1), (4.6) δ-функций. Далее имеем

$$\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)\underset{4}{T}{}^{ks}_{,\,s}=\underset{2}{m_a}\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)\left\{\dot a^k\dot a^s\delta_{a,\,s}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec\sigma_a}\,\vec e_l]^k\,\dot a^s\delta_{a,\,sl}-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec\sigma_a}\,\vec e_l]^s\,\dot a^k\delta_{a,\,sl}+$$

$$\left.+\frac{1}{4}[\underset{1}{\vec\sigma_a}\,\vec e_j]^k\,[\underset{1}{\vec\sigma_a}\,\vec e_l]^s\,\delta_{a,\,slj}\right\}dV=-\underset{2}{m_a}\dot a^k\dot a^i. \tag{8.11}$$

Здесь интегралы от второго, третьего и четвертого членов обращаются в нуль благодаря свойству δ-функций (4.6). Наконец, легко доказываем, пользуясь свойствами δ-функций (4.1), (4.5), что

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)\underset{2}{h}_{00,\,k}\underset{2}{T}{}^{00}dV=$$

$$=-\sum_b \gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\int\limits_{V_a} (x^i-a^i)\left(\frac{1}{r_b}\right)_{,\,k}\delta_a dV=0. \tag{8.12}$$

Итак, суммируя (8.10)—(8.12), выводим, что (8.9) выполняется только при

$$\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}[\underset{1}{\dot{\vec\sigma}_a}\,\vec e_i]^k=0,\ \text{т. е.}\ \underset{1}{\vec\sigma_a}=\overrightarrow{\text{const}}. \tag{8.13}$$

Это означает, что собственный угловой момент импульса $\underset{2}{m_a}\underset{1}{\vec{\sigma}_a}$ каждого сферически симметричного тела a в ньютоновом приближении сохраняется, как и должно быть.

Как показывают вычисления, аналогичные только что проделанным, оставшиеся уравнения (8.2)—(8.4) в наинизших приближениях (3-м при $\alpha=0$ и 4-м при $\alpha=k$) удовлетворяются тождественно.

Переходим к уравнениям (5.4) и (8.1) в 5-м порядке, который получается при $\alpha=0$. Уравнения (5.4) в соответствии с (6.12) дают

$$\int\limits_{V_a}\sqrt{-g}\,\underset{5}{T^{0\beta}_{;\beta}}\,dV=\int\limits_{V_a}\left(\underset{4}{T}{}^{00}_{,\underset{1}{0}}+\underset{5}{T}{}^{0s}_{,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h_{00}}{}_{,\underset{1}{0}}\underset{2}{T^{00}}+\underset{2}{h_{00}}{}_{,s}\underset{3}{T^{0s}}\right)dV=0. \qquad (8.14)$$

Вычисление (8.14) аналогично вычислению (6.18). Имеем:

$$\int\limits_{V_a}\underset{4}{T}{}^{00}_{,\underset{1}{0}}\,dV=\int\limits_{V_a}\{(\underset{4}{m_a}+\underset{4}{m_a^{(\sigma)}})\delta_a\}_{,\underset{1}{0}}\,dV=\underset{4}{m_a}{}_{,\underset{1}{0}}\ (\text{см. (7.5)});$$

$$\int\limits_{V_a}\underset{5}{T}{}^{0s}_{,s}\,dV=0\ (\text{см. (6.14)});$$

$$\int\limits_{V_a}\frac{1}{2}\underset{2}{h_{00}}{}_{,\underset{1}{0}}\underset{2}{T^{00}}dV=\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot{b}^s\ (\text{см. (6.18*)});$$

$$\int\limits_{V_a}\underset{2}{h_{00}}{}_{,s}\underset{3}{T^{0s}}dV=-2\sum_b\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\times$$

$$\times\int\limits_{V_a}\left(\frac{1}{r_b}\right)_{,s}\left(\dot{a}^s\delta_a-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}\delta_a]^s\right)dV=$$

$$=-2\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot{a}^s-\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^s_{,a^s}=$$

$$=-2\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot{a}^s,$$

так как

$$\left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^s=[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{e}_k]^s\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^sa^k}=$$

$$=[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{e}_s]^k\left(\frac{-1}{r_{ab}}\right)_{,a^sa^k}\equiv 0.$$

Следовательно, получаем оценку для $\underset{4}{m_a}$, совпадающую по виду с (6.19). Дело в том, что постоянная интегрирования $\underset{4}{C_a}$ при учете собственного вращения не должна равняться нулю (как в случае невращающихся тел), а должна определять кинетическую энергию собственного вращения, которая, как известно [10, § 32], в ньютоновом приближении для вращающегося с постоянной угловой скоростью ω сферически симметричного тела радиусом R и массой m постоянна и равна

$$\underset{4}{C_a}=E_{\text{вр}}=\frac{1}{5}mR^2\omega^2. \tag{8.15}$$

Теперь следует рассмотреть уравнение

$$\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)(\sqrt{-g}\,\underset{5}{T^{0\beta}_{;\,\beta}}\,dV=$$

$$=\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\left(\underset{4}{\bar{T}}{}^{00}_{,\,\underset{1}{0}}+\underset{5}{\bar{T}}{}^{0s}_{,\,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0}}\underset{2}{\bar{T}}{}^{00}+\underset{2}{h}_{00,\,s}\underset{3}{\bar{T}}{}^{0s}\right)dV=0. \tag{8.16}$$

Пользуясь видом $\bar{T}^{\alpha\beta}$ из (7.4), выражением для $\underset{4}{m}{}^{(\sigma)}_a$ (7.5) и свойствами δ-функций, последовательно находим:

$$\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\underset{4}{\bar{T}}{}^{00}_{,\,\underset{1}{0}}dV=\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\left\{\left(\underset{4}{m_a}-\frac{\underset{2}{m_a}}{2}\dot{a}^s[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^s+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\underset{2}{m_a}}{8}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^s[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^s\right)\delta_a\right\}_{,\,\underset{1}{0}}dV=$$

$$=-\dot{a}^s\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\underset{4}{m_a}\delta_{a,\,s}\,dV-\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\ddot{a}^s[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}\delta_a]^s dV=$$

$$=\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\ddot{a}^s[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{e}_i]^s+\underset{4}{m_a}\dot{a}^i=\underset{4}{m_a}\dot{a}^i-\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\ddot{\vec{a}}]^i; \tag{8.17}$$

$$\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\underset{5}{\bar{T}}{}^{0s}_{,\,s}dV=\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\left\{(\underset{4}{m_a}+\underset{4}{m}{}^{(\sigma)}_a)\left(\dot{a}^s-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^s\right)\delta_a-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}[\underset{3}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}\delta_a]^s+\underset{5}{t}{}^{0s}_a\,\delta_a\right\}_{,\,s}dV=\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\left\{(\underset{4}{m_a}+\underset{4}{m}{}^{(\sigma)}_a)\left(\dot{a}^s-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^s\right)\delta_{a,\,s}+(\underset{5}{\alpha}{}^s_a+\underset{5}{\beta}{}^s_a)\delta_{a,\,s}\right\}dV=-\underset{4}{m_a}\dot{a}^i-\underset{5}{\alpha}{}^i_a; \tag{8.18}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\underset{2}{h}_{00,\,0}\underset{1\,2}{T}^{00}dV=$$

$$-\sum_b\int\limits_{V_a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_b}\right)_{,\,\underset{1}{0}}(x^i-a^i)\delta_a dV=0; \tag{8.19}$$

$$\int\limits_{V_a}\underset{2}{h}_{00,\,s}\underset{3}{T}^{0s}dV=$$

$$=-2\sum_b{}'\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_b}\right)_{,\,s}\left(\dot{a}^s-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^s\right)\delta_a dV=$$

$$=\sum_b\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\left(\frac{1}{r_b}\right)_{,\,s}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{e}_k]^s\,\delta_{a,\,k}\,dV=$$

$$=\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{e}_s]^i=m_a\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\ddot{\vec{a}}\,]^i. \tag{8.20}$$

Суммируем (8.17)—(8.20) и получаем значение для $\underset{5}{\alpha}{}_a^i$:

$$\underset{5}{\alpha}{}_a^i=\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\ddot{\vec{a}}\,]^i. \tag{8.21}$$

Следовательно, (8.16) выполняются только при найденном значении $\underset{5}{\alpha}{}_a^i$. Величина $\underset{5}{\beta}{}_a^s$ входит в (8.18), но $\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\underset{5}{\beta}{}_a^s\,\delta_{a,\,s}dV=0$, и она не определилась. Ее можно найти, потребовав выполнения эйнштейновского закона сложения скоростей в соответствующем приближении. Воспользуемся формулой (16.07) из [B.6] специальной теории относительности (СТО), ограничиваясь, во-первых, членами не выше $1/c^2$ и, во-вторых, членами, содержащими оператор $\vec{\nabla}$ в первой степени. Тогда, считая $\vec{v}=\dot{\vec{a}}$, $\vec{u}=\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]$, с указанной степенью точности получаем

$$\vec{v}'=\vec{v}-\vec{u}+\frac{(\vec{u}\vec{v})}{c^2}\vec{v}=\dot{\vec{a}}-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]+\frac{1}{2c^2}\dot{\vec{a}}\,\dot{a}^s\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^s. \tag{8.22}$$

Сравнивая этот результат с выражением для T_a^{0i} в (7.4), заключаем, что

$$\underset{5}{\beta}{}_a^i=\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\dot{a}^i\dot{a}^s\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}]^s. \tag{8.23}$$

Знание величин $\underset{6}{t}{}_a^{ij}$, как будет видно ниже, для вывода посленьютоновых ($\sim\lambda^6$) уравнений движения не понадобится.

Нам еще нужно вычислить $\underset{4}{h}_{00}$. Дифференциальное уравнение для его определения по форме совпадает с (6.9), однако теперь нужно помнить, что $\underset{3}{h}_{0i}$, $\underset{4}{T}^{00}$ и $\underset{4}{T}^{ss}$ содержат вращательные члены. Учитывая это обстоятельство и что $\underset{3}{h}_{0s,\,s}=2\underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0}}$, получаем из (6.9)

$$\underset{4}{h}_{00,\,ss}=\underset{2}{h}_{00,\,\underset{11}{00}}+\frac{1}{2}\left(\underset{2}{h}^{2}_{00}\right)_{,\,ss}+$$

$$+8\pi\gamma\sum_{a}\left(\underset{2}{m}_a\underset{2}{h}_{00}+\frac{3}{2}\underset{2}{m}_a\dot{a}^s\dot{a}^s+\sum_{b\neq a}\frac{\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b}{r_{ab}}\right)\delta_a+$$

$$+8\pi\gamma\sum_{a}\left(\underset{4}{C}_a-\frac{3}{2}\underset{2}{m}_a\dot{a}^s\,[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\,\vec{\nabla}]^s+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\underset{2}{m}_a\,[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\,\vec{\nabla}]^s\,[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\,\vec{\nabla}]^s\right)\delta_a. \qquad (8.24)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\underset{4}{h}_{00}=\underset{4}{h}^{(g)}_{00}+\underset{4}{h}^{(g\sigma)}_{00}, \qquad (8.25)$$

где

$$\underset{4}{h}^{(g)}_{00}=2\left(\sum_{a}\frac{\gamma\underset{2}{m}_a}{r_a}\right)^2+$$

$$+\sum_{a}\left(-\gamma\underset{2}{m}_a\ddot{r}_a-3\frac{\gamma\underset{2}{m}_a}{r_a}\dot{a}^s\dot{a}^s+2\gamma^2\sum_{b\neq a}\frac{\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b}{r_{ab}r_a}\right), \qquad (8.26)$$

$$\underset{4}{h}^{(g\sigma)}_{00}=3\sum_{a}\gamma\underset{2}{m}_a\left(\dot{a}^s\left[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\,\vec{\nabla}\frac{1}{r_a}\right]^s-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\,[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\,\vec{\nabla}]^s\left[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\,\vec{\nabla}\frac{1}{r_a}\right]^s\right)-2\gamma\sum_{a}\underset{4}{C}_a\frac{1}{r_a}. \qquad (8.27)$$

§ 9. ПОСЛЕНЬЮТОНОВЫ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

Все готово для вывода посленьютоновых (6-й порядок по λ) уравнений поступательного и вращательного движений любого тела a.

Уравнения поступательного движения будут выводиться (как и в случае невращающихся тел) из уравнений (6.20). Схема вычислений та же самая. При вычислении интегралов в (6.21), кроме имеющихся членов, еще появятся члены с $\vec{\sigma}_a$, $\vec{\sigma}_b$, ... Чтобы не повторяться, члены, не зависящие от σ, будем обозначать многоточием, выписывая явным образом только члены, дающие поправки на собственное вращение.

Имеем $\left(\text{напоминаем, что } \vec{\nabla}_a \equiv \vec{e}_s \frac{\partial}{\partial a^s}\right)$:

$$\int\limits_{V_a} \underset{5}{T}{}^{0i}_{,\,\underset{1}{0}}\, dV = \ldots + \frac{1}{2} \underset{2}{m_a} [\underset{1}{\vec{\sigma}_a} \dddot{\vec{a}}\,]^i; \quad \int\limits_{V_a} \underset{6}{T}{}^{is}_{,\,s}\, dV = 0;$$

$$\int\limits_{V_a} \frac{1}{2} \underset{2}{h}_{00,\,i} \underset{4}{T}{}^{00} dV = \ldots - \sum_{b \neq a} \frac{\gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b}}{2} \left\{ \dot{a}^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^i} \right]^s + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} [\underset{1}{\vec{\sigma}_a} \vec{\nabla}_a]^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^i} \right]^s \right\};$$

$$\int\limits_{V_a} \frac{1}{2} \underset{2}{h}_{00} \underset{2}{h}_{00,\,i} \underset{2}{T}{}^{00} dV = \ldots + 0;$$

$$-\int\limits_{V_a} \underset{3}{h}_{0i,\,\underset{1}{0}} \underset{2}{T}{}^{00} dV = \ldots - 2 \sum_{b \neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \dot{b}^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_b} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^s} \right]^i;$$

$$\int\limits_{V_a} \underset{3}{h}_{0s,\,i} \underset{3}{T}{}^{0s} dV = \ldots + \sum_{b \neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \left\{ -2\dot{a}^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_b} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^i} \right]^s + \right.$$

$$\left. + 2\dot{b}^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^i} \right]^s - [\underset{1}{\vec{\sigma}_a} \vec{\nabla}_a]^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_b} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^i} \right]^s \right\};$$

$$-\int\limits_{V_a} \underset{3}{h}_{0i,\,s} \underset{3}{T}{}^{0s} dV = \ldots + 2 \sum_{b \neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \dot{a}^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_b} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^s} \right]^i;$$

$$-\int\limits_{V_a} \underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0}} \underset{3}{T}{}^{0i} dV = \ldots - \sum_{b \neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \dot{b}^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^s} \right]^i;$$

$$-\int\limits_{V_a} \underset{2}{h}_{00,\,s} \underset{4}{T}{}^{is} dV = \ldots + \sum_{b \neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \dot{a}^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^s} \right]^i;$$

$$\int\limits_{V_a} \frac{1}{2} \underset{2}{h}_{00,\,i} \underset{4}{T}{}^{ss} dV = \ldots - \sum_{b \neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \left\{ \dot{a}^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^i} \right]^s + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} [\underset{1}{\vec{\sigma}_a} \vec{\nabla}_a]^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^i} \right]^s \right\};$$

$$\int\limits_{V_a} \frac{1}{2} \underset{4}{h}_{00,\,i} \underset{2}{T}{}^{00} dV = \ldots + \frac{3}{2} \sum_{b \neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \left\{ \dot{b}^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_b} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^i} \right]^s - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} [\underset{1}{\vec{\sigma}_b} \vec{\nabla}_a]^s \left[\underset{1}{\vec{\sigma}_b} \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,\,a^i} \right]^s \right\} - \sum_{b \neq a} \left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a} \underset{4}{C_b}}{r_{ab}} \right)_{,\,a^i}. \tag{9.1}$$

Все интегралы в (6.20) вычислены. Суммируя их, заменяя λ на $\frac{1}{c}$ и для краткости обозначая $\underset{2}{m_a}, \underset{2}{m_b}, \ldots$ через $m_a, m_b, \ldots$, $\underset{1}{\vec{\sigma}_a}, \underset{1}{\vec{\sigma}_b}, \ldots$ через $\vec{\sigma}_a, \vec{\sigma}_b, \ldots$, $\underset{4}{C_a}, \underset{4}{C_b}, \ldots$ через $C_a, C_b, \ldots$, приходим к постньютоновым уравнениям поступательного движения любого тела a в случае системы вращающихся тел:

$$m_a \ddot{a}^i - \sum_{b \neq a} \left(\frac{\gamma m_a m_b}{r_{ab}} \right)_{,a^i} = F^i_{a(g)} + F^i_{a(g\sigma)}, \tag{9.2}$$

где $F^i_{a(g)}$ определяется формулой (6.23), а силовая добавка

$$\begin{aligned}
F^i_{a(g\sigma)} \equiv \sum_{b \neq a} \frac{\gamma m_a m_b}{c^2} \Bigg\{ & \frac{3}{2} (\dot{b}^s - \dot{a}^s) \left[\vec{\sigma}_a \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,a^s} \right]^i + \\
& + 2 (\dot{b}^s - \dot{a}^s) \left[\vec{\sigma}_b \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,a^s} \right]^i + \\
& + \left(\frac{3}{2} \dot{a}^s - 2\dot{b}^s \right) \left[\vec{\sigma}_a \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,a^i} \right]^s + \\
& + \left(2\dot{a}^s - \frac{3}{2} \dot{b}^s \right) \left[\vec{\sigma}_b \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,a^i} \right]^s + \\
& + \frac{3}{8} [\vec{\sigma}_a \vec{\nabla}_a]^s \left[\vec{\sigma}_a \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,a^i} \right]^s + \\
& + \frac{3}{8} [\vec{\sigma}_b \vec{\nabla}_a]^s \left[\vec{\sigma}_b \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,a^i} \right]^s + \\
& + [\vec{\sigma}_a \vec{\nabla}_a]^s \left[\vec{\sigma}_b \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,a^i} \right]^s + \frac{C_b}{m_b} \left(\frac{1}{r_{ab}} \right)_{,a^i} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{9.3}$$

и обязана своим существованием собственным вращениям тел.

Уравнениями вращательного движения вращающихся тел a, $b, \ldots$ будем называть дифференциальные уравнения относительно $\vec{\sigma}_a, \vec{\sigma}_b, \ldots$. Для их вывода воспользуемся альтернированными уравнениями (8.1)

$$\int\limits_{V_a} \sqrt{-g} \, [(x^i - a^i) T^{k\beta}_{;\beta} - (x^k - a^k) T^{i\beta}_{;\beta}] dV = 0, \tag{9.4}$$

которые в постньютоновом приближении имеют вид

$$\begin{aligned}
& \lambda^4 \int\limits_{V_a} \left[(x^i - a^i) (\underset{4}{\sqrt{-g} \, T^{k\beta}_{;\beta}}) - (x^k - a^k) (\underset{4}{\sqrt{-g} \, T^{i\beta}_{;\beta}}) \right] dV + \\
& + \lambda^6 \int\limits_{V_a} \left[(x^i - a^i) (\underset{6}{\sqrt{-g} \, T^{k\beta}_{;\beta}}) - (x^k - a^k) (\underset{6}{\sqrt{-g} \, T^{i\beta}_{;\beta}}) \right] dV = 0.
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Первый интеграл нами вычислен (см. (8.9)—(8.13)):

$$\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\,(\sqrt{-g}\,\underset{4}{T}{}^{k\beta}_{;\,\beta})-(x^k-a^k)\,(\sqrt{-g}\,\underset{4}{T}{}^{i\beta}_{;\,\beta})\right]dV=$$

$$=\underset{2}{m_a}\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\,\dot{\vec{e}}_i]^k=0. \tag{9.6}$$

Воспользовавшись (6.13), вычисляем второй интеграл. При этом, конечно, принимаются во внимание выражения для $\underset{5}{\alpha}{}^i_a$, $\underset{5}{\beta}{}^i_a$, свойства δ-функций и ньютоново приближение. Тогда:

$$\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\,\underset{5}{\bar{T}}{}^{0k}_{,\,\underset{1}{0}}-(x^k-a^k)\,\underset{5}{\bar{T}}{}^{0i}_{\,\underset{1}{0}}\right]dV=$$

$$=\underset{4}{\dot{m}_a}\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\,\dot{\vec{e}}_i]^k+\underset{2}{m_a}\,[\underset{3}{\vec{\sigma}_a}\,\dot{\vec{e}}_i]^k+$$

$$+\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\left(\dot{a}^i\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\,\ddot{\vec{a}}\,]^k-\dot{a}^k\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\,\ddot{\vec{a}}\,]^i\right);$$

$$\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\,\underset{6}{\bar{T}}{}^{ks}_{,\,s}-(x^k-a^k)\,\underset{6}{\bar{T}}{}^{is}_{,\,s}\right]dV=$$

$$=\underset{4}{m_a}\dot{a}^i\dot{a}^k+\underset{6}{t}{}^{ik}_a-\underset{4}{m_a}\dot{a}^k\dot{a}^i-\underset{6}{t}{}^{ki}_a\equiv 0;$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\,\underset{2}{h}_{00,\,k}-(x^k-a^k)\,\underset{2}{h}_{00,\,i}\right]\underset{4}{\bar{T}}{}^{00}dV=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\left\{[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\,\dot{\vec{a}}\,]^i\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^k}-\right.$$

$$-[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\,\dot{\vec{a}}\,]^k\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i}+\frac{1}{2}\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\,\vec{e}_s]^i\left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^k}\right]^s-$$

$$\left.-\frac{1}{2}\,[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\,\vec{e}_s]^k\left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i}\right]^s\right\};$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\,\underset{2}{h}_{00,\,k}-(x^k-a^k)\,\underset{2}{h}_{00,\,i}\right]\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{\bar{T}}{}^{00}dV=0;$$

$$-\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\,\underset{3}{h}_{0k,\,\underset{1}{0}}-(x^k-a^k)\,\underset{3}{h}_{0i,\,\underset{1}{0}}\right]\underset{2}{\bar{T}}{}^{00}dV=0;$$

$$\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\underset{3}{h}_{0s,\,k}-(x^k-a^k)\underset{3}{h}_{0s,\,i}\right]\underset{3}{T}^{0s}dV=$$

$$=-\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\left\{[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\dot{\vec{b}}\,]^i\left(\frac{2}{r_{ab}}\right)_{,\,a^k}-\right.$$

$$-[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\dot{\vec{b}}\,]^k\left(\frac{2}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i}+[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_i]^s\left[\underset{1}{\vec{\sigma}}_b\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^k}\right]^s-$$

$$\left.-[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_k]^s\left[\underset{1}{\vec{\sigma}}_b\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i}\right]^s\right\};$$

$$-\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\underset{3}{h}_{0k,\,s}-(x^k-a^k)\underset{3}{h}_{0i,\,s}\right]\underset{3}{T}^{0s}dV=$$

$$=\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\left\{[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_s]^i\dot{b}^k\left(\frac{2}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}-\right.$$

$$-[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_s]^k\dot{b}^i\left(\frac{2}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}+[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_i]^s\left[\underset{1}{\vec{\sigma}}_b\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\right]^k-$$

$$\left.-[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_k]^s\left[\underset{1}{\vec{\sigma}}_b\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\right]^i\right\};$$

$$-\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\underset{3}{T}^{0k}-(x^k-a^k)\underset{3}{T}^{0i}\right]\underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0}}dV=$$

$$=-\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\,[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_i]^k\dot{b}^s\left(\frac{2}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s};$$

$$-\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\underset{4}{T}^{ks}-(x^k-a^k)\underset{4}{T}^{is}\right]\underset{2}{h}_{00,\,s}dV=$$

$$=\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b\left\{[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_i]^k\dot{a}^s\left(\frac{2}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}+\right.$$

$$+[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_i]^s\dot{a}^k\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}-[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_k]^s\dot{a}^i\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}+$$

$$+\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_i]^s\left[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\right]^k-$$

$$\left.-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{e}_k]^s\left[\underset{1}{\vec{\sigma}}_a\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\right]^i\right\};$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\underset{2}{h_{00,k}}-(x^k-a^k)\underset{2}{h_{00,i}}\right]\underset{4}{T^{ss}}dV=$$

$$=\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\left\{[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\dot{\vec{a}}]^i\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}-[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\dot{\vec{a}}]^k\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{e}_s]^i\left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}\right]^s-$$

$$\left.-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{e}_s]^k\left[\underset{1}{\vec{\sigma}_a}\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s\right\};$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_a}\left[(x^i-a^i)\underset{4}{h_{00,k}}-(x^k-a^k)\underset{4}{h_{00,i}}\right]\underset{2}{T^{00}}dV=0. \tag{9.7}$$

Величины $[\vec{\sigma}\vec{e}_i]^k=-[\vec{\sigma}\vec{e}_k]^i$ можно представить в иной форме:

$$[\vec{\sigma}\vec{e}_i]^k=\delta_{ikl}\sigma^l\equiv\sigma^{ik}, \tag{9.8}$$

где δ_{ikl} — перестановочный символ, антисимметричный по всем индексам, $\delta_{ikl}=\pm1$ или 0, $\delta_{123}=1$; $\sigma^{ik}=-\sigma^{ki}$. Введя обозначение (9.8) и проделав те же упрощения, что и в случае уравнений поступательного движения, получаем в результате суммирования интегралов (9.7) посленьютоновые уравнения вращательного движения тела a:

$$\frac{d}{dt}(\tilde{m}_a\tilde{\sigma}_a^{ik})=N^{ik}_{a(g\sigma)}, \tag{9.9}$$

$$N^{ik}_{a(g\sigma)}\equiv\sum_{b\neq a}\frac{\gamma m_a m_b}{c^2}\left\{2\sigma_a^{ik}(\dot{b}^s-\dot{a}^s)\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}+\right.$$

$$+\left[\sigma_a^{is}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}-\sigma_a^{ks}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]\left(\frac{3}{2}\dot{a}^s-2\dot{b}^s\right)-$$

$$-\left[\sigma_a^{is}\left(\frac{3}{2}\dot{a}^k-2\dot{b}^k\right)-\sigma_a^{ks}\left(\frac{3}{2}\dot{a}^i-2\dot{b}^i\right)\right]\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}+$$

$$+\sigma_a^{is}\left(\frac{3}{4}\left[\vec{\sigma}_a\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}\right]^s+\left[\vec{\sigma}_b\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}\right]^s-\right.$$

$$\left.-\left[\vec{\sigma}_b\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^k\right)-\sigma_a^{ks}\left(\frac{3}{4}\left[\vec{\sigma}_a\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s+\right.$$

$$\left.\left.+\left[\vec{\sigma}_b\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s-\left[\vec{\sigma}_b\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^i\right)\right\}. \tag{9.10}$$

Тильда ($\sim$) над m_a и σ_a^{ik} здесь и всюду в дальнейшем обозначает, что эти величины берутся с релятивистскими поправками: $\tilde{m}_a = \underset{2}{m_a} + \underset{4}{m_a}$, $\tilde{\sigma}_a^{ik} = \underset{1}{\sigma}_a^{ik} + \underset{3}{\sigma}_a^{ik}$, так что $\tilde{m}_a \tilde{\sigma}_a^{ik} = \underset{2}{m_a} \underset{1}{\sigma}_a^{ik} + \underset{2}{m_a} \underset{3}{\sigma}_a^{ik} + \underset{4}{m_a} \underset{1}{\sigma}_a^{ik}$; $\vec{\sigma}_a$, $\vec{\sigma}_b$ — ньютоновые (постоянные) собственные угловые моменты импульса (бывшие $\underset{1}{\vec{\sigma}_a}$, $\underset{1}{\vec{\sigma}_b}$).

§ 10. ОБСУЖДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ. СРАВНЕНИЕ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

Уравнения поступательного и вращательного движений в посленьютоновом приближении (9.2) и (9.9) определились однозначно на основе естественных физических предположений. Структура $\bar{T}^{\alpha\beta}$ (7.4) такова, что не требуется никаких дополнительных исследований по выяснению смысла входящих в (7.4) величин. Для сравнения укажем, что в работах школы Инфельда [B.108, B.115, B.116, B.120] в случае вращающихся тел $\bar{T}^{\alpha\beta}$ выбирается в виде

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \sum_a \left(t_a^{\alpha\beta} \delta_a - t_a^{s\alpha\beta} \delta_{a,\,s} \right). \tag{10.1}$$

Возникает задача физической интерпретации коэффициентов $t_a^{\alpha\beta}$, $t_a^{s\alpha\beta}$. Она легко решается для $t_a^{\alpha\beta}$ [11], но интерпретация $t_a^{s\alpha\beta}$ вызывает затруднения. В работах [B.115, B.116] без достаточных на то оснований полагалось $t_a^{s00} = 0$. В результате уравнения поступательного движения получились неверными, исправление было дано в [B.116, B.120]. В монографии [B.108] (см. гл. 5, § 4) на этот счет не содержится определенного мнения. Оставлен произвол в выборе коэффициентов t_a^{s00} и тем самым выбор уравнений движения становится неоднозначным.

Полученная нами релятивистская вращательная поправка $F^i_{a(g\sigma)}$ к ньютоновой силе состоит из членов разной структуры — линейных и квадратичных по σ. Линейная по σ часть $F^i_{a(g\sigma)}$ в точности совпадает с результатом Фока [B.6, § 78], если в уравнениях Фока сделать переход к сферически симметричным телам бесконечно малых размеров и отбросить члены, возникшие за счет рассмотрения внутренней структуры тел, как не имеющие у нас смысла. Членов, квадратичных по σ и имеющих 4-й порядок относительно $1/r_{ab}$, в [B.6] нет, так как в методе Фока, кроме разложения по параметру $\lambda = \dfrac{1}{c}$, используется разложение еще и по параметру l/r (l — линейные размеры тел, r — расстояние между ними) и вычисления обрываются на членах 3-го порядка относительно l/r. Заметим, что в работах школы Инфельда [B.108, B.115, B.116, B.120—B.122] также используется разложение по $1/r$ и отбрасываются члены порядка $(1/r)^4$ и выше. Поэтому в этих работах также пренебрегают нелинейными по σ членами.

Целесообразность учета квадратичных по σ членов становится очевидной, если рассматривать сверхплотные небесные тела, обладающие большими угловыми скоростями собственного вращения, например пульсары [B.24, B.28, B.29]. В этих случаях линейные и квадратичные по σ члены делаются сравнимыми между собой (соответствующие численные расчеты см. в § 22, 23).

В [B.134] методом Фока — Папапетру и в [B.140] методами Матиссона [B.141] и Инфельда [B.108] выведены точные ковариантные уравнения поступательного и вращательного движений пробной вращающейся частицы (спин-частицы) a во внешнем гравитационном поле:

$$\frac{D}{ds}\left(mu^{\alpha}+u_{\beta}\frac{DS_a^{\alpha\beta}}{ds}\right)+\frac{1}{2}R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu}u^{\beta}S_a^{\mu\nu}=0; \tag{10.2}$$

$$\frac{DS_a^{\alpha\beta}}{ds}+u^{\alpha}u_{\mu}\frac{DS_a^{\beta\mu}}{ds}-u^{\beta}u_{\mu}\frac{DS_a^{\alpha\mu}}{ds}=0, \tag{10.3}$$

где $\dfrac{DS}{ds}$ обозначает абсолютную производную; $m=m_0c$; m_0 — масса частицы; $u^{\alpha}\equiv dx^{\alpha}/ds$ — ее 4-скорость; $S_a^{\alpha\beta}=-S_a^{\beta\alpha}$ — тензор, характеризующий собственный угловой момент импульса частицы; $R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu}$ — тензор кривизны риманова пространства-времени, в котором движется частица. Уравнения для спина (10.3) можно также записать иначе [B.134]:

$$\frac{DS_a^{\alpha\beta}}{ds}+\frac{u^{\alpha}}{u^0}\frac{DS_a^{\beta 0}}{ds}-\frac{u^{\beta}}{u^0}\frac{DS_a^{\alpha 0}}{ds}=0. \tag{10.4}$$

Система (10.2), (10.3) состоит из семи уравнений относительно десяти неизвестных функций u^{α}, $S^{\alpha\beta}$. Остается произвол в три функции, приводящий к неоднозначности уравнений (10.2), (10.3). Поэтому ряд авторов предлагали дополнить систему (10.2), (10.3) тремя условиями на $S^{\alpha\beta}$ (см. [B.45, B.134, B.135, B.140, B.141, B.158, B.163, B.165]):

$$S^{0i}=0,\ \text{или}\ S^{\alpha\beta}u_{\beta}=0,\ \text{или}\ S^{\alpha\beta}P_{\beta}=0,\ \text{или}\ S^{0i}P_0=kS^{ij}P_j, \quad k=\mathrm{const}, \tag{10.5}$$

а в работе [14] предполагалось, что величина спина постоянна.

Выясним, согласуются ли уравнения движения (9.2), (9.9) с уравнениями движения (10.2), (10.3) в постньютоновом приближении и какое отношение имеют дополнительные условия (10.5) в том же приближении к движению частицы. Применим к (10.2), (10.4) аппроксимационную процедуру, использованную при выводе уравнений (9.2), (9.9). Для простоты будем пренебрегать квадратичными по σ членами (для обычных астрономических приложений они малы по сравнению с линейными по σ членами). В случае внешнего гравитационного поля, создаваемого массивным вращающимся телом b, (10.2), (10.4) дают следующие постньютоновы уравнения поступательного и вращательного движений в гармонической системе координат (используем найденную выше метрику $\underset{2}{h_{00}}$, $\underset{2}{h_{ij}}$, $\underset{3}{h_{0i}}$, $\underset{4}{h_{00}}$):

$$\ddot{a}^i-\left(\frac{\gamma m_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i}=\frac{\gamma m_b}{c^2}\left[\left(\dot{a}^s\dot{a}^s-4\frac{\gamma m_b}{r_{ab}}\right)\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}-\right.$$
$$\left.-4\dot{a}^i\dot{a}^s\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]+\frac{\gamma m_b}{c^2}\left\{\dot{a}^s\left[\vec{\sigma}_a\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s+\right.$$
$$+2\dot{a}^s\left[\vec{\sigma}_b\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s-2\dot{a}^s\left[\vec{\sigma}_a\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^i-$$
$$\left.-2\dot{a}^s\left[\vec{\sigma}_b\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^i\right\}+\frac{\gamma}{c^2}\left(\frac{C_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i}+$$
$$+\frac{1}{c^2}\left[\ddot{\underset{a}{\sigma}}{}^{0i}-\left(\frac{\gamma m_b}{r_{ab}}\right)_{,a^ia^s}\underset{a}{\sigma}{}^{0s}\right]; \qquad (10.6)$$

$$\frac{d}{dt}\underset{a}{S}{}^{ik}=\frac{\gamma m_b}{c^2}\left\{-2\dot{a}^s\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\underset{a}{S}{}^{ik}+\right.$$
$$+2\left(\dot{a}^i\underset{a}{S}{}^{ks}-\dot{a}^k\underset{a}{S}{}^{is}\right)\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}+$$
$$\left.+\dot{a}^s\left[\underset{a}{S}{}^{is}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}-\underset{a}{S}{}^{ks}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]\right\}+$$
$$+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\dot{a}^i\underset{a}{S}{}^{0k}-\dot{a}^k\underset{a}{S}{}^{0i}\right), \qquad (10.7)$$

где $\underset{a}{S}{}^{\alpha\beta}=m_a\underset{a}{\sigma}{}^{\alpha\beta}$, а $\vec{\sigma}_a=\{\underset{a}{\sigma}{}^l\}$ связано с $\underset{a}{\sigma}{}^{\alpha\beta}$ соотношением $\underset{a}{\sigma}{}^{ik}=\delta_{ikl}\underset{a}{\sigma}{}^l$. Чтобы сравнить (9.2) с (10.6), переходим в (9.2) к двум телам a и b, из которых a — легкое. Для этого сокращаем (9.2) на m_a, а затем полагаем $\dot{b}^s=0$, $m_a=0$, $m_c=0$ и т. д. и отбрасываем квадратичные по σ члены. Очевидно, что совпадение (9.2) в рассматриваемом частном случае с (10.6) произойдет только при условии

$$\ddot{\underset{a}{\sigma}}{}^{0i}-\left(\frac{\gamma m_b}{r_{ab}}\right)_{,a^ia^s}\underset{a}{\sigma}{}^{0s}=\frac{\gamma m_b}{2}\dot{a}^s\left\{\left[\vec{\sigma}_a\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s+\right.$$
$$\left.+\left[\vec{\sigma}_a\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^i\right\}. \qquad (10.8)$$

Следовательно, $\underset{a}{\sigma}{}^{0i}\neq 0$. Общее решение системы (10.8) найти затруднительно. Однако можно указать ее частное решение:

$$\underset{a}{\sigma}{}^{0i}=\frac{1}{2}\dot{a}^s\underset{a}{\sigma}{}^{si}. \qquad (10.9)$$

Уравнения движения для спина (10.7) совпадут с уравнениями вращательного движения (9.9) в рассматриваемом частном случае только при удовлетворении дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}(\dot a^i S_a^{0k} - \dot a^k S_a^{0i}) = \frac{\gamma m_b}{2}\left\{\dot a^s\left[S_a^{is}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k} - S_a^{ks}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right] - \right.$$
$$\left. -(\dot a^i S_a^{ks} - \dot a^k S_a^{is})\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right\}. \tag{10.10}$$

Общее решение этой системы неизвестно, но ее частным решением (как и для (10.8)) является (10.9).

Итак, уравнения движения (9.2), (9.9) и (10.6), (10.7) согласуются между собой при условии (10.9). Это условие переходит в $S_a^{0i}=0$ только в сопутствующей для частицы a системе координат ($\dot a^s=0$).

Небезынтересно следующее обстоятельство. Если совершить преобразование координат $x^{0'}=x^0$, $x^{i'}=x^i+c^{-2}f^i(x^k)$, то в уравнениях (10.6), записанных в новой (штрихованной) системе координат, слева появится выражение

$$c^{-2}\left[-\ddot f_a^i + \left(\frac{\gamma m_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i a^s} f_a^s\right],$$

где $f_a^i \equiv f^i[a^k(t)]$. Отсюда сразу следует, что при любом выборе функций σ_a^{0i} достаточно положить $\dot f_a^i = -\sigma_a^{0i} + \frac{1}{2}\dot a^s \sigma_a^{si}$, чтобы получить в новой системе координат уравнения (10.6), совпадающие с фоковскими уравнениями поступательного движения. Условия гармоничности (6.8*) при указанном преобразовании координат, однако, нарушаются. Действительно, легко находим, что функции $f^i(x^k)$ должны удовлетворять уравнению Лапласа $f^i_{,ss}=0$ для того, чтобы условия гармоничности (6.8*) не нарушались, причем должны выполняться краевые условия для $f^i(x^k)$: вдоль траектории движения тела a функции $f^i(x^k)$ должны быть наперед заданными функциями t. Подобная краевая задача Дирихле в общем случае решения не имеет [15]. При том же преобразовании координат в уравнениях для спина (10.7) слева появляется выражение

$$c^{-2}[(\partial f_a^i/\partial a^s)S_a^{sk} - (\partial f_a^k/\partial a^s)S_a^{si}].$$

При выборе некоторого значения для σ_a^{0i} нужно налагать на функцию $f^i(x^k)$ еще дополнительные условия, если мы хотим, чтобы (10.7) совпало с (9.9): вдоль траектории движения тела a $\partial f^i/\partial x^s$ должны быть некоторыми наперед заданными функциями t. В итоге мы получаем краевую задачу более сложную, чем задача Дирихле. Решение такой задачи в общем случае не существует.

Отметим, что уравнения вращательного движения (9.9) обобщают результат Михальской [В.120] на случай n тел, полностью с ним совпадая в случае двух тел, если в (9.9) пренебречь квадратичными по σ членами.

Особого обсуждения заслуживают постньютоновые уравнения вращательного движения. Разные авторы получили эти уравнения, не согласующиеся между собой. В самом деле, в работе [В.118] методом Фока — Папапетру получено уравнение вращательного движения тела a, которое в случае двух сферически симметричных тел a и b имеет вид (в наших обозначениях):

$$\dot{\vec{\omega}}_a = \frac{\gamma I_b}{c^2 r_{ab}^5}\left[2\vec{\omega}_b(\vec{r}_{ab}\dot{\vec{r}}_{ab}) + 2\vec{r}_{ab}(\vec{\omega}_b\dot{\vec{r}}_{ab}) + 2\dot{\vec{r}}_{ab}(\vec{\omega}_b\vec{r}_{ab}) - \right.$$

$$\left. - \frac{10}{r_{ab}^2}\vec{r}_{ab}(\vec{r}_{ab}\dot{\vec{r}}_{ab})(\vec{\omega}_b\vec{r}_{ab})\right], \tag{10.11}$$

где $\vec{\omega}_a$, $\vec{\omega}_b$ — угловые скорости тел a и b; I_b — момент инерции тела b; $\vec{r}_{ab} = \vec{b} - \vec{a}$. Аналогичное выражение приводится для $\dot{\vec{\omega}}_a$ в работе [В.124]. В (10.11), как видим, все члены справа пропорциональны $\vec{\omega}_b$, а $\vec{\omega}_a$ вообще отсутствует. Это обстоятельство приводит авторов к выводу, что в постньютоновом приближении вращение сферически симметричного тела b вызовет вращение другого тела a, даже если тело a в некоторый начальный момент времени не вращалось. В работах [В.126, В.127] также методом Фока — Папапетру выводилось постньютоново уравнение вращательного движения. В случае двух сферически симметричных тел a и b это уравнение следующее (см. также [В.14, гл. 7, § 4]):

$$\dot{\vec{\omega}}_a = \frac{1}{c^2}\left\{[\vec{\omega}_a\vec{\Omega}_a] + \frac{\gamma m_b}{r_{ab}^3}\left[\left(3 + 2\frac{m_b}{m}\right)\vec{\omega}_a - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3}{2}\left(3 + \frac{m_a}{m}\right)\frac{[\vec{r}_{ab}\dot{\vec{r}}_{ab}]}{r_{ab}^2}\right](\vec{r}_{ab}\dot{\vec{r}}_{ab})\right\}, \tag{10.12}$$

где

$$\vec{\Omega}_a = -\frac{1}{2}\frac{\gamma m_b}{r_{ab}^3}\left(3 + \frac{m_a}{m}\right)[\vec{r}_{ab}\dot{\vec{r}}_{ab}] +$$

$$+ \frac{2\gamma I_b}{r_{ab}^3}\left[\vec{\omega}_b - \frac{3}{r_{ab}^2}(\vec{\omega}_b\vec{r}_{ab})\vec{r}_{ab}\right], \quad m = m_a + m_b.$$

Как видим, уравнение (10.12) совершенно не похоже на (10.11). Первый и второй члены пропорциональны $\vec{\omega}_a$, а третий член в (10.12) вообще не содержит угловых скоростей. Это означает, что поступательное движение тел a и b должно приводить к возникновению собственных вращений у этих тел, даже если вначале оба тела не вращались.

Уравнение, отличающееся от (10.11) и (10.12), выведено в работе [B.356]:

$$\dot{\vec{\omega}}_a = \frac{3\gamma m_a}{2c^2}\left\{ 4\frac{[\vec{r}_{ab}\ddot{\vec{b}}]}{r^3_{ab}} + 7\frac{[\dot{\vec{a}}\dot{\vec{b}}]}{r^3_{ab}} - \right.$$

$$\left. - \frac{[\vec{r}_{ab}, 9\dot{\vec{a}} + 12\dot{\vec{b}}]}{r^5_{ab}}(\dot{\vec{r}}_{ab}\vec{r}_{ab}) \right\}. \qquad (10.13)$$

Позднее появились еще работы [B.206—B.208], в которых выводились методами школы Фока и анализировались уравнения вращательного движения вращающихся тел сравнимых масс конечных размеров. И опять результаты получились другими, хотя качественная картина осталась прежней: уравнения для тела a содержали члены без угловой скорости $\vec{\omega}_a$ этого тела и члены вообще без угловых скоростей.

Но имеется серия работ [B.120, B.129, B.130, B.134, B.140] и настоящая монография, в которых посленьютоновы уравнения вращательного движения, записанные в гармонической системе координат, согласуются между собой. Характерной чертой уравнений вращательного движения тела a в этих работах является пропорциональность всех их членов собственному угловому моменту импульса $S_a^{\alpha\beta} = m_a\sigma_a^{\alpha\beta}$ (угловой скорости $\vec{\omega}_a$) того же тела a. Поэтому имеем принципиально противоположное следствие: если в начальный момент времени сферически симметричное тело не вращалось, то оно не будет вращаться и в последующие моменты времени. Другими словами, в посленьютоновом приближении вращение остальных сферически симметричных тел и поступательное движение всех тел системы не может вовлечь во вращение сферически симметричное тело a, если оно не вращалось.

Таким образом, существует следующая ситуация. Во всех упомянутых работах уравнения поступательного движения, полученные и методом Фока — Папапетру, и методом Эйнштейна — Инфельда, согласуются между собой. В частности, совершая предельный переход $m_a \to 0$ в задаче двух тел, получаем полное согласование с уравнениями Папапетру (10.2). Уравнения же вращательного движения в посленьютоновом приближении (которые, как уже упоминалось, самим Фоком не выводились) получены разными. Вообще говоря, разные приближенные методы могут на некотором этапе приближения приводить к разным уравнениям движения. Но существенно то, что один и тот же метод Фока в работах [B.118, B.124, B.126, B.127, B.356, 16, B.206—B.208] привел к разным уравнениям вращательного движения. Кроме того (это представляется важным), предельный переход $m_a \to 0$ в случае двух тел в уравнениях вращательного движения, полученных в указанных работах, не приводит к согласованию с уравнениями Папапетру для спина (10.3). В правильности же последних нет никаких оснований сомневаться. Наши уравнения (9.9), как показано выше, согласуются с (10.3).

В заключение § 10 выскажем некоторые соображения, касающиеся принципиальной разницы между уравнениями вращательного движения, полученными методами школ Эйнштейна — Инфельда и Фока — Папапетру. В первом из них в тензор энергии-импульса вводятся δ-функции, что равносильно рассмотрению сферически симметричных тел бесконечно малых размеров (материальных точек). Во втором рассматриваются тела конечных размеров и дополнительно (чтобы избежать вычислительных трудностей) в аппроксимационную процедуру вводится разложение потенциала в окрестности тела a в ряд Тейлора. Поэтому оказывается, что некоторые интегралы (которые точно равны нулю) уже не обращаются в нуль, если учесть в разложении их подынтегральных функций в ряды Тейлора только несколько первых членов, что и сделано в упоминавшихся работах. Применение формализма δ-функций исключает разложение потенциалов в ряды Тейлора, и все интегралы, могущие дать члены без $\vec{\omega}_a$ или члены вообще без угловых скоростей, обращаются в нуль. Интересно также отметить, что обсуждаемые члены приводят только к малым колебаниям тела около своей оси вращения, а не к вращению его. Это утверждение доказывается с помощью усреднения обсуждаемых членов по периоду обращения тела. Средняя угловая скорость оказывается равной нулю [16].

Таким образом, суммируя все сказанное, заключаем, что различие между уравнениями вращательного движения, полученными методом Эйнштейна — Инфельда и методом Фока — Папапетру, вполне объясняется различием этих методов, которое в свою очередь определяется способом представления реальных тел (или материальные точки с некоторыми сосредоточенными характеристиками, или тела конечных размеров с определенной внутренней структурой и прочими свойствами).

Более подробный анализ самого вывода уравнений вращательного движения методом Фока — Папапетру показывает, что выбор тензора энергии-импульса и учет внутренней структуры и других свойств тел конечных размеров упомянутыми выше авторами производится не одинаково, что существенно сказывается на окончательных уравнениях движения. Мы не ставим своей целью определить, какие из них правильные, а какие ошибочные. Это задача исследователей, использующих в качестве рабочего инструмента мощный метод Фока — Папапетру. Тем не менее отметим, что уравнения вращательного движения для тела a, не содержащие $\vec{\omega}_a$, заведомо не могут быть верными, ибо не выполняется принцип соответствия, согласно которому уравнения движения, полученные обоими методами, должны содержать общую часть, т. е. члены с $\vec{\omega}_a$. Уравнения (10.11), (10.13) этому требованию не удовлетворяют. Уравнения (10.12) и уравнения вращательного движения для тела a, полученные в [В.14, В.206—В.208, 16], содержат члены с $\vec{\omega}_a$, и принцип соответствия выполнен.

Интегрирование уравнений движения (9.2), (9.9) и их подробное обсуждение будет осуществлено в последующих главах.

§ 11. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ЗАРЯЖЕННЫХ И НАМАГНИЧЕННЫХ ТЕЛ

Ряд открытий и исследований последних лет, особенно в области астрофизики, показал, что значительную роль в эволюции звезд, планет, звездных систем, в закономерностях их движения должны играть наряду с гравитационными также электромагнитные поля [17—34]. Точка зрения, что уравнения движения заряженных тел астрономического типа вряд ли имеют приложения в области астрономии и астрофизики, устарела. Существует мнение [18, 25, 26, 29, 35—37], что звезды могут обладать значительными электростатическими полями. Например, в работе [18] обосновывается, что Солнце обладает электростатическим зарядом $e_{\odot} \sim 3 \cdot 10^{27}$ ед. CGSE. В работе [29] приведены оценки, согласно которым у нейтронных звезд разность потенциалов может достигать 10^6—10^{10} В. Указывается также, что небесные тела являются электростатическими генераторами даже при полном отсутствии у них магнитных полей. Заметные магнитные поля имеются, как показывают наблюдения, у многих небесных тел и объектов: планет, звезд, квазаров, галактик (см., например, обзоры [21, 23, 34], а также работы [38—41]). У некоторых звезд напряженность магнитного поля $\vec{H}$ бывает исключительно большой. Например, обнаружена звезда [42] с $H \approx 34000$ Э (эрстед). Для сравнения напомним, что у Солнца в настоящее время $H \approx 2$ Э, у Земли $H \approx 0{,}63$ Э. У нейтронных звезд, у пульсаров на поверхности H очень велико: 10^8 Э $\leqslant H \leqslant (10^{12}$—$10^{15})$ Э [В.27—В.29, 41].

Из сказанного ясно, что учет влияния электромагнитных свойств тел на их движение должен представлять теоретический и практический интерес.

Рассмотрим следующую задачу. Дана система n тел a, b, c, ... сравнимых масс m_a, m_b, m_c, ... астрономического типа. Все тела системы обладают электрическими зарядами e_a, e_b, e_c, ..., магнитными полями дипольного типа (магнитными моментами $\vec{\mathfrak{m}}_a$, $\vec{\mathfrak{m}}_b$, $\vec{\mathfrak{m}}_c$, ...) и собственными моментами импульса $m_a\vec{\sigma}_a$, $m_b\vec{\sigma}_b$, $m_c\vec{\sigma}_c$, ... (вращениями вокруг своих осей). Нужно вывести в ОТО в посленьютоновом приближении уравнения поступательного и «вращательного» движений для каждого тела данной системы.

Сформулированная задача впервые решалась в работе [В.131], и полученные уравнения движения подробно обсуждались в [В.200]. В [В.131] была использована плодотворная идея Инфельда [В.100] о введении дираковских δ-функций в тензор энергии-импульса рассматриваемой системы тел. Впоследствии [В.132] методика вывода уравнений была значительно усовершенствована по сравнению с [B.131]. Вместо обычных δ-функций были использованы модифицированные $\widehat{\delta}$-функции [B.104, B.105], что сильно упростило вывод уравнений движения, ибо удалось избежать громоздкой процедуры перенормировки масс. Кроме того, тензор энергии-импульса в [B.132] был взят в более общей и правильной форме, чем в [B.131].

Сейчас мы займемся подробным изложением решения поставленной задачи.

Исходной системой уравнений будут полевые уравнения (3.1), уравнения электродинамики Максвелла в четырехмерной форме

$$f^{\alpha\beta}_{;\,\beta}=4\pi I^{\alpha}; \tag{11.1}$$

$$f_{\alpha\beta}=A_{\alpha;\,\beta}-A_{\beta;\,\alpha}=A_{\alpha,\,\beta}-A_{\beta,\,\alpha} \tag{11.2}$$

($f_{\alpha\beta}$ и A_{α} — тензор и 4-потенциал электромагнитного поля, I^{α} — 4-вектор тока) и уравнения движения в интегральной форме (5.4), (8.1)—(8.4). Однако теперь $T^{\alpha\beta}$ будет состоять из двух частей

$$T^{\alpha\beta}=M^{\alpha\beta}+E^{\alpha\beta}, \tag{11.3}$$

где $E^{\alpha\beta}$ является тензором энергии-импульса электромагнитного поля и определяется обычным образом (см., например, [B.13]):

$$E^{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left(-f^{\alpha\mu}f^{\beta}_{\cdot\,\mu}+\frac{1}{4}\,\delta^{\alpha\beta}f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}\right), \tag{11.4}$$

а $M^{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса остальной материи, структуру которого укажем чуть позже.

Сначала выясним структуру плотности 4-вектора тока I^{α}. Без учета собственных вращений и магнитных моментов тел имеем [B.13]:

$$I^{\alpha}=\sum_{a}I^{\alpha}_{a},\quad I^{0}_{a}=e_a\delta_a,\quad I^{k}_{a}=e_a\frac{da^k}{dx^0}\,\delta_a. \tag{11.5}$$

Учет собственного вращения тел приводит к изменению их поступательной скорости. Как выяснено в § 7, нужно $\frac{da^k}{dx^0}\delta_a$ заменить на $\left(\frac{da^k}{dx^0}-\frac{1}{2}[\vec{\sigma}_a\,\vec{\nabla}]^k\right)\delta_a$. Естественно, что тогда в I^k_a появляется индуцированный магнитный момент $\vec{\mathfrak{m}}^{(e\sigma)}_{a}=\frac{1}{2c}\,e_a\vec{\sigma}_a$, который существует только при одновременном наличии e_a и $\vec{\sigma}_a$. Кроме того, предполагаем, что любое тело a обладает «врожденным» магнитным моментом $\vec{\mathfrak{m}}_a$, который не исчезает при $\vec{\sigma}_a=0$, направление которого вовсе не обязано совпадать с направлением $\vec{\sigma}_a$ и который может меняться со временем.

«Врожденному» магнитному моменту $\vec{\mathfrak{m}}_a$ тела a всегда соответствует удельный по массе «внутренний» угловой момент $2c\vec{\mu}_a$, который связан с $\vec{\mathfrak{m}}_a$ равенством $2c\vec{\mu}_a = \frac{2c}{e^*_a}\vec{\mathfrak{m}}_a$, где e^*_a — некоторая интегральная характеристика намагниченного тела a, имеющая размерность заряда, которую следует назвать эквивалентным зарядом [43], обеспечивающим существование $\vec{\mathfrak{m}}_a$ с помощью некоторого механизма (круговой ток, соленоид, динамо-эффект и т. д.). Таким образом, заряд e^*_a выполняет роль переводного коэффициента, ставящего в соответствие магнитному моменту $\vec{\mathfrak{m}}_a$ тела a его «внутренний» угловой момент

$$2cm_a\vec{\mu}_a = \frac{2cm_a}{e^*_a}\vec{\mathfrak{m}}_a. \tag{11.6}$$

Величина e^*_a определяется в зависимости от природы магнетизма тела a. Например, в случае ферромагнитного тела e^*_a имеет вполне определенное выражение и величину, указанную еще Эйнштейном [B.204] (см. также [44, гл. 17]): $e^*_a = \frac{e}{m} m_a$, где e и m — заряд и масса электрона. В этом случае соответствующий $\vec{\mathfrak{m}}_a$ «внутренний» угловой момент есть [B.204] (в системе единиц CGS):

$$2cm_a\vec{\mu}_a = \frac{2cm}{e}\vec{\mathfrak{m}}_a \approx -1{,}13\cdot 10^{-7}\,\vec{\mathfrak{m}}_a\ \text{см}^2\cdot\text{г}\cdot\text{с}^{-1}.$$

В итоге всех этих рассуждений приходим к следующим выводам. Учет «врожденного» магнитного поля дипольного типа приводит к дополнительному изменению поступательной скорости $\frac{da^k}{dx^0}$ за счет появления «внутреннего» углового момента. Теперь в (11.5) следует сделать замену

$$\frac{da^k}{dx^0}\delta_a \text{ на } \left(\frac{da^k}{dx^0} - \frac{1}{2}[\vec{s}_a\vec{\nabla}]^k\right)\delta_a, \text{ где } \vec{s}_a \equiv \vec{\sigma}_a + 2c\vec{\mu}_a, \tag{11.7}$$

а не согласно (7.2). Кроме того, в (11.5) все заряды e_a должны состоять из двух слагаемых: $e_a = e'_a + e^*_a$, где e'_a обозначает заряд, не участвующий в создании «врожденного» магнитного момента $\vec{\mathfrak{m}}_a$. Предложенную замену (11.7) следует считать весьма естественной и достаточно обоснованной в силу поразительной аналогии между вихревым движением жидкости в гидродинамике и свойствами дипольных магнитных полей [В.13, 45, 46]. Окончательно приходим к следующей структуре I_a^α:

$$I^\alpha = \sum_a I_a^\alpha, \quad \left.\begin{aligned} I_a^0 &= e_a \delta_a, \\ I_a^k &= e_a \left(\frac{da^k}{dx^0} - \frac{1}{2} [\vec{s}_a \vec{\nabla}]^k \right) \delta_a + i_a^k \delta_a, \end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

где i_a^k появляется в силу неньютонового закона сложения скоростей и искривленности пространства (ср. с t_a^{0i} в (7.4)). Вводить в I_a^α какие-либо добавки к e_a, как это делалось с m_a в (7.4), не следует, так как $e_a = \mathrm{const}$. Действительно, из (11.1) немедленно следует уравнение непрерывности $I^\alpha_{;\alpha} = 0$, которое можно представить в виде

$$\sqrt{-g}\, I^\alpha_{;\alpha} = (\sqrt{-g}\, I^\alpha)_{,\alpha} = (\bar{I}^\alpha)_{,\alpha} = 0. \tag{11.9}$$

Интегрируя (11.9) по V_a и применяя теорему Гаусса, находим

$$\int_{V_a} (\bar{I}^\alpha)_{,\alpha} dV = \int_{V_a} (\bar{I}^0)_{,0} dV + \int_{V_a} (\bar{I}^i)_{,i} dV =$$
$$= \int_{V_a} (e_a \delta_a)_{,0} dV + \oint_{S_a} \bar{I}^i dS_i = e_{a,0} = 0, \quad e_a = \mathrm{const}, \tag{11.9*}$$

что и требовалось показать (S_a — поверхность, охватывающая объем V_a).

Очевидно теперь, что замена (11.7) обязывает принять для плотности $\bar{M}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\, M^{\alpha\beta}$ следующую структуру:

$$\bar{M}^{\alpha\beta} = \sum_a \bar{M}_a^{\alpha\beta}, \quad \left.\begin{aligned} \bar{M}_a^{00} &= (m_a + m_a^{(s)}) \delta_a, \\ \bar{M}_a^{0i} &= (m_a + m_a^{(s)}) \left(\frac{da^i}{dx^0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\vec{s}_a \nabla]^i \right) \delta_a + \tau_a^{0i} \delta_a, \\ \bar{M}_a^{ij} &= (m_a + m_a^{(s)}) \left(\frac{da^i}{dx^0} - \frac{1}{2} [\vec{s}_a \vec{\nabla}]^i \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{da^j}{dx^0} - \frac{1}{2} [\vec{s}_a \vec{\nabla}]^j \right) \delta_a + \tau_a^{ij} \delta_a, \end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

где $m_a^{(s)}$ получается из $m_a^{(\sigma)}$ формальной заменой σ на s, величины τ_a^{0i}, τ_a^{ij}, как и t_a^{0i}, t_a^{ij} в (7.4), появляются в силу неньютонового закона сложения скоростей и искривленности пространства. Для них справедливы те же формулы (7.5)—(7.7).

Неизвестными величинами в нашей задаче являются m_a, m_b, m_c, ..., a^i, b^i, c^i, ..., $\vec{s}_a$, $\vec{s}_b$, $\vec{s}_c$, ..., τ^{0i}_a, τ^{0i}_b, τ^{0i}_c, ..., τ^{ij}_a, τ^{ij}_b, τ^{ij}_c, ..., $\dot{i}^k_a$, $\dot{i}^k_b$, $\dot{i}^k_c$, ... Заряды e_a, e_b, e_c, ... в силу (11.9*) постоянны и задаются как параметры системы. Кроме того, неизвестными являются метрика $g_{\alpha\beta}$ и 4-потенциал A^α. Все эти величины будут отыскиваться с помощью применявшегося выше аппроксимационного метода. Для этого нужно указать разложения всех входящих в основные уравнения величин в ряды по параметру $\lambda=\frac{1}{c}$. Прежде чем это сделать, несколько преобразуем уравнения Максвелла. Требуя выполнимости условия Лоренца

$$A^{\alpha}_{;\alpha}=0, \tag{11.11}$$

из (11.1), (11.2) нетрудно получить более удобную для определения A^α, а следовательно, и $f_{\alpha\beta}$ систему уравнений:

$$A^{\alpha;\beta}_{;\beta}=4\pi I^\alpha-A_\beta R^{\beta\alpha}. \tag{11.12}$$

Ковариантно дифференцируя $E^{\alpha\beta}$ и совершая свертку, выводим

$$E^{\alpha\beta}_{;\beta}=f^{\alpha}_{\cdot\beta}I^\beta. \tag{11.13}$$

При этом, конечно, используются уравнения Максвелла (11.1), (11.2). Напоминаем, что всегда $E^{\alpha}_{\alpha}=0$. Введя тензорные плотности, систему (3.1) можно заменить ей эквивалентной

$$\bar{R}^{\alpha\beta}=-8\pi\gamma\left(\bar{M}^{\alpha\beta}+\bar{E}^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\bar{M}\right). \tag{11.14}$$

В силу (5.17), (11.3) и (11.13) имеем

$$\sqrt{-g}\,T^{\alpha\beta}_{;\beta}=(\bar{M}^{\alpha\beta})_{,\beta}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\bar{M}^{\mu\nu}+f^{\alpha}_{\cdot\beta}I^\beta. \tag{11.15}$$

Закон тяготения Ньютона и закон Кулона подсказывают, что m_a и e_a начинают свое разложение по λ с членов 2-го порядка (в дальнейшем для простоты будем обычно писать e_a вместо $\underset{2}{e_a}$). Принимая во внимание разложение для $\vec{\sigma}_a$ (7.3), приходим к заключению, что индуцированный магнитный момент $\vec{\mathfrak{m}}^{(e\sigma)}_a$, а следовательно, и «врожденный» имеют разложение

$$\vec{\mathfrak{m}}_a(t)=\lambda^3\underset{3}{\vec{\mathfrak{m}}_a}+\lambda^5\underset{5}{\vec{\mathfrak{m}}_a}+\ldots . \tag{11.16}$$

Разложение остальных величин определяется теперь их связями с m_a, e_a, $\vec{\mathfrak{m}}_a$, $\vec{\sigma}_a$, задаваемыми основными уравнениями (3.1), (11.1), (11.2). Внимательнее рассмотрев эти связи, легко находим, что имеют место прежние разложения (5.7)—(5.14), (5.16), (6.12), (6.13), а 4-потенциал A^α без учета электромагнитного излучения имеет разложение

$$\left.\begin{aligned} A^0&=\lambda^2 \underset{2}{A^0}+\lambda^4 \underset{4}{A^0}+\ldots, \\ A^i&=\lambda^3 \underset{3}{A^i}+\lambda^5 \underset{5}{A^i}+\ldots . \end{aligned}\right\} \tag{11.17}$$

Разложение A^α дает возможность написать разложение для $f_{\alpha\beta}$, а затем для $\bar{E}_{\alpha\beta}$:

$$\left.\begin{aligned} f_{0i}&=\lambda^2 \underset{2}{A}{}^0_{,i}+\lambda^4 (\underset{3}{A}{}^i_{,0}+\underset{4}{A}{}^0_{,i}+\underset{2}{h_{00}}\,\underset{2}{A}{}^0_{,i})+\ldots, \\ f_{ik}&=\lambda^3 (\underset{3}{A}{}^k_{,i}-\underset{3}{A}{}^i_{,k})+\lambda^5 (\underset{5}{A}{}^k_{,i}-\underset{5}{A}{}^i_{,k}+\underset{3}{h_{0i}}\,\underset{2}{A}{}^0_{,k}- \\ &\quad -\underset{3}{h_{0k}}\,\underset{2}{A}{}^0_{,i}+\underset{2}{h_{is}}\,\underset{3}{A}{}^s_{,k}-\underset{2}{h_{ks}}\,\underset{3}{A}{}^s_{,i})+\ldots; \end{aligned}\right\} \tag{11.18}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{E}_{00}&=\lambda^4 \underset{4}{\bar{E}_{00}}+\lambda^6 \underset{6}{\bar{E}_{00}}+\ldots=\lambda^4 \left(\frac{1}{8\pi} \underset{2}{A}{}^0_{,s}\,\underset{2}{A}{}^0_{,s}\right)+\ldots, \\ \bar{E}_{0i}&=\lambda^5 \underset{5}{\bar{E}_{0i}}+\lambda^7 \underset{7}{\bar{E}_{0i}}+\ldots=\lambda^5 \left[\frac{1}{4\pi} \underset{2}{A}{}^0_{,s}(\underset{3}{A}{}^s_{,i}-\underset{3}{A}{}^i_{,s})\right]+\ldots, \\ \bar{E}_{ij}&=\lambda^4 \underset{4}{\bar{E}_{ij}}+\lambda^6 \underset{6}{\bar{E}_{ij}}+\ldots= \\ &=\lambda^4 \left(-\frac{1}{4\pi} \underset{2}{A}{}^0_{,i}\,\underset{2}{A}{}^0_{,j}-\frac{1}{8\pi} \delta_{ij} \underset{2}{A}{}^0_{,s}\,\underset{2}{A}{}^0_{,s}\right)+\ldots . \end{aligned}\right\} \tag{11.19}$$

Заметим также, что

$$\dot{i}^k_a=\lambda^5 \underset{5}{\dot{i}^k_a}+\lambda^7 \underset{7}{\dot{i}^k_a}+\ldots . \tag{11.20}$$

Объяснение того факта, что в разложениях рядом стоящие члены по порядку всегда отличаются на две единицы, такое же, как и в случае вращающихся тел: пренебрегаем электромагнитным и гравитационным излучениями, которые сказываются на уравнениях движения в порядке более высоком, чем следующее за ньютоновым.

§ 12. НАХОЖДЕНИЕ МЕТРИКИ, ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА И НЬЮТОНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Нахождение метрики проводится точно по той же схеме, что и в случае вращающихся тел. Рассматривая полевые уравнения (11.14) в наинизших 2-м и 3-м порядках по λ, получаем уравнения для нахождения $\underset{2}{h_{00}}$, $\underset{2}{h_{ik}}$, $\underset{3}{h_{0i}}$:

$$\underset{2}{h_{00,\,ss}}=8\pi\gamma \sum_a m_a \underset{2}{\delta_a}; \tag{12.1}$$

$$\underset{2}{h}_{ik,\,ss}+\underset{2}{h}_{ss,\,ik}-\underset{2}{h}_{is,\,ks}-\underset{2}{h}_{ks,\,is}=\underset{2}{h}_{00,\,ik}+\delta_{ik}\underset{2}{h}_{00,\,ss}; \qquad (12.2)$$

$$\underset{3}{h}_{0i,\,ss}-\underset{3}{h}_{0s,\,si}=\underset{2}{h}_{is,\,\underset{1}{s0}}-\underset{2}{h}_{ss,\,\underset{1}{i0}}-16\pi\gamma\sum_a \underset{2}{m_a\dot{a}^i\delta_a}+$$

$$+8\pi\gamma\sum_a \underset{2}{m_a}\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}\delta_a]^i. \qquad (12.3)$$

Как видим, уравнения (12.1), (12.2) совпадают с (6.1), (6.2), а поэтому имеем для $\underset{2}{h}_{00}$ и $\underset{2}{h}_{ik}$ те же решения (6.4) и (6.5). Уравнение (12.3) отличается от (8.5) только заменой $\underset{1}{\vec{\sigma}_a}$ на $\underset{1}{\vec{s}_a}$. Отсюда решение

$$\underset{3}{h}_{0i}=4\sum_a\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\dot{a}^i}{r_a}-2\sum_a\gamma\underset{2}{m_a}\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}\frac{1}{r_a}\right]^i, \qquad (12.4)$$

которое также отличается от (8.6) заменой $\underset{1}{\vec{\sigma}_a}$ на $\underset{1}{\vec{s}_a}$. Решение (12.4) показывает, что магнитные свойства тел сказываются на метрике в 3-м порядке (через $\underset{1}{\vec{s}_a}\equiv\underset{1}{\vec{\sigma}_a}+2c\underset{1}{\vec{\mu}_a}$).

Отметим, что условия гармоничности (6.8*) найденной метрикой удовлетворяются.

Для нахождения 4-потенциала A^α разлагаем в ряды полевые уравнения (11.12). В наинизших 2-м и 3-м порядках они дают уравнения

$$\underset{2}{A}{}^0_{,\,ss}=-4\pi\sum_a e_a\delta_a; \qquad (12.5)$$

$$\underset{3}{A}{}^i_{,\,ss}=-4\pi\sum_a e_a\left(\dot{a}^i\delta_a-\frac{1}{2}\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}\delta_a]^i\right). \qquad (12.6)$$

Их решениями выбираем:

$$\underset{2}{A}{}^0=\sum_a\frac{e_a}{r_a}; \qquad (12.7)$$

$$\underset{3}{A}{}^i=\sum_a e_a\left(\frac{\dot{a}^i}{r_a}-\frac{1}{2}\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}\frac{1}{r_a}\right]^i\right). \qquad (12.8)$$

Легко проверяется, что условие Лоренца (11.11) в наинизшем 3-м порядке найденными $\underset{2}{A}{}^0$ и $\underset{3}{A}{}^i$ удовлетворяется.

Уравнение (11.12) при $\alpha=0$ в 4-м порядке приводится к виду

$$\underset{4}{A}{}^0_{,\,ss}=\underset{2}{A}{}^0_{,\,\underset{11}{00}}-\underset{2}{h}_{00,\,ss}\underset{2}{A}{}^0-\underset{2}{h}_{00,\,s}\underset{2}{A}{}^0_{,\,s}. \qquad (12.9)$$

Учет найденных решений $\underset{2}{h}_{00}$, $\underset{2}{A}{}^0$ позволяет найти отсюда $\underset{4}{A}{}^0$:

$$\underset{4}{A}{}^0=\frac{1}{2}\sum_a e_a r_{a,\,\underset{11}{00}}+\sum_a\sum_b\frac{\gamma \underset{2}{m_a} e_b}{r_a r_b}+$$

$$+\sum_{\substack{a\\a\neq b}}\sum_b\frac{\gamma(e_a \underset{2}{m_b}-\underset{2}{m_a} e_b)}{r_{ab} r_b}. \tag{12.10}$$

Теперь рассмотрим уравнения движения (5.4), (8.1)—(8.4). Воспользовавшись (11.15), уравнения (5.4) можно записать подробнее:

$$\int\limits_{V_a}\sqrt{-g}\,T^{\alpha\beta}_{;\,\beta}\,dV=\int\limits_{V_a}(\bar M^{\alpha\beta}_{,\,\beta}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\bar M^{\mu\nu})\,dV+\int\limits_{V_a}f^{\alpha}_{\cdot\,\beta}\,I^{\beta}dV=0. \tag{12.11}$$

Разложения подынтегральной функции в первом интеграле совпадает с (6.12) и (6.13) после формальной замены в этих формулах буквы T на букву M. Во втором интеграле, имеющем чисто электромагнитную природу, подынтегральная функция имеет разложения:

$$f^{0}_{\cdot\,\beta}\,I^{\beta}=\lambda^5(\underset{2}{A}{}^0_{,\,s}\underset{3}{I}{}^s)+\ldots; \tag{12.12}$$

$$f^{i}_{\cdot\,\beta}\,I^{\beta}=\lambda^4(\underset{2}{A}{}^0_{,\,i}\underset{2}{I}{}^0)+\lambda^6[(\underset{4}{A}{}^0_{,\,i}+\underset{3}{A}{}^i_{,\,\underset{1}{0}}+\underset{2}{h}_{00,\,i}\underset{2}{A}{}^0+$$

$$+2\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{A}{}^0_{,\,i})\underset{2}{I}{}^0+(\underset{3}{A}{}^i_{,\,s}-\underset{3}{A}{}^s_{,\,i})\underset{3}{I}{}^s]+\ldots. \tag{12.13}$$

При $\alpha=0$ (12.11) в наинизшем 3-м порядке совпадает с (6.14), так как разложение $f^{0}_{\cdot\,\beta}I^{\beta}$, согласно (12.12), начинается только с 5-го порядка. Поэтому получаем то же следствие (6.15): $\underset{2}{m_a}=\mathrm{const}$.

При $\alpha=i$ (12.11) имеет наинизший 4-й порядок. Воспользовавшись (6.13) и (12.13), находим

$$\int\limits_{V_a}\left(\underset{3}{\bar M}{}^{0i}_{,\,\underset{1}{0}}+\underset{4}{\bar M}{}^{is}_{,\,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,i}\underset{2}{\bar M}{}^{00}\right)dV+\int\limits_{V_a}\underset{2}{A}{}^0_{,\,i}\underset{2}{I}{}^0dV=0. \tag{12.14}$$

Первый интеграл вычисляется точно, как в случае невращающихся и вращающихся тел (см. (6.16*) и (8.6*)), и дал бы ньютоновы уравнения движения (6.17), если бы не второй интеграл:

$$\int\limits_{V_a}\underset{2}{A}{}^0_{,\,i}\underset{2}{I}{}^0dV=\sum_b e_a e_b\int\limits_{V_a}\left(\frac{1}{r_b}\right)_{,\,i}\delta_a dV=\sum_{b\neq a}\left(\frac{e_a e_b}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i}. \tag{12.15}$$

В итоге (12.14) дает известные уравнения поступательного движения в ньютоновом приближении:

$$\underset{2}{m_a}\ddot{a}^i-\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^i}+\sum_{b\neq a}\left(\frac{e_a e_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i}=0. \tag{12.16}$$

Следствия из уравнений (8.1) и сопутствующие им вычисления в наинизших 3-м и 4-м порядках совершенно аналогичны следствиям и вычислениям, содержащимся в (8.7)—(8.13). Разница состоит только в формальной замене всюду $\underset{1}{\vec{\sigma}_a}$ на $\underset{1}{\vec{s}_a}$. В результате получаем важный вывод:

$$\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\,[\dot{\underset{1}{\vec{s}_a}}\,\vec{e}_i]^k=0,\ \text{т. е. } \underset{1}{\vec{s}_a}\equiv\underset{1}{\vec{\sigma}_a}+2c\underset{1}{\vec{\mu}_a}=\overrightarrow{\text{const}}. \tag{12.17}$$

Далее легко проследить, что все интегралы в (8.2)—(8.4) в наинизших 3-м и 4-м порядках тождественно обращаются в нуль.

Чтобы вывести уравнения движения в посленьютоновом приближении, нужно еще вычислить $\underset{4}{m_a}$, $\underset{4}{h_{00}}$ и $\underset{5}{\tau_a^{0i}}$.

Для этого рассмотрим (5.4) при $\alpha=0$ в следующем 5-м порядке. Заменив в (5.4) подынтегральное выражение, согласно (6.12) (с заменой T на M) и (12.12), и проделав несложные вычисления, находим (см. вычисление (8.14)):

$$\int_{V_a}\left(\underset{4}{\bar{M}}{}^{00}_{,\underset{1}{0}}+\underset{5}{\bar{M}}{}^{0s}_{,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}{}_{00,\underset{1}{0}}\underset{2}{\bar{M}}{}^{00}+\underset{2}{h}{}_{00,s}\underset{3}{\bar{M}}{}^{0s}\right)dV+\int_{V_a}\underset{2}{A}{}^{0}_{,s}\underset{3}{I^s}\,dV=$$

$$=\underset{4}{m}{}_{a,\underset{1}{0}}-\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,\underset{1}{0}}-\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot{a}^s+$$

$$+\sum_{b\neq a}\left(\frac{e_a e_b}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot{a}^s=0. \tag{12.18}$$

Заменяя последние две суммы на $-\underset{2}{m_a}\dot{a}^s\ddot{a}^s$ в соответствии с ньютоновыми уравнениями движения (12.16), приходим к оценке величины $\underset{4}{m_a}$:

$$\underset{4}{m_a}=\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\dot{a}^s\dot{a}^s+\sum_{b\neq a}\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}+\underset{4}{C_a^*}. \tag{12.19}$$

Постоянная $\underset{4}{C_a^*}$ должна несколько отличаться от $\underset{4}{C_a}$ из (8.15), так как должна включать в себя не только энергию собственного вращения, но и энергию, возникающую из-за наличия магнитного диполя $\underset{1}{\vec{\mu}_a}$.

