

*С.М.Рытов*

**ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКУЮ РАДИОФИЗИКУ.  
ЧАСТЬ 1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ**

(Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976 г.)

Книга представляет собой введение в теорию случайных функций, которая излагается, в основном, на материале статистических задач радиофизики. Из этих задач выбраны лишь немногие, но такие, которые, с одной стороны, интересны и важны сами по себе, а с другой — позволяют наглядно проиллюстрировать как необходимость введения определенных математических понятий и методов, так и их применение.

Второе издание существенно переработано и расширено по сравнению с первым. Книга разделена на две части. В первую часть входят только случайные процессы, а случайные поля, занимавшие в первом издании одну главу, выделены теперь во вторую часть. В первой части введен ряд новых параграфов, касающихся как общих вопросов (физическое понятие вероятности), так и конкретных проблем (обобщения релеевского распределения, разрывные марковские процессы, достижение границ, корреляционная теория временной когерентности, радиометры, квазистационарные процессы и др.).

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

Предисловие ко второму изданию	7
Предисловие к первому изданию	9
Введение	11
<b>Глава I. Задача Бернулли</b>	
§ 1. Физическое понятие вероятности	16
§ 2. Законы распределения случайных величин	21
§ 3. Биномиальный закон распределения	25
§ 4. Примеры применения биномиального закона	29
§ 5. Дробовой эффект. Распределение Пуассона	32
§ 6. Предельная теорема Муавра — Лапласа	36
§ 7. Нормальный или гауссов закон распределения	38
Задачи	45
<b>Глава II. Случайные импульсы</b>	
§ 8. Постановка задачи	48
§ 9. Характеристическая функция	52
§ 10. Функция распределения импульсного пуассоновского процесса	58
§ 11. Корреляционная функция	66
§ 12. Некоторые обобщения задачи об импульсах	72
§ 13. Импульсный шум и центральная предельная теорема	80
Задачи	84
<b>Глава III. Случайные функции</b>	
§ 14. Общие определения	96
§ 15. Марковские процессы	100
§ 16. Стационарные процессы	104
§ 17. Моменты случайных функций	106

§ 18. Корреляционная теория	109
§ 19. Вероятностная сходимость	113
§ 20. Эргодичность случайного процесса	124
Задачи	134
<b>Глава IV Марковские процессы</b>	
§ 21. Предварительные замечания	137
§ 22. Уравнение Смолуховского	140
§ 23. Марковский процесс с дискретными состояниями	144
§ 24. Переход от дискретной последовательности к процессу с непрерывным множеством состояний. Распределение Релея	148
§ 25. Некоторые обобщения распределения Релея	153
§ 26. Непрерывные марковские процессы. Уравнение Эйнштейна — Фоккера	160
§ 27. Обобщение на многомерные случайные функции	169
§ 28. Флуктуации в томсоновском ламповом генераторе	174
§ 29. Флуктуации при больших амплитудах автоколебаний	185
§ 30. Вращательное броуновское движение. Случайная рефракция луча	192
§ 31. Скачкообразные марковские процессы. Уравнение Колмогорова — Феллера	197
§ 32. Задача о первом достижении границ	204
Задачи	210
<b>Глава V. Стохастические дифференциальные уравнения</b>	
§ 33. Постановка вопроса	222
§ 34. Случайные функции с независимыми приращениями	224
§ 35. Простой пример стохастического дифференциального уравнения	228
§ 36. Общий случай уравнения первого порядка и системы таких уравнений при гауссовых дельта-коррелированных воздействиях	235
§ 37. Стохастические уравнения при случайных воздействиях с произвольными законами распределения	243
Задачи	251
<b>Глава VI. Корреляционная теория случайных функций</b>	
§ 38. Комплексные случайные функции. Аналитический сигнал	259
§ 39. Свойства функции корреляции и связанные с ней свойства случайной функции	265
§ 40. Спектральные разложения случайных функций	269
§ 41. Стационарные случайные функции	273
§ 42. Примеры спектральных разложений стационарных функций	282
§ 43. «Белый» шум и черное излучение	295
§ 44. Модулированные случайные процессы	299
§ 45. Спектр колебания с флуктуирующей частотой	312
§ 46. Спектр импульсного процесса с независимыми интервалами	319
§ 47. Корреляционная теория когерентности	329
§ 48. Нестационарная интерференция. Корреляция источников колебаний ;	343
§ 49. Статистические характеристики поляризации модулированных	351

колебаний	
Задачи	359
<b>Глава VII. Другие приложения корреляционной теории. Некоторые виды нестационарных процессов</b>	
§ 50. Спектральная теория воздействия случайных процессов на гармонические системы	372
§ 51. Случайное воздействие на безынерционные нелинейные системы	382
§ 52. Измерение шумовых сигналов. Радиометры	392
§ 53. Корреляционная теория флуктуации в томсоновском генераторе	401
§ 54. Тепловой шум в квазистационарных цепях. Флуктуационно- диссипационная теорема	416
§ 55. Эффект мерцания	430
§ 56. Случайные функции со стационарными приращениями. Структурная функция	435
§ 57. Спектры нестационарных процессов. Квазистационарные процессы	443
§ 58. Фильтрация нестационарных процессов. О спектре средней мощности	452
§ 59. Периодически-нестационарные процессы	463
Задачи	474
Литература	485

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание «Введения в статистическую радиофизику» существенно переработано и расширено по сравнению с первым.