Если в (11.14) положить $\alpha=\beta=0$, выделить с помощью (5.14) и (5.16) члены 4-го порядка, а также воспользоваться вычисленной метрикой $\underset{2}{h}_{00}$, $\underset{2}{h}_{ik}$, $\underset{3}{h}_{0i}$ и выражениями для $T^{\alpha\beta}$, $\underset{4}{m}_a$ из (12.19) и

$$\underset{4}{m}_a^{(s)} \equiv -\frac{1}{2}\underset{2}{m}_a \dot{a}^s\,[\underset{1}{\vec{s}}_a \vec{\nabla}]^s + \frac{1}{8}\underset{2}{m}_a\,[\underset{1}{\vec{s}}_a \vec{\nabla}]^s\,[\underset{1}{\vec{s}}_a \vec{\nabla}]^s, \qquad (12.20)$$

то получим окончательное уравнение для нахождения $\underset{4}{h}_{00}$:

$$\underset{4}{h}_{00,\,ss}=\underset{2}{h}_{00,\,\underset{11}{00}}+\frac{1}{2}(\underset{2}{h}^2_{00})_{,\,ss}+2\gamma\underset{2}{A}{}^0_{,\,s}\underset{2}{A}{}^0_{,\,s}+$$
$$+8\pi\gamma\sum_a\left(\underset{2}{m}_a\underset{2}{h}_{00}+\frac{3}{2}\underset{2}{m}_a\dot{a}^s\dot{a}^s+\sum_{b\neq a}\frac{\gamma\underset{2}{m}_a\underset{2}{m}_b}{r_{ab}}\right)\delta_a+$$
$$+8\pi\gamma\sum_a\left(\underset{4}{C}{}^*_a-\frac{3}{2}\underset{2}{m}_a\dot{a}^s\,[\underset{1}{\vec{s}}_a\vec{\nabla}]^s+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}\underset{2}{m}_a\,[\underset{1}{\vec{s}}_a\vec{\nabla}]^s\,[\underset{1}{\vec{s}}_a\vec{\nabla}]^s\right)\delta_a, \qquad (12.21)$$

решение которого по аналогии с решением (8.24) имеет вид

$$\underset{4}{h}_{00}=\underset{4}{h}{}^{(g)}_{00}+\underset{4}{h}{}^{(gs)}_{00}+\underset{4}{h}{}^{(ge)}_{00}, \qquad (12.22)$$

где $\underset{4}{h}{}^{(g)}_{00}$ совпадает с (8.26),

$$\underset{4}{h}{}^{(gs)}_{00}\equiv 3\sum\gamma\underset{2}{m}_a\left(\dot{a}^s\left[\underset{1}{\vec{s}}_a\vec{\nabla}\frac{1}{r_a}\right]^s-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}[\underset{1}{\vec{s}}_a\vec{\nabla}]^s\left[\underset{1}{\vec{s}}_a\vec{\nabla}\frac{1}{r_a}\right]^s\right)-\sum_a\frac{2\gamma}{r_a}\underset{4}{C}{}^*_a\ ; \qquad (12.23)$$

$$\underset{4}{h}{}^{(ge)}_{00}\equiv\gamma\left(\sum_a\frac{e_a}{r_a}\right)^2-2\gamma\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{e_ae_b}{r_{ab}r_b}. \qquad (12.24)$$

Осталось вычислить $\underset{5}{\tau}{}^{0i}_a$. Как уже упоминалось, $\underset{5}{\tau}{}^{0i}_a=\underset{5}{\overset{*}{\alpha}}{}^i_a+\underset{5}{\overset{*}{\beta}}{}^i_a$, где $\underset{5}{\overset{*}{\alpha}}{}^i_a$ является только функцией t, а $\underset{5}{\overset{*}{\beta}}{}^i_a$, кроме того, есть функция оператора $\vec{\nabla}$. Имея это в виду, рассмотрим (8.1) при $\alpha=0$ в 5-м порядке:

$$\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\left(\underset{4}{\bar{M}}{}^{00}_{,\,\underset{1}{0}}+\underset{5}{\bar{M}}{}^{0s}_{,\,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0}}\underset{2}{\bar{M}}{}^{00}+\underset{2}{h}_{00,\,s}\underset{3}{\bar{M}}{}^{0s}\right)dV+$$
$$+\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\underset{2}{A}{}^0_{,\,s}\underset{3}{I}{}^s dV=0. \qquad (12.25)$$

В этом выражении все величины известны, кроме $\underset{5}{\tau}{}^{0s}$, которая входит в $\underset{5}{\bar{M}}{}^{0s}$. Первый интеграл в (12.25) вычисляется точно так, как и (8.16), и равен выражению

$$-\underset{5}{\overset{*}{\alpha}}{}^{i}_{a}-\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\ddot{\vec{a}}\,]^{i}+\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^s}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_s]^{i}. \qquad (12.26)$$

Второй интеграл равен выражению

$$-\sum_{b\neq a}\frac{e_a e_b}{2}\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^{i}. \qquad (12.27)$$

Заменив в (12.26) $\sum\limits_{b\neq a}(\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}/r_{ab})_{,a^s}$ из ньютоновых уравнений движения (12.16) и просуммировав (12.26) и (12.27), получаем, согласно (12.25), значение для $\underset{5}{\overset{*}{\alpha}}{}^{i}_{a}$:

$$\underset{5}{\overset{*}{\alpha}}{}^{i}_{a}=\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\ddot{\vec{a}}\,]^{i}+\sum_{b\neq a}\frac{e_a e_b}{2}\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^{i}, \qquad (12.28)$$

которое переходит в (8.21), если отбросить электромагнитные члены. Интеграл от члена, содержащего $\underset{5}{\overset{*}{\beta}}{}^{i}_{a}$, обратился в нуль. Чтобы найти $\underset{5}{\overset{*}{\beta}}{}^{i}_{a}$, требуем выполнимости эйнштейновского закона сложения скоростей и проводим рассуждения и вычисления, сопутствующие выводу формулы (8.23). Тогда получаем

$$\underset{5}{\overset{*}{\beta}}{}^{i}_{a}=\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\dot{a}^{i}\dot{a}^{s}\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}\,]^{s}. \qquad (12.29)$$

§ 13. ВЫВОД ПОСЛЕНЬЮТОНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И «ВРАЩАТЕЛЬНОГО» ДВИЖЕНИЙ

Посленьютоновы уравнения поступательного движения будут получены из уравнений (12.11) при $\alpha=i$, которые в подробной записи имеют вид

$$\lambda^4\int_{V_a}\left(\underset{3}{\bar{M}}{}^{0i}{}_{,\underset{1}{0}}+\underset{4}{\bar{M}}{}^{is}{}_{,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}{}_{00,i}\underset{2}{\bar{M}}{}^{00}+\underset{2}{A}{}^{0}{}_{,i}\underset{2}{I}{}^{0}\right)dV+$$

$$+\lambda^6\int_{V_a}\Big[\underset{5}{\bar{M}}{}^{0i}{}_{,\underset{1}{0}}+\underset{6}{\bar{M}}{}^{is}{}_{,s}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}{}_{00,i}\underset{4}{\bar{M}}{}^{00}+\frac{1}{2}\,(\underset{4}{h}{}_{00,i}+\underset{2}{h}{}_{00}\underset{2}{h}{}_{00,i}-2\underset{3}{h}{}_{0i,\underset{1}{0}})\underset{2}{\bar{M}}{}^{00}+$$

$$+(\underset{3}{h}{}_{0s,i}-\underset{3}{h}{}_{0i,s})\underset{3}{\bar{M}}{}^{0s}-\underset{2}{h}{}_{00,\underset{1}{0}}\underset{3}{\bar{M}}{}^{0i}-\underset{2}{h}{}_{00,s}\underset{4}{\bar{M}}{}^{is}+\frac{1}{2}\underset{2}{h}{}_{00,i}\underset{4}{\bar{M}}{}^{ss}+$$

$$+(\underset{4}{A}{}^{0}{}_{,i}+\underset{3}{A}{}^{i}{}_{,\underset{1}{0}}+\underset{2}{h}{}_{00,i}\underset{2}{A}{}^{0}+2\underset{2}{h}{}_{00}\underset{2}{A}{}^{0}{}_{,i})\underset{2}{I}{}^{0}+(\underset{3}{A}{}^{i}{}_{,s}-\underset{3}{A}{}^{s}{}_{,i})\underset{3}{I}{}^{s}\Big]dV=0. \qquad (13.1)$$

Первый интеграл вычислен и равен левой части уравнений (12.16). Вычисление второго интеграла очень сходно с вычислениями, содержащимися в (6.21) и (9.1). Последовательно находим:

$$\int_{V_a} \underset{5,\,1}{\bar{M}}{}^{0i}_{,0}\, dV = (\underset{4}{m_a}\dot{a}^i)_{,\underset{1}{0}} + \frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\dddot{\vec{a}}\,]^i + \sum_{b\neq a}\frac{e_a e_b}{2}\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\underset{1}{0}}\right]^i;$$

$$\int_{V_a} \underset{6}{\bar{M}}{}^{is}_{,s}\, dV = 0;$$

$$\int_{V_a} \frac{1}{2}\underset{2}{h_{00,\,i}}\underset{4}{\bar{M}}{}^{00} dV = -\underset{4}{m_a}\ddot{a}^i - \frac{1}{2}\dot{a}^s\dot{a}^s\sum_{b\neq a}\left(\frac{e_a e_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i} -$$

$$-\frac{\underset{4}{C^*_a}}{\underset{2}{m_a}}\sum_{b\neq a}\left(\frac{e_a e_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i} - \sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{\gamma\underset{2}{m_b}e_a e_c}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{ac}}\right)_{,a^i} -$$

$$-\sum_{b\neq a}\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{2}\left\{\dot{a}^s\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s\right\};$$

$$\int_{V_a}\frac{1}{2}\underset{4}{h^{(g)}_{00,\,i}}\underset{2}{\bar{M}}{}^{00}dV = 2\sum_{b\neq a}\gamma^2\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}{}^2\frac{1}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i} +$$

$$+\sum_{b\neq a}\gamma^2\underset{2}{m_a}{}^2\underset{2}{m_b}\frac{1}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}r_{ab,\,a^s a^k a^i}\dot{b}^s\dot{b}^k - \frac{3}{2}\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\dot{b}^s\dot{b}^s\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i} +$$

$$+2\sum_{b\neq a}\sum_{\substack{c\neq a\\ b\neq c}}\gamma^2\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\underset{2}{m_c}\left[\frac{1}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{ac}}\right)_{,a^i} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{r_{bc}}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right];$$

$$\int_{V_a}\frac{1}{2}\underset{4}{h^{(gs)}_{00,\,i}}\underset{2}{\bar{M}}{}^{00}dV = \frac{3}{2}\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\left\{\dot{b}^s\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s\right\} - \sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{4}{C^*_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^i};$$

$$\int\limits_{V_a} \frac{1}{2} \underset{4}{h}{}^{(ge)}_{00,\,i} \underset{2}{M}{}^{00} dV = \sum_{b\neq a} \gamma \underset{2}{m_a} e_b (e_b - e_a) \frac{1}{r_{ab}} \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i} +$$

$$+ \sum_{b\neq a} \sum_{\substack{c\neq a \\ b\neq c}} \gamma \underset{2}{m_a} e_b e_c \left(\frac{1}{r_{ab}} - \frac{1}{r_{bc}}\right)\left(\frac{1}{r_{ac}}\right)_{,a^i};$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_a} \underset{2}{h_{00}} \underset{2}{h_{00,\,i}} \underset{2}{\overline{M}}{}^{00} dV = 2 \sum_{b\neq a} \gamma^2 \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b}{}^2 \frac{1}{r_{ab}} \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i} +$$

$$+2 \sum_{b\neq a} \sum_{\substack{c\neq a \\ b\neq c}} \gamma^2 \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \underset{2}{m_c} \frac{1}{r_{ab}} \left(\frac{1}{r_{ac}}\right)_{,a^i};$$

$$-\int\limits_{V_a} \underset{3}{h_{0i,\,0}} \underset{1\,2}{\overline{M}}{}^{00} dV = -\sum_{b\neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \Big\{ 4\ddot{b}^i \frac{1}{r_{ab}} -$$

$$-4\dot{b}^i \dot{b}^s \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s} + 2\dot{b}^s \left[\underset{1}{\vec{s}_b}\, \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^i \Big\};$$

$$\int\limits_{V_a} \underset{3}{h_{0s,\,i}} \underset{3}{\overline{M}}{}^{0s} dV = \sum_{b\neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \Big\{ 4\dot{a}^s \dot{b}^s \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i} -$$

$$-2\dot{a}^s \left[\underset{1}{\vec{s}_b}\, \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s + 2\dot{b}^s \left[\underset{1}{\vec{s}_a}\, \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s -$$

$$-[\underset{1}{\vec{s}_a}\, \vec{\nabla}_a]^s \left[\underset{1}{\vec{s}_b}\, \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s \Big\};$$

$$-\int\limits_{V_a} \underset{3}{h_{0i,\,s}} \underset{3}{\overline{M}}{}^{0s} dV = -\sum_{b\neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \Big\{ 4\dot{a}^s \dot{b}^i \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s} -$$

$$-2\dot{a}^s \left[\underset{1}{\vec{s}_b}\, \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^i \Big\};$$

$$-\int\limits_{V_a} \underset{2}{h_{00,\,0}} \underset{1\,3}{\overline{M}}{}^{0i} dV = -\sum_{b\neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \Big\{ 2\dot{a}^i \dot{b}^s \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s} +$$

$$+\dot{b}^s \left[\underset{1}{\vec{s}_a}\, \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^i \Big\};$$

$$-\int\limits_{V_a} \underset{2}{h_{00,\,s}} \underset{4}{\overline{M}}{}^{is} dV = \sum_{b\neq a} \gamma \underset{2}{m_a} \underset{2}{m_b} \Big\{ 2\dot{a}^i \dot{a}^s \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s} +$$

$$+\dot{a}^s \left[\underset{1}{\vec{s}_a}\, \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^i \Big\};$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_a} \underset{2}{h_{00,\,i}}\underset{4}{\bar{M}^{ss}}dV = -\sum_{b\neq a}\gamma \underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\left\{\dot{a}^s\dot{a}^s\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)^{\cdot}_{,a^i} + \right.$$

$$+\dot{a}^s\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s +$$

$$\left. +\frac{1}{4}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)^{\cdot}_{,a^i}\right]^s\right\}. \qquad (13.2)$$

Вычислим теперь интегралы от электромагнитных членов, пользуясь выражениями (6.4), (12.7), (12.8) и (12.10):

$$\int\limits_{V_a} \underset{4}{A^0_{,\,i}}\underset{2}{I^0}dV = \sum_{b\neq a}\frac{e_ae_b}{2}\,r_{ab,\,a^sa^ka^i}\dot{b}^s\dot{b}^k +$$

$$+\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_b}e_ae_c}{r_{ab}r_{ac}}\right)_{,a^i} +$$

$$+\sum_{\substack{b\\ b\neq c}}\sum_{c\neq a}\gamma e_a(e_b\underset{2}{m_c} - e_c\underset{2}{m_b})\,\frac{1}{r_{bc}}\left(\frac{1}{r_{ac}}\right)_{,a^i};$$

$$\int\limits_{V_a} \underset{3}{A^i_{,0}}\underset{1\,2}{I^0}dV = \sum_{b\neq a}\frac{e_ae_b}{r_{ab}}\ddot{b}^i - \sum_{b\neq a}\left(\frac{e_ae_b}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot{b}^s\dot{b}^i +$$

$$+\sum_{b\neq a}\frac{e_ae_b}{2}\dot{b}^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^i;$$

$$\int\limits_{V_a} \underset{2}{h_{00,\,i}}\underset{2}{A^0}\underset{2}{I^0}dV = -2\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\frac{e_ae_c}{r_{ac}};$$

$$\int\limits_{V_a} 2\underset{2}{h_{00}}\underset{2}{A^0_{,\,i}}\underset{2}{I^0}dV = -4\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{\gamma \underset{2}{m_b}}{r_{ab}}\left(\frac{e_ae_c}{r_{ac}}\right)_{,a^i};$$

$$\int\limits_{V_a} \underset{3}{A^i_{,\,s}}\underset{3}{I^s}dV = \sum_{b\neq a}\left(\frac{e_ae_b}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\dot{a}^s\dot{b}^i -$$

$$-\sum_{b\neq a}\frac{e_ae_b}{2}\dot{a}^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^i;$$

$$-\int\limits_{V_a} \underset{3}{A^s_{,\,i}}\underset{3}{I^s}dV = -\sum_{b\neq a}\left(\frac{e_ae_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\dot{a}^s\dot{b}^s +$$

$$+\sum_{b\neq a}\frac{e_ae_b}{2}\dot{a}^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s -$$

$$-\sum_{b\neq a}\frac{e_a e_b}{2}\dot b^s\left[\vec{\underset{1}{s}}_a\vec\nabla_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{b\neq a}e_a e_b\,[\vec{\underset{1}{s}}_a\vec\nabla_a]^s\left[\vec{\underset{1}{s}}_b\vec\nabla_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s. \qquad (13.3)$$

Осталось только просуммировать вычисленные интегралы (13.2) и (13.3). Сократив (13.1) на λ^4 и заменив оставшееся λ^2 на c^{-2}, а также опустив значки под буквами, указывающие на порядок величины, получаем посленьютоновы уравнения поступательного движения:

$$m_a\ddot a^i-\sum_{b\neq a}\left(\frac{\gamma m_a m_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i}+\sum_{b\neq a}\left(\frac{e_a e_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i}=$$

$$=F^i_{a(g)}+F^i_{a(e)}+F^i_{a(ge)}+F^i_{a(gs)}+F^i_{a(es)}, \qquad (13.4)$$

где $F^i_{a(g)}$ определяется выражением (6.23); $F^{i_1}_{a(gs)}$ получается из (9.3), если всюду в (9.3) заменить σ на s и C_b на C_b^*;

$$F^i_{a(e)}\equiv\sum_{b\neq a}\frac{e_a e_b}{c^2}\left[\left(\frac{1}{2}\dot a^s\dot a^s+\dot a^s\dot b^s-\frac{e_a e_b}{m_b r_{ab}}\right)\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}+\right.$$

$$\left.+(\dot a^i\dot a^s-\dot a^s\dot b^i+\dot b^s\dot b^i)\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}-\frac{1}{2}r_{ab,\,a^s a^k a^i}\dot b^s\dot b^k\right]+$$

$$+\sum_{b\neq a}\sum_{\substack{c\neq a\\ b\neq c}}\frac{e_a e_b^2 e_c}{2m_b c^2}\left[\frac{1}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{bc}}\right)_{,b^i}+\right.$$

$$\left.+(b^s-a^s)\left(\frac{1}{r_{bc}}\right)_{,b^s}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]; \qquad (13.5)$$

$$F^i_{a(ge)}\equiv\frac{\gamma}{c^2}\left\{\sum_{b\neq a}(7m_a e_a e_b+5m_b e_a e_b-m_a e_b^2-m_b e_a^2)\frac{1}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}+\right.$$

$$+\sum_{b\neq a}\sum_{\substack{c\neq a\\ b\neq c}}\left[(4m_b e_a e_c-m_a e_b e_c+m_c e_a e_b)\frac{1}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{ac}}\right)_{,a^i}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}(7m_a e_b e_c+m_c e_a e_b)\frac{1}{r_{ab}}\left(\frac{1}{r_{bc}}\right)_{,b^i}+$$

$$+(m_a e_b e_c+m_b e_a e_c-m_c e_a e_b)\frac{1}{r_{bc}}\left(\frac{1}{r_{ac}}\right)_{,a^i}+$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}(m_a e_b e_c+m_c e_a e_b)(a^s-b^s)\left(\frac{1}{r_{bc}}\right)_{,b^s}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]\right\}; \qquad (13.6)$$

$$F^i_{a(es)}\equiv\sum_{b\neq a}\frac{e_ae_b}{2c^2}\left\{(\dot a^s-\dot b^s)\left[\vec s_b\vec\nabla_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s}\right]^i+\right.$$

$$+\dot b^s\left[\vec s_a\vec\nabla_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s-\dot a^s\left[\vec s_b\vec\nabla_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s-$$

$$\left.-\frac{1}{2}[\vec s_a\vec\nabla_a]^s\left[\vec s_b\vec\nabla_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s\right\}. \tag{13.7}$$

Посленьютоновы уравнения «вращательного» движения выведем из (9.5). Помня, что величина $(\sqrt{-g}\,\underset{4}{T}{}^{i\beta}_{;\beta})$ равна подынтегральному выражению первого интеграла в (13.1), легко находим, что первый интеграл в (9.5) равен нулю в силу постоянства вектора $\underset{1}{\vec s_a}$:

$$\int_{V_a}[(x^i-a^i)(\sqrt{-g}\,\underset{4}{T}{}^{k\beta}_{;\beta})-(x^k-a^k)(\sqrt{-g}\,\underset{4}{T}{}^{i\beta}_{;\beta})]dV=$$

$$=\underset{2}{m_a}[\underset{1}{\dot{\vec s}_a}\vec e_i]^k=0. \tag{13.8}$$

Второй интеграл в (9.5) вычислим, пользуясь тем, что величина $(\sqrt{-g}\,\underset{6}{T}{}^{i\beta}_{;\beta})$ равна подынтегральному выражению во втором интеграле в (13.1). В процессе вычислений будут использованы найденные значения для метрики $h_{\alpha\beta}$, 4-потенциала A^α, плотностей тензоров $\bar M^{\alpha\beta}$ и $\bar I^\alpha$ в нужных приближениях, а также выражения (12.20), (12.28), (12.29) для $\underset{4}{m}{}^{(s)}_a$, $\underset{5}{\overset{*}{\alpha}}{}^i_a$, $\underset{5}{\overset{*}{\beta}}{}^i_a$ и свойства δ-функций.

Последовательно находим:

$$\int_{V_a}[(x^i-a^i)\underset{5}{\bar M}{}^{0k}_{,\underset{1}{0}}-(x^k-a^k)\underset{5}{\bar M}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}]dV=-\int_{V_a}(x^k-a^k)\underset{5}{\bar M}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}dV+$$

$$+\int_{V_a}(x^i-a^i)\left\{(\underset{4}{m_a}+\underset{4}{m}{}^{(s)}_a)\left(\dot a^k-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec s_a}\vec\nabla]^k\right)\delta_a+\right.$$

$$\left.+(\underset{5}{\overset{*}{\alpha}}{}^k_a+\underset{5}{\overset{*}{\beta}}{}^k_a)\delta_a-\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}[\underset{3}{\vec s_a}\vec\nabla\delta_a]^k\right\}_{,\underset{1}{0}}dV=$$

$$=\int_{V_a}(x^i-a^i)\left\{-\frac{1}{2}\underset{4}{\dot m_a}[\underset{1}{\vec s_a}\vec\nabla\delta_a]^k-\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\ddot a^s\dot a^k[\underset{1}{\vec s_a}\vec\nabla\delta_a]^s-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\dot a^s\ddot a^k[\underset{1}{\vec s_a}\vec\nabla\delta_a]^s-\underset{4}{m_a}\dot a^k\dot a^s\delta_{a,s}-$$

$$\left.-\underset{5}{\overset{*}{\alpha}}{}^k_a\dot a^s\delta_{a,s}+\underset{5}{\overset{*}{\beta}}{}^k_{a,\underset{1}{0}}\delta_a-\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}[\underset{3}{\dot{\vec s}_a}\vec\nabla\delta_a]^k\right\}dV-$$

$$-\int\limits_{V_a}(x^k-a^k)\underset{5}{\bar{M}}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}dV=\frac{1}{2}\underset{4}{\dot{m}_a}[\underset{1}{\vec{s}_a}\vec{e}_i]^k+\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}[\underset{3}{\vec{s}_a}\vec{e}_i]^k+$$

$$+\underset{4}{m_a}\dot{a}^k\dot{a}^i+\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\dot{a}^i[\underset{1}{\vec{s}_a}\ddot{\vec{a}}]^k+\sum_{b\neq a}\frac{e_ae_b}{2}\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\vec{\nabla}_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^k\dot{a}^i-$$

$$-\int\limits_{V_a}(x^k-a^k)\underset{5}{\bar{M}}{}^{0i}_{,\underset{1}{0}}dV=[\underset{4}{\dot{m}_a}\underset{1}{\vec{s}_a}+\underset{2}{m_a}\underset{3}{\dot{\vec{s}}_a},\vec{e}_i]^k+$$

$$+\sum_{b\neq a}\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{2}\left\{\dot{a}^i\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\vec{\nabla}_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^k-\dot{a}^k\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\vec{\nabla}_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^i\right\};$$

$$\int\limits_{V_a}[(x^i-a^i)\underset{6}{\bar{M}}{}^{ks}_{,s}-(x^k-a^k)\underset{6}{\bar{M}}{}^{is}_{,s}]dV=-\int\limits_{V_a}(x^k-a^k)\underset{6}{\bar{M}}{}^{is}_{,s}dV+$$

$$+\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\left\{(\underset{4}{m_a}+\underset{4}{m_a^{(s)}})\left(\dot{a}^k-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\vec{\nabla}]^k\right)\times\right.$$

$$\times\left(\dot{a}^s-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\vec{\nabla}]^s\right)\delta_a-\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\dot{a}^k[\underset{3}{\vec{s}_a}\vec{\nabla}\delta_a]^s-$$

$$\left.-\frac{1}{2}\underset{2}{m_a}\dot{a}^s[\underset{3}{\vec{s}_a}\vec{\nabla}\delta_a]^k+\underset{6}{\tau}{}^{ks}_a\delta_a\right\}_{,s}dV=$$

$$=-\underset{4}{m_a}\dot{a}^k\dot{a}^i-\underset{6}{\tau}{}^{ki}_a+\underset{4}{m_a}\dot{a}^i\dot{a}^k+\underset{6}{\tau}{}^{ik}_a\equiv 0;$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_a}[(x^i-a^i)\underset{2}{h_{00,k}}-(x^k-a^k)\underset{2}{h_{00,i}}]\underset{4}{\bar{M}}{}^{00}dV=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{V_a}(x^k-a^k)\underset{4}{\bar{M}}{}^{00}\underset{2}{h_{00,i}}dV-$$

$$-\sum_b\gamma\underset{2}{m_b}\int\limits_{V_a}(x^i-a^i)\left(\frac{1}{r_b}\right)_{,k}(\underset{4}{m_a}+\underset{4}{m_a^{(s)}})\delta_a dV=$$

$$=\sum_{b\neq a}\frac{\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}}{2}\left\{[\underset{1}{\vec{s}_a}\dot{\vec{a}}]^i\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}-\right.$$

$$-[\underset{1}{\vec{s}_a}\dot{\vec{a}}]^k\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}+\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\vec{e}_s]^i\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}\right]^s-$$

$$\left.-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\vec{e}_s]^k\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^s\right\};$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_a}\Big[(x^i-a^i)\big(\underset{4}{h}_{00,\,k}+\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{h}_{00,\,k}-2\underset{3}{h}_{0k,\,\underset{1}{0}}\big)-$$

$$-(x^k-a^k)\big(\underset{4}{h}_{00,\,i}+\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{h}_{00,\,i}-2\underset{3}{h}_{0i,\,\underset{1}{0}}\big)\Big]\underset{2}{\bar{M}}{}^{00}dV\equiv 0;$$

$$\int\limits_{V_a}\big[(x^i-a^i)\underset{3}{h}_{0s,\,k}-(x^k-a^k)\underset{3}{h}_{0s,\,i}\big]\underset{3}{\bar{M}}{}^{0s}dV=$$

$$=\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\Big\{2\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\dot{\vec{b}}\,]^k\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i}-$$

$$-2\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\dot{\vec{b}}\,]^i\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^k}+[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_k]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i}\right]^s-$$

$$-[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_i]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^k}\right]^s\Big\};$$

$$-\int\limits_{V_a}\big[(x^i-a^i)\underset{3}{h}_{0k,\,s}-(x^k-a^k)h_{0i,\,s}\big]\bar{M}^{0s}dV=$$

$$=\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\Big\{2\dot{b}^k\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_s]^i\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}-$$

$$-2\dot{b}^i\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_s]^k\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}+[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_i]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\right]^k-$$

$$-[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_k]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\right]^i\Big\};$$

$$-\int\limits_{V_a}\big[(x^i-a^i)\underset{3}{\bar{M}}{}^{0k}-(x^k-a^k)\underset{3}{\bar{M}}{}^{0i}\big]\underset{2}{h}_{00,\,\underset{1}{0}}dV=$$

$$=-2\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_i]^k\dot{b}^s\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s};$$

$$-\int\limits_{V_a}\big[(x^i-a^i)\underset{4}{\bar{M}}{}^{ks}-(x^k-a^k)\bar{M}^{is}\big]\underset{2}{h}_{00,\,s}dV=$$

$$=\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\Big\{\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_i]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\right]^k-$$

$$-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_k]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\right]^i+$$

$$+\big(2\,[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_i]^k\dot{a}^s+[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_i]^s\dot{a}^k-[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_k]^s\dot{a}^i\big)\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\Big\};$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{V_a}\left[(x^i-a^i)\underset{2}{h}_{00,\,k}-(x^k-a^k)\underset{2}{h}_{00,\,i}\right]\underset{4}{\bar{M}}{}^{ss}dV=\\
&=\sum_{b\neq a}\gamma\underset{2}{m_a}\underset{2}{m_b}\Big\{[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\dot{\vec{a}}\,]^i\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^k}-\\
&-[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\dot{\vec{a}}\,]^k\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i}+\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_s]^i\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^k}\right]^s-\\
&-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_s]^k\left[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i}\right]^s\Big\}; \qquad (13.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{V_a}\big[(x^i-a^i)\,(\underset{4}{A}{}^0_{,\,k}+\underset{3}{A}{}^k_{,\,\underset{1}{0}}+\underset{2}{h}_{00,\,k}\underset{2}{A}{}^0+2\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{A}{}^0_{,\,k})-\\
&-(x^k-a^k)\,(\underset{4}{A}{}^0_{,\,i}+\underset{3}{A}{}^i_{,\,\underset{1}{0}}+\underset{2}{h}_{00,\,i}\underset{2}{A}{}^0+2\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{A}{}^0_{,\,i})\big]\underset{2}{I}{}^0dV\equiv 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{V_a}\left[(x^i-a^i)\underset{3}{A}{}^k_{,\,s}-(x^k-a^k)\underset{3}{A}{}^i_{,\,s}\right]\underset{3}{I}{}^sdV=-\int_{V_a}(x^k-a^k)\underset{3}{A}{}^i_{,\,s}\underset{3}{I}{}^sdV+\\
&+\sum_{b\neq a}\frac{e_ae_b}{2}\Big\{[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_i]^s\dot{b}^k\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}-\\
&-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_i]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\right]^k\Big\}=\\
&=\sum_{b\neq a}\frac{e_ae_b}{2}\Big\{[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_i]^s\dot{b}^k\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}-[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_k]^s\dot{b}^i\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}+\\
&+\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_k]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\right]^i-\\
&-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_i]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^s}\right]^k\Big\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{V_a}\left[(x^i-a^i)\underset{3}{A}{}^s_{,\,k}-(x^k-a^k)\underset{3}{A}{}^s_{,\,i}\right]\underset{3}{I}{}^sdV=\\
&=\sum_{b\neq a}\frac{e_ae_b}{2}\Big\{[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\dot{\vec{b}}\,]^i\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^k}-\\
&-[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\dot{\vec{b}}\,]^k\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i}+\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_i]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^k}\right]^s-\\
&-\frac{1}{2}[\underset{1}{\vec{s}_a}\,\vec{e}_k]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,\,a^i}\right]^s\Big\}. \qquad (13.10)
\end{aligned}
$$

Представив выражение $[\underset{2}{\dot m_a}\underset{1}{\vec{s}_a}+\underset{4}{\dot m_a}\underset{1}{\vec{s}_a}+\underset{2}{m_a}\underset{3}{\dot{\vec{s}}_{\dot a}},\ \vec{e}_i]^k$ в виде $d(\tilde m_a \tilde s_a^{ik})/dt \equiv \dot S_a^{ik}$, введя замену $s_a^{ik} \equiv [\vec{s}_a \vec{e}_i]^k$ (ср. с (9.9) и (9.10)), опустив значки, указывающие на порядок величины, и просуммировав все интегралы (13.9), (13.10), находим уравнения «вращательного» движения, т. е. уравнения для магнито-углового момента тела a в посленьютоновом приближении:

$$\dot S_a^{ik} = N_{a(gs)}^{ik} + N_{a(es)}^{ik}, \tag{13.11}$$

где

$$\begin{aligned} N_{a(gs)}^{ik} \equiv \sum_{b\neq a} \frac{\gamma m_a m_b}{c^2} \Bigg\{ & -2 s_a^{ik} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)^{\cdot} + \\ & + \left[\left(\frac{3}{2}\dot a^i - 2\dot b^i\right) s_a^{kj} - \left(\frac{3}{2}\dot a^k - 2\dot b^k\right) s_a^{ij}\right]\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^j} + \\ & + \left[s_a^{ij}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k} - s_a^{kj}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]\left(\frac{3}{2}\dot a^j - 2\dot b^j\right) + \\ & + s_a^{ij}\left(\frac{3}{4}\left[\vec{s}_a \vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}\right]^j + \left[\vec{s}_b \vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}\right]^j - \right. \\ & \left. - \left[\vec{s}_b \vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^j}\right]^k\right) - s_a^{kj}\left(\frac{3}{4}\left[\vec{s}_a \vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^j + \right. \\ & \left. + \left[\vec{s}_b \vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^j - \left[\vec{s}_b \vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^j}\right]^i\right)\Bigg\}; \end{aligned} \tag{13.12}$$

$$\begin{aligned} N_{a(es)}^{ik} \equiv \sum_{b\neq a} \frac{e_a e_b}{2c^2} \Bigg\{ & \dot b^j \left[s_a^{ij}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k} - s_a^{kj}\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right] - \\ & - (s_a^{ij}\dot b^k - s_a^{kj}\dot b^i)\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^j} + \frac{1}{2} s_a^{ij}\left(\left[\vec{s}_b \vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^j}\right]^k - \right. \\ & \left. - \left[\vec{s}_b \vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}\right]^j\right) - \frac{1}{2} s_a^{kj}\left(\left[\vec{s}_b \vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^j}\right]^i - \right. \\ & \left. - \left[\vec{s}_b \vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}\right]^j\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{13.13}$$

§ 14. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ, НАМАГНИЧЕННЫХ, ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ. СРАВНЕНИЕ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

Уравнения поступательного движения (13.4) обобщают все известные до сих пор уравнения поступательного движения, переходя в них при пренебрежении некоторыми характеристиками тел системы. Например, пренебрегая зарядами, угловыми и магнитными моментами, приходим к известным уравнениям (6.22). Учет только собственных угловых моментов тел приводит к уравнениям (9.2), которые обсуждены в § 10. Если принять во внимание только электрические заряды, то в (13.4) исчезают силовые добавки $F^{i}_{a(gs)}$ и $F^{i}_{a(es)}$ и мы получаем уравнения движения, обобщающие уравнения Бажаньского [В.109] на случай n тел и совпадающие с ними в случае двух тел. В [В.109] учтено еще влияние электромагнитного излучения на движение тел. Подобный учет проведен нами в работе [В.132]. Результат такой: справа в (13.4) появляется дополнительная сила торможения излучением

$$F^{i}_{a(\text{изл})} \equiv \frac{2}{3}\,\frac{e_a^2}{c^3}\,\dddot{a}^i + \sum_{b\neq a} \frac{2e_a e_b}{3c^3}\,\dddot{b}^i, \tag{14.1}$$

которая имеет уже третий порядок относительно $1/c$.

Сравним уравнения (13.4) еще с уравнениями поступательного движения заряженной частицы a с массой покоя m_a и зарядом e_a, движущейся во внешних гравитационном и электромагнитном полях [В.6, В.13]:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\,\frac{dx^\nu}{ds} = \frac{e_a}{c^2 m_a} f^{\cdot\alpha}_{\beta}\,\frac{dx^\beta}{ds}. \tag{14.2}$$

Если внешнее поле создается телом b с массой m_b, обладающим зарядом e_b, угловым моментом $m_b\vec{\sigma}_b$ и магнитным моментом $\vec{\mathfrak{m}}_b$, то метрика $h_{\alpha\beta}$ и 4-потенциал A^α определятся выражениями (которые являются частным случаем выше определенных их значений):

$$\underset{2}{h_{00}} = -2\frac{\gamma \underset{2}{m_b}}{r_b}, \quad \underset{3}{h_{0i}} = -2\gamma \underset{2}{m_b}\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}\,\frac{1}{r_b}\right]^i;$$

$$\underset{4}{h_{00}} = 2\left(\frac{\gamma \underset{2}{m_b}}{r_b}\right)^2 - \frac{3}{4}\gamma \underset{2}{m_b}\,[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}\,]^s\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}\,\frac{1}{r_b}\right]^s -$$

$$-2\frac{\gamma \underset{4}{C^*_b}}{r_b} + \gamma\left(\frac{e_b}{r_b}\right)^2;$$

$$\underset{2}{A^0} = \frac{e_b}{r_b}, \quad \underset{3}{A^i} = -\frac{1}{2}e_b\left[\underset{1}{\vec{s}_b}\,\vec{\nabla}\,\frac{1}{r_b}\right]^i, \quad \underset{4}{A^0} = \frac{\gamma \underset{2}{m_b} e_b}{r_b^2}. \tag{14.3}$$

Применяя аппроксимационную процедуру к выражениям для ds и $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ (см. (3.2), (5.9)—(5.12)) и разлагая в ряды по λ уравнения (14.2) с использованием (14.3), получаем, что при $\alpha=i$ в наинизшем 4-м порядке (14.2) дают ньютоновы уравнения движения; при $\alpha=0$ в наинизшем 5-м порядке (14.2) в силу ньютоновых уравнений движения обращается в тождество; при $\alpha=i$ в следующем 6-м порядке приходим к уравнениям движения, в точности совпадающим с (13.4), если в последних сделать переход к двум телам a и b ($m_a \ll m_b$, $\overset{s}{b} = 0$).

Уравнения (13.11) обобщают уравнения вращательного движения (9.9) и, строго говоря, уже не являются уравнениями вращательного движения. Они определяют поведение более сложной величины $\tilde{m}\tilde{s}_a^{ik}$, включающей в себя, кроме собственного углового момента импульса, еще магнитный момент. В ньютоновом приближении (13.11) переходит в (12.17), т. е. получаем чрезвычайно важный результат, который в системе единиц измерения CGSE имеет вид:

$$m_a\vec{\sigma}_a + \frac{2cm_a}{e_a^*}\vec{\mathfrak{m}}_a = \overrightarrow{\mathrm{const}} \qquad (14.4)$$

и означает, что собственное вращение тела и его магнитное поле взаимосвязаны. При выводе уравнений движения допускалось, что в силу каких-либо причин магнитное поле тела может меняться со временем. Тогда изменение $\vec{\mathfrak{m}}_a$ должно вызывать, согласно (14.4), соответствующее изменение $\vec{\sigma}_a$ и наоборот. Этот результат следует считать обобщением известных эффектов Эйнштейна — де Гааза и Барнетта [В.204, 44, 47], которые доказали экспериментально в лабораторных условиях взаимосвязь магнитного поля с вращением макроскопических тел из разных материалов. Вывод (14.4) распространяется и на тела астрономического типа. Следует сопоставить имеющиеся наблюдательные данные о собственных вращениях и магнитных полях Земли, Юпитера, Солнца и других астрофизических объектов со связью (14.4). Некоторые соображения и численные оценки по этому поводу приведены в гл. VI. Уравнения (13.11) обобщают закономерность (14.4), внося в нее небольшие релятивистские поправки.

Если тело a не вращается, то уравнения (13.11) определяют изменение магнитного момента, а уравнения (13.4) — его поступательное движение.

Интегрирование и подробное обсуждение уравнений движения в случае одного и двух тел будет проведено в гл. III.

На этой основе в гл. VI рассмотрены некоторые новые релятивистские эффекты, даны их числовые оценки и высказаны идеи об экспериментах по обнаружению этих эффектов.

Глава II

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ НАМАГНИЧЕННЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ В ОТО

§ 15. УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В ЛАГРАНЖЕВОЙ ФОРМЕ

Возможность записи уравнений движения в лагранжевой форме сама по себе может служить своего рода критерием правильности этих уравнений. Кроме того, уравнения движения в лагранжевой форме позволяют отыскать ряд интегралов (законов сохранения) уравнений движения, помогающих установить закономерности движения системы в целом и выяснить некоторые принципиальные вопросы проблемы движения.

Уравнения движения тела a в форме Лагранжа имеют вид (см., например, любую из книг [B.209, I.10, 1—5] и др.):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}^i}-\frac{\partial L}{\partial a^i}=0, \qquad (15.1)$$

где лагранжиан $L=L\,(\dot{a}^i, a^i, \dot{b}^i, b^i, \ldots, t)$ является вполне определенной функцией координат, скоростей тел системы и времени. Для нахождения лагранжиана L не существует общего правила. Если известны уравнения движения, то лагранжиан обычно конструируют на основе этих уравнений (см., например, [B.115, B.116, B.130, B.181, B.193]). Но возможны и другие подходы, когда функция Лагранжа отыскивается из полевых уравнений с помощью принципа наименьшего действия или какими-либо другими методами [B.6, B.13, B.69, B.106, B.107, B.121, 6, 7, 8].

Так как нами уже получены уравнения движения, то мы предпочтем первый путь. Внимательное рассмотрение уравнений движения (13.4) показывает, что релятивистский лагранжиан L можно представить в виде суммы

$$L=L_0+L_{(g+e+ge)}+L_{(gs)}+L_{(es)}, \qquad (15.2)$$

где

$$L_0\equiv\sum_a\frac{1}{2}m_a\dot{a}^s\dot{a}^s+\sum_{a,b}{}'\frac{\gamma m_a m_b-e_a e_b}{2r_{ab}}; \qquad (15.3)$$

$$L_{(g+e+ge)}\equiv\sum_a\frac{m_a}{8c^2}(\dot{a}^s\dot{a}^s)^2+\sum_{a,b}{}'\frac{\gamma m_a m_b}{4c^2 r_{ab}}\Big[6\dot{a}^s\dot{a}^s-7\dot{a}^s\dot{b}^s-$$

$$-\frac{\dot a^s\dot b^k}{r^2_{ab}}(a^s-b^s)(a^k-b^k)-\sum_c{}'\frac{2\gamma m_c}{r_{ac}}\Bigg]+$$

$$+\sum_{a,\,b}{}'\frac{1}{4c^2r_{ab}}\Bigg[e_ae_b\dot a^s\dot b^s+e_ae_b\frac{\dot a^s\dot b^k}{r^2_{ab}}(a^s-b^s)(a^k-b^k)-$$

$$-\sum_c{}'\frac{2\gamma}{r_{ac}}(m_ae_be_c-m_be_ae_c-m_ce_ae_b)\Bigg]; \qquad (15.4)$$

$$L_{(gs)}\equiv\sum_{a,\,b}{}'\frac{\gamma m_am_b}{2c^2}\Bigg\{\left(\frac{3}{2}\dot a^s-2\dot b^s\right)\left[\vec s_a\,\vec\nabla_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^s+$$

$$+\left(\frac{3}{2}\dot b^s-2\dot a^s\right)\left[\vec s_b\,\vec\nabla_b\frac{1}{r_{ab}}\right]^s+\frac{3}{8}[\vec s_a\,\vec\nabla_a]^s\left[\vec s_a\,\vec\nabla_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^s-$$

$$-[\vec s_a\,\vec\nabla_a]^s\left[\vec s_b\,\vec\nabla_b\frac{1}{r_{ab}}\right]^s+\frac{3}{8}[\vec s_b\,\vec\nabla_b]^s\left[\vec s_b\,\vec\nabla_b\frac{1}{r_{ab}}\right]^s\Bigg\}+$$

$$+\sum_a\left(\frac{1}{2c^2}C_a^*\,\dot a^s\dot a^s+\sum_b{}'\frac{\gamma m_aC_b^*}{c^2r_{ab}}\right); \qquad (15.5)$$

$$L_{(es)}\equiv\sum_{a,\,b}{}'\frac{e_ae_b}{4c^2}\Bigg\{\dot a^s\left[\vec s_b\,\vec\nabla_b\frac{1}{r_{ab}}\right]^s+\dot b^s\left[\vec s_a\,\vec\nabla_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^s+$$

$$+\frac{1}{2}[\vec s_a\,\vec\nabla_a]^s\left[\vec s_b\,\vec\nabla_b\frac{1}{r_{ab}}\right]^s\Bigg\}. \qquad (15.6)$$

В (15.3)—(15.6) $\sum\limits_{a,\,b}{}'$ обозначает двойную сумму, в которой пропущены члены с $a=b$; суммы $\sum\limits_b{}'$, $\sum\limits_c{}'$ не содержат членов с $b=a$ и $c=a$. Слагаемое в (15.2) L_0 определяет ньютоновы уравнения движения, добавление $L_{(g+e+ge)}$ приводит к появлению в (13.4) силовой добавки $F^i_{a(g)}+F^i_{a(e)}+F^i_{a(ge)}$. Выражение (15.4) обобщает на случай n тел результат работы [6], полностью с ним совпадая в случае двух тел. Слагаемые в (15.2) $L_{(gs)}$ и $L_{(es)}$ соответствуют силовым добавкам в (13.4) $F^i_{a(gs)}$ и $F^i_{a(es)}$.

Если пренебречь гравитацией ($\gamma=0$), то из (13.4) и (13.11) получим уравнения движения заряженного и намагниченного тела a в специальной теории относительности (СТО). Если еще пренебречь магнитными моментами тел, то оставшийся лагранжиан L совпадает с лагранжианом, данным Фоком (см. [В.6, формула (26.24)]).

В заключение отметим, что лагранжиан (15.2)—(15.6) полностью согласуется с лагранжианами, полученными в работах [В.6, В.181, 6], и обобщает их на случай одновременного наличия у тел зарядов, магнитных моментов и собственных вращений.

§ 16. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

Так как L не зависит явно от времени, то, как известно, в процессе движения системы сохраняется величина (см., например, [I.10])

$$\tilde{E} \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{a}^s} \dot{a}^s - L = \text{const}, \tag{16.1}$$

которая называется энергией системы. Используя выражения (15.3)—(15.6) и производя операции согласно (16.1), находим

$$\tilde{E} = E_0 + E, \tag{16.2}$$

где

$$E_0 \equiv \sum_a \left(\frac{1}{2} m_a \dot{a}^s \dot{a}^s - \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b - e_a e_b}{2 r_{ab}} \right); \tag{16.3}$$

$$\begin{aligned}
E \equiv{} & \sum_a \frac{3 m_a}{8 c^2} (\dot{a}^s \dot{a}^s)^2 + \sum_{a,\,b}{}' \frac{\gamma m_a m_b}{4 c^2 r_{ab}} \Big[6 \dot{a}^s \dot{a}^s - 7 \dot{a}^s \dot{b}^s - \\
& - \frac{\dot{a}^s \dot{b}^k}{r_{ab}^2} (a^s - b^s)(a^k - b^k) + \sum_c{}' \frac{2 \gamma m_c}{r_{ac}} \Big] + \\
& + \sum_{a,\,b}{}' \frac{1}{4 c^2 r_{ab}} \Big[e_a e_b \dot{a}^s \dot{b}^s + e_a e_b \frac{\dot{a}^s \dot{b}^k}{r_{ab}^2} (a^s - b^s)(a^k - b^k) - \\
& - \sum_c{}' \frac{2\gamma}{r_{ac}} (m_c e_a e_b + m_b e_a e_c - m_a e_b e_c) \Big] - \\
& - \sum_{a,\,b}{}' \frac{\gamma m_a m_b}{2 c^2} \Big\{ \frac{3}{8} [\vec{s}_a \vec{\nabla}_a]^s \Big[\vec{s}_a \vec{\nabla}_a \frac{1}{r_{ab}} \Big]^s - \\
& - [\vec{s}_a \vec{\nabla}_a]^s \Big[\vec{s}_b \vec{\nabla}_b \frac{1}{r_{ab}} \Big]^s + \frac{3}{8} [\vec{s}_b \vec{\nabla}_b]^s \Big[\vec{s}_b \vec{\nabla}_b \frac{1}{r_{ab}} \Big]^s \Big\} + \\
& + \sum_{a,\,b}{}' \frac{e_a e_b}{8 c^2} [\vec{s}_a \vec{\nabla}_a]^s \Big[\vec{s}_b \vec{\nabla}_b \frac{1}{r_{ab}} \Big]^s + \\
& + \sum_a \left(\frac{1}{2 c^2} C_a^* \dot{a}^s \dot{a}^s - \sum_b{}' \frac{\gamma m_a C_b^*}{c^2 r_{ab}} \right).
\end{aligned} \tag{16.4}$$

E_0 определяет энергию системы в ньютоновом приближении. Как видим, она не зависит от магнитных свойств тел и их собственных вращений. E определяет релятивистскую поправку к E_0 и включает в себя члены, зависящие от угловых и магнитных моментов тел. Любопытно, что в E входят только квадратичные относительно $\vec{s}$ члены.

Непосредственным вычислением с использованием уравнений (15.1) можно убедиться, что $d\tilde{E}/dt = 0$, т. е. действительно $\tilde{E} = \text{const}$.

§ 17. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ

Проделав соответствующие вычисления, можно показать, что справедлив закон сохранения импульса рассматриваемой системы тел:

$$P^i \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{a}^i} = \sum_a \left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}^s \dot{a}^s + \frac{1}{c^2} C_a^* \right) \dot{a}^i -$$
$$- \sum_{a,\,b}{}' \frac{\gamma m_a m_b - e_a e_b}{2c^2 r_{ab}} \left[\dot{a}^i + \frac{\dot{a}^s}{r_{ab}^2} (a^s - b^s)(a^i - b^i) \right] -$$
$$- \sum_a \frac{m_a}{2c^2} [\vec{s}_a \ddot{\vec{a}}\,]^i = P_0^i = \mathrm{const}. \qquad (17.1)$$

Нетрудно убедиться, что (17.1) можно переписать в виде

$$P^i = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a a^i \left(m_a + \frac{m_a}{2c^2} \dot{a}^s \dot{a}^s + \frac{1}{c^2} C_a^* - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b - e_a e_b}{2c^2 r_{ab}} \right) - \sum_a \frac{m_a}{2c^2} [\vec{s}_a \vec{a}\,]^i \right\} = P_0^i. \qquad (17.2)$$

Введем величину

$$M_a \equiv m_a + \frac{m_a}{2c^2} \dot{a}^s \dot{a}^s + \frac{C_a}{c^2} - \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b - e_a e_b}{2c^2 r_{ab}}. \qquad (17.3)$$

Легко видно, что

$$M \equiv \sum_a M_a = \sum_a m_a + \sum_a \frac{C_a}{c^2} + \frac{E_0}{c^2} = \mathrm{const}, \qquad (17.4)$$

так как энергия системы в ньютоновом приближении $E_0 = \mathrm{const}$.

Определим теперь на основании (17.2)—(17.4) координаты центра тяжести системы X^i в постньютоновом приближении соотношением

$$X^i \equiv \frac{1}{M} \sum_a \left(M_a a^i - \frac{m_a}{2c^2} [\vec{s}_a \vec{a}\,]^i \right) =$$
$$= \frac{P_0^i}{M} t + Q_0^i, \quad Q_0^i = \mathrm{const}. \qquad (17.5)$$

Очевидно, что $dX^i/dt = P_0^i = \mathrm{const}$, $d^2X^i/dt^2 = 0$, т. е. точка $C(X^i)$ обладает характерными свойствами ньютонова центра тяжести системы.

Итак, закон сохранения импульса $P^i = P_0^i$ в форме (17.2) дал возможность доказать существование центра инерции системы заряженных, намагниченных и вращающихся тел. Без учета зарядов, магнитных и угловых моментов ($e_a = 0$, $\vec{\sigma}_a = 0$, $C_a^* = 0$, $\vec{\mathfrak{m}}_a = 0$)

выражения (17.3), (17.5) совпадают с известными выражениями для центра инерции системы и обобщенной массы тела a в работах [В.108, В.176—В.179, В.181].

Будет уместным следующее замечание. Точка $C(X^i)$ является центром инерции системы только с точки зрения бесконечно удаленного от системы и неподвижного наблюдателя. С точки зрения других наблюдателей эта точка будет двигаться с ускорением. В самом деле, связь между собственным временем τ наблюдателя, находящегося в некоторой точке $M(x^i)$ гравитационного поля, создаваемого данной системой тел, и временем t бесконечно удаленного неподвижного наблюдателя в ОТО дается формулой [В.13, (84.1)], которая в нашем случае принимает вид (см. выражение для $\underset{2}{h_{00}}$ (6.4))

$$d\tau=\sqrt{g_{00}}\,dt=\left(1-\sum_a \frac{\gamma m_a}{c^2 r_a}\right)dt. \tag{17.6}$$

Тогда наблюдатель в точке $M(x^i)$ в общем случае измерит по своим часам скорость и ускорение точки $C(X^i)$:

$$\frac{dX^i}{d\tau}=\frac{dX^i}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}=\left(1+\sum_a \frac{\gamma m_a}{c^2 r_a}\right)P_0^i\neq\text{const}; \tag{17.7}$$

$$\frac{d^2X^i}{d\tau^2}=P_0^i\sum_a \frac{\gamma m_a}{c^2}\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{r_a}\right)\neq 0. \tag{17.8}$$

§ 18. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ СОВОКУПНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА

Орбитальный угловой момент импульса системы определяем обычным образом (см., например, [I.10]):

$$M^{ik}\equiv\sum_a M_a^{ik}\equiv\sum_a\left(a^i\frac{\partial L}{\partial \dot a^k}-a^k\frac{\partial L}{\partial \dot a^i}\right) \tag{18.1}$$

Подставив в (18.1) значение L, согласно (15.2)—(15.6), и проделав необходимые операции и преобразования, находим

$$M^{ik}=\sum_a\left(m_a+\frac{m_a}{2c^2}\dot a^s\dot a^s+\sum_b{}' \frac{3\gamma m_a m_b}{c^2 r_{ab}}\right)(a^i\dot a^k-\dot a^i a^k)+$$
$$+\sum_{a,b}{}'\frac{\gamma m_a m_b}{2c^2 r_{ab}^3}\left[7\overset{2}{r}_{ab}(\dot a^i b^k-a^i\dot b^k)+\dot a^s(a^s-b^s)(a^i b^k-a^k b^i)\right]-$$
$$-\sum_{a,b}{}'\frac{e_a e_b}{2c^2 r_{ab}^3}\left[\overset{2}{r}_{ab}(\dot a^i b^k-a^i\dot b^k)+\dot a^s(a^s-b^s)(a^i b^k-a^k b^i)\right]+$$
$$+\sum_{a,b}{}'\frac{\gamma m_a m_b}{c^2}\left\{\left(\frac{3}{2}a^i-2b^i\right)\left[\vec s_a\,\vec\nabla_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^k-\right.$$

$$-\left(\frac{3}{2}a^k-2b^k\right)\left[\vec{s}_a\vec{\nabla}_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^i\Bigg\}+$$

$$+\sum_{a,b}{}'\frac{e_ae_b}{2c^2}\left\{b^i\left[\vec{s}_a\vec{\nabla}_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^k-b^k\left[\vec{s}_a\vec{\nabla}_a\frac{1}{r_{ab}}\right]^i\right\}+$$

$$+\sum_a\frac{C_a}{c^2}\left(a^i\dot{a}^k-\dot{a}^ia^k\right). \qquad (18.2)$$

Оказывается, что при учете собственных вращений и магнитных полей тел M^{ik} не сохраняется, т. е. $dM^{ik}/dt\neq 0$.

Действительно, в силу уравнений Лагранжа (15.1)

$$\frac{dM^{ik}}{dt}=\sum_a\left(\dot{a}^i\frac{\partial L}{\partial\dot{a}^k}-\dot{a}^k\frac{\partial L}{\partial\dot{a}^i}+a^i\frac{\partial L}{\partial a^k}-a^k\frac{\partial L}{\partial a^i}\right)=$$

$$=\sum_{a,b}{}'\frac{\gamma m_am_b}{c^2r^3_{ab}}\left\{\left(\frac{3}{2}\dot{a}^j-2\dot{b}^j\right)\left[s_a^{ij}(a^k-b^k)-s_a^{kj}(a^i-b^i)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{3}{2}\dot{a}^i-2\dot{b}^i\right)s_a^{kj}-\left(\frac{3}{2}\dot{a}^k-2\dot{b}^k\right)s_a^{ij}\right](a^j-b^j)\right\}+$$

$$+\sum_{a,b}{}'\frac{3\gamma m_am_b}{4c^2r^2_{ab}}\left[\vec{s}_a\vec{r}_{ab}\right]^j\left\{\left[3\vec{s}_a+4\vec{s}_b,\vec{e}_k\right]^j\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i}-\right.$$

$$\left.-\left[3\vec{s}_a+4\vec{s}_b,\vec{e}_i\right]^j\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^k}\right\}+$$

$$+\sum_{a,b}{}'\frac{e_ae_b}{2c^2r^3_{ab}}\left\{\left(\dot{a}^is_b^{jk}-\dot{a}^ks_b^{ji}\right)(a^j-b^j)+\right.$$

$$\left.+\dot{a}^s\left[s_b^{kj}(a^i-b^i)-s_b^{ij}(a^k-b^k)\right]\right\}+$$

$$+\sum_{a,b}{}'\frac{3e_ae_b}{4c^2r^5_{ab}}\left[\vec{s}_a\vec{r}_{ab}\right]^j\left\{(a^i-b^i)s_b^{kj}-(a^k-b^k)s_b^{ij}\right\}\neq 0. \qquad (18.3)$$

Несохранение M^{ik} представляется естественным. Так как тела обладают еще собственными угловыми и магнитными моментами, то следует ожидать, что будет сохраняться некоторая их комбинация с M^{ik}. Чтобы найти эту комбинацию, необходимо привлечь уравнения движения для магнито-углового момента (13.11). Если возьмем эти уравнения для всех тел системы и просуммируем их почленно, то получим в итоге простое выражение

$$\frac{d}{dt}\sum_a\left(S_a^{ik}+2\sum_b{}'\frac{\gamma m_am_b}{c^2r_{ab}}s_a^{ik}\right)=-\frac{dM^{ik}}{dt}. \qquad (18.4)$$

Из (18.4) немедленно следует искомый закон сохранения совокупного момента импульса системы:

$$R^{ik} \equiv \sum_a \left(M_a^{ik} + \overset{*}{S}{}_a^{ik} + 2 \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b}{c^2 r_{ab}} \underset{a}{s}{}^{ik} \right) = R_0^{ik} = \text{const}. \quad (18.5)$$

Таким образом, закон сохранения (18.5) невозможно сформулировать без привлечения уравнений движения (13.11).

В случае вращающихся тел (заряды и магнитные моменты равны нулю) из (18.5) получаем закон сохранения, обобщающий результат Михальской (ею рассмотрен случай двух тел [B.120]) на случай n тел. Фоком подобный закон сохранения не был получен по той причине, что им не были выведены релятивистские уравнения вращательного движения.

§ 19. ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ (13.11)

Сейчас покажем, что уравнения движения (13.11) имеют простой первый интеграл. Для этого нужно будет переписать их в векторной форме. Переход от любого антисимметричного тензора A^{ik} к соответствующему ему вектору A_l в римановом пространстве совершается по правилу [9, 10] (см. также [B.15, 11]):

$$A_l = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{g}{g_{00}}}\, \delta_{lik} A^{ik}. \quad (19.1)$$

Поднимание и опускание индексов у тензоров в трехмерном римановом пространстве производится с помощью метрического тензора этого пространства, выражающегося через метрический тензор $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ V_4 (см., например, [B.13, § 84]):

$$\gamma_{ij} = -g_{ij} + \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}}, \quad \gamma^{ij} = -g^{ij}. \quad (19.2)$$

Применяя изложенное правило к тензору $\overset{*}{S}{}_a^{ik}$, ограничиваясь посленьютоновым приближением и помня, что метрика берется в той же точке, где и тензор, находим

$$\overset{*}{S}{}_a^{l} = \gamma^{lj} \overset{*}{S}_{aj} = -\frac{1}{2} g^{lj} \sqrt{-\frac{g}{g_{00}}}\, \delta_{ikj} \overset{*}{S}{}_a^{ik} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_b{}' \frac{\gamma m_b}{c^2 r_{ab}} \right) \delta_{ikl} \overset{*}{S}{}_a^{ik} =$$

$$= \frac{1}{2} \delta_{ikl} \left(\overset{*}{S}{}_a^{ik} + \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b}{c^2 r_{ab}} \underset{a}{s}{}^{ik} \right). \quad (19.3)$$

В (13.11) переход от $\underset{a}{s}^{ik}$ к $\underset{a}{s}^{l}$ совершается по формуле

$$\underset{a}{s}^{l} = \frac{1}{2}\delta_{ikl}\underset{a}{s}^{ik},$$

так как правая часть (13.11), куда входят $\underset{a}{s}^{ik}$, уже содержит c^{-2}.

Перенеся первый член в (13.12) налево в уравнениях (13.11) и совершая переход к векторам $\vec{\tilde{S}}_a = \tilde{S}_a^j \vec{e}_j$, $\vec{s}_a = s_a^j \vec{e}_j$, переписываем уравнения (13.11) в векторной форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\tilde{S}}_a + {\sum_b}' \frac{\gamma m_a m_b}{c^2 r_{ab}} \vec{s}_a\right) =$$

$$= {\sum_b}' \frac{\gamma m_a m_b}{2c^2 r_{ab}^3}\left\{ [\vec{s}_a\,[\vec{r}_{ab},\, 3\dot{\vec{a}} - 4\dot{\vec{b}}\,]] + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{2} r_{ab}^{-2}\, \underset{a}{s}^{k} (a^k - b^k)(a^j - b^j)\delta_{ijl}\, \underset{a}{s}^{l}\vec{e}_i \right\} +$$

$$+ {\sum_b}' \frac{e_a e_b}{2c^2 r_{ab}^3} [\vec{s}_a\,[\vec{r}_{ab}\,\vec{b}\,]] +$$

$$+ {\sum_b}' \frac{4\gamma m_a m_b - e_a e_b}{4c^2}\left\{ \underset{a}{s}^{2}\left(\left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^1}\right]^2 - \right.\right.$$

$$- \left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^2}\right]^1\right)\vec{e}_1 + \underset{a}{s}^{3}\left(\left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^1}\right]^3 -$$

$$- \left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^3}\right]^1\right)\vec{e}_1 + \underset{a}{s}^{3}\left(\left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^2}\right]^3 -$$

$$- \left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^3}\right]^2\right)\vec{e}_2 + \underset{a}{s}^{1}\left(\left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^2}\right]^1 -$$

$$- \left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^1}\right]^2\right)\vec{e}_2 + \underset{a}{s}^{1}\left(\left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^3}\right]^1 -$$

$$- \left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^1}\right]^3\right)\vec{e}_3 + \underset{a}{s}^{2}\left(\left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^3}\right]^2 -$$

$$\left.- \left[\vec{s}_b\,\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^2}\right]^3\right)\vec{e}_3. \qquad (19.4)$$

Умножим (19.4) скалярно в ньютоновом смысле на $2\vec{\tilde{S}}_a$. Тогда

$$2\left(\vec{\tilde{S}}_a \frac{d\vec{\tilde{S}}_a}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{\tilde{S}}_a\,\vec{\tilde{S}}_a). \qquad (19.5)$$

При умножении на остальные члены (содержащие c^{-2}) можно положить $\vec{\tilde{S}}_a = \vec{S}_a = m_a\vec{s}_a = \overrightarrow{\text{const}}$. Легко видно, что скалярное произведение правой части (19.4) на $\vec{s}_a$ дает тождественный нуль, и мы получаем первый интеграл для каждого тела a системы:

$$(\vec{\tilde{S}}_a \vec{\tilde{S}}_a) + 2\sum_b{}' \frac{\gamma m_a^2 m_b}{c^2 r_{ab}} (\vec{s}_a \vec{s}_a) = C_0 = \text{const}. \tag{19.6}$$

Напомним, что

$$\vec{\tilde{S}} = m_a \vec{s}_a + m_a \vec{\tilde{s}}_a + \left(\frac{m_a}{2c^2} \dot{a}^s \dot{a}^s + \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b}{c^2 r_{ab}} + \frac{C_a^*}{c^2} \right) \vec{s}_a. \tag{19.7}$$

Интеграл (19.6) в ньютоновом приближении сводится к $(\vec{s}_a \vec{s}_a) = \text{const}$, т. е. $|\vec{s}_a| = \text{const}$, что является непосредственным следствием (12.17). В постньютоновом приближении $(\vec{\tilde{S}}_a \vec{\tilde{S}}_a)$ меняется со временем. Но $(\vec{\tilde{S}}_a \vec{\tilde{S}}_a)$ не является «истинным» квадратом длины вектора $\vec{\tilde{S}}_a$. В трехмерном римановом пространстве квадрат длины любого вектора $\vec{q} = \{q^i(x^k)\}$ находится по формуле (см., например, [B.13, § 84]):

$$|\vec{q}\,|^2 = q_s q^s = \gamma_{ij} q^i q^j, \tag{19.8}$$

причем γ_{ij}, q^i берутся в одной и той же точке $M(x^k)$ при одинаковом значении временной координаты x^0. В нашем случае в постньютоновом приближении

$$\gamma_{ij} = -g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + 2 \sum_a \frac{\gamma m_a}{c^2 r_a} \right). \tag{19.9}$$

Применяя (19.8) и (19.9) к $\vec{\tilde{S}}_a$, получаем

$$|\vec{\tilde{S}}_a|^2 = \gamma_{ij} \tilde{S}_a^i \tilde{S}_a^j = \delta_{ij} \left(1 + 2\sum_b{}' \frac{\gamma m_b}{c^2 r_{ab}} \right) \tilde{S}_a^i \tilde{S}_a^j =$$

$$= (\vec{\tilde{S}}_a \vec{\tilde{S}}_a) + 2\sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b}{c^2 r_{ab}} (\vec{s}_a \vec{s}_a) = C_0, \tag{19.10}$$

т. е. величина вектора $\vec{\tilde{S}}_a$ постоянна для сопутствующего (находящегося на теле a) наблюдателя.

Более подробную информацию о закономерностях релятивистского движения получим в результате интегрирования уравнений движения (13.4) и (13.11).

Глава III

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ. ЗАДАЧА ОДНОГО И ДВУХ ТЕЛ В ОТО

§ 20. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Качественная картина движения легкого тела (пробной частицы) в поле Шварцшильда [В.136] достаточно хорошо изучена. Классификация орбит в этом поле дана в работах [В.11, В.394, 1] (см. также [В.15, В.395, В.291], где рассмотрены некоторые свойства траекторий в поле Шварцшильда). Классификация базируется на дифференциальных уравнениях геодезической линии

$$\frac{du^\alpha}{ds}+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=0,\quad u^\alpha\equiv\frac{dx^\alpha}{ds},\tag{20.1}$$

всегда имеющих первый интеграл

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta=1.\tag{20.2}$$

Метрика поля Шварцшильда в «сферических» координатах $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$ имеет вид

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2),\tag{20.3}$$

где $r_g\equiv 2\gamma M/c^2$ называется гравитационным радиусом центрального тела; M — его полная масса. Если выражаться более точно, то метрика (20.3) описывает так называемую R-область поля Шварцшильда, для которой радиальная координата $r>r_g$ (см. [2, В.13, В.15]). Упомянутая классификация орбит дана для R-области поля Шварцшильда. Если $0\leqslant r<r_g$, то получаем так называемую T-область с нестационарной метрикой, обладающей еще не до конца изученными свойствами и связями с метрикой R-области (проблема сшивки и полного атласа пространства-времени Шварцшильда). В данной монографии мы не будем исследовать движение частиц в T-области (см. об этом в [В.13, В.15, В.157]).

Приближенное интегрирование системы (20.1), (20.2) в R-области (при финитных движениях и значениях r, значительно бо́льших r_g) приводит к траектории, которую можно представлять в виде медленно вращающегося в своей плоскости эллипса. Вращение происходит в прямом направлении, т. е. в том же направлении, что и движение частицы по траектории. Имеем знаменитое смещение перигелия, которое в случае Меркурия составляет 43″ за 100 лет.

Однако в связи с существованием плотных тел (нейтронных звезд, пульсаров) и предположением о существовании сверхплотных тел, находящихся под своей гравитационной сферой (например, коллапсировавшие звезды), представляет интерес точное изучение движений в R-области вблизи r_g, где приближенные решения могут дать неверные представления о характере движений.

Точное интегрирование системы (20.1), (20.2) в поле Шварцшильда с метрикой (20.3) удается осуществить в элементарных функциях, к сожалению, только в двух случаях, когда траектории предполагаются круговыми и радиальными (в неэлементарных функциях, например в функциях Вейерштрасса или эллиптических интегралах, система всегда интегрируема). Рассмотрим эти случаи подробнее.

Рассмотрим *круговые траектории* ($r=\text{const}$) в R-области. В силу сферической симметрии гравитационного поля без ограничения общности можно считать $\theta=\pi/2$. Так как $u^1=u^2=0$, то система (20.1), (20.2) приводится к виду

$$\frac{du^0}{ds}=0,\quad \frac{r_g}{2r^2}u^{0^2}-ru^{3^2}=0,\quad \frac{du^3}{ds}=0;$$
$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)u^{0^2}-r^2u^{3^2}=1, \tag{20.4}$$

решением которой будут следующие u^0 и u^3:

$$u^0=\pm\left(1-\frac{3}{2}\frac{r_g}{r}\right)^{-1/2},\quad u^3=\pm\frac{r_g}{2r^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}. \tag{20.5}$$

Отсюда получаем зависимость φ от t на круговой орбите

$$\omega_д\equiv\frac{d\varphi}{dt}=\pm\frac{c}{r}\sqrt{\frac{r_g}{2r}}\ \text{рад/с},\quad \varphi=\pm\frac{ct}{r}\sqrt{\frac{r_g}{2r}}\ \text{рад}, \tag{20.6}$$

где постоянная интегрирования выбрана так, чтобы $\varphi=0$ при $t=0$. Из (20.5) видно, что круговые орбиты могут существовать только при $r\geqslant\frac{3}{2}r_g$. Этот результат в изотропных координатах получен еще Эйнштейном [3]. Отметим, что среди всех круговых орбит в R-области окружность $r=\frac{3}{2}r_g$, и только она, является траекторией, по которой движение происходит с фундаментальной скоростью c. Для доказательства достаточно проинтегрировать уравнения геодезических при условии $ds=0$, что равносильно замене в последнем уравнении (20.4) единицы нулем.

По ньютоновой теории тяготения, закономерность движения по круговой орбите радиуса ρ в поле того же центра следует из интеграла площадей и имеет вид (см., например, [B.220])

$$\omega_0 \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{c}{\rho} \sqrt{\frac{r_g}{2\rho}} \text{ рад/с}, \quad \varphi = \pm \frac{ct}{\rho} \sqrt{\frac{r_g}{2\rho}} \text{ рад}. \qquad (20.7)$$

Внешнее сходство законов движения (20.6) и (20.7) очевидно. Но нельзя забывать, что смысл некоторых входящих в эти законы величин разный. В (20.7) t является истинным абсолютным ньютоновым временем, которое в любой точке плоского евклидового трехмерного пространства течет одинаково, а ρ обозначает истинное трехмерное расстояние. Поэтому в (20.7) $\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt}$ есть угловая скорость движения тела по круговой орбите радиуса ρ с точки зрения любого наблюдателя. В (20.6) t можно интерпретировать как истинное время по часам бесконечно удаленного неподвижного наблюдателя, а поэтому в (20.6) $\omega_д \equiv \frac{d\varphi}{dt}$ является угловой скоростью пробного тела с точки зрения этого далекого наблюдателя. Так как при приближении к центральному телу ход истинного (физического) времени τ замедляется по известному закону (17.6), то угловая скорость, измеренная локальным наблюдателем (который неподвижен и находится рядом с движущимся телом) по своим часам, будет

$$\omega_л \equiv \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega_д \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} > \omega_д.$$

Если же наблюдатель находится на движущемся по окружности теле (сопутствующий наблюдатель), то по его часам угловая скорость тела

$$\omega_c = \omega_д \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} > \omega_л > \omega_д.$$

Так как в ньютоновой теории и в поле Шварцшильда длина окружности определяется одной и той же формулой, то при движении по окружности одной и той же длины в эйнштейновой и ньютоновой теориях тяготения следует принять $\rho = r$. Поэтому $\omega_д = \omega_0$, т. е. на таких окружностях закономерности движения в обеих теориях одинаковы (для далекого наблюдателя).

Однако истинные (физические) радиусы окружностей одинаковой длины будут разными. Остановимся на этом более подробно. Радиальная координата r в (20.6) связана с истинным, физическим, радиальным расстоянием l до центра поля определенной зависимостью. Если принять, как это обычно делается в ньютоновой небесной механике, центральное тело за материальную точку, то (см. [B.13, § 97])

$$l=R_g+l_g=R_g+\int\limits_{r_g}^{r}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}dr=$$

$$=R_g+r\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}+\frac{r_g}{2}\ln\left[\frac{r}{r_g}\left(1+\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}\right)^2\right],$$

где через R_g обозначен истинный (физический) радиус сферы Шварцшильда.

Наблюдаемые нами реальные тела, однако, имеют конечные размеры, значительно превосходящие размеры сферы Шварцшильда. Чтобы найти истинный радиус центрального тела, нужно воспользоваться решением уравнений тяготения Эйнштейна, определяющим поле внутри вещества. В случае сферически симметричного статического центрального тела, имеющего координатный радиус $a>r_g$ и плотность материи $\varepsilon=\varepsilon(r)$, $\varepsilon(a)=0$, находим его истинный радиус по формуле (см., например, [В.15, с. 69; 4]):

$$R_a=\int\limits_0^a\left(1-\frac{4\pi\gamma}{c^2r}\int\limits_0^r\varepsilon r^2dr\right)^{-1/2}dr.$$

Значение R_a зависит, как видим, от распределения плотностей в теле, но всегда $R_a>a$. В идеальном случае, когда $\varepsilon=\text{const}$ (несжимаемый однородный шар, поле внутри его впервые найдено в [5], см. также [В.11, с. 64]), находим

$$R_a=\int\limits_0^a\left(1-\frac{r_gr^2}{a^3}\right)^{-1/2}dr=a\sqrt{\frac{a}{r_g}}\arcsin\sqrt{\frac{r_g}{a}}.$$

Любопытно, что если $a\to r_g$, то $R_a\to\frac{\pi}{2}r_g$, и мы приходим к определению истинного радиуса однородной сферы Шварцшильда: $R_g=\frac{\pi}{2}r_g$. Для обычных звезд a намного превосходит их гравитационный радиус r_g. Разложив в этом случае arcsin по степеням $(r_g/a)^{1/2}$, получаем

$$R_a=a+\frac{1}{6}r_g+\frac{3}{40}\frac{r_g^2}{a}+\ldots\approx a+\frac{1}{6}r_g.$$

Теперь радиальное расстояние l от центра поля до некоторой точки, определяемой значением радиальной координаты $r>a$, должно подсчитываться по формуле

$$l=R_a+l_a=R_a+\int\limits_a^r\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}dr=$$

$$=R_a+r\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}-a\sqrt{1-\frac{r_g}{a}}+\frac{r_g}{2}\ln\frac{r}{a}+$$
$$+r_g\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}\right)-r_g\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{r_g}{a}}\right).$$

Таким образом, в любом случае $l>r$. Поэтому приходим к следующим выводам. Окружность длины $2\pi r$ в теории Эйнштейна всегда имеет истинный радиус $l>r$, а окружность той же длины $2\pi r$ в теории Ньютона имеет меньший истинный радиус r. Если же в теориях тяготения Эйнштейна и Ньютона брать окружности одного и того же физического радиуса, то длины таких окружностей окажутся разными: эйнштейнова длина окажется меньше ньютоновой. Естественно поэтому, что угловая скорость движения пробного тела по окружности заданного физического радиуса всегда больше в поле Шварцшильда, чем в ньютоновом поле тяготения того же центра: $\omega_д>\omega_0$ (в связи с последним неравенством см. работу [В.301], где даны некоторые оценки).

Кроме того, на прохождение сигнала (луча света, радиоволны) вдоль истинного радиуса орбиты планеты по эйнштейновой теории должно затрачиваться больше времени, чем это следует по ньютоновой теории. Происходит релятивистское запаздывание сигнала. Вместе с эффектом замедления движения луча света вблизи центрального тела это запаздывание послужило основой для четвертой проверки ОТО [В.37, В.38]. Различные числовые оценки в связи с этим см. в [В.39—В.42, 6].

В случае *радиального движения частицы* $u^2=u^3=0$. Система неизотропных геодезических (20.1), (20.2) приводится к виду в R-области:

$$\frac{du^0}{dr}+\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\frac{r_g}{r^2}u^0=0,\quad \frac{du^1}{dr}u^1+\frac{1}{2}\frac{r_g}{r^2}=0;$$

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)u^{0^2}-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}u^{1^2}=1.$$

Общее решение ее

$$u^0=c_0\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1},\quad u^1=\pm\left(c_0^2-1+\frac{r_g}{r}\right)^{1/2},$$

где c_0 — произвольная, отличная от нуля постоянная интегрирования. Она может быть выбрана так, чтобы при $r=r_0$ локальная трехмерная скорость $v\equiv dl/d\tau$ радиального движения равнялась нулю. Тогда $c_0^2=1-r_g/r_0$ и

$$v=\pm c\left(1-\frac{1-r_g/r}{1-r_g/r_0}\right)^{1/2}.$$

При $r_0=\infty$ получаем параболическое движение (ср. [В.15, гл. 3]).

Полученные точные решения могут найти и находят применение при изучении, например, таких явлений, как гравитационный коллапс и антиколлапс, аккреция вещества на нейтронные звезды, черные дыры и т. д. Подробнее об этом см. в монографиях [В.15, В.19].

Все проведенные вычисления относятся к движению пробного тела. Если оно обладает собственным вращением (спином), то движение, вообще говоря, не будет происходить по геодезической линии. Уравнениями движения будут более сложные уравнения Папапетру (10.2), (10.3). Приближенное исследование этих уравнений движения в R-области для поля Шварцшильда проведено в работе [В.135] при весьма спорном дополнительном условии $S_a^{0i}=0$. Как уже отмечалось в § 10, согласование уравнений (10.2) с уравнениями Фока приводит к условию $S_a^{0i}=\frac{1}{2}\dot{a}^s S_a^{si}$. Учитывая это обстоятельство, мы ниже (§ 21) дадим приближенное исследование уравнений Папапетру при более общих дополнительных условиях в поле вращающегося центра. Исследуя уравнения движения (9.2) и (9.9) для тел сравнимых масс, мы как частный случай получим исследование системы (10.2), (10.3) (см. § 22, 23).

В случае свободного *радиального движения вращающейся частицы* в поле Шварцшильда удается найти точное общее решение системы (10.2), (10.3). В R-области поля Шварцшильда (20.3) решение имеет вид (как и раньше, x^0, x^1, x^2, x^3 соответствуют ct, r, θ, φ):

$$m=\text{const},\quad u^0=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1},\quad u^1=\pm\sqrt{\frac{r_g}{r}},\quad u^2=u^3=0; \tag{20.8}$$

$$S^{12}=\frac{a_2\sqrt{r_g}}{r}\pm b_2\sqrt{\frac{r_g}{r}}-\frac{K^{12}}{r},\quad S^{13}=\frac{a_3\sqrt{r_g}}{r}\pm b_3\sqrt{\frac{r_g}{r}}-\frac{K^{13}}{r\sin\theta};$$

$$S^{23}=\frac{K^{23}}{r^2\sin\theta},\quad S^{02}=\frac{1}{r-r_g}\left(\pm a_2\sqrt{r}+b_2 r\mp K^{12}\sqrt{\frac{r_g}{r}}\right); \tag{20.9}$$

$$S^{03}=\frac{1}{r-r_g}\left(\pm a_3\sqrt{r}+b_3 r\mp\frac{K^{13}}{\sin\theta}\sqrt{\frac{r_g}{r}}\right),\quad S^{01}=\sqrt{\frac{r_g}{r}}\,(a_1 r^{5/2}+b_1).$$

Так как частица одна, то значок a у $S_a^{\alpha\beta}$ мы опустили. Величины a_i, b_i, $K^{ij}=-K^{ji}$ являются произвольными постоянными интегрирования. В случае двойных знаков всюду берутся или верхние, или нижние знаки. Верхние знаки соответствуют радиальному движению от центра, нижние — к центру поля Шварцшильда.

Непосредственное нахождение решений (20.8), (20.9) из системы дифференциальных уравнений (10.2), (10.3) в случае, когда метрика задана в виде (20.3), достаточно сложное. Ниже мы укажем более простой путь нахождения этих решений с помощью перехода к метрике Леметра [7].

В R-области трехмерная скорость частицы, измеренная по часам t далекого неподвижного наблюдателя, определяется формулой

$$\frac{dl}{dt}=\pm c\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{1/2}\left(\frac{r_g}{r}\right)^{1/2}, \tag{20.10}$$

а по часам τ локального наблюдателя (неподвижного, находящегося рядом с движущейся частицей) ее скорость (см., например, [B.15, гл. 3])

$$\frac{dl}{d\tau}=\pm c\left(\frac{r_g}{r}\right)^{1/2}. \tag{20.11}$$

Из (20.10) и (20.11) видно, что на пространственной бесконечности $r=\infty$ скорость частицы равна нулю (параболическое движение). При приближении к сфере Шварцшильда $r\to r_g$ и, следовательно, $\frac{dl}{dt}\to 0$, $\frac{dl}{d\tau}\to -c$, а инвариант $S^2\equiv S_{ij}S^{ij}\to\infty$ в общем случае. Трехмерный собственный угловой момент импульса частицы $\vec{S}$, определяемый как вектор с компонентами

$$S_l=\frac{1}{2}\left(-\frac{g}{g_{00}}\right)^{1/2}\delta_{ikl}S^{ik}$$

(см. формулу (19.1)), также меняет свою величину $|\vec{S}|$ со временем. При $r\to r_g$ в общем случае, как легко подсчитать, $|\vec{S}|\to\infty$.

Как уже отмечалось в § 10, некоторые авторы [B.45, B.141, B.158, I.12—I.14] настаивают на дополнительном условии

$$S^{\alpha\beta}u_\beta=0, \tag{20.12}$$

интерпретируемом как определение центра тяжести частицы. Решения (20.8), (20.9) условию (20.12) удовлетворяют только в случае равенства нулю постоянных интегрирования a_i, b_i. Рассмотрим более подробно этот частный случай. Легко подсчитываем, что

$$|\vec{S}|^2\equiv\gamma^{ij}S_iS_j=[(K^{12})^2+(K^{13})^2]\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}+(K^{23})^2. \tag{20.13}$$

Отсюда видно, что $|\vec{S}|$ не изменяется только при условии $K^{12}=K^{13}=0$ (ось вращения частицы направлена по радиусу поля Шварцшильда). Во всех остальных случаях $|\vec{S}|\to\infty$ при $r\to r_g$. Такое поведение $|\vec{S}|$ нельзя отнести за счет известного изменения массы частицы при изменении ее поступательной скорости, а также нельзя объяснить изменением хода времени, ибо при разных ориентациях оси вращения (спина) частицы $|\vec{S}|$ меняется по-разному.

Что касается изменения направления вектора $\vec{S}$, то его можно найти, воспользовавшись формулой

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{S}\,d\vec{x})}{|\vec{S}|\cdot|d\vec{x}|} = \frac{S_i dx^i}{\sqrt{-g^{ij}S_iS_j}\,\sqrt{-g_{ij}dx^idx^j}}, \qquad (20.13^*)$$

где $d\vec{x}=\{dx^1, dx^2, dx^3\}$, а α есть угол между векторами $\vec{S}$ и $d\vec{x}$.

Обозначая соответственно через α_1, α_2, α_3 углы между $\vec{S}$ и векторами $\{dx^1, 0, 0\}$, $\{0, dx^2, 0\}$, $\{0, 0, dx^3\}$ и используя выражения для S_i

$$S_1=K^{23}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}, \quad S_2=K^{13}r\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}, \quad S_3=\frac{K^{21}r\sin\theta}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{1/2}},$$

находим

$$\cos\alpha_1=\frac{K^{23}}{|\vec{S}|}, \quad \cos\alpha_2=\frac{K^{13}}{|\vec{S}|\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{1/2}},$$

$$\cos\alpha_3=\frac{K^{21}}{|\vec{S}|\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{1/2}}, \qquad (20.14)$$

где $|\vec{S}|$ берется из (20.13). Из (20.14) ясно видно, что вектор $\vec{S}$ не прецессирует. Он при движении частицы из бесконечности к сфере Шварцшильда поворачивается в неизменной «плоскости», проходящей через радиус, по которому движется частица, и через вектор $\vec{S}_\infty$ своего первоначального положения при $r=\infty$, стремясь к перпендикулярному направлению относительно направления движения, т. е. $\lim\limits_{r\to r_g}\alpha_1=90^\circ$. Если $K^{23}=0$, а $(K^{12})^2+(K^{13})^2\neq 0$, то вектор $\vec{S}$ не меняет своей ориентации, так как в этом случае $|\vec{S}|(1-r_g/r)^{1/2}=\mathrm{const}$ согласно (20.13). Величина же $|\vec{S}|$ изменяется. В случае $K^{12}=K^{13}=0$, $K^{23}\neq 0$ $\vec{S}$ не меняет ни ориентации, ни величины.

Сделаем некоторые численные оценки в случае $a_i=0$, $b_i=0$. Если через S_∞ обозначить величину $|\vec{S}|$ на пространственной бесконечности, а через ΔS — приращение к S_∞ при падении частицы из бесконечности до поверхности центрального тела и считать постоянные K^{ij} по порядку величины одинаковыми, то для Земли $\Delta S/S_\infty\sim 10^{-9}$—$10^{-10}$, для Солнца $\Delta S/S_\infty\sim 10^{-5}$—$10^{-6}$, для белых карликов с массой Солнца и диаметром, заключенным между диаметрами Луны и Земли (см. [I.41, с. 156]), $\Delta S/S_\infty\sim 10^{-3}$—$10^{-4}$.

Если на бесконечности вектор $\vec{S}$ с координатной радиальной линией образует, например, угол $\alpha_1=45°$, то у поверхности Земли в результате падения угол изменится на $\Delta\alpha\approx 4''\cdot 10^{-5}$, у поверхности Солнца $\Delta\alpha\approx 2''\cdot 10^{-1}$, у поверхности белых карликов $\Delta\alpha\approx 70''$—$80''$. Таким образом, отмеченные эффекты для Земли и Солнца малы, для белых карликов они значительно больше. Для сверхплотных тел, поверхность которых близка к их сфере Шварцшильда, $|\vec{S}|$ может стремиться к бесконечности, а $\Delta\alpha$ может составлять десятки градусов.

Следует ожидать, что при переходе к сопутствующей свободно падающей или разлетающейся системе отсчета в поле Шварцшильда поступательная скорость частицы обратится в нуль. Действительно, с помощью преобразований координат (см. [8, 9], θ и φ не изменяются) R- и T-областей

$$\left.\begin{aligned} t&=2r_g\left[\left(\frac{3}{2}\,\frac{t'-r'}{r_g}\right)^{1/3}-\operatorname{Arcth}\left(\frac{3}{2}\,\frac{t'-r'}{r_g}\right)^{1/3}\right]+t'+c_0,\\ r&=r_g^{1/3}\left[\frac{3}{2}\,(t'-r')\right]^{2/3},\quad c_0=\mathrm{const},\quad r>r_g;\end{aligned}\right\}\tag{20.15}$$

$$\left.\begin{aligned} t&=2r_g\left[\left(\frac{3}{2}\,\frac{t'-r'}{r_g}\right)^{1/3}-\operatorname{Arth}\left(\frac{3}{2}\,\frac{t'-r'}{r_g}\right)^{1/3}\right]+t'+c_0,\\ r&=r_g^{1/3}\left[\frac{3}{2}\,(t'-r')\right]^{2/3},\quad 0\leqslant r<r_g;\end{aligned}\right\}\tag{20.16}$$

метрика Шварцшильда (20.3) переводится в метрику Леметра [7]

$$\begin{gathered} ds^2=dt'^2-dl'^2;\\ dl'^2=\left(\frac{3}{2}\,\frac{t'-r'}{r_g}\right)^{-2/3}dr'^2+r_g^{2/3}\left[\frac{3}{2}\,(t'-r')\right]^{4/3}(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2).\end{gathered}\tag{20.17}$$

О преобразованиях координат в иной форме, переводящих (20.3) в (20.17), см. также в [В.13, § 102; 10]. Используя преобразования координат (20.15), (20.16) и формулы преобразования тензоров u^α и $S^{\alpha\beta}$

$$u^\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\,u^{\alpha'},\quad S^{\alpha\beta}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\,S^{\alpha'\beta'},$$

находим, что в системе Леметра

$$m'=m,\quad (u^{0'})^2=1,\quad u^{i'}=0;$$

$$S^{1'2'}=\frac{K^{12}}{r_g^{2/3}\left[\frac{3}{2}\,(t'-r')\right]^{1/3}},\quad S^{1'3'}=\frac{K^{13}}{r_g^{2/3}\left[\frac{3}{2}\,(t'-r')\right]^{1/3}\sin\theta},$$

$$S^{2'3'} = \frac{K^{23}}{r_g^{2/3}\left[\frac{3}{2}(t'-r')\right]^{4/3}\sin\theta},$$

$$S^{0'1'} = a_1'(t'-r')^{5/3}+b_1,\quad S^{0'2'} = a_2'(t'-r')^{-1/3}+b_2,$$

$$S^{0'3'} = a_3'(t'-r')^{-1/3}+b_3,$$

где a_i' пропорциональны постоянным интегрирования a_i и обращаются в нуль вместе с последними. Следовательно, как и ожидалось, частица в системе Леметра покоится ($u^{i'}=0$). Ее трехмерный собственный угловой момент импульса $\vec{S}'=\{S_{1'}, S_{2'}, S_{3'}\}$, как легко подсчитывается, имеет величину

$$|\vec{S}'| \equiv (\gamma^{i'j'}S_{i'}S_{j'})^{1/2} = [(K^{12})^2+(K^{13})^2+(K^{23})^2]^{1/2}$$

постоянной и углы, образованные с координатными линиями, неизменными. Условия (20.12) в метрике Леметра превращаются в

$$S^{0'i'}=0, \tag{20.18}$$

которые также выполняются только при $a_i=0$, $b_i=0$.

Итак, для наблюдателя, покоящегося вместе с вращающейся частицей в системе Леметра и, следовательно, падающего на центр или движущегося от центра вместе с ней, эффекты, имеющие место для неподвижного наблюдателя, пропадают. Этим еще раз демонстрируется относительность свойств пространства и времени, подчеркиваемых, например, в [В. 15, 2]. Сначала представлялось [В.157], что описанная ситуация имеет место потому, что трехмерное пространство с метрикой dl'^2 в системе Леметра плоское, как это показано в [11, 12], а в системе Шварцшильда с метрикой dl^2 оно искривлено. Однако доказана [В.159]

Теорема. В любом пространстве-времени с метрикой вида

$$ds^2=dx^{0^2}-dl^2,\quad dl^2=e^{\nu_1}dx^{1^2}+e^{\nu_2}dx^{2^2}+e^{\nu_3}dx^{3^2}, \tag{20.19}$$

где $\nu_i=\nu_i(x^0, x^1, x^2, x^3)$, для покоящихся частиц ($u^i=0$) всегда $|\vec{S}|=\text{const}$.

Соответствующее трехмерное пространство с метрикой dl^2 в (20.19), как правило, искривлено. Поэтому исчезновение в системе Леметра указанных эффектов не связано с исчезновением искривленности трехмерного пространства, а связано с покоем частицы в системе Леметра ($u^{i'}=0$) и условием (20.12), которое при $u^{i'}=0$ переходит в (20.18).

В заключение следует заметить, что уравнения (10.2), (10.3), как и уравнения геодезических в случае невращающейся частицы, не учитывают гравитационного излучения вращающейся частицы [В.134], учет которого может значительно повлиять на закономерности поступательного и вращательного движений частицы в сильном гравитационном поле (каковым оно и является в окрестности сферы Шварцшильда). Описанные выше эффекты следует иметь в виду при наблюдении радиальных движений вращающихся тел вблизи сверхплотных конфигураций, при наблюдениях и теоретических рассмотрениях, связанных с релятивистскими гравитационными коллапсом и антиколлапсом.

§ 21. ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧАСТИЦЫ В НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ПОЛЯХ ТЯГОТЕНИЯ

Некоторые возможные движения вращающегося тела в поле вращающегося центра

Принимаем, что геометрия пространства-времени вне вращающегося центрального тела описывается метрикой Керра [B.293—B.296]:

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g r}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)c^2dt^2-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-r_g r+a^2}dr^2-$$
$$-(r^2+a^2\cos^2\theta)d\theta^2-\left(r^2+a^2+\frac{r_g r a^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\varphi^2+$$
$$+\frac{2r_g r a\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}cdtd\varphi, \qquad (21.1)$$

где $a=L/Mc$, L — угловой момент импульса центра, а остальные величины имеют тот же смысл, что и в метрике (20.3). При $a=0$ метрика (21.1) переходит в метрику Шварцшильда. Для всех известных к настоящему времени пульсаров выполняется соотношение $a^2\ll r_g^2$ [B.15, B.19, B.29, 13]. У обычных астрофизических объектов — Солнца, звезд, планет — их физический радиус ρ значительно превосходит их гравитационный радиус, т. е. $\rho\gg r_g$, и, как легко подсчитать, опираясь на данные астрофизики [I.41], для них $a^2\ll\rho$. Так как нас будет интересовать движение вращающихся пробных тел вне центрального тела, т. е. в той области пространства, где всегда $a^2\ll r_g^2<r^2$, то с большой степенью точности можно считать, что метрика в этой области имеет вид

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)+$$
$$+2\frac{r_g a}{r}\sin^2\theta cdtd\varphi. \qquad (21.2)$$

Ее мы получаем из (21.1), пренебрегая членами, содержащими вторые и более высокие степени a. Подчеркнем, что гравитационное поле с метрикой (21.2) может быть сильным [B.15]. Закономерности движения пробных тел в пространствах с метриками (21.1) и (21.2) в областях $r > \rho \geqslant r_g \gg a$, как ясно из предыдущего, будут очень мало различаться, но получение и математическая обработка результатов существенно проще в случае (21.2).

Движение вращающегося пробного тела во внешнем гравитационном поле определяется уравнениями движения Папапетру [В.134] (10.2)—(10.4).

Как уже упоминалось в § 10, система (10.2), (10.3) содержит 7 независимых уравнений для 10 неизвестных функций u^α, $S^{\alpha\beta}$. Поэтому ее дополняют тремя условиями, которые обычно трактуются как условия, обеспечивающие правильный выбор центра тяжести пробного тела. Наиболее употребительными являются условия

$$S^{\alpha\beta}P_\beta = 0, \quad P_\beta \equiv m u_\beta + g_{\beta\mu} u_\nu \frac{DS^{\mu\nu}}{Ds}. \tag{21.3}$$

Однако в линейном приближении по $S^{\alpha\beta}$ уравнения (10.2) при условиях (21.3) в постньютоновом приближении не совпадают с уравнениями поступательного движения (9.2), (9.3), которые согласуются с уравнениями Фока [В.6]. Совпадение имеет место при условиях (10.9), т. е. если вместо общековариантных условий (21.3) взять условия

$$S^{0i}P_0 = kS^{ij}P_j \tag{21.4}$$

при $k = 1/2$, которые являются инвариантными относительно подгруппы

$$x^{0'} = x^{0'}(x^0), \quad x^{i'} = x^{i'}(x^i) \tag{21.5}$$

общей группы преобразований координат $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\alpha)$. Поэтому мы примем в определенном смысле более общие дополнительные условия (21.4) с $k = \text{const}$, которые при $k = 0$ приводят к условиям Папапетру $S^{0i} = 0$ [В.135], а при $k = 1$ дают условия (21.3).

Отметим еще одно обстоятельство. Для обычных макроскопических вращающихся тел, таких, как Земля в поле Солнца, вращающийся искусственный спутник Земли (ИСЗ) и так далее, члены в уравнениях движения, содержащие $S^{\alpha\beta}$, будут малы по сравнению с членами, не содержащими $S^{\alpha\beta}$, а члены со вторыми и более высокими степенями $S^{\alpha\beta}$ будут ничтожно малыми [В.140, В.156, В.165]. Поэтому в дальнейшем можно в (10.2), (10.3), (21.4) пренебречь нелинейными по $S^{\alpha\beta}$ членами. Тогда в (21.4) можно P_α заменить на u_α и с помощью уравнений движения и абсолютно продифференцированного (21.4) найти, что в уравнениях движения члены вида $u_\beta DS^{\alpha\beta}/Ds$, как и при условиях (21.3), второго порядка по $S^{\alpha\beta}$ и, следовательно, ими можно пренебречь. В результате уравнения движения (10.2), (10.3) и условия (21.4) значительно упрощаются. Удерживая в них только члены не выше первого порядка по a и $S^{\alpha\beta}$ и избавляясь от S^{0i} с помощью (21.4), приходим к следующей системе уравнений, определяющей движения вращающегося пробного тела в поле вращающегося центра:

$$\frac{du^0}{ds}=-\frac{r_g}{r(r-r_g)}u^0u^1+\frac{3r_g a}{r(r-r_g)}\sin^2\theta u^1u^3+$$
$$+\frac{3r_g kru^1}{2m(r-r_g)^2u^0}(S^{12}u^2-\sin^2\theta S^{31}u^3); \qquad (21.6)$$

$$\frac{du^1}{ds}=-\frac{r_g(r-r_g)}{2r^3}u^{0^2}+\frac{r_g}{2r(r-r_g)}u^{1^2}+(r-r_g)u^{2^2}+(r-r_g)\sin^2\theta u^{3^2}+$$
$$+\frac{r_g(r-r_g)a}{r^3}\sin^2\theta u^0u^3+\frac{r_g(1+2k)}{2mr}(S^{12}u^2-\sin^2\theta S^{31}u^3);$$

$$\frac{du^2}{ds}=-\frac{2}{r}u^1u^2+\frac{1}{2}\sin 2\theta u^{3^2}-\frac{r_g a}{r^3}\sin 2\theta u^0u^3-$$
$$-\frac{r_g(2+k)}{2mr}\sin^2\theta S^{23}u^3+\frac{r_g(k-1)u^1}{2mr^2(r-r_g)}S^{12};$$

$$\frac{du^3}{ds}=-\frac{2}{r}u^1u^3-2\operatorname{ctg}\theta u^2u^3-\frac{2r_g a}{r^3(r-r_g)}u^0u^1+\frac{2r_g a}{r^3}\operatorname{ctg}\theta u^0u^2+$$
$$+\frac{r_g(2+k)}{2mr}S^{23}u^2-\frac{r_g(k-1)u^1}{2mr^2(r-r_g)}S^{31};$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dS^{23}}{ds}=\frac{1}{r}S^{12}u^3-\frac{2}{r}S^{23}u^1-\operatorname{ctg}\theta S^{23}u^2+\frac{1}{r}S^{31}u^2;\\
&\frac{dS^{12}}{ds}=\left[\frac{r_g(1-k)}{2r(r-r_g)}-\frac{1}{r}\right]S^{12}u^1+\\
&+\left[\frac{1}{2}r_g(k+2)-r\right]\sin^2\theta S^{23}u^3-\frac{1}{2}\sin 2\theta S^{31}u^3;\\
&\frac{dS^{31}}{ds}=\left[\frac{r_g(1-k)}{2r(r-r_g)}-\frac{1}{r}\right]S^{31}u^1+\\
&+\left[\frac{1}{2}r_g(k+2)-r\right]S^{23}u^2+\operatorname{ctg}\theta(S^{12}u^3-S^{31}u^2).
\end{aligned}\right\} \qquad (21.7)$$

Рассмотрим некоторые решения системы (21.6), (21.7).

1. Исследуя геодезические линии в поле Керра, авторы работы [В.292] обнаружили класс возможных траекторий, для которых угол θ сохраняется, а r и φ меняются. Эти конические винтовые траектории представляют определенный интерес и были более подробно рассмотрены и применены к изучению свойств гравитационного излучения тел, падающих на вращающиеся черные дыры [14, 15].

Покажем, что подобные и более общие траектории возможны не только в поле вращающегося центра, но и в поле Шварцшильда для вращающейся частицы. Полагая в (21.6), (21.7) $\theta=\theta_0\neq 0$

и учитывая, что u^2 и u^3 пропорциональны первым степеням a и S^{ij}, приходим к системе

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du^1}{ds}=\frac{r_g u^{1^2}}{2r(r-r_g)}-\frac{r_g(r-r_g)}{2r^3}u^{0^2};\\
&\frac{du^2}{ds}=-\frac{2}{r}u^1u^2+\frac{r_g(k-1)u^1}{2mr^2(r-r_g)}S^{12};\\
&\frac{du^3}{ds}=-\frac{2}{r}u^1u^3-\frac{2r_g a u^0 u^1}{r^3(r-r_g)}-\frac{r_g(k-1)u^1}{2mr^2(r-r_g)}S^{31};\\
&\frac{du^0}{ds}=-\frac{r_g u^0 u^1}{r(r-r_g)};
\end{aligned}\right\} \tag{21.8}$$

$$\frac{dS^{23}}{ds}=-\frac{2}{r}S^{23}u^1;\quad \frac{dS^{12}}{ds}=\frac{r_g(3-k)-2r}{2r(r-r_g)}S^{12}u^1; \tag{21.9}$$

$$\frac{dS^{31}}{ds}=\frac{r_g(3-k)-2r}{2r(r-r_g)}S^{31}u^1,$$

из которой находим u^α и S^{ij}, если $k\neq 1$:

$$\left.\begin{aligned}
&u^0=\frac{c_0 r}{r-r_g};\quad u^{1^2}=c_0^2+c_1\left(1-\frac{r_g}{r}\right);\\
&u^2=-\frac{S^{12}}{mr};\quad u^3=\frac{2r_g a}{r^3}u^0+\frac{S^{31}}{mr};
\end{aligned}\right\} \tag{21.10}$$

$$S^{23}=\frac{S_0^{23}}{r^2};\quad S^{12}=S_0^{12}\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1-k}{2}};$$

$$S^{31}=S_0^{31}\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1-k}{2}}, \tag{21.11}$$

где c_0, $S_0^{ij}=-S_0^{ji}$ являются произвольными постоянными интегрирования, а $c_1=-1$ для неизотропных и $c_1=0$ для изотропных линий.

Исследование движения, согласно (21.10), (21.11), можно расчленить на три составляющие: радиальное движение, отклонение от радиального движения, поведение собственного вращения частицы (спина). Первые два уравнения в (21.10) показывают, что закономерности движения вдоль радиуса такие же, как в поле Шварцшильда, и хорошо изучены [В.15]. Отклонение от радиального движения характеризуется уравнениями для u^2 и u^3, которые в подробной записи имеют вид:

$$\frac{d\theta}{dr}=\pm\frac{S_0^{21}}{mr^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1-k}{2}}\left[c_0^2+c_1\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right]^{-1/2}, \tag{21.12}$$

$$\frac{d\varphi}{dr}=\pm\left[\frac{2r_g ac_0}{r^2(r-r_g)}+\frac{S_0^{31}}{mr^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1-k}{2}}\right]\times$$

$$\times\left[c_0^2+c_1\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right]^{-1/2} \qquad (21.13)$$

и всегда интегрируются в квадратурах. Знак плюс соответствует удалению, минус — приближению частицы к центру.

Наиболее простой для исследования случай получается при $c_0=1$, $c_1=-1$. Этим значениям постоянных соответствует свободное радиальное движение частицы, когда на пространственной бесконечности ее трехмерная скорость равна нулю (параболическое движение). Из (21.12), (21.13) находим:

$$\theta-\theta_0=\pm\frac{S_0^{21}}{m\sqrt{r_g}}\int r^{-3/2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1-k}{2}}dr=$$

$$=\pm\frac{2S_0^{12}}{m\sqrt{r_g r}}\left[1+\frac{(k-1)r_g}{6r}+\right.$$

$$\left.+(k-1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\prod\limits_{p=2}^{n}(2p-3+k)}{(2n+1)n!\,2^n}\left(\frac{r_g}{r}\right)^n\right]; \qquad (21.14)$$

$$\varphi-\varphi_0=\mp\frac{4\sqrt{r_g}\,a}{r^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{r_g}{r}\right)^{n-1}\mp$$

$$\mp\frac{2S_0^{31}}{m\sqrt{r_g r}}\left[1+\frac{(k-1)r_g}{6r}+\right.$$

$$\left.+(k-1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\prod\limits_{p=2}^{n}(2p-3+k)}{(2n+1)n!\,2^n}\left(\frac{r_g}{r}\right)^n\right]. \qquad (21.15)$$

При $S_0^{12}\neq 0$ формула (21.14) описывает отклонение по θ от радиального движения. В зависимости от знака S_0^{12} может происходить и увеличение и уменьшение θ. Интеграл в (21.14) существует, а представляющий его ряд сходится для всех $r\geqslant r_g$. Поворот на угол φ слагается из двух частей, одна из которых обязана вращению центра, а другая — спину частицы. Анализ формулы (21.15) показывает, что первый ряд сходится при любом $r>r_g$ и расходится при $r=r_g$. Второй ряд совпадает с рядом в (21.14). Если $S_0^{12}=S_0^{31}=0$, то траектория имеет вид конической винтовой линии, которая при $r \to r_g$ делает бесчисленное количество витков, закручиваясь в сторону вращения центра. При $S_0^{12} \neq 0$, $S_0^{31} \neq 0$ на это винтовое движение накладывается дополнительное отклонение по θ и φ. Если центр не вращается ($a=0$), но $S_0^{12} \neq 0$, $S_0^{31} \neq 0$, то отклонение от радиальной траектории все равно имеет место, однако при $r \to r_g$ количество витков не стремится к бесконечности.

Выбор $|c_0| < 1$ или $|c_0| > 1$ не меняет качественной картины рассмотренных выше закономерностей движения.

Можно выделить случай движения со скоростью света. Ему соответствует $c_1=0$. Из (21.12) и (21.13) легко получаем:

$$\theta-\theta_0 = \pm \frac{2S_0^{21}}{mr_g(3-k)c_0} \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{\frac{3-k}{2}}; \tag{21.16}$$

$$\varphi-\varphi_0 = \pm \frac{a}{r_g} \ln\left[\left(1-\frac{r_g}{r}\right) e^{\frac{r_g}{r}}\right] \pm$$

$$\pm \frac{2S_0^{31}}{mr_g(3-k)c_0} \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{\frac{3-k}{2}}. \tag{21.17}$$

Как видим, движение со скоростью света частиц со спином подчиняется закономерностям, аналогичным рассмотренным ранее.

Отметим одно важное обстоятельство. Если бы мы приняли дополнительное условие (21.3), то в (21.6) в уравнениях для u^2 и u^3 исчезли бы последние члены, что привело бы к отсутствию членов с S_0^{12} и S_0^{31} в (21.10), (21.12)—(21.15). Другими словами, спин частицы в поле Шварцшильда не вызывал бы отклонения от радиальной траектории, что нарушило бы аналогию между движением невращающейся частицы в поле вращающегося центра и движением вращающейся частицы в поле невращающегося центра. Такое положение дел следует рассматривать как еще один аргумент в пользу того, что $k \neq 1$, т. е. в пользу дополнительного условия (21.4).

Рассмотрим теперь поведение спина частицы. Из (21.11) и (21.4) следует, что при $r \to \infty$ все $S^{\alpha\beta} \to 0$, а при $r \to r_g$ к нулю стремятся S^{12} и S^{31}, если $0 \leqslant k < 1$. Из этого не следует, что величина спина ведет себя аналогичным образом. Например, для инварианта $S^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}$ имеем

$$S_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta} = 2\sin^2\theta_0 (S_0^{23})^2 + 2\left(1-k^2\frac{r_g}{r}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-k} \times$$

$$\times \left[(S_0^{12})^2 + \sin^2\theta_0 (S_0^{31})^2\right]. \tag{21.18}$$

Он стремится к бесконечности при $r \to r_g$ и стремится к постоянной величине при $r \to \infty$; если $k=1$, то он постоянен при любом r.

Если ввести компоненты S_i трехмерного вектора спина $\vec{S}\{S_i\}$ по известной формуле (19.1), то последовательно получаем:

$$S_1=\frac{\sin\theta_0\cdot S_0^{23}}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{1/2}},\quad S_2=\frac{r\sin\theta_0\cdot S_0^{31}}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{k/2}},\quad S_3=\frac{r\sin\theta_0\cdot S_0^{12}}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{k/2}};\qquad(21.19)$$

$$|\vec{S}|^2\equiv\gamma^{ij}S_iS_j=\sin^2\theta_0(S_0^{23})^2+\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-k}\times$$
$$\times[(S_0^{12})^2+\sin^2\theta_0(S_0^{31})^2],\qquad(21.20)$$

где γ^{ij} — контравариантный метрический тензор трехмерного пространства, в котором происходит движение. Величина $S_{ij}S^{ij}=2|\vec{S}|^2$ и, следовательно, ведет себя так же, как и $|\vec{S}|^2$, которая при $k>0$ стремится к бесконечности, если $r\to r_g$, и стремится к постоянной при $r\to\infty$.

Выясним, изменяется ли направление вектора $\vec{S}$. Для этого определим его направляющие косинусы с помощью скалярного произведения (20.37).

Воспользовавшись (21.11) и (21.19), из (20.13*) находим

$$\cos\alpha_1=\frac{\sin\theta_0\cdot S_0^{23}}{|\vec{S}|},\quad \cos\alpha_2=\frac{\sin\theta_0\cdot S_0^{31}}{|\vec{S}|\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{k/2}},$$
$$\cos\alpha_3=\frac{S_0^{12}}{|\vec{S}|\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{k/2}},\qquad(21.21)$$

где $|\vec{S}|$ берется из (21.20). Как и в плоском пространстве, $\sum\limits_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i=1$. Из (21.21) ясно, что вектор $\vec{S}$ не прецессирует, но меняет свое направление: $\alpha_1\to 90°$ при $r\to r_g$, а α_2 и α_3 изменяются пропорционально. В случае $S_0^{23}=0$ вектор $\vec{S}$ не меняет своей ориентации относительно координатной сетки, а меняет только свою величину $|\vec{S}|$. И только в случае коллинеарности $\vec{S}$ радиальному направлению ($S_2=S_3=0$, $S_1\neq 0$) спин не меняет ни величины, ни направления. Все эти закономерности поведения спина справедливы для неподвижного наблюдателя как в поле (21.2), так и в поле Шварцшильда. Для сопутствующего частице наблюдателя при любой ориентации спина ни $|\vec{S}|$, ни α_i не изменяются, что согласуется с [B.157] и выводом работы [B.160]: в любом гравитационном поле в локальной системе отсчета, сопутствующей пробному телу, его масса и величина спина сохраняются. Все это еще раз демонстрирует относительность свойств пространства и времени.

2. Рассмотрим другие возможные движения. Прежде всего отметим, что система (21.6), (21.7) имеет точное решение:

$$u^0 = \left(\frac{2r}{2r-3r_g}\right)^{1/2} \pm \frac{\sqrt{2r}(1+2k)r_g^{3/2}S_0^{31}}{4m(r-r_g)(2r-3r_g)} \mp \frac{3r_g^{3/2}a}{r(2r-3r_g)^{3/2}},$$

$$r=\mathrm{const},\ \theta=\frac{\pi}{2}; \qquad (21.22)$$

$$u^3 = \pm\sqrt{\frac{r_g}{r^2(2r-3r_g)}} + \frac{(1+2k)r_g S_0^{31}}{2mr(2r-3r_g)} - \frac{\sqrt{2r}\,r_g a}{r^2(2r-3r_g)^{3/2}};$$

$$S^{12}=S^{23}=0,\ S^{31}=S_0^{31}=\mathrm{const},$$

которое описывает круговое движение пробного тела в экваториальной плоскости, когда спин тела $\vec{S}$ к ней перпендикулярен. О свойствах такого движения см., например, в [B.165]. Малейшее отклонение спина $\vec{S}$ от перпендикулярного направления вызывает выход траектории из экваториальной плоскости. Обозначая через $\Delta\theta$ отклонение траектории от экваториальной плоскости и учитывая, как и ранее, только члены не выше первого порядка по $\Delta\theta$ и S^{ij}, находим решение системы (21.6), (21.7) при $r=\mathrm{const}$:

$$S^{12}=\frac{\lambda r}{u^3}S_0^{23}\cos(\lambda s),\ S^{23}=S_0^{23}\sin(\lambda s),\ S^{31}=S_0^{31};$$

$$u^0=\mathrm{const},\ u^3=\mathrm{const},\ \lambda=u^3\sqrt{1-\frac{k+2}{2}\,\frac{r_g}{r}}; \qquad (21.23)$$

$$\Delta\theta=A\sin(u^3 s+s_0)-B\sin(\lambda s),\ B\equiv\frac{S_0^{23}}{mu^3}, \qquad (21.24)$$

где A, s_0, S_0^{23} — произвольные постоянные интегрирования. Первый член в (21.24) характеризует собственные случайные колебания частицы около экваториальной плоскости с амплитудой $2A$ и с частотой u^3. Второй член описывает вынужденные колебания, обязанные спину частицы, которые происходят с меньшей частотой λ.

Если $S_0^{31}\neq 0$, то движение вращающейся частицы будет сопровождаться не только отклонением $\Delta\theta$, но и другим релятивистским эффектом — изменением поступательной скорости движения по круговой орбите Δv по сравнению с невращающимся пробным телом (см. [B.161, B.165]). По часам далекого неподвижного наблюдателя поступательная скорость

$$v_д=\pm\sqrt{\frac{\gamma M}{r}}-\frac{r_g ca}{2r^2}+\frac{(1+2k)r_g}{4(r-r_g)}\left(1-\frac{3r_g}{2r}\right)^{1/2}\frac{S_0^{31}}{m_0}, \qquad (21.25)$$

а по часам сопутствующего частице наблюдателя скорость

$$v_{\text{с}}=v_{\text{д}}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}. \qquad (21.26)$$

Если $r \gg r_g$, то с большой точностью

$$v=v_{\text{д}}=v_{\text{с}}=\pm\sqrt{\frac{\gamma M}{r}-\frac{r_g ca}{2r^2}+\frac{(1+2k)r_g}{4r}\frac{S_0^{31}}{m_0}} \qquad (21.27)$$

и постоянная S_0^{31} связана с $|\vec{S}|$ и постоянной S_0^{23} равенством

$$|\vec{S}|^2=r^4(S_0^{23})^2+r^2(S_0^{31})^2. \qquad (21.28)$$

В заключение отметим также, что в силу $\lambda<u^3$ из (21.23) следует медленная прецессия спина $\vec{S}$ около перпендикулярного экваториальной плоскости направления.

Наконец, легко выясняется, что движение частицы со спином по коническим винтовым линиям, т. е. существование релятивистских эффектов (21.14)—(21.17), обязано наличию в уравнениях (21.6) для u^2 и u^3 последних членов, которые в свою очередь обязаны одновременному существованию компонент спина S^{12} и S^{31} и пространственных компонент тензора кривизны Римана — Кристоффеля R_{1212} и R_{1313}. Другими словами, винтообразное движение частицы есть результат взаимодействия кривизны пространства со спином.

Аналогичная ситуация имеет место в случае отклонения траектории $\Delta\theta$ от экваториальной плоскости согласно (21.24), которое обязано наличию в уравнении для u^2 в (21.6) предпоследнего члена. Он есть комбинация членов с R_{2323}, R_{0202} и S^{23} в силу принятых дополнительных условий на спин (21.4). Таким образом, сила, выводящая частицу из экваториальной плоскости, также возникает из-за взаимодействия кривизны пространства со спином. При дополнительном условии $S^{0i}=0$ $(k=0)$ в формировании этой силы не принимает участия компонента кривизны R_{0202}.

Движение в поле Фридмана

Пусть внешнее поле, в котором находится вращающаяся частица, описывается метрикой, найденной Фридманом [16, 17]. Метрика Фридмана описывает космологические модели Вселенной в случае, когда материя в пространстве распределена однородно и изотропно. В сопутствующей материи системе отсчета в сферических координатах метрика Фридмана записывается в виде [В.13, § 111—113]:

$$ds^2=c^2dt^2-dl^2,\ dl^2=a^2(t)\,\{dr^2+f^2(r)\,(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\}, \qquad (21.29)$$

где известная функция $a(t)$ называется радиусом пространства, $f(r)=\operatorname{sh} r$, или $f(r)=r$, или $f(r)=\sin r$. Три значения для $f(r)$ соответствуют трем изотропным моделям открытой, конформно-плоской и закрытой.

Уравнения (10.2), (10.3) для метрики (21.29) оказывается возможным в некоторых частных случаях точно проинтегрировать и получить ряд физических следствий общего характера.

Рассмотрим сначала движение невращающейся частицы ($S^{\alpha\beta}\equiv 0$). Тогда вместо системы (10.2), (10.3) придется интегрировать систему геодезических (20.1), (20.2), которая в подробной записи для метрики (21.29) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{du^0}{ds}+a\dot{a}(u^{1^2}+f^2u^{2^2}+f^2\sin^2\theta u^{3^2})=0;\\
&\frac{du^1}{ds}+2\frac{\dot{a}}{a}u^0u^1-ff'(u^{2^2}+\sin^2\theta u^{3^2})=0;\\
&\frac{du^2}{ds}+2\frac{\dot{a}}{a}u^0u^2+2\frac{f'}{f}u^1u^2-\frac{1}{2}\sin 2\theta\, u^{3^2}=0;\\
&\frac{du^3}{ds}+2\left(\frac{\dot{a}}{a}u^0+\frac{f'}{f}u^1+\operatorname{ctg}\theta\, u^2\right)u^3=0;
\end{aligned} \tag{21.30}$$

$$u^{0^2}-a^2(u^{1^2}+f^2u^{2^2}+f^2\sin^2\theta\, u^{3^2})=1, \tag{21.30*}$$

где точка и штрих обозначают производные соответственно по t и r.

Эту систему можно проинтегрировать без всяких дополнительных предположений. Самое общее решение (21.30) следующее:

$$\begin{aligned}
&u^0=\pm\left(1+\frac{c_1^2}{a^2}\right)^{1/2},\quad u^1=\pm\frac{(c_1^2f^2+c_2)^{1/2}}{a^2f};\\
&u^2=\pm\frac{(-c_2\sin^2\theta-c_3^4)^{1/2}}{a^2f^2\sin\theta},\quad u^3=\frac{c_3^2}{a^2f^2\sin^2\theta},
\end{aligned} \tag{21.31}$$

где c_i — постоянные интегрирования. Помня, что $u^i\equiv\dfrac{dx^i}{ds}=\dfrac{dx^i}{cdt}u^0$, из (21.31) находим x^i. Однако этого можно не делать, так как общие закономерности движения следуют непосредственно из полученного решения. Отметим только, что траекториями движения, как это ясно видно из (21.31), могут быть: временны́е координатные линии (r, θ, $\varphi=\mathrm{const}$, частица покоится на фридмановском фоне); координатные линии r, на которых θ, $\varphi=\mathrm{const}$; «плоские» линии $\varphi=\mathrm{const}$ и пространственные линии (все координаты r, θ, φ меняются со временем).

Из (21.29), пользуясь значением u^0 из (21.31), находим

$$\left(\frac{dl}{ds}\right)^2=u^{0^2}-1=\frac{c_1^2}{a^2};\quad v\equiv\frac{dl}{d\tau}=\frac{dl}{ds}\,\frac{c}{u^0}=\pm c\left(1+\frac{a^2}{c_1^2}\right)^{-1/2}, \tag{21.32}$$

где v — величина трехмерной скорости частицы, измеренная относительно собственного времени $\tau=t$ фридмановского поля. Как видим, $v\to\pm c$, если радиус пространства $a(t)\to 0$, и $v\to 0$, если $a(t)\to\infty$, т. е. v затухает со временем по закону (21.32). Для открытых изотропных моделей ($f=\operatorname{sh} r$, $f=r$) это затухание происходит до нуля, в то время как для закрытой модели ($f=\sin r$) затухание скорости происходит до не равного нулю минимума (соответствующего максимуму a), после чего наступает возрастание v со стремлением к скорости света c.

По определению скаляра m в [B.134] имеем

$$m=\frac{1}{u^0}\int\limits_V \tilde{T}^{00}dV, \tag{21.33}$$

где $\tilde{T}^{00}$ — компонента плотности тензора энергии-импульса частицы, и интеграл берется по трехмерному объему V, который заключает в себе частицу. Этот интеграл определяет полную энергию (массу) частицы E. В системе покоя частицы ($u^{0^2}=1$, $u^i=0$) он совпадает с массой покоя частицы m_0, умноженной на c^2. Таким образом,

$$E=\int\limits_V \tilde{T}^{00}dV=mu^0=\pm m\left(1+\frac{c_1^2}{a^2}\right)^{1/2}, \tag{21.34}$$

а импульс частицы, определяемый по формуле $P=Ev$, изменяется, согласно (21.32) и (21.34), по закону

$$P=\pm\frac{mcc_1}{a}=\frac{\text{const}}{a}. \tag{21.35}$$

Найденные закономерности (21.32), (21.35) полностью согласуются с результатами в [B.13], полученными другим путем.

Рассмотрим теперь вращающуюся частицу, покоящуюся на фридмановском фоне ($S^{\alpha\beta}\neq 0$, $u^i=0$). Тогда из (21.30*) следует, что $u^{0^2}=1$, а уравнения Папапетру (10.2) при $\alpha=0$ дают

$$\frac{d}{ds}(mu^0)=0, \text{ т. е. } m=\text{const}. \tag{21.36}$$

Раскрывая (10.2) при $\alpha=i$, приходим к уравнениям

$$\dot{S}^{0i}+2\frac{\dot{a}}{a}S^{0i}=0, \tag{21.37}$$

которые можно проинтегрировать:

$$S^{0i}=A^i\int\frac{dt}{a^2}+B^i;\ A^i,\ B^i=\text{const}. \tag{21.38}$$

Уравнения вращательного движения (10.3) при $\alpha=i$, $\beta=j$ сводятся к уравнениям

$$\dot{S}^{ij}+2\frac{\dot{a}}{a}S^{ij}=0, \tag{21.39}$$

решением которых будет

$$S^{ij}=\frac{K^{ij}}{a^2}, \tag{21.40}$$

где K^{ij} — антисимметричные постоянные интегрирования. Уравнения движения Папапетру в рассматриваемом частном случае полностью проинтегрированы. Постоянные интегрирования m, A^i, B^i, K^{ij} определяются из начальных условий.

Как видно из (21.38) и (21.40), компоненты углового момента импульса меняются с течением времени. Подсчитаем инвариант $S^2=S_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}$. Имеем

$$S^2=2f^2[(K^{12})^2+(K^{13})^2\sin^2\theta+(K^{23})^2f^2\sin^2\theta]-$$
$$-2a^2[(S^{01})^2+f^2(S^{02})^2+f^2\sin^2\theta(S^{03})^2]. \tag{21.41}$$

Так как r, θ, $\varphi=\mathrm{const}$, то первая строка постоянна, а вторая зависит от t. Поэтому S^2 может обратиться в нуль и сменить знак. Как уже отмечалось выше, условие $S^{0i}=0$ принимается в сопутствующей системе координат многими авторами за определение центра тяжести частицы. Это также согласуется с дополнительным условием (21.4). Принимая это условие ($A^i=0$, $B^i=0$), получаем инвариант S^2 постоянным (и бо́льшим нуля). Он совпадает с точностью до постоянного множителя с квадратом модуля трехмерного вектора $\vec{S}$, координаты которого S_l связаны с S^{ij} формулой (19.1).

Уравнения Папапетру (10.2), (10.3) можно точно проинтегрировать в пространстве Фридмана и в других частных случаях (см. [В.155]).

Движение в пространстве Толмена

Известно общее решение Толмена [18], [В.3, § 165] уравнений Эйнштейна (3.1) для центрально-симметричной метрики риманова пространства-времени

$$ds^2=c^2dt^2-e^{\alpha(t,\,r)}dr^2-e^{\beta(t,\,r)}(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{21.42}$$

в том случае, когда система отсчета выбирается сопутствующей и давление p материи, заполняющей все пространство, полагается равным нулю (см. также [В.13, § 103]). Физические приложения решения Толмена имеют заведомо ограниченный характер, ибо при значительных плотностях материи ε давление p не может считаться исчезающе малым. В работах [19—21] были найдены и исследованы решения при $p\neq0$, обобщающие решение Толмена. Тем самым было рассмотрено движение материи и закономерности изменения ε и p.

В случае вращающейся частицы в пространстве (21.42) применима теорема (20.19). Следовательно, имеем: вращающаяся частица, находящаяся в сопутствующей системе отсчета пространства Толмена и его обобщений, всегда сохраняет величину $\vec{S}$, т. е. $|\vec{S}|=\text{const}$.

Полученный результат $|\vec{S}|=\text{const}$ для пространств Леметра, Фридмана, Толмена и других [19—23] означает, что при вращении материальных объектов «гравитационное трение» о внешний фон и обусловленные этим потери энергии вращающимися объектами не происходят. Подобный вывод важен при рассмотрении вопросов эволюции вращающихся объектов (галактик и т. д.), находящихся в этих пространствах.

Движение в пространстве (21.43)

В работе [В.159] точно проинтегрированы уравнения Папапетру при условии $S^{0i}=0$ в пространстве-времени

$$ds^2=g_{00}(x^0, x^1)dx^{0^2}-dx^{1^2}-2dx^0dx^2-dx^{3^2}, \tag{21.43}$$

которое исследовалось в [В.365] и которое относится к II типу по классификации Петрова ([В.8, с. 128]). Физически пространство (21.43) может соответствовать гравитационному полю, порождаемому плоской монохроматической электромагнитной волной с круговой поляризацией. Оказывается, что в (21.43)

$$|\vec{S}|^2=\frac{c_0^2+c_1\cos(ax^0+b)}{c_2^2\sin^2(ax^0+b)}, \tag{21.44}$$

где c_0, c_1, c_2, a, b — некоторые постоянные. Получаем, что величина собственного углового момента изменяется от ненулевого положительного минимума до бесконечности (при $\sin(ax^0+b)=0$), что существенно отличается от поведения $|\vec{S}|$ в пространствах с метрикой (20.19). Другие особенности движения частицы см. в [В.365, В.159].

§ 22. СОБСТВЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ ТЕЛ СРАВНИМЫХ МАСС В ОТО

Нами выведены уравнения поступательного и вращательного движений для n тел сравнимых масс (9.2), (9.9). Теперь следует подробно исследовать эти уравнения. В силу известных и еще не преодоленных трудностей, возникающих при решении общей задачи движения системы тел в небесной механике, ограничимся тщательным исследованием только задачи двух тел. Обобщение результатов на три и большее число тел будем делать только в тех случаях, когда это не вызывает особых затруднений. В этом параграфе проведем интегрирование в посленьютоновом приближении только уравнений вращательного движения (9.9). Для этого нужно знать результаты ньютоновой теории.

В ньютоновом приближении правые части уравнений (9.2), (9.9) нужно считать нулями. Предполагая ньютоново движение двух тел a и b происходящим в плоскости x^1Ox^2, получаем в полярных координатах

$$x^1=r\cos\varphi,\ x^2=r\sin\varphi,\ x^3=0 \tag{22.1}$$

известные решения

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}(1+e\cos\varphi); \tag{22.2}$$

$$\vec{\sigma}_a=\overrightarrow{\text{const}},\ \vec{\sigma}_b=\overrightarrow{\text{const}}. \tag{22.3}$$

Кроме того, справедливы законы сохранения энергии и орбитального момента импульса:

$$E^*\equiv\frac{1}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)-\frac{\gamma m}{r}=\frac{1}{2}v^2-\frac{\gamma m}{r}=-\frac{\gamma m}{2a}=\text{const}; \tag{22.4}$$

$$M_1^*=M_2^*=0,\ M_3^*=x^1\dot x^2-x^2\dot x^1=r^2\dot\varphi=c_3^*=\sqrt{\gamma m p}=\text{const}. \tag{22.5}$$

Здесь e — эксцентриситет относительной орбиты (для финитных движений $0\leqslant e<1$); p и a — параметр и большая полуось относительной орбиты; v — величина относительной скорости тел; $m=m_a+m_b$; $\vec{M}^*\equiv[\vec{r}\ \dot{\vec{r}}]=\{M_i^*\}$, $\vec{r}\equiv\vec{r}_{ba}\equiv\vec{a}-\vec{b}$. В ньютоновом приближении также справедливы равенства (система координат барицентрическая):

$$a^i=\frac{m_b}{m}x^i,\ b^i=-\frac{m_a}{m}x^i,\ x^i\equiv a^i-b^i,$$

$$v^i=\dot x^i,\ v^2=\dot x^s\dot x^s,\ a^3=b^3=x^3=0,\ \dot a^3=\dot b^3=\dot x^3=0. \tag{22.6}$$

Переходя к посленьютонову приближению, прежде всего отметим; что уравнения (9.9) имеют интеграл

$$(\tilde{\vec{S}}_a^*\tilde{\vec{S}}_a^*)+2\sum_b{}'\frac{\gamma m_b}{c^2r_{ab}}(\vec{S}_a\vec{S}_a)=C_0, \tag{22.7}$$

который получается как частный случай из (19.6), если положить $\vec{\mu}_a=0$. Здесь $\vec{S}_a^*\equiv m_a\vec{\sigma}_a$ и

$$\tilde{\vec{S}}_a^*\equiv\vec{S}_a^*+m_a\tilde{\vec{\sigma}}_a+\left(\frac{m_a}{2c^2}\dot a^s\dot a^s+\sum_b{}'\frac{\gamma m_am_b}{c^2r_{ab}}+\frac{C_a}{c^2}\right)\vec{\sigma}_a. \tag{22.8}$$

На основании (19.10) заключаем, что для сопутствующего наблюдателя $|\tilde{\vec{S}}_a^*|=\text{const}$. Но это не означает, что угловая скорость собственного вращения в постньютоновом приближении $\tilde{\omega}_a$ постоянна. Действительно, на основании (19.9) и (22.8) имеем

$$|\vec{\tilde{S}}_a^*|^2 \equiv \gamma_{ij} \tilde{S}_a^{*i} \tilde{S}_a^{*j} = \delta_{ij} \left(1 + 2 \sum_b{}' \frac{\gamma m_b}{c^2 r_{ab}}\right) \tilde{S}_a^{*i} \tilde{S}_a^{*j} =$$

$$= m_a^2 \left(1 + 2 \sum_b{}' \frac{\gamma m_b}{c^2 r_{ab}}\right) \left[(\vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_a) + 2 (\vec{\sigma}_a \vec{\tilde{\sigma}}_a) + \frac{\dot{a}^s \dot{a}^s}{c^2} (\vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_a) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_b{}' \frac{\gamma m_b}{c^2 r_{ab}} (\vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_a) \right] = \bar{C}_0^*. \tag{22.9}$$

Отсюда, так как $|\vec{\sigma}_a| = \omega_a k_a$, $|\vec{\tilde{\sigma}}_a| = \tilde{\omega}_a k_a$, находим

$$\tilde{\omega}_a = \left(\bar{C}_0^* - \frac{\dot{a}^s \dot{a}^s}{2c^2} + 2 \sum_b{}' \frac{\gamma m_b}{c^2 r_{ab}} \right) \omega_a, \tag{22.9*}$$

где $\bar{C}_0^*$ — некоторая постоянная. В случае финитных движений $\tilde{\omega}_a$ является периодической функцией времени. Подробное обсуждение формулы (22.9*) и возможности ее использования для экспериментальной проверки ОТО будут даны в гл. VI.

Переходим к рассмотрению других следствий из уравнений собственного вращения (9.9). Будем рассматривать финитные движения, $0 \leqslant e < 1$. Используя ньютоново приближение (22.1)—(22.6) и непосредственно интегрируя (9.9), найдем с учетом только вековых членов релятивистскую поправку к $\vec{S}_a^*$ (в случае двух тел):

$$\vec{\tilde{S}}_a^* = \vec{S}_a^* + \frac{\gamma m_a m_b}{c^2 m p} \left(2m_a + \frac{3}{2} m_b \right) [\vec{n} \vec{\sigma}_a] \varphi -$$

$$- \frac{\gamma m_a m_b}{2c^2 p M^*} \left\{ \frac{9}{4} (\vec{n} \vec{\sigma}_a) [\vec{n} \vec{\sigma}_a] + 3 (\vec{n} \vec{\sigma}_b) [\vec{n} \vec{\sigma}_a] + [\vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b] \right\} \varphi, \tag{22.10}$$

где $M^* = M_3^* = |\vec{M}^*|$, $\vec{n} = \vec{M}^*/M^* = \vec{e}_3$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости ньютоновой орбиты тел a и b. Умножая скалярно на $\vec{\tilde{S}}_a^*$ обе части (22.10), получаем в постньютоновом приближении $(\vec{\tilde{S}}_a^* \vec{\tilde{S}}_a^*) = (\vec{S}_a^* \vec{S}_a^*) = \mathrm{const}$, что, конечно, не противоречит интегралу (22.7), в котором учитывались и не вековые члены. Равенство (22.10) можно переписать в виде

$$\vec{\tilde{S}}_a^* = \vec{S}_a^* + [\vec{N}_a^* \vec{S}_a^*] \varphi, \tag{22.11}$$

где

$$\vec{N}_a^* = \frac{\gamma m_b}{c^2 m p}\left(2m_a + \frac{3}{2} m_b\right)\vec{n} -$$

$$-\frac{\gamma m_b}{2c^2 p M^*}\left\{\left[\frac{9}{4}(\vec{n}\vec{\sigma}_a) + 3(\vec{n}\vec{\sigma}_b)\right]\vec{n} - \vec{\sigma}_b\right\}. \qquad (22.12)$$

В соответствии с известным законом механики (см., например, [I. 10, гл. VI]) из (22.11) немедленно следует, что вектор $\vec{\tilde{S}}_a^*$ прецессирует вокруг постоянного вектора $\vec{N}_a^*$ с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}_a^* = \vec{N}_a^* \dot{\varphi} = \frac{M^*}{r^2}\vec{N}_a^*. \qquad (22.13)$$

Этот эффект был впервые указан еще в 1958 г. в работе [В.196], но в его количественной оценке для двух тел сравнимых масс содержалась погрешность. Однако для легкого тела ($m_a \to 0$) оценка в [В.196] правильная. Очевидно, что прецессия будет отсутствовать в единственном случае, когда векторы $\vec{N}_a^*$ и $\vec{S}_a^*$ коллинеарны. Так как в (22.10) учитывались только вековые поправочные члены, то с такой степенью точности прецессия и для далекого неподвижного и локального наблюдателей будет происходить одинаково, по формулам (22.11)—(22.13). Учет периодических членов привел бы к слабому периодическому возмущению чистой прецессии. Появились бы нутации, которые для разных наблюдателей оценивались бы по-разному. Мы этими тонкими эффектами заниматься не будем.

Отметим, что релятивистская поправка в (22.10) состоит из двух частей: одна часть линейная, а другая билинейная по σ. Отношение линейных членов к билинейным, как легко видно, имеет порядок σ/M^*, где σ является наибольшим из модулей $|\vec{\sigma}_a|$ и $|\vec{\sigma}_b|$. Для обычных астрономических приложений дробь σ/M^* мала.*) Поэтому для таких приложений билинейные члены можно отбрасывать. Но мыслимы двойные звезды (тесные плотные пары с большими σ), для которых $\sigma/M^* \sim 0{,}1$—1. Действительно, для приведенного в [25] примера предельно быстро вращающейся нейтронной звезды (у нее $m_b = 10^{33}$ г, радиус $R = 10^6$ см, $\omega = 10^4$ с$^{-1}$, $\sigma = 4\cdot 10^{15}$ см$^2\cdot$с$^{-1}$) и ее вращающегося спутника с $p = 10^7$ см имеем $\sigma/M^* \sim 0{,}1$. Согласно работам [В.24, В.27, В.29], существуют пульсары с характеристиками $m \sim 10^{32}$ г, $R \sim 10^7$ см, $\omega \sim 10^2$ с$^{-1}$. Предполагая у такого пульсара существование спутника, орбита которого имеет $p = 10^8$ см, находим для такой системы $\sigma/M^* \sim 1$.

---

*) Для системы Солнце — Земля $\sigma/M^* \sim 10^{-4}$. Для двойной звезды, относительная орбита которой имеет $p = 3\cdot 10^{14}$ см и каждая компонента которой имеет характеристики звезды 78 Девы, $\sigma/M^* \sim 10^{-3}$ (см. [24, табл. 1 и 2]). Для системы Земля — ее искусственный спутник с $p = 6{,}5\cdot 10^8$—10^9 см имеем $\sigma/M^* \sim 2\cdot 10^{-2}$.

Период прецессии $T_a^* = |\vec{\Omega}_a^*|^{-1}$ для обычных звезд и их спутников велик. Например, ось вращения Земли, согласно (22.13), совершит полный оборот вокруг $\vec{N}_a^*$ за время $\sim 10^{12}$ лет. Для двойной звезды, указанной в сноске, $T_a^* \sim 10^{10}$ лет. Но в случае систем нейтронная звезда — ее близкий спутник ось вращения спутника будет прецессировать со значительной угловой скоростью, т. е. период прецессии будет небольшим. Так, например, если нейтронная звезда имеет массу Солнца и собственный радиус порядка 10—16 км, то для ее спутников с $p=10^2$, 10^3, 10^4 км получим соответственно $T_a^* \approx 3{,}4$ часа, 46 суток, 40 лет.

Интересно отметить, что только для систем с $\sigma/M^* \sim 1$ прецессия оси собственного вращения тела a зависит от собственного вращения тела b (от $\vec{S}_b^*$). Если же σ/M^* значительно меньше единицы, то квадратичные по σ члены в (22.10), (22.12) малы, их можно отбросить и прецессия вектора $\tilde{\vec{S}}_a^*$ будет зависеть только от m_b и p: чем больше m_b и меньше p, тем быстрее совершается прецессия, тело b может и вовсе не вращаться.

Заметим также, что если $\sigma/M^* \ll 1$, то прецессия совершается вокруг вектора $\vec{N}_a^*$ с угловой скоростью $\vec{\Omega}_a^*$, направленной по $\vec{n}$, т. е. прецессия вектора $\tilde{\vec{S}}_a^*$ происходит всегда в том же направлении, что и движение тела a по орбите. Если же $\sigma/M^* \sim 1$, то, как нетрудно показать, можно найти такие системы, для которых $\vec{\Omega}_a^* = 0$ (прецессии нет) или вектор $\vec{\Omega}_a^*$ направлен по $(-\vec{n})$ (прецессия совершается в противоположном направлении). В самом деле, возьмем систему пульсар — пульсар с $\sigma/M^* = 1$, у которой $m_a = m_b$, $|\vec{\sigma}_a| = |\vec{\sigma}_b|$, $\vec{\sigma}_b = |\vec{\sigma}_b|\,\vec{n}$, $\vec{\sigma}_a$ образует с $\vec{n}$ угол α. Тогда

$$\vec{N}_a^* = \frac{\gamma m_a}{c^2 p}\left[\frac{7}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\cos\alpha + 2\right)\right]\vec{n}. \qquad (22.14)$$

Находим, что $\vec{N}_a = 0$, когда $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ $(\alpha \approx 48°)$. Если $\cos\alpha > \dfrac{2}{3}$, то $\vec{N}_a^*$ и $\vec{\Omega}_a^*$ направлены по $(-\vec{n})$.

Аналогичные рассуждения, формулы и выводы имеют место и для тела b.

Приведенные оценки следует иметь в виду при изучении движения тел и других процессов вблизи сверхплотных конфигураций (квазары, нейтронные звезды, пульсары и т. д.).

§ 23. ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ В ПОСЛЕНЬЮТОНОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Релятивистский орбитальный момент импульса

В настоящем параграфе будет рассмотрено влияние собственных вращений двух тел a и b на поступательное движение центров тяжести этих тел.

Чтобы отличать ньютоновы значения координат, скоростей тел и так далее от их релятивистских значений, будем (как это мы уже делали для собственных моментов) для обозначения релятивистского значения над коренной буквой писать тильду ($\sim$). Поэтому уравнения поступательного движения (9.2) в случае двух тел следует записать так (сократив предварительно на m_a):

$$\ddot{\tilde{a}}^i - \left(\frac{\gamma m_b}{\tilde{r}}\right)_{,\tilde{a}^i} = f^i_{a(g)} + f^i_{a(g\sigma)}, \tag{23.1}$$

где $f^i_{a(g)} \equiv F^i_{a(g)}/m_a$, $f^i_{a(g\sigma)} \equiv F^i_{a(g\sigma)}/m_a$. Аналогично выглядят уравнения движения для тела b:

$$\ddot{\tilde{b}}^i - \left(\frac{\gamma m_a}{\tilde{r}}\right)_{,\tilde{b}^i} = f^i_{b(g)} + f^i_{b(g\sigma)}. \tag{23.2}$$

Уравнения (23.2) получаются из (23.1) с помощью формальной замены значков $a \rightleftarrows b$. Введем в рассмотрение релятивистский удельный орбитальный момент импульса системы по правилу ньютоновой теории тяготения:

$$\vec{\tilde{M}}^* \equiv [\vec{\tilde{r}}\,\dot{\vec{\tilde{r}}}], \quad \vec{\tilde{r}} \equiv \vec{\tilde{a}} - \vec{\tilde{b}}. \tag{23.3}$$

В ньютоновом приближении (23.3) совпадает с (22.5). Введя обозначение $\vec{f} = \{f^i\}$, $f^i \equiv f^i_{a(g)} - f^i_{b(g)} + f^i_{a(g\sigma)} - f^i_{b(g\sigma)}$, из (23.1) и (23.2) находим

$$\dot{\vec{\tilde{M}}}^* = [\vec{\tilde{r}}\,\ddot{\vec{\tilde{r}}}] = [\vec{r}, \vec{f}_{a(g)} - \vec{f}_{b(g)}] + [\vec{r}, \vec{f}_{a(g\sigma)} - \vec{f}_{b(g\sigma)}] = [\vec{r}\,\vec{f}\,]. \tag{23.4}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x^2\dot{\tilde{x}}^3 - \dot{x}^2\tilde{x}^3 &\equiv \tilde{M}_1^* = c_1^* + \int (x^2f^3 - x^3f^2)\,dt = \int x^2f^3dt, \\ \tilde{x}^3\dot{x}^1 - \dot{\tilde{x}}^3x^1 &\equiv \tilde{M}_2^* = c_2^* + \int (x^3f^1 - x^1f^3)\,dt = -\int x^1f^3dt, \\ \tilde{x}^1\dot{\tilde{x}}^2 - \dot{\tilde{x}}^1\tilde{x}^2 &\equiv \tilde{M}_3^* = c_3^* + \int (x^1f^2 - x^2f^1)\,dt = \\ &= M_3^* + \int (x^1f^2 - x^2f^1)\,dt, \end{aligned} \tag{23.5}$$

так как $c_1^* = c_2^* = 0$, $c_3^* = M_3$, согласно (22.5), и $x^3 = 0$ по (22.6).

Пользуясь выражениями (6.23) и (9.3) в случае двух тел (и аналогичными выражениями для тела b), находим

$$f^i_{a(g)}-f^i_{b(g)}\equiv\frac{\gamma}{c^2}\left\{\frac{\gamma}{2ar^3}\left[(2m^2_a+7m_am_b+2m^2_b)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{a}{r}(4m^2_a+6m_am_b+4m^2_b)-\frac{3m_am_b}{apr^2}\right]x^i-$$

$$\left.-(4m^2_a+6m_am_b+4m^2_b)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\dot{x}^i}{m}\right\}; \qquad (23.6)$$

$$f^i_{a(g\sigma)}-f^i_{b(g\sigma)}\equiv\frac{\gamma\dot{x}^s}{c^2r^3}\left\{\left(2m_a+\frac{3}{2}m_b\right)\times\right.$$

$$\times\left(2\sigma^{si}_a-3\frac{x^kx^i}{r^2}\sigma^{sk}_a+3\frac{x^kx^s}{r^2}\sigma^{ik}_a\right)+$$

$$\left.+\left(2m_b+\frac{3}{2}m_a\right)\left(2\sigma^{si}_b-3\frac{x^kx^i}{r^2}\sigma^{sk}_b+3\frac{x^kx^s}{r^2}\sigma^{ik}_b\right)\right\}+$$

$$+\frac{3\gamma m}{c^2r^5}\left\{\frac{3}{8}\left(2x^k\sigma^{sk}_a\sigma^{si}_a+x^i\sigma^{ks}_a\sigma^{ks}_a-5\frac{x^ix^kx^l}{r^2}\sigma^{ks}_a\sigma^{ls}_a\right)+\right.$$

$$+x^k(\sigma^{sk}_a\sigma^{si}_b+\sigma^{sk}_b\sigma^{si}_a)+x^i\left(\sigma^{sk}_a\sigma^{sk}_b-5\frac{x^kx^l}{r^2}\sigma^{sk}_a\sigma^{sl}_b\right)+$$

$$\left.+\frac{3}{8}\left(2x^k\sigma^{sk}_b\sigma^{si}_b+x^i\sigma^{sk}_b\sigma^{sk}_b-5\frac{x^ix^kx^l}{r^2}\sigma^{sk}_b\sigma^{sl}_b\right)\right\}+$$

$$+\frac{\gamma}{c^2}(C_a+C_b)\left(\frac{1}{r}\right)_{,}x^i. \qquad (23.7)$$

В выражения (23.6) и (23.7) входят известные из ньютонова приближения (22.1)—(22.6) величины. Поэтому подынтегральные функции в (23.5) известны. Вычисляя интегралы в (23.5) и оставляя только вековые члены, находим:

$$\bar{M}^*_1=\frac{\gamma}{2c^2p}\left[(4m_a+3m_b)\sigma^2_a+(3m_a+4m_b)\sigma^2_b\right]\varphi-$$

$$-\frac{3\gamma m}{8c^2pM^*}\left[(3\sigma^2_a+4\sigma^2_b)\sigma^3_a+(3\sigma^2_b+4\sigma^2_a)\sigma^3_b\right]\varphi; \qquad (23.8)$$

$$\bar{M}^*_2=-\frac{\gamma}{2c^2p}\left[(4m_a+3m_b)\sigma^1_a+(3m_a+4m_b)\sigma^1_b\right]\varphi+$$

$$+\frac{3\gamma m}{8c^2pM^*}\left[(3\sigma^1_a+4\sigma^1_b)\sigma^3_a+(3\sigma^1_b+4\sigma^1_a)\sigma^3_b\right]\varphi; \qquad (23.9)$$

$$\bar{M}^*_3=M^*_3=\sqrt{\gamma mp}. \qquad (23.10)$$

Полученные равенства (23.8)—(23.10) можно объединить в одно векторное равенство:

$$\tilde{\vec{M}}^{*}=\vec{M}^{*}-\frac{\gamma}{2c^{2}p}\left\{(4m_{a}+3m_{b})[\vec{n}\,\vec{\sigma}_{a}]+(3m_{a}+4m_{b})[\vec{n}\,\vec{\sigma}_{b}]\right\}\varphi+$$
$$+\frac{3\gamma m}{8c^{2}pM^{*}}\left\{(\vec{n}\,\vec{\sigma}_{a})[\vec{n},3\vec{\sigma}_{a}+4\vec{\sigma}_{b}]+(\vec{n}\,\vec{\sigma}_{b})[\vec{n},4\vec{\sigma}_{a}+3\vec{\sigma}_{b}]\right\}\varphi. \quad (23.11)$$

Интегралы в (23.5) можно было вычислить точно. Тогда в (23.11) справа появились бы дополнительные не вековые члены (периодические в случае финитного ньютонова движения). В частности, без учета собственных вращений тел точное интегрирование в (23.5) приводит к

$$\tilde{\vec{M}}^{*}=\vec{M}^{*}\left[1-\frac{2\gamma}{c^{2}mr}(2m_{a}^{2}+3m_{a}m_{b}+2m_{b}^{2})\right]. \quad (23.12)$$

Скалярный квадрат вектора $\tilde{\vec{M}}^{*}$ из (23.11), составленный по правилам евклидовой геометрии, дает в посленьютоновом приближении равенство

$$(\tilde{\vec{M}}^{*}\,\tilde{\vec{M}}^{*})=(\vec{M}^{*}\,\vec{M}^{*})=|\vec{M}^{*}|^{2}=\gamma mp=\text{const}. \quad (23.13)$$

Но рассматриваемое трехмерное пространство в посленьютоновом приближении искривлено. Поэтому $(\tilde{\vec{M}}^{*}\,\tilde{\vec{M}}^{*})$ не является квадратом истинной длины вектора $\tilde{\vec{M}}^{*}$. Согласно (19.8), истинный квадрат длины вектора $\tilde{\vec{M}}^{*}$ есть

$$|\tilde{\vec{M}}^{*}|^{2}\equiv\gamma_{ij}\tilde{M}_{*}^{i}\,\tilde{M}_{*}^{j}. \quad (23.14)$$

Но так как γ_{ij} не содержит вековых членов (см. (19.9)), то с точностью до вековых членов все равно получаем $|\tilde{\vec{M}}|=\text{const}$:

$$|\tilde{\vec{M}}^{*}|^{2}\equiv\gamma_{ij}\tilde{M}_{*}^{i}\,\tilde{M}_{*}^{j}=\delta_{ij}\tilde{M}_{*}^{i}\,\tilde{M}_{*}^{j}=\tilde{M}_{*}^{s}\,\tilde{M}_{*}^{s}=(\tilde{\vec{M}}^{*}\,\tilde{\vec{M}}^{*})=\text{const}. \quad (23.15)$$

Переписав (23.11) в виде

$$\tilde{\vec{M}}^{*}=\vec{M}^{*}+[\vec{S}^{*}\,\vec{M}^{*}]\varphi, \quad (23.16)$$

где

$$\vec{S}^{*}\equiv\frac{\gamma}{2c^{2}pM^{*}}\left[(4m_{a}+3m_{b})\vec{\sigma}_{a}+(3m_{a}+4m_{b})\vec{\sigma}_{b}\right]-$$
$$-\frac{3}{8c^{2}p^{2}}\left[(\vec{n}\,\vec{\sigma}_{a})(3\vec{\sigma}_{a}+4\vec{\sigma}_{b})+(\vec{n}\,\vec{\sigma}_{b})(4\vec{\sigma}_{a}+3\vec{\sigma}_{b})\right], \quad (23.17)$$

в силу (23.15) и (23.16) немедленно заключаем, что $\vec{\tilde{M}}^*$ и, следовательно, плоскость ньютоновых орбит тел a и b совершают прецессию вокруг постоянного вектора $\vec{S}^*$ с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}^* = \vec{S}^*\dot{\varphi} = r^{-2}M^*\vec{S}^*. \tag{23.18}$$

В то же время $\vec{\Omega}^*$ является угловой скоростью поворота линии равноденствия или линии узлов (пересечение ортогональной к $\vec{S}^*$ плоскости с плоскостью относительной орбиты).

Таким образом, траектория движения в общем случае для вращающихся тел не будет плоской. Величина отклонения от плоскости ньютоновой орбиты x^1Ox^2 $(x^3=0)$ определяется релятивистской поправкой $\tilde{x}^3$, которая с учетом только вековых членов определяется выражением

$$\tilde{x}^3 = \left[\frac{\gamma}{2c^2M^*}(a_1\sin\varphi - a_2\cos\varphi) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2c^2p}(b_1\sin\varphi - b_2\cos\varphi)\right]\varphi\frac{r}{p}, \tag{23.19}$$

где

$$a_n \equiv (4m_a+3m_b)\sigma^n_a + (3m_a+4m_b)\sigma^n_b,$$

$$b_n \equiv \frac{3}{4}(\sigma^3_a\sigma^n_a + \sigma^3_b\sigma^n_b) + \sigma^3_a\sigma^n_b + \sigma^3_b\sigma^n_a, \quad n=1,\ 2. \tag{23.20}$$

Выражение для $\tilde{x}^3$ легче всего находится из комбинации первых двух равенств (23.5):

$$(\dot{x}^1x^2 - x^1\dot{x}^2)\tilde{x}^3 = -M^*_3\tilde{x}^3 = x^1\int x^2f^3dt - x^2\int x^1f^3dt. \tag{23.21}$$

Пользуясь (23.19), нетрудно сделать в конкретных случаях численную оценку величины $\tilde{x}^3$. Для обычных астрономических приложений $\max|\tilde{x}^3|$ порядка нескольких метров, а в исключительных случаях (пульсар — его близкий спутник) $\max|\tilde{x}^3|$ может достигать нескольких километров за один ньютонов оборот (φ изменяется на 2π).

Как видно из (23.16), движение будет плоским только при условии коллинеарности векторов $\vec{S}^*$ и $\vec{M}^*$, что будет, например, при коллинеарности векторов $\vec{\sigma}_a$, $\vec{\sigma}_b$, $\vec{M}^*$.

Поправочные члены в (23.11), (23.17) разной структуры: первые являются линейными, а вторые — билинейными по σ. Отношение вторых к первым порядка σ/M^*. Эта дробь обычно мала (см. сноску в § 22), и тогда билинейными членами можно пренебрегать.

Рассмотрим подробнее частный случай движения легкого вращающегося тела b в поле тяжелого вращающегося тела a $(m_a \gg m_b)$.