Прежде всего, книга разделена на две части. В первую часть входят только случайные процессы, т. е. однопараметрические случайные функции. Случайные поля, занимавшие в первом издании всего одну главу, выделены теперь во вторую часть книги, подготавливаемую в соавторстве с Ю. А. Кравцовым и В. И. Татарским. Таким образом, изложение теории случайных полей и ее приложений претерпевает наибольшее расширение. Это продиктовано не только стремлением более полно отразить столь обширную и важную область применения теории случайных функций, но и тем, что теория случайных полей необходима студентам не всех радиофизических специальностей, а только тем из них, кто более детально и глубоко изучает вопросы излучения волн и распространения волн в случайно-неоднородных средах. В Московском физико-техническом институте эти вопросы были предметом отдельного курса лекций.

Следует отметить, что прежнее название книги сохранено не столько по мотивам преемственности, сколько по иным соображениям. Интересующие нас приложения статистических методов можно и нужно черпать не только из радиофизики в узком смысле слова, но и из оптики, акустики, волновой механики и других традиционных разделов физики. Речь идет о вопросах, объединяемых современной теорией колебаний и волн. Однако теория колебаний обычно концентрирует внимание на динамических задачах. Данная книга должна была бы охватить приложения теории случайных функций к статистическим колебательно-волновым задачам, выбирая их из любого «раздела» физики столь же свободно, как это делает — в соответствии со своими основными принципами — динамическая теория колебаний. Пока эту цель еще нельзя считать в полной мере достигнутой, что и послужило наиболее веским доводом в пользу сохранения прежнего названия книги.

Довольно значительно расширена и данная — первая — часть книги. Введен ряд новых параграфов, касающихся как общих

вопросов, так и конкретных проблем, недостаточно или совсем не затронутых в первом издании (§§ 1, 2, 7, 25, 31—33, 36, 47—49, 52, 57, 58). Ряд других параграфов заметно расширен (§§ 9—11, 19, 27, 37, 38, 44, 54). Однако общее направление книги сохранено. В ней по-прежнему не затрагиваются, например, статистические вопросы квантовой радиофизики и квантовой электроники, а во второй части — статистические явления при распространении волн в нелинейных средах (см. [1]). Столь значительное расширение областей применения теории случайных функций вряд ли необходимо для усвоения ее основ и наиболее важных ее методов.

К каждой главе добавлено некоторое количество задач с подробными решениями. Задачи не только служат в качестве упражнений, но во многих случаях содержат дополнительные сведения по теории и ее приложениям, а также добавочные ссылки на литературу. Изменены обозначения некоторых основных величин, с тем чтобы приблизиться к обозначениям, получившим наибольшее распространение в литературе (где и сейчас еще нет, к сожалению, полной унификации).

Автор глубоко благодарен А. М. Яглому и В. К. Тутубалину за просмотр рукописи и советы, позволившие уточнить и улучшить изложение ряда математических вопросов.

*С. М. Рытов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Основой для этой книги послужили лекции по статистической радиофизике, которые автор читал в течение ряда лет в Московском физико-техническом институте.

Широкий и все возрастающий интерес к теории случайных функций и к ее применению в самых разнообразных областях физики и техники вряд ли нуждается в настоящее время в каких-либо комментариях. Данная книга предназначена для студентов-радиофизиков и радиотехников, которые зачастую уже с первых шагов практической работы сталкиваются с задачами, требующими применения теории случайных процессов. Во многих случаях для понимания и решения таких задач достаточна некоторая предварительная подготовка, конечно, не заменяющая более глубокого изучения теории, но способная в какой-то мере облегчить это изучение<sup>1)</sup>. На этой стадии можно, по мнению автора, освободить изложение от обилия математических фактов, от педантизма в тех доказательствах, которые целесообразно сохранить, и от многих доказательств вообще. В результате остается скорее не изложение, а *описание* математической теории. Именно поэтому особенно важно иллюстрировать ее утверждения и даже постановку рассматриваемых в ней вопросов конкретными примерами, заимствованными из различных областей радиофизики. Это позволяет создать известный запас наглядных физических представлений, без сомнения, полезных и для последующего изучения специальной литературы.