Тогда, согласно (22.10), $\tilde{\vec{S}}_a^* = \vec{S}_a^* = \overrightarrow{\text{const}}$ $(\tilde{\vec{\sigma}}_a = \vec{\sigma}_a)$, так как следует положить $m_b=0$. С точностью до вековых членов с помощью (23.11) находим скалярное произведение $(\tilde{\vec{\sigma}}_a \tilde{\vec{M}}^*)$:

$$(\tilde{\vec{\sigma}}_a \tilde{\vec{M}}^*) = (\vec{\sigma}_a \vec{M}^*) + \frac{3\gamma m_a}{2c^2 p}(\vec{n}\,\vec{\sigma}_a\,\vec{\sigma}_b)\varphi -$$
$$-\frac{3\gamma m_a}{8c^2 p M^*}(\vec{n},\ 4\vec{\sigma}_a + 3\vec{\sigma}_b)(\vec{n}\,\vec{\sigma}_a\,\vec{\sigma}_b)\varphi. \tag{23.22}$$

Угол между $\vec{\sigma}_a$ и $\vec{M}^*$ в астрономии называют углом наклонения (угол между экваториальной плоскостью тяжелого тела a и плоскостью орбиты легкого тела b). Обозначим его буквой i^*. В ньютоновом приближении $(\tilde{\vec{\sigma}}_a \tilde{\vec{M}}^*) = (\vec{\sigma}_a \vec{M}^*) = \text{const}$, т. е. угол i^* не изменяется. Если не учитывать собственного вращения легкого тела $(\vec{\sigma}_b = 0)$, то и в посленьютоновом приближении (в силу неизменности длин векторов $\tilde{\vec{\sigma}}_a$ и $\tilde{\vec{M}}^*$) угол наклонения $\tilde{i}^*$ не меняется, что находится в полном согласии с результатами классической работы Лензе и Тирринга [B.77], в которой впервые изучено влияние собственного вращения центрального тела a на движение невращающейся частицы b (на основе принципа геодезической). Изучение движения искусственных спутников Земли при учете вращения последней проводилось в работах [B.11, B.309, 26] (спутник не вращался). Как следует из (23.22), учет собственного вращения легкого тела b $(\vec{\sigma}_b \neq 0)$ приводит к вековому изменению угла $\tilde{i}^*$. Впервые на существование этого векового эффекта было указано в [B.196], а затем в [B.124, B.198, B.200].

Нетрудно получить оценку этого векового эффекта. Имеем:

$$\cos i^* = \frac{(\vec{\sigma}_a \vec{M}^*)}{|\vec{\sigma}_a|\cdot|\vec{M}^*|},\quad \cos \tilde{i}^* = \frac{(\tilde{\vec{\sigma}}_a \tilde{\vec{M}}^*)}{|\tilde{\vec{\sigma}}_a|\cdot|\tilde{\vec{M}}^*|} = \frac{(\tilde{\vec{\sigma}}_a \tilde{\vec{M}}^*)}{|\vec{\sigma}_a|\cdot|\vec{M}^*|}. \tag{23.23}$$

Отсюда

$$\cos \tilde{i}^* - \cos i^* = -\Delta i^* \sin i^* = \frac{(\tilde{\vec{\sigma}}_a \tilde{\vec{M}}^*) - (\vec{\sigma}_a \vec{M}^*)}{|\vec{\sigma}_a|\cdot|\vec{M}^*|},$$
$$\Delta i^* \equiv \tilde{i}^* - i^*. \tag{23.24}$$

И, наконец, с помощью (23.22) из (23.24) находим Δi^*:

$$\Delta i^* = -\frac{3\gamma m_a}{2c^2 p}\left\{1 - \frac{(\vec{n},\ 4\vec{\sigma}_a + 3\vec{\sigma}_b)}{4M^*}\right\}\frac{(\vec{n}\,\vec{\sigma}_a\,\vec{\sigma}_b)}{M^*|\vec{\sigma}_a|\sin i^*}\varphi,\ i^* \neq 0. \tag{23.25}$$

Если $i^*=0$ (или 180°), то формулой (23.25) пользоваться нельзя. В этом случае в посленьютоновом приближении $\bar{i}^*=0$ также, т. е. $\Delta i^*=0$, и нулевой угол наклонения не изменяется. В общем случае направление изменения $\bar{i}^*$ (его увеличение или уменьшение) зависит от взаимной ориентации векторов $\vec{n}$, $\vec{\sigma}_a$, $\vec{\sigma}_b$.

Сделаем некоторые числовые оценки для Δi^*.

1) Система Солнце — Земля. Учитывая, что угол наклонения $i^*=7°15'$ (угол между $\vec{n}$ и $\vec{\sigma}_a$) и $\vec{\sigma}_b$ с $\vec{n}$ образует угол в 23°27′, находим $|\Delta i^*|\approx 7{,}5\cdot 10^{-15}$ рад/год $\approx 1'',5\cdot 10^{-7}$ за 100 лет.

2) Система Земля — ее искусственный спутник. Выбираем $\vec{\sigma}_a=|\vec{\sigma}_a|\,\vec{e}_1$, $\vec{\sigma}_b=|\vec{\sigma}_b|\,\vec{e}_2$, $|\vec{\sigma}_b|=10^6$ см$^2\cdot$с$^{-1}$, $\vec{n}=\vec{e}_3$ (т. е. $i^*=\pi/2$), $p=10^9$ см. Тогда $\Delta i^*\approx -10^{-13}$ рад/год $\approx -2''\cdot 10^{-6}$ за 100 лет.

3) Система нейтронная звезда (пульсар) — ее близкий спутник. Если звезда имеет массу Солнца, а спутник — параметры $p\sim 10^7$—10^9 см, $|\vec{\sigma}_b|\sim 10^9$—$10^{14}$ см$^2\cdot$с$^{-1}$, то $|\Delta i^*|\sim 10°$—$200°$ за 1 год.

Таким образом, релятивистское изменение угла наклонения для систем типа Солнце — планета ничтожно малое. Даже за космологические промежутки времени ($\sim 10^{10}$ лет) изменение составляет несколько дуговых секунд. Это означает, что объяснять почти плоское строение Солнечной системы на основе этого эффекта нельзя. Заметное «уплощение» системы за сравнительно небольшой срок может происходить при малых p, как это видно на примере пульсар — его спутник. Когда $\bar{i}^*$ достигает нуля (или 180°), то вековой эффект для $\bar{i}^*$ в этом положении становится более высокого порядка (c^{-4}), т. е. в посленьютоновом приближении система уже остается плоской. «Уплощение» Солнечной системы могло бы произойти в силу рассматриваемого векового эффекта, если бы в прошлом Солнце было плотной звездой, а планеты находились значительно ближе к нему, чем сейчас.

Само собой разумеется, что рассмотренный вековой эффект имеет место и в случае тел сравнимых масс.

Смещение периастра

Рассмотрим теперь влияние собственного вращения тел на форму траектории их движения.

Вычитая (23.2) из (23.1), получим:

$$\ddot{\bar{x}}^i+\frac{\gamma m}{\bar{r}^3}\,\bar{x}^i=f^i,\quad \bar{x}^i\equiv\bar{a}^i-\bar{b}^i. \qquad (23.26)$$

Умножая (23.26) на $2\dot{\bar{x}}^i$ и суммируя, найдем

$$2\dot{\bar{x}}^s\ddot{\bar{x}}^s+\frac{2\gamma m}{\bar{r}^3}\,\bar{x}^s\dot{\bar{x}}^s=2\dot{\bar{x}}^s f^s. \qquad (23.27)$$

Далее имеем:

$$\tilde{r}^2 \equiv \tilde{x}^s \tilde{x}^s, \quad \frac{d}{dt}(\tilde{r}^2) = 2\tilde{r}\dot{\tilde{r}} = 2\tilde{x}^s \dot{\tilde{x}}^s;$$

$$\tilde{v}^2 \equiv \dot{\tilde{x}}^s \dot{\tilde{x}}^s, \quad \frac{d}{dt}(\tilde{v}^2) = 2\dot{\tilde{x}}^s \ddot{\tilde{x}}^s. \tag{23.28}$$

Поэтому (23.27) можно переписать иначе (справа $\dot{\tilde{x}}^s$ можно заменить на $\dot{x}^s$, так как $f^s \sim c^{-2}$):

$$\frac{d}{dt}(\tilde{v}^2) + \frac{2\gamma m}{\tilde{r}^2}\dot{\tilde{r}} = 2\dot{x}^s f^s,$$

$$\frac{d}{dt}(\tilde{v}^2) - \frac{d}{dt}\left(\frac{2\gamma m}{\tilde{r}}\right) = 2\dot{x}^s f^s.$$

Последнее равенство приводит к обобщению интеграла энергии ньютоновой теории (22.4):

$$\tilde{E}^* \equiv \frac{1}{2}\tilde{v}^2 - \frac{\gamma m}{\tilde{r}} = -\frac{\gamma m}{2a} + \int \dot{x}^s f^s dt. \tag{23.29}$$

Введя в посленьютоновом приближении цилиндрические координаты

$$\tilde{x}^1 = \tilde{r}\cos\tilde{\varphi}, \quad \tilde{x}^2 = \tilde{r}\sin\tilde{\varphi}, \quad \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3, \tag{23.30}$$

можно (23.29) представить в форме (отбрасывая $\dot{\tilde{x}}^3 \dot{\tilde{x}}^3 \sim c^{-4}$)

$$\tilde{E}^* \equiv \frac{1}{2}(\dot{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^2 \dot{\tilde{\varphi}}^2) - \frac{\gamma m}{\tilde{r}} = -\frac{\gamma m}{2a} + E^*_{(g)} + E_{(g\sigma)}, \tag{23.31}$$

где

$$E^*_{(g)} \equiv \int \dot{x}^s \left(\overset{s}{f}_{a(g)} - \overset{s}{f}_{b(g)}\right) dt, \quad E_{(g\sigma)} \equiv \int \dot{x}^s \left(\overset{s}{f}_{a(g\sigma)} - \overset{s}{f}_{b(g\sigma)}\right) dt. \tag{23.32}$$

Подробные громоздкие вычисления этих интегралов с использованием ньютонова приближения (22.1)—(22.6) приводят к выражениям:

$$E^*_{(g)} = \frac{\gamma^2}{2c^2 a r}\Big[6m_a^2 + 5m_a m_b + 6m_b^2 -$$

$$- \frac{5a}{r}(2m_a^2 + 3m_a m_b + 2m_b^2) + \frac{ap}{r^2} m_a m_b\Big]; \tag{23.33}$$

$$E_{(g\sigma)} = -\frac{\gamma m}{c^2 r^3}\Big[\frac{3}{4}(\vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_a) + 2(\vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b) + \frac{3}{4}(\vec{\sigma}_b \vec{\sigma}_b) +$$

$$+ \frac{3}{4}\sigma_a^3 \sigma_a^3 + 2\sigma_a^3 \sigma_b^3 + \frac{3}{4}\sigma_b^3 \sigma_b^3\Big] +$$

$$+\frac{15\gamma m e}{2c^2p^3}\left(\frac{3}{4}\sigma^3_a\sigma^3_a+2\sigma^3_a\sigma^3_b+\frac{3}{4}\sigma^3_b\sigma^3_b\right)\times$$

$$\times\left(\cos\varphi+e\cos^2\varphi+\frac{1}{3}e^2\cos^3\varphi\right)+$$

$$+\frac{3\gamma m}{2c^2p^3}\left\{\left(\frac{3}{4}\sigma^2_a\sigma^2_a+2\sigma^2_a\sigma^2_b+\frac{3}{4}\sigma^2_b\sigma^2_b\right)\times\right.$$

$$\times\left(\cos^2\varphi+\frac{11}{3}e\cos^3\varphi+3e^2\cos^4\varphi+e^3\cos^5\varphi\right)+$$

$$+\left(\frac{3}{4}\sigma^1_a\sigma^1_a+2\sigma^1_a\sigma^1_b+\frac{3}{4}\sigma^1_b\sigma^1_b\right)\left[3e\cos\varphi+\right.$$

$$+(3e^2-1)\cos^2\varphi+(e^3-3e)\cos^3\varphi-3e^2\cos^4\varphi-$$

$$\left.-e^3\cos^5\varphi\right]+\left(\frac{3}{4}\sigma^1_a\sigma^2_a+\sigma^1_a\sigma^2_b+\sigma^2_a\sigma^1_b+\frac{3}{4}\sigma^1_b\sigma^2_b\right)\times$$

$$\times\left[\left(e^3-\frac{3}{2}e\right)\sin\varphi-\left(\frac{3}{2}e^2+1\right)\sin 2\varphi-\right.$$

$$\left.\left.-\left(e^3+\frac{3}{2}e\right)\sin 3\varphi-\frac{3}{4}e^2\sin 4\varphi-e^3\sin^5\varphi\right]\right\}+$$

$$+\frac{\gamma}{c^2r}(C_a+C_b)+\tilde{h},\tag{23.34}$$

где $\tilde{h}$ — постоянная интегрирования. Определенная в ньютоновом смысле удельная энергия $\tilde{E}^*\neq\mathrm{const}$, однако вековых возмущений она не испытывает. Как и интеграл энергии $\tilde{E}$ (16.2), $\tilde{E}^*$ содержит только квадратичные по σ члены.

Для вывода дифференциального уравнения траектории в посленьютоновом приближении потребуется знание точного значения третьей координаты $\tilde{M}_3^*$ вектора $\vec{\tilde{M}}^*$, которую в (23.10) мы подсчитали только с точностью до вековых членов; $\tilde{M}_1^*$, $\tilde{M}_2^*$ нам не понадобятся. Из (23.5) и (23.30) имеем

$$\tilde{M}_3^*=\tilde{r}^2\dot{\tilde{\varphi}}=M_3^*+\int(x^1f^2-x^2f^1)\,dt=M_3^*+M_{3(g)}+M_{3(g\sigma)},\tag{23.35}$$

где

$$M_{3(g)}\equiv\int\left[x^1\left(\overset{2}{f}_{a(g)}-\overset{2}{f}_{b(g)}\right)-x^2\left(\overset{1}{f}_{a(g)}-\overset{1}{f}_{b(g)}\right)\right]dt,$$

$$M_{3(g\sigma)}\equiv\int\left[x^1\left(\overset{2}{f}_{a(g\sigma)}-\overset{2}{f}_{b(g\sigma)}\right)-x^2\left(\overset{1}{f}_{a(g\sigma)}-\overset{1}{f}_{b(g\sigma)}\right)\right]dt.$$

Довольно длинные и утомительные вычисления приводят к следующим значениям $M_{3(g)}$, $M_{3(g\sigma)}$:

$$M_{3(g)} = -\frac{2\gamma}{c^2 m r}\left(2m_a^2 + 3m_a m_b + 2m_b^2\right) M_3^* ; \qquad (23.36)$$

$$M_{3(g\sigma)} = \frac{\gamma}{2c^2 r}\left[(4m_a + 3m_b)\sigma_a^3 + (3m_a + 4m_b)\sigma_b^3\right] -$$

$$- \frac{3\gamma m}{2c^2 p M^*}\left\{\left[\frac{3}{4}\left(\sigma_a^1\sigma_a^2 + \sigma_b^1\sigma_b^2\right) + \sigma_a^1\sigma_b^2 + \sigma_a^2\sigma_b^1\right]\times\right.$$

$$\times\left(e\sin\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{3}e\sin 3\varphi\right) +$$

$$+\left[\frac{3}{4}\left(\sigma_a^1\sigma_a^1 + \sigma_b^1\sigma_b^1\right) + 2\sigma_a^1\sigma_b^1 - \frac{3}{4}\left(\sigma_a^2\sigma_a^2 + \sigma_b^2\sigma_b^2\right) -\right.$$

$$\left.\left. - 2\sigma_a^2\sigma_b^2\right]\left(\cos^2\varphi + \frac{2}{3}e\cos^3\varphi\right)\right\} + \tilde{C}, \qquad (23.37)$$

где $\tilde{C}$ — постоянная интегрирования. Исключаем время t из левых частей (23.31) и (23.35). Исключение проводится по хорошо известной из астрономии схеме, которая применима и в ОТО (см. [B.92, B.196, B.198]).

Вводим функции $\tilde{u} \equiv \frac{1}{\tilde{r}}$, $u \equiv \frac{1}{r}$. Из (23.35) находим $\dot{\tilde{\varphi}}$:

$$\dot{\tilde{\varphi}} = M_3^* \tilde{u}^2 - \frac{2\gamma\sqrt{\gamma m p}}{c^2 m}\left(2m_a^2 + 3m_a m_b + 2m_b^2\right)u^3 + M_{3(g\sigma)}u^2. \qquad (23.38)$$

Во втором и третьем членах $\tilde{u}$ заменено на u, так как коэффициенты уже $\sim c^{-2}$. Далее находим $\dot{\tilde{r}}$:

$$\dot{\tilde{r}} = \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{\varphi}}\dot{\tilde{\varphi}} = M_3^* \tilde{u}^2 \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{\varphi}} - \frac{2\gamma\sqrt{\gamma m p}}{c^2 m}\left(2m_a^2 + 3m_a m_b + 2m_b^2\right)u^3 \frac{dr}{d\varphi} +$$

$$+ M_{3(g\sigma)}u^2 \frac{dr}{d\varphi}. \qquad (23.39)$$

Теперь в (23.31) в левую часть подставляем вместо $\dot{\tilde{r}}$ и $\dot{\tilde{\varphi}}$ их выражения из (23.38) и (23.39), а $E^*_{(g)}$ заменяем его выражением (23.33). В итоге довольно простых преобразований приходим к дифференциальному уравнению, которое определяет орбиту в постньютоновом приближении:

$$\left(\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{\varphi}}\right)^2 + \tilde{u}^2 - \frac{2}{p}\tilde{u} + \frac{1}{ap} = -\frac{\gamma u}{c^2 m a p}\left(2m_a^2 + 7m_a m_b + 2m_b^2\right) +$$

$$+\frac{3\gamma u^2}{c^2mp}(2m_a^2+3m_am_b+2m_b^2)+\frac{\gamma u^3}{c^2}\frac{m_am_b}{m}+$$
$$+\frac{2E_{(g\sigma)}}{\gamma mp}+\frac{2M_{3(g\sigma)}}{pM^*}\left(\frac{1}{a}-2u\right), \qquad (23.40)$$

где $E_{(g\sigma)}$ и $M_{3(g\sigma)}$ определяются выражениями (23.34) и (23.37). Обычно от этого уравнения путем почленного дифференцирования по $\tilde{\varphi}$ переходят к дифференциальному линейному неоднородному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами, которое и решается (см., например, [В.5, В.11, В.92, I. 4]). В нашем случае такой метод решения наталкивается на большие математические трудности, так как неоднородная правая часть получается сложной функцией от φ. Поэтому мы несколько изменим этот традиционный путь решения. Будем непосредственно решать уравнение (23.40) методом последовательных приближений, т. е. будем искать решение в виде $\tilde{u}=u+u_1+\ldots$, где u соответствует решению ньютоновой теории тяготения, u_1 дает релятивистскую поправку к нему.

В ньютоновом приближении правая часть (23.40) должна быть заменена нулем. Тогда полученное уравнение имеет известное решение (22.2):

$$u=\frac{1}{p}(1+e\cos\varphi).$$

Подставляя теперь в (23.40) $\tilde{u}=u+u_1$ и найденное u, приходим к дифференциальному уравнению для определения поправки u_1:

$$\frac{du_1}{d\varphi}-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}u_1=\frac{\gamma(2m_a^2+7m_am_b+2m_b^2)}{2c^2mape}\frac{1+e\cos\varphi}{\sin\varphi}-$$
$$-\frac{\gamma m_am_b}{2c^2mp^2e}\frac{(1+e\cos\varphi)^3}{\sin\varphi}-\frac{3\gamma(2m_a^2+3m_am_b+2m_b^2)}{2c^2mp^2e}\times$$
$$\times\frac{(1+e\cos\varphi)^2}{\sin\varphi}+\frac{2M_{3(g\sigma)}}{peM^*}\frac{1+e\cos\varphi}{\sin\varphi}-$$
$$-\frac{E_{(g\sigma)}}{\gamma me\sin\varphi}-\frac{M_{3(g\sigma)}}{aeM^*\sin\varphi}. \qquad (23.41)$$

Решая это уравнение, будем учитывать только вековые члены. С такой степенью точности находим *)

---

*) При интегрировании (23.41) наряду с другими членами будут появляться члены вида $\sin\varphi\ln|\sin\varphi|$ и $\sin\varphi\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|$. Несмотря на то что $\ln|\sin\varphi|$ и $\ln|\operatorname{tg}(\varphi/2)|$ обращаются в бесконечность при $\varphi=\pi n$ ($n=0, \pm1, \pm2, \ldots$), указанные члены при этих же значениях φ обращаются в нуль и ограничены при любых других φ. Поэтому интегрирование проходит без осложнений.

$$u_1=\frac{\alpha e}{p}\varphi\sin\varphi,\quad \alpha=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2, \tag{23.42}$$

где

$$\alpha_0\equiv\frac{3\gamma m}{c^2p};\quad \alpha_1\equiv-\frac{\gamma}{c^2pM^*}\left[(4m_a+3m_b)\sigma^3_a+(3m_a+4m_b)\sigma^3_b\right];$$

$$\alpha_2\equiv\frac{3}{c^2p^2}\left(\frac{3}{8}\sigma^3_a\sigma^3_a+\sigma^3_a\sigma^3_b+\frac{3}{8}\sigma^3_b\sigma^3_b\right)-$$

$$-\frac{3}{2c^2p^2}\left(\frac{3}{8}\sigma^2_a\sigma^2_a+\sigma^2_a\sigma^2_b+\frac{3}{8}\sigma^2_b\sigma^2_b+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\sigma^1_a\sigma^1_a+\sigma^1_a\sigma^1_b+\frac{3}{8}\sigma^1_b\sigma^1_b\right). \tag{23.43}$$

Следовательно, в постньютоновом приближении с учетом только вековых членов имеем

$$\tilde{u}=u+u_1=\frac{1}{p}(1+e\cos\varphi)+\frac{\alpha e}{p}\varphi\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{p}\{1+e\cos[(1-\alpha)\tilde{\varphi}]\}. \tag{23.44}$$

Орбиту (23.44) можно интерпретировать как вращающийся эллипс ($0<e<1$), у которого ни большая полуось a, ни эксцентриситет e не испытывают вековых изменений (ср. [B.124]). Вместе с (23.19) и (23.25) уравнение (23.44) определяет пространственную относительную траекторию (плоскость вращающегося эллипса прецессирует с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ и одновременно изменяется угол наклонения $\tilde{i}^*$). За один ньютонов период T (время изменения φ на 2π) эллипс поворачивается на угол

$$\Delta\varphi=2\pi\alpha=2\pi(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2). \tag{23.45}$$

Величина α_0 описывает смещение периастра (вращение линии апсид), не зависящее от собственного вращения тел. Она впервые получена в работе [B.92]. В случае движения Меркурия α_0 приводит к знаменитому смещению перигелия примерно на 43″ за 100 лет, что было еще известно Эйнштейну [B.76]. Обязанное α_0 смещение всегда прямое, т. е. происходит в сторону движения тела по орбите (α_0 и $\Delta\varphi$ положительные). Собственное вращение тел влияет на смещение периастра через величины α_1 и α_2. Направление этого дополнительного смещения будет зависеть от величины и ориентации $\vec{\sigma}_a$ и $\vec{\sigma}_b$. Легко найти, что отношения $\alpha_1/\alpha_0\sim\sigma/M^*$, $\alpha_2/\alpha_0\sim(\sigma/M^*)^2$. Для обычных астрономических приложений дробь σ/M^* мала ($\sim10^{-2}$ и меньше, см. сноску в § 22). Например, учет вращения Солнца дает для Меркурия $\sigma_\odot/M^*\approx0{,}3\cdot10^{-3}$. Происходящее от α_1 дополнительное смещение перигелия Меркурия будет приблизительно равно —0,01″ за 100 лет, т. е. чрезвычайно мало. В исключительных случаях (пульсар — его близкий спутник) $\sigma/M^* \sim 0{,}1-1$, и тогда α_2 (билинейные по σ члены) становится не менее важным, чем α_0 и α_1. В этих случаях собственное вращение тел может сильно изменить скорость релятивистского вращения эллиптической орбиты. Возможны случаи, когда сумма $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$ будет положительной и в несколько раз большей α_0, будет нулем или отрицательной величиной. Это означает, что вращение эллипса может быть прямым, эллипс может не вращаться или вращаться в обратном направлении.

Числовые оценки во всех этих случаях легко получить из (23.43). Подробнее об этом см. в гл. VI.

Рассмотренные вековые эффекты можно интерпретировать как результаты измерений, получаемые далеким неподвижным наблюдателем. Локальный наблюдатель, проводя измерения, должен учитывать искривленность пространства-времени. Но так как для любого локального наблюдателя метрика пространства-времени не содержит вековых членов (ньютоново движение финитное), то с точностью до вековых членов для него результаты измерений будут такими же, как для далекого наблюдателя. Учет в формулах и не вековых членов дал бы разные результаты для локального и далекого наблюдателей. Оценкой разницы этих результатов не стоит заниматься в силу чрезвычайной ее малости.

Движение центра тяжести системы

Рассмотрим движение центра тяжести системы двух тел, определенного по формуле, аналогичной формуле ньютоновой теории тяготения:

$$\tilde{c}^i \equiv \frac{\tilde{m}_a \tilde{a}^i + \tilde{m}_b \tilde{b}^i}{\tilde{m}}. \tag{23.46}$$

Выражение для $\tilde{c}^i$ можно преобразовать, пользуясь ньютоновым приближением (22.1)—(22.6) и выражениями для релятивистских масс $\tilde{m}_a$ и $\tilde{m}_b$:

$$\tilde{m}_a \equiv m_a + \frac{m_a \dot{a}^s \dot{a}^s}{2c^2} + \frac{\gamma m_a m_b}{c^2 r} + \frac{C_a}{c^2};$$

$$\tilde{m}_b \equiv m_b + \frac{m_b \dot{b}^s \dot{b}^s}{2c^2} + \frac{\gamma m_a m_b}{c^2 r} + \frac{C_b}{c^2}. \tag{23.47}$$

Тогда находим

$$\tilde{c}^i = \frac{m_a \tilde{a}^i + m_b \tilde{b}^i}{m} + \frac{\gamma m_a m_b (m_a - m_b)}{2c^2 m^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{4}{r}\right) x^i + \frac{C_a m_b - C_b m_a}{c^2 m} x^i. \tag{23.48}$$

Дифференцируем дважды по t последнее соотношение:

$$\ddot{c}^i = \frac{m_a\ddot{a}^i + m_b\ddot{b}^i}{m} + \frac{\gamma m_a m_b (m_a - m_b)}{2c^2 a m^2}\ddot{x}^i -$$

$$- \frac{2\gamma m_a m_b (m_a - m_b)}{c^2 m^2} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x^i}{r}\right) + \frac{C_a m_b - C_b m_a}{c^2 m}\ddot{x}^i. \quad (23.49)$$

Воспользовавшись релятивистскими уравнениями движения (23.1) и (23.2), переписываем (23.49) в виде

$$\ddot{c}^i = \frac{1}{m}\left(F^i_{a(g)} + F^i_{b(g)} + F^i_{a(g\sigma)} + F^i_{b(g\sigma)}\right) +$$

$$+ \frac{\gamma}{c^2}\left[m_a C_b - m_b C_a + \frac{\gamma m_a m_b}{2am}(m_b - m_a)\right]\frac{x^i}{r^3} +$$

$$+ \frac{2\gamma m_a m_b (m_b - m_a)}{c^2 m^2}\left(\frac{\ddot{x}^i}{r} - \frac{\ddot{r}}{r^2}x^i - 2\frac{\dot{r}}{r^2}\dot{x}^i + 2\frac{\dot{r}^2}{r^3}x^i\right). \quad (23.50)$$

Преобразовав правую часть (23.50) с помощью ньютонова приближения и перейдя к средним значениям $\ddot{c}^i_T$ за один ньютонов период T, после достаточно простых вычислений окончательно получаем

$$\ddot{c}^i_T \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{c}^i dt = \frac{1}{2\pi a\sqrt{ap}}\int_0^{2\pi} \ddot{c}^i r^2 d\varphi = 0. \quad (23.51)$$

Таким образом, среднее значение ускорения центра тяжести системы, определенного в ньютоновом смысле (23.46), равно нулю. Само ускорение $\ddot{c}^i \neq 0$ и является периодической функцией φ.

В § 17 доказано, что можно ввести понятие центра тяжести для системы вращающихся тел, для которого с точки зрения далекого неподвижного наблюдателя ускорение точно равно нулю (без всякого усреднения). Любой другой наблюдатель, делая измерения по собственному времени τ, получит ускорение отличным от нуля (см. формулу (17.8)). Сейчас мы дополняем этот результат замечанием, что в силу периодичности функции $1/r_a$ (считаем $0<e<1$) усредненное по ньютонову периоду T ускорение будет равно нулю:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d^2X^i}{d\tau^2}d\tau = \frac{P^i_0}{T}\sum_a \frac{\gamma m_a}{c^2}\int_0^T \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{r_a}\right)d\tau =$$

$$= \frac{P^i_0}{T}\sum_a \frac{\gamma m_a}{c^2}\left[\frac{1}{r_a(T)} - \frac{1}{r_a(0)}\right] = 0.$$

§ 24. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ НАМАГНИЧЕННЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ В СТО

Общие замечания

Уравнения движения в СТО можно получить из уравнений движения в ОТО (13.4) и (13.11), если в последних пренебречь гравитационными силами взаимодействия. Математически это пренебрежение осуществляется очень просто: нужно положить ньютонову постоянную тяготения γ равной нулю. Тогда получим:

$$m_a \ddot{\tilde{a}}^i + \sum_{b \neq a} \left(\frac{e_a e_b}{\tilde{r}_{ab}} \right)_{, \tilde{a}^i} = F^i_{a(e)} + F^i_{a(es)}; \qquad (24.1)$$

$$\dot{S}^{ik}_a = N^{ik}_{a(es)}, \qquad (24.2)$$

где величины $F^i_{a(e)}$, $F^i_{a(es)}$, $N^{ik}_{a(es)}$ в точности совпадают со своими прежними значениями (13.5), (13.7), (13.13).

Для справки заметим, что подобный обходной путь получения уравнений движения в линейных теориях поля, в частности, в электродинамике Максвелла обоснован Инфельдом в работе [I. 6]. Этот путь, как уже можно догадаться, состоит в следующем. Совершается переход к криволинейной системе координат и тем самым вводится искусственное поле гравитации. Исходные уравнения записываются в этой системе координат, становясь уже нелинейными, и рассматриваются совместно с уравнениями Эйнштейна (3.1), в которых $T^{\alpha\beta}$ является тензором энергии-импульса исходного поля (например, электромагнитного). Из полученной системы уравнений известным путем (см. § 11) выводятся уравнения движения. В конце вычислений избавляются от гравитационного поля, полагая $\gamma = 0$.

Интегрирование уравнений движения в ньютоновом приближении

В ньютоновом приближении правую часть (24.1) заменяем нулем и в случае двух тел интегрирование полученных уравнений движения проводим обычным путем. Имеем

$$m_a \ddot{a}^i + \left(\frac{e_a e_b}{r} \right)_{, a^i} = 0, \quad m_b \ddot{b}^i + \left(\frac{e_a e_b}{r} \right)_{, b^i} = 0. \qquad (24.3)$$

Отсюда

$$\ddot{x}^i + \frac{\alpha^*}{r^3} x^i = 0; \quad x^i \equiv a^i - b^i, \quad \alpha^* \equiv -\frac{e_a e_b}{m_a m_b} m. \qquad (24.4)$$

Вводя в плоскости движения полярные координаты (22.1), получаем законы сохранения:

$$\vec{M}^0 \equiv [\vec{r}\ \dot{\vec{r}}] = \{M^0_i\}, \quad M^0_1 = M^0_2 = 0, \quad M^0_3 \equiv r^2 \dot{\varphi} = c^0_3; \qquad (24.5)$$

$$v^2 \equiv \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{2\alpha^*}{r} + h^0, \qquad (24.6)$$

где c_3^0, h^0 — постоянные. С помощью (24.5), (24.6) находим дифференциальное уравнение орбиты:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha^*}{c_3^{02}}, \quad u \equiv \frac{1}{r}. \qquad (24.7)$$

Общее решение этого уравнения определяется формулой

$$u = \frac{\alpha^*}{c_3^{02}} + \beta^* \cos(\varphi - \varphi_0), \qquad (24.8)$$

где β^* и φ_0 — постоянные интегрирования. Изменение значения постоянной φ_0 приводит к повороту орбиты на некоторый угол, не меняя ее размеров. Поэтому можно положить $\varphi_0 = 0$. Следует различать два случая: $\alpha^* > 0$ (притяжение) и $\alpha^* < 0$ (отталкивание). В первом случае имеем

$$u = \frac{1 + e\cos\varphi}{p}, \quad \frac{c_3^{02}}{\alpha^*} = p, \quad \frac{c_3^{02}\beta^*}{\alpha^*} = e. \qquad (24.9)$$

Постоянную β^* можно всегда в этом случае считать неотрицательной (если $\beta^* < 0$, то замена φ на $\pi - \varphi$ приведет к $-\beta^* \cos\varphi$, т. е. коэффициент перед $\cos\varphi$ будет положительным). Во втором случае уравнение орбиты приводится к виду:

$$u = \frac{-1 + e\cos\varphi}{p}, \quad \frac{c_3^{02}}{\alpha^*} = -p, \quad \frac{c_3^{02}\beta^*}{\alpha^*} = e, \qquad (24.10)$$

где теперь выбираем $\beta^* < 0$.

Таким образом, в первом и втором случаях относительная орбита является коническим сечением. Их отличие состоит в том, что в (24.9) орбита охватывает центр тяжести системы и ее эксцентриситет может быть любым неотрицательным числом ($0 \leqslant e < \infty$), а в (24.10) $e \geqslant 1$, т. е. движение может происходить только по гиперболам или параболам, не охватывающим центра тяжести (поле отталкивания). Так как всегда $c_3^{02} = \pm\alpha^* p$, то

$$c_3^0 = \sqrt{\mp \frac{e_a e_b}{m_a m_b} m p}. \qquad (24.11)$$

Известно (см., например, [B.220, гл. 3, § 4; I.10, § 15]), что так как $p = \pm a(1 - e^2)$, то

$$h^0 = (e^2 - 1)\frac{\alpha^{*2}}{c_3^{02}} = -\frac{\alpha^*}{a}. \qquad (24.12)$$

Также выполняются соотношения (22.6).

Уравнения (24.2) в ньютоновом приближении дают

$$\vec{s}_a=\overrightarrow{\text{const}},\ \vec{s}_b=\text{const}. \tag{24.13}$$

Некоторое обсуждение результата (24.13) имеется в § 14. Подробное его обсуждение с числовыми оценками дано в гл. VI.

Интегрирование уравнений (24.1) и (24.2) в ньютоновом приближении закончено.

Интегрирование уравнений (24.2) в случае двух тел

Пользуясь (19.4), записываем (24.2) в виде (напоминаем, что $\vec{r}_{ab}\equiv\vec{b}-\vec{a},\ \vec{r}\equiv\vec{a}-\vec{b},\ s^{ik}=[\vec{s}\,\vec{e}_i]^k,\ \dot{\vec{b}}=-\frac{m_a}{m}\dot{\vec{r}}$)

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\vec{S}}{}^0_a)=\frac{m_a e_a e_b}{2c^2 m r^3}[\vec{s}_a\vec{M}^0]+\frac{e_a e_b}{4c^2}\left\{s^2_a\left[s^{2k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^1}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-s^{1k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^2}\right]+s^3_a\left[s^{3k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^1}-s^{1k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^3}\right]\right\}\vec{e}_1+$$
$$+\frac{e_a e_b}{4c^2}\left\{s^3_a\left[s^{3k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^2}-s^{2k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^3}\right]+s^1_a\left[s^{1k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-s^{2k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^1}\right]\right\}\vec{e}_2+\frac{e_a e_b}{4c^2}\left\{s^1_a\left[s^{1k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^3}-s^{3k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^1}\right]+\right.$$
$$\left.+s^2_a\left[s^{2k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^3}-s^{3k}_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^kx^2}\right]\right\}\vec{e}_3. \tag{24.14}$$

Если перейти от t к переменной φ по формуле $\frac{d}{dt}(\tilde{\vec{S}}{}^0_a)=\dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi}(\tilde{\vec{S}}{}^0_a)$ и всюду заменить r^{-1} на $p^{-1}(\pm1+e\cos\varphi)$, то получим легко интегрируемое уравнение. Производя интегрирование и оставляя только вековые поправочные члены, получаем

$$\tilde{\vec{S}}{}^0_a=\vec{S}_a+\left\{\mp\frac{m_a e_a e_b}{2c^2 m p}[\vec{n}\,\vec{s}_a]\pm\frac{e_a e_b}{8c^2 c^0_3 p}[\vec{s}_a\vec{s}_b]\pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{3e_a e_b}{8c^2 c^0_3 p}(\vec{n}\,\vec{s}_b)[\vec{n}\,\vec{s}_a]\right\}\varphi. \tag{24.15}$$

Двойные знаки соответствуют двойному знаку α^*. При $\alpha^*>0$ ($e_a e_b<0$) в (24.15) берутся верхние знаки; при $\alpha^*<0$ ($e_a e_b>0$) — нижние. Формулу (24.15) (аналогично формуле (22.10)) можно записать в виде

$$\tilde{\vec{S}}{}^0_a=\vec{S}_a+[\vec{N}{}^0_a\vec{S}_a]\varphi, \tag{24.16}$$

где

$$\vec{N}_a^0 \equiv \mp \frac{e_a e_b}{2c^2 m p} \vec{n} \pm \frac{e_a e_b}{8c^2 m_a c_3^0 p} \{3(\vec{n}\vec{s}_b)\vec{n} - \vec{s}_b\}. \qquad (24.17)$$

Так как $|\tilde{\vec{S}}_a^0| = \text{const}$, то сам вектор $\tilde{\vec{S}}_a^0$ прецессирует вокруг постоянного вектора $\vec{N}_a^0$ с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}_a^0 = \vec{N}_a^0 \dot{\varphi} = r^{-2} c_3^0 \vec{N}_a^0. \qquad (24.18)$$

Прецессия отсутствует только в случае коллинеарности векторов $\vec{N}_a^0$ и $\vec{S}_a$. Пользуясь полученными формулами, легко оценить величину периода прецессии в различных конкретных случаях (см. гл. VI).

Аналогичные формулы имеют место для тела b.

Если тела a и b не обладают магнитными моментами ($\vec{\mu}_a = \vec{\mu}_b = 0$), то (24.16) описывает прецессию собственного углового момента импульса тела a в электромагнитном поле тел a и b. Если, наоборот, тела a и b не обладают собственными вращениями, но обладают магнитными полями дипольного типа, то (24.16)—(24.18) определяют закономерности прецессии магнитного момента $\tilde{\vec{\mu}}_a$ тела a.

§ 25. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ НАМАГНИЧЕННЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ В СТО

Орбитальный момент импульса в СТО

Сейчас займемся интегрированием уравнений поступательного движения (24.1). В случае двух тел имеем систему уравнений:

$$m_a \ddot{\tilde{a}}^i + \left(\frac{e_a e_b}{\tilde{r}}\right)_{,\tilde{a}^i} = F^i_{a(e)} + F^i_{a(es)}; \qquad (25.1)$$

$$m_b \ddot{\tilde{b}}^i + \left(\frac{e_a e_b}{\tilde{r}}\right)_{,\tilde{b}^i} = F^i_{b(e)} + F^i_{b(es)}, \qquad (25.2)$$

где $F^i_{b(e)}$ и $F^i_{b(es)}$ получаются из $F^i_{a(e)}$ и $F^i_{a(es)}$ путем замены значков $a \rightleftarrows b$. Запишем их подробнее:

$$F^i_{a(e)} \equiv \frac{e_a e_b}{c^2} \left[\left(\frac{1}{2} \dot{a}^s \dot{a}^s + \dot{a}^s \dot{b}^s - \frac{e_a e_b}{m_a r} \right) \left(\frac{1}{r} \right)_{,a^i} + \right.$$

$$\left. + (\dot{a}^i \dot{a}^s - \dot{a}^s \dot{b}^i + \dot{b}^s \dot{b}^i) \left(\frac{1}{r} \right)_{,a^s} - \frac{1}{2} r_{,a^s a^k a^i} \dot{b}^s \dot{b}^k \right]; \qquad (25.3)$$

$$F^i_{a(es)} \equiv \frac{e_a e_b}{2c^2}\left\{ (\dot a^s - \dot b^s)\left[\vec s_b \vec\nabla_a\left(\frac{1}{r}\right)_{,a^s}\right]^i + \dot b^s\left[\vec s_a \vec\nabla_a\left(\frac{1}{r}\right)_{,a^i}\right]^s - \right.$$

$$\left. - \dot a^s\left[\vec s_b \vec\nabla_a\left(\frac{1}{r}\right)_{,a^i}\right]^s - \frac{1}{2}[\vec s_a \vec\nabla_a]^s\left[\vec s_b \vec\nabla_a\left(\frac{1}{r}\right)_{,a^i}\right]^s\right\}; \quad (25.4)$$

$$F^i_{b(e)} \equiv \frac{e_a e_b}{c^2}\left[\left(\frac{1}{2}\dot b^s \dot b^s + \dot a^s \dot b^s - \frac{e_a e_b}{m_b r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)_{,b^i} + \right.$$

$$\left. + (\dot b^i \dot b^s - \dot b^s \dot a^i + \dot a^s \dot a^i)\left(\frac{1}{r}\right)_{,b^s} - \frac{1}{2} r_{,b^s b^k b^i} \dot a^s \dot a^k\right]; \quad (25.5)$$

$$F^i_{b(es)} \equiv \frac{e_a e_b}{2c^2}\left\{ (\dot b^s - \dot a^s)\left[\vec s_a \vec\nabla_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,b^s}\right]^i + \dot a^s\left[\vec s_b \vec\nabla_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,b^i}\right]^s - \right.$$

$$\left. - \dot b^s\left[\vec s_a \vec\nabla_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,b^i}\right]^s - \frac{1}{2}[\vec s_b \vec\nabla_b]^s\left[\vec s_a \vec\nabla_b\left(\frac{1}{r}\right)_{,b^i}\right]^s\right\}. \quad (25.6)$$

Обозначая, как и раньше, $\tilde x^i \equiv \tilde a^i - \tilde b^i$, $\tilde{\vec r} \equiv \tilde{\vec a} - \tilde{\vec b}$, $\tilde{\vec M} \equiv [\tilde{\vec r}\,\dot{\tilde{\vec r}}]$, находим, вычитая (25.2) из (25.1), предварительно сокращенные на массы m_a и m_b:

$$\ddot{\tilde x}^i + \alpha^* \frac{\tilde x^i}{\tilde r^3} = \frac{F^i_{a(e)}}{m_a} - \frac{F^i_{b(e)}}{m_b} + \frac{F^i_{a(es)}}{m_a} - \frac{F^i_{b(es)}}{m_b} \equiv f^i_*. \quad (25.7)$$

Раскрывая $\dot{\tilde{\vec M}}{}^0 = [\tilde{\vec r}\,\dot{\tilde{\vec r}}]$, аналогично (23.5) получаем:

$$\tilde M^0_1 \equiv x^2 \dot{\tilde x}^3 - \dot x^2 \tilde x^3 = c^0_1 + \int x^2\left(\frac{F^3_{a(e)}}{m_a} - \frac{F^3_{b(e)}}{m_b} + \frac{F^3_{a(es)}}{m_a} - \frac{F^3_{b(es)}}{m_b}\right)dt;$$

$$\tilde M^0_2 \equiv \tilde x^3 \dot x^1 - \dot{\tilde x}^3 x^1 = c^0_2 - \int x^1\left(\frac{F^3_{a(e)}}{m_a} - \frac{F^3_{b(e)}}{m_b} + \frac{F^3_{a(es)}}{m_a} - \frac{F^3_{b(es)}}{m_b}\right)dt;$$

$$\tilde M^0_3 \equiv \tilde x^1 \dot{\tilde x}^2 - \dot{\tilde x}^1 \tilde x^2 = c^0_3 + \int \left[x^1\left(\frac{F^2_{a(e)}}{m_a} - \frac{F^2_{b(e)}}{m_b} + \frac{F^2_{a(es)}}{m_a} - \frac{F^2_{b(es)}}{m_b}\right) - \right.$$

$$\left. - x^2\left(\frac{F^1_{a(e)}}{m_a} - \frac{F^1_{b(e)}}{m_b} + \frac{F^1_{a(es)}}{m_a} - \frac{F^1_{b(es)}}{m_b}\right)\right]dt. \quad (25.8)$$

Используя выражения (25.3)—(25.6) и соотношения ньютонова приближения, последовательно находим:

$$f^3_* \equiv \frac{e_a e_b}{c^2 m_a m_b r^3}\left\{[(S^2_a + S^2_b)\dot x^1 + (S^1_a + S^1_b)\dot x^2] + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}[(S^1_a + S^1_b)x^2 - (S^2_a + S^2_b)x^1]\frac{\dot r}{r} - \frac{3}{4}m(s^{3s}_a s^{ks}_b + s^{ks}_a s^{3s}_b)\frac{x^k}{r^2}\right\}; \quad (25.9)$$

$$x^1 f^2_{\bullet} - x^2 f^1_{\bullet} \equiv \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b r^2} \Big\{ (S_a^3 + S_b^3)\, \dot{r} + \frac{3m}{2r^3} [(s_a^1 s_b^2 + s_a^2 s_b^1)(x^{1^2} -$$

$$- x^{2^2}) + 2(s_a^2 s_b^2 - s_a^1 s_b^1)\, x^1 x^2] \Big\}. \qquad (25.10)$$

Напоминаем, что $S_a^i \equiv m_a s_a^i$. Теперь легко вычислить интегралы в (25.8). С точностью до вековых членов получаем следующие выражения для $\tilde{M}_i^0$ $(c_1^0 = c_2^0 = 0)$:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{M}_1^0 &= \mp \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b p} (S_a^2 + S_b^2)\, \varphi \pm \frac{3e_a e_b m}{8c^2 m_a m_b p c_3^0} (s_a^2 s_b^3 + s_a^3 s_b^2)\, \varphi, \\
\tilde{M}_2^0 &= \pm \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b p} (S_a^1 + S_b^1)\, \varphi \mp \frac{3e_a e_b m}{8c^2 m_a m_b p c_3^0} (s_a^1 s_b^3 + s_a^3 s_b^1)\, \varphi, \\
\tilde{M}_3^0 &= c_3^0.
\end{aligned}\right\} \qquad (25.11)$$

Или в векторной записи

$$\tilde{\vec{M}}^0 = \vec{M}^0 \pm \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b p} [\vec{n}, \vec{S}_a + \vec{S}_b]\, \varphi \mp$$

$$\mp \frac{3e_a e_b m}{8c^2 m_a m_b p c_3^0} \Big\{ (\vec{n}\vec{s}_a)[\vec{n}\vec{s}_b] + (\vec{n}\vec{s}_b)[\vec{n}\vec{s}_a] \Big\}\, \varphi. \qquad (25.12)$$

Как и раньше, верхние знаки соответствуют случаю $\alpha^* > 0$, нижние — случаю $\alpha^* < 0$.

Формулу (25.12) можно записать в виде

$$\tilde{\vec{M}}^0 = \vec{M}^0 + [\vec{S}_0 \vec{M}^0]\, \varphi, \qquad (25.13)$$

где

$$\vec{S}_0 \equiv \mp \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b p c_3^0} (\vec{S}_a + \vec{S}_b) -$$

$$- \frac{3}{8c^2 p^2} [(\vec{n}\vec{s}_a)\vec{s}_b + (\vec{n}\vec{s}_b)\vec{s}_a]. \qquad (25.14)$$

При записи $\vec{S}_0$ мы использовали соотношения (24.11) и $\vec{M}^0 = c_3^0 \vec{n}$. Так как $|\tilde{\vec{M}}^0| = \text{const}$, то из (25.13) следует, что $\tilde{\vec{M}}^0$ прецессирует около постоянного вектора $\vec{S}_0$ с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}_0 = \vec{S}_0 \dot{\varphi} = r^{-2} c_3^0 \vec{S}_0. \qquad (25.15)$$

Следовательно, движение не плоское, плоскость траекторий прецессирует. Отклонение от плоскости $x^3 = 0$ можно характеризовать величиной $\tilde{x}^3$, которую нетрудно найти из (25.8): первое равенство умножаем на x^1, второе — на x^2 и складываем. Тогда находим с точностью до вековых членов, воспользовавшись (25.11):

$$\tilde{x}^3 = c_3^{0-1}\left(x^2\int x^1 f_*^3 dt - x^1\int x^2 f_*^3 dt\right) =$$
$$= \mp\frac{e_a e_b r}{2c^2 m_a m_b p c_3^0}\left[(S_a^1 + S_b^1)\sin\varphi - (S_a^2 + S_b^2)\cos\varphi\right] -$$
$$-\frac{3r}{8c^2p^2}\left[(s_a^1 s_b^3 + s_a^3 s_b^1)\sin\varphi - (s_a^2 s_b^3 + s_a^3 s_b^2)\cos\varphi\right]\}\ \varphi. \quad (25.16)$$

Движение будет плоским только в случае коллинеарности векторов $\vec{S}_0$ и $\vec{M}^0$.

Теперь при желании нетрудно выделить и рассмотреть различные частные случаи: 1) движение легкого тела b в поле тяжелого тела a; 2) движение заряженных вращающихся тел сравнимых масс с нулевыми «врожденными» магнитными моментами; 3) движение тел только с магнитными моментами (заряды и собственные вращения отсутствуют) и др.

Как и в случае вращающихся тел в ОТО (см. § 23), для намагниченных вращающихся тел существует эффект, аналогичный вековому изменению угла наклонения i^*. Умножим (25.12) скалярно на $\tilde{\vec{S}}_a^0$ из (24.15):

$$(\tilde{\vec{S}}_a^0 \tilde{\vec{M}}^0) = (\vec{S}_a \vec{M}^0) \pm \frac{3e_a e_b}{8c^2 p}\left\{-1 + \frac{m}{m_b c_3^0}(\vec{n}\,\vec{s}_a)\right\}(\vec{n}\,\vec{s}_a\,\vec{s}_b)\varphi. \quad (25.17)$$

Угол между векторами $\vec{S}_a$ и $\vec{M}^0$ назовем углом s-наклонения и обозначим его буквой i^0. Угол между $\tilde{\vec{S}}_a^0$ и $\tilde{\vec{M}}^0$ обозначаем через $\tilde{i}^0$. Тогда по аналогии с (23.24), (23.25) находим

$$\Delta i^0 \equiv \tilde{i}^0 - i^0 = \pm\frac{3e_a e_b}{8c^2 m_a p}\left\{1 - \frac{m}{m_b}\frac{(\vec{n}\,\vec{s}_a)}{c_3^0}\right\}\frac{(\vec{n}\,\vec{s}_a\,\vec{s}_b)}{c_3^0\,|\vec{s}_a|\sin i^0}\varphi. \quad (25.18)$$

Как и в случае (23.25), предполагается, что $\sin i^0 \neq 0$. В противном случае вековой эффект становится более высокого порядка ($\sim c^{-4}$).

Смещение периастра в СТО

Как мы сейчас покажем, электромагнитные поля движущихся тел сравнимых масс также приводят к вековому эффекту — смещению периастра относительной орбиты (повороту линии апсид).

Получение уравнения траектории, из которого будет вытекать упомянутое смещение, осуществляется точно так же, как в случае вращающихся тел в ОТО (см. формулы (23.26)—(23.44))

Используя (24.6), (24.12), из (25.7) находим

$$\tilde{E}^0 \equiv \frac{1}{2}\left(\dot{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^2\dot{\tilde{\varphi}}^2\right) - \frac{\alpha^*}{\tilde{r}} = -\frac{\alpha^*}{2a} + \int \dot{x}^s f^s_* dt = $$
$$= -\frac{\alpha^*}{2a} + E^0_{(e)} + E_{(es)}, \qquad (25.19)$$

где введены обозначения

$$E^0_{(e)} \equiv \int \dot{x}^s\left(\frac{F_{a(e)}}{m_a} - \frac{F^s_{b(e)}}{m_b}\right)dt, \quad E_{(es)} \equiv \int \dot{x}^s\left(\frac{F^s_{a(es)}}{m_a} - \frac{F^s_{b(es)}}{m_b}\right)dt. \qquad (25.20)$$

Принимая во внимание выражения (25.3)—(25.6), после достаточно продолжительных вычислений с учетом соотношений ньютонова приближения находим:

$$E^0_{(e)} = \frac{e_a^2 e_b^2}{2c^2 m_a^2 m_b^2}\left[(3m_a^2 - m_a m_b + 3m_b^2)\frac{1}{ar} - \right.$$
$$\left. - (4m_a^2 - m_a m_b + 4m_b^2)\frac{1}{r^2} \pm \frac{m_a m_b p}{r^3}\right]; \qquad (25.21)$$

$$E_{(es)} = \frac{e_a e_b m}{2c^2 m_a m_b r^3}(s_a^1 s_b^1 + s_a^2 s_b^2 + s_a^3 s_b^3) - \frac{3e_a e_b m}{4c^2 m_a m_b p^3}\left\{(s_a^1 s_b^1 + \right.$$
$$+ s_a^3 s_b^3)\,[3e\cos\varphi \pm (3e^2 - 1)\cos^2\varphi + (e^3 - 3e)\cos^3\varphi \mp 3e^2\cos^4\varphi -$$
$$- e^3\cos^5\varphi] + (s_a^2 s_b^2 + s_a^3 s_b^3)(\pm\cos^2\varphi + 3e\cos^3\varphi \pm 3e^2\cos^4\varphi + e^3\cos^5\varphi) -$$
$$- (s_a^1 s_b^2 + s_a^2 s_b^1)\left[(e^3 + 3e)\sin\varphi - (2e^3 + 3e)\sin^3\varphi + e^3\sin^5\varphi \pm \right.$$
$$\left.\left. \pm \frac{1}{4}(3e^2 + 2)\sin 2\varphi \pm \frac{3}{8}e^2\sin 4\varphi\right]\right\} + \tilde{h}^0, \quad \tilde{h}^0 = \mathrm{const}. \qquad (25.22)$$

Теперь вычисляем точное значение $\tilde{M}_3^0 \equiv \tilde{x}^1\dot{\tilde{x}}^2 - \dot{\tilde{x}}^1\tilde{x}^2 = \tilde{r}^2\dot{\tilde{\varphi}}$:

$$\tilde{r}^2\dot{\tilde{\varphi}} = c_3^0 + \frac{e_a e_b (m_a^2 + m_b^2)}{c^2 m_a m_b m r}c_3^0 + \mathring{M}_3^{(es)}; \qquad (25.23)$$

$$\mathring{M}_3^{(es)} \equiv -\frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b}\left(S_a^3 + S_b^3\right)\frac{e}{p}\cos\varphi + \frac{3e_a e_b m}{4c^2 m_a m_b p c_3^0}\left\{(s_a^1 s_b^2 + \right.$$
$$+ s_a^2 s_b^1)\left[\pm\frac{1}{2}\sin 2\varphi + e\left(\sin\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi\right)\right] +$$
$$\left. + (s_a^2 s_b^2 - s_a^1 s_b^1)\left(\pm\sin^2\varphi - \frac{2}{3}e\cos^3\varphi\right)\right\}. \qquad (25.24)$$

Введя обратные величины $\tilde{u} \equiv \tilde{r}^{-1}$, $u \equiv r^{-1}$, из (25.23) находим $\dot{\tilde{\varphi}}$:

$$\dot{\tilde{\varphi}} = c_3^0 \tilde{u}^2 + \frac{e_a e_b (m_a^2 + m_b^2)}{c^2 m_a m_b m} c_3^0 u^3 + \overset{\circ}{M}{}_3^{(es)} u^2. \qquad (25.25)$$

Сейчас легко найти $\dot{\tilde{r}}$:

$$\dot{\tilde{r}} = \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{\varphi}} \dot{\tilde{\varphi}} = -c_3^0 \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{\varphi}} - \frac{e_a e_b (m_a^2 + m_b^2)}{c^2 m_a m_b m} c_3^0 u \frac{du}{d\varphi} - \overset{\circ}{M}{}_3^{(es)} \frac{du}{d\varphi}. \qquad (25.26)$$

Подставляем найденные значения $\dot{\tilde{\varphi}}$ и $\dot{\tilde{r}}$ в (25.19), исключая тем самым время t и переходя к независимой переменной $\tilde{\varphi}$. Несложные стандартные преобразования приводят к уравнению, определяющему относительную орбиту в посленьютоновом приближении:

$$\left(\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{\varphi}}\right)^2 + \tilde{u}^2 \mp \frac{2}{p} \tilde{u} \pm \frac{1}{ap} = \mp \frac{2 e_a e_b (m_a^2 + m_b^2)}{c^2 m_a m_b m p} \left(2u^2 - \frac{u}{a}\right) \mp$$
$$\mp \frac{2 m_a m_b}{e_a e_b m p} (E_{(e)}^0 + E_{(es)}) \mp \frac{4}{p c_3^0} \overset{\circ}{M}{}_3^{(es)} u \pm \frac{2}{a p c_3^0} \overset{\circ}{M}{}_3^{(es)}, \qquad (25.27)$$

где, как и раньше, верхние знаки соответствуют случаю $\alpha^* > 0$, нижние — случаю $\alpha^* < 0$. Это уравнение интегрируем как и (23.40), методом последовательных приближений: $\tilde{u} = u + u_1 + \ldots$. В ньютоновом приближении $\tilde{u} = u$, а u — определяется выражениями (24.9), (24.10). Подставив $\tilde{u} = u + u_1$ в (25.27) с учетом (24.9), (24.10), находим дифференциальное уравнение для поправочной функции u_1:

$$\frac{du_1}{d\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} u_1 = -\frac{pA}{2e \sin\varphi}, \qquad (25.28)$$

где через A обозначена правая часть уравнения (25.27). Уравнение (25.28) линейное и его общее решение определяется формулой

$$u_1 = \sin\varphi \left(-\frac{p}{2e} \int \frac{A}{\sin^2\varphi} d\varphi + C\right). \qquad (25.29)$$

Интересуясь только вековыми членами в решении (25.29), находим с такой точностью

$$u_1 = \frac{\beta e}{p} \varphi \sin\varphi, \qquad (25.30)$$

где

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_0 \equiv \mp \frac{2 e_a e_b}{c^2 m p}, \quad \beta_1 \equiv \pm \frac{e_a e_b}{c^2 m_a m_b p c_3^0} (S_a^3 + S_b^3),$$
$$\beta_2 \equiv -\frac{3}{8 c^2 p^2} (s_a^1 s_b^1 + s_a^2 s_b^2 - 2 s_a^3 s_b^3). \qquad (25.31)$$

Таким образом, с точностью до вековых членов решение уравнения орбиты (25.27) имеет вид

$$\tilde{u}=u+u_1=\frac{\pm 1+e\cos\varphi}{p}+\frac{\beta e}{p}\varphi\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{p}\left\{\pm 1+e\cos\left[(1-\beta)\tilde{\varphi}\right]\right\}. \qquad (25.32)$$

Это решение аналогично решению (23.44). Поэтому орбиту (25.32) можно представлять как вращающееся в своей плоскости коническое сечение, у которого большая полуось a и эксцентриситет e не испытывают вековых возмущений. Одновременно плоскость орбиты прецессирует и изменяет угол s-наклонения $\bar{i}^0$ согласно (25.13) и (25.18). Следовательно, тела a и b описывают сложную пространственную траекторию.

Возвращаясь к (25.32), находим, что за один ньютонов период коническое сечение должно повернуться на угол

$$\Delta\varphi=2\pi\beta=2\pi(\beta_0+\beta_1+\beta_2). \qquad (25.33)$$

Релятивистские поправки β_0, β_1, β_2 имеют разный порядок величины. Легко находим, что $\beta_1/\beta_0\sim s/M^0$, $\beta_2/\beta_0\sim(s/M^0)^2$, где через s обозначен наибольший из модулей $|\vec{s}_a|$, $|\vec{s}_b|$. Если дробь s/M^0 мала, то основной вклад в релятивистский поворот орбиты дает β_0, которое всегда неотрицательно, и поэтому поворот происходит всегда в прямом направлении ($\Delta\varphi>0$).

Более детальное рассмотрение и получение числовых оценок релятивистских эффектов (25.13)—(25.18), (25.33) отложим до гл. VI.

Движение центра тяжести системы в СТО

Определяя центр тяжести по формуле (23.46) и проводя рассуждения и вычисления, полностью аналогичные (23.47)—(23.51), находим, что среднее значение $\ddot{c}_T^i$ ускорения центра тяжести за один ньютонов период T равно нулю.

§ 26. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ НАМАГНИЧЕННЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ В ОТО. СЛУЧАЙ ДВУХ ТЕЛ

В этом параграфе проинтегрируем самые общие уравнения движения (13.4) и (13.11) в случае двух тел.

Ньютоново приближение

Уравнения поступательного движения имеют вид:

$$\ddot{a}^i-\left(\frac{\gamma m_b}{r}\right)_{,a^i}+\left(\frac{e_a e_b}{m_a r}\right)_{,a^i}=0; \qquad (26.1)$$

$$\ddot{b}^i - \left(\frac{\gamma m_a}{r}\right)_{,b^i} + \left(\frac{e_a e_b}{m_b r}\right)_{,b^i} = 0. \qquad (26.2)$$

Вводя те же величины и обозначения, что и в § 22, получаем:

$$\ddot{x}^i \equiv \ddot{a}^i - \ddot{b}^i = \left(\frac{\gamma m}{r}\right)_{,x^i} - \frac{e_a e_b m}{m_a m_b}\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^i} = -\frac{\varkappa x^i}{r^3}, \qquad (26.3)$$

где

$$\varkappa \equiv \gamma m - \frac{e_a e_b m}{m_a m_b}. \qquad (26.4)$$

Из (26.3) обычным путем находим компоненты M_i вектора $\vec{M} \equiv [\vec{r}\,\dot{\vec{r}}]$, интеграл удельной энергии и с их помощью уравнение орбиты:

$$M_1 \equiv x^2\dot{x}^3 - x^3\dot{x}^2 = c_1 = 0;$$

$$M_2 \equiv x^3\dot{x}^1 - x^1\dot{x}^3 = c_2 = 0;$$

$$M_3 \equiv x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1 = r^2\dot{\varphi} = c_3 = \sqrt{\pm\varkappa p} = \text{const}; \qquad (26.5)$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\varkappa}{r} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\varkappa}{r} = -\frac{\varkappa}{2a} = \text{const}; \qquad (26.6)$$

$$u = \frac{\pm 1 + e\cos\varphi}{p}. \qquad (26.7)$$

Если $\varkappa > 0$, то берутся верхние знаки, если $\varkappa < 0$, то нижние. Система координат барицентрическая, т. е. выполняются соотношения (22.6).

Уравнения (13.11) в ньютоновом приближении дают

$$S_a^{ik} = \text{const}, \quad S_b^{ik} = \text{const} \qquad (26.8)$$

или, что то же самое, из уравнений (19.4) имеем

$$\vec{S}_a = \overrightarrow{\text{const}}, \quad \vec{S}_b = \overrightarrow{\text{const}} \quad (\vec{s}_a = \overrightarrow{\text{const}}, \quad \vec{s}_b = \overrightarrow{\text{const}}). \qquad (26.9)$$

Постньютоново приближение

Уравнения для S_a^{ik} (13.11) нами по существу проинтегрированы в случае двух тел. В самом деле, эти уравнения проинтегрированы в двух частных случаях: 1) когда пренебрегали электромагнитными характеристиками тел (§ 22) и 2) когда пренебрегали гравитационным взаимодействием тел (§ 24). Так как релятивистские добавки $N_{a(gs)}^{ik}$ и $N_{a(es)}^{ik}$ входят в уравнения (13.11) линейно, то достаточно просто алгебраически объединить результаты § 22 и 24, заменив только всюду σ на s.

Итак, сразу можем записать результат интегрирования в случае двух тел уравнений (13.11) (или (19.4)) с точностью до вековых членов:

$$\tilde{\vec{S}}_a=\vec{S}_a\pm\frac{\gamma m_a m_b}{c^2 m p}\left(2m_a+\frac{3}{2}m_b\right)[\vec{n}\,\vec{s}_a]\,\varphi\mp$$
$$\mp\frac{\gamma m_a m_b}{2c^2 p c_3}\left\{\frac{9}{4}(\vec{n}\,\vec{s}_a)[\vec{n}\,\vec{s}_a]+3(\vec{n}\,\vec{s}_b)[\vec{n}\,\vec{s}_a]+[\vec{s}_a\,\vec{s}_b]\right\}\varphi+$$
$$+\left\{\mp\frac{m_a e_a e_b}{2c^2 m p}[\vec{n}\,\vec{s}_a]\pm\frac{e_a e_b}{8c^2 p c_3}[\vec{s}_a\,\vec{s}_b]\pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{3e_a e_b}{8c^2 p c_3}(\vec{n}\,\vec{s}_b)[\vec{n}\,\vec{s}_a]\right\}\varphi. \qquad (26.10)$$

Это выражение, как и выражения (22.10), (24.15), можно представить в форме

$$\tilde{\vec{S}}_a=\vec{S}_a+[\vec{N}_a\,\vec{S}_a]\varphi, \qquad (26.11)$$

где

$$\vec{N}_a\equiv\pm\frac{\gamma m_b}{c^2 m p}\left(2m_a+\frac{3}{2}m_b\right)\vec{n}\mp$$
$$\mp\frac{\gamma m_b}{2c^2 p c_3}\left\{\left[\frac{9}{4}(\vec{n}\,\vec{s}_a)+3(\vec{n}\,\vec{s}_b)\right]\vec{n}-\vec{s}_b\right\}\mp$$
$$\mp\frac{e_a e_b}{2c^2 m p}\vec{n}\pm\frac{e_a e_b}{8c^2 m_a p c_3}[3(\vec{n}\,\vec{s}_b)\,\vec{n}-\vec{s}_b]. \qquad (26.12)$$

Так как $|\tilde{\vec{S}}_a|=\mathrm{const}$, то вектор $\tilde{\vec{S}}_a$ прецессирует около постоянного вектора $\vec{N}_a$ с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}_a=\vec{N}_a\dot{\varphi}=r^{-2}c_3\vec{N}_a. \qquad (26.13)$$

В случае коллинеарности векторов $\vec{N}_a$ и $\vec{S}_a$ прецессия отсутствует. Соотношения (26.10)—(26.13) для отмеченных в начале пункта частных случаев 1) и 2) автоматически переходят в соотношения (22.10)—(22.13) и (24.15)—(24.18).

Все сказанное верно и для тела b.

Переходим к интегрированию уравнений поступательного движения (13.4). Можно считать, опираясь на результаты § 23 и 25, что они почти проинтегрированы: осталось только учесть влияние силовых добавок $\overset{i}{F}_{a(ge)}$ и $\overset{i}{F}_{b(ge)}$ на орбитальное движение. Соответствующие им релятивистские поправки появятся как аддитивные члены в соотношениях, определяющих орбитальное движение. Отметим, что добавки $\overset{i}{F}_{a(ge)}$ и $\overset{i}{F}_{b(ge)}$ обязаны своим существованием взаимодействию гравитационного и электромагнитного полей.

В рассмотренных ранее частных случаях 1) и 2) эти взаимодействия не принимались во внимание. Из (13.6) в случае двух тел имеем:

$$F^i_{a(ge)} \equiv \frac{\gamma}{c^2}\left(7m_a e_a e_b + 5m_b e_a e_b - m_a e_b^2 - m_b e_a^2\right)\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^i};$$
$$F^i_{b(ge)} \equiv -\frac{\gamma}{c^2}\left(7m_b e_a e_b + 5m_a e_a e_b - m_a e_b^2 - m_b e_a^2\right)\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\right)_{,x^i}. \qquad (26.14)$$

С добавками (26.14) проделываем те же операции, что и с остальными силовыми добавками. Вычисляем:

$$f^i_{(ge)} \equiv m_a^{-1} F^i_{a(ge)} - m_b^{-1} F^i_{b(ge)} = \frac{-\gamma}{c^2}\left[14e_a e_b + 5\frac{e_a e_b}{m_a m_b}(m_a^2 + m_b^2) - \right.$$
$$\left. - \frac{m}{m_a m_b}(m_a e_b^2 + m_b e_a^2)\right]\frac{x^i}{r^4}. \qquad (26.15)$$

Так как $x^3 = 0$, то $f^3_{(ge)} = 0$. Отсюда следует, что в компонентах $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$ (см. (23.5) или (25.8)) никакого дополнительного вклада из-за наличия добавок (26.14) не появится. В $\tilde{M}_3$ благодаря (26.15) появляется член

$$\int [x^1 f^2_{a(ge)} - x^2 f^1_{a(ge)}]\, dt, \qquad (26.15^*)$$

который, как легко видно, тождественно равен нулю (под интегралом имеем множитель $x^1x^2 - x^2x^1 \equiv 0$).

Таким образом, объединяя (23.11) и (25.12) (в (23.11) нужно $\vec{\sigma}$ заменить на $\vec{s}$, M^* и c_3^0 — на c_3 и ввести множитель ± 1 в силу двойного знака в (26.7)), находим для вектора $\tilde{\vec{M}} \equiv [\tilde{\vec{r}}\dot{\tilde{\vec{r}}}]$ с точностью до вековых членов:

$$\tilde{\vec{M}} = \vec{M} \mp \frac{\gamma}{2c^2 p}\left\{(4m_a + 3m_b)[\vec{n}\vec{s}_a] + (3m_a + 4m_b)[\vec{n}\vec{s}_b]\right\}\varphi \pm$$
$$\pm \frac{3\gamma m}{8c^2 p c_3}\left\{(\vec{n}\vec{s}_a)[\vec{n},\ 3\vec{s}_a + 4\vec{s}_b] + (\vec{n}\vec{s}_b)[\vec{n},\ 4\vec{s}_a + 3\vec{s}_b]\right\}\varphi \pm$$
$$\pm \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b p}\left\{[\vec{n},\ \vec{S}_a + \vec{S}_b] - \frac{3m}{4c_3}\left((\vec{n}\vec{s}_a)[\vec{n}\vec{s}_b] + (\vec{n}\vec{s}_b)[\vec{n}\vec{s}_a]\right)\right\}\varphi. \qquad (26.16)$$

Выражение для $\tilde{\vec{M}}$ переписываем в виде

$$\tilde{\vec{M}} = \vec{M} + [\vec{S}\vec{M}]\varphi, \qquad (26.17)$$

где

$$\vec{S}\equiv\pm\frac{\gamma}{2c^2pc_3}\left[(4m_a+3m_b)\vec{s}_a+(3m_a+4m_b)\vec{s}_b\right]\mp$$

$$\mp\frac{3\gamma m}{8c^2pc_3^2}\left[(\vec{n}\,\vec{s}_a)(3\vec{s}_a+4\vec{s}_b)+(\vec{n}\,\vec{s}_b)(4\vec{s}_a+3\vec{s}_b)\right]\mp$$

$$\mp\frac{e_ae_b}{2c^2m_am_bpc_3}\left\{\vec{S}_a+\vec{S}_b-\frac{3m}{4c_3}\left[(\vec{n}\,\vec{s}_a)\vec{s}_b+(\vec{n}\,\vec{s}_b)\vec{s}_a\right]\right\}. \qquad (26.18)$$

Так как $(\tilde{\vec{M}}\tilde{\vec{M}})=|\tilde{\vec{M}}|^2=\mathrm{const}$ (что легко получаем из (26.16)), то из продифференцированного по t соотношения (26.17) следует, что вектор $\tilde{\vec{M}}$ прецессирует около постоянного вектора $\vec{S}$ с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}=\vec{S}\dot{\varphi}=r^{-2}c_3\vec{S}. \qquad (26.19)$$

Итак, траектория движения не является плоской из-за прецессии вектора $\tilde{\vec{M}}$, т. е. из-за прецессии плоскости относительной орбиты. Величину отклонения релятивистской орбиты от плоскости ньютоновой орбиты $x^3\doteq0$ можно охарактеризовать величиной $\tilde{x}^3$, которая находится из соотношения, аналогичного (23.21) или (25.16):

$$c_3\tilde{x}^3=x^2\int x^1\left(\overset{3}{F}_{a(gs)}+\overset{3}{F}_{a(es)}-\overset{3}{F}_{b(gs)}-\overset{3}{F}_{b(es)}\right)dt-$$

$$-x^1\int x^2\left(\overset{3}{F}_{a(gs)}+\overset{3}{F}_{a(es)}-\overset{3}{F}_{b(gs)}-\overset{3}{F}_{b(es)}\right)dt. \qquad (26.20)$$

Вычисляя эти интегралы с точностью до вековых членов, находим

$$\tilde{x}^3=\pm\left[\frac{\gamma}{2c^2c_3}(a_1\sin\varphi-a_2\cos\varphi)-\frac{3\gamma m}{2c^2c_3^2}(b_1\sin\varphi-b_2\cos\varphi)\right]\frac{r}{p}\varphi\mp$$

$$\mp\frac{e_ae_b}{2c^2m_am_bc_3}\Big\{(S_a^1+S_b^1)\sin\varphi-(S_a^2+S_b^2)\cos\varphi-$$

$$-\frac{3m}{4c_3}\left[(s_a^1s_b^3+s_a^3s_b^1)\sin\varphi-(s_a^2s_b^3+s_a^3s_b^2)\cos\varphi\right]\Big\}\cdot\frac{r}{p}\cdot\varphi, \qquad (26.21)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 определяются согласно (23.20).

Выражения (23.19), (25.16) и (26.21) интересно рассматривать только в случае финитных движений $(0\leqslant e<1)$. В противном случае r обращается вместе с $\tilde{x}^3$ при некоторых φ в бесконечность.

Из (26.10) и (26.16) легко следует, что углы между векторами $\tilde{\vec{S}}_a$, $\vec{n}$ и $\tilde{\vec{S}}_a$, $\tilde{\vec{M}}$ меняются вековым образом. Действительно,

$$(\vec{\tilde{S}}_a \vec{n}) = (\vec{S}_a \vec{n}) \mp \left[\frac{\gamma m_a m_b}{2c^2 p c_3} - \frac{e_a e_b}{8c^2 p c_3}\right] (\vec{n}\, \vec{s}_a\, \vec{s}_b)\varphi, \qquad (26.22)$$

$$(\vec{\tilde{S}}_a \vec{\tilde{M}}) = (\vec{S}_a \vec{M}) \pm \left[4\gamma m_a m - e_a e_b - \frac{\gamma m_a m}{c_3} (\vec{n},\, 4\vec{s}_a + 3\vec{s}_b) + \right.$$

$$\left. + \frac{e_a e_b m}{m_b c_3} (\vec{n}\, \vec{s}_a)\right] \frac{3(\vec{n}\, \vec{s}_a\, \vec{s}_b)}{8c^2 p} \varphi. \qquad (26.23)$$

Обозначая угол между векторами $\vec{S}_a$ и $\vec{M}$ через i, между векторами $\vec{\tilde{S}}_a$ и $\vec{\tilde{M}}$ — через $\tilde{i}$, между $\vec{\tilde{S}}_a$ и $\vec{n}$ — через i', а также принимая $\Delta i \equiv \tilde{i} - i$, $\Delta i' = i' - i$, находим по алгоритму (23.23), (23.24):

$$\Delta i' = \pm \left(\gamma m_b - \frac{e_a e_b}{4m_a}\right) \frac{(\vec{n}\, \vec{s}_a\, \vec{s}_b)\, \varphi}{2c^2 p c_3 |\vec{s}_a| \sin i}, \quad \sin i \neq 0; \qquad (26.24)$$

$$\Delta i = \mp \left[4\gamma m - \frac{e_a e_b}{m_a} - \frac{\gamma m}{c_3} (\vec{n},\, 4\vec{s}_a + 3\vec{s}_b) + \right.$$

$$\left. + \frac{e_a e_b m}{m_a m_b c_3} (\vec{n}\, \vec{s}_a)\right] \frac{3(\vec{n}\, \vec{s}_a\, \vec{s}_b)\, \varphi}{8c^2 p c_3 |\vec{s}_a| \sin i}. \qquad (26.25)$$

Выражение (26.25) содержит в себе как частные случаи (23.25) и (25.18).

Итак, кроме прецессии, векторы $\vec{\tilde{S}}_a$ и $\vec{\tilde{S}}_b$ должны, поворачиваясь в пространстве, изменять свой угол вековым образом с плоскостью ньютоновой орбиты $x^3 = 0$ согласно (26.24) и с плоскостью релятивистской орбиты согласно (26.25).

Чтобы получить уравнение траектории относительной орбиты в рассматриваемом общем случае, нужно знать точные посленьютоновы значения $\tilde{M}_3 \equiv \tilde{r}^2 \dot{\tilde{\varphi}}$ и $\tilde{E} \equiv \frac{1}{2} (\dot{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^2 \dot{\tilde{\varphi}}^2) - \frac{\varkappa}{\tilde{r}}$. Так как выражение (26.15*) тождественно равно нулю, то вклад в $\tilde{M}_3$, обязанный силовой добавке $F^i_{a(ge)}$, также равен нулю. Поэтому выражение для точного значения $\tilde{M}_3$ можно написать сразу, объединяя выражения (23.36), (23.37), (25.23), (25.24) с заменой σ на s и M^*, c_3^0 на c_3:

$$\tilde{M}_3 \equiv \tilde{r}^2 \dot{\tilde{\varphi}} = c_3 - \frac{2\gamma c_3}{c^2 m r} (2m_a^2 + 3m_a m_b + 2m_b^2) +$$

$$+ \frac{e_a e_b c_3}{c^2 m_a m_b m r} (m_a^2 + m_b^2) + M_3^{(gs)} + M_3^{(es)}, \qquad (26.26)$$

где

$$M_3^{(gs)} \equiv \frac{\gamma}{2c^2r}\,[(4m_a+3m_b)\,s_a^3+(3m_a+4m_b)\,s_b^3]-$$

$$-\frac{3\gamma m}{2c^2pc_3}\left\{\left[\frac{3}{4}\,(s_a^1s_a^2+s_b^1s_b^2)+s_a^1s_b^2+s_a^2s_b^1\right]\left(e\sin\varphi\pm\sin 2\varphi+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\,e\sin 3\varphi\right)+\left[\frac{3}{4}\,(s_a^1s_a^1+s_b^1s_b^1)+2s_a^1s_b^1-\frac{3}{4}\,(s_a^2s_a^2+s_b^2s_b^2)-\right.$$

$$\left.\left.-2s_a^2s_b^2\right]\left(\pm\cos^2\varphi+\frac{2}{3}\,e\cos^3\varphi\right)\right\}; \qquad (26.27)$$

$$M_3^{(es)} \equiv -\frac{e_ae_b}{2c^2m_am_b}\,(S_a^3+S_b^3)\,\frac{e}{p}\,\cos\varphi+\frac{3e_ae_bm}{4c^2m_am_bpc_3}\left\{(s_a^1s_b^2+\right.$$

$$+s_a^2s_b^1)\left[\pm\frac{1}{2}\sin 2\varphi+e\left(\sin\varphi-\frac{2}{3}\sin^3\varphi\right)\right]+$$

$$\left.+(s_a^2s_b^2-s_a^1s_b^1)\left(\pm\sin^2\varphi-\frac{2}{3}\,e\cos^3\varphi\right)\right\}. \qquad (26.28)$$

Теперь, пользуясь выражением (26.15), легко подсчитываем поправку в $\bar{E}$, возникающую из-за учета $\overset{i}{F}_{a(ge)}$:

$$E_{(ge)} \equiv \int \dot{x}^s f^s_{(ge)}\,dt =$$

$$=\frac{\gamma}{2c^2}\left[14\,e_ae_b+5\,\frac{e_ae_b}{m_am_b}\,(m_a^2+m_b^2)-\frac{m}{m_am_b}\,(m_ae_b^2+m_be_a^2)\right]\frac{1}{r^2}. \qquad (26.29)$$

Вычисляем также, пользуясь (6.23) и ньютоновым приближением, выражение

$$E_{(g)} \equiv \int \dot{x}^s\,(m_a^{-1}F^s_{a(g)}-m_b^{-1}F^s_{b(g)})\,dt=\frac{\gamma\varkappa}{2c^2m}\,(6m_a^2+5m_am_b+$$

$$+6m_b^2)\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{ar}\right)-\frac{\gamma^2}{c^2r^2}\,(2m_a^2+5m_am_b+2m_b^2)\pm\frac{\gamma\varkappa m_am_bp}{2c^2mr^3}. \qquad (26.30)$$

Аналогичные вычисления сопутствуют нахождению $E_{(e)}$:

$$E_{(e)} \equiv \int \dot{x}^s\,(m_a^{-1}F^s_{a(e)}-m_b^{-1}F^s_{b(e)})\,dt=\frac{e_ae_b\varkappa}{2c^2m_am_bm}\,(3m_a^2-m_am_b+$$

$$+3m_b^2)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{ar}\right)-\frac{e_a^2e_b^2\,(m_a^2+m_b^2)}{2c^2m_a^2m_b^2r^2}\mp\frac{e_ae_b\varkappa p}{2c^2mr^3}. \qquad (26.31)$$

Так как выражение (9.3) для $\overset{i}{F}_{a(g\sigma)}$ переходит в $\overset{i}{F}_{a(gs)}$ при замене σ на s, то при такой же замене выражение (23.34) для $E_{(g\sigma)}$ переходит в $E_{(gs)}$ (нужно еще учесть двойной знак в (26.7) и заменить постоянные C_a и C_b на C_a^* и C_b^*). Можем, следовательно, сразу записать

$$E_{(gs)} \equiv -\frac{\gamma m}{c^2 r^3}\left[\frac{3}{4}(\vec{s}_a\vec{s}_a) + 2(\vec{s}_a\vec{s}_b) + \frac{3}{4}(\vec{s}_b\vec{s}_b) + \frac{3}{4}s_a^3 s_a^3 + 2s_a^3 s_b^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}s_b^3 s_b^3\right] + \frac{15\gamma m e}{2c^2 p^3}\left(\frac{3}{4}s_a^3 s_a^3 + 2s_a^3 s_b^3 + \frac{3}{4}s_b^3 s_b^3\right)\left(\cos\varphi \pm e\cos^2\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}e^2\cos^3\varphi\right) + \frac{3\gamma m}{2c^2 p^3}\left\{\left(\frac{3}{4}s_a^2 s_a^2 + 2s_a^2 s_b^2 + \frac{3}{4}s_b^2 s_b^2\right)\left(\pm\cos^2\varphi + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{11}{3}e\cos^3\varphi \pm 3e^2\cos^4\varphi + e^3\cos^5\varphi\right) + \left(\frac{3}{4}s_a^1 s_a^1 + 2s_a^1 s_b^1 + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}s_b^1 s_b^1\right)[3e\cos\varphi \pm (3e^2 - 1)\cos^2\varphi + (e^3 - 3e)\cos^3\varphi \mp 3e^2\cos^4\varphi -$$
$$- e^3\cos^5\varphi] + \left(\frac{3}{4}s_a^1 s_a^2 + s_a^1 s_b^2 + s_a^2 s_b^1 + \frac{3}{4}s_b^1 s_b^2\right)\left[\left(e^3 - \frac{3}{2}e\right)\sin\varphi \mp \right.$$
$$\left.\left. \mp \left(\frac{3}{2}e^2 + 1\right)\sin 2\varphi - \left(e^3 + \frac{3}{2}e\right)\sin 3\varphi \mp \frac{3}{4}e^2\sin 4\varphi - e^3\sin^5\varphi\right]\right\} +$$
$$+ \frac{\gamma}{c^2 r}(C_a^* + C_b^*) + h^*, \quad h^* = \text{const}. \tag{26.32}$$

Итак, точное выражение для $\tilde{E}$ найдено

$$\tilde{E} \equiv \frac{1}{2}(\dot{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^2\dot{\tilde{\varphi}}^2) - \frac{\varkappa}{\tilde{r}} = -\frac{\varkappa}{2a} + E_{(g)} + E_{(e)} + E_{(ge)} +$$
$$+ E_{(gs)} + E_{(es)}, \tag{26.33}$$

где $E_{(g)}$, $E_{(e)}$, $E_{(ge)}$, $E_{(gs)}$, $E_{(es)}$ соответственно определяются выражениями (26.30), (26.31), (26.29), (26.32), (25.22).

Теперь с помощью стандартной процедуры, которую мы уже дважды применяли (§ 23 и 25), находим дифференциальное уравнение релятивистской относительной орбиты:

$$\left(\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{\varphi}}\right)^2 + \tilde{u}^2 \mp \frac{2}{p}\tilde{u} \pm \frac{1}{ap} = \pm\left[\frac{4\gamma}{c^2 mp}(2m_a^2 + 3m_a m_b + 2m_b^2) - \right.$$
$$\left. - \frac{2e_a e_b(m_a^2 + m_b^2)}{c^2 m_a m_b mp}\right]\left(2u^2 - \frac{u}{a}\right) \mp \frac{2}{pc_3}(M_3^{(gs)} + M_3^{(es)})\left(2u - \frac{1}{a}\right) \pm$$
$$\pm \frac{2}{\varkappa p}(E_{(g)} + E_{(e)} + E_{(ge)} + E_{(gs)} + E_{(es)}), \tag{26.34}$$

решение которого ищем методом последовательных приближений, т. е. решение ищем в виде $\tilde{u}=u+u_1+\ldots$. Выражение для u совпадает с (26.7), а поправочная функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению (25.28), имеющему общее решение (25.29), где теперь под A нужно понимать правую часть уравнения (26.34). Проводя вычисления с точностью до вековых членов, находим

$$u_1=\frac{\eta e}{p}\varphi\sin\varphi, \tag{26.35}$$

где

$$\eta=\eta_0+\eta_1+\eta_2;$$

$$\eta_0\equiv\pm\frac{3\gamma^2m^2}{c^2\varkappa p}\mp\frac{3\gamma e_a e_b m^2}{c^2m_am_b\varkappa p}\mp\frac{\gamma m\,(m_ae_b^2+m_be_a^2)}{2c^2m_am_b\varkappa p}\pm\frac{2e_a^2e_b^2}{c^2m_am_b\varkappa p}; \tag{26.36}$$

$$\eta_1\equiv\mp\frac{\gamma}{c^2pc_3}[(4m_a+3m_b)s_a^3+(3m_a+4m_b)s_b^3]\pm$$

$$\pm\frac{e_ae_b}{c^2m_am_bpc_3}(S_a^3+S_b^3), \tag{26.37}$$

$$\eta_2\equiv\frac{3\gamma m}{c^2\varkappa p^2}\left(\frac{3}{8}s_a^3s_a^3+s_a^3s_b^3+\frac{3}{8}s_b^3s_b^3\right)-\frac{3\gamma m}{2c^2\varkappa p^2}\left(\frac{3}{8}s_a^1s_a^1+s_a^1s_b^1+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}s_b^1s_b^1+\frac{3}{8}s_a^2s_a^2+s_a^2s_b^2+\frac{3}{8}s_b^2s_b^2\right)+\frac{3e_ae_bm}{8c^2m_am_b\varkappa p^2}(s_a^1s_b^1+$$

$$+s_a^2s_b^2-2s_a^3s_b^3). \tag{26.38}$$

Двойные знаки в (26.36) и (26.37) появились из-за двузначности $\varkappa$: если $\varkappa>0$, то в этих выражениях следует брать верхние знаки; если $\varkappa<0$, то — нижние.

Уравнение релятивистской орбиты, полученное как решение (26.34) с точностью до вековых членов, следовательно, имеет вид

$$\tilde{u}=u+u_1=\frac{\pm1+e\cos\varphi}{p}+\frac{\eta e}{p}\varphi\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{p}\{\pm1+e\cos[(1-\eta)\tilde{\varphi}]\}. \tag{26.39}$$

Как и в рассмотренных ранее частных случаях (23.44) и (25.32), уравнение (26.39) описывает вращающееся в своей плоскости коническое сечение, размеры которого (a, p, e) не подвержены вековым (растущим со временем) возмущениям. Как показано выше (см. формулы (26.17), (26.24), (26.25)), сама плоскость прецессирует и вековым образом изменяются углы i' и i. Все вместе взятое приводит к сложной пространственной траектории относительного движения.

За один ньютонов период коническое сечение (26.39) поворачивается на угол

$$\Delta\varphi = 2\pi\eta = 2\pi(\eta_0 + \eta_1 + \beta_2). \tag{26.40}$$

Направление и величина этого поворота определяются входящими в η_0, η_1, η_2 параметрами тел (их массами, зарядами, угловыми и магнитными моментами).

Подробное обсуждение эффекта (26.40) и его числовые оценки в различных конкретных случаях содержатся в гл. VI. Здесь же заметим, что пренебрежение электромагнитными характеристиками тел приводит к совпадению η_0, η_1, η_2 соответственно с α_0, α_1, α_2 (см. (23.43)). Если же пренебречь гравитационным взаимодействием тел, то выражения для η_0, η_1, η_2 переходят в β_0, β_1, β_2 соответственно.

В заключение этого параграфа отметим, что усредненное по ньютонову периоду ускорение центра тяжести, определенного по формуле (23.46), равно нулю для рассмотренного здесь самого общего случая.

Глава IV

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ В ОТО

§ 27. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Задача трех и большего числа тел была поставлена сразу же после открытия Ньютоном закона всемирного тяготения, но решение этой задачи с самого начала натолкнулось на непреодолимые трудности. Тем не менее попытки решить или хотя бы приблизиться к решению задачи трех тел никогда не прекращались. В этой области исследований перу величайших математиков мира и известнейших астрономов-теоретиков принадлежат многие выдающиеся работы [1—20, В.209, В.218]. Сначала пытались, кроме известных десяти первых интегралов ньютоновых уравнений движения, найти еще неизвестные интегралы и с их помощью, как это делалось в случае двух тел, получить решение задачи трех тел. Было сделано много неудачных попыток в этом направлении, пока в 1887 г. Брунс не доказал, что десять классических интегралов являются единственными независимыми алгебраическими интегралами общей задачи трех тел. Затем Пуанкаре (1889) и Пенлеве (1900) обобщили эту теорему (см. [В.209, гл. 14]).

Стала очевидной бесплодность попыток решить общую задачу трех, а тем более многих тел в замкнутом виде с помощью известных функций. Усилия исследователей направляются на разработку различных приближенных методов, позволяющих решать общую задачу трех и многих тел с нужной степенью точности, а также на отыскание общего решения в виде некоторых сходящихся рядов. В разработке и обосновании приближенных методов решения важную роль сыграли прежде всего работы Эйлера [1], Хилла [5, 6], Пуанкаре [8], Ляпунова [13]. Общее решение задачи трех тел дал Зундман [11] в виде сходящихся рядов, что вызвало большие надежды. Однако, как показал Белорицкий [21], ряды Зундмана не имеют никакого практического значения из-за их необыкновенно медленной сходимости. Впоследствии делались попытки улучшить сходимость рядов Зундмана (Вернич [22]) или получить общее решение задачи трех тел в виде других рядов. Мерман [В.232] дал решение проблемы в форме рядов Миттаг-Леффлера, Брумберг [23] изучал различные модификации рядов Миттаг-Леффлера численными методами.

Качественному исследованию задачи трех тел посвящена серия важных работ Шази [16—20]. Содержащиеся в них пробелы и неточности были впоследствии замечены, дополнены и исправлены в работах Шмидта, Мермана и их учеников и последователей [В.211, В.231, В.233—В.235, 24—40].

Ньютоновы уравнения движения для системы трех тел допускают простые точные частные решения, которые впервые были обнаружены Эйлером, Лагранжем [1, 2] и изложены без ссылки на предыдущих авторов Лапласом [3]. По сложившейся традиции эти решения обычно называются лагранжевыми и описывают движение трех тел вокруг общего центра тяжести по однотипным кривым второго порядка, оставаясь всегда либо на одной прямой (коллинеарные лагранжевы решения), либо образуя равносторонний треугольник (треугольные лагранжевы решения).

Лагранж считал, что найденные им решения имеют чисто теоретическое значение. Однако в XIX в. были открыты две группы («греки» и «троянцы») малых планет (астероидов), которые вместе с Юпитером и Солнцем приблизительно соответствуют треугольным лагранжевым решениям. Кроме того, как оказалось впоследствии, эти решения послужили отправной точкой для нахождения многих классов других (приближенных) решений задачи трех тел (см., например, [В.215, В.226, В.227, В.230, В.238—В.252, 41, 42]). В настоящее время в связи с успехами и перспективами освоения околосолнечного пространства эти решения приобретают важное значение при разработке определенных схем полетов космических аппаратов [В.254, В.255], а также могут быть использованы для экспериментальной проверки ОТО [В.256, В.257].

Таким образом, лагранжевы и близкие к ним решения представляют теоретический и практический интерес. Их исследование без учета релятивистских поправок, возникающих согласно ОТО, представляется в настоящее время недостаточным. Целью гл. IV будет тщательное изучение закономерностей движения трех тел в ОТО в том случае, когда в ньютоновом приближении берутся лагранжевы решения. Поэтому рассмотрим эти решения подробнее.

§ 28. ЛАГРАНЖЕВЫ РЕШЕНИЯ

Нахождение треугольных и коллинеарных лагранжевых решений излагается во многих монографиях по небесной механике (см., например, [В.209, В.210, В.215, В.216, В.218—В.220]). Наиболее подробное и ясное изложение задачи трех тел в ньютоновой теории дано в монографии Дубошина [В.215], на которую мы и будем чаще всего ссылаться.

Для дальнейшего будет удобным переобозначить ряд введенных ранее величин. Будем теперь тела a, b, c называть A_i ($i=1, 2, 3$), их массы и координаты в ньютоновом приближении обозначать через m_i и x_i^*, y_i^*, z_i^*. Тогда, например, запись $A_1(x_1^*, y_1^*, z_1^*)$, как обычно, указывает, что тело (материальная точка) A_1 имеет координаты x_1^*, y_1^*, z_1^* (соответствует прежнему обозначению a^1, a^2, a^3), Тогда ньютоновы уравнения движения для всех трех тел можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i^* - \frac{\partial U}{\partial x_i^*} &= 0, \\ m_i\ddot{y}_i^* - \frac{\partial U}{\partial y_i^*} &= 0, \\ m_i\ddot{z}_i^* - \frac{\partial U}{\partial z_i^*} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{28.1}$$

где

$$U \equiv \gamma\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}^*} + \frac{m_2m_3}{r_{23}^*} + \frac{m_3m_1}{r_{31}^*}\right); \tag{28.2}$$

$$r_{ij}^* \equiv [(x_j^*-x_i^*)^2+(y_j^*-y_i^*)^2+(z_j^*-z_i^*)^2]^{1/2}, \ i, j, k=1, 2, 3. \tag{28.3}$$

Систему координат, в которой записаны соотношения (28.1)—(28.3), будем считать барицентрической (центр тяжести системы трех тел совпадает с началом координат O), прямоугольной декартовой с неподвижными осями $Ox^*y^*z^*$.

Система уравнений (28.1) может быть удовлетворена функциями [В.215, гл. 8]:

$$\left.\begin{aligned} x_i^* &= x_i^0 \cos\omega_0 t - y_i^0 \sin\omega_0 t, \\ y_i^* &= x_i^0 \sin\omega_0 t + y_i^0 \cos\omega_0 t, \\ z_i^* &= z_i^0 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{28.4}$$

где ω_0, x_i^0, y_i^0 — вполне определенные постоянные. Так как $z_i^0=0$, то движение плоское (происходит в плоскости x^*Oy^*). При этом будут два существенно различных случая:

1. $$r_{12}^*=r_{23}^*=r_{31}^*=r_0=\mathrm{const}, \quad \omega_0^2=\gamma\frac{m_1+m_2+m_3}{r_0^3}. \tag{28.5}$$

2. Взаимные расстояния r_{12}^*, r_{23}^*, r_{31}^* не равны, хотя и постоянны, но все три тела лежат на одной прямой, которая вращается с угловой скоростью ω_0 около центра тяжести O. Без ограничения общности всегда можно считать, что тела A_i лежат на оси абсцисс вращающейся системы координат $Ox^0y^0z^0$, т. е.

$$y_1^0=y_2^0=y_3^0=0. \tag{28.6}$$

В обоих случаях выполнены условия барицентричности

$$m_1x_1^*+m_2x_2^*+m_3x_3^*=0, \quad m_1y_1^*+m_2y_2^*+m_3y_3^*=0. \tag{28.7}$$

В первом случае имеем треугольное круговое лагранжево решение, во втором — коллинеарное круговое лагранжево решение неограниченной задачи трех тел.

Если третье тело A_3 имеет массу настолько малую, что влиянием тела A_3 на движение тел A_1 и A_2 можно пренебречь, то получаем ограниченную задачу трех тел. В частности, из рассмотренных лагранжевых треугольных и коллинеарных решений при $m_3=0$ получаем соответствующие ограниченные лагранжевы решения.

Считая тогда тела A_1 и A_2 расположенными на вращающейся оси абсцисс (и в случае треугольной, и в случае коллинеарной круговой задачи), всегда имеем:

$$x_1^0=-\frac{m_2}{m}r_0,\ x_2^0=\frac{m_1}{m}r_0,\ y_1^0=y_2^0=0,\ z_i^0=0.$$

$$\omega_0^2=\frac{\gamma m}{r_0^3},\quad m\equiv m_1+m_2. \tag{28.8}$$

Координаты третьего (легкого) тела A_3 в случае коллинеарной задачи $x_3^0=\text{const}$, $y_3^0=z_3^0=0$. Значение постоянной x_3^0 определяется из известных уравнений, при этом представляются три возможности: тело A_3 находится слева, между или справа от тел A_1 и A_2. Эти три возможных положения принято называть точками либрации и обозначать соответственно буквами L_1, L_2, L_3. В случае треугольного кругового лагранжевого решения координаты тела A_3 следующие:

$$x_3^0=\frac{m_1-m_2}{2m}r_0,\ y_3^0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}r_0,\ z_3^0=0. \tag{28.9}$$

Двойной знак ординаты соответствует двум возможностям в расположении третьего тела A_3. При $y_3^0>0$ имеем точку либрации L_4, а при $y_3^0<0$ — точку либрации L_5 (см. [В.215, гл. 5, 8]).

Отметим, что уравнения движения (28.1) в рассмотренной выше вращающейся системе координат $Ox^0y^0z^0$ приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} m_i(\ddot{x}_i^0-2\omega_0\dot{y}_i^0-\omega_0^2x_i^0)-\frac{\partial U}{\partial x_i^0}&=0,\\ m_i(\ddot{y}_i^0+2\omega_0\dot{x}_i^0-\omega_0^2y_i^0)-\frac{\partial U}{\partial y_i^0}&=0,\\ m_i\ddot{z}_i^0-\frac{\partial U}{\partial z_i^0}&=0, \end{aligned}\right\} \tag{28.10}$$

где U выражается через взаимные расстояния

$$r_{ij}^0\equiv[(x_j^0-x_i^0)^2+(y_j^0-y_i^0)^2+(z_j^0-z_i^0)^2]^{1/2} \tag{28.11}$$

по формуле (28.2), так как $r^0_{ij}=r^*_{ij}$. В случае ограниченной задачи трех тел, когда тяжелые тела A_1 и A_2 движутся по окружностям, а третье легкое тело A_3 движется любым дозволенным уравнениями движения образом, уравнения движения (28.10) при $i=3$ имеют первый интеграл (интеграл Якоби [4]):

$$(\dot{x}^0_3)^2+(\dot{y}^0_3)^2+(\dot{z}^0_3)^2=\omega^2_0\,[(x^0_3)^2+(y^0_3)^2]+$$
$$+2\gamma\left(\frac{m_1}{r^0_{13}}+\frac{m_2}{r^0_{23}}\right)+2h, \qquad (28.12)$$

где h — постоянная интегрирования. В неподвижной системе координат $Ox^*y^*z^*$ интеграл Якоби записывается в виде

$$(\dot{x}^*_3)^2+(\dot{y}^*_3)^2+(\dot{z}^*_3)^2=2\omega_0(x^*_3\dot{y}^*_3-y^*_3\dot{x}^*_3)+$$
$$+2\gamma(m_1/r^*_{13}+m_2/r^*_{23})+2h, \qquad (28.13)$$

что легко получить, совершая переход от системы $Ox^0y^0z^0$ к системе $Ox^*y^*z^*$ по формулам

$$\left.\begin{aligned} x^0&=x^*\cos\omega_0t+y^*\sin\omega_0t,\\ y^0&=-x^*\sin\omega_0t+y^*\cos\omega_0t,\\ z^0&=z^*.\end{aligned}\right\} \qquad (28.14)$$

§ 29. ПОСЛЕНЬЮТОНОВЫ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛАГРАНЖЕВОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ НЕВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

Нас будет сейчас интересовать следующая задача.

Известно, что в ньютоновом приближении тела движутся в соответствии с лагранжевыми круговыми решениями в ограниченной задаче трех тел, которые не обладают собственными вращениями. Требуется: 1) написать уравнения движения для всех трех тел и 2) проинтегрировать эти уравнения.

Займемся первой частью задачи. В следующем за ньютоновым приближении уравнения движения (6.22) в принятых в § 28 обозначениях можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\bar{x}}_i-\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{x}_i}&=X_i,\\ m_i\ddot{\bar{y}}_i-\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}_i}&=Y_i,\\ m_i\ddot{\bar{z}}_i-\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{z}_i}&=Z_i,\end{aligned}\right\} \qquad (29.1)$$

где $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{z}_i$ обозначают координаты тел A_i в посленьютоновом приближении,

$$\tilde{U} \equiv \gamma \left(\frac{m_1 m_2}{\tilde{r}_{12}} + \frac{m_2 m_3}{\tilde{r}_{23}} + \frac{m_3 m_1}{\tilde{r}_{31}} \right); \tag{29.2}$$

$$\tilde{r}_{ij} \equiv [(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i)^2 + (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)^2 + (\tilde{z}_j - \tilde{z}_i)^2]^{1/2}, \tag{29.3}$$

а релятивистские силовые добавки X_i, Y_i, Z_i находятся из $\overset{i}{F}_{a(g)}$, $\overset{i}{F}_{b(g)}$, $\overset{i}{F}_{c(g)}$ с помощью ньютонова приближения, рассмотренного в § 28.

Решение системы (29.1) можно искать в виде

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_i &= (x_i^0 + x_i)\cos\omega_0 t - (y_i^0 + y_i)\sin\omega_0 t, \\ \tilde{y}_i &= (x_i^0 + x_i)\sin\omega_0 t + (y_i^0 + y_i)\cos\omega_0 t, \\ \tilde{z}_i &= z_i^0 + z_i, \end{aligned}\right\} \tag{29.4}$$

где x_i, y_i, z_i будут искомыми релятивистскими поправками к известным ньютоновым координатам x_i^0, y_i^0, z_i^0 тел A_i во вращающейся системе координат. Формулы (29.4) показывают, что совершается переход к вращающейся с ньютоновой угловой скоростью ω_0 системе координат. Решение системы (29.1) можно было бы искать и в несколько ином виде:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_i &= (x_i^0 + x'_i)\cos(\omega_0 + \omega) t - (y_i^0 + y'_i)\sin(\omega_0 + \omega) t, \\ \tilde{y}_i &= (x_i^0 + x'_i)\sin(\omega_0 + \omega) t + (y_i^0 + y'_i)\cos(\omega_0 + \omega) t, \\ \tilde{z}_i &= z_i^0 + z_i, \end{aligned}\right\} \tag{29.5}$$

т. е. явно ввести релятивистскую поправку ω к ньютоновой угловой скорости ω_0. Однако легко показать, что в посленьютоновом приближении (29.5) сводится к (29.4). Действительно, разлагая $\cos(\omega_0 t + \omega t)$ и $\sin(\omega_0 t + \omega t)$ по формулам суммы двух углов и ограничиваясь членами первого порядка относительно поправочных функций, приходим к (29.4), если положить

$$x_i \equiv x'_i - \omega y_i^0, \quad y_i \equiv y'_i + \omega x_i^0. \tag{29.6}$$

Итак, подставляем $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{z}_i$ из (29.4) в (29.1). Выделив ньютонову и релятивистскую части, приходим к системе

$$\begin{gathered} \left[m_i(\ddot{x}_i^0 - 2\omega_0\dot{y}_i^0 - \omega_0^2 x_i^0) - \frac{\partial U}{\partial x_i^0} + m_i(\ddot{x}_i - 2\omega_0\dot{y}_i - \omega_0^2 x_i) - \right. \\ \left. - \Phi'_i - X'_i\right]\cos\omega_0 t - \left[m_i(\ddot{y}_i^0 + 2\omega_0\dot{x}_i^0 - \omega_0^2 y_i^0) - \frac{\partial U}{\partial y_i^0} + \right. \\ \left. + m_i(\ddot{y}_i + 2\omega_0\dot{x}_i - \omega_0^2 y_i) - \Phi''_i - X''_i\right]\sin\omega_0 t = 0; \end{gathered} \tag{29.7}$$

$$m_i(\ddot{x}_i^0 - 2\omega_0\dot{y}_i^0 - \omega_0^2 x_i^0) - \frac{\partial U}{\partial x_i^0} + m_i(\ddot{x}_i - 2\omega_0\dot{y}_i - \omega_0^2 x_i) -$$

$$\left. - \Phi_i' - X_i' \right] \sin\omega_0 t + \left[m_i(\ddot{y}_i^0 + 2\omega_0\dot{x}_i^0 - \omega_0^2 y_i^0) - \frac{\partial U}{\partial y_i^0} + \right.$$

$$\left. + m_i(\ddot{y}_i + 2\omega_0\dot{x}_i - \omega_0^2 y_i) - \Phi_i'' - X_i'' \right] \cos\omega_0 t = 0; \qquad (29.8)$$

$$m_i\ddot{z}_i^0 - \frac{\partial U}{\partial z_i^0} + m_i\ddot{z}_i - \Psi_i - \dot{Z}_i = 0; \qquad (29.9)$$

в которой через Φ_i', Φ_i'', Ψ_i и X_i', X_i'' обозначены релятивистские члены, происшедшие из $\partial\tilde{U}/\partial\tilde{x}_i$, $\partial\tilde{U}/\partial\tilde{y}_i$, $\partial\tilde{U}/\partial\tilde{z}_i$ и X_i, Y_i соответственно. Уравнения (29.7), (29.8) можно рассматривать как систему двух линейных однородных уравнений с двумя неизвестными (стоящими в квадратных скобках) с определителем

$$\begin{vmatrix} \cos\omega_0 t & -\sin\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Поэтому каждая квадратная скобка равна нулю. Кроме того, в силу ньютоновых уравнений (28.10) в (29.7)—(29.9) пропадают все члены, содержащие в явной записи x_i^0, y_i^0, z_i^0 и их производные. Раскрывая подробно выражения Φ_i', Φ_i'', X_i', X_i'', Ψ_i, Z_i для круговых лагранжевых решений ограниченной задачи (т. е. используем (28.8)), получаем окончательные уравнения для нахождения релятивистских поправочных функций x_i, y_i, z_i:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_1 - 2\omega_0\dot{y}_2 - \omega_0^2 x_1 - \frac{2\gamma m_2}{r_0^3}(x_1 - x_2) + \\ &\quad + \frac{\gamma m_2\omega_0^2}{c^2 m^2}(3m_1^2 + 5m_1 m_2 + 3m_2^2) = 0, \\ &\ddot{y}_1 + 2\omega_0\dot{x}_1 - \omega_0^2 y_1 + \frac{\gamma m_2}{r_0^3}(y_1 - y_2) = 0, \\ &\ddot{z}_1 + \frac{\gamma m_2}{r_0^3}(z_1 - z_2) = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (29.10)$$

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_2 - 2\omega_0\dot{y}_2 - \omega_0^2 x_2 + \frac{2\gamma m_1}{r_0^3}(x_1 - x_2) - \\ &\quad - \frac{\gamma m_1\omega_0^2}{c^2 m^2}(3m_1^2 + 5m_1 m_2 + 3m_2^2) = 0, \\ &\ddot{y}_2 + 2\omega_0\dot{x}_2 - \omega_0^2 y_2 - \frac{\gamma m_1}{r_0^3}(y_1 - y_2) = 0, \\ &\ddot{z}_2 - \frac{\gamma m_1}{r_0^3}(z_1 - z_2) = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (29.11)$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_3 - 2\omega_0 \dot{y}_3 - a_1 x_3 + 3b_1 y_3 + V_1 + a_0 = 0, \\ \ddot{y}_3 + 2m_0 \dot{x}_3 + 3b_1 x_3 - a_2 y_3 + V_2 + b_0 = 0, \\ \ddot{z}_3 + \left[\frac{\gamma m_1}{(r_{13}^0)^3} + \frac{\gamma m_2}{(r_{23}^0)^3}\right] z_3 = \frac{\gamma m_1}{(r_{13}^0)^3} z_1 + \frac{\gamma m_2}{(r_{23}^0)^3} z_2. \end{aligned}\right\} \quad (29.12)$$

В последней системе a_0, b_0 — некоторые постоянные, структура которых нас не интересует. Постоянные a_1, a_2, b_1 определяются выражениями:

$$a_1 \equiv \omega_0^2 - \frac{\gamma m_1}{(r_{13}^0)^3} - \frac{\gamma m_2}{(r_{23}^0)^3} + \frac{3\gamma m_1}{(r_{13}^0)^5}(x_1^0 - x_3^0)^2 + \\ + \frac{3\gamma m_2}{(r_{23}^0)^5}(x_2^0 - x_3^0)^2; \quad (29.13)$$

$$a_2 \equiv \omega_0^2 - \frac{\gamma m_1}{(r_{13}^0)^3} - \frac{\gamma m_2}{(r_{23}^0)^3} + \frac{3\gamma m_1}{(r_{13}^0)^5}(y_3^0)^2 + \frac{3\gamma m_2}{(r_{23}^0)^5}(y_3^0)^2; \quad (29.14)$$

$$b_1 \equiv \left[\frac{\gamma m_1}{(r_{13}^0)^5}(x_1^0 - x_3^0) + \frac{\gamma m_2}{(r_{23}^0)^5}(x_2^0 - x_3^0)\right] y_3^0. \quad (29.15)$$

Величины V_1, V_2 являются линейными функциями x_1, x_2, y_1, y_2 с постоянными коэффициентами:

$$V_1 \equiv -\gamma m_1 \left[\left(\frac{1}{r_{13}^0}\right)^3 - \frac{3}{(r_{13}^0)^5}(x_1^0 - x_3^0)^2\right] x_1 - \frac{\gamma m_2}{(r_{23}^0)^3}\left[1 - \frac{3}{(r_{23}^0)^2}(x_2^0 - \right. \\ \left. - x_3^0)^2\right] x_2 - \frac{3\gamma m_1}{(r_{13}^0)^5}(x_1^0 - x_3^0) y_3^0 y_1 - \frac{3\gamma m_2}{(r_{23}^0)^5}(x_2^0 - x_3^0) y_3^0 y_2; \quad (29.16)$$

$$V_2 \equiv -\frac{3\gamma m_1}{(r_{13}^0)^5}(x_1^0 - x_3^0) y_3^0 x_1 - \frac{3\gamma m_2}{(r_{23}^0)^5}(x_2^0 - x_3^0) y_3^0 x_2 - \\ - \frac{\gamma m_1}{(r_{13}^0)^3}\left[1 - \frac{3}{(r_{13}^0)^2}(y_3^0)^2\right] y_1 - \frac{\gamma m_2}{(r_{23}^0)^3}\left[1 - \frac{3}{(r_{23}^0)^2}(y_3^0)^2\right] y_2. \quad (29.17)$$

Итак, (29.10)—(29.12) образуют систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Интегрирование такой системы не представляет никаких принципиальных трудностей. Вычислительная часть облегчается тем, что вся система распадается на подсистемы: система для x_1, y_1, x_2, y_2; система для z_1, z_2; система для x_3, y_3 и одно уравнение для z_3.

Общее решение

Проводя стандартную процедуру (см., например, [43]), находим общее решение системы (29.10)—(29.11):

$$x_1 = (c_1 t + c_3 + \gamma m_2 c_6) \sin \omega_0 t - (c_2 t + c_4 - \gamma m_2 c_5) \cos \omega_0 t + \\ + 2\gamma m_2 c_7 + \frac{\gamma m_2}{3c^2 m^2} (3m_1^2 + 5m_1 m_2 + 3m_2^2); \tag{30.1}$$

$$x_2 = (c_1 t + c_3 - \gamma m_1 c_6) \sin \omega_0 t - (c_2 t + c_4 + \gamma m_1 c_5) \cos \omega_0 t - \\ - 2\gamma m_1 c_7 - \frac{\gamma m_1}{3c^2 m^2} (3m_1^2 + 5m_1 m_2 + 3m_2^2); \tag{30.2}$$

$$y_1 = (c_1 t + c_3 + 2\gamma m_2 c_6) \cos \omega_0 t + (c_2 t + c_4 - 2\gamma m_2 c_5) \sin \omega_0 t - \\ - 3\gamma m_2 \omega_0 c_7 t + \gamma m_2 c_8; \tag{30.3}$$

$$y_2 = (c_1 t + c_3 - 2\gamma m_1 c_6) \cos \omega_0 t + (c_2 t + c_4 + 2\gamma m_1 c_5) \sin \omega_0 t + \\ + 3\gamma m_1 \omega_0 c_7 t - \gamma m_1 c_8; \tag{30.4}$$

$$z_1 = \gamma m_2 (c_{11} \cos \omega_0 t + c_{12} \sin \omega_0 t) + c_9 t + c_{10}; \tag{30.5}$$

$$z_2 = -\gamma m_1 (c_{11} \cos \omega_0 t + c_{12} \sin \omega_0 t) + c_9 t + c_{10}, \tag{30.6}$$

где c_n $(n = 1, 2, \ldots, 12)$ — постоянные интегрирования.

Прежде чем воспользоваться найденным общим решением (30.1)—(30.6), исключим из этого решения равномерное прямолинейное движение центра тяжести системы двух тяжелых тел, определенного по рецепту ньютоновой теории, а также постоянное смещение из точки O. Для этого требуем выполнимости условий:

$$m_1 \tilde{x}_1 + m_2 \tilde{x}_2 = 0, \quad m_1 \tilde{y}_1 + m_2 \tilde{y}_2 = 0, \quad m_1 \tilde{z}_1 + m_2 \tilde{z}_2 = 0. \tag{30.7}$$

Их выполнимость, как нетрудно показать, осуществляется при следующих ограничениях на c_n:

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_9 = c_{10} = 0. \tag{30.8}$$

Переходим к решению системы (29.12) для третьего легкого тела A_3. Уравнение для z_3 интегрируется независимо от первых двух уравнений. Подставив в него z_1 и z_2 из (30.5), (30.6) при условии (30.8), находим общее решение вида

$$z_3 = b' \cos a' t + b'' \sin a'' t, \tag{30.9}$$

где b', b'' — произвольные постоянные интегрирования; a', a'' — постоянные.

Характеристическое уравнение однородной части первых двух уравнений системы (29.12) будет следующим:

$$\lambda^4+(4\omega_0^2-a_1-a_2)\lambda^2+a_1a_2-9b_1^2=0, \qquad (30.10)$$

где a_1, a_2, b_1 определяются формулами (29.13)—(29.15). Свойства решений системы (29.12) существенно зависят от значений корней характеристического уравнения (30.10). В свою очередь эти значения будут разными для треугольной и коллинеарной лагранжевых решений. Внутри этих решений также будут подслучаи. Переходим к подробному рассмотрению всех возможностей.

Треугольное лагранжево решение

В этом случае выполняются соотношения (28.8), (28.9). Выберем точку либрации L_4 $(y_3^0>0)$. Тогда легко подсчитываем:

$$a_1=\frac{3}{4}\omega_0^2,\ a_2=\frac{9}{4}\omega_0^2,\ b_1=-\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{m_1-m_2}{m}\omega_0^2. \qquad (30.11)$$

Характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^4+\omega_0^2\lambda^2+\frac{27}{4}\frac{m_1m_2}{m^2}\omega_0^4=0. \qquad (30.12)$$

Его решение

$$\lambda=\pm\omega_0\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2-25m_1m_2}}{2m}\right)^{1/2}. \qquad (30.13)$$

Не ограничивая общности рассуждений, здесь и далее будем считать $m_1\geqslant m_2$. Следует различать три случая.

а) Если

$$m_1>\frac{25+3\sqrt{69}}{2}m_2\approx 24{,}959m_2, \qquad (30.14)$$

то все корни (30.13) уравнения (30.12) чисто мнимые и различные. Введя обозначения

$$a^2\equiv\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2-25m_1m_2}}{2m},$$

$$b^2\equiv\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2-25m_1m_2}}{2m}, \qquad (30.15)$$

получим общее решение однородной системы, соответствующей первым двум уравнениям системы (29.12):

$$x_3=\left(2a\bar{c}_1-\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{m_1-m_2}{m}\bar{c}_2\right)\sin a\omega_0 t-$$

$$-\left(2a\bar{c}_2+\frac{3\sqrt{3}}{4}\,\frac{m_1-m_2}{m}\,\bar{c}_1\right)\cos a\omega_0 t+$$

$$+\left(2b\bar{c}_3-\frac{3\sqrt{3}}{4}\,\frac{m_1-m_2}{m}\,\bar{c}_4\right)\sin b\omega_0 t-$$

$$-\left(2b\bar{c}_4+\frac{3\sqrt{3}}{4}\,\frac{m_1-m_2}{m}\,\bar{c}_3\right)\cos b\omega_0 t; \qquad (30.16)$$

$$y_3=\left(a^2+\frac{3}{4}\right)(\bar{c}_1\cos a\omega_0 t+\bar{c}_2\sin a\omega_0 t)+$$

$$+\left(b^2+\frac{3}{4}\right)(\bar{c}_3\cos b\omega_0 t+\bar{c}_4\sin b\omega_0 t), \qquad (30.17)$$

где $\bar{c}_\alpha$ — произвольные постоянные интегрирования.

б) Если

$$m_1=\frac{25+3\sqrt{69}}{2}\,m_2, \qquad (30.18)$$

то корни (30.13) двукратные, чисто мнимые:

$$\lambda_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\omega_0 i,\quad \lambda_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\omega_0 i. \qquad (30.19)$$

В этом случае общее решение однородной системы имеет вид:

$$x_3=\left[\frac{\sqrt{23}}{4}c_1'+\sqrt{2}\,c_2'+\frac{2}{5}c_3'+\frac{\sqrt{46}}{5}c_4'+\left(\frac{\sqrt{23}}{4}c_3'+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{2}\,c_4'\right)\omega_0 t\right]\cos\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}+\left[-\sqrt{2}\,c_1'+\frac{\sqrt{23}}{4}c_2'-\frac{\sqrt{46}}{5}c_3'+\frac{2}{5}c_4'+\right.$$

$$\left.+\left(-\sqrt{2}\,c_3'+\frac{\sqrt{23}}{4}c_4'\right)\omega_0 t\right]\sin\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}; \qquad (30.20)$$

$$y_3=-\frac{5}{4}\left[(c_1'+c_3'\omega_0 t)\cos\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}+(c_2'+c_4'\omega_0 t)\sin\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right], \qquad (30.21)$$

где c_α' — произвольные постоянные интегрирования.

в) Если

$$m_1<\frac{25+3\sqrt{69}}{2}\,m_2. \qquad (30.22)$$

то корни (30.13) характеристического уравнения (30.12) комплексные и различные. Введя обозначения

$$\lambda_{1,2}=\omega_0(\alpha'\pm\beta' i),\ \lambda_{3,4}=-\omega_0(\alpha'\pm\beta' i),\ \alpha'>0, \qquad (30.23)$$

получим общее решение однородной системы в виде:

$$x_3 = e^{\alpha'\omega_0 t}\left\{\left[\left(2\alpha' + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{m_1-m_2}{m}\right)c_1^* + 2\beta' c_2^*\right]\cos\beta'\omega_0 t + \right.$$
$$\left. + \left[-2\beta' c_1^* + \left(2\alpha' + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{m_1-m_2}{m}\right)c_2^*\right]\sin\beta'\omega_0 t\right\} +$$
$$+ e^{-\alpha'\omega_0 t}\left\{\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{m_1-m_2}{m} - 2\alpha'\right)c_3^* + 2\beta' c_4^*\right]\cos\beta'\omega_0 t + \right.$$
$$\left. + \left[-2\beta' c_3^* + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{m_1-m_2}{m} - 2\alpha'\right)c_4^*\right]\sin\beta'\omega_0 t\right\}; \qquad (30.24)$$

$$y_3 = e^{\alpha'\omega_0 t}\left\{\left[\left(\alpha'^2 - \beta'^2 - \frac{3}{4}\right)c_1^* + 2\alpha'\beta' c_2^*\right]\cos\beta'\omega_0 t + \right.$$
$$\left. + \left[\left(\alpha'^2 - \beta'^2 - \frac{3}{4}\right)c_2^* - 2\alpha'\beta'\, c_1^*\right]\sin\beta'\omega_0 t\right\} +$$
$$+ e^{-\alpha'\omega_0 t}\left\{\left[-2\,\alpha'\beta'\, c_4^* + \left(\alpha'^2 - \beta'^2 - \frac{3}{4}\right)c_3^*\right]\cos\beta'\omega_0 t + \right.$$
$$\left. + \left[2\alpha'\beta'\, c_3^* + \left(\alpha'^2 - \beta'^2 - \frac{3}{4}\right)c_4^*\right]\sin\beta'\omega_0 t\right\}, \qquad (30.25)$$

где c_α^* — произвольные постоянные интегрирования.

Чтобы найти общее решение системы (29.12), нужно еще найти частное решение неоднородной системы, состоящей из первых двух уравнений (29.12). Для этого заменяем в выражениях (29.16), (29.17) x_1, x_2, y_1, y_2 их значениями из (30.1)—(30.4) при условии (30.8). Полученные значения для V_1 и V_2 подставляем в (29.12). Тогда обычным методом находим частное решение вида

$$x_3^* = p_0 + p_1 t + p_2 \cos\omega_0 t + p_3 \sin\omega_0 t;$$
$$y_3^* = q_0 + q_1 t + q_2 \cos\omega_0 t + q_3 \sin\omega_0 t, \qquad (30.26)$$

где $p_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,3\gamma m\omega_0 c_7$, $q_1 = \frac{3}{2}\,\gamma\omega_0(m_1 - m_2)c_7$, а остальные p и q — конкретные постоянные, значения которых нам неинтересны.

Коллинеарное лагранжево решение

В этом случае

$$y_3^0 = 0,\ a_1 = \omega_0^2 + \frac{2\gamma m_1}{(r_{13}^0)^3} + \frac{2\gamma m_2}{(r_{23}^0)^3} > 0,$$
$$a_2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma m_1}{(r_{13}^0)^3} - \frac{\gamma m_2}{(r_{23}^0)^3},\ b_1 = 0. \qquad (30.27)$$

Возможны два подслучая.

а) Тело A_3 в ньютоновом приближении расположено между телами A_1 и A_2. Тогда $r_0 > r^0_{13}$, $r_0 > r^0_{23}$ $(r_0 \equiv r^0_{12})$. Учтя, что $\omega_0^2 = \frac{\gamma m}{r_0^3}$, имеем $a_2 < 0$, два корня характеристического уравнения (30.10) действительные: $\lambda_{1,2} = \pm\lambda_0$ $(\lambda_0 > 0)$, а оставшиеся два — чисто мнимые: $\lambda_{3,4} = \pm\lambda^* i$. Общее решение однородной системы, соответствующей системе (29.12), имеет вид

$$x_3 = 2\omega_0\lambda_0(c_1 e^{\lambda_0 t} + c_2 e^{-\lambda_0 t}) + 2\omega_0\lambda^*(c_3 \cos\lambda^* t + c_4 \sin\lambda^* t);$$
$$y_3 = (\lambda_0^2 - a_1)(c_1 e^{\lambda_0 t} + c_2 e^{-\lambda_0 t}) + + (\lambda^{*2} + a_1)(-c_3 \sin\lambda^* t + c_4 \cos\lambda^* t), \tag{30.28}$$

где

$$\lambda_0^2 = \frac{a_1 + a_2 - 4\omega_0^2 + \sqrt{(a_1 + a_2 - 4\omega_0^2)^2 - 4a_1a_2}}{2};$$
$$\lambda^{*2} = \frac{4\omega_0^2 - a_1 - a_2 + \sqrt{(a_1 + a_2 - 4\omega_0^2)^2 - 4a_1a_2}}{2}. \tag{30.29}$$

б) В ньютоновом приближении тело A_2 расположено между телами A_1 и A_3. Тогда, учитывая $r^0_{13} = r_0 + r^0_{23}$ и $\omega_0^2 = \gamma m / r_0^3$, имеем $a_2 > 0$ и все корни характеристического уравнения (30.10) чисто мнимые. Введя обозначения

$$\nu_0^2 = \frac{1}{2}\left[4\omega_0^2 - a_1 - a_2 + \sqrt{(a_1 + a_2 - 4\omega_0^2)^2 - 4a_1a_2}\right];$$
$$\nu^{*2} = \frac{1}{2}\left[4\omega_0^2 - a_1 - a_2 - \sqrt{(a_1 + a_2 - 4\omega_0^2)^2 - 4a_1a_2}\right], \tag{30.30}$$

получим общее решение однородной системы, соответствующей системе (29.12):

$$x_3 = 2\omega_0\nu_0(c_1' \sin\nu_0 t - c_2' \cos\nu_0 t) + + 2\omega_0\nu^*(c_3' \sin\nu^* t - c_4' \cos\nu^* t);$$
$$y_3 = (\nu_0^2 + a_1)(c_1' \cos\nu_0 t + c_2' \sin\nu_0 t) + + (\nu^{*2} + a_1)(c_3' \cos\nu^* t + c_4' \sin\nu^* t). \tag{30.31}$$

Чтобы получить общее решение системы (29.12), осталось только найти его частное решение. Применяя стандартную процедуру с использованием соотношений (30.27), находим частное решение вида (30.26), только с другими постоянными p' и q':

$$x_3^* = p_0' + p_1' t + p_2' \cos\omega_0 t + p_3' \sin\omega_0 t;$$
$$y_3^* = q_0' + q_1' t + q_2' \cos\omega_0 t + q_3' \sin\omega_0 t. \tag{30.32}$$

§ 31. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОСЛЕНЬЮТОНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ (29.10)—(29.12)

В предыдущем параграфе полностью проинтегрированы посленьютоновы уравнения движения для системы трех невращающихся тел A_i (ограниченная задача) в случае, когда в ньютоновом приближении берутся круговые лагранжевы решения (треугольное и коллинеарное). Целью этого параграфа будет подробное рассмотрение релятивистских поправок к ньютонову движению.

Прежде всего отметим, что в посленьютоновом приближении движение «почти» плоское. Под этим мы разумеем, что z_1, z_2, z_3 не содержат вековых (растущих со временем) членов (см. (30.5), (30.6) при условии (30.8) и (30.9)), а содержат только периодические малые члены.

Релятивистское взаимное расстояние $\tilde{r}_{12}$ между тяжелыми телами A_1 и A_2 и их релятивистские расстояния до начала координат $\tilde{r}_1 \equiv (\tilde{x}_1^2+\tilde{y}_1^2+\tilde{z}_1^2)^{1/2}$, $\tilde{r}_2 \equiv (\tilde{x}_2^2+\tilde{y}_2^2+\tilde{z}_2^2)^{1/2}$, как легко видно из (30.1) и (30.2) при условии (30.8), отличаются от ньютоновых $r_0=r_{12}^0$, r_1^0, r_2^0 только постоянными и периодическими членами порядка c^{-2}. Следовательно, $\tilde{r}_{12}$, $\tilde{r}_1$, $\tilde{r}_2$ не испытывают вековых изменений и траекториями движения тел A_1 и A_2 в посленьютоновом приближении будут слегка деформированные окружности.

Наличие в выражениях для y_1, y_2 (30.3), (30.4) вековых членов с постоянной c_7 приводит к вековому изменению угла поворота прямой A_1A_2. Справедлива формула

$$\tilde{\varphi}=\omega_0 t+\frac{3\gamma m}{r_0}\omega_0 c_7 t, \qquad (31.1)$$

где $\dfrac{3\gamma m}{r_0}\omega_0 c_7 t$ определяет релятивистскую поправку к ньютонову углу $\varphi_0=\omega_0 t$. Отсюда следует, что угловая скорость вращения прямой, на которой находятся тажелые тела A_1 и A_2, изменяется на постоянную величину $\dfrac{3\gamma m}{r_0}\omega_0 c_7$. В зависимости от начальных условий движения c_7 может принимать отрицательные, нулевое или положительные значения. Это означает, что движение тел A_1 и A_2 по круговой орбите может происходить в посленьютоновом приближении с угловой скоростью меньшей, равной или большей ньютоновой скорости их движения ω_0. Этому факту можно дать следующее объяснение. Постоянные члены с c_7 входят в выражения (30.1), (30.2) для x_1, x_2. Изменение c_7 приводит к изменению радиусов круговых орбит тел A_1 и A_2, а следовательно, и к изменению угловой скорости их движения по круговой орбите.

В частности, если потребовать совпадения в посленьютоновом приближении радиусов (координатных!) круговых орбит тел A_1 и A_2

с их радиусами в ньютоновой теории, то

$$c_7=-\frac{3m_1^2+5m_1m_2+3m_2^2}{6c^2m^2}<0, \tag{31.2}$$

т. е. в посленьютоновом приближении при условии (31.2) угловая скорость движения по круговым орбитам тел A_1 и A_2 меньше ньютоновой ω_0, что полностью согласуется с одним из выводов § 20 (см. текст на с. 92).

Теперь перейдем к рассмотрению закономерностей движения третьего легкого тела A_3.

Если в ньютоновом приближении тела A_i образуют лагранжев треугольник, то легко показывается, что в случае а) $\tilde{r}_{13}$, $\tilde{r}_{23}$ не испытывают вековых изменений, так как вековые члены в (30.3), (30.4) уничтожаются с таковыми в (30.26). Другими словами, с точностью до вековых членов $\tilde{r}_{13}=\tilde{r}_{23}=r_0$ и лагранжев треугольник сохраняется. В случае б) находим, воспользовавшись (30.20), (30.21), (30.26) и (30.1)—(30.4) с условием (30.8), что с точностью до вековых членов

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{13} &= r_0+\left(\mu_1\cos\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}+\nu_1\sin\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)t;\\ \tilde{r}_{23} &= r_0+\left(\mu_2\cos\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}+\nu_2\sin\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)t,\end{aligned} \tag{31.3}$$

где μ и ν с индексами являются некоторыми постоянными, пропорциональными постоянным интегрирования в (30.20), (30.21). Наконец, в случае в) находим, используя выражения (30.24), (30.25), что с точностью до вековых членов

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{13} &= r_0+e^{\alpha'\omega_0 t}(\mu_3\cos\beta'\omega_0 t+\nu_3\sin\beta'\omega_0 t);\\ \tilde{r}_{23} &= r_0+e^{\alpha'\omega_0 t}(\mu_4\cos\beta'\omega_0 t+\nu_4\sin\beta'\omega_0 t),\end{aligned} \tag{31.4}$$

где μ и ν некоторые постоянные.

Таким образом, в случаях б) и в) стороны лагранжевого треугольника изменяются вековым образом, что сказывается на движении третьего тела: оно удаляется от тяжелых тел A_1 и A_2 или приближается к ним. Это зависит от начальных условий (выбора постоянных μ и ν).

Если в ньютоновом приближении берется коллинеарное лагранжево решение, то, как видно из (30.28), (30.31) и (30.32), третье тело A_3 сходит со временем с прямой A_1A_2, т. е. коллинеарность нарушается. Релятивистские расстояния $\tilde{r}_{13}$ и $\tilde{r}_{23}$ меняются вековым образом.

§ 32. ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ТРЕХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

В следующем за ньютоновым приближении уравнения поступательного движения для трех вращающихся тел можно записать в виде (см. (9.2))

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\bar{x}}_i-\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{x}_i}&=X_i+X_i^{(\sigma)},\\ m_i\ddot{\bar{y}}_i-\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}_i}&=Y_i+Y_i^{(\sigma)},\\ m_i\ddot{\bar{z}}_i-\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{z}_i}&=Z_i+Z_i^{(\sigma)},\end{aligned}\right\}\qquad(32.1)$$

где $X_i^{(\sigma)}$, $Y_i^{(\sigma)}$, $Z_i^{(\sigma)}$ — силовые релятивистские добавки, возникающие из-за собственных вращений тел и определяющиеся из $F^i_{a(g\sigma)}$, $F^i_{b(g\sigma)}$, $F^i_{c(g\sigma)}$ (см. (9.3)), а остальные величины имеют тот же смысл, что и в уравнениях (29.1).

Пусть в ньютоновом приближении движение трех тел A_i определяется круговыми треугольными лагранжевыми решениями (28.8), (28.9). Проделывая над уравнениями (32.1) в точности те же операции, что и над уравнениями (29.1), в итоге придем к окончательным уравнениям для нахождения релятивистских поправочных функций x_i, y_i, z_i:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_1-2\omega_0\dot{y}_1-\omega_0^2x_1-\frac{2\gamma m_2}{r_0^3}(x_1-x_2)+\frac{\gamma^2m_2}{c^2mr_0^3}(3m_1^2+\\ &\quad+5m_1m_2+3m_2^2)=-\frac{\gamma m_2\omega_0}{2c^2mr_0^2}[(5m_1+3m_2)\sigma_1^3+\\ &\quad+(2m_1+4m_2)\sigma_2^3],\\ &\ddot{y}_1+2\omega_0\dot{x}_1-\omega_0^2y_1+\frac{\gamma m_2}{r_0^3}(y_1-y_2)=0,\\ &\ddot{z}_1+\frac{\gamma m_2}{r_0^3}(z_1-z_2)=-\frac{\gamma m_2\omega_0}{2c^2mr_0^2}\{[(7m_1+6m_2)\sigma_1^1+\\ &\quad+(7m_1+8m_2)\sigma_2^1]\cos\omega_0t+[(7m_1+6m_2)\sigma_1^2+(7m_1+\\ &\quad+8m_2)\sigma_2^2]\sin\omega_0t\};\end{aligned}\right\}\qquad(32.2)$$

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_2-2\omega_0\dot{y}_2-\omega_0^2x_2+\frac{2\gamma m_1}{r_0^3}(x_1-x_2)-\frac{\gamma^2m_1}{c^2mr_0^3}(3m_1^2+\\ &\quad+5m_1m_2+3m_2^2)=\frac{\gamma m_1\omega_0}{2c^2mr_0^2}[(4m_1+2m_2)\sigma_1^3+(3m_1+\\ &\quad+5m_2)\sigma_2^3],\\ &\ddot{y}_2+2\omega_0\dot{x}_2-\omega_0^2y_2-\frac{\gamma m_1}{r_0^3}(y_1-y_2)=0,\\ &\ddot{z}_2=\frac{\gamma m_1}{r_0^3}(z_1-z_2)=\frac{\gamma m_1\omega_0}{2c^2mr_0^2}\{[(8m_1+7m_2)\sigma_1^1+\\ &\quad+(6m_1+7m_2)\sigma_2^1]\cos\omega_0t+[(8m_1+7m_2)\sigma_1^2+\\ &\quad+(6m_1+7m_2)\sigma_2^2]\sin\omega_0t\};\end{aligned}\right\}\qquad(32.3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_3 - 2\omega_0\dot{y}_3 - \frac{3}{4}\omega_0^2 x_3 \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_0^2\frac{m_1 - m_2}{m}y_3 + \\
&+ \frac{\gamma}{4r_0^3}(-m_1x_1 - m_2x_2 \pm 3\sqrt{3}m_1y_1 \mp 3\sqrt{3}m_2y_2) + \\
&+ a_0 = \frac{3\gamma\omega_0}{4c^2r_0^2}(m_1 - m_2)\sigma_3^3 + \frac{\gamma\omega_0}{8c^2mr_0^2}[(8m_1 + 9m_2)m_1\sigma_1^3 - \\
&\qquad - (9m_1 + 8m_2)m_2\sigma_2^3], \\
&\ddot{y}_3 + 2\omega_0\dot{x}_3 \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_0^2\frac{m_1 - m_2}{m}x_3 - \frac{9}{4}\omega_0^2 y_3 + \\
&+ \frac{\gamma}{4r_0^3}(\pm 3\sqrt{3}m_1x_1 \mp 3\sqrt{3}m_2x_2 + 5m_1y_1 + 5m_2y_2) + \\
&+ b_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{8}\frac{\gamma\omega_0}{c^2mr_0^2}[(8m_1 + 5m_2)m_1\sigma_1^3 + \\
&+ (5m_1 + 8m_2)m_2\sigma_2^3 + 6(m_1^2 + 3m_1m_2 + m_2^2)\sigma_3^3], \\
&\ddot{z}_3 + \omega_0^2 z_3 - \frac{\gamma}{r_0^2}(m_1z_1 + m_2z_2) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,
\end{aligned}\right\} \quad (32.4)$$

где

$$A \equiv \frac{\gamma\omega_0}{2c^2r_0^2}\left[(4m_1 + 3m_2)\frac{m_1}{m}\sigma_1^1 - (3m_1 + 4m_2)\frac{m_2}{m}\sigma_2^1 \pm \right.$$
$$\left.\pm 4\sqrt{3}m_1\sigma_1^2 \pm 4\sqrt{3}m_2\sigma_2^2 + 3(m_1 - m_2)\sigma_3^1 \pm 3\sqrt{3}m\sigma_3^2\right]; \quad (32.5)$$

$$B \equiv \frac{\gamma\omega_0}{2c^2r_0^2}\left[(4m_1 + 3m_2)\frac{m_1}{m}\sigma_1^2 - (3m_1 + 4m_2)\frac{m_2}{m}\sigma_2^2 \mp \right.$$
$$\left.\mp 4\sqrt{3}m_1\sigma_1^1 \mp 4\sqrt{3}m_2\sigma_2^1 + 3(m_1 - m_2)\sigma_3^2 \mp 3\sqrt{3}m\sigma_3^1\right]. \quad (32.6)$$

Двойные знаки в (32.4)—(32.6) появились в силу двойного знака у y_3^0 в (28.9). Верхние знаки всюду соответствуют точке либрации L_4, нижние — L_5; $\vec{\sigma}_i = \{\sigma_i^1, \sigma_i^2, \sigma_i^3\}$ — бывшие $\vec{\sigma}_a$, $\vec{\sigma}_b$, $\vec{\sigma}_c$.

Интегрирование системы (32.2)—(32.4) не представляет каких-либо принципиальных трудностей, ибо это система обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородная часть пропорциональна $\sin\omega_0 t$ и $\cos\omega_0 t$. Сначала интегрируем систему (32.2), (32.3) для двух тяжелых тел. Применяя стандартную процедуру интегрирования, получаем следующее общее решение:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2m_2}{3\omega_0} c_2 + \left(c_3 + c_5 t - \frac{2m_1 + m_2}{2m} c_8\right) \cos \omega_0 t + \\
&+ \left(c_4 + c_6 t + \frac{2m_1 + m_2}{2m} c_7\right) \sin \omega_0 t + \frac{\gamma m_2}{3c^2 m^2} (3m_1^2 + 5m_1 m_2 + \\
&+ 3m_2^2) + \frac{m_2 r_0 \omega_0}{6c^2 m^2} [(5m_1 + 3m_2)\sigma_1^3 + (2m_1 + 4m_2)\sigma_2^3], \\
y_1 &= -m_2 (c_1 + c_2 t) + \left(c_7 + c_6 + \frac{m_1 + 2m_2}{m} c_4\right) \cos \omega_0 t + \\
&+ \left(c_8 - c_5 t - \frac{m_1 + 2m_2}{m} c_3\right) \sin \omega_0 t, \\
z_1 &= m_2 (c_9 \cos \omega_0 t + c_{10} \sin \omega_0 t) + c_{11} t + c_{12} + \\
&+ \frac{\gamma m_2}{2c^2 m r_0^2} \{[(4m_1 + 3m_2)\sigma_1^2 + (3m_1 + 4m_2)\sigma_2^2]\, t \cos \omega_0 t - \\
&- [(4m_1 + 3m_2)\sigma_1^1 + (3m_1 + 4m_2)\sigma_2^1]\, t \sin \omega_0 t\};
\end{aligned}\right\} \quad (32.7)$$

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= -\frac{2m_1}{3\omega_0} c_2 + \left(c_5 t - \frac{m_1}{2m} c_8\right) \cos \omega_0 t + \\
&+ \left(c_6 t + \frac{m_1}{2m} c_7\right) \sin \omega_0 t - \frac{\gamma m_1}{3c^2 m^2} (3m_1^2 + 5m_1 m_2 + 3m_2^2) - \\
&- \frac{m_1 r_0 \omega_0}{6c^2 m^2} [(4m_1 + 2m_2)\sigma_1^3 + (3m_1 + 5m_2)\sigma_2^3], \\
y_2 &= m_1 (c_1 + c_2 t) + \left(\frac{m_1}{m} c_3 - c_5 t\right) \sin \omega_0 t + \\
&+ \left(-\frac{m_1}{m} c_4 + c_6 t\right) \cos \omega_0 t, \\
z_2 &= -m_1 (c_9 \cos \omega_0 t + c_{10} \sin \omega_0 t) + c_{11} t + c_{12} - \\
&- \frac{\gamma m_1}{2c^2 r_0^2 \omega_0} [(\sigma_1^1 - \sigma_2^1) \cos \omega_0 t + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \sin \omega_0 t] + \\
&+ \frac{\gamma m_1}{2c^2 m r_0^2} \{[(4m_1 + 3m_2)\sigma_1^1 + (3m_1 + 4m_2)\sigma_2^1]\, t \sin \omega_0 t - \\
&- [(4m_1 + 3m_2)\sigma_1^2 + (3m_1 + 4m_2)\sigma_2^2]\, t \cos \omega_0 t\}.
\end{aligned}\right\} \quad (32.8)$$

Прежде чем отыскивать решение системы (32.4), исключим равномерное прямолинейное движение определенного в ньютоновом смысле центра тяжести системы двух тяжелых тел и его постоянное смещение относительно ньютонова центра тяжести. Для этого следует некоторым постоянным интегрирования c_n придать определенные значения, именно:

$$c_5 = c_6 = c_{11} = c_{12} = 0, \quad c_3 = c_8, \quad c_4 = -c_7. \qquad (32.9)$$

Теперь подставим x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 из (32.7) и (32.8) при условии (32.9) в уравнения движения третьего легкого тела (32.4). Эти уравнения в своей однородной части совпадают с уравнениями (29.12). Поэтому имеем те же три типа фундаментальных решений (см. (30.16), (30.17); (30.20), (30.21); (30.24), (30.25)) в зависимости от значений масс m_1 и m_2 тяжелых тел (см. (30.14), (30.18), (30.22)).

Что касается частного решения системы (32.4), то его можно выбрать следующим:

$$\begin{aligned} x_3^* &= p_0^* + p_1^* t + p_2^* \cos\omega_0 t + p_3^* \sin\omega_0 t; \\ y_3^* &= q_0^* + q_1^* t + q_2^* \cos\omega_0 t + q_3^* \sin\omega_0 t; \\ z_3^* &= \left[\frac{\gamma m_1 m_2}{4c^2 m r_0^2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \frac{B}{2\omega_0}\right] t\cos\omega_0 t + \\ &+ \left[\frac{\gamma m_1 m_2}{4c^2 m r_0^2}(\sigma_2^1 - \sigma_1^1) + \frac{A}{2\omega_0}\right] t\sin\omega_0 t, \end{aligned} \tag{32.10}$$

где $p_1^* = \mp \frac{\sqrt{3}}{2} m c_2$, $q_1^* = \frac{1}{2}(m_1 - m_2) c_2$, а остальные p^* и q^* — конкретные постоянные, включающие в себя σ, значения которых для нас несущественны.

Переходя к обсуждению результатов интегрирования, сразу же замечаем, что релятивистские поправки x_i, y_i, z_i к x_i^0, y_i^0, z_i^0 содержат, кроме постоянных и периодических членов, также и вековые члены. Выясним, к каким изменениям по сравнению с ньютоновым лагранжевым движением приводят эти поправки. Подсчеты будем проводить при выполнении условий (32.9).

Так как третье легкое тело не влияет на движение двух тяжелых тел, то рассмотрим сначала закономерности их движения. Для координат центра тяжести, определенного в ньютоновом смысле, имеем:

$$\tilde{x} \equiv m^{-1}(m_1\tilde{x}_1 + m_2\tilde{x}_2) = 0, \quad \tilde{y} \equiv m^{-1}(m_1\tilde{y}_1 + m_2\tilde{y}_2) = 0;$$

$$\begin{aligned} \tilde{z} \equiv m^{-1}(m_1\tilde{z}_1 + m_2\tilde{z}_2) = \frac{\gamma m_1 m_2}{2c^2 m r_0^2 \omega_0} [(\sigma_2^1 - \sigma_1^1)\cos\omega_0 t + \\ + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\sin\omega_0 t]. \end{aligned} \tag{32.11}$$

Отсюда следует, что хотя условие (32.9) исключает прямолинейное равномерное движение и постоянное смещение релятивистского центра тяжести тяжелых тел относительно ньютонового, совпадающего с началом координат O, но точного совпадения релятивистского центра тяжести вращающихся тел с точкой O никаким выбором произвольных постоянных интегрирования добиться невозможно. Однако при усреднении $\tilde{z}$ по ньютоновому периоду $T = 2\pi/\omega_0$

получаем

$$\tilde{z}_{cp}\equiv \frac{1}{T}\int\limits_0^T \tilde{z}dt=0.$$

Как и в случае невращающихся тел (см. § 31), расстояния $\tilde{r}_{12}$, $\tilde{r}_1$, $\tilde{r}_2$ не испытывают вековых изменений и прямая A_1A_2 в посленьютоновом приближении вращается с угловой скоростью, отличной от ньютоновой ω_0. Справедлива формула, аналогичная формуле (31.1):

$$\tilde{\varphi}=\omega_0 t+\frac{m}{r_0}c_2 t, \tag{32.12}$$

т. е. ньютонова угловая скорость вращения прямой A_1A_2 изменяется на постоянную величину $\frac{m}{r_0}c_2$. Это означает, что движение тел A_1 и A_2 по круговым орбитам может происходить в посленьютоновом приближении с угловой скоростью меньшей, равной или большей ω_0 в зависимости от того, c_2 меньше, равно или больше нуля. Выбор произвольной постоянной c_2 зависит от выбора начальных условий движения в посленьютоновом приближении.

Наличие собственных вращений тел приводит к появлению релятивистского векового эффекта — прецессии плоскости ньютоновых орбит тел. Этот эффект обсуждался в § 23. Здесь мы получим его в несколько иной форме.

Определяя релятивистский удельный орбитальный момент импульса тела A_i как

$$\tilde{\vec{M}}_i\equiv[\tilde{\vec{r}}_i\dot{\tilde{\vec{r}}}_i]=[\vec{r}^{\,0}_i\dot{\vec{r}}^{\,0}_i]+[\vec{r}_i\dot{\vec{r}}^{\,0}_i]+[\vec{r}^{\,0}_i\dot{\vec{r}}_i]=\vec{M}^0_i+\vec{M}_i, \tag{32.13}$$

где $\tilde{\vec{r}}_i\equiv\vec{r}^{\,0}_i+\vec{r}_i$ является релятивистским радиус-вектором тела A_i в неподвижной системе координат, а квадратные скобки обозначают, как обычно, векторное произведение, после несложных вычислений получаем с точностью до вековых членов:

$$\vec{M}^0_1=\frac{m_2^2}{m^2}r_0^2\omega_0\vec{e}_3,\quad \vec{M}_1=[\vec{\sigma}\,\vec{M}^0_1]\,t-\frac{m_2^2}{2m}r_0\omega_0c_2t\sin 2\omega_0t\cdot\vec{e}_3,$$

$$\vec{M}^0_2=\frac{m_1^2}{m^2}r_0^2\omega_0\vec{e}_3,\quad \vec{M}_2=[\vec{\sigma}\,\vec{M}^0_2]\,t-\frac{m_1^2}{2m}r_0\omega_0c_2t\sin 2\omega_0t\cdot\vec{e}_3, \tag{32.14}$$

где

$$\vec{\sigma}\equiv\frac{\gamma}{2c^2r_0^3}\left[(4m_1+3m_2)\vec{\sigma}_1+(3m_1+4m_2)\vec{\sigma}_2\right]. \tag{32.15}$$

Получающиеся формально вековые члены в (32.14) с постоянной c_2 обязаны следующему обстоятельству. Решение уравнений

(32.2)—(32.4) мы искали в виде (29.4). Но можно было искать решение и в виде (29.5), т. е. можно было явно предусмотреть релятивистскую поправку ω к ньютоновой угловой скорости ω_0. Как уже отмечалось, в посленьютоновом приближении (29.5) совпадает с (29.4), если выполнено (29.6). Это означает, что члены $-m_2c_2t$ и m_1c_2t в (32.7) и (32.8) связаны с ω, их можно внести под знак cos и sin. Поэтому вековые члены в (32.14) не должны фигурировать. Окончательно находим

$$\vec{\tilde{M}}_1 = \vec{M}_1^0 + \vec{M}_1 = \frac{m_2^2}{m^2} r_0^2\omega_0\vec{e}_3 + [\vec{\sigma}\vec{M}_1^0]\, t, \quad \dot{\vec{\tilde{M}}}_1 = [\vec{\sigma}\vec{M}_1^0];$$

$$\vec{\tilde{M}}_2 = \vec{M}_2^0 + \vec{M}_2 = \frac{m_1^2}{m^2} r_0^2\omega_0\vec{e}_3 + [\vec{\sigma}\vec{M}_2^0]\, t, \quad \dot{\vec{\tilde{M}}}_2 = [\vec{\sigma}\vec{M}_2^0]. \qquad (32.16)$$

Так как $|\vec{\tilde{M}}_1| = \text{const}$, $|\vec{\tilde{M}}_2| = \text{const}$, то равенства (32.16) показывают, что векторы $\vec{\tilde{M}}_1$ и $\vec{\tilde{M}}_2$ прецессируют около постоянного вектора $\vec{\sigma}$ с угловой скоростью, равной по величине $|\vec{\sigma}|$. Это приводит, как упоминалось выше, к прецессии плоскости ньютоновых орбит тел A_1 и A_2 с угловой скоростью $\vec{\sigma}$. Прецессия исчезает только в случае параллельности векторов $\vec{\sigma}$ и $\vec{e}_3$.

Легко показать, что для относительной орбиты тел A_1 и A_2, определяемой вектором $\vec{\tilde{r}} \equiv \vec{\tilde{r}}_2 - \vec{\tilde{r}}_1$, релятивистский удельный орбитальный момент импульса $\vec{\tilde{M}} \equiv [\vec{\tilde{r}}\dot{\vec{\tilde{r}}}]$ и, следовательно, плоскость относительной орбиты прецессирует с той же угловой скоростью $\vec{\sigma}$, а $|\vec{\tilde{M}}| = \text{const}$.

Отметим, что полные орбитальные моменты импульсов $\tilde{m}_1\vec{\tilde{M}}_1$ и $\tilde{m}_2\vec{\tilde{M}}_2$ подчиняются тем же закономерностям, что и $\vec{\tilde{M}}_1$ и $\vec{\tilde{M}}_2$, так как релятивистские массы $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ не содержат вековых членов (см. (6.19) и (8.15)).

Переходим к рассмотрению движения третьего легкого тела. Здесь следует различать три случая (как и для невращающихся тел).

а) Пусть $m^2 > 27m_1m_2$ (это соответствует условию (30.14)). Тогда общее решение системы (32.4) определяется суммой общего решения (30.16), (30.17) и частного решения (32.10). Вековые члены содержатся только в частном решении. Произведя подсчет расстояний $\tilde{r}_{13}$ и $\tilde{r}_{23}$, убеждаемся, что с точностью до вековых членов $\tilde{r}_{13} = \tilde{r}_{23} = r_0$. Иными словами, длины сторон лагранжевого треугольника не испытывают вековых изменений. Отсюда следует, что для треугольника как целого справедлив вековой эффект (32.12), если $c_2 \neq 0$.

Для удельного орбитального момента импульса $\vec{\tilde{M}}_3$, определенного, согласно (32.13), его производной по времени, и модуля получаем выражения (взята точка либрации L_4):

$$\begin{gathered}\vec{\tilde{M}}_3 = \vec{M}_3^0 + \vec{M}_3 = [(x_3^0)^2 + (y_3^0)^2]\,\omega_0 \vec{e}_3 + [\vec{\sigma}^* \vec{M}_3^0]\,t;\\ \dot{\vec{\tilde{M}}}_3 = [\vec{\sigma}^* \vec{M}_3^0],\ |\vec{\tilde{M}}_3| = |\vec{M}_3^0| = \mathrm{const} = r_0^2\omega_0,\end{gathered} \tag{32.17}$$

где

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}^* \equiv \frac{\gamma}{4c^2 m r_0^3}\Big\{&3\sqrt{3}\, m_1 m_2 [(\sigma_1^1 - \sigma_2^1)\vec{e}_2 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\vec{e}_1] +\\ &+ (8m_1^2 + 11 m_1 m_2 + 5m_2^2)\frac{m_1}{m}\vec{\sigma}_1 + (5m_1^2 + 11 m_1 m_2 + 8m_2^2)\frac{m_2}{m}\vec{\sigma}_2 +\\ &+ 12(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)\vec{\sigma}_3\Big\}.\end{aligned} \tag{32.18}$$

Таким образом, третье легкое тело A_3 движется по круговой орбите в плоскости, которая в то же время прецессирует с постоянной угловой скоростью $\vec{\sigma}^*$. Прецессия исчезает лишь в случае параллельности векторов $\vec{\sigma}^*$ и $\vec{e}_3$. Так как векторы $\vec{\sigma}$ и $\vec{\sigma}^*$ не равны, то прецессии плоскостей, в которых движутся тяжелые тела A_1, A_2 и легкое тело A_3, происходят по-разному. Например, тяжелые тела могут не вращаться ($\vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma}_2 = 0$). Тогда $\vec{\sigma} = 0$ и плоскость орбит тел A_1 и A_2 не будет прецессировать, но при этом

$$\sigma^* = \frac{3\gamma}{c^2 m r_0^3}(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)\,\vec{\sigma}_3 \tag{32.19}$$

и плоскость орбиты легкого тела прецессию совершает.