Вместе с тем лекции, разумеется, не могут охватить очень обширный круг вопросов, относящихся к статистической радиофизике. Выбраны лишь немногие проблемы, но такие, которые, с одной стороны, интересны сами по себе, а с другой — дают возможность на конкретном материале как уяснить необходимость введения ряда математических понятий и методов, так и познакомиться с их применениями.

---

<sup>1)</sup> Из монографий и книг, излагающих математическую теорию, укажем на [2—9]. Ряд радиофизических и радиотехнических приложений подробно рассматривается в книгах [10—19].

Хотя курс теории вероятностей предполагается известным, некоторые ее вопросы все же попутно затрагиваются, так как опыт преподавания показал желательность их напоминания или разъяснения. Сюда относятся моменты и характеристические функции, закон больших чисел и центральная предельная теорема.

При чтении книги нетрудно заметить постепенное усложнение рассматриваемых задач и их трактовки. Это — естественное следствие лекционного происхождения книги, и автор не видит оснований к тому, чтобы избегать подобного построения, заменив его более нивелированным. Ссылки на литературу содержатся главным образом в двух последних главах, где конкретные приложения математического аппарата становятся более серьезными и занимают большее место. Следует, однако, подчеркнуть, что список литературы — как общей, так и посвященной отдельным задачам — не претендует на систематичность и полноту. Из оригинальных работ цитируются лишь немногие. В основном это работы, содержание которых в той или иной мере использовано в лекциях, или же работы, иллюстрирующие разнообразие радиофизических задач, в которых теория случайных функций находит эффективное применение.

Автор считает своим долгом принести благодарность А. М. Яглому, М. Л. Левину, М. А. Исаковичу, Я. И. Хургину, В. П. Яковлеву и другим лицам, знакомившимся с рукописью на разных этапах ее подготовки, за ряд ценных советов и замечаний. Разумеется, и в нынешнем своем виде книга не свободна от ошибок и пробелов, и автор заранее благодарен за любые указания, которые помогут устранить имеющиеся недостатки.

*С. М. Рытов*

## ВВЕДЕНИЕ

Статистическая радиофизика изучает те случайные (в том числе флуктуационные) явления, с которыми приходится сталкиваться в радиофизике. Увеличение чувствительности измерительных и приемных устройств, повышение точности измерений привели к тому, что во многих областях физики и техники проблемы флуктуаций играют все более существенную роль. В радиотехнике этот процесс совершенствования методов и средств наблюдения был в значительной мере стимулирован развитием радиолокации и радиоастрономии.

Как известно, *флуктуациями* называются случайные отклонения макроскопических величин от их средних (в частности, термодинамически равновесных) значений. Существование таких отклонений связано с наличием у всякой макроскопической системы огромного числа степеней свободы, если не *макроскопических* (как, например, у распределенных систем), то уж во всяком случае *микроскопических*, обусловленных в конечном счете атомизмом вещества и электричества. Эта общая основа флуктуационных явлений допускает, конечно, самые разнообразные механизмы их возникновения.

Если говорить о флуктуациях, связанных с атомизмом, то они могут быть обусловлены, например,

1) Тепловым движением микрочастиц (в том числе микрочарядов, т. е. электронов, ионов и т. п.). Сюда относятся *тепловые флуктуации* самых различных макровеличин, таких, как плотность, давление, температура, ток, напряжение, напряженности макроскопических электромагнитных полей и т. д. С тепловыми флуктуациями связаны брауновское движение, молекулярное рассеяние света в среде, так называемые тепловые шумы в радиотехнике и радиофизике, тепловое излучение тел и многие другие явления.

2) Случайными вариациями числа частиц в электронных потоках при термо- и фотоэмиссии — так называемый *дробовой эффект*, непосредственно обусловленный дискретностью микроскопических носителей заряда.



3) Случайными локальными вариациями эмиссионных свойств поверхности катодов (*эффект мерцания*).

4) Хаотичностью в процессе перемагничивания доменов в ферромагнитных сердечниках, находящихся в изменяющемся магнитном поле (*магнитные шумы*, эффект Баркгаузена).

К флуктуационным явлениям, которые связаны с наличием множества макроскопических степеней свободы, относятся такие процессы, как турбулентность среды — земной тропосферы и ионосферы, солнечной короны, межпланетной и межзвездной среды. Другим примером может служить волнение поверхности моря. Явления такого рода тоже далеко не безразличны для радиотехники.

Флуктуации представляют собой, как известно, один из основных объектов статистической физики (наряду с теорией равновесного состояния и кинетикой физических процессов в веществе). Нас же будут интересовать лишь те вопросы, которые относятся к области радиофизики. Попытаемся очертить эту область.

Обычно к радиофизике относят радиоастрономию, радиоспектроскопию, электронику и электродинамику СВЧ, а также исследование