Кроме отмеченных, существуют еще следующие вековые эффекты: изменяются углы $(i\widehat{\ }j)$. Под символом $(i\widehat{\ }j)$ подразумевается угол, который образует вектор $\vec{\sigma}_i$ с вектором $\vec{\tilde{M}}_j$. Другими словами, $(i\widehat{\ }j)$ обозначает угол между экваториальной плоскостью тела A_i и релятивистской плоскостью орбиты тела A_j. В частности, при $i=j$ имеем угол $(i\widehat{\ }i)$. Вековое изменение углов $(i\widehat{\ }j)$ может быть оценено так же, как это было сделано для угла наклонения i^* в § 23. Если обозначить через $(i\widehat{\ }j)_0$ угол между $\vec{\sigma}_i$ и $\vec{M}_j^0$, то

$$\cos(\widehat{ij})_0 = \frac{(\vec{\sigma}_i \vec{M}_j^0)}{|\vec{\sigma}_i|\cdot|\vec{M}_j^0|}, \quad \cos(\widehat{ij}) = \frac{(\vec{\sigma}_i \tilde{\vec{M}}_j)}{|\vec{\sigma}_i|\cdot|\vec{M}_j^0|}, \tag{32.20}$$

так как $|\tilde{\vec{M}}_j| = |\vec{M}_j^0|$. Отсюда в силу (32.13)

$$\cos(\widehat{ij}) - \cos(\widehat{ij})_0 = \frac{(\vec{\sigma}_i \tilde{\vec{M}}_j) - (\vec{\sigma}_i \vec{M}_j^0)}{|\vec{\sigma}_i||\vec{M}_j^0|} = \frac{(\vec{\sigma}_i \vec{M}_j)}{|\vec{\sigma}_i|\cdot|\vec{M}_j^0|} =$$

$$= -\Delta_{ij}\sin(\widehat{ij})_0, \tag{32.21}$$

где $\Delta_{ij} \equiv (\widehat{i\,j}) - (\widehat{i\,j})_0$. Теперь Δ_{ij} легко определяется с помощью выражений (32.16), (32.17):

$$\Delta_{i1} = \Delta_{i2} = -\frac{(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma} \vec{n})}{|\vec{\sigma}_i|\sin\psi_i}t, \quad \Delta_{i3} = -\frac{(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}^* \vec{n})}{|\vec{\sigma}_i|\sin\psi_i}t, \tag{32.22}$$

где $\psi_i = (\widehat{i\,1})_0 = (\widehat{i\,2})_0 = (\widehat{i\,3})_0$, так как $\vec{M}_j^0$ направлены по $\vec{n} = \vec{e}_3$. Рассматриваемые эффекты отсутствуют ($\Delta_{ij} = 0$), если $\vec{\sigma}_i \parallel \vec{n}$, т. е. если экваториальные плоскости тел A_i совпадают с плоскостью ньютоновых орбит этих тел.

Итак, в случае а) лагранжев треугольник, не меняя своих размеров, определенным образом поворачивается в пространстве. Числовые оценки рассмотренных эффектов см. в гл. VI.

б) Пусть $m^2 = 27m_1m_2$ (соответствует условию (30.18)). Пользуясь соответствующим общим решением (состоит из суммы общего решения (30.20), (30.21) и частного решения (32.10)), находим, что $\tilde{\vec{M}}_3$, $|\tilde{\vec{M}}_3|$, $\tilde{r}_{13}$, $\tilde{r}_{23}$ изменяются вековым образом:

$$\tilde{\vec{M}}_3 = \vec{M}_3^0 + [\vec{\sigma}^* \vec{M}_3^0]t + \left(\alpha_0' \cos\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}} + \beta_0' \sin\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) t\vec{n}; \tag{32.23}$$

$$|\tilde{\vec{M}}_3| = |\vec{M}_3^0| + \left(\alpha_0' \cos\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}} + \beta_0' \sin\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) t; \tag{32.24}$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{13} &= r_0 + \left(\alpha_1' \cos\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}} + \beta_1' \sin\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) t; \\ \tilde{r}_{23} &= r_0 + \left(\alpha_2' \cos\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}} + \beta_2' \sin\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) t, \end{aligned} \tag{32.25}$$

где α', β' с индексами являются некоторыми постоянными, пропорциональными постоянным интегрирования в (30.20), (30.21). Если бы в (32.23) и (32.24) последние члены отсутствовали, то, как и в случае а), вектор $\vec{\tilde{M}}_3$ совершал бы прецессию с той же постоянной угловой скоростью $\vec{\sigma}^*$. Но указанные члены несколько нарушают эту прецессию. Происходит некоторое более сложное изменение вектора $\vec{\tilde{M}}_3$, а следовательно, более сложное колебание плоскости орбиты тела A_3. Кроме того, имеют место вековые эффекты, совершенно аналогичные эффектам (32.22):

$$\Delta_{i3} = -\frac{(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}^* \vec{n})}{|\vec{\sigma}_i| \sin\psi_i} t - \frac{(\vec{\sigma}_i \vec{n})}{|\vec{\sigma}_i| \cdot |\vec{M}_3^0| \sin\psi_i} \left(\alpha_0' \cos\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}} + \right.$$
$$\left. + \beta_0' \sin\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) t. \qquad (32.26)$$

Итак, в случае б) две стороны лагранжевого треугольника медленно изменяют свои длины и сам он сложным образом поворачивается в пространстве.

в) Наконец, возможен случай $m^2 < 27 m_1 m_2$ (соответствует случаю (30.22)). На основе (30.24), (30.25), (32.10) и (32.13) аналогичным образом находим:

$$\vec{\tilde{M}}_3 = \vec{M}_3^0 + [\vec{\sigma}^* \vec{M}_3^0]\, t + e^{\alpha' \omega_0 t} (\mu_0 \cos\beta' \omega_0 t +$$
$$+ \nu_0 \sin\beta' \omega_0 t)\, \vec{n}, \quad \alpha' > 0; \qquad (32.27)$$

$$|\vec{\tilde{M}}_3| = |\vec{M}_3^0| + e^{\alpha' \omega_0 t} (\mu_0 \cos\beta' \omega_0 t + \nu_0 \sin\beta' \omega_0 t); \qquad (32.28)$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{r}_{13} &= r_0 + e^{\alpha' \omega_0 t} (\mu_1' \cos\beta' \omega_0 t + \nu_1' \sin\beta' \omega_0 t), \\ \tilde{r}_{23} &= r_0 + e^{\alpha' \omega_0 t} (\mu_2' \cos\beta' \omega_0 t + \nu_2' \sin\beta' \omega_0 t), \end{aligned}\right\} \qquad (32.29)$$

где μ и ν со значками — некоторые постоянные, содержащие множитель c^{-2}. В рассматриваемом случае качественная картина движения та же, что и в случае б). Однако из-за множителя $e^{\alpha' \omega_0 t}$ нарушение чистой прецессии и изменения расстояний происходят значительно быстрее, чем в случае б). То же самое можно сказать об изменениях углов $(\widehat{i3})$:

$$\Delta_{i3} = -\frac{(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}^* \vec{n})}{|\vec{\sigma}_i| \sin\psi_i} t - \frac{(\vec{\sigma}_i \vec{n})\, e^{\alpha' \omega_0 t}}{|\vec{\sigma}_i| \cdot |\vec{M}_3^0| \sin\psi_i} (\mu_0 \cos\beta' \omega_0 t +$$
$$+ \nu_0 \sin\beta' \omega_0 t). \qquad (32.30)$$

В заключение заметим, что можно было бы провести дальнейшее обобщение решенных в § 28—32 задач на случай, когда тела обладают еще электрическими зарядами и магнитными моментами. В этом случае в ньютоновом приближении также существуют лагранжевы решения (треугольное и коллинеарное), а возникающие релятивистские силовые добавки в уравнениях движения, обязанные зарядам и магнитным моментам, имеют ту же структуру, что и в случае незаряженных вращающихся тел. Поэтому, проведя рассуждения и вычисления по схеме, определившейся в § 28—32, придем к соотношениям, выражающим закономерности движения, качественно не отличающиеся от прежних. В этом смысле ничего принципиально нового не получается. В случае двух тел нами приведены в тексте все вычисления (ср. § 23 и 26), которые действительно показывают, что качественная картина движения в постньютоновом приближении незаряженных вращающихся тел и заряженных вращающихся магнитных тел одинакова. Соответствующих вычислений для трех тел здесь приводить не будем.

§ 33. НЕОГРАНИЧЕННАЯ ЛАГРАНЖЕВА ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ В ОТО

Пусть в ньютоновом приближении три тела сравнимых масс движутся в соответствии с решениями Лагранжа. Тогда выполняются соотношения (28.1)—(28.7), (28.10), (28.11). В постньютоновом приближении уравнения движения имеют вид (29.1), а также справедливы все рассуждения и формулы § 29 вплоть до уравнений (29.10), которые уже получены для ограниченной задачи трех тел. Следовательно, для поправочных функций x_i, y_i, z_i находим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &m_i(\ddot{x}_i-2\omega_0\dot{y}_i-\omega_0^2x_i)-\Phi'_i-X'_i=0, &(33.1)\\ &m_i(\ddot{y}_i+2\omega_0\dot{x}_i-\omega_0^2y_i)-\Phi''_i-X''_i=0, &(33.2)\\ &m_i\ddot{z}_i-\Psi_i-Z_i=0. &(33.3)\end{aligned}\right\}$$

Смысл входящих сюда величин тот же, что и в (29.7)—(29.9). Если ньютоново движение плоское ($z_i^0=0$), что мы и предполагаем, то $Z_i=0$, как легко показать на основании равенств $Z_1=\overset{3}{F}_{a(g)}$, $Z_2=\overset{3}{F}_{b(g)}$, $Z_3=\overset{3}{F}_{c(g)}$ и использования выражения (6.23). Величины Ψ_i оказываются линейными (однородными с постоянными коэффициентами) выражениями относительно z_i, а x_i, y_i в Ψ_i вообще не входят. Поэтому система (33.3) легко интегрируется. Ее общее решение при выполнении условия барицентричности $m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3=0$ содержит только периодические малые члены, которыми можно пренебречь. Это означает, что в постньютоновом приближении движение также можно считать плоским ($z_i=0$). Остается система (33.1)—(33.2), в которую не входят z_i, так что ее можно было интегрировать и раньше, чем (33.3). Эта система в случае круговых лагранжевых решений оказывается линейной неоднородной с постоянными коэффициентами относительно неизвестных x_i, y_i. Неоднородность возникает из-за релятивистских силовых добавок X_i', X_i'', которые все являются конкретными постоянными, содержащими множитель c^{-2}.

В случае треугольной лагранжевой задачи имеем:

$$\Phi_1' \equiv \frac{\gamma m_1}{r_0^3}\left\{\left[-m_2-m_3+\frac{3m_2}{r_0^2}(x_1^0-x_2^0)^2+\frac{3m_3}{r_0^2}(x_1^0-x_3^0)^2\right]x_1+\right.$$
$$+\left[m_2+\frac{3m_2}{r_0^2}(x_1^0-x_2^0)^2\right]x_2+\left[m_3-\frac{3m_3}{r_0^2}(x_1^0-x_3^0)^2\right]x_3+$$
$$+\frac{3}{r_0^2}[m_2(x_1^0-x_2^0)(y_1^0-y_2^0)+m_3(x_1^0-x_3^0)(y_1^0-y_3^0)]\,y_1-$$
$$\left.-\frac{3m_2}{r_0^2}(x_1^0-x_2^0)(y_1^0-y_2^0)\,y_2-\frac{3m_3}{r_0^2}(x_1^0-x_3^0)(y_1^0-y_3^0)\,y_3\right\}; \qquad (33.4)$$

$$\Phi_2' \equiv \frac{\gamma m_2}{r_0^3}\left\{\left[m_1-\frac{3m_1}{r_0^2}(x_1^0-x_2^0)^2\right]x_1+\left[-m_1-m_3+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{3m_1}{r_0^2}(x_1^0-x_2^0)^2+\frac{3m_3}{r_0^2}(x_2^0-x_3^0)^2\right]x_2+$$
$$+\left[m_3-\frac{3m_3}{r_0^2}(x_2^0-x_3^0)^2\right]x_3-\frac{3m_1}{r_0^2}(x_1^0-x_2^0)(y_1^0-y_2^0)\,y_1+$$
$$+\frac{3}{r_0^2}[m_1(x_1^0-x_2^0)(y_1^0-y_2^0)+m_3(x_2^0-x_3^0)(y_2^0-y_3^0)]\,y_2-$$
$$\left.-\frac{3m_3}{r_0^2}(x_2^0-x_3^0)(y_2^0-y_3^0)\,y_3\right\}; \qquad (33.5)$$

$$\Phi_3' \equiv \frac{\gamma m_3}{r_0^3}\left\{\left[m_1-\frac{3m_1}{r_0^2}(x_1^0-x_3^0)^2\right]x_1+\left[m_2-\frac{3m_2}{r_0^2}(x_2^0-x_3^0)^2\right]x_2+\right.$$
$$+\left[-m_1-m_2+\frac{3m_1}{r_0^2}(x_1^0-x_3^0)^2+\frac{3m_2}{r_0^2}(x_2^0-x_3^0)^2\right]x_3-$$
$$-\frac{3m_1}{r_0^2}(x_1^0-x_3^0)(y_1^0-y_3^0)\,y_1-\frac{3m_2}{r_0^2}(x_2^0-x_3^0)(y_2^0-y_3^0)\,y_2+$$
$$\left.+\frac{3}{r_0^2}\left[m_1(x_1^0-x_3^0)(y_1^0-y_3^0)+m_2(x_2^0-x_3^0)(y_2^0-y_3^0)\right]y_3\right\}. \qquad (33.6)$$

Выражения для Φ_i'' легко получаются из Φ_i' путем формальной замены букв $x \rightleftarrows y$.

Если за основу взято коллинеарное лагранжево решение, то выражения для Φ_i' и Φ_i'' значительно проще ($y_i^0=0$):

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1' &\equiv \frac{2\gamma m_1 m_2}{(r_{12}^0)^3}(x_1 - x_2) + \frac{2\gamma m_1 m_3}{(r_{13}^0)^3}(x_1 - x_3),\\ \Phi_2' &\equiv -2\gamma m_1 m_2 (r_{12}^0)^{-3}(x_1 - x_2) + 2\gamma m_2 m_3 (r_{23}^0)^{-3}(x_2 - x_3),\\ \Phi_3' &\equiv -2\gamma m_1 m_3 (r_{13}^0)^{-3}(x_1 - x_3) - 2\gamma m_2 m_3 (r_{23}^0)^{-3}(x_2 - x_3);\end{aligned}\right\} \quad (33.7)$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1'' &\equiv \gamma m_1 m_2 (r_{12}^0)^{-3}(y_2 - y_1) + \gamma m_1 m_3 (r_{13}^0)^{-3}(y_3 - y_1),\\ \Phi_2'' &\equiv \gamma m_1 m_2 (r_{12}^0)^{-3}(y_1 - y_2) + \gamma m_2 m_3 (r_{23}^0)^{-3}(y_3 - y_2),\\ \Phi_3'' &\equiv \gamma m_1 m_3 (r_{13}^0)^{-3}(y_1 - y_3) + \gamma m_2 m_3 (r_{23}^0)^{-3}(y_2 - y_3).\end{aligned}\right\} \quad (33.8)$$

Характеристические уравнения однородной части системы (33.1)—(33.2) в обоих случаях (треугольном и коллинеарном) могут иметь корни с действительной положительной частью, нулевые корни и чисто мнимые разной кратности в зависимости от масс тел m_i. В итоге получаем общие решения однородной системы двух классов: содержащие вековые члены типа $e^{\lambda t}$ $(\lambda > 0)$, t, $t \sin \omega' t$, $t \cos \omega' t$ и содержащие только постоянные и периодические члены. Учет релятивистских поправок не меняет характера этих решений.

Но дело принимает другой оборот, если, кроме релятивистских добавок X_i', X_i'', будут учтены добавки на собственное вращение тел, как это было сделано в ограниченной задаче трех тел (см. уравнения (32.1)). В уравнениях (33.1)—(33.3) справа вместо нулей появятся выражения $X_i'^{(\sigma)}$, $X_i''^{(\sigma)}$, $Z_i^{(\sigma)}$, которые приведут к некоторым сложным вековым колебаниям плоскости ньютоновых орбит тел. Эти эффекты обобщают эффекты, рассмотренные в ограниченной задаче трех тел. Вычисления, которые нужно проделать, чтобы получить указанные выводы, очень громоздкие. По этой причине мы их здесь не приводим

Задача трех тел еще более усложняется, если принять во внимание также и взаимодействия зарядов и магнитных моментов тел. Однако, как и в случае ограниченной задачи трех тел, учет этих взаимодействий в постньютоновом приближении не приводит к качественно новым закономерностям движения. Это объясняется сильной аналогией между законами Ньютона и Кулона, свойствами вихревого движения (собственного вращения) и свойствами магнитных полей дипольного типа.

Глава V

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ И ПРОБЛЕМА СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ В ОТО

§ 34. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ОТО

Качественные и приближенные методы исследования в ОТО играют исключительно важную роль. Это объясняется сложностью математического аппарата ОТО и вследствие этого невозможностью получения важных физических следствий теории с помощью точных решений основных и других уравнений ОТО.

Теория устойчивости движения, основы которой созданы Ляпуновым [B.279], относится к одному из важнейших качественных методов исследования, применяемых в различных областях математики, физики и техники. Применение идей Ляпунова к исследованию закономерностей движения тел в теории тяготения Ньютона стало традиционным. Имеется множество работ, посвященных устойчивости движения тел в небесной ньютоновой механике (см. [B.209—B.216, B.219—B.221, B.225, B.236, B.239, B.245—B.251, B.279], а также библиографию, содержащуюся в этих работах). Но устойчивость движения тел в ОТО к настоящему времени изучена недостаточно. Имеется очень немного работ, относящихся к этому кругу вопросов [B.209, B.280—B.292, B.297—B.300].

Строгая и корректная постановка задачи устойчивости движения тел в ОТО оказывается сложнее, чем в классической механике. Возникающие усложнения обязаны римановости пространства-времени V_4. Ранее точки на невозмущенной и возмущенной траекториях считались соответствующими, если они рассматривались в один и тот же момент времени. Такого абсолютного параметра в V_4 не существует, и теперь нужно точно оговорить, какие точки будут называться соответствующими. Соответствие можно установить разными способами (изохронное соответствие, соответствие по нормали, изотропное соответствие и др. [B.283, B.286]). Кроме того, при определении устойчивости необходимо сравнивать касательные векторы в соответствующих точках на невозмущенной и возмущенной траекториях, для чего нужно параллельно вектор из одной точки перенести в другую точку. Но V_4 не обладает абсолютным параллелизмом и операция параллельного перенесения тензоров неоднозначна (зависимость от пути переноса, параллельный перенос Леви-Чивиты, Ли и др.). Следовательно, нужно всегда определять, каким параллельным переносом тензоров мы пользуемся.

Следует также заметить, что в классической механике обычно известны точные дифференциальные уравнения, описывающие исследуемый класс движений. В ОТО точные уравнения движения известны только для пробных тел. Это, например, уравнения геодезических (20.1), уравнения движения Папапетру для вращающейся частицы (10.2), (10.3), уравнения движения для заряженной частицы (14.2). Во всех этих случаях можно дать определение устойчивости (неустойчивости) движения в ОТО, обобщающее определение Ляпунова.

Пусть $\bar{x}^\alpha(s)$ и $x^\alpha(s)$ — координаты соответствующих (по некоторому правилу) точек $\bar{M}$ и M на возмущенной $\bar{\Gamma}$ и невозмущенной Γ траекториях. И пусть также $\bar{u}^\alpha(s)$, $u^\alpha(s)$ — координаты 4-скорости соответственно в точках $\bar{M}$ и M, а $\bar{\bar{u}}^\alpha(s)$ — параллельно перенесенный в некотором смысле вектор $\bar{u}^\alpha(s)$ из точки $\bar{M}$ в точку M.

Определение 1. В случае уравнений движения (20.1) и (14.2) невозмущенная траектория Γ называется устойчивой, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)>0$, что как только $|\bar{x}^\alpha(s_0)-x^\alpha(s_0)|<\delta$, $|\bar{\bar{u}}^\alpha(s_0)-u^\alpha(s_0)|<\delta$, то $|\bar{x}^\alpha(s)-x^\alpha(s)|<\varepsilon$, $|\bar{\bar{u}}^\alpha(s)-\bar{u}^\alpha(s_0)|<\varepsilon$ для любого $s>s_0$.

В противном случае Γ называется неустойчивой. Если при $s\to\infty$ $|\bar{x}^\alpha(s)-x^\alpha(s)|\to 0$, $|\bar{\bar{u}}^\alpha(s)-u^\alpha(s)|\to 0$, то Γ называется асимптотически устойчивой.

В случае вращающейся частицы, кроме уравнений поступательного движения (10.2), имеются еще уравнения для спина частицы (10.3). Поэтому определение 1 следует дополнить. Будет естественным.

Определение 2. Невозмущенное движение в случае уравнений (10.2)—(10.3) называется устойчивым относительно координат траектории $x^\alpha(s)$, 4-скорости $u^\alpha(s)$ и спина $S^\alpha(s)$, если для любого $\varepsilon>0$ всегда найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что как только $|\bar{x}^\alpha(s_0)-x^\alpha(s_0)|<\delta$, $|\bar{\bar{u}}^\alpha(s_0)-u^\alpha(s_0)|<\delta$, $|\bar{\bar{S}}^\alpha(s_0)-S^\alpha(s_0)|<\delta$, то $|\bar{x}^\alpha(s)-x^\alpha(s)|<\varepsilon$, $|\bar{\bar{u}}^\alpha(s)-u^\alpha(s)|<\varepsilon$, $|\bar{\bar{S}}^\alpha(s)-S^\alpha(s)|<\varepsilon$ для всех $s>s_0$. Если по заданному ε не всегда можно найти $\delta(\varepsilon)>0$ такое, чтобы выполнялись все перечисленные условия, то невозмущенное движение называется неустойчивым относительно $x^\alpha(s)$, $u^\alpha(s)$, $S^\alpha(s)$.

Замечание. Определение 2 можно было бы несколько дифференцировать. Например, если выполняются все условия, кроме $|\bar{\bar{S}}^\alpha(s)-S^\alpha(s)|<\varepsilon$, то движение можно назвать частично неустойчивым, точнее: устойчивым относительно траектории движения Γ и неустойчивым относительно спина $S^\alpha(s)$.

Под $\bar{\bar{S}}^\alpha(s)$ понимается параллельно перенесенный (в некотором принятом смысле) вектор $\bar{S}^\alpha(s)$ из точки $\bar{M}$ в точку M, в которой находится вектор $S^\alpha(s)$.

Определение 1, по-видимому, впервые дано в [B.283]. Определение 2 является его естественным обобщением.

Как доказывается в [В.283], определение 1 инвариантно относительно преобразований координат, если использован инвариантный параллельный перенос (например, в смысле Леви-Чивиты). Это утверждение, как легко доказывается, справедливо и для определения 2. Если в определениях 1 и 2 неравенства выполняются при всех s из промежутка (s_0, s_1), то движение будем называть устойчивым в промежутке $s_0<s<s_1$.

В случае тел сравнимых масс строгая формулировка задачи устойчивости движения пока не ясна, так как в этом случае неизвестны точные уравнения движения. Они выведены только в некотором приближении.

На наш взгляд, в настоящее время будет разумной следующая постановка задачи устойчивости для тел сравнимых масс в ОТО. Релятивистские поправки в уравнениях поступательного и вращательного движения (13.4) и (13.11) будем считать постоянно действующими возмущениями по отношению к ньютоновым уравнениям движения:

$$m_a\ddot{a}^i-\sum_b{}'\left(\frac{\gamma m_a m_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i}+\sum_b{}'\left(\frac{e_a e_b}{r_{ab}}\right)_{,a^i}=0; \tag{34.1}$$

$$\dot{S}_a^{ik}=0, \quad (\dot{S}_a^i=0). \tag{34.2}$$

Точка обозначает дифференцирование по t-времени бесконечно удаленного неподвижного наблюдателя.

Введя обозначения

$$\begin{gathered} F_a^i\equiv F^i_{a(g)}+F^i_{a(e)}+F^i_{a(ge)}+F^i_{a(gs)}+F^i_{a(es)}, \\ N_a^{ik}\equiv N^{ik}_{a(gs)}+N^{ik}_{a(es)}, \end{gathered} \tag{34.3}$$

дадим следующее определение устойчивости движения относительно $a^i(t)$, $b^i(t)$, ..., $S_a^{ik}(t)$, $S_b^{ik}(t)$, ... (или $S_a^i(t)$, $S_b^i(t)$, ...).

Определение 3. Невозмущенное движение $a^i(t)$, $b^i(t)$, ..., S_a^{ik}, S_b^{ik}, ... (частное решение уравнений (34.1), (34.2)) устойчиво при постоянно действующих возмущениях F_a^i, F_b^i, ..., N_a^{ik}, N_b^{ik}, ..., если для любого $\varepsilon>0$ всегда найдутся такие $\delta_1(\varepsilon)>0$, $\delta_2(\varepsilon)>0$, что всякое решение $\tilde{a}^i(t)$, $\tilde{b}^i(t)$, ..., $\tilde{S}_a^{ik}(t)$, $\tilde{S}_b^{ik}(t)$, ... уравнений (13.4), (13.11), удовлетворяющее неравенствам

$$|\tilde{a}^i(t_0)-a^i(t_0)|<\delta_1, \quad |\tilde{b}^i(t_0)-b^i(t_0)|<\delta_1, \ \dots,$$

$$|\tilde{S}_a^{ik}(t_0)-S_a^{ik}|<\delta_1, \quad |\tilde{S}_b^{ik}(t_0)-S_b^{ik}|<\delta_1, \ \dots$$

удовлетворяет и неравенствам при любых $t>t_0$

$$\begin{gathered} |\tilde{a}^i(t)-a^i(t)|<\varepsilon, \quad |\tilde{b}^i(t)-b^i(t)|<\varepsilon, \ \dots, \\ |\tilde{S}_a^{ik}(t)-S_a^{ik}|<\varepsilon, \quad |\tilde{S}_b^{ik}(t)-S_b^{ik}|<\varepsilon, \ \dots, \end{gathered} \tag{34.4}$$

каковы бы ни были функции F^i_a, F^i_b, ..., N^{ik}_a, N^{ik}_b, ..., удовлетворяющие в области (34.4) неравенствам

$$|F^i_a(t, a^j, b^j, c^j, \ldots)| < \delta_2, \quad |F^i_b(t, a^j, b^j, c^j, \ldots)| < \delta_2, \ldots,$$
$$|N^{ik}_a(t, a^j, b^j, c^j, \ldots)| < \delta_2, \quad |N^{ik}_b(t, a^j, b^j, c^j, \ldots)| < \delta_2, \ldots . \tag{34.5}$$

Если нарушено хотя бы одно из условий (34.4), то движение называется неустойчивым.

Другими словами, определяется устойчивость ньютонова движения с точки зрения ОТО (с точки зрения первого посленьютонова приближения). Рассмотрение же устойчивости движения тел в самой ОТО даже в посленьютоновом приближении нуждается в знании уравнений движения по крайней мере в послепосленьютоновом приближении.

Если устойчивость будет рассматриваться относительно расстояний между телами r_{ab}, r_{ac}, ... , модулей $|\vec{S}_a|$, $|\vec{S}_b|$, $|\vec{S}_c|$, ... и т. д., то нужно будет учитывать искривленность трехмерного пространства, т. е. эти величины вычислять не по формулам евклидового пространства, а по правилам, действующим в искривленном пространстве (см. [B.13], § 84).

Отметим, что данное здесь определение 3 устойчивости вполне соответствует определению устойчивости при постоянно действующих возмущениях в [1], § 4.

§ 35. ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРОБНЫХ ТЕЛ В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА И В ПОЛЕ КЕРРА

Устойчивость круговых орбит в поле Шварцшильда методами Ляпунова впервые исследовалась Пирагасом [B.284, B.286]. Получен следующий результат. В смысле определения 1 из § 34 круговое движение пробного тела неустойчиво в области $\frac{3}{2} r_g < r \leqslant 3r_g$ и устойчиво неасимптотически в области $r > 3r_g$. В области $r < \frac{3}{2} r_g$ круговые движения в поле Шварцшильда невозможны, что было известно еще Эйнштейну [III.3] (см. § 20). Движение на круговой орбите с $r = \frac{3}{2} r_g$ происходит со скоростью света.

В данном параграфе будем решать следующую задачу: найти в поле Керра: а) области существования точных круговых движений пробных тел и б) исследовать эти движения на устойчивость (неустойчивость) в смысле определения 1.

а) Многие считают [B.15, B.294—B.296], что решение Керра описывает гравитационное поле вне массивного вращающегося тела в ОТО, что уже было использовано в § 21. Имеются и другие интерпретации и указываются трудности в физическом истолковании этого решения [2, 3]. Метрику поля Керра возьмем в той же форме (21.1).

Геодезические линии $x^\alpha = x^\alpha(p)$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^\alpha}{dp^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{dp}\frac{dx^\gamma}{dp} = 0, \tag{35.1}$$

где p — канонический параметр (см., например, [В.8]). Система (35.1) всегда имеет первый интеграл

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dp}\frac{dx^\beta}{dp} = C = \text{const}. \tag{35.2}$$

Постоянная C для реальных движений неотрицательна. При $C>0$ движение происходит со скоростью, меньшей световой; $C=0$ соответствует изотропной геодезической. Символы Кристоффеля $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ выражаются через метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ по формулам (3.6), согласно которым в случае метрики (21.1) отличными от нуля будут

$$\begin{gathered}\Gamma^0_{01},\ \Gamma^0_{02},\ \Gamma^0_{13},\ \Gamma^0_{23},\ \Gamma^1_{00},\ \Gamma^1_{03},\ \Gamma^1_{11},\ \Gamma^1_{12},\ \Gamma^1_{22},\ \Gamma^1_{33},\\ \Gamma^2_{00},\ \Gamma^2_{03},\ \Gamma^2_{11},\ \Gamma^2_{22},\ \Gamma^2_{33},\ \Gamma^2_{12},\ \Gamma^3_{01},\ \Gamma^3_{02},\ \Gamma^3_{13},\ \Gamma^3_{23},\end{gathered} \tag{35.3}$$

всего 20 компонент (из 40). Раскрывая систему (35.1), (35.2) для случая круговых траекторий $r=\text{const}$ $(u^1=0)$, получаем

$$\left.\begin{gathered}\frac{du^0}{dp} + 2\Gamma^0_{02}u^0u^2 + 2\Gamma^0_{23}u^2u^3 = 0,\\ \Gamma^1_{00}u^{0^2} + 2\Gamma^1_{03}u^0u^3 + \Gamma^1_{22}u^{2^2} + \Gamma^1_{33}u^{3^2} = 0,\\ \frac{du^2}{dp} + \Gamma^2_{00}u^{0^2} + 2\Gamma^2_{03}u^0u^3 + \Gamma^2_{22}u^{2^2} + \Gamma^2_{33}u^{3^2} = 0,\\ \frac{du^3}{dp} + 2\Gamma^3_{02}u^0u^2 + 2\Gamma^3_{23}u^2u^3 = 0,\\ g_{00}u^{0^2} + g_{22}u^{2^2} + g_{33}u^{3^2} + 2g_{03}u^0u^3 = C, \quad u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{dp}.\end{gathered}\right\} \tag{35.4}$$

Легко показывается, что полярные круговые орбиты $(u^1=0,\ u^3=0)$ не существуют. Более сложный анализ системы (35.4) приводит к заключению, что «плоские» круговые траектории существуют только в экваториальной «плоскости» $\theta = \frac{\pi}{2}$. Такой результат согласуется с исследованиями § 23: плоскость круговой траектории легкого тела в постньютоновом приближении прецессирует в поле вращающегося тяжелого тела; прецессии нет, если траектория лежит в экваториальной плоскости, движение плоское.

Рассмотрим подробнее случай экваториальных круговых движений в поле Керра. Полагаем $\theta = \frac{\pi}{2}$ $(u^2=0)$ в системе (35.4), а также вычисляем для этого случая символы Кристоффеля (их, отличных от нуля, будет только 10):

$$\Gamma^0_{01} = \frac{r_g}{2r^2} \frac{a^2 + r^2}{r^2 - r_g r + a^2}; \ \Gamma^0_{13} = \frac{-r_g a}{2r^2} \frac{a^2 + 3r^2}{r^2 - r_g r + a^2};$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{r_g}{2r^4} (r^2 - r_g r + a^2); \ \Gamma^1_{03} = \frac{-r_g a}{2r^4} (r_2 - r_g r + a^2);$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{2a^2 - r_g r}{2r(r^2 - r_g r + a^2)}; \ \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{r}(r^2 - r_g r + a^2);$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{r_g a^2 - 2r^3}{2r^4}(r^2 - r_g r + a^2); \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r};$$

$$\Gamma^3_{01} = \frac{r_g a}{2r^2} \frac{1}{r^2 - r_g r + a^2}; \ \Gamma^3_{13} = \frac{2r^3 - 2r_g r^2 - r_g a^2}{2r^2(r^2 - r_g r + a^2)}. \quad (35.5)$$

Тогда получаем систему

$$\begin{aligned} &\frac{du^0}{dp} = 0; \quad \Gamma^1_{00} u^{0^2} + 2\Gamma^1_{03} u^0 u^3 + \Gamma^1_{33} u^{3^2} = 0; \\ &\frac{du^3}{dp} = 0; \ g_{00} u^{0^2} + g_{33} u^{3^2} + 2g_{03} u^0 u^3 = C, \end{aligned} \quad (35.6)$$

которая имеет точное решение (ср. [B.325]):

$$x^0 = c_1 p + c_2, \ x^1 = r = \text{const}, \quad x^2 = \Theta = \frac{\pi}{2}, \quad x^3 = c_3 p + c_4, \quad (35.7)$$

где c_α — постоянные. В силу системы (35.6)

$$c_3 = \frac{d\varphi}{dp} = \frac{d\varphi}{dx^0} = \frac{\sqrt{r_g}}{\pm\sqrt{2r^3} + a\sqrt{r_g}}; \quad (35.8)$$

$$C = \frac{r}{(\pm\sqrt{2r^3} + a\sqrt{r_g})^2} (2r^2 - 3r_g r \pm 2a\sqrt{2r_g r}) \geqslant 0. \quad (35.9)$$

Без ограничения общности можно считать $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_4 = 0$ (сделан однозначный выбор масштаба и начала отсчета временно́й координаты x^0 и начала отсчета угла φ). Верхние знаки в (35.8), (35.9) соответствуют прямому движению (направление движения тела по круговой орбите совпадает с направлением вращения центрального тела), нижний знак — обратному движению.

Условия (35.9) показывают, что, как и в гравитационном поле Шварцшильда, движение тел в поле вращающегося центрального тела не может происходить по окружностям любого радиуса. Но границы области существования круговых траекторий в поле Керра существенно зависят от соотношения между r_g и a, а также от направления движения по круговой орбите. В частном случае $a=0$ (поле Шварцшильда) из (35.9) немедленно находим область существования круговых орбит $r \geqslant \frac{3}{2} r_g$, что было отмечено выше. Подробное исследование условия (35.9) приводит к следующим результатам.

Нужно различать три случая: 1) $2a > r_g$; 2) $2a = r_g$; 3) $0 < 2a < r_g$. Первый случай приводит к физически недопустимым свойствам метрики Керра [B.13, § 104], и поэтому его отбрасываем.

Области существования круговых орбит для обратных движений в оставшихся случаях определяются неравенствами $r \geqslant 2r_g$ и $r \geqslant r_1 > \frac{3}{2} r_g$, а для прямых круговых движений — неравенствами $r > r_g$ и $r \geqslant r_2 \geqslant r_g$ соответственно. Знак равенства в этих неравенствах соответствует движению со скоростью света. Постоянные r_1, r_2 получают определенные значения при конкретном выборе r_g и a.

Дадим некоторые числовые оценки. Для быстро вращающейся звезды возможны параметры $r_g = 3 \cdot 10^6$ см, $a = 10^6$ см (см., например, таблицу в [B.325]). Принимая эти значения для r_g и a (случай 3), находим $r_1 \approx 5{,}5 \cdot 10^6$ см. Из этой оценки видно, что r_1 значительно превосходит шварцшильдовскую границу $\frac{3}{2} r_g$. При прямых движениях в случаях 2) и 3) круговые движения возможны вплоть до гравитационного радиуса. В случае 3), например, принимая $r_g = 3 \cdot 10^6$ см, $a = 10^6$ см, получаем $r_2 \approx 3{,}1 \cdot 10^6$ см. Если a немного увеличить, то получим $r_2 \approx r_g = 3 \cdot 10^6$ см.

Итак, область существования прямых круговых движений может значительно превосходить область существования обратных движений. Это происходит потому, что на одной и той же круговой орбите скорость обратного движения больше скорости прямого движения. Это утверждение легко следует из (35.8). С ним согласуется формула (21.27).

б) Переходим к рассмотрению устойчивости круговых движений (35.7)—(35.9). Принимая любое из этих круговых движений $x^\alpha(p)$ за невозмущенное (за опорную геодезическую), рассмотрим близкую к ней геодезическую $\bar{x}^\alpha(p)$. Тогда

$$\bar{x}^\alpha(p) = x^\alpha(p) + \xi^\alpha(p), \qquad (35.10)$$

где $\xi^\alpha(p)$ характеризует возмущение опорного движения. Точки на опорной и возмущенной геодезической считаем соответствующими при одном и том же значении параметра p. Это означает, что точки считаются соответствующими, если они рассматриваются в один и тот же момент времени по часам далекого неподвижного наблюдателя. Параллельный перенос вектора $\bar{u}^\alpha(p)$ определим соотношением $\bar{\bar{u}}^\alpha(p) = \bar{u}^\alpha(p)$. Тогда $\bar{\bar{u}}^\alpha(p) - u^\alpha(p) = d\xi^\alpha(p)/dp$. Подставляя $\bar{x}^\alpha(p)$ из (35.10) в (35.2) вместо $x^\alpha(p)$ и используя опорное движение (35.7), находим систему уравнений для нахождения возмущений $\xi^\alpha(p)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi^0}{dp^2}+2\Gamma^0_{01}\frac{d\xi^1}{dp}+2\Gamma^0_{13}c_3\frac{d\xi^1}{dp}=\Phi_0,\\
&\frac{d^2\xi^1}{dp^2}+2\Gamma^1_{00}\frac{d\xi^0}{dp}+\overline{\Gamma}^1_{00}+2\Gamma^1_{03}\left(\frac{d\xi^3}{dp}+c_3\frac{d\xi^0}{dp}\right)+\\
&\quad+2\overline{\Gamma}^1_{03}c_3+2\Gamma^1_{33}c_3\frac{d\xi^3}{dp}+\overline{\Gamma}^1_{33}c_3^2=\Phi_1,\\
&\frac{d^2\xi^2}{dp^2}+\overline{\Gamma}^2_{00}+2\overline{\Gamma}^2_{03}c_3+\overline{\Gamma}^2_{33}c_3^2=\Phi_2,\\
&\frac{d^2\xi^3}{dp^2}+2\Gamma^3_{01}\frac{d\xi^1}{dp}+2\Gamma^3_{13}c_3\frac{d\xi^1}{dp}=\Phi_3,
\end{aligned}\right\}\tag{35.11}$$

где $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ подсчитаны на опорной геодезической и берутся из (35.5), $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ вычисляются вдоль возмущенной геодезической $\overline{x}^\alpha(p)$ с точностью до первых степеней ξ^α, а $\Phi_\alpha=\Phi_\sigma\left(\xi^\beta,\ \frac{d\xi^\beta}{dp}\right)$ являются голоморфными функциями своих аргументов, обращаются в нуль при $\xi^\alpha=0$, $\frac{d\xi^\alpha}{dp}=0$ и начинают свое разложение в ряды с членов не ниже второго порядка по ξ^α и $\frac{d\xi^\alpha}{dp}$.

Подсчитываем $\overline{\Gamma}^1_{00}$, $\overline{\Gamma}^1_{03}$, $\overline{\Gamma}^1_{33}$, $\overline{\Gamma}^2_{00}$, $\overline{\Gamma}^2_{03}$, $\overline{\Gamma}^2_{33}$, воспользовавшись (21.1) и (35.10):

$$\begin{gathered}
\overline{\Gamma}^1_{00}=\frac{r_g}{2r^5}(-2r^2+3r_gr-4a^2)\,\xi^1;\ \overline{\Gamma}^1_{03}=\frac{r_ga}{2r^5}(-2r^2+3r_gr-4a^2)\,\xi^1;\\
\overline{\Gamma}^1_{33}=\frac{1}{2r^5}(-2r^5+2a^2r^3-2r_ga^2r^2+3r_g^2a^2r-4r_ga^4)\,\xi^1;\quad(35.12)\\
\overline{\Gamma}^2_{00}=\frac{r_ga^2}{r^5}\xi^2;\quad \overline{\Gamma}^2_{03}=\frac{r_ga}{r^5}(r^2+a^2)\,\xi^2;\\
\overline{\Gamma}^2_{33}=\frac{1}{r^5}(r^5+a^2r^3+2r_ga^2r^2+r_ga^4)\,\xi^2.
\end{gathered}$$

Подставив символы Кристоффеля из (35.5) и (35.12) в систему (35.11), окончательно находим:

$$\frac{d^2\xi^0}{dp^2}=-\frac{r_g}{r^2}\,\frac{r^2+a^2+(a^2+3r^2)\,ac_3}{r^2-r_gr+a^2}\,\frac{d\xi^1}{dp}+\Phi_0;$$

$$\frac{d^2\xi^1}{dp^2}=\left[\frac{r_g}{2r^5}(2r^2-3r_gr+4a^2)(1+2ac_3)+\frac{c_3^2}{2r^5}(2r^5-2a^2r^3+\right.$$

$$+ 2r_g a^2 r^2 - 3r_g^2 a^2 r + 4r_g a^4)\Big]\xi^1 - \frac{r_g}{r^4}(r^2 - r_g r + a^2)(1 + ac_3)\frac{d\xi^0}{dp} -$$

$$- \frac{1}{r^4}(r^2 - r_g r + a^2)[r_g a + (r_g a^2 - 2r^3)c_3]\frac{d\xi^3}{dp} + \Phi_1;$$

$$\frac{d^2\xi^2}{dp^2} = -\frac{1}{r^5}[r_g a^2 + 2r_g a(r^2 + a^2)c_3 + (r^5 + a^2 r^3 + 2r_g a^2 r^2 +$$

$$+ r_g a^4)c_3^2]\xi^2 + \Phi_2;$$

$$\frac{d^2\xi^3}{dp^2} = \frac{r_g a + (r_g a^2 + 2r_g r^2 - 2r^3)c_3}{r^2(r^2 - r_g r + a^2)}\frac{d\xi^1}{dp} + \Phi_3. \quad (35.13)$$

Эта система совпадает с уравнениями отклонения геодезических [B.12], если пренебречь функциями Φ_α.

Характеристическое уравнение системы (35.13) составляется обычным образом [B.279, 1]. После алгебраических преобразований его можно привести к виду

$$\lambda^4(\lambda^2 - \rho_1)(\lambda^2 - \rho_2) = 0, \quad (35.14)$$

где

$$\rho_1 \equiv -\frac{1}{r^5}[(r^5 + a^2 r^3 + 2r_g a^2 r^2 + r_g a^4)c_3^2 +$$

$$+ 2r_g a(r^2 + a^2)c_3 + r_g a^2]; \quad (35.15)$$

$$\rho_2 \equiv \frac{r_g}{r^3}\left(1 - \frac{r_g}{2r} + 2\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{r_g a}{r^3}\left(6 - \frac{r_g}{r} + 4\frac{a^2}{r^2}\right)c_3 +$$

$$+ \left(-3 + 4\frac{r_g}{r} - \frac{a^2}{r^2} + 5\frac{r_g a^2}{r^3} - \frac{r_g^2 a^2}{2r^4} + 2\frac{r_g a^4}{r^5}\right)c_3^2. \quad (35.16)$$

Заменяя в (35.15) c_3 его значением из (35.8) и исследуя полученное выражение, заключаем, что в области $r > r_g$ всегда $\rho_1 < 0$ и соответствующие корни характеристического уравнения всегда будут чисто мнимыми. Величина ρ_2, как показывают расчеты, может быть положительной, нулем и отрицательной. Важно отметить, что в области существования круговых орбит ρ_2 обращается в нуль не более одного раза. Если r^* — корень уравнения $\rho_2 = 0$, то $\rho_2 > 0$ при всех $r < r^*$ и $\rho_2 < 0$ при всех $r > r^*$. Если в области существования круговых орбит корня нет, то в ней всегда $\rho_2 < 0$. В случае $\rho_2 > 0$ характеристическое уравнение (35.14) имеет один корень с положительной вещественной частью, и, согласно известной теореме Ляпунова [B.279, 1], для всех тех r, при которых $\rho_2 > 0$, круговые орбиты неустойчивы. Границы области неустойчивости будут меняться в зависимости от величин r_g и a, а также от направления движения по круговой орбите. Для прямого движения область заведомой неустойчивости круговых орбит всегда будет меньше, чем для обратного движения. У черной дыры в R-области ($r > r_g$) при некоторых значениях r_g и a область неустойчивости для прямого движения вообще может отсутствовать.

В случае $\rho_2 \leqslant 0$ получаем критические по Ляпунову случаи, исследование которых на устойчивость становится достаточно сложным. В поле Шварцшильда ($a=0$) такое исследование проводилось вторым методом Ляпунова в [B.284, B.286]. Нетрудно видеть, что в области $r > r_g$ при $a \to 0$ поле Керра непрерывно переходит в поле Шварцшильда, а системы (35.2) и (35.13) также непрерывно переходят в соответствующие системы поля Шварцшильда. В силу известной теоремы (см., например, [4]) о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений от параметра заключаем, что при достаточно малых значениях параметра a решения системы (35.13) мало отличаются на достаточно большом промежутке времени от решений соответствующей системы поля Шварцшильда. В силу сказанного и результата работ [B.284, B.286] верна

Теорема. В поле Керра для достаточно малых a круговые движения на достаточно большом промежутке времени устойчивы для обратных движений при всех значениях r, при которых $\rho_2 < 0$, и для прямых движений — при всех $r > 3r_g$.

Замечание. Высказанную теорему можно усилить. Устойчивость имеет место также и при больших a там, где параметр $\nu \equiv a/r$ достаточно мал. Это усиление справедливо потому, что символы Кристоффеля Γ можно разложить в сходящиеся степенные ряды по этому параметру: $\Gamma = \Gamma_{(\text{шв})} + \Gamma_1 \nu + \Gamma_2 \nu^2 + \ldots$, где $\Gamma_{(\text{шв})}$ — символы Кристоффеля в поле Шварцшильда.

§ 36. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЙ ПРОБНЫХ ТЕЛ В ДРУГИХ СЛУЧАЯХ

Отметим без доказательств некоторые дальнейшие результаты школы Петрова по проблеме устойчивости в смысле Ляпунова движения пробных тел в ОТО. В работах [B.286—B.288] рассмотрена устойчивость круговых орбит заряженной и незаряженной пробной частицы в поле заряженного центра, т. е. в поле Рейснера — Вейля — Нордстрема [5—7] (см. также [B.4], § 59 и [B.5], гл. 13). Получен интересный результат: при некоторых отношениях заряда центрального тела к его гравитационному радиусу области устойчивости должны образовывать прерывистый спектр, т. е. происходит чередование областей устойчивого и неустойчивого кругового движения.

В работах [B.290, B.291] начато рассмотрение качественной теории любых, а не только круговых геодезических линий в поле тяготеющего центра (заряженного и незаряженного). В ней, в частности, показано, что определенные круговые орбиты являются предельными циклами Пуанкаре.

Более сложный случай исследования устойчивости (неустойчивости) и общих свойств геодезических линий в поле Керра дан в [B.292]. Работа [8] содержит анализ устойчивости круговых орбит в поле тяготения двух центров. Некоторые любопытные утверждения о неустойчивости финитных движений в поле Шварцшильда содержатся в [9]. Все указанные работы имеют дело с исследованиями устойчивости геодезических в пространствах, метрика которых не зависит от временной координаты (постоянные гравитационные поля). В случае переменных гравитационных полей исследование устойчивости усложняется.

Как наиболее простой пример рассмотрим устойчивость движений пробных тел в космологических моделях Фридмана (см. § 21). В случае невращающихся частиц уравнения геодезических точно проинтегрированы (на уровне u^α). Имея общее решение (21.31), можно рассмотреть устойчивость геодезических в смысле определения 1. Примем за опорную геодезическую Γ некоторую линию из (21.31), а за возмущенную $\bar\Gamma$ — линию из (21.31) при некоторых других значениях постоянных интегрирования $\bar c_i$, мало отличающихся от c_i, и некоторых других координатах $\bar x^\alpha$:

$$\bar u^0 = \pm\left(1+\frac{\bar c_1^2}{a^2}\right)^{1/2}; \quad \bar u^1 = \pm\frac{(\bar c_1^2 \bar f^2 + \bar c_2)^{1/2}}{a^2 \bar f};$$

$$\bar u^2 = \pm\frac{(-\bar c_2 \sin^2\bar\Theta - \bar c_3^4)^{1/2}}{a^2 \bar f^2 \sin\bar\Theta}; \quad \bar u^3 = \frac{\bar c_3^2}{a^2 \bar f^2 \sin^2\bar\Theta}. \tag{36.1}$$

Соответствующими на Γ и $\bar\Gamma$ будем считать точки при одинаковых значениях t, которым в силу выражения u^0 из (21.3) однозначно соответствуют значения s; параллельный перенос u^α определим соотношением $\bar{\bar u}^\alpha(t) = \bar u^\alpha(t)$. Тогда

$$|\bar{\bar u}^0(t) - u^0(t)| = \left|\left(1+\frac{\bar c_1^2}{a^2}\right)^{1/2} - \left(1+\frac{c_1^2}{a^2}\right)^{1/2}\right|;$$

$$|\bar{\bar u}^1(t) - u^1(t)| = \frac{1}{a^2}\left|\frac{(\bar c_1^2 \bar f^2 + \bar c_2)^{1/2}}{\bar f} - \frac{(c_1^2 f^2 + c_2)^{1/2}}{f}\right|;$$

$$|\bar{\bar u}^2(t) - u^2(t)| = \frac{1}{a^2}\left|\frac{(-\bar c_2 \sin^2\bar\Theta - \bar c_3^4)^{1/2}}{\bar f^2 \sin\bar\Theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{(-c_2 \sin\Theta - c_3^4)^{1/2}}{f^2 \sin\Theta}\right|; \tag{36.2}$$

$$|\bar{\bar u}^3(t) - u^3(t)| = \frac{1}{a^2}\left|\frac{\bar c_3^2}{\bar f^2 \sin^2\bar\Theta} - \frac{c_3^2}{f^2 \sin^2\Theta}\right|.$$

Если рассматривается закрытая изотропная модель ($f = \sin r$), то, как это видно из (36.2), при сжатии вселенной ($a \to 0$) всегда $|\bar{\bar u}^\alpha(t) - u^\alpha(t)| \to \infty$. При ее расширении $a(t)$ увеличивается до некоторого не равного бесконечности максимума (см. [В.13, § 112]), а затем опять начинается сжатие и $a(t) \to 0$. Таким образом, формально математически для многих $t > t_0$, где t_0 соответствует некоторому фиксированному моменту собственного времени τ_0, может выполняться $|\overline{\overline{u}}^\alpha(t)-u^\alpha(t)|\to\infty$, т. е. движение неустойчиво. В частности, неустойчива геодезическая $u^0=\pm 1$, $u^i=0$ (соответствует покоящейся на фридмановском фоне частице; из общего решения (21.31) получается при $c_i=0$).

Если рассматриваются открытые изотропные модели ($f=r$ или $f=\operatorname{sh} r$), то при сжатии $a(t)\to 0$ и $a(t)f[r(t)]\to 0$, что нетрудно показать, воспользовавшись формулами (113.9), (113.12) из [B.13] и дифференциальным уравнением, полученным при делении u^1 на u^0 из (21.31). Действительно, так как $a=a_0\sqrt{t}$, то при $f(r)=r$:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{u^1}{u^0}=\pm\frac{(c_1^2r^2+c_2)^{1/2}}{ar\,(a^2+c_1^2)^{1/2}},$$

$$(c_1^2r^2+c_2)^{1/2}=\pm\frac{c_1^2}{a_0}\int\frac{dt}{\sqrt{t}\,\sqrt{a_0^2t+c_1^2}},$$

$$r(t)=\frac{1}{c_1}\left\{\left[\pm\frac{2c_1^2}{a_0^2}\ln\left(\sqrt{a_0^2t}+\sqrt{a_0^2t+c_1^2}\right)+C\right]^2-c_2\right\}^{1/2}. \tag{36.3}$$

При $f(r)=\operatorname{sh} r$ аналогичным путем находим связь между r и t:

$$\sqrt{c_1^2\operatorname{ch}^2 r+c_2-c_1^2}+c_1\operatorname{ch} r=C\left(\sqrt{a_0^2t}+\sqrt{a_0^2t+c_1^2}\right)^{\pm\frac{2c_1}{a_0^2}}, \tag{36.4}$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. Из (36.3) и (36.4) видно, что при $a(t)\to 0$ $(t\to 0)$ $r(t)$, а следовательно, и $f(r)$ стремятся к не равным бесконечности пределам. Поэтому $a(t)f[r(t)]\underset{t\to 0}{\to} 0$, что и требовалось показать. Отсюда следует, что при сжатии открытых моделей $|\overline{\overline{u}}^\alpha(t)-u^\alpha(t)|\to\infty$, т. е. любое движение неустойчиво.

При расширении открытых моделей, но еще значительных плотностях ($p=\varepsilon/3$), можно считать, что $a=a_0\sqrt{t}$, где $t>0$. Поэтому при увеличении t увеличиваются $a(t)$ и $r(t)$. Если $|\overline{\overline{u}}^\alpha(t_0)-u^\alpha(t_0)|<\delta$, то при $t>t_0$ и подавно $|\overline{\overline{u}}^\alpha(t)-u^\alpha(t)|<\delta$. Это δ можно принять за ε и определение устойчивости относительно u^α выполняется. Выполняется ли оно относительно x^α? Чтобы ответить на этот вопрос, можно было бы проинтегрировать уравнения (21.31) относительно x^α и рассмотреть поведение $|\bar{x}^\alpha(t)-x^\alpha(t)|$. Например, в случае (36.3) формально математически находим

$$|\bar{r}(t)-r(t)|=\left|\frac{1}{\bar{c}_1}\left\{\left[\pm\frac{2\bar{c}_1^2}{a_0^2}\ln\left(\sqrt{a_0^2t}+\sqrt{a_0^2t+\bar{c}_1^2}\right)+\bar{C}\right]^2-\bar{c}_2\right\}^{1/2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c_1}\left\{\left[\pm\frac{2c_1^2}{a_0^2}\ln\left(\sqrt{a_0^2t}+\sqrt{a_0^2t+c_1^2}\right)+C\right]^2-c_2\right\}^{1/2}\right|\underset{t\to\infty}{\to}\infty, \tag{36.5}$$

что указывает на неустойчивость геодезических в расширяющейся модели. Особенно ясно видна неустойчивость покоящейся на фридмановском фоне ($x^i=\mathrm{const}$, $u^0=\pm 1$, $u^i=0$) частицы для любой модели. С течением времени частица начинает двигаться относительно этого фона. В общем случае, по-видимому, также будет неустойчивость относительно x^α, так как расстояние между любыми двумя точками в расширяющейся Вселенной увеличивается.

В общих чертах устойчивость геодезических во фридмановских моделях в смысле определения 1 рассмотрена. Определение 1 в общем случае имеет формально математический характер. Может оказаться, что доказанная устойчивость (неустойчивость) движения по определению 1 не отражает физической устойчивости (неустойчивости). Это может произойти потому, что координаты x^α и 4-скорость u^α не выражают непосредственно трехмерных расстояний и скоростей. Для нахождения последних необходимо использовать метрический тензор $g_{\alpha\beta}$, который в общем случае является функцией времени и поэтому своим присутствием в том или ином выражении может качественно изменить поведение интересующей нас величины.

Проиллюстрируем это на примере метрики Фридмана. Показано, что при сжатии открытых моделей ($a(t)\to 0$) величины из (36.2) $|\overset{=}{u}{}^\alpha(t)-u^\alpha(t)|\to\infty$. Если перейти от 4-скорости u^α, не имеющей непосредственного физического смысла, к трехмерной физической скорости движения v (см. (21.32)), то $|\overset{=}{v}(t)-v(t)|\to 0$, так как и $|\overset{=}{v}|\to c$, и $|v(t)|\to c$. Следовательно, движение неустойчиво относительно $u^\alpha(t)$, но стало устойчивым относительно $v(t)$.

Таким образом, определения 1 и 2 достаточно хорошо отражают истинную (физическую) устойчивость в случае статических и стационарных полей (например, Шварцшильда, Рейснера — Вейля — Нордстрема, Керра и т. д.).

§ 37. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ СРАВНИМЫХ МАСС (СЛУЧАЙ ДВУХ ТЕЛ)

Имея результаты интегрирования уравнений движения (13.4) и (13.11) в случае двух тел (§ 22—26), исследуем устойчивость движения в этом случае в смысле определения 3 (§ 34).

Прежде всего отметим, что исследование движения на устойчивость (как и интегрирование) будем проводить с учетом только вековых членов. Итак, имеем два тела a и b сравнимых масс, обладающих зарядами, собственными вращениями и магнитными моментами. Как показано (см. (23.19), (26.21)), $\tilde{x}^3\equiv\tilde{a}^3-\tilde{b}^3$ изменяется вековым образом. В силу условия барицентричности $m_a\tilde{a}^3+m_b\tilde{b}^3=0$ получаем $\tilde{a}^3=+\dfrac{m_b}{m}\tilde{x}^3$, $\tilde{b}^3=-\dfrac{m_a}{m}\tilde{x}^3$, т. е. каждая из компонент $\tilde{a}^3$ и $\tilde{b}^3$ обладает аналогичными вековыми членами. В ньютоновом приближении $a^3=b^3=0$. Условия (34.4) $|\tilde{a}^3(t)-0|<\varepsilon$ и $|\tilde{b}^3(t)-0|<\varepsilon$ для любых $t>t_0$ ($\varphi>\varphi_0$) не могут быть выполнены. Далее не могут быть выполнены условия $|\tilde{S}_a^i(t)-S_a|<\varepsilon$, $|\tilde{S}_b(t)-S_b|<\varepsilon$

для любых $t>t_0$, так как, согласно (26.10), компоненты $\tilde{S}_a^i(t)$ и $\tilde{S}_b^i(t)$ неограниченно возрастают со временем, а S_a^i, $S_b^{i'}$ постоянны. Аналогичное утверждение справедливо относительно $\tilde{S}_a^{ik}$, $\tilde{S}_b^{ik}$. Следовательно, в соответствии с определением 3 движение неустойчиво.

В силу существования релятивистского эффекта, описываемого формулой (26.39) (смещение периастра, перигея, перигелия), движение становится орбитально неустойчивым (определение орбитальной устойчивости см., например, в [10, с. 831]). Действительно, взяв две близкие в начальный момент времени t_0 орбиты Γ и $\bar{\Gamma}$, получаем их скорости вращения как целых разными, так как для них будут разными η. Поэтому через достаточно большой промежуток времени периастры орбит Γ и $\bar{\Gamma}$ разойдутся достаточно далеко, что и трактуется как орбитальная неустойчивость. Это заключение получено для тел сравнимых масс в постньютоновом приближении. В [9] исследовалась точными методами устойчивость финитных движений в поле Шварцшильда и автор пришел к выводу, что эти движения (кроме некоторых круговых) являются орбитально неустойчивыми. Эта неустойчивость останется даже в том случае, когда тела не обладают собственными вращениями и магнитными моментами, так как, согласно (26.36) — (26.38), $\eta=\eta_0\neq 0$.

Неустойчивость движения в общем случае относительно $a^i(t)$, $b^i(t)$, $\vec{S}_a$, $\vec{S}_b$ влечет за собой неустойчивость движения относительно ряда других величин: орбитального момента импульса $\vec{M}$ (26.16), углов наклонения i', i (26.24), (26.25) (см. также (23.25), (25.18)). Но относительно $|\vec{M}|$, $|\vec{S}_a|$, $|\vec{S}_b|$, r_{ab} движение устойчиво, так как релятивистские поправки к этим величинам не содержат вековых членов.

Учет искривленности пространства-времени не влияет на сделанные заключения об устойчивости и неустойчивости движения, так как метрика в постньютоновом приближении не содержит вековых членов.

§ 38. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ СРАВНИМЫХ МАСС (СЛУЧАЙ ТРЕХ ТЕЛ)

Сначала рассмотрим устойчивость движения в случае ограниченной задачи трех тел. Так как третье легкое тело не влияет на движение двух тяжелых тел, то все выводы об устойчивости (неустойчивости) движения тяжелых тел, сделанные в § 37, остаются справедливыми и сейчас. В частном случае, когда тяжелые тела движутся по окружностям, неустойчивость движения в связи со смещением перигелия теряет смысл, но появляется неустойчивость в координатах y_1, y_2 (a^2, b^2) (см. (30.3), (30.4), (32.7), (32.8)), которая приводит к вековому эффекту (31.1), (32.12).

Если тела обладают собственными вращениями, то координаты третьего легкого тела всегда содержат вековые члены, ибо эти члены всегда содержатся в частном решении (32.10). Это означает, что условия $|\tilde{c}^i(t)-c^i(t)|<\varepsilon$ для любых $t>t_0$ не выполняются и движение относительно $c^i(t)$ неустойчиво в смысле определения 3. Кроме того, прецессирует вектор $\vec{\tilde{S}}_c$.

Для третьего легкого тела при дальнейшем исследовании устойчивости его движения нужно различать три случая (см. § 30 и 32): а) $m^2>27m_1m_2$; б) $m^2=27m_1m_2$; в) $m^2<27m_1m_2$.

Как показано в § 32, длины сторон лагранжевого треугольника $\tilde{r}_{13}$ и $\tilde{r}_{23}$ в случае а) вековым образом не меняются, как и $|\vec{\tilde{M}}_3|$. Но $\vec{\tilde{M}}_3$ меняется со временем в соответствии с (32.17), что приводит к прецессии плоскости орбиты легкого тела A_3. В случаях б) и в) закономерности движения более сложные. Прежде всего $\tilde{r}_{13}$ и $\tilde{r}_{23}$ меняются вековым образом, треугольник перестает быть равносторонним. Это означает, что относительно r_{13} и r_{23} движение третьего тела неустойчиво: условия $|\tilde{r}_{13}(t)-r_{13}|<\varepsilon$, $|\tilde{r}_{23}-r_{23}|<\varepsilon$ со временем обязательно нарушаются. Неустойчивость движения тела A_3 проявляется также в вековых изменениях $\vec{\tilde{M}}_3$ и $|\vec{\tilde{M}}_3|$ согласно (32.23), (32.24), (32.27), (32.28), а также углов $(\widehat{i3})$ по формулам (32.26), (32.30).

В случае неограниченной задачи трех тел релятивистские силовые вращательные и магнитные добавки в уравнениях движения аналогичны добавкам в ограниченной задаче и также приводят к неустойчивости движения в смысле определения 3. Это ясно из сказанного в § 33.

§ 39. СРАВНЕНИЕ С ИССЛЕДОВАНИЯМИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В НЬЮТОНОВОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

В ньютоновой небесной механике при исследованиях устойчивости (неустойчивости) движений в основном используются первый и второй методы Ляпунова [B.215, B.279, 10—12], хотя в последнее десятилетие школой академика Колмогорова разрабатывается и применяется метод, отличный от методов Ляпунова [13, B.236, B.237] (см. также работы последователей школы Колмогорова [B.245—B.251]).

В настоящей главе использовались только методы Ляпунова. На основе проделанных в гл. III и IV вычислений и известных теорем Ляпунова удается получить некоторые новые выводы об устойчивости (неустойчивости) ньютонова движения с точки зрения постньютонова приближения ОТО. Проведенное в § 37, 38 исследование устойчивости движения очень похоже на исследования, проводимые в ньютоновой небесной механике с помощью первого метода по первому приближению.

В самом деле, решая уравнения движения для тела a (13.4) (и аналогичные уравнения для тел b, c, ...), мы всегда предполагали, что решения ищутся в виде $\tilde{a}^i = a^i_0 + a^i$, $\tilde{b}^i = b^i_0 + b^i$, $\tilde{c}^i = c^i_0 + c^i$, ..., где a^i_0, b^i_0, c^i_0, ... являются решениями ньютоновых уравнений (невозмущенное движение), а функции a^i, b^i, c^i, ... определяют релятивистские поправки к ньютонову движению (возмущенное движение). Все исследование велось в посленьютоновом приближении, т. е. принимались в расчет только первые степени искомых функций $a^i(t)$, $b^i(t)$, $c^i(t)$, ... По виду этих функций и делались заключения о характере движения в посленьютоновом приближении. Отличие от исследования устойчивости по первому приближению в ньютоновой теории тяготения состоит в том, что, во-первых, принимались в расчет, кроме первых степеней a^i, b^i, c^i, ..., еще неоднородные члены, возникающие из-за присутствия релятивистских силовых добавок F^i_a, F^i_b, F^i_c, ... в уравнениях движения (13.4); во-вторых, принимались во внимание искривленность пространства-времени, в то время как в ньютоновой теории оно было плоским. Особенно четко все это видно на примере уравнений (29.10)—(29.12) и (32.2)—(32.4), которые являются уравнениями возмущенного движения. Если в этих уравнениях отбросить неоднородные члены (все они содержат множитель c^{-2}), то получаем уравнения, в точности совпадающие с уравнениями возмущенного движения (в первом приближении) ньютоновой теории.

То новое, что привносится ОТО в закономерности движения тел, как раз и заключено в упомянутых неоднородностях. В чем состоит это новое? В нескольких словах его можно выразить так: многие движения, которые были устойчивы по Ляпунову в ньютоновой теории, становятся неустойчивыми в ОТО (в посленьютоновом приближении). ОТО, так сказать, расшатывает ньютоново движение.

Неустойчивость движения проявляется в возникновении ряда вековых эффектов: прецессии плоскости ньютоновых орбит, изменения угла наклонения i и углов $(\widehat{ij})$, смещения периастра и др. Плоское движение в ньютоновой теории устойчиво по Ляпунову в том смысле, что при небольших возмущениях начальных условий движение остается плоским и его плоскость сколь угодно близка к плоскости невозмущенного движения, в самой же плоскости траектории могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми [B.215, B.279, 11]. В ОТО плоское движение уже неустойчиво; указанные выше вековые эффекты плоскую траекторию превращают в пространственную. Более того, в ньютоновой теории имеет место так называемая орбитальная устойчивость $\left(\text{устойчивость величины } r - \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}\right)$, а в ОТО орбитальная устойчивость нарушается из-за эффекта смещения периастра (см. § 37). Далее при рассмотрении ограниченной круговой треугольной лагранжевой задачи трех тел в случае а), когда $m^2 > 27 m_1 m_2$, в ньютоновой теории получен результат: движение устойчиво в смысле Ляпунова по первому приближению [В.215] и вообще устойчиво за исключением двух отношений масс $\frac{m_1}{m_2}=\frac{643+15\sqrt{1833}}{32}$, $\frac{m_1}{m_2}=\frac{73+5\sqrt{213}}{2}$, когда имеет место неустойчивость [В.236, В.245, В.249, 14]. С точки зрения постньютонова приближения ОТО это движение уже неустойчиво по первому приближению и возникает сомнение, будет ли оно устойчивым по Ляпунову вообще.

В небесной механике рассматриваются также различные другие понятия устойчивости движения (устойчивость по Лагранжу, Якоби, Пуассону, Хиллу и др. [10, с. 832]). Например, движение называется устойчивым по Лагранжу, если расстояния между телами r_{ij} не стремятся к бесконечности, т. е. если r_{ij} имеют конечную верхнюю границу. Такое понятие устойчивости в постньютоновом приближении ОТО сохраняется, ибо с учетом вековых членов $r_{ij}=\tilde{r}_{ij}$, как это легко видно из проделанных ранее вычислений. Если ньютоново расстояние $r_{ij}\to\infty$, то и $\tilde{r}_{ij}\to\infty$; если r_{ij} — конечные, то и релятивистские расстояния $\tilde{r}_{ij}$ — конечные. Устойчивые движения по Пуассону в ньютоновой теории перестают быть таковыми, вообще говоря, в постньютоновом приближении ОТО. Например, вековые изменения угла наклонения, смещения периастра приводят к тому, что тело не может даже за бесконечный промежуток времени пройти бесконечное число раз через достаточно малую окружность своего первоначального положения.

§ 40. О ПРОБЛЕМЕ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИОННОГО МЕТОДА В ОТО

С проблемой устойчивости в известной мере связана проблема сходимости приближенных методов. В обоих случаях приходится исследовать свойства похожих рядов.

Как мы видели выше, в ОТО при решении уравнений тяготения Эйнштейна (3.1) и получении уравнений движения тел широко используется аппроксимационная процедура, впервые предложенная в работах [В.90, В.93]. Впоследствии детали процедуры были усовершенствованы [В.6, В.94—В.100, В.106—В.108], но суть приближенного метода осталась прежней. Она состоит в том, что метрика риманова пространства-времени, определяемого движущимися массами, разлагается в бесконечные ряды по некоторому малому параметру. Все величины, зависящие от метрики, автоматически также разлагаются в бесконечные ряды, в том числе и уравнения тяготения Эйнштейна (3.1). Из последних шаг за шагом отыскиваются члены рядов, в которые разложена метрика $g_{\alpha\beta}$. В случае тел сравнимых масс отыскание $g_{\alpha\beta}$ и уравнений движения тел на каждом шаге аппроксимации производится совместно, что, конечно, усложняет задачу. Упрощение происходит при рассмотрении движения пробного тела в поле тяжелого тела или, более общо, во внешнем, не зависящем от пробного тела гравитационном поле. В этом случае вся проблема движения распадается на две в известном смысле независимые задачи: отыскание метрики внешнего гравитационного поля в некотором приближении, а затем нахождение движения пробного тела в этом поле в соответствующем приближении.

В настоящее время широкое теоретическое и практическое применение имеют первое (ньютоново) и второе (постньютоново) приближения. Следующие приближения в слабых гравитационных полях дают ничтожные поправки к метрике и закономерностям движения и поэтому не учитываются. Эксперимент как будто подтверждает выводы ОТО во втором приближении в слабом поле (три классических эффекта и четвертая проверка ОТО [В.13—В.15, 15]). Но здесь уместно и нужно поставить вопросы, аналогичные тем, которые обычно возникали и решались в определенном смысле в ньютоновой небесной механике: 1) сходятся ли рассматриваемые в ОТО ряды; 2) если ряды сходятся, то являются ли их суммы решениями исходных точных полевых уравнений и уравнений движения; 3) на любом ли отрезке времени ряды сходятся; 4) как влияет величина параметра, по которому производится разложение в ряды, на сходимость; 5) как велика погрешность, допущенная при использовании конкретного приближения.

Следует подчеркнуть, что по сравнению с ньютоновой теорией тяготения теория тяготения Эйнштейна значительно сложнее в математическом отношении. Эта сложность проявляется в неумении в достаточно общих случаях находить точные решения полевых уравнений и точные закономерности движения тел. Поэтому приближенные методы, используемые в ОТО, и их корректное математическое обоснование приобретают особо важное значение. Однако, насколько известно автору, перечисленные выше вопросы в ОТО не ставились и не обсуждались. Обычно ограничиваются лишь указанием на то, что получаемые приближенными методами результаты не противоречат эксперименту, наблюдениям. Недостаточность такого нематематического обоснования приближенных методов очевидна.

В общем случае решение проблемы сходимости приближенных методов в ОТО представляет огромные трудности. Не удивительно поэтому, что классики релятивизма и их последователи нигде не решали проблемы сходимости. Когда в их работах встречается выражение «обоснование аппроксимационной процедуры», то под ним понимается не доказательство сходимости этой процедуры, а нечто совсем другое, например обоснование резрешимости получаемых уравнений на любом шаге [В.106].

Но в частных и простейших случаях можно попытаться ответить на перечисленные выше вопросы. Одним из таких простых и в то же время физически важных случаев являются поле Шварцшильда и задача движения пробного тела в нем. Достаточно простым случаем следует признать поле Рейснера — Вейля — Нордстрема и поведение геодезических в этом поле. В последующих параграфах этой главы будет доказана сходимость аппроксимационных методов, разработанных школами Эйнштейна — Инфельда и Фока — Папапетру, в только что упомянутых простых случаях.

§ 41. СХОДИМОСТЬ МЕТРИКИ ПОЛЯ ШВАРЦШИЛЬДА

Метрику риманова пространства-времени, соответствующего центрально-симметричному статическому гравитационному полю, можно искать в виде

$$ds^2=g_{00}(r)\,c^2dt^2+g_{11}(r)\,dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{41.1}$$

где r, θ, φ — так называемые «сферические» координаты. Тогда уравнения тяготения Эйнштейна (3.1) для определения метрики (41.1) дают только два независимых дифференциальных уравнения [В.13] (штрих обозначает дифференцирование по r):

$$g'_{00}=-\frac{1}{r}g_{00}(1+g_{11}); \tag{41.2}$$

$$g'_{11}=\frac{1}{r}g_{11}(1+g_{11}). \tag{41.3}$$

Точные решения этих уравнений впервые найдены Шварцшильдом [В.136] и могут быть записаны в форме

$$g_{00}=c_0\left(1+\frac{c_1}{r}\right); \tag{41.4}$$

$$g_{11}=-\left(1+\frac{c_1}{r}\right)^{-1}, \tag{41.5}$$

где $c_0>0$ и c_1 — произвольные постоянные интегрирования. Выбор c_0 связан с выбором масштаба временной координаты t. Поэтому, введя величину $t^*=\sqrt{c_0}\,t$, избавляемся от c_0. Значение для c_1 выбирается согласно принципу соответствия поля Шварцшильда ньютонову гравитационному полю: $c_1=-r_g$.

Представим теперь, что мы не знаем точного решения уравнений (41.2), (41.3), но желаем получить хотя бы приближенные сведения о свойствах гравитационного поля. Тогда мы должны применить аппроксимационную процедуру. Школа Эйнштейна — Инфельда использует [В.97, В.106] для представления g_{00} и g_{11} следующие ряды (см. (5.9)):

$$g_{00}=1+\lambda^2\underset{2}{h_{00}}+\lambda^4\underset{4}{h_{00}}+\dots; \tag{41.6}$$

$$g_{11}=-1+\lambda^2\underset{2}{h_{11}}+\lambda^4\underset{4}{h_{11}}+\dots. \tag{41.7}$$

В этих рядах не должно быть членов с нечетными степенями λ, если центральное тело не излучает энергии, что мы и будем предполагать. Параметр $\lambda\sim\dfrac{v}{c}$, где v обозначает величину трехмерной скорости пробного тела, движущегося в рассматриваемом гравитационном поле. Ясно, что $\lambda<1$, а в слабом поле $\lambda\ll 1$.

Естественно начать рассмотрение с уравнения (41.3), так как в него входит только функция g_{11}. Подставляя ряд (41.7) в (41.3), формально дифференцируя ряд и приравнивая величины одинаковых порядков по λ, приходим к бесконечной системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{2}{h}'_{11} &= -\frac{1}{r}\underset{2}{h}_{11},\\
\underset{4}{h}'_{11} &= -\frac{1}{r}\underset{4}{h}_{11} + \frac{1}{r}\underset{2}{h}{}^2_{11},\\
\underset{6}{h}'_{11} &= -\frac{1}{r}\underset{6}{h}_{11} + \frac{2}{r}\underset{2}{h}_{11}\underset{4}{h}_{11},\\
\underset{8}{h}'_{11} &= -\frac{1}{r}\underset{8}{h}_{11} + \frac{2}{r}\underset{2}{h}_{11}\underset{6}{h}_{11} + \frac{1}{r}\underset{4}{h}{}^2_{11},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\underset{2k}{h}'_{11} &= -\frac{1}{r}\underset{2k}{h}_{11} + \frac{1}{r}\big(\underset{2}{h}_{11}\underset{2k-2}{h}_{11} + \underset{4}{h}_{11}\underset{2k-4}{h}_{11} + \ldots +\\
&\quad + \underset{2k-4}{h}_{11}\underset{4}{h}_{11} + \underset{2k-2}{h}_{11}\underset{2}{h}_{11}\big),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{41.8}$$

Последовательно решая ее, находим:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{2}{h}_{11} &= \frac{1}{r}\underset{2}{c}_1,\\
\underset{4}{h}_{11} &= \frac{1}{r}\underset{4}{c}_1 - \frac{1}{r^2}\underset{2}{c}{}^2_1,\\
\underset{6}{h}_{11} &= \frac{1}{r}\underset{6}{c}_1 - \frac{1}{r^2}2\underset{2}{c}_1\underset{4}{c}_1 + \frac{1}{r^3}\underset{2}{c}{}^3_1,\\
\underset{8}{h}_{11} &= \frac{1}{r}\underset{8}{c}_1 - \frac{1}{r^2}(2\underset{2}{c}_1\underset{6}{c}_1 + \underset{4}{c}{}^2_1) + \frac{1}{r^3}3\underset{2}{c}{}^2_1\underset{4}{c}_1 - \frac{1}{r^4}\underset{2}{c}{}^4_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\underset{2k}{h}_{11} &= \sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}\frac{1}{r^l}\big[(\underset{2}{c}_1 + \underset{4}{c}_1 + \ldots + \underset{2k}{c}_1)^l\big]_{2k},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{41.9}$$

где $\underset{2k}{c}_1$ $(k=1, 2, \ldots)$ являются произвольными постоянными интегрирования. В выражении для $\underset{2k}{h}_{11}$ значок $2k$ при квадратной скобке указывает на то, что внутри нее следует взять только члены порядка $2k$. Проводя суммирование согласно (41.7) и переставляя определенным образом члены ряда, получаем

$$g_{11} = -1 + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{2k}\underset{2k}{h}_{11} = -1 + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{2k}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}\frac{1}{r^l}\times$$

$$\times\big[(\underset{2}{c}_1 + \underset{4}{c}_1 + \ldots + \underset{2k}{c}_1)^l\big]_{2k} = -1 + \frac{1}{r}(\lambda^2\underset{2}{c}_1 + \lambda^4\underset{4}{c}_1 + \ldots) -$$

$$-\frac{1}{r^2}(\lambda^2 \underset{2}{c_1}+\lambda^4 \underset{4}{c_1}+\ldots)^2+\frac{1}{r^3}(\lambda^2 \underset{2}{c_1}+\lambda^4 \underset{4}{c_1}+\ldots)^3-$$

$$-\frac{1}{r^4}(\lambda^2 \underset{2}{c_1}+\lambda^4 \underset{4}{c_1}+\ldots)^4+\ldots+(-1)^{l+1}\frac{1}{r^l}(\lambda^2 \underset{2}{c_1}+$$

$$+\lambda^4 \underset{4}{c_1}+\ldots)^l+\ldots=-\left(1+\frac{\lambda^2 \underset{2}{c_1}+\lambda^4 \underset{4}{c_1}+\ldots}{r}\right)^{-1}. \quad (41.10)$$

Операции по перестановке членов в (41.10) будут законными, если ряд $\lambda^2 \underset{2}{c_1}+\lambda^4 \underset{4}{c_1}+\ldots$, например, сходится абсолютно. Обозначая его сумму через c_1, приходим к выражению (41.5).

Теперь удобно применить аппроксимационный метод к уравнению (41.2). Подставляя в него ряды (41.6), (41.7), производя формально почленное дифференцирование и приравнивая величины одинаковых порядков, опять приходим к бесконечной системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{2}{h'_{00}} &= -\frac{1}{r}\underset{2}{h_{11}},\\
\underset{4}{h'_{00}} &= -\frac{1}{r}(\underset{4}{h_{11}}+\underset{2}{h_{11}}\underset{2}{h_{00}}),\\
\underset{6}{h'_{00}} &= -\frac{1}{r}(\underset{6}{h_{11}}+\underset{4}{h_{11}}\underset{2}{h_{00}}+\underset{2}{h_{11}}\underset{4}{h_{00}}),\\
\underset{8}{h'_{00}} &= -\frac{1}{r}(\underset{8}{h_{11}}+\underset{6}{h_{11}}\underset{2}{h_{00}}+\underset{4}{h_{11}}\underset{4}{h_{00}}+\underset{2}{h_{11}}\underset{6}{h_{00}}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\underset{2k}{h'_{00}} &= -\frac{1}{r}(\underset{2k}{h_{11}}+\underset{2k-2}{h_{11}}\underset{2}{h_{00}}+\underset{2k-4}{h_{11}}\underset{4}{h_{00}}+\ldots+\underset{4}{h_{11}}\underset{2k-4}{h_{00}}+\underset{2}{h_{11}}\underset{2k-2}{h_{00}}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}\right\} \quad (41.11)$$

решением которой будет бесконечная система функций

$$\left.\begin{aligned}
\underset{2}{h_{00}} &= \underset{2}{c_0}+\frac{1}{r}\underset{2}{c_1},\\
\underset{4}{h_{00}} &= \underset{4}{c_0}+\frac{1}{r}(\underset{4}{c_1}+\underset{2}{c_1}\underset{2}{c_0}),\\
\underset{6}{h_{00}} &= \underset{6}{c_0}+\frac{1}{r}(\underset{6}{c_1}+\underset{4}{c_1}\underset{2}{c_0}+\underset{2}{c_1}\underset{4}{c_0}),\\
\underset{8}{h_{00}} &= \underset{8}{c_0}+\frac{1}{r}(\underset{8}{c_1}+\underset{6}{c_1}\underset{2}{c_0}+\underset{4}{c_1}\underset{4}{c_0}+\underset{2}{c_1}\underset{6}{c_0}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\underset{2k}{h_{00}} &= \underset{2k}{c_0}+\frac{1}{r}(\underset{2k}{c_1}+\underset{2k-2}{c_1}\underset{2}{c_0}+\underset{2k-4}{c_1}\underset{4}{c_0}+\ldots+\underset{2}{c_1}\underset{2k-2}{c_0}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}\right\} \quad (41.12)$$

где $\underset{2k}{c_0}$ $(k=1, 2, \ldots)$ являются новыми произвольными постоянными интегрирования. Подставляя найденные $\underset{2k}{h_{00}}$ в (41.6) и группируя соответствующим образом члены полученного ряда, находим

$$g_{00} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} \underset{2k}{h_{00}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} \underset{2k}{c_0} +$$

$$+ \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} (\underset{2k}{c_1} + \underset{2k-2}{c_1}\underset{2}{c_0} + \underset{2k-4}{c_1}\underset{4}{c_0} + \ldots + \underset{2}{c_1}\underset{2k-2}{c_0}) =$$

$$= 1 + \lambda^2 \underset{2}{c_0} + \lambda^4 \underset{2}{c_0} + \ldots + \frac{1}{r} [(\lambda^2 \underset{2}{c_1} + \lambda^4 \underset{4}{c_1} + \ldots) + \lambda^2 \underset{2}{c_0} (\lambda^2 \underset{2}{c_1} +$$

$$+ \lambda^4 \underset{4}{c_1} + \ldots) + \lambda^4 \underset{4}{c_0} (\lambda^2 \underset{2}{c_1} + \lambda^4 \underset{4}{c_1} + \ldots) + \lambda^6 \underset{6}{c_0} (\lambda^2 \underset{2}{c_1} +$$

$$+ \lambda^4 \underset{4}{c_1} + \ldots) + \ldots] = (1 + \lambda^2 \underset{2}{c_0} + \lambda^4 \underset{4}{c_0} + \ldots)\left(1 + \frac{c_1}{r}\right). \quad (41.13($$

Если сходится абсолютно ряд $1+\lambda^2 \underset{2}{c_0}+\lambda^4 \underset{4}{c_0}+\ldots=c_0$, то проведенные в (41.13) группировки членов являются законными и мы приходим в итоге к точному решению (41.4).

Таким образом, доказано, что ряды (41.6) и (41.7) сходятся на любом отрезке времени, причем к точным решениям (41.4) и (41.5), если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} \underset{2k}{c_0}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} \underset{2k}{c_1}$ сходятся абсолютно. Заметим, что тем самым оправдано формальное почленное дифференцирование рядов (41.6) и (41.7). Как отмечалось выше, постоянная c_0 несущественна, ее можно положить равной единице (все $\underset{2k}{c_0}=0$), что мы и будем предполагать в дальнейшем. Тогда выражения (41.12) сильно упрощаются. Выбор постоянных $\underset{2k}{c_1}$ определяется физическими условиями задачи (массой центрального тела, его энергией, структурой и т. д.). Возможно, что с некоторого номера все $\underset{2k}{c_1}$ могут оказаться нулями.

§ 42. СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА В УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Движение легкого тела происходит по геодезической риманова пространства-времени, определяемого полем тяготения. В поле Шварцшильда (41.1) со значениями g_{00} и g_{11} из (41.4) и (41.5) уравнения геодезических (20.1) с учетом первого интеграла (20.2) можно точно проинтегрировать на уровне u^α. Считая без ограничения общности $\theta=\pi/2$ (центральная симметрия!), находим для u^α систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &g_{00}\frac{du^0}{dr} + g'_{00}u^0 = 0, \\ &(g_{11}u^{1^2})' = g'_{00}u^{0^2} - 2ru^{3^2} = 0, \\ &\frac{du^3}{dr} + \frac{2}{r}u^3 = 0; \end{aligned}\right\} \quad (42.1)$$

$$g_{00}u^{0^2}+g_{11}u^{1^2}-r^2u^{3^2}=1, \tag{42.2}$$

если $u^1\neq0$. Если же $u^1=0$ (движение круговое), то система (20.1), (20.2) по существу сводится к алгебраической:

$$\frac{du^0}{ds}=0,\ \frac{du^3}{ds}=0,\ g'_{00}u^{0^2}-2ru^{3^2}=0,\ g_{00}u^{0^2}-r^2u^{3^2}=1. \tag{42.3}$$

Из (42.1), (42.2) легко находим общее решение:

$$u^0=\frac{a_0}{g_{00}},\ u^{1^2}=a_0^2-\left(1+\frac{a_3^2}{r^2}\right)g_{00},\ u^2=0,\ u^3=\frac{a_3}{r^2}, \tag{42.4}$$

где $a_0\neq0$ и a_3 являются произвольными постоянными интегрирования. Для круговых движений имеем

$$u^{0^2}=\frac{2}{2g_{00}-rg'_{00}},\ u^1=0,\ u^2=0,\ u^{3^2}=\frac{g'_{00}}{r(2g_{00}-rg'_{00})}. \tag{42.5}$$

Представим теперь, как и в случае метрики, что точные решения (42.4) и (42.5) нам неизвестны. Тогда для установления закономерностей движения можно воспользоваться приближенным методом. Следствием разложения метрики в ряды (41.6) и (41.7) является разложение в ряды 4-скорости легкого тела:

$$\begin{aligned} u^0&=\underset{0}{u}^0+\lambda^2\underset{2}{u}^0+\lambda^4\underset{4}{u}^0+\ldots;\\ u^i&=\lambda\underset{1}{u}^i+\lambda^3\underset{3}{u}^i+\lambda^5\underset{5}{u}^i+\ldots. \end{aligned} \tag{42.6}$$

Подстановка рядов (41.6), (41.7), (42.6) в первое уравнение (42.1) приводит к бесконечной системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{0}{u}^{0\prime}=0,\\ &\underset{2}{u}^{0\prime}+\underset{2}{h}'_{00}\underset{0}{u}^0=0,\\ &\underset{4}{u}^{0\prime}+\underset{4}{h}'_{00}\underset{0}{u}^0+\underset{2}{h}'_{00}\underset{2}{u}^0+\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{u}^{0\prime}=0,\\ &\underset{6}{u}^{0\prime}+\underset{6}{h}'_{00}\underset{0}{u}^0+\underset{4}{h}'_{00}\underset{2}{u}^0+\underset{4}{h}_{00}\underset{2}{u}^{0\prime}+\underset{2}{h}'_{00}\underset{4}{u}^0+\underset{2}{h}_{00}\underset{4}{u}^{0\prime}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\underset{2k}{u}^{0\prime}+\underset{2k}{h}'_{00}\underset{0}{u}^0+\underset{2k-2}{h}'_{00}\underset{2}{u}^0+\underset{2k-2}{h}_{00}\underset{0}{u}^{0\prime}+\underset{2k-4}{h}'_{00}\underset{4}{u}^0+\underset{2k-4}{h}_{00}\underset{4}{u}^{0\prime}+\ldots+\\ &\qquad+\underset{2}{h}'_{00}\underset{2k-2}{u}^0+\underset{2}{h}_{00}\underset{2k-2}{u}^{0\prime}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{42.7}$$

Последовательное решение системы (42.7) приводит к следующим значениям $\underset{2k}{u^0}$:

$$
\left.\begin{array}{c}
\underset{0}{u^0} = \underset{0}{a_0}, \\[2mm]
\underset{2}{u^0} + \underset{2}{h_{00}}\,\underset{0}{u^0} = \underset{2}{a_0}, \\[2mm]
\underset{4}{u^0} + \underset{4}{h_{00}}\,\underset{0}{u^0} + \underset{2}{h_{00}}\,\underset{2}{u^0} = \underset{4}{a_0}, \\[2mm]
\underset{6}{u^0} + \underset{6}{h_{00}}\,\underset{0}{u^0} + \underset{4}{h_{00}}\,\underset{2}{u^0} + \underset{2}{h_{00}}\,\underset{4}{u^0} = \underset{6}{a_0}, \\[2mm]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2mm]
\underset{2k}{u^0} + \underset{2k}{h_{00}}\,\underset{0}{u^0} + \underset{2k-2}{h_{00}}\,\underset{2}{u^0} + \underset{2k-4}{h_{00}}\,\underset{4}{u^0} + \ldots + \underset{2}{h_{00}}\,\underset{2k-2}{u^0} = \underset{2k}{a_0}, \\[2mm]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \qquad (42.8)
$$

где $\underset{2k}{a_0}$ $(k=1, 2, \ldots)$ являются произвольными постоянными интегрирования. Из (42.8) легко находим, суммируя строки, предварительно умноженные на $\lambda^0, \lambda^2, \lambda^4, \ldots, \lambda^{2k}, \ldots$:

$$
\begin{aligned}
(\underset{0}{u^0}+\lambda^2\underset{2}{u^0}+\ldots+\lambda^{2k}\underset{2k}{u^0}+\ldots)\,(1+\lambda^2\underset{2}{h_{00}}+\ldots+\lambda^{2k}\underset{2k}{h_{00}}+\ldots) &= \\
=\underset{0}{a_0}+\lambda^2\underset{2}{a_0}+\ldots+\lambda^{2k}\underset{2k}{a_0}+\ldots &. \qquad (42.9)
\end{aligned}
$$

Если ряд справа в (42.9) сходится к некоторому числу a_0, то в силу сходимости ряда (41.6) будет сходиться и ряд из $\underset{2k}{u^0}$. Обозначая его сумму через u^0, приходим к точному решению $u^0=a_0/g_{00}$ (см. (42.4)). Для u^3 сразу получаем

$$
\underset{2k-1}{u^3} = \frac{1}{r^2}\,\underset{2k-1}{a_3}, \qquad (42.10)
$$

где $\underset{2k-1}{a_3}$ $(k=1, 2, \ldots)$ — постоянные интегрирования. Если их выбрать так, чтобы ряд $\lambda\underset{1}{a_3}+\lambda^3\underset{3}{a_3}+\ldots$ сходился к некоторому числу a_3, то придем к точному решению $u^3=a_3/r^2$. Теперь для нахождения u^1 можно воспользоваться не дифференциальным уравнением для u^1 в (42.1), которое является следствием остальных уравнений в (42.1) и (42.2), а первым интегралом движения (42.2), являющимся алгебраическим выражением относительно u^1. Тогда из сходимости рядов для g_{00}, g_{11}, u^0, u^3 немедленно следует сходимость ряда для u^1, причем к точному решению, указанному в (42.4). В случае круговых движений дело обстоит совсем просто. Действительно, в силу (42.5) u^0 и u^3 выражаются алгебраически через сходящиеся ряды g_{00} и g'_{00}. Поэтому и сами u^0 и u^3 сходятся.

Следовательно, на уровне 4-скоростей аппроксимационный метод в уравнениях движения в поле Шварцшильда сходится, если появляющиеся при интегрировании произвольные постоянные будут выбраны так, чтобы составляемые из них ряды сходились абсолютно или просто сходились.

Заметим, что при $\underset{2k}{c_0}=0$ ряд (41.6) сходится абсолютно, если сходится абсолютно ряд, составленный из $\underset{2k}{c_1}$. В этом случае группировки членов в (42.9) слева правомерны.

Переходим к заключительному этапу — нахождению зависимостей между x^α. Для нахождения, например, орбиты движения составляем с помощью (42.4) дифференциальное уравнение, содержащее только r и φ:

$$\left(\frac{u^1}{u^3}\right)^2=\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\frac{r^4}{a_3^2}\left[a_0^2-\left(1+\frac{a_3^2}{r^2}\right)g_{00}\right].$$

Или, введя обозначение $\sigma\equiv 1/r$, имеем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2=\frac{a_0^2}{a_3^2}-\left(\frac{1}{a_3^2}+\sigma^2\right)(1+c_1\sigma)\equiv\frac{1}{f^2(\sigma)}. \qquad (42.11)$$

Отсюда (постоянную интегрирования φ_0 полагаем равной нулю)

$$\pm\varphi=\int f(\sigma)\,d\sigma. \qquad (42.12)$$

Если воспользоваться формулой бинома Ньютона для степени $-1/2$, известными теоремами о сходимости числовых и функциональных рядов и теоремами об операциях над ними (см., например, [16]), то нетрудно показать, что функцию $f(\sigma)$ можно представить в виде степенного ряда по σ, сходящегося в области $0<\sigma<\frac{1}{r_g}$ $(r_g<r<\infty)$ к $f(\sigma)$. Причем коэффициентами при степенях σ будут комбинации чисел a_0, a_3, c_1, которые представляются числовыми сходящимися рядами. В области сходимости любой степенной ряд сходится равномерно. Тогда его можно почленно интегрировать. После интегрирования ряда для $f(\sigma)$ и расположения полученных членов по степеням λ получаем сходящийся к точному решению ряд — аппроксимационный процесс сходится. Последнее утверждение особенно ясно видно на примере кругового движения. Действительно, из (42.5) находим

$$\left(\frac{u^3}{u^0}\right)^2=\left(\frac{d\varphi}{c\,dt}\right)^2=-\frac{1}{2r^3}\left(\lambda^2\underset{2}{c_1}+\lambda^4\underset{4}{c_1}+\ldots\right). \qquad (42.13)$$

Справа стоит сходящийся числовой ряд (частный случай равномерно сходящегося ряда). Поэтому его можно почленно интегрировать, и приближенный метод сходится.

Отметим, что решение приближенным методом уравнений для x^α автоматически приводит к разложению x^α в ряды по λ, сходящиеся к точным решениям. Таким образом, нет необходимости заранее задавать эти разложения для x^α.

§ 43. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Как мы видели в § 41, 42, сходимость аппроксимационного метода обеспечивается сходимостью числовых рядов, составленных из постоянных интегрирования. Поэтому нужно убедиться, что сходимость числовых рядов действительно имеет место.

Выбор тех или иных значений $\underset{2k}{c_0}$ приводит на каждом шаге аппроксимации, а также в целом к выбору того или иного масштаба временной координаты. Ясно поэтому, что всегда можно считать ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} \underset{2k}{c_0}$ абсолютно сходящимся. В частности, можно выбрать все $\underset{2k}{c_0}=0$, что и было сделано в конце § 41. Постоянные $\underset{2k}{c_1}$, как уже отмечалось, определяются физическими характеристиками центрального тела, их выбор — в конце концов дело эксперимента, практики. Для конкретного тела выбор $\underset{2k}{c_1}$ будет также вполне конкретным и таким, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} \underset{2k}{c_1}$ будет сходящимся к конечному пределу. В противном случае пришли бы к противоречию следующего типа: конкретное центральное тело обладает бесконечной или неопределенной полной массой. Абсолютная сходимость рассматриваемого ряда получается немедленно, если на каждом этапе аппроксимации к ньютоновой массе центрального тела добавляется положительный член, т. е. постоянные $\underset{2k}{c_1}$ одного знака. Такое допущение представляется естественным. Заметим также, что абсолютная сходимость, по-видимому, не обязательна: ряд из $\underset{2k}{c_1}$ должен быть только таким, чтобы перестановки членов ряда в (41.10) были законными.

При рассмотрении движения пробного тела пришлось требовать сходимости двух числовых рядов: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} \underset{2k}{a_0} = a_0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k-1} \underset{2k-1}{a_3} = a_3$. Первый из них связан с энергией пробного тела, которая является интегралом движения. В самом деле, подсчитывая истинную трехмерную скорость v пробного тела в поле Шварцшильда (41.1) по известным правилам [В.13—В.15], найдем, воспользовавшись (42.4):

$$v^2 = \frac{c^2}{a_0^2}(a_0^2 - g_{00}), \quad a_0 = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{43.1}$$

Следовательно, $a_0 = E_0/m^* c^2$, где E_0 — энергия пробного тела, m^* — его масса (ср. [В.13, § 88]). Второй ряд определяет орбитальный момент импульса M пробного тела, который также является интегралом движения. Используя (42.4) и (43.1), получаем

$$a_3 = M/m^* c = r^2 \frac{d\varphi}{dt} [g_{00}(c^2 - v^2)]^{-1/2}. \tag{43.2}$$

Ясно, что на каждом этапе аппроксимации для конкретного пробного тела необходимо будет конкретно выбирать постоянные $\underset{2k}{a_0}$ и $\underset{2k-1}{a_3}$. Если выбор будет делаться правильно, то ряды будут сходиться автоматически. В противном случае опять придем к противоречию типа: конкретное пробное тело обладает бесконечными или неопределенными энергией и орбитальным моментом импульса.

Подведем итоги. В случае поля Шварцшильда и движения частицы в нем ответы на вопросы 1), 2) и 3), поставленные в § 40, будут положительными: приближенный метод для метрики и уравнений движения в поле Шварцшильда сходится на любом отрезке времени к точным решениям соответствующих уравнений. На вопрос 4) ответ следующий: сходимость имеет место для всех λ из области $0<\lambda<1$. Ответ на вопрос 5) можно дать в форме: при сравнении точных формул и уравнений и соответствующих формул и уравнений в постньютоновом приближении получаем, что закономерности движения не отличаются качественно в области $r>5r_g$; относительная погрешность при измерении расстояний и промежутков времени в области $r\geqslant 10r_g$ не превышает 0,1%. Подробные оценки, относящиеся к вопросу 5), см. в [В.301].

В § 41—43 доказана сходимость аппроксимационных методов, разработанных школами Эйнштейна — Инфельда и Фока — Папапетру. Это следует из того, что нами использовалась только общая часть этих методов (разложение в ряды всех величин), но не использовались свойства, отличающие эти методы друг от друга. Кроме того, можно сослаться на результат работы [17], в которой доказывается, что приближенные методы Эйнштейна — Инфельда и Фока — Папапетру в известном смысле эквивалентны. Отсюда также выводим, что из сходимости одного метода следует сходимость другого.

И последнее замечание. Задача движения легкого тела в поле Шварцшильда есть предельный случай задачи двух тел сравнимых масс. Сходимость аппроксимационного метода для предельного случая обнадеживает: возможно, что сходимость методов имеет место и для тел сравнимых масс.

§ 44. СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ В ПОЛЕ РЕЙСНЕРА — ВЕЙЛЯ — НОРДСТРЕМА

Так как заряд центрального тела не нарушает центральной симметрии поля тяготения, то метрика, соответствующая полю Рейснера — Вейля — Нордстрема (РВН), имеет тот же общий вид (41.1). Раскрывая уравнения Эйнштейна (3.1) с отличной от нуля правой частью (тензор электромагнитного поля теперь отличен от нуля), приходим к двум независимым дифференциальным уравнениям для определения g_{00} и g_{11} (см. [В.5, В.10]):

$$g'_{00}=-\frac{1}{r}g_{00}\left(1+g_{11}-\frac{\gamma e_0^2}{c^4r^2}g_{11}\right); \tag{44.1}$$

$$g'_{11}=\frac{1}{r}g_{11}\left(1+g_{11}-\frac{\gamma e_0^2}{c^4r^2}g_{11}\right), \tag{44.2}$$

где e_0 является зарядом центрального тела. Точное решение этой системы было найдено и обсуждалось в работах [5—7]. Оно может быть записано в виде

$$g_{00}=c_0\left(1-\frac{c_1}{r}+\frac{\gamma e_0^2}{c^4r^2}\right); \tag{44.3}$$

$$g_{11}=-\left(1-\frac{c_1}{r}+\frac{\gamma e_0^2}{c^4r^2}\right)^{-1}. \tag{44.4}$$

Далее мы рассуждаем и действуем точно так же, как в § 41. Представляем g_{00} и g_{11} в виде рядов (41.6), (41.7); ряд (41.7) подставляем в (44.2), получаем систему дифференциальных уравнений для $\underset{2k}{h}_{11}$, которая легко решается; суммируя найденные $\underset{2k}{h}_{11}$, согласно (41.7), приходим к точному решению (44.4). При этом нужно учесть, что коэффициент $\gamma e_0^2/c^4\sim\lambda^4$. Используя найденные $\underset{2k}{h}_{11}$ и ряд (41.6), с помощью уравнения (44.1) составляем систему уравнений для определения $\underset{2k}{h}_{00}$, которую нетрудно решить; суммируя найденные $\underset{2k}{h}_{00}$, согласно (41.6), приходим к точному решению (44.3). Это означает, что приближенный метод в поле РВН сходится.

Переходя к рассмотрению сходимости приближенного метода для уравнений движения незаряженной частицы, сразу же замечаем, что уравнения геодезических в поле РНВ по виду точно такие же, как в поле Шварцшильда (42.1). Поэтому в поле РВН все последующие формулы, рассуждения и вычисления точно такие же, как в поле Шварцшильда. Это происходит потому, что явный вид g_{00} и g_{11} не важен. Важно только, что g_{00} и g_{11} — функции r и метрика имеет вид (41.1). Следовательно, приближенный метод в поле РВН для уравнений геодезических сходится.

Тем самым завершается доказательство того факта, что приближенные методы Эйнштейна — Инфельда и Фока — Папапетру для метрики и уравнений движения незаряженной частицы в поле Рейснера — Нордстрема сходятся. Ответы на вопросы 1)—4), сформулированные в § 41, точно такие же, как и для поля Шварцшильда (см. конец § 43). При желании можно оценить погрешности, о которых идет речь в вопросе 5). Так как для тел астрономического типа $e_0^2\leqslant\gamma m^2$ (см., например, [В.15, 18]), то отношение члена $\gamma e_0^2/c^4r^2$ к члену r_g/r всегда $\lessdot r_g/r$, т. е. указанные члены в метрике РВН могут оказаться сравнимыми только вблизи гравитационного радиуса $(r\sim r_g)$. Вдали от него член $\gamma e_0^2/c^4r^2$ значительно меньше r_g/r. Поэтому упомянутые выше погрешности в поле РВН всегда мало отличаются от погрешностей в поле Шварцшильда в областях $r>(10—100)r_g$.

Глава VI

ПРИЛОЖЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 45. ВЗАИМОСВЯЗЬ УГЛОВОГО И МАГНИТНОГО МОМЕНТОВ ТЕЛА, ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЯ ЭТОЙ ВЗАИМОСВЯЗИ

Прежде чем обсуждать возможные следствия взаимосвязи механического и магнитного моментов (12.17), (14.4), кратко напомним о ряде гипотез и экспериментов, выдвигавшихся и проводившихся ранее с целью обоснования взаимосвязи механического движения тела с его магнитным полем. В 1923 г. Вильсон [1] высказал предположение, что движущаяся поступательно масса будет увеличивать магнитное поле. Точнее, согласно его гипотезе, при движении тела массой m со скоростью $\vec{v}$ в окружающем пространстве на расстоянии $r = |\vec{r}|$ от тела возникает магнитное поле с напряженностью

$$\vec{H} = -\beta \frac{\gamma^{1/2} m}{c r^3} [\vec{v}\, \vec{r}], \qquad (45.1)$$

где $\beta \sim 1$ — безразмерный множитель. Позднее Вильсон отказался от этой гипотезы в результате проведенного эксперимента, который показал, что поступательно движущееся тело не дает такого поля. Впоследствии (1947) Блэкет [III.24] выдвинул видоизмененную гипотезу Вильсона для случая вращательного движения, согласно которой магнетизм является неотъемлемым свойством вращающегося тела, причем механический и магнитный моменты вращающегося тела a всегда пропорциональны:

$$|\vec{\mathfrak{m}}_a| = \frac{\beta \gamma^{1/2}}{2c} m_a |\vec{\sigma}_a|. \qquad (45.2)$$

Направления механического и магнитного моментов предполагаются коллинеарными. Экспериментальным основанием для гипотезы Блэкета явилось приближенное выполнение соотношения (45.2) для реальных астрономических объектов (Земля, Солнце, звезда 78 Девы; см. табл. 1 и 2 в [III.24]). Однако эта гипотеза встретила ряд трудностей, в результате чего она не была общепринята физиками (см. по этому поводу обзорную работу [I.17]). Например, гипотеза Блэкета противоречит тому факту, что оси вращения небесных тел не совпадают с их магнитными осями. Кроме того, магнитные поля многих звезд, как установлено наблюдениями, переменные [I.17, I.20—I.23, I.34, I.39—I.41, 2]. Действительно, ось вращения и магнитная ось у Земли образуют угол 11°,6, у Солнца — примерно 6° [I.39]. Звезда HD 125248 имеет магнитное поле ~7000 э, которое меняется с периодом 9,3 суток, проходя через нуль примерно до той же напряженности, но обратного знака. Заметно меняется магнитное поле Солнца, звезды 78 Девы и т. д. [I.41, с. 145]. Эти и другие наблюдательные факты ставят под сомнение универсальность гипотезы Блэкета. Тем не менее к ней иногда обращаются исследователи. Например, в работе [3] сделана попытка восстановить (правда, в несколько иной форме) обсуждаемую гипотезу. В работе [4] предлагается экспериментальная проверка гипотез Вильсона и Блэкета с помощью сверхпроводников. Сделана попытка [5] использовать эти гипотезы для новой интерпретации ОТО.

В классической молекулярной физике также известна теория и большая серия так называемых гиромагнитных опытов, устанавливающих взаимодействие магнитных и механических моментов (см. [I.44, гл. 17]). Основные из них — это опыт Эйнштейна — де Гааза [B.204] и опыт Барнетта [I.47], проделанные еще в 1915 г. В первом из них наблюдалось возникновение вращения ферромагнитного тела в результате изменения магнитного момента этого тела (эффект Эйнштейна — де Гааза), во втором, наоборот, изменяя механический момент тела, обнаруживают изменение его магнитного момента (эффект Барнетта). Впоследствии подобные опыты проводились неоднократно [6—9, I.44], и следует считать, что взаимосвязь механического и магнитного моментов тела доказана экспериментально с большой точностью. В опытах Эйнштейна — де Гааза и Барнетта механический и магнитный моменты тела были коллинеарными.

Интегралы движения (14.4), (19.10) являются следствием уравнений Эйнштейна (3.1) и предположения, что каждому магнитному моменту соответствует некоторый механический (угловой) момент (11.6). Все эти интегралы дают важный закон сохранения совокупного углового момента, определяющий взаимосвязь углового и магнитного моментов любого тела a системы. Этот закон следует считать обобщением (на посленьютоново приближение ОТО, на любые небесные тела и любые взаимные направления моментов) эффектов Эйнштейна — де Гааза и Барнетта.

Так как ньютоново приближение (14.4) отличается от посленьютонова приближения (19.10) малыми периодическими членами (для финитных движений), то ограничимся рассмотрением (14.4)

$$m_a\vec{s}_a \equiv m_a\vec{\sigma}_a + 2cm_a\vec{\mu}_a = \overrightarrow{\text{const}}, \quad \vec{\mu}_a = \frac{\vec{\mathfrak{m}}_a}{e_a^*}. \tag{45.3}$$

Взаимосвязь (45.3) не имеет непосредственного отношения к гипотезе Блэкета (45.2), ибо (45.3) является векторным законом, а не скалярным, как (45.2). В (45.3) ось вращения и магнитная ось могут находиться под любым углом, угловой момент и магнитный момент могут меняться со временем, но при соблюдении (45.3). Это сразу снимает трудности, которые встретила гипотеза Блэкета. Любопытно, однако, что в частном случае, когда $s_a = \text{const} \approx 0$, из (45.3) следует $|\vec{\mathfrak{m}}_a| \approx |e_a^*| \cdot |\vec{\sigma}_a|/2c$, откуда можно получить гипотезу Блэкета, если предположить (гипотеза!), что

$$|e_a^*| \approx \beta\gamma^{1/2} m_a. \tag{45.4}$$

§ 46. ВЗАИМОСВЯЗЬ СОБСТВЕННОГО ВРАЩЕНИЯ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ У АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Как уже отмечалось в § 11, объекты астрономического типа (планеты, Солнце, звезды, галактики) могут обладать, кроме собственных вращений, значительными электрическими зарядами и магнитными полями дипольного типа.

Рассмотрим, насколько интеграл (45.3) согласуется с некоторыми известными наблюдательными данными, касающимися вращений и магнитных полей Земли, Юпитера, Солнца и других объектов. Основные трудности, встречающиеся при этом, заключаются, с одной стороны, в недостатке конкретного цифрового наблюдательного материала, а с другой стороны, в отсутствии общепринятой проверенной теории, описывающей механизм возникновения магнитных полей у разных по структуре небесных тел. Таким образом, основа для уверенного вычисления e_a^* в (45.3) отсутствует, и приходится делать некоторые допущения и вводить различные предположения о ее величине. И только в некоторых случаях можно довольно точно найти порядок величины e_a^* (см. § 11).

Магнитное поле Земли имеет в основном дипольный характер, ось эквивалентного диполя (магнитная ось Земли) образует с осью вращения Земли угол 11°,4. Напряжение магнитного поля на полюсах $H_p \approx (0{,}61 \div 0{,}63)$ Э, магнитный момент Земли $|\vec{\mathfrak{m}}_з| \approx 8 \cdot 10^{25}$ см$^{5/2}$ · г$^{1/2}$ · с$^{-1}$ [I.40, III.24], угловой момент Земли $m_з |\vec{\sigma}_з| \approx 7 \cdot 10^{40}$ см^2·г·с$^{-1}$, и мы имеем

$$7 \cdot 10^{40} \vec{k}_1 + \frac{3 \cdot 10^{64}}{e_з^*} \vec{k}_2 = \overrightarrow{\text{const}} \equiv m_з \vec{s}_з, \tag{46.1}$$

где $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ — единичные векторы, направленные соответственно по $\vec{\sigma}_з$ и $\vec{\mathfrak{m}}_з$. Величина фиктивного эквивалентного заряда $e_з^*$ нам не известна. Однако здесь можно высказать некоторые предположения. Слагаемые в (46.1) будут равны, если $e_з^* = \frac{3}{7} \cdot 10^{24}$ см$^{3/2}$·г$^{1/2}$·с$^{-1}$. В этом случае, если угол между $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ равен 11°,4, $\vec{\sigma}_з$ и $\vec{\mathfrak{m}}_з$ прецессировали бы около $\vec{s}_з = \overrightarrow{\text{const}}$ с угловой скоростью, равной угловой скорости собственного вращения Земли, образуя с $\vec{s}_з$ одинаковые углы 5°,7. Но, согласно наблюдениям, ось вращения Земли не совершает подобной прецессии или совершает ее под очень малым углом к $\vec{s}_з$. Согласно формуле (46.1), этот угол будет малым, если $e_з^*$ будет значительно больше, чем 10^{24} см$^{3/2}\cdot$г$^{1/2}\cdot$с$^{-1}$. Тогда закон (45.3) не противоречит наблюдениям.

Как известно [I.40, 10—13], вращение Земли неравномерное. Причины этому разные. Мы обратим внимание на следующие факты. В 1956 и 1959 гг. наблюдениями с Земли, а позже с помощью ИСЗ были отмечены внезапные изменения скорости вращения Земли. Эти изменения совпали во времени с мощными вспышками на Солнце. Было предположено, что изменения скорости связаны с изменением магнитного поля Земли. Закономерность (45.3), возможно, имеет некоторое отношение к отмеченному изменению скорости вращения Земли, ибо изменение $\vec{\mathfrak{m}}_з$ должно вести к определенному изменению $\vec{\sigma}_з$.

У Юпитера, согласно теории Уорвика [14], существует магнитное поле дипольного типа с магнитным моментом $|\vec{\mathfrak{m}}_ю|\approx$ $\approx 4\cdot 10^{30}$ см$^{5/2}\cdot$г$^{1/2}\cdot$с$^{-1}$, причем ориентация магнитного момента $\vec{\mathfrak{m}}_ю$ такая же, как ориентация углового момента $\vec{\sigma}_ю$. Ось вращения Юпитера образует некоторый угол с магнитной осью. Существуют разные оценки этого угла: от 9° по Моррису и Берджу [15] до 24° по Башу и др. [16]. Угловой момент Юпитера $m_ю|\vec{\sigma}_ю|\approx 7\cdot 10^{45}$ см$^2\cdot$г$\cdot$с$^{-1}$. Пользуемся законом (45.3):

$$m_ю\vec{s}_ю\approx 7\cdot 10^{45}\,\vec{k}_1+\frac{5\cdot 10^{71}}{e_ю^*}\,\vec{k}_2=\overrightarrow{\mathrm{const}}. \tag{46.2}$$

Здесь, как и в случае Земли, $e_ю^*$ нам не известно. Слагаемые в (46.2) будут равны по модулю, если $e_ю^*=\frac{5}{7}\cdot 10^{26}$ см$^{3/2}\cdot$г$^{1/2}\cdot$с$^{-1}$. В этом случае ось вращения и магнитная ось Юпитера прецессировали бы около $\vec{s}_ю$ с угловой скоростью вращения Юпитера вокруг своей оси, образуя одинаковые углы $(9°\div 24°)/2$ с $\vec{s}_ю$. Если наблюдениями установлено, что $\vec{\sigma}_ю$ практически не прецессирует, то это будет обозначать, что $e_ю^*$ значительно больше 10^{26} см$^{3/2}\cdot$г$^{1/2}\cdot$с$^{-1}$.

Для Солнца, как известно (см., например, [В.325, III.24]), угловой момент $m_\odot|\vec{\sigma}_\odot|\approx 10^{49}$ см$^2\cdot$г$\cdot$с$^{-1}$, магнитный момент $|\vec{\mathfrak{m}}_\odot|\approx 3\cdot 10^{32}$ см$^{5/2}\cdot$г$^{1/2}\cdot$с$^{-1}$. Тогда интеграл (45.3) дает

$$m_\odot\vec{s}_\odot\approx 10^{49}\,\vec{k}_1+\frac{3\cdot 10^{75}}{e_\odot^*}\,\vec{k}_2=\overrightarrow{\mathrm{const}}. \tag{46.3}$$

В (46.3) равенство слагаемых по модулю будет при $e_\odot^*=3\cdot 10^{26}$ см$^{3/2}\cdot$г$^{1/2}\cdot$с$^{-1}$. Если бы $e_\odot^*$ имело такое значение, то ось вращения и магнитная ось Солнца, образующие между собой угол $\approx 6°$ (согласно [I.39, т. III]), должны прецессировать (при условии постоянства или медленного изменения $|\vec{\sigma}_{\odot}|$ и $|\vec{\mathfrak{m}}_{\odot}|$, что в нашу эпоху выполняется) около постоянного вектора $\vec{s}_{\odot}$, образуя с ним углы по 3°. Период прецессии должен тогда равняться среднему периоду собственного вращения Солнца (25—30 суток), а направление прецессии совпадать с направлением собственного вращения. Однако такая прецессия не наблюдается, и это должно означать, что модуль второго слагаемого в (46.3) значительно меньше модуля первого слагаемого и, следовательно, значение $e^*_{\odot}$ должно быть значительно больше $3 \cdot 10^{26}$ см$^{3/2}\cdot$г$^{1/2}\cdot$с$^{-1}$. Например, при $e^*_{\odot} = 10^{29}$ см$^{3/2}\cdot$г$^{1/2}\cdot$с$^{-1}$ угол между $\vec{\sigma}_{\odot}$ и $\vec{s}_{\odot}$ будет уже порядка нескольких дуговых минут, т. е. ось вращения Солнца будет практически совпадать с прямой $\vec{s}_{\odot}$, а магнитная ось будет прецессировать, образуя с $\vec{s}_{\odot}$ угол почти в 6°.

Если принять динамо-теории происхождения магнитных полей Земли, Юпитера, Солнца, то можно, по-видимому, рассчитать величину e^* точнее.

Интересно отметить, что рассчитанная по формуле (45.4) величина e^* имеет значения для Земли $|e^*_{з}| \approx 1{,}5 \cdot 10^{24}\,\beta$, Юпитера $|e^*_{ю}| \approx 5 \cdot 10^{26}\,\beta$, Солнца $|e^*_{\odot}| \approx 5 \cdot 10^{29}\,\beta$ ед. CGSE, $\beta \sim 1$.

§ 47. ЗАКОНОМЕРНОСТЬ (45.3) В АСПЕКТЕ ЭВОЛЮЦИИ СОБСТВЕННЫХ ВРАЩЕНИЙ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ОБЪЕКТОВ АСТРОНОМИЧЕСКОГО ТИПА

У Земли замечены медленные вековые изменения магнитного поля [I.40, 11], которые проявляются, например, в блуждании магнитных полюсов (магнитной оси) относительно тела Земли и в медленном убывании напряженности магнитного поля (следовательно, и магнитного момента) по величине. Более того, на основании ряда исследований получен вывод, что магнитное поле Земли в прошлом даже изменяло знак. Примерно один раз в миллион лет северный и южный полюсы меняются местами. Сейчас северный магнитный полюс Земли находится в южном полушарии, т. е. вектор $\vec{\mathfrak{m}}_{з}$ направлен в южное полушарие, а вектор $\vec{\sigma}_{з}$ — в северное. Тогда, согласно (45.3), изменение магнитного поля, происходящее в силу некоторых причин, должно влиять на вращение Земли. При имеющейся в настоящее время ориентации $\vec{\sigma}_{з}$ и $\vec{\mathfrak{m}}_{з}$, согласно (45.3), уменьшение $|\vec{\mathfrak{m}}_{з}|$ должно вызывать замедление вращения Земли. И действительно, за последние столетия наблюдается систематическое увеличение продолжительности суток примерно на 0,0014 с за 100 лет, что обычно приписывают только тормозящему действию лунных и солнечных приливов [I.40, 12, 13]. Это увеличение, по-видимому, должно слагаться из двух частей: одна часть обязана приливам, вторая —

закономерности (45.3). Наблюдаются также скачкообразные изменения скорости вращения, которые увеличивают или уменьшают продолжительность суток до 0,004 с. Как отмечается в [I.40], причина этих изменений с достоверностью еще не установлена. На наш взгляд, эти скачкообразные изменения скорости вращения можно связать со скачкообразными изменениями магнитного поля Земли, вызываемыми разными причинами. В частности, одной из причин, как уже отмечалось в § 46, может явиться активная деятельность Солнца (вспышки и т. п.). Количественное обоснование высказанных утверждений наталкивается на отсутствие достаточного цифрового материала, доставляемого наблюдениями.

Как показано в работах [17, 18], с начала 1960 г. период вращения Юпитера начал увеличиваться на 1,17 с в год. В этой связи интересные наблюдения были проделаны над Большим Красным Пятном. Его оптический период также стал изменяться, удлиняясь на 1,01 с в год, примерно в то же самое время, когда начались изменения радиопериода (см. [19]). Наиболее распространенное объяснение этих явлений состоит в том, что в ядре планеты происходят изменения, вызывающие изменения местоположений источников радиоизлучения, по которым определяется период вращения Юпитера. Выдвинуто также другое объяснение, основывающееся на связи между магнитным полем планеты и межпланетной средой [20]. Все эти объяснения так или иначе связаны с изменениями магнитного поля планеты Поэтому естественно возникает гипотеза, что наблюдаемое увеличение периода вращения обязано взаимосвязи (45.3). Так как северный магнитный полюс Юпитера находится в северном полушарии, т. е. $\vec{\sigma}_{ю}$ и $\vec{\mathfrak{m}}_{ю}$ ориентированы одинаково [19], то увеличение периода вращения (уменьшение $m_{ю}|\vec{\sigma}_{ю}|$) должно вызываться увеличением магнитного момента в соответствии с (46.2). Нужны специальные наблюдения, чтобы обнаружить определенное увеличение магнитного поля Юпитера, что явилось бы экспериментальным подтверждением закона (45.3).

Есть основания полагать [I.39, III.24], что магнитное поле Солнца менялось. Раньше, например, считали, что на полюсах напряжение магнитного поля было $H_{p\odot}=(50—53)$ Э и на этом основании рассчитывали магнитный момент Солнца [III.24], который был равен $|\vec{\mathfrak{m}}_{\odot}|=1/2\, R_{\odot}^{3} H_{p\odot}=9\cdot 10^{33}$ ед. CGSE. Если принять $H_{p\odot}=(1—2)$ Э, то получаем $|\vec{\mathfrak{m}}_{\odot}|=3\cdot 10^{32}$ ед. CGSE, что и было использовано при написании (46.3). Все это означает, что в процессе такой эволюции магнитного поля Солнца, согласно (45.3), должна происходить эволюция собственного вращения Солнца: угловая скорость должна изменяться по величине и направлению определенным образом в зависимости от начального расположения векторов $\vec{\sigma}_{\odot}$, $\vec{\mathfrak{m}}_{\odot}$ и знака $e_{\odot}^{*}$. Возможные варианты нетрудно рассчитать по формуле (45.3), имея необходимые наблюдательные данные.

В космогонических теориях Солнечной системы значительное место занимает вопрос о происхождении осевого вращения планет и Солнца. Существует целый ряд механических гипотез о происхождении осевого вращения планет, которые часто переплетаются и дополняют одна другую (см., например, работы [I.19, 21—38]). Первая попытка учесть влияние электромагнитных процессов в происхождении вращения планет была сделана только в 1955 г. Бостиком [39]. Согласно гипотезе Бостика, вращение небесных тел возникает в результате самораскручивания сжимающейся ионизированной среды в собственном магнитном поле. Сжатие происходит под действием гравитационного поля поперек слабого магнитного поля, что вызывает усиление поля и создает вращающий момент, раскручивающий массу в целом. Электродинамическая гипотеза происхождения осевого вращения небесных тел высказана в [40], по которой в недрах тел вследствие большого давления электроны атомов вылетают из своих оболочек. В результате атомы оказываются положительно заряженными и их магнитный момент своей парой сил вызывает вращение всей системы.

Нам представляется, что закон (45.3) мог бы многое объяснить в вопросе о происхождении осевого вращения небесных объектов. Схема объяснения проста. Следует предположить, что объект обладал в прошлом магнитным полем дипольного типа и очень слабым собственным вращением. В процессе эволюции объекта магнитное поле могло как увеличиваться, так и уменьшаться. В обоих случаях угловой момент может увеличиваться. В самом деле, если у объекта $\vec{\sigma}_a$ и $\vec{\mathfrak{m}}_a$ почти коллинеарны и противоположно направлены, то при увеличении $|\vec{\mathfrak{m}}_a|$ увеличивается и $|\vec{\sigma}_a|$. Если $\vec{\sigma}_a$ и $\vec{\mathfrak{m}}_a$ одинаково направлены, то при уменьшении $|\vec{\mathfrak{m}}_a|$ угловой момент $|\vec{\sigma}_a|$ будет увеличиваться $(e^*_a > 0)$. Нетрудно провести численные расчеты на основе формулы (45.3), чем мы не будем заниматься.

В настоящее время на смену механическим космогоническим гипотезам (Джинса [41] и др.) пришли теории происхождения Солнечной системы, в которых большая роль в эволюции первичной материи принадлежит электромагнитным силам. Таковыми являются, например, теории Альвена [I.31, 42], Хойла [43, 44] (см. также [B.25, гл. 4 и 5]). Учет закономерности (45.3) может привести к пересмотру основных положений и выводов этих теорий.

Закон (45.3) должен играть особо важную роль для тех объектов, у которых имеются сильные и быстро меняющиеся магнитные поля. Таковыми являются некоторые галактики и звезды. В § 45 уже упоминалось о звезде HD 125248 и других с сильными переменными магнитными полями. К сожалению, неизвестно, с какой скоростью эти звезды вращаются и какие углы образуют их оси вращения с магнитными осями.

Если для них в (45.3) слагаемые сравнимы, то быстрые и большие колебания магнитного поля должны вызывать значительные изменения $\vec{\sigma}_a$ как по величине, так и по направлению, что в свою очередь может привести к ряду побочных явлений (гравитационому и электромагнитному излучениям определенного типа и т. д.). Если этого не происходит, то нужно принять, что магнитный момент звезды или галактики мал по сравнению с угловым моментом (точнее: $2c|\vec{\mu}_a| \ll |\vec{\sigma}_a|$).

Закон (45.3) может также внести много нового в понимание природы и эволюции пульсаров, для которых сейчас общепринята модель наклонного ротатора (пульсар — быстро вращающаяся нейтронная звезда, магнитный момент которой образует некоторый угол с ее осью вращения) [В.24, В.27—В.29, I.27, I.41, В.15, В.19]. Здесь, возможно, следует связать механизм гравитационного излучения с (45.3), так как наблюдениями обнаруживается систематическое уменьшение угловой скорости вращения пульсаров, что в соответствии с (45.3) должно сильно влиять на их магнитные поля.

В настоящее время большой интерес проявляется к теориям возникновения вращения и магнитных полей у галактик и у других астрофизических объектов (см., например, работы [45—49] и имеющуюся в них литературу). Общепризнана важная роль, которую играют магнитные поля в эволюции галактик и звезд (см., например, [В.25, гл. 2; I.38—I.41]). Систематический учет закона (45.3) во всех этих теориях прояснил бы многие детали хода эволюции объектов.

Мы не имеем возможности подробно останавливаться на затронутых вопросах, так как их разработка требует отдельного большого исследования с участием геофизиков, астрономов, астрофизиков. Цель проведенного обсуждения — обратить внимание этих специалистов на новую возможность объяснять упоминавшиеся изменения магнитных полей и собственных вращений небесных объектов. Закон (45.3) предлагается в качестве рабочей гипотезы, могущей послужить стимулом для ряда новых исследований и обсуждений.

В заключение этого параграфа подчеркнем, что закон (45.3) имеет аналог в квантовой механике. Действительно, известно (см., например, [I.44, 50, 51]), что электрон обладает собственным механическим моментом импульса (спином) S, орбитальным моментом импульса L и магнитным моментом $\mathfrak{M}$, который связан с S соотношением Штерна — Герлаха

$$\mathfrak{M} = \frac{e}{mc} S, \tag{47.1}$$

где e и m — заряд и масса покоя электрона ($|e|/mc \approx 2 \cdot 10^7$ см$^{1/2} \times$ $\times$ г$^{-1/2}$). Также известно, что выполняется закон сохранения

$$J \equiv L + S = \mathrm{const}, \tag{47.2}$$

а следовательно, сохраняется в силу (47.1) и величина

$$J = L + \frac{mc}{e} \mathfrak{M} = \mathrm{const}. \tag{47.3}$$

Складывая (47.2) с (47.3), умноженным на 2, находим

$$3J=3L+S+2\frac{mc}{e}\mathfrak{M}=\text{const}. \tag{47.4}$$

В ньютоновой механике выполняется закон сохранения орбитального момента легкого тела $\vec{M}_a=\overrightarrow{\text{const}}$. Добавив справа и слева в (45.3) вектор $3\vec{M}_a$, получаем закон сохранения

$$3\vec{M}_a+\vec{S}_a+2\frac{m_a c}{e_a^*}\vec{\mathfrak{m}}_a=\overrightarrow{\text{const}}, \tag{47.5}$$

вполне аналогичный квантовомеханическому закону (47.4).

§ 48. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВЕКОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В АСТРОФИЗИКЕ НА ПРИМЕРАХ КРАТНЫХ ЗВЕЗД И ПУЛЬСАРОВ

В посленьютоновом приближении, как показано в § 26, возникает ряд релятивистских вековых эффектов движения. Вектор $\vec{\tilde{S}}_a$ совершает прецессию (26.11) с угловой скоростью (26.13). Без учета электромагнетизма подробные числовые оценки прецессии даны в § 22. Опираясь на них, легко дать оценки, учитывающие электромагнитные члены. В (26.12) отношение третьего члена к первому и четвертого ко второму имеет порядок $e^2/\gamma m^2$, а четвертого к первому — $e^2 s/\gamma m^2 c_3$. Следовательно, электромагнитные члены будут давать приблизительно такой же вклад в релятивистскую прецессию, что и неэлектромагнитные члены, если $e^2/\gamma m^2 \sim 1$. При одинаковых знаках зарядов e_a и e_b величина $e^2/\gamma m^2$ должна быть меньше 1 для того, чтобы тела a и b взаимно притягивались. Итак, требуем, чтобы было $e^2<\gamma m^2$. Для тел с $m=m_\odot=2\cdot10^{33}$ г тогда имеем $e\leqslant 5{,}16\cdot10^{29}$ см$^{3/2}\cdot$г$^{1/2}\cdot$с$^{-1}$. Предложенные в работах [В.324, I.18] для заряда Солнца значения $e_\odot=3\cdot10^{27}$—10^{29} условию $e^2<\gamma m^2$ удовлетворяют. Если $e^2/\gamma m^2 \ll 1$, то влияние электромагнитных членов становится ничтожным, и получаем оценки эффектов те же, что в § 22, или несколько большими или меньшими, если в $\vec{s}\equiv\vec{\sigma}+2c\vec{\mu}$ второе слагаемое сравнимо по модулю с первым слагаемым.

Аналогичное положение вещей имеет место и для всех последующих вековых эффектов, рассмотренных в § 26, ибо в соответствующих формулах всюду отношение электромагнитных членов к неэлектромагнитным будет порядка $e^2/\gamma m^2$ или $e^2 s/\gamma m^2 c_3$.

Следует только отметить одну важную деталь: электромагнитные члены почти всегда имеют знаки, противоположные знакам членов неэлектромагнитного происхождения. Физически это означает, что электромагнитные взаимодействия почти всегда уменьшают вековые эффекты неэлектромагнитного происхождения. Например, в формулах (26.10), (26.16), (26.37), (26.38) все упомянутые члены противоположных знаков, и только в (26.36) последний член того же знака, что и первый. Его отношение к первому равно $(e^2/\gamma m^2)^2$, а не $e^2/\gamma m^2$.

Сделаем сейчас некоторые дополнительные оценки. Предположим, что оба тела a и b имеют одинаковые массы $m_a = m_b = m_0$ и одинаковые заряды $e_a = e_b = e_0$. Тогда из (26.36) находим

$$\eta_0 = \pm \frac{6\gamma m_0}{c^2 p}\left(1 - \frac{7}{6}\,\frac{e_0^2}{\gamma m_0^2} + \frac{1}{6}\,\frac{e_0^4}{\gamma^2 m_0^4}\right)\left(1 - \frac{e_0^2}{\gamma m_0^2}\right)^{-1} \qquad (48.1)$$

Если угловые и магнитные моменты тел невелики, то при рассмотрении смещения периастра относительной орбиты членами η_1 и η_2 в (26.40) можно пренебречь и все смещение будет определяться выражением η_0 из (48.1). Легко находим, что при условии $0 \leqslant e_0^2/\gamma m_0^2 < 1$ всегда $\eta_0 > 0$, т. е. согласно (48.1), смещение периастра всегда прямое. Легко показать, что при указанном условии

$$\lim_{x \to 1-0} \eta_0 = \frac{5\gamma m_0}{c^2 p}, \quad x \equiv \frac{e_0^2}{\gamma m_0^2}. \qquad (48.2)$$

Это означает, что в суммарном поле притяжения $(0 \leqslant x < 1)$ смещение периастра за счет учета электрических зарядов тел может уменьшиться максимум на 1/6 неэлектромагнитного смещения $\alpha_0 = 3\gamma m/c^2 p = 6\gamma m_0/c^2 p$. Важно отметить, что при $x \ll 1$ и небольших s/M члены η_1 и η_2 действительно малы. Но при $x \to 1-0$ η_1 и η_2 теоретически стремятся к бесконечности, так как $\varkappa \to 0$ и $c_3 \to 0$. Таким образом, опять выясняется, что билинейные и (линейные) по s члены в определенных ситуациях становятся не менее, а более важными, чем не зависящие от s члены. В результате смещение периастра при подобранных подходящим образом параметрах может оказаться обратным.

Если одно из тел не обладает зарядом (для определенности $e_a = 0$), то $\varkappa = \gamma m$ и, согласно (26.36),

$$\eta_0 = \frac{3\gamma m}{c^2 p} - \frac{e_b^2}{2c^2 m_b p} = \frac{3\gamma m}{c^2 p}\left(1 - \frac{1}{6}\,\frac{e_b^2}{\gamma m m_b}\right). \qquad (48.3)$$

Следовательно, наличие заряда только у одного из тел всегда приводит к уменьшению смещения периастра. Принимая, например, $m_a = m_b$ и $e_b^2/\gamma m_b^2 = 1$, получаем

$$\eta_0 = \frac{6\gamma m_b}{c^2 p}\left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{11\gamma m_b}{2c^2 p}. \qquad (48.4)$$

§ 49. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ И НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ОТО

Релятивистские вековые эффекты, возникающие при движении различных тел в пределах Солнечной системы без учета электромагнитных сил, достаточно подробно обсуждались в печати (см., например, работы [B.11, B.14, B.57, B.59, B.62, B.77, B.78, B.84, B.92, B.196—B.198, B.303—B.305] и имеющуюся в них литературу). Эти эффекты малы по сравнению с эффектами ньютоновой теории тяготения, возникающими в силу разных причин: возмущения движения соседними планетами, приливные явления, несферичность планет и т. д. (см. также § 2). Например, обязанное динамическим факторам ньютоново смещение перигелия Меркурия составляет примерно 575″ за 100 лет (см. [B.60]), в то время как релятивистский вековой эффект всего $\approx 43''$. Релятивистские эффекты, возникающие из-за собственного вращения зарядов и магнитных моментов тел, еще меньше. Однако возросшая точность экспериментальной техники в настоящее время [B.31, B.32, B.50, B.59] позволяет надеяться на постановку новых более тонких опытов, проверяющих следствия ОТО. Поэтому желательно внимательнее рассмотреть эти следствия, в частности релятивистские эффекты движения, и дать их численные оценки, которые могут служить в значительной мере критерием осуществимости опытов.

Рассмотрим некоторые мало обсуждавшиеся или даже новые возможности опытной проверки ОТО, основывающиеся на расхождении траекторий двух пробных тел с разными характеристиками (зарядами, угловыми и магнитными моментами) при их движении в поле тяжелого тела.

1. Величина смещения периастра (перигелия, перигея) орбиты легкого тела a в поле тяжелого тела b (например, Солнца или Земли) будет зависеть от значения η в (26.39). Изменение $\vec{\sigma}_a$, e_a, $\vec{\mathfrak{m}}_a$ приводит к изменению η, как это видно из (26.36)—(26.38). Пусть $\eta^{(1)}$ — значение η при некоторых выбранных $\vec{\sigma}^{(1)}_a$, $e^{(1)}_a$ и $\vec{\mathfrak{m}}^{(1)}_a$, а $\eta^{(2)}$ соответствует некоторым другим $\vec{\sigma}^{(2)}_a$, $e^{(2)}_a$ и $\vec{\mathfrak{m}}^{(2)}_a$. Тогда ясно, что траектории движения

$$\tilde{r}^{(1)} = \frac{p}{1+e\cos(1-\eta^{(1)})\tilde{\varphi}}, \quad \tilde{r}^{(2)} = \frac{p}{1+e\cos(1-\eta^{(2)})\tilde{\varphi}} \tag{49.1}$$

будут разными. Оценим $|\tilde{r}^{(1)}-\tilde{r}^{(2)}|$ с точностью до вековых членов в постньютоновом приближении, воспользовавшись (26.39):

$$|\tilde{r}^{(1)}-\tilde{r}^{(2)}| = \frac{ep|\eta^{(1)}-\eta^{(2)}|}{(1+e\cos\varphi)^2}\varphi\sin\varphi. \tag{49.2}$$

Тогда за $(1/4+k)$ оборотов вокруг центрального тела (φ меняется от 0 до $\pi/2+2\pi k$) находим, что

$$\Delta r \equiv |\tilde{r}^{(1)}-\tilde{r}^{(2)}| = ep\,|\eta^{(1)}-\eta^{(2)}| \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), \quad k=0, 1, 2, \ldots, n. \quad (49.3)$$

На основании (49.3) нетрудно дать оценку расхождения траекторий Δr двух пробных тел $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ с массами $\underset{a}{m}^{(1)}$ и $\underset{a}{m}^{(2)}$, начинающих свое движение из одной малой области в одном направлении (начальная точка M_0 и начальная скорость $\vec{v}_0$ у них одинаковые). Сразу же в (26.36)—(26.39) отбросим квадратичные по $\vec{s}$ члены (т. е. η_2), так как в пределах Солнечной системы они малы по сравнению с остальными. Рассмотрим различные случаи.

1. Пробные тела не несут на себе электрических зарядов, не намагничены и не вращаются ($\underset{a}{e}^{(1)}=\underset{a}{e}^{(2)}=0$, $\underset{a}{\vec{\mathfrak{m}}}^{(1)}=\underset{a}{\vec{\mathfrak{m}}}^{(2)}=0$, $\underset{a}{\vec{\sigma}}^{(1)}=\underset{a}{\vec{\sigma}}^{(2)}=0$). Центральное тело b создает поле Шварцшильда. Тогда (см. (23.43))

$$\Delta r = ep\,|\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}| \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) = \frac{3\gamma e}{c^2}\,|\underset{a}{m}^{(1)}-\underset{a}{m}^{(2)}| \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \approx$$
$$\approx \pi e\,|\underset{a}{m}^{(1)}-\underset{a}{m}^{(2)}|\,(1+4k)\,10^{-28}\ \text{см}. \quad (49.4)$$

Таким образом, в принципе существует, согласно ОТО, релятивистский эффект (49.4), возникающий из-за разности масс пробных тел, но он чрезвычайно мал, так как для пробных тел разность $|\underset{a}{m}^{(1)}-\underset{a}{m}^{(2)}|$ не может быть значительной.

2. Центральное тело вращается, создавая поле Лензе — Тирринга, а пробные тела движутся в его экваториальной плоскости, причем одно из них является шаровым волчком (гироскопом) с осью, перпендикулярной к плоскости движения ($\underset{a}{\vec{\sigma}}^{(1)}\neq 0$, $\underset{a}{\vec{\sigma}}^{(2)}=0$, $\vec{\sigma}_b\neq 0$, $\underset{a}{e}^{(1)}=\underset{a}{e}^{(2)}=0$, $\underset{a}{\vec{\mathfrak{m}}}^{(1)}=\underset{a}{\vec{\mathfrak{m}}}^{(2)}=0$, $e_b=0$, $\vec{\mathfrak{m}}_b=0$). Тогда

$$\eta^{(1)} = \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} = \frac{3\gamma}{c^2 p}(m_a^{(1)} + m_b) - \frac{\gamma}{c^2 p M^*_{(1)}}\,[(4m_a^{(1)} + 3m_b)\,\sigma_a^{3(1)} +$$
$$+ (3m_a^{(1)} + 4m_b)\,\sigma_b^3];$$
$$\eta^{(2)} = \alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(2)} = \frac{3\gamma}{c^2 p}(m_a^{(2)} + m_b) - \frac{\gamma}{c^2 p M^*_{(2)}} \times$$
$$\times (3m_a^{(2)} + 4m_b)\,\sigma_b^3. \quad (49.5)$$

Вычисляя разность $\eta^{(1)}-\eta^{(2)}$, можем члены с $\underset{a}{m}^{(1)}-\underset{a}{m}^{(2)}$ отбросить (согласно (49.4) и $m_a \ll m_b$ они ничтожно малые по сравнению с остальными членами). Тогда

$$|\eta^{(1)}-\eta^{(2)}|=\frac{3\gamma m_b}{c^2 p}\,\frac{|\vec{\sigma}_a^{(1)}|}{M^*}=\frac{3\gamma m_b}{c^2 p}\cdot\frac{|\vec{\sigma}_a^{(1)}|}{\sqrt{\gamma m_b p}}; \tag{49.6}$$

$$\Delta r=\frac{3\gamma m_b}{c^2}\,e\,\frac{|\vec{\sigma}_a^{(1)}|}{\sqrt{\gamma m_b p}}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right). \tag{49.7}$$

Если пробные тела движутся в поле Земли по орбите с $p=10^9$ см, $|\vec{\sigma}_a^{(1)}|=(10^3—10^5)$ см$^2\cdot$с$^{-1}$, $e\approx 1/2$, то за k оборотов $\Delta r\approx(10^{-11}—$ $—10^{-9})k$ см, а за 1 год $\Delta r\sim(10^{-8}—10^{-6})$ см, так как период обращения тел $T\sim 10^4$ с, и они сделают за 1 год примерно 3000 оборотов.

Релятивистский эффект (49.7) не чувствителен к вращению центрального тела: оно может вращаться, а может и не вращаться — величина эффекта от этого не изменяется.

3. Пусть $e_a^{(1)}=e_a^{(2)}=0$, $\vec{\sigma}_a^{(1)}=\vec{\sigma}_a^{(2)}=0$, $\vec{\mathfrak{m}}_a^{(2)}=0$, а вектор $\vec{\mathfrak{m}}_a^{(1)}\neq 0$ и в ньютоновом приближении перпендикулярен к плоскости движения. Центральное тело b не заряжено $(e_b'=0)$, но может обладать угловым и магнитным моментами. Тогда

$$|\eta^{(1)}-\eta^{(2)}|=\frac{3\gamma m_b}{c^2 p}\,\frac{|2c\vec{\mu}_a^{(1)}|}{M^*} \tag{49.8}$$

и, согласно (49.3),

$$\Delta r=\frac{3\gamma m_b}{c^2}\,e\,\frac{|2c\vec{\mu}_a^{(1)}|}{\sqrt{\gamma m_b p}}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right). \tag{49.9}$$

На основании (11.6*) имеем для ферромагнитного тела

$$|2c\vec{\mu}_a^{(1)}|\approx\frac{|\vec{\mathfrak{m}}_a^{(1)}|}{m_a^{(1)}}\cdot 10^{-7}\text{ см}^2\cdot\text{с}^{-1}. \tag{49.10}$$

Известно [52, 53], что постоянные магниты могут иметь на полюсах напряженность $H_p\sim 10^4$ Э, магнитный момент шарового магнита связан с радиусом шара R и H_p известной формулой $|\vec{\mathfrak{m}}|=1/2\,R^3H_p$. Отсюда следует, что можно иметь постоянный магнит с магнитным моментом $|\vec{\mathfrak{m}}|\sim(10^7—10^{10})$ см$^{5/2}\cdot$г$^{1/2}\cdot$с$^{-1}$, и поэтому можно получить $|2c\mu_a^{(1)}|\sim(10^{-3}—1)$ см$^2\cdot$с$^{-1}$. Если, как и выше, рассмотреть пробные тела, движущиеся в поле Земли по орбите с $p=10^9$ см, $e\approx 1/2$, то для сильного магнита можно получить $\Delta r\sim(10^{-17}—$ $10^{-14})k$ см за k оборотов и $\Delta r\sim(10^{-14}—10^{-11})$ см за 1 год.

В поле Солнца релятивистский эффект Δr, обсужденный в пунктах 2) и 3), может быть на один-два порядка выше: для гироскопа $\Delta r\sim(10^{-9}—10^{-7})k$ см, а для магнита $\Delta r\sim(10^{-15}—10^{-12})k$ см за k оборотов.

II. Рассмотрим подробнее релятивистский эффект, состоящий в вековом изменении угла наклонения $\tilde{i}^*$.

1. Если в поле центрального вращающегося тела a движется вращающееся пробное тело b (электромагнитные характеристики тел принимаем нулевыми), то для этого случая можно использовать формулу (23.25), позволяющую оценить величину эффекта. Второй член в скобках имеет порядок $\sigma/M \sim 10^{-4}$—10^{-2} в Солнечной системе (см. также сноску в § 22), поэтому им можно пренебречь, и мы получаем упрощенную формулу

$$\Delta i^* \equiv \bar{i}^* - i^* = -\frac{3\gamma m_a(\vec{n}\,\vec{\sigma}_a\,\vec{\sigma}_b)\varphi}{2c^2 p M^* |\vec{\sigma}_a| \sin i^*} = -\frac{3\gamma m_a |\vec{\sigma}_b| \cos\psi}{2c^2 p M^*}\varphi, \tag{49.11}$$

где ψ — угол между векторами $[\vec{n}\,\vec{\sigma}_a]$ и $\vec{\sigma}_b$, $i^* \neq 0$ и $i^* \neq 180°$, из которой легко получить оценки для Δi^* для конкретных систем тел. Для системы Солнце — Земля получаем $|\Delta i^*| \sim 10^{-14}$ рад/год, а для системы Земля — ИСЗ можно получить $\Delta i^* \sim \mp 10^{-13}$ рад/год (см. текст после формулы (23.25)). Знак минус соответствует острому углу ψ, знак плюс — тупому. Это очень малые величины в угловой мере, но в линейных единицах пробное тело b будет отклоняться на величину $p\Delta i^*$ см, что даст для Земли 10^{-1} см за 1 год (оборот), а на орбите ИСЗ с $p = 10^9$ см получим $\Delta l_\sigma \equiv p\Delta i^*\, 3000 \sim \mp 10^{-4}$ см за 1 год. Точнее: при $p = 10^9$ см, $|\vec{\sigma}_b| = 5(10^4$—$10^6)$ см$^2 \cdot$с$^{-1}$ имеем

$$\Delta l_\sigma \approx \mp (10^{-6}\text{—}10^{-4}) \text{ см за 1 год.} \tag{49.12}$$

2. Пусть теперь в поле центрального вращающегося тела a движется пробное тело b в виде постоянного магнита с магнитным моментом $\vec{\mathfrak{m}}_b$. Считаем $\vec{\mathfrak{m}}_a = 0$, $\vec{\sigma}_b = 0$. Тогда $\vec{s}_a = \vec{\sigma}_a$, $\vec{s}_b = 2c\vec{\mu}_b$. Так как в этом случае поле всегда является полем притяжения, то в (26.25) нужно взять верхний знак. В этой формуле также исчезают члены с $e_a e_b$ и третий член в квадратных скобках мал по сравнению с первым. Отбрасывая его, получаем окончательную формулу для векового изменения угла наклонения $\bar{i}$:

$$\Delta i \equiv \bar{i} - i = -\frac{3\gamma m_a(\vec{n}\,\vec{\sigma}_a\,\vec{\mu}_b)}{cpc_3 |\vec{\sigma}_a| \sin i}\varphi, \quad i \neq 0, \quad i \neq \pi. \tag{49.13}$$

Сделаем численные оценки Δi. Возьмем тройку векторов $\vec{n}$, $\vec{\sigma}_a$, $\vec{\mu}_b$ правой и взаимно перпендикулярной. Тогда $(\vec{n}\,\vec{\sigma}_a\,\vec{\mu}_b) = |\vec{n}| \cdot |\vec{\sigma}_a| \cdot |\vec{\mu}_b| = |\vec{\sigma}_a| \cdot |\vec{\mu}_b|$, так как $i = 90°$ и $|\vec{n}| = 1$. Если тройка левая, то $(\vec{n}\,\vec{\sigma}_a\,\vec{\mu}_b) = -|\vec{\sigma}_a| \cdot |\vec{\mu}_b|$. Все это означает, что легкое тело b движется по полярной орбите вокруг центрального тела a. Формула (49.13) в этих случаях упрощается:

$$\Delta i = \mp \frac{3\gamma m_a |\vec{\mu}_b|}{cp\sqrt{\gamma m_a p}}\varphi, \tag{49.14}$$

где верхний знак соответствует правой, а нижний — левой тройке векторов $\vec{n}$, $\vec{\sigma}_a$, $\vec{\mu}_b$. Считая легкое тело ферромагнитным, можем получить оценку для $|\vec{\mu}_b|$ (см. (49.10) и последующий текст): $|\vec{\mu}_b| \approx (10^{-14}—10^{-11})$ см. Тогда в поле Земли для ИСЗ с $p=10^9$ см имеем за 1 оборот $\Delta i \approx \mp 4(10^{-27}—10^{-24})$ рад. За 1 год ИСЗ сделает примерно 3000 оборотов, и поэтому $\Delta i \approx \mp(10^{-23}—10^{-20})$ рад/год. Перейдя от угловых единиц к линейным, находим $\Delta l_{\mathfrak{m}} \equiv p \cdot \Delta i \approx \approx \mp (10^{-14}—10^{-11})$ см/год.

Таким образом, релятивистский эффект $\Delta l_{\mathfrak{m}}$ значительно меньше Δl_σ.

III. Обсудим и дадим численные оценки еще двум релятивистским эффектам, обязанным собственным вращениям тел и описываемым соотношениями (21.24), (21.27).

1. В выражении для $\Delta\theta$ (21.24) можно начальные условия движения выбрать так, чтобы $A=0$. Тогда, пользуясь выражением для u^3 из (21.22) и тем, что $m=m_0c$, $|\vec{S}|=r^2|S_0^{23}|$, находим амплитуду вынужденных колебаний Δx около экваториальной плоскости (считаем $r \gg r_g$):

$$\Delta x \equiv 2r|\Delta\Theta| = 2r\frac{|S_0^{23}|}{m|u^3|} \approx \frac{2\sqrt{2}\,r|\vec{S}|}{m_0c\sqrt{r_g r}} =$$

$$= \frac{2r|\vec{S}|}{M^*m_0} = 2r\frac{|\vec{\sigma}|}{M^*}. \qquad (49.15)$$

Для вращающегося ИСЗ, движущегося по круговой орбите радиусом $r \approx 10^9$ см и имеющего $|\vec{\sigma}| \equiv |\vec{S}|/m_0 \approx 3\cdot(10^2—10^5)$ см$^2\cdot$с$^{-1}$, получаем при каждом обороте

$$\Delta x \approx (10^{-3}—1) \text{ см}. \qquad (49.16)$$

2. Пусть в поле вращающегося центра в экваториальной плоскости по круговой орбите значительного радиуса $r \gg r_g$ рядом движутся две пробные частицы, одна из которых вращается (волчок) и ее спин $\vec{S}$ перпендикулярен к плоскости движения, а другая не вращается. Тогда, согласно (21.27), их поступательные скорости будут разными (v и v_0) и разность $\Delta v \equiv |v-v_0|$ определится выражением (ср. с [B.161])

$$\Delta v = \frac{(1+2k)r_g}{4r}\,\frac{|S_0^{31}|}{m_0} = \frac{(1+2k)r_g}{4r^2}\,\frac{|\vec{S}|}{m_0}, \qquad (49.17)$$

так как, согласно (21.28), $|\vec{S}|=r|S_0^{31}|$. Для вращающегося ИСЗ на круговой орбите $r \approx 10^9$ см и $|\vec{S}|/m_0 \approx 3\cdot(10^2—10^5)$ см$^2\cdot$с$^{-1}$ легко получаем оценку $\Delta v \approx (10^{-16}—10^{-13})$ см$\cdot$с$^{-1}$, что дает изменение расстояния между волчком и невращающимся пробным телом на

$$\Delta l = \Delta v \cdot 3{,}15 \cdot 10^7 \approx 3 \cdot (10^{-9} - 10^{-6}) \text{ см за 1 год.} \qquad (49.18)$$

Как видим, среди обсужденных эффектов наиболее значительными являются эффекты (49.7), (49.12), (49.16), (49.18). Все они не связаны с электромагнитными характеристиками. Учет последних приводит к эффектам на несколько порядков меньшим.

В этой связи можно предложить идеи экспериментов по проверке ОТО, в которых существенную роль должны играть так называемые спутники, свободные от сноса [В.31, В.32]. Внутри спутника, свободного от сноса, рядом с пробным телом, движущимся по геодезической, помещаем волчок с ориентированным определенным образом угловым моментом. Тогда в силу расхождения траекторий этих пробных тел расстояние между ними с течением времени изменится. Согласно (49.7), из-за разного смещения перигея это изменение $\Delta r \sim (10^{-8} - 10^{-6})$ см за 1 год для высокого спутника ($p = 10^9$ см).

Еще более интересен вековой эффект изменения угла наклонения (49.11), на существование которого обращалось внимание еще в 1958 г. [В.196] и позднее [В.197, В.200], так как этот эффект (49.12) оказывается на два порядка значительней, чем Δr. Плоскость орбиты спутника, свободного от сноса, можно выбирать в широких пределах, т. е. ньютонов угол наклонения i^* можно брать в пределах $0 < i^* < \pi$, и это не сказывается на Δl_σ. Эффект Лензе — Тирринга в этом эксперименте компенсируется.

Эффект (49.15), имеющий очень хорошую оценку (49.16), интересен тем, что его можно регистрировать не спустя год, а на каждом витке или даже полувитке, что его выгодно отличает от остальных эффектов (49.7), (49.12), (49.18).

Конечно, в реальном эксперименте необходимо будет учитывать многие другие факторы и рассматривать проявление обсуждаемых релятивистских эффектов в некоторой взаимосвязи. Но следует иметь в виду, что в предлагаемых экспериментах всякие влияния будут воздействовать на пробные тела примерно одинаково и направленные релятивистские эффекты удастся обнаружить. Кроме того, в настоящее время точность эксперимента достаточно велика. Так, согласно [В.31], в спутнике, свободном от сноса, с помощью радиотехнических или оптических датчиков малых колебаний можно уверенно регистрировать механические колебания с амплитудой $\Delta x \sim 10^{-12}$ см. В 1972 г. в США был запущен и в течение года испытывался подобный спутник «Трайяд-I» (см. [В.32]). Все это обнадеживает в смысле разработки и проведения ряда тонких новых гравитационных экспериментов по проверке ОТО в ближайшие годы.

Обратим внимание еще на два мало известных релятивистских эффекта, которые не связаны с расхождением траекторий в ОТО.

IV. В ряде работ [I.18, I.29, I.34—I.37, В.15] обосновывается, что звезды обладают значительным электрическим зарядом. В частности, в [I.18] сообщается, что измерения, проделанные с помощью ракет, дают для Солнца заряд $e_\odot \approx 3 \cdot 10^{27}$ ед. CGSE. Согласно теоретическому рассмотрению, проведенному в [I.37], заряд звезды с массой Солнца должен находиться в пределах 10^{21}—10^{24} ед. CGSE, в работе [B.324] был принят заряд Солнца 10^{29} ед. CGSE. Примем, что у Солнца $e_\odot=(10^{26}$—$10^{28})$ ед. CGSE. Пусть искусственный спутник Солнца (ИСС) с массой m_0 движется по эллиптической орбите, не вращается вокруг своей оси, не намагничен ($\eta_1=\eta_2=0$ в (26.39)), а только имеет заряд e_0 того же знака, что и $e_\odot$. Чтобы в ньютоновом приближении суммарное поле Солнца и ИСС было полем притяжения, следует выбрать e_0/m_0 так, чтобы было $\varkappa>0$, т. е. должно быть

$$\frac{e_0}{m_0} < \frac{\gamma m_\odot}{e_\odot} = 1{,}33(1-10^{-3}) \text{ см}^{3/2}\cdot\text{г}^{-1/2}\cdot\text{с}^{-1}. \qquad (49.19)$$

Такое отношение e_0/m_0 для обычных макроскопических тел, каковыми являются пробные тела, вполне реально. Введя обозначение $k_1=1-e_0e_\odot/\gamma m_0 m_\odot$ и помня, что $\alpha_0=3\gamma m_\odot/c^2p$, можем переписать η_0 из (26.36) в виде

$$\eta_0 = \frac{\alpha_0}{k_1}\left(k_1 - \frac{e_\odot^2}{6\gamma m_\odot^2} - \frac{e_0^2}{6\gamma m_0 m_\odot} + \frac{2e_0^2 e_\odot^2}{3\gamma^2 m_0 m_\odot^3}\right). \qquad (49.20)$$

Для ИСС с $m_0=(1$—$10^3)$ кг третий и четвертый члены в (49.20) малы по сравнению с первым и вторым, и поэтому ими можно пренебречь. Тогда всегда $\eta_0<\alpha_0$, и легко подсчитать, меняя k_1 в эксперименте по своему усмотрению в пределах, например, от 10^{-3} до 10^{-7}, что для предположенного заряда Солнца η_0 может значительно отличаться от α_0 и смещение перигелия может быть даже обратным. Действительно, составим таблицу.

$e_\odot$	10^{26}	10^{27}	10^{27}	10^{27}	10^{28}	10^{28}	10^{28}
k_1	10^{-7}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
η_0	$\frac{15}{16}\alpha_0$	$\frac{15}{16}\alpha_0$	$-\frac{3}{8}\alpha_0$	$-\frac{21}{4}\alpha_0$	$\frac{15}{16}\alpha_0$	$\frac{3}{8}\alpha_0$	$-\frac{21}{4}\alpha_0$

Из таблицы видно, что, сделав k_1 достаточно малым, можем добиться всегда, если наши предположения о величине заряда Солнца соответствуют действительности обратного смещения перигелия. Если запустить заряженный ИСС на орбиту с параметрами орбиты Меркурия, то, например, в случае $e_\odot=10^{28}$ ед. CGSE и $k_1=10^{-5}$ имеем $\eta_0=-5{,}25\alpha_0$, что дает для смещения перигелия ИСС — 2,26″ за 1 год.

В настоящее время заряд Солнца определен весьма ненадежно. Однако достаточно точно экспериментально определяется смещение перигелия, а тем самым величины α_0 и η_0 и их разность $\alpha_0-\eta_0$, которая может быть значительной. Поэтому эксперимент на основе (49.20) может быть использован для опытной проверки ОТО и одновременно для уточнения заряда Солнца.

В связи с предложенным экспериментом стоит обратить внимание на возможность компенсировать смещение перигелия Меркурия, возникающее за счет предполагаемого квадрупольного момента (сплющенности) Солнца (см. [B.46, B.64]), если предположить наличие заряда e_0 у Меркурия. Так, например, если у Солнца $e_\odot=\pm 10^{29}$ ед. CGSE, то, чтобы уменьшить смещение перигелия Меркурия на 4,3″ за 100 лет, нужно предположить у Меркурия заряд $e_0=\pm 4\cdot 10^{23}$ ед. CGSE.

V. Согласно (22.9*), угловая скорость осевого вращения тела a в посленьютоновом приближении $\tilde{\omega}_a$ периодически изменяется при его движении по эллиптической орбите. Кратко обсудим возможность использования этой закономерности для экспериментальной проверки ОТО. Пусть тело a — это ИСС, на котором установлен волчок, вращающийся с угловой скоростью ω, и орбита ИСС имеет эксцентриситет $e=0{,}5$, расстояние до Солнца в перигелии $r^{(n)}=3\cdot 10^{12}$ см. Тогда, заменив в (22.9*) $\dot{a}^s\dot{a}^s$ с помощью (22.4), легко находим, что разность угловых скоростей $\Delta\omega$ в афелии и перигелии по часам далекого неподвижного наблюдателя оценивается следующим образом:

$$\Delta\omega\equiv\omega^{(a)}-\omega^{(n)}=\frac{3\gamma m_\odot}{c^2}\left(\frac{1}{r^{(n)}}-\frac{1}{r^{(a)}}\right)\omega=$$

$$\doteq\frac{2\gamma m_\odot}{c^2 r^{(n)}}\omega\approx 10^{-7}\omega. \tag{49.21}$$

Так как угловую скорость вращения волчка можно менять в довольно широких пределах $\omega=(10^2-10^4)$ рад$\cdot$с$^{-1}$, то разность $\Delta\omega=(10^{-5}-10^{-3})$ рад$\cdot$с$^{-1}$ является сравнительно большой и может быть зарегистрирована земным наблюдателем. Поправки к (49.21), учитывающие движение и гравитационное поле Земли, более высокого порядка малости ($\sim 10^{-8}$), их можно не учитывать.

Обратим внимание на то, что оценка (49.21) получена из формулы (22.9*), которая верна, если $|\vec{\sigma}_a|=\omega_a k_a$ и $|\tilde{\vec{\sigma}}_a|=\tilde{\omega}_a\tilde{k}_a$. Если же последние равенства не верны, то вместо (22.9*) имеем

$$\left|\tilde{\vec{\sigma}}_a\right|=\left(C_a-\frac{\dot{a}^s\dot{a}^s}{2c^2}-2\sum_b{}'\frac{\gamma m_b}{c^2 r_{ab}}\right)\left|\vec{\sigma}_a\right|, \tag{49.22}$$

где C_a — некоторая постоянная. В случае движения легкого вращающегося тела a (частицы со спином) в поле тяготеющего центра b получаем, проведя те же вычисления, что и при выводе (49.21) (параметры орбиты частицы те же):

$$\Delta\sigma \equiv \left|\overset{\sim}{\vec{\sigma}}{}_a^{(a)}\right| - \left|\overset{\sim}{\vec{\sigma}}{}_a^{(n)}\right| = \frac{3\gamma m_\odot}{c^2}\left(\frac{1}{r^{(n)}} - \frac{1}{r^{(a)}}\right)\cdot\left|\vec{\sigma}_a\right| =$$
$$= \frac{2\gamma m_\odot}{c^2 r^{(n)}}\left|\vec{\sigma}_a\right| \approx 10^{-7}\left|\vec{\sigma}_a\right|. \tag{49.23}$$

Закон для изменения величины спина $|\overset{\sim}{\vec{\sigma}}_a|$ получен качественно таким же, как и в работе [B.153], т. е. с увеличением расстояния частицы до центрального тела величина спина увеличивается, стремясь к своему ньютонову значению. Такая же закономерность следует из (22.9*) для $\tilde{\omega}_a$. Количественное сравнение законов здесь и в [B.153] выявляет разницу, которая возникает, вероятно, из-за разного выбора дополнительных условий на спин. В работе [B.153] приняты условия $S_a^{0i}=0$, а при выводе уравнений движения для спина (9.9) принято в постньютоновом приближении условие $S_a^{0i} = \frac{1}{2}\dot{a}^k S_a^{ki}$ (см. § 10, 21).

Обсуждавшиеся на основе формулы (49.3) релятивистские эффекты можно дополнить и видоизменить, опираясь непосредственно на формулу (26.40) смещения периастра за k оборотов, которое в линейных единицах имеет вид

$$l \equiv r\Delta\varphi k = 2\pi r\eta k = 2\pi r(\eta_0+\eta_1+\eta_2)k \text{ см.} \tag{49.24}$$

Отсюда немедленно следует, что для двух пробных тел с различными характеристиками

$$\Delta l \equiv l^{(1)} - l^{(2)} = 2\pi r(\eta^{(1)} - \eta^{(2)})k \text{ см.} \tag{49.25}$$

Оценки на основе (49.25) больше, чем по (49.3), если эксцентриситет e орбиты пробных тел мал.

§ 50. НЕКОТОРЫЕ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПРОБЛЕМЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ОТО

Изучая закономерности движения тел в ОТО, мы не учитывали влияния электромагнитного и гравитационного излучения тел и систем тел, которое должно иметь место. Учет электромагнитного излучения на поступательное движение можно провести, если в уравнения движения (13.4) справа ввести силу торможения излучением $F^i_{a(\text{изл})}$ из (14.1). Но эта сила имеет порядок c^{-3}, и возникающие релятивистские поправки значительно меньше остальных малых поправок. Поэтому мы их не учитывали. Влияние гравитационного излучения в обычных ситуациях на движение тел еще меньше, и поэтому тем более не имеет смысла его учитывать. Как уже упоминалось в § 5, учет гравитационного излучения приводит к появлению в уравнениях движения членов порядка c^{-5}, которые на много порядков меньше постньютоновых, имеющих порядок c^{-2}.

Известные точные уравнения движения пробных тел (уравнения геодезических линий (20.1), уравнения Папапетру (10.2), (10.3), уравнения движения заряженной частицы (14.2) и др.) также не учитывают излучения.

Тем не менее в особых ситуациях и в эволюционном плане излучение (наряду с процессами, протекающими внутри космических объектов) играет, вероятно, основную роль. Например, общепризнано [В.13, В.15, В.19], что любое излучение неминуемо ведет к уменьшению углового момента объекта или системы. Это уменьшение ничтожно для обычных систем тел астрономического типа, хотя за космогонические (космологические) промежутки времени оно становится значительным. Но для таких объектов, как пульсары, коллапсары, сверхзвезды, и для тесных систем с участием этих объектов угловые моменты в результате излучения должны уменьшаться существенно, что должно вести к изменению свойств объектов и систем и даже разрушению систем, например падению компонент кратных звезд друг на друга [В.13, В.15, В.17, В.19, 54—57].

Вместе с тем будет уместным еще раз обратить внимание читателя на тот факт, что в тесных системах типа пульсар — пульсар, пульсар — его спутник, когда расстояние между телами может быть малым, обсуждавшиеся выше релятивистские эффекты могут быть настолько значительными, что движение тел совершенно не будет походить на привычную картину ньютонова движения. Например, в § 22, 23 показано, что собственный угловой момент тела, движущегося в окрестности нейтронной звезды (пульсара), должен прецессировать с периодом в несколько часов, а угол наклонения орбиты тела должен изменяться на десятки угловых градусов за несколько дней. Все релятивистские эффекты, упоминавшиеся в § 49, в окрестностях пульсаров становятся на много порядков больше по сравнению с эффектами в Солнечной системе за тот же промежуток времени и значительно превосходят эффекты излучения.

В последнее время усиленно разрабатывается новая теория гравитации [В.19, т. III, гл 39], так называемая параметризованная постньютонова теория (ППН-формализм). Суть ее состоит в том, что в ОТО вводится ряд параметров (до десяти) и на основе теоретических представлений и экспериментов делается их выбор или оценка так, чтобы новая теория согласовывалась с постньютоновым приближением ОТО и в то же время давала что-то новое. Так, например, введенные в ППН-формализм три параметра определяют величину и природу новых эффектов, связанных с наличием предполагаемой предпочтительной системы координат (отсчета). Следующая группа ППН-параметров введена для определения происхождения и степени нарушения глобальных законов сохранения в природе, что может приводить к изменению постоянной тяготения, к рождению частиц, материи во Вселенной, к более точному описанию Метагалактики и т. д. Обращение всех семи упомянутых ППН-параметров превращает теорию гравитации в не имеющую предпочтительной системы и в консервативную теорию, в которой справедливы 10 глобальных законов сохранения: 4 для энергии-импульса и 6 для момента импульса. К такой теории относится ОТО и, например, теория гравитации Дикке — Бранса — Йордана. Остающиеся три ППН-параметра характеризуют поправки к известным релятивистским эффектам ОТО: смещению периастра, искривлению лучей света, эффекту Лензе — Тирринга и др.

В этой связи становится очевидным, что релятивистские эффекты, предсказываемые ОТО, должны быть проверены экспериментально особенно тщательно как составляющие общую часть, основу ОТО и ППН-формализма. Постановка новых и увеличение точности известных гравитационных экспериментов в такой ситуации крайне необходимы. В любом случае решающее слово за экспериментом. Только он даст ответ на вопрос, какие теории гравитации лучше согласуются с объективной реальностью.

ЛИТЕРАТУРА

К ВВЕДЕНИЮ

1. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М., «Наука», т. I, 1965; т. II, 1966.
2. *Эддингтон А. С.* Теория относительности. Пер. с англ. Л.—М., ГИТТЛ, 1934.
3. *Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология. Пер. с англ. М., «Наука», 1974.
4. *Паули В.* Теория относительности. Пер. с нем. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
5. *Бергман П. Г.* Введение в теорию относительности. Пер. с англ. М., ИЛ, 1947.
6. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М., Гостехиздат, 1955; изд. 2-е, М. Физматгиз, 1961.
7. *Мак-Витти Г. К.* Общая теория относительности и космология. Пер. с англ. М., ИЛ, 1961.
8. *Петров А. З.* Пространства Эйнштейна. М., Физматгиз, 1961; Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966.
9. *Вебер Дж.* Общая теория относительности и гравитационные волны. Пер. с англ. М., ИЛ, 1962.
10. *Тонелла Мари-Антуанетт.* Основы электромагнетизма и теории относительности. Пер. с франц. М., ИЛ, 1962.
11. *Богородский А. Ф.* Всемирное тяготение. Киев, «Наукова думка», 1971.
12. *Синг Дж. Л.* Общая теория относительности. Пер. с англ. М., ИЛ, 1963.
13. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М., «Наука», 1973.
14. *Брумберг В. А.* Релятивистская небесная механика. М., «Наука», 1972.
15. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Теория тяготения и эволюция звезд. М., «Наука», 1971.
16. *Меллер К.* Теория относительности. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1975.
17. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. Пер. с англ. М., «Мир», 1975.
18. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Строение и эволюция Вселенной. М., «Наука», 1975.
19. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. Пер. с англ., т. 1, 2, 3. М., «Мир», 1977.
20. *Амбарцумян В. А.* Докл. на XI Сольвеевском конгрессе. Брюссель, 1958. Науч. тр. 2, изд. АН Арм. ССР. Ереван, 1960.
21. *Гринстейн Дж.* Сверхзвезды.— УФН, 83, 549, 1964.
22. Сб. «Наблюдательные основы космологии». Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
23. Теория гравитации и гравитационный коллапс. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
24. *Хьюиш Э.* Пульсары.— УФН, 97, 715, 1969; Пульсары.— УФН, 99, 514, 1969.
25. Сб. «Проблемы современной космогонии». Под ред. В. А. Амбарцумяна. М., «Наука», 1969.
26. *Бербидж Дж., Бербидж М.* Квазары. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
27. *Гинзбург В. Л.* Пульсары. (Теоретические представления).— УФН, 103, 393, 1971.
28. Сб. «Пульсары». Пер. с англ. М., «Мир», 1971.
29. *Дайсон Д., Тер-Хаар Д.* Нейтронные звезды и пульсары. М., «Мир», 1973.

30. *Шама Д. В.* Современная космология. Пер. с англ. М., «Мир», 1973.
31. *Брагинский В. Б., Манукин А. Б.* Измерения малых сил в физических экспериментах. М., «Наука», 1974.
32. *Брагинский В. Б.* Экспериментальная проверка теории относительности. М., «Знание», сер. «Физика», 1977, № 1.
33. *Roll P. G., Krotkov R., Dicke R. H.* Ann. Phys. (N. Y.), **26**, 442, 1967.
34. *Nordvedt K.* Phys. Rev., **D3**, 1683, 1971.
35. *Дикке Р.* Гравитация и вселенная. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
36. *Тредер Г.-Ю.* Теория гравитации и принцип эквивалентности. Пер. с нем. М., Атомиздат, 1973.
37. *Shapiro I. I.* Phys. Rev. Lett., **13**, 789, 1964.
38. *Дашевский В. М.* Четвертая проверка ОТО.— УФН, **87**, 373, 1965.
39. *Ross D. K., Schiff L. I.* Phys. Rev., **141**, 1215, 1966.
40. *Shapiro I. I.* Phys. Rev.. **141**, 1219, 1966; **145**, 1005, 1966.
41. Fourth test of general relativity: preliminary results. Phys. Rev. Lett, **20**; (22), 1265, 1968.
42. *Shapiro I. I.* Sci. American **219** (1), 28, 1968 (перевод в УФН, **99**, 319, 1969).
43. *Sen D. K., Dunn K. A.* J. Math. Phys., **12**, 578, 1971.
44. *Schiff L. I.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S., **46**, 871. 1960; Phys. Rev. Lett., **4**, 215, 1960.
45. *Пустовойт В. И. Баутин А. В.*— ЖЭТФ, **46**, 1386, 1964.
46. Сб. «Гравитация и относительность». Под ред. Х. Цзю и В. Гоффмана. М., «Мир», 1965.
47. *Копвиллем У. Х., Нагибаров В. Р.* Тез. докл. юбил. науч. конф. Казан. физ.-техн. ин-та. Казань, 1966, с. 47, 50.
48. *O'Connell R. F.* Phys. Rev. Lett., **20**, 1968, N 2, 69.
49. Некоторые эксперименты по гравитации. Тез. докл. GR-5. Тбилиси, 1968, с. 214.
50. *Чихачев Б. М.*— В сб.: «Гносеологические аспекты измерений». Киев, «Наукова думка», 1968, с. 214.
51. *Weber J.* Phys. Rev. Lett., **20**, 1307, 1968; **22**, 1320, 1969; **24**, 276, 1970; **25**, 180, 1970.
52. *Брагинский В. Б., Руденко В. Н.*— УФН, **100** (3), 395, 1970.
53. *Вебер Дж.*— В сб.: «Гравитация: проблемы, перспективы». Киев, «Наукова думка», 1972.
54. *Копвиллем У. Х., Нагибаров В. Р.*— Тез. докл. GR-5. Тбилиси, 1968, с. 208.
55. *Урусовский И. А.*— АЖ, **51**, 823, 1974.
56. *Barker B. M., O'Connell R. F.* Phys. Rev. D: Particles and Fields, **11**, 711, 1975.
57. *Пирагас К. А.* Экспериментальные основы общей теории относительности (обзор). Препринт ИТФ-71-114Р, Киев, 1971.
58. *Паунд Р., Ребка Г.*— В сб.: «Новейшие проблемы гравитации». М., ИЛ, 1961, с. 469.
59. *Kibble T. W. B.* J. Math. Phys., **2**, 212, 1961.
60. *Цзю Х., Гоффман В.* Введение к сб. «Гравитация и относительность». М., «Мир», 1965, с. 15.
61. *Pellegrini C., Plebański J.* Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., **2**, 1963, N 4.
62. *Hayashi K., Nakano T.* Progr. Theor. Phys., **38**, 491, 1967.
63. *Brans C., Dicke R. H.* Phys. Rev., **124**, 925, 1961.
64. *Dicke R. H., Goldenberg H. M.* Phys. Rev. Lett., **18**, 313, 1967.
65. *Фролов Б. Н.* Вестник МГУ, сер. физ., астр., 1963, № 6, 48; 1964, № 2, 56.
66. *Hehl F. W.* Gen. Relat. and Gravit., **4**, 1973, N4, 333.
67. *Туняк В. Н.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1972, № 2; 1973, № 5; 1975, № 1.
68. *Петров А. З.*— В сб.: «Гравитация и теория относительности», вып. 1. Казань, 1963, с. 119. Современное состояние учения о гравитации. Препринт ИТФ АН УССР, Киев. 1971.
69. *Инфельд Л., Плебаньский Е.* Движение и релятивизм. М., ИЛ, 1962.
70. *Papapetrou A.* Lectures on general relativity. Dordrecht-Boston, D. Reidel Publ. Co., 1974.
71. *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр., т. I. М., «Наука», 1965, с. 448.
72. *Эйнштейн А.* Там же, с. 452.

73. *De Donder T.* Théorie des champs gravifiques. Paris: Gauthier-Villar, 1926.
74. *Эйнштейн А., Громмер Я.* Собр. науч. тр., т. II. М., «Наука», 1966, с. 198.
75. *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр., т. II. М., «Наука», 1966, с. 211.
76. *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр., т. I. М., «Наука», 1965, с. 439.
77. *Lense J., Thirring H.* Phys. Zeitschr., **19**, 156, 1918.
78. *De Sitter W.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., **76**, 699, 1916; **77**, 155, 1916; **78**, 3, 1917.
79. *Kottler F.* Encyklop. d. math. Wiss. Bd. VI, 2, 22a, 1922.
80. *Eddington A.* The mathematical theory of relativity. Cambridge, 1923.
81. *Birkhoff G. D.* Relativity and modern physics. Cambridge, Harvard University Press, 1923.
82. *Chazy J.* Compt. Rend., **181**, 1053, 1925.
83. *Droste J.* Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **19**, 197, 1917.
84. *Chazy J.* La théorie de la relativité et la mécanique céleste, v. 1, 2. Paris, 1928, 1930.
85. *Mathisson M.* Zs. f. Phys., **67**, 270, 826; **69**, 389, 1931.
86. *Levi-Civita T.* Enseignement Math., **34**, 149, 1935.
87. *Levi-Civita T.* Amer. Journ. Math., **59**, 9, 1937.
88. *Levi-Civita T.* Amer. Journ. Math., **59**, 225, 1937.
89. *Droste J.* Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **19**, 447, 1917.
90. *Einstein A., Infeld L., Hoffmann B.* Ann. of Math., **39**, 65, 1938.
91. *Eddington A. S., Clark G. L.* Proc. Roy. Soc., **A166**, 465, 1938.
92. *Robertson H. P.* Ann. of Math., **39**, 101, 1938.
93. *Фок В. А.*— ЖЭТФ, **9**, 375, 1939.
94. *Петрова Н. М.* Канд. дис., ЛГУ, 1940.
95. *Петрова Н. М.*— ЖЭТФ, **19**, 989, 1949.
96. *Эйнштейн А., Инфельд Л.* Собр. науч. тр., т. II. М., «Наука», 1966, с. 532.
97. *Einstein A., Infeld L.* Canad. Journ. Math., **1**, 209, 1949.
98. *Papapetrou A.* Proc. Phys. Soc. (London), **A64**, 57, 1951.
99. *Papapetrou A.* Proc. Phys. Soc., **A64**, 302, 1951.
100. *Infeld L.* Acta Phys. Polon., **13**, 187, 1954.
101. *Иваненко Д., Соколов А.* Классическая теория поля. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
102. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., ГИФМЛ, 1958.
103. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. Пер. с франц. М., «Мир», 1965.
104. *Infeld L., Plebański J.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III., **4**, 689, 1956.
105. *Infeld L., Plebański J.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5**, 51, 1957.
106. *Infeld L.* Rev. of Mod. Phys., **29**, 398, 1957.
107. *Infeld L.* Acta Phys. Polon., **16**, 177, 1957.
108. *Infeld L., Plebański J.* Motion and Relativity. Warszawa, 1960.
109. *Bazański S.* Acta Phys. Polon., **15**, 363, 1956; Errata, Acta Phys. Polon., **16**, 433, 1957.
110. *Infeld L., Wallace P. R.* Phys. Rev., **57**, 797, 1940.
111. *Wallace P. R.* Amer. Journ. Math., **63**, 729, 1941.
112. *Bertotti B.* Nuovo Cimento, 2, 231, 1955.
113. *Haywood J. H.* Proc. Phys. Soc., **A69**, 2, 1956.
114. *Рябушко А. П.*— ЖЭТФ, **33**, 1387, 1957.
115. *Tulczyjew W.* Bull. Acad. Polon. Sci., sér. math., astr. et phys., **6**, 645, 1958.
116. *Tulczyjew W.* Acta Phys. Polon., **18**, 37, 1959; Errata. Acta Phys. Polon., **18**, 535, 1959.
117. *Kalitzin N. St.* Nuovo Cimento, **9**, 365, 1958.
118. *Айтикеева З. А., Петрова Н. М.*— В сб.: «Исследование процессов переноса. Вопросы теории относительности». Тр. Казах. ун-та. Алма-Ата, 1959, с. 209.
119. *Айтикеева З. А.*— Тр. Ин-та ядерной физ. АН КазССР, **6**, 164, 1962.
120. *Michalska R.* Bull. Acad. Polon. Sci., sér. math., astron. et phys., **8**, 233, 1960.
121. *Michalska R.* Bull. Acad. Polon. Sci., sér. math., astron. et phys., **8**, 237, 1960.
122. *Michalska R.* Bull. Acad. Polon. Sci., sér. math., astron. et phys., **8**, 247, 1960.

123. *Gábos Z.* Anal. stiint. Univ. Iasi, sec. I, **5**, 101, 1959; **6**, 439, 1960; **7**, 407, 1961.
124. *Абдильдин М. М.* Вестн. ЛГУ, № 22, сер. физ. и хим., вып. 4, 19, 1964.
125. *Абдильдин М. М.* Вестн. ЛГУ, № 22, сер. физ. и хим., вып. 4, 155, 1964.
126. *Брумберг В. А.*— Тез. докл. GR-5, Тбилиси, 1968, с. 96.
127. *Брумберг В. А.*— АЖ, **45**, 828, 1968.
128. *Кашкаров В. П.*— ЖЭТФ, **27**, 563, 1954.
129. *Рябушко А. П.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1971, № 2.
130. *Рябушко А. П.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1971, № 3.
131. *Рябушко А. П.* Изв. вузов СССР. Физика, 1961, № 6.
132. *Рябушко А. П.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1972, № 1.
133. *Infeld L., Schild A.* Rev. Mod. Phys., **21**, 408, 1949.
134. *Papapetrou A.* Proc. Roy. Soc., A**209**, 248, 1951.
135. *Corinaldesi E., Papapetrou A.* Proc. Roy. Soc., A**209**, 259, 1951.
136. *Schwarzschild K.* Sitz. Preuss. Akad. Wiss., S. 189, 1916.
137. *Kerr R. P.* Nuovo Cimento, **13**, 469, 1959.
138. *Kerr R. P.* Nuovo Cimento, **13**, 492, 1959.
139. *Kerr R. P.* Nuovo Cimento, **13**, 673, 1959.
140. *Tulczyjew W.* Acta Phys. Polon., **18**, 393, 1959.
141. *Mathisson M.* Acta Phys. Polon., **6**, 163, 1937; Proc. Cambr. Phil. Soc., **36**, 331, 1940.
142. *Das A.* Progr. Theor. Phys., **23**, 610, 1960.
143. *Bażański S.* Recent developments in general relativity. London: Pergamon Press, 1962, p. 13.
144. *Weert Ch. G.* Physica, A**80**, 247, 1975.
145. *Hojman R., Hojman S.* Int. Cent. Theor. Phys. Int. Atom. Energy Agency., Prepr. N40, 1976.
146. *Taub A. H.* Proc. Galileo IV Centario Conference in Florence, Florence, 1965, p. 100, 112.
147. *Fuchs H.* Exp. Techn. Phys., **22**, 185, 1974.
148. *Минкевич А. В., Сокольский А. А.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1975, № 4.
149. *Епихин Е. Н.*— Тез. докл. Всесоюз. конф. Гр-IV. Минск, 1976, с. 117.
150. *Таммело Р. Р.* Там же, с. 119.
151. *Пронин П. И.* Там же, с. 121.
152. *Barker B. M., O'Conell R. F.* Phys. Rev. D: Particles and Fields, **12**, 329, 1975.
153. *Papapetrou A.* Fortschr. Phys., **1**, 29, 1953.
154. *Taub A. H.* J. Math. Phys., **5**, 112, 1964.
155. *Рябушко А. П.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1965, № 4.
156. *Micoulaut R.* Zeitschr. f. Physik, **206**, 394, 1967.
157. *Рябушко А. П.* GR-5 (тез. докл.). Тбилиси, 1968, с. 151.
158. *Евтушенко С. П.*— В сб.: «Гравитация и теория относительности», вып. 4—5. Казань, 1968, с. 232.
159. *Рябушко А. П.*— Тр. II респ. конф. математиков Белоруссии. Минск, БГУ, 1969, с. 125.
160. *Mashhoon B.* J. Math. Phys., **12**, 1075, 1971.
161. *Епихин Е. Н., Пулидо И., Мицкевич Н. В.*— Тез. докл. Гр-III, Ереван, 1972, с. 380.
162. *Rasband S. N.* Phys. Rev. Letters, **30**, 111, 1973.
163. *O'Connell R. F.* Proc. Int. School Phys. «Enrico Fermi», course 56, Exporim. gravit., 1974, p. 496.
164. *Tod K. P., Felice F., Calvani M.* Nuovo Cimento, 34B, 365, 1976.
165. *Рябушко А. П., Баханьков А. А.*— Тез. докл. Всесоюз. конф. Гр-IV, Минск, 1976, с. 112.
166. *Иваницкая О. С., Пляцко Р. М.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1976, № 4.
167. *Carmeli M., Charach Ch., Kaye M.* Phys. Rev. D, **15**, 1501, 1977.
168. *Пляцко Р. М.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1977, № 3.
169. *Иваницкая О. С.* Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Минск, «Наука и техника», 1969.

170. *Иваницкая О. С., Митянок В. В.* Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 1974, № 3.
171. *Иваницкая О. С., Митянок В. В.* Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 1974, № 4.
172. *Митянок В. В.* Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 1974, № 5.
173. *Иваницкая О. С., Митянок В. В.* Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 1975, № 3.
174. *Митянок В. В.* Некоторые особенности влияния электрически заряженного источника гравитационного поля на движение пробных тел. Препринт № 97. Ин-т физики АН БССР. Минск, 1976.
175. *Mityanock V. V.* Some peculiarities of motion of test particles in Reissner — Nordström and Kerr — Newman fields. Препринт № 116, Ин-т физики АН БССР. Минск, 1977.
176. *Фок В. А.* Докл. АН СССР, **32**, 28, 1941.
177. *Фихтенгольц И. Г.* Докл. АН СССР, **64**, 325, 1949.
178. *Кашкаров В. П.*— Уч. зап. Каз. ун-та, **14**, вып. 3, 1952.
179. *Широков М. Ф.*— ЖЭТФ, 27, 251, 1954.
180. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М:* Теория поля. Изд. 2-е. М., ГИТТЛ, 1948.
181. *Фихтенгольц И. Г.*— ЖЭТФ, **20**, 233, 1950.
182. *Фихтенгольц И. Г.*— ЖЭТФ, **20**, 824, 1950.
183. *Фихтенгольц И. Г.*— ЖЭТФ, **21**, 648, 1951.
184. *Фихтенгольц И. Г.*— ЖЭТФ, **32**, 1098, 1957.
185. *Фихтенгольц И. Г.*— ЖЭТФ, **32**, 1404, 1957.
186. *Фихтенгольц И. Г.*— ЖЭТФ, **35**, 1457, 1958; **39**, 809, 1960.
187. *Фихтенгольц И. Г.*— ЖЭТФ, **36**, 1322, 1959.
188. *Фихтенгольц И. Г.* Сб. науч. тр. кафедр. мат., графики, хим. и теор. мех. Ленингр. ин-та точной механики и оптики, вып. 31, 1960, с. 3.
189. *Широков М. Ф., Бродовский В. Б.*— ЖЭТФ, **31**, 1027, 1956.
190. *Levi-Civita T.* Mém. Sci. Math., fasc. 116. Paris, 1950.
191. *Bertotti B.* Nuovo Cimento, **1**, 226, 1954.
192. *Петрова Н. М.* Проблемы гравитации.— Тез. докл. Второй советской гравит. конф. Тбилиси, 1965, с. 25; — в сб.: «Некоторые вопросы общей и прикладной физики». Алма-Ата, 1966, с. 195.
193. *Петрова Н. М.*— В сб.: «Исследование процессов переноса. Вопросы теории относительности». Тр. Каз. ун-та. Алма-Ата, 1959, с. 192.
194. *Петрова Н. М.*— В сб «Исследование процессов переноса. Вопросы теории относительности». Тр. Каз. ун-та, Алма-Ата, вып. 2, 1960, с. 147.
195. *Петрова Н. М.* Тез. и программа 1-й Советской грав. конф. Изд-во МГУ, 1961, с. 24.
196. *Рябушко А. П., Фишер И. З.*— ЖЭТФ, **34**, 1189, 1958.
197. *Рябушко А. П.* Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 1971, № 4.
198. *Рябушко А. П.* Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 1971, № 6.
199. *Bażański S.* Acta Phys. Polon., **16**, 423, 1957.
200. *Рябушко А. П.* Изв. вузов СССР. Физика, 1962, № 1.
201. *Рябушко А. П.* Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 1972, № 2.
202. *Рябушко А. П.* Первая Всесоюз. геом. конф. (тез. докл.). Киев, 1962, с. 83.
203. *Рябушко А. П.*— Тез. докл. Второй Всесоюз. геом. конф. Харьков, 1964, с. 243.
204. *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр., т. 3. М., «Наука», 1966, с. 359. См. также работы на с. 363—385.
205. *Абдильдин М. М., Пушкарев О. А., Юнусов А. А.* «Динамика галактик и звездных скоплений». Алма-Ата, «Наука», 1973, с. 210.
206. *Пушкарев О. А., Абдильдин М. М.* Там же, с. 242.
207. *Абдильдин М. М., Пушкарев О. А., Юнусов А. А.*— Тр. Астрофиз. ин-та АН КазССР, т. XX, 104, 1973.
208. *Пушкарев О. А.* Движение заряженных и магнитных тел в общей теории относительности. Автореф. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1974.
209. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. Пер. с англ. М.—Л., ОНТИ, 1937.
210. *Субботин М. Ф.* Курс небесной механики, т. 2. М.—Л., ОНТИ, 1937.
211. *Хильми Г. Ф.* Проблема *n* тел в небесной механике и космогонии. М.,

изд-во АН СССР, 1951; Качественные методы в проблеме n тел. М., изд-во АН СССР, 1958.

212. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. Пер. с нем. М., ИЛ, 1959.

213. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974.

214. *Брауэр Д., Клеменс Дж.* Методы небесной механики. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.

215. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.

216. *Пуанкаре А.* Лекции по небесной механике. Пер. с франц. М., «Наука», 1965.

217. *Смарт У. М.* Небесная механика. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.

218. *Шарлье К.* Небесная механика. Пер. с нем. М., «Наука», 1966.

219. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. Пер. с англ. М., «Наука», 1967.

220. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М., «Наука», 1968.

221. *Hagihara Y.* Stability in Celestial Mechanics. Tokyo, 1957.

222. *Szebehely V.* Theory of orbits. The restricted problem of three bodies. Academic Press, New-York — London. 1967.

223. *Мультон Ф.* Введение в небесную механику. Пер. с англ. М.—Л., ОНТИ, 1935.

224. *Ляпунов А. М.* О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны. Собр. соч. т. 1, изд-во АН СССР, 1954.

225. *Ляпунов А. М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч., т. 1, изд-во АН СССР, 1954, с. 327.

226. *Орлов А. А.*— Тр. ГАИШ, т. XV, вып. 1, 1945.

227. *Орлов А. А.*— Тр. ГАИШ, т. XV, вып. 2, 1950.

228. *Чеботарев Г. А.* «Успехи астр. наук», 5, 176, 1950.

229. *Мерман Г. А.*— Бюл. ИТА, т. V, 1952, № 4.

230. *Рябов Ю. А.*— АЖ, 29, 582, 1952.

231. *Мерман Г. А.*— Бюл. ИТА, т. VI, 1958, № 10.

232. *Мерман Г. А.*— Бюл. ИТА, т. VI, 1958, № 10.

233. *Петровская М. С.*— Бюл. ИТА, т. VII, 1959, № 6.

234. *Мерман Г. А.*— Тр. ИТА, вып. VIII, 3, 1961.

235. *Петровская М. С.*— Бюл. ИТА, т. VIII, 1962, № 10.

236. *Леонтович А. М.* Докл. АН СССР, **143**, 525, 1962.

237. *Арнольд В. И.*— «Успехи мат. наук», 18, 1963, № 6.

238. *Демин В. Г.* Новые классы периодических решений ограниченной круговой задачи трех тел. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук, МГУ, 1961.

239. *Гребеников Е. А.*— АЖ, 41, вып. 3, 1964.

240. *Hénon M.* Theory orbits Solar syst. and stellar syst. London — New-York, Acad. Press, 157, 1966.

241. *Schubart J.* Там же, с. 187.

242. *Schmeiller F.* Там же, с. 194.

243. *Heinrich W. W.* Там же, с. 223.

244. *Агекян Т. А., Аносова Ж. П.*— АЖ, 44, 1967, № 6, 1261.

245. *Deprit A.* Deprit-Bartholomé. Astron. J., 72, 1967, № 2, 173.

246. *Лукьянов Л. Г.* Вестн. МГУ, сер. физ., астр., 1968, № 2, 82.

247. *Лукьянов Л. Г.* Вестн. МГУ, сер. физ., астр., 1968, № 4, 99.

248. *Лукьянов Л. Г.*— Бюл. ИТА, т. XI, 1969, № 10.

249. *Маркеев А. П.*— «Прикл. мат. и мех.», 33, 112, 1969.

250. *Маркеев А. П.*— «Прикл. мат. и мех.», 34, 227, 1970.

251. *Alfriend K. T.* Celest. Mech., 1, 1970, N3—4, 351.

252. *Козлов И. С.*— АЖ, 48, вып. 2, 1971.

253. *Чеботарев Г. А.*— АЖ, 46, 1969, № 6, 1274.

254. *Кононенко А.* Авиация и космонавтика, 1968, № 5, 71.

255. *Ransome T.* Spaceflight, 12, 1970, N12, 488.

256. *Nordtvedt K.* Phys. Rev., **169**, 1014, 1017, 1968.

257. *Nordtvedt K.* Phys. Rev., **170**, 1186, 1968.

258. *Брумберг В. А.*— Бюл. ИТА, т. VI, 1958, № 10 (83).

259. *Сиокос Ф.*— «Эпистимоники экдосис Технику Эпимелитириу Элладос», 1966, № 2, 576, 631.

260. *Mas Luis*. Ann. Ints. Henri Poincaré, A7, 1967, N1, 1.
261. *Krefetz E*. Astron. J., 72, 1967, N4, 471.
262. *Рябушко А. П., Филипович К. С.* Весці АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1968, № 5.
263. *Рябушко А. П., Филипович К. С.* Весці АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1969, № 6.
264. *Рябушко А. П., Филипович К. С.*— Тез. докл. IV Всесоюз. межвуз. конф. по геом. Тбилиси, 1969, с. 228.
265. *Рябушко А. П.*— Тез. докл. GR-5. Тбилиси, 1968, с. 149.
266. *Досыбеков К.*— В сб.: «Вопр. мат. и мех.», Казах. ун-т. Алма-Ата, вып. 2, с. 282, 288.
267. *Петрова Н. М., Тепикин Б. Г.*— В сб.: «Гравитация и теория относительности», вып. 7. Казань, 1970.
268. *Захаров В. Д.* Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., «Наука», 1972.
269. *Федоров Ф. И.* Оптика анизотропных сред. Минск, «Наука и техника», 1958.
270. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.
271. *Левашев А. Е.* Теория лоренцевой связности при релятивистском движении. Докт. дис. Минск, 1960.
272. *Родичев В. И.* Теория тяготения Эйнштейна в представлении ортогональных реперов. Докт. дис. М., 1963; Теория тяготения в ортогональном репере. М., «Наука», 1974.
273. *Иваницкая О. С.* Локальные преобразования Лоренца и их применение. Докт. дис. Тарту, 1971.
274. *Левашев А. Е., Родичев В. И., Иваницкая О. С.* Современные проблемы гравитации.— В сб.: тр. II Советской грав. конф. Тбилиси, 1967, с. 66.
275. *Родичев В. И.* Там же, с. 71.
276. *Федоров Ф. И.* Там же, с. 97.
277. *Иваницкая О. С.* Там же, с. 103.
278. *Левашев А. Е.* Там же, с. 115.
279. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1950.
280. *De Jans C.* Acad. Roy. Belg. Mémoires 8°(2), 7, fasc. 5, 1923.
281. *Каплан С. А.*— ЖЭТФ, **19**, 951, 1949.
282. *Курмакаев З. Х.*— «Динамика галактик и звездных скоплений». Алма-Ата. «Наука», 1973, с. 238.
283. *Пирагас К. А.*— В сб.: «Гравитация и теория относительности», вып. 3. Казань, 1967, с. 180.
284. *Пирагас К. А.*— В сб.: «Гравитация и теория относительности», вып. 4—5. Казань, 1968, с. 185.
285. *Пирагас К. А.* Там же, с. 180.
286. *Пирагас К. А.* Об устойчивости движения в ОТО. Канд. дис. Казань, 1969.
287. *Пирагас К. А.*— В сб.: «Гравитация и теория относительности», вып. 7. Казань, 1970, с. 82.
288. *Пирагас К. А.* Там же, с. 90.
289. *Пирагас К. А.* Там же, с. 94.
290. *Кривенко О. П., Пирагас К. А.*— Тез. докл. Всесоюз. конф. «Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции». Минск, 1971, с. 55.
291. *Пирагас К. А., Кривенко О. П.* Некоторые вопросы качественной теории геодезических линий в поле тяготеющего центра. Препринт ИТФ-71-113Р. Киев, 1971.
292. *Кривенко О. П., Пирагас К. А.* О вторых интегралах геодезических линий в поле Керра. Препринт ИТФ-73-38Р. Киев, 1973.
293. *Kerr R. P.* Phys. Rev. Lett. **11**, 237, 1963.
294. *Boyer R. H., Lindquist R. W.* Journ. Math. Phys., 8, 265, 1967.
295. *Ernst F. J.* Phys. Rev., **167**, 1175, 1968.
296. *De la Cruz V., Israel W.* Phys. Rev., **170**, 1187, 1968.
297. *Рябушко А. П.* 3-я респ. конф. математиков Белоруссии (тез. докл.). Минск, 1971, с. 66.
298. *Рябушко А. П.* Докл. АН БССР, 1971, № 11.
299. *Препелица Б. В.*— АЖ, **46**, 1969, № 5, 1130.

300. *Armenti A.* Nuovo Cimento, **25B**, 442, 1975.
301. *Рябушко А. П.* Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 1970, № 2.
302. *Рябушко А. П.* Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 1971, № 1.
303. *Clemence G. M.* Rev. Mod. Phys., **19**, 361, 1947.
304. *Clemence G. M.* Proc. Amer. Phil. Soc., **93**, 532, 1949.
305. *Das A.* Progr. Theor. Phys., **17**, 373, 1957.
306. *Das A.* Progr. Theor. Phys., **18**, 554, 1957.
307. *Gilvarry J. J.* Phys. Rev., **89**, 1046, 1953.
308. *Gilvarry J. J.* Nature, **183**, 666, 1959.
309. *Гинзбург В. А.*— В сб.: «Эйнштейн и современная физика». М., ГИТТЛ, 1956, с. 93.
310. *Михайлов А. А.* Там же, с. 140.
311. *Скроцкий Г. В.* Докл. АН СССР, **114**, 73, 1957.
312. *Идлис Г. М., Курмакаев З. Х.*— Тр. Астрофиз. ин-та АН КазССР, т. V. Алма-Ата, 1965, с. 179.
313. *Rastall P.* Canad. Journ. Phys., **44**, 3109, 1966.
314. *Richard Jean-Paul.* Cahiers phys., **20**, 1966, N187—188.
315. *Аверьянова Т. В., Станюкович К. П.*— АЖ, **43**, 1301, 1966.
316. *Аверьянова Т. В.*— В сб.: «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М., Атомиздат, 1966.
317. *Курмакаев З. Х.*— АЖ, **43**, 1025, 1966.
318. *Alpher R. A.* Amer. J. Phys., **35**, 771, 1967.
319. *Курмакаев З. Х.*— АЖ, **45**, 823, 1968.
320. *Арифов Л. Я., Кадыев Р. К.*— АЖ, **45**, 1114, 1968.
321. *Михайлов А. А.*— АЖ, **46**, 454, 1969.
322. *Hafner Haricel.* Progreŝ. stiintei, **5**, 1969, N5, 198.
323. *Gaposchkin E. M., Wright J. P.* Nature, **221**, 650, 1969.
324. *Эктор Поблете Девиа.* Вестн. МГУ, физ., астр., 1970, № 1, 95.
325. *Мицкевич Н. В., Пулидо Гарсия И.* Докл. АН СССР, **192**, 1970, № 6, 1263.
326. *Martucci G., Modugno M.* Lett. Nuovo Cimento, **3**, 553, 1970.
327. *Саакян Р. П.* Сообщ. Бюракан. обсерв., вып. 43, 74, 1971.
328. *Lichnerowicz A.* Journ. Math. Pures et Appl., **23**, 37, 1944.
329. *Weyssenhoff J., Raabe A.* Acta Phys. Polon., **9**, 7, 1947.
330. *Scheidegger A. E.* Rev. Mod. Phys., **25**, 451, 1953.
331. *Bergmann P. G., Thomson R.* Phys. Rev., **89**, 400, 1953.
332. *Chase D. M.* Phys. Rev., **95**, 243, 1954.
333. *Papapetrou A., Urich W. Z.* Naturforsch., **10a**, 109, 1955.
334. *Bertotti B.* Nuovo Cimento, **3**, 655, 1956.
335. *Bertotti B.* Nuovo Cimento, **4**, 898, 1956.
336. *Tauber G. E.* Canad. Journ. Phys., **33**, 824, 1955.
337. *Narlicar V. V., Rao B. R.* Proc. Nat. Inst. Sci., India, **A21**, 416, 1955.
338. *Петрова Н. М.*— Тр. Казах. ун-та. В сб.: «Исследование процессов переноса. Вопросы теории относительности», вып. 2. Алма-Ата, 1960, с. 141.
339. *Айвазян Ю. М.* Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, **13**, 1960, № 5, 47.
340. *Halbwachs F.* Théorie relativiste des fluides à spin. Raris, 1960.
341. *Tulczyjew B., Tulczyjew W.* Recent developments in general relativity. London: Pergamon Press, 1962, p. 465.
342. *Carlo Venini.* Rend. Ist. lombardo sci. e lettere, sci. mat., fis., chim. e geol., **99**, 1965, N3, 812.
343. *Hoffman R. B., Havas P.* Phys. Rev., **140**, 1965, N4B, 1162.
344. *Garmeli Moshe.* Phys. Rev., **140**, 1965, N5B, 1441.
345. *Минкевич А. В., Сокольский А. А.* Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 1967, № 4.
346. *Jankiewicz C.* Zesz. nauk. Wyższej szkoly ped. Opolu. Fiz., **6**, 161, 1967.
347. *Beiglböck W.* Communs Math. Phys., **5**, 1967, N2, 106.
348. *Westpfahl K.* Ann. Phys. (DDR), **22**, 1969, N7—8, 345.
349. *Westpfahl K.* Ann. Phys. (DDR), **22**, 1969, N7—8, 361.
350. *Madore John.* Ann. Inst. H. Poincaré, **A11**, 1969, N2, 221.
351. *Synge J. L.* Proc. Roy. Irish. Acad., **A69**, 1970, N2, 11.
352. *Курмакаев З. Х.*— Тр. Астрофиз. ин-та АН КазССР, **16**, 116, 1971.
353. *Сабитов Ш. Н.* Там же, с. 123.

354. *Петрова Н. М., Койшибаев Н.*— В сб.: «Физика», вып. 1. Алма-Ата, 1970, с. 7.
355. *Петрова Н. М., Сандина И. В.* Там же, с. 14.
356. *Петрова Н. М., Варламова А. Н.* Там же, с. 16.
357. *Тепикин Б. Г., Петрова Н. М., Ганеев Г. З.* Там же, с. 19.
358. *Тепикин Б. Г., Ганеев Г. З.* Там же, с. 21.
359. *Биндер Г. М.* Там же, с. 29.
360. *Петрова Н. М., Тепикин Б. Г.*— В сб.: «Гравитация и теория относительности», вып. 7. Казан. ун-т, 1970.
361. *Якупов М. Ш.* Сб. аспирантских работ (физика), изд-во Казан. ун-та, 1965, с. 66.
362. *Голиков В. И.*— Тез. докл. на итоговой науч. асп. конф. Казань, 1962, с. 100.
363. *Havas P.* Recent Develop. in Gen. Relativ., Warszawa, PWN; Oxford — London — New-York — Paris, Pergam. Press, 1962, p. 259.
364. *Кирия В. С.* Сообщ. АН ГССР, 32, 2, 1963.
365. *Голиков В. И.*— В сб.: «Гравитация и теория относительности», вып. 2. Казань, 1965, с. 23.
366. *Johnson Coates R.* Phys. Rev. D: Particles and Fields, **7**, 2825, 1973; **7**, 2838, 1973.
367. *Breen B.* J. Phys. A: Math., Nucl. and Gen., **7**, 216, 1974.
368. *Barker B. M., O'Connell R. F.* Phys. Rev. D: Particles and Fields, **10**, 1340, 1974.
369. *Ferrell T. L., Ging J. L.* Nuovo Cimento, B**24**, 197, 1974.
370. *Арак В.*— В сб.: «Работы по математике и физике». Таллин, 1974, с. 49.
371. *Venini C.* Rend. Ist. lombardo. Accad. sci. e lett., A108, 479, 1974.
372. *Епихин Е. Н.* Вестн. МГУ. Физ., астр., **16**, 1975, № 2, 131.
373. *Hogan P. A., Mc Crea J. D.* Gen. Relat. and Gravit., **5**, 1974, N1, 79.
374. *Бабецкий В. И.*— Тр. Моск. авиац. ин-та, вып. 290, 29, 1974; Изв. вузов. Физика, 1975, № 10, 24.
375. *Finley J. D.* J. Math. Phys., **15**, 1698, 1974.
376. *Писаренко В. Г.* Докл. АН СССР, **217**, 800, 1974.
377. *Пометелин Р. В.* Изв. вузов. Физика, 1974, № 3, 100.
378. *Чечин Л. М., Абдильдин М. М.*— В сб.: «Прикл. и теор. физика», вып. 7, 52. Алма-Ата, 1975.
379. *Обозов В. И.* Изв. вузов. Физика, 1975, № 11, 131.
380. *Виленкин А. В., Фомин П. М.*— Укр. физ. ж., **20**, 1975, № 9, 1552.
381. *Gonzáles-Martin Gustavo R.* Phys. Rev. D: Particles and Fields, **14**, 399, 1976.
382. *Karade T. M., Rao J. R.* Austral. J. Phys., **29**, 1976, N1—2, 107.
383. *Epikhin E. N., Mitskievic N. V.* Acta Phys. Polon., **B7**, 543, 1976.
384. *Dionysiou D. D.* Nuovo Cimento, B33, 519, 1976.
385. *Fuchs H.* Exp. Techn. Phys., 22, 1974, N3, 185.
386. *Dixon W. G.* Phil. Trans. Roy. Soc. London, **277**, 1264, 59, 1974.
387. *Брумберг В. А., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Шакура Н. И.* Определение масс компонентов и наклона двойной системы, содержащей пульсар, по релятивистским эффектам. Письма в АЖ, **1**, 1975, № 1, 5.
388. *Петрова Н. М., Сандина И. В.* Докл. АН СССР, **217**, 319, 1974.
389. *Cooperstock F. I.* Lett. Nuovo Cimento, **10**, 1974, N13, 555.
390. *Havas P.* Colloq.-int, CNRS, 1974, N220, 383, 390.
391. *Weert Ch. G.* Physica, **76**, 1974, N2, 345.
392. *Федорова С. П.* Изв. вузов. Физика, 1975, № 4, 47.
393. *Petterson J. A.* Phys. Rev. D: Particles and Fields, **11**, 1975, N2, 253.
394. *Hagihara Y.* Japanese Journ. Astron. Geophys., **8**, 67, 1931.
395. *Галкин С. Л.* Изв. вузов СССР. Физика, 1963, № 3, 54.
396. *Papapetrou A.* Proc. Roy. Irish. Acad., A52, 11, 1948.
397. *Papapetrou A.* Proc. Phys. Soc. (London), A**64**, 302, 1951.
398. *Infeld L., Scheidegger A. E.* Canad. Journ. Math., **3**, 195, 1951.
399. *Haywood J. H.* Proc. Phys. Soc. (London), A**65**, 170, 1952.
400. *Infeld L.* Canad. Journ. Math., **5**, 17, 1953.
401. *Infeld L.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2, 163, 1954.

402. *Teisseyre R.* Acta Phys. Polon., **13**, 45, 1954.
403. *Infeld L.* Postępy fiziki, **6**, 167, 1955.
404. *Meister H. J., Papapetrou A.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **3**, 163, 1955.
405. *Fock V. A.* Helv. Phys. Acta, Suppl. IV, 171, 1956.
406. *Hoahg Phan Tan.* Compt. Rend., **243**, 1292, 1956.
407. *Брумберг В. А.*— АЖ, **35**, 1958, № 6, 893.
408. *Фок В. А.*— ЖЭТФ, **38**, 108, 1960.
409. *Infeld L.* Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astron., **9**, 299, 1961.
410. *Янкевич Ч.*— ЖЭТФ, **44**, 649, 1963.
411. *Воевода Г.*— ЖЭТФ, **45**, 2051, 1963.
412. *Фок В. А.*— В сб.: «Николай Коперник», изд-во АН СССР, 1947.
413. *Франкль Ф. И.*— УМН, **8**, вып. 3, 1953.
414. *Франкль Ф. И.* Тр. физ.-мат. ф-та Киргиз. ун-та, вып. 2, 1953.
415. *Фок В. А.*— УМН, **9**, вып. 4, 1954.
416. О гармонических системах в теории относительности. Переписка В. А. Фока и Л. Инфельда. Вопр. философии, 1955, № 3, 155.
417. *Широков М. Ф.*— ЖЭТФ, **30**, 180, 1956.
418. *Фок В. А.*— УФН, **59**, 67, 1956.
419. *Франкль Ф. И.*— УМН, **11**, вып. 3, 189, 1956.
420. *Фок В. А.*— УМН, **11**, вып. 3, 197, 1956.
421. *Керес Х.*— В сб.: «Исследования по теоретической физике». Тарту, 1957.
422. *Тодоров И. Т.*— УМН, **13**, вып. 2, 1958.
423. *Андерсон Дж.*— В сб.: «Гравитация и относительность». М., «Мир», 1965, с. 309.
424. *Фок В. А.*— «Вопр. философии», 1966, № 8, 15.
425. *Кирия В. С.*— В кн.: «Гносеологические аспекты измерений». Киев, «Наукова думка», 1968, с. 252.
426. *Франкфурт У. И.* Специальная и общая теория относительности. Исторические очерки. М., «Наука», 1968, с. 215—222.
427. *Штейнград З. А.* Докл. АН СССР, **204**, 831, 1972.
428. *De Donder T.* La gravifique einsteinienne. Paris, 1921.
429. *Lanczos K.* Phys. Zs., **23**, 537, 1922.

К ГЛАВЕ I

1. *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч., т. 1. М.—Л., ГИТТЛ, 1946.
2. *Риман Б.* Избранные произведения. Пер. с нем. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
3. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. Пер. с англ. М., ИЛ, 1948.
4. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1967.
5. *Арсенин В. Я.* Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. М., «Наука», 1966.
6. *Infeld L.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **3**, 213, 1955.
7. *Infeld L.* Phys. Rev., **53**, 836, 1938.
8. *Hu N.* Proc. Roy. Irish. Acad., **A51**, 87, 1947.
9. *Goldberg J. N.* Phys. Rev., **99**, 1873, 1955.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика, изд. 2-е. М., «Наука», 1965.
11. *Tulczyjew W.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5**, 279, 1957.
12. *Weyssenhoff J.* Acta Phys. Polon., **9**, 26, 34, 46, 1947.
13. *Pirani F.* Acta Phys. Polon., **15**, 389, 1956; Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5**, 143, 1957.
14. *Infeld L.* Sonderdruck aus der Max-Planck-Festschrift, 115, 1958.
15. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., изд-во ЛГУ, 1950.
16. *Тепикин Б. Г.* К вопросу о движении системы вращающихся тел в ОТО. Автореф. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Минск, 1974, 132 с. (АН БССР).
17. *Пикельнер С. Б.* Усп. астр. наук, **6**, 281, 1954.
18. *Bailey V. A.* J. Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, **94**, 1960, N2; Nature, **201**, 1964, N4925, 1202.

19. *Артемьев А. В.* Уч. зап. Ярослав. гос. пед. ин-та, вып. 56. Астрономия, 1963, с. 9.
20. *Пикельнер С. Б.* Основы космической электродинамики. М., Физматгиз, 1961.
21. *Боярчук А. А.*— «Вопросы космогонии», X. М., «Наука», 1964, с. 3.
22. *Кахилл Л.*— УФН, **87**, (3), 551, 1965.
23. *Северный А. Б.*— УФН, 88(1), 3, 1966.
24. *Faulkes M. C.* Canad. J. Phys., **47**, 1969, N18, 1989.
25. *Occhionero F., Demianski M.* Phys. Rev. Lett, **23**, 1969, N19, 1128.
26. *Burman R. J.* and Proc. Roy. Soc. N. S. W., **103**, 1970 (1971), N1.
27. *Chiu H. Y., Canuto V.* Astrophys. J., **163**, 1971, N3, Part I, 577.
28. *Apparao Krishna M. V., Chitre S. M.* Proc. Indian Acad. Sci., **A72**, 1970, N6, 285.
29. *Шварцман В. Ф.*— ЖЭТФ, **60**, 881, 1971.
30. *Каплан С. А.* Физика звезд, изд. 2-е. М., «Наука», 1970.
31. *Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г.* Космическая электродинамика. М., «Мир», 1967.
32. *Сафронов В. С.* Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М., «Наука», 1969.
33. *Карцев В. П.* Магнит за три тысячелетия. М., Атомиздат, 1972.
34. *Пикельнер С. Б., Хохлова В. Л.*— УФН, **107**, 389, 1972.
35. *Левич Е. В., Сюняев Р. А.*— АЖ, **48**, 461, 1970.
36. *Gibbons G. W.* Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **177**, 1976, N1, 37.
37. *Рылов Ю. А.*— АЖ, **53**, вып. 1, 44, 1976.
38. Строение звездных систем. Пер. с нем. под ред. П. Н. Холопова. М., ИЛ, 1962.
39. Курс астрофизики и звездной астрономии. Под ред. А. А. Михайлова, т. II. М., 1962; т. III. М., 1964.
40. *Бакулин П. И., Кононович Э. В., Мороз В. И.* Курс общей астрономии, изд. 4-е. М., «Наука», 1977.
41. *Мартынов Д. Я.* Курс общей астрофизики, изд. 2-е. М., «Наука», 1971.
42. *Babcock H. W.* Astrophys. J., **132**, 521, 1960.
43. *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика. М., ГИФМЛ, 1963.
44. *Вонсовский С. В.* Магнетизм. М., «Наука», 1971.
45. *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
46. *Фишер И. З.*— ЖЭТФ, **20**, 956, 1950.
47. *Barnett S. J.* Phys. Rev., **6**, 171, 239, 1915.

К ГЛАВЕ II

1. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., ГИФМЛ, 1960.
2. *Синг Дж. Л.* Классическая динамика. Пер. с англ. М., ГИФМЛ, 1963.
3. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М., ГИФМЛ, 1963.
4. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
5. *Новоселов В. С.* Вариационные методы в механике, изд-во ЛГУ, 1966.
6. *Bażański S.* Acta Phys. Polon., **16**, 423, 1957.
7. *Demiański M., Infeld E.* Acta Phys. Polon., **22**, 469, 1962.
8. *Demiański M., Infeld E.* Bull. Acad. Polon. Sci. Série sci. math., astron. et phys., **9**, 693, 1961.
9. *Зельманов А. Л.* Докл. АН СССР, **107**, 815, 1956.
10. *Зельманов А. Л.*— Тр. 6-го совещ. по вопр. космогонии. М., изд. АН СССР, 1959, с. 144—173.
11. *Мицкевич Н. В.* Физические поля в ОТО. М., «Наука», 1969.

К ГЛАВЕ III

1. *Hagihara Y.* Japan Astr. Geophys. III, 1931, N3.
2. *Новиков И. Д.* Сообщ. ГАИШ, № 132, изд-во МГУ, 1964.
3. *Einstein A.* Ann. Math., **40**, 922, 1939.
4. *Уилер Дж.*— В сб.: «Гравитация и относительность». Пер. с англ. М., «Мир», 1965, гл. 10.
5. *Schwarzschild K.* Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 1916, S. 424.
6. *Рябушко А. П.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1970, № 6.
7. *Lemaître G.* Ann. Soc. Scient., Bruxelles, **A53**, 51, 1933.
8. *Рябушко А. П.* Тез. докл. Первой Белорусской мат. конф. Минск, 1964, с. 42.
9. *Рябушко А. П.*— Тр. I респ. конф. математиков Белоруссии. Минск, «Вышэйшая школа», 1965, с. 283.
10. *Рылов Ю. А.*— ЖЭТФ, **40**, 1755, 1961; Тез. докл. 1-й Сов. грав. конф. Москва, 1961, с. 33.
11. *Рябушко А. П.* Изв. вузов СССР. Физика, 1964, № 1, 88.
12. *Рябушко А. П.*— ЖЭТФ, **46**, 2046, 1964.
13. *Шкловский И. С.* Звезды: их рождение, жизнь и смерть. М., «Наука», 1975.
14. *Яковлев Д. Г.*— ЖЭТФ, **68**, 369, 1975.
15. *Дымникова И. Г.*— В сб.: «Классическая и квантовая теория гравитации», Гр-IV. Минск, 1976, с. 145.
16. *Friedmann A.* Zs. f. Physik, **10**, 377, 1922.
17. *Friedmann A.* Zs. f. Physik, **21**, 326, 1924.
18. *Tolman R. C.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **20**, 169, 1934.
19. *Рябушко А. П.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1967, № 1.
20. *Рябушко А. П.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1967, № 2.
21. *Рябушко А. П.* Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1968, № 1.
22. *Raychaudhuri A.* Proc. Phys. Soc., **72**, 263, 1958.
23. *Компанеец А. С., Чернов А. С.*— ЖЭТФ, **47**, 1939, 1964.
24. *Блэкет П. М. С.*— УФН, **33**, вып. 1, 52, 1947; Nature, **159**, 658, 1947.
25. *Зельдович Я. Б.* Письма ЖЭТФ, **1**, вып. 3, 40, 1965.
26. *Богородский А. Ф.*— АЖ, **36**, 883, 1959.

К ГЛАВЕ IV

1. *Euler L.* Théorie de la Lune. Paris, 1772 (перевод: Эйлер Л. Новая теория движения Луны. Л., 1934).
2. *Lagrange J.* Essais sur le problème des trois corps. Paris, 1772.
3. *Laplace P.* Traité de Mécanique Céleste. Paris, 1798—1825.
4. *Якоби К.* Лекции по динамике. Пер. с нем., ОНТИ. М.—Л., 1936.
5. *Hill G. W.* Researches in the Lunar theory. Amer. Journ. of Mathem., 1878, 1; Works, Vol. 1, 1905, 284—335. Washington.
6. *Hill G. W.* On the extension of Delaunay's method in the Lunar theory to the general problem of planetary motion. Trans. Amer. Math. Soc., 1900, 1; Works, vol. IV, 1907, 169—206.
7. *Poisson S.* Mémoire sur le mouvement de la Lune autour de la Terre. Mém. de l'Acad. des Sciences de l'Inst. de France, **13**, 1835.
8. *Poincaré H.* Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste. I—III. Paris, 1892, 1893, 1899.
9. *Poincaré H.* Leçons de Mécanique céleste. I—III. Paris, 1905, 1907, 1910.
10. *Пуанкаре А.* О проблеме трех тел и об уравнениях динамики. Избр. тр., т. II. М., «Наука», 1972.
11. *Sundman K. F.* Mémoire sur le problème des trois corps. Acta Math., **36**, 105—179, 1912.
12. *Sundman K. F.* Theorie der Planeten. Enc. d. math. Wiss., Bd. VI, 2, 729—807, 1915.
13. *Ляпунов А. М.* О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны. Собр. соч., т. 1, изд-во АН СССР, 1954.
14. *Levi-Civitá T.* Sopra la equazione di Kepler. Atti della R. Accademia dei Lincei, **13**, 1904.

15. *Levi-Civitá T.* Acta Math., 30, 306, 1906; Rend. d. Lincei, 24, 61, 1915; Acta Math., 42, 99, 1917.
16. *Chazy J.* Compt. Rend., 157, 1398, 1913.
17. *Chazy J.* J. de l'Ecole Normale Supérieure, III ser., 1922.
18. *Chazy J.* J. d. math. pures et appl., 8, 1929.
19. *Chazy J.* Bull. astron., ser. 2, 8, 1932.
20. *Chazy J.* Mécanique céleste. Équations canoniques et variation des constantes. Press. Univ. de France, Paris, 1953.
21. *Belorizky M. D.* J. des Observ., 16, 109, 149, 189, 1933, Marseille.
22. *Vernić R.* Diskussion der Sundmanschen Lösung des Dreikörperproblems. Zagreb, 1953.
23. *Брумберг В. А.*— Бюл. ИТА, 9, 234, 1963.
24. *Шмидт О. Ю.* Докл. АН СССР, 58, 1947, № 2.
25. *Шмидт О. Ю., Хильми Г. Ф.*— «Усп. мат. наук», 3, 1948, № 64 (26).
26. *Шмидт О. Ю.* Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 1950, № 1.
27. *Хильми Г. Ф.* Докл. АН СССР, 62, 1948, № 1.
28. *Хильми Г. Ф.* Докл. АН СССР, 78, 1951, № 4.
29. *Кочина Н. Г.*— Бюл. ин-та теор. астр., 5, 1953, № 7 (70).
30. *Кочина Н. Г.*— Бюл. ИТА, 5, 1954, № 9 (72).
31. *Проскурин В. Ф.*— Бюл. ИТА, 5, 1953, № 7 (70).
32. *Сизова О. А.* Докл. АН СССР, 86, 1952, № 3.
33. *Ситников К. А.* Мат. сб. (новая серия), 32, (74), 1953, № 3.
34. *Храповицкая Г. Е.*— Бюл. ИТА, 5, 1953, № 7 (70).
35. *Мерман Г. А.*— АЖ, 30, вып. 3, 1953.
36. *Газарян Ю. Л.* Сообщ. ГАИШ, 1953, № 92.
37. *Мерман Г. А.*— Бюл. ИТА, 5, 1954, № 9.
38. *Мерман Г. А.* Докл. АН СССР, 99, 1954, № 6.
39. *Мерман Г. А.*— Бюл. ИТА, 6, 1956, № 6.
40. *Ситников К. А.* Докл. АН СССР, 133, 1960, № 2.
41. *Moulton F. R.* Periodic orbits. Washington. 1920.
42. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Пер. с франц. ОГИЗ. М.—Л., 1947.
43. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. II. М., ГИФМЛ, 1961.

К ГЛАВЕ V

1. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.—Л., ГИТТЛ, 1952; изд. 2-е. М., «Наука», 1966.
2. *Керес Х. П.*— ЖЭТФ, 52, 3, 768, 1967.
3. *Herlt E.* Ann. d. Phys., 7, Folge. Bd. 24, Heft 516, 1970.
4. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 2-е. М., «Наука», 1965.
5. *Reissner H.* Ann. d. Phys., 50, 106, 1916.
6. *Weyl H.* Ann. d. Phys., 54, 117, 1917; Raum-Zeit-Materie, 5-te Aufl., Berlin, 1923.
7. *Nordström G.* Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, 20, 1238, 1918.
8. *Камалетдинова Н. Ф., Пирагас К. А.*— В сб.: «Гравитация и теория относительности», вып. 9. Казань, 1973, с. 115.
9. *Бондарев Б. В.*— В сб.: «Гравитация и теория относительности», вып. 10—11. Казань, 1975 (1976), с. 27.
10. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г. Н. Дубошина, изд. 2-е. М., «Наука», 1976.
11. *Дубошин Г. Н.*— Тр. ГАИШ, 21, 1952.
12. *Дубошин Г. Н.* Основы теории устойчивости движения, изд-во МГУ, 1952.
13. *Колмогоров А. Н.* Докл. АН СССР, 98, 1954, № 4, 527.
14. *Маркеев А. П.*— АЖ, 48, вып. 4, 862, 1971.
15. Fourth test of general relativity: new radar result. Phys. Rev. Lett., 26, 1971, N18, 1132.
16. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., ГИФМЛ, 1959, гл. 11, 12.
17. *Pham T. H.* Nuovo Cimento, 9, 1958, N4, 647.
18. *Новиков И. Д.*— АЖ, 43, вып. 5, 911, 1966.

К ГЛАВЕ VI

1. *Wilson H. A.* Proc. Roy. Soc., A104, 451, 1923.
2. *Бэбкок X.* Астрофиз. сб., 185, 208, 220. М., ИЛ, 1949.
3. *Clark G. L.* Proc. Roy. Soc., A201, 488, 1950.
4. *Cranna K. G., Papini G.* Nuovo Cimento, B52, 1967, N1, 241.
5. *Абдильдин М.* Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат., 1968, № 4, 76.
6. *Barnett S. J.* Rev. Mod. Phys., 7, 129, 1937 (перевод в УФН, 18, 392, 1937).
7. *Дорфман Я. Г.* Магнитные свойства и строение вещества. Гостехиздат. М., 1955.
8. *Бозорт Р. М.* Ферромагнетизм. Пер. с англ. М., ИЛ, 1956.
9. *Scott G. G.* Rev. Mod. Phys., 34, 102, 1962.
10. Вращение Земли и определение времени. Докл., прочитанные на совещании по изучению неравномерности вращения Земли. М., «Наука», 1969.
11. *Новиков Э. А.* Планета загадок. Л., «Недра», 1968.
12. *Rochester M. G.* Trans. Amer. Geophys. Union, **54**, 1973, N8, 769.
13. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет, ч. II, пер. с франц. М., «Мир», 1976.
14. *Warwick J. W.* Dynamic spectra of Jupiter's decametric emission, 1961. Astrophys. J., 137, 1963, N1, 41.
15. *Morris D., Berge G. L.* Astrophys. J., 136, 1962, N1, 276.
16. 10-cm observations of Jupiter, 1961—1963. Astrophys. J., 139, 1964, N3, 975.
17. *Douglas N. J., Smith H. J.* Nature, 199, 1963, N4898, 1080.
18. Decameter wavelength observations of Jupiter. Astrophys. J., **144**, 1965, N2, 457.
19. *Мишо Ш.* Планета Юпитер. Пер. с англ. М., «Мир», 1970.
20. *Munk W. H., Mac Donald G. J. F.* The rotation of the Earth. A geophysical discussion. Cambridge Univ. Press, 1960, p. 323.
21. *Poincaré H.* Leçon sur les hypotheses cosmogoniques. Paris, 1911.
22. *Шмидт О. Ю.* Четыре лекции о теории происхождения Земли, изд. 3-е, доп., изд-во АН СССР, 1957.
23. *Фесенков В. Г.*— АЖ, 28, 492, 1951; Что говорят данные наблюдений о происхождении Солнечной системы. М., «Знание», 1960.
24. *Сафронов В. С.*— «Вопр. космогонии», 7, 121, 1960.
25. *Сафронов В. С.*— «Вопр. космогонии», 8, 150, 1962.
26. *Киладзе Р. И.*— Бюл. Абастуманской обсерв., 1965, № 32, 231.
27. *Артемьев В. А., Радзиевский В. В.*— АЖ, 42, вып. 1, 124, 1965.
28. *Fish F. F.* Icarus, 7, 1967, N2, 251.
29. *Hartmann W. K., Larson S. M.* Icarus, 7, 1967, N2, 257.
30. *Giuli R. T.* Icarus, 8, 1968, N2, 301.
31. *Giuli R. T.* Icarus, 9, 1968, N1, 186.
32. *Артемьев А. В.*— «Астр. вестн.», 3, 1969, № 1, 18.
33. *Артемьев А. В.*— Уч. зап. Горьк. гос. пед. ин-та, вып. 98, 1969, с. 98.
34. *Mitra V.* Astron. and Astrophys., 4, 263, 1970.
35. *Mitra V.* Astron. and Astrophys., 6, 491, 1970.
36. *Артемьев А. В., Радзиевский В. В.*— «Астр. вестн.», 5, 1971, № 1, 49.
37. *Киладзе Р. И.*— «Астр. вестн.», 5, 1971, № 3, 159.
38. *Сафронов В. С.*— «Астр. вестн.», 5, 1971, № 3, 167.
39. *Rostick W. H.* Phys. Rev., 100, 1955, N4, 1007.
40. *Savich P.* Bulletin Acad. serbe des Sciences et des arts, Beograd, 26, 1961, N8, 107.
41. *Jeans J. H.* Astronomy and Cosmogony. Cambridge, 1929.
42. *Alfvén H.* On the origin of the Solar system. Oxford, 1954; Observatory, 87, 186, 1967.
43. *Hoyle F.* Frontiers of Astronomy. New-York, 1960.
44. *Хойл Ф.*— «Вопр. космогонии», 7, 15, 1960.
45. *Peebles P. L.* Astrophys. J. 155, 393, 1969.
46. *Parker E. N.* Astrophys. J., 160, 383, 1970.
47. *Мишустин И. Н., Рузмайкин А. А.*— ЖЭТФ, 61, 441, 1971.
48. *Вайнштейн С. И., Рузмайкин А. А.*— АЖ, 48, 902, 1971.
49. *Parker E. N.* Astrophys. J. 163, 1971, N2, Part I, 255, 279; Astrophys. J. 164, 1971, N3, Part I, 491.

50. *Шифф Л.* Квантовая механика. Пер. с англ., изд. 2-е. М., ИЛ, 1959.
51. *Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М.* Квантовая механика. Изд. 2-е. М., «Просвещение», 1965.
52. Постоянные магниты (справочник). Пер. с англ. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
53. Постоянные магниты (справочник). М., «Энергия», 1971.
54. *Macy William W. Jr.* Astrophys. J. 190, 1974, N1, Part 1, 153.
55. *Ritchings R. T., Lyne A. G.* Nature, 257, 1975, N5524, 293.
56. *Jones P. B.* Astrophys. and Space Sci., 45, 1976, N2, 369.
57. Физика космоса. Маленькая энциклопедия. М., «Советская энциклопедия», 1976.

Антон Петрович Рябушко

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Редактор *С. С. Голод*
Обложка *Н. С. Волкова*
Мл. редактор *Т. С. Канцлер*
Худож. редактор *Л. М. Полякова*
Техн. редактор *П. В. Фрайман*
Корректор *Е. А. Пастушенко*

ИБ № 623

Сдано в набор 08.06.78. Подписано в печать 09.02.79. АТ 09008. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 15,12. Тираж 1300 экз. Изд. № 78—223. Зак. 1006. Цена 2 руб. 60 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Белорусской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048. Минск, Парковая магистраль, 11.

Ордена Трудового Красного Знамени типография ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский проспект, 79.

Рябушко А. П.

Р98 Движение тел в общей теории относительности.— Мн.: Выш. школа, 1979.— 240 с.

В монографии излагаются важнейшие результаты решения задачи движения тел в теории относительности, достигнутые к настоящему времени. В книгу вошли: подробный вывод уравнений движения в постньютоновом приближении для систем тел, обладающих сравнимыми между собой массами, электрическими зарядами, собственными угловыми моментами и магнитными полями; подробное обсуждение ряда гравитационных и электромагнитных релятивистских эффектов, сопровождающих движение тел, а также приложения эйнштейновой теории движения к некоторым вопросам космогонии Солнечной системы и к экспериментальной проверке общей теории относительности.

Книга предполагает знакомство читателя с основами теории относительности и рассчитана на широкий круг научных работников, физиков-теоретиков, экспериментаторов, аспирантов и студентов, занимающихся или интересующихся проблемами теории относительности.

$$\text{Р}\ \frac{20402-042}{\text{М}304(05)-79}-79$$

530.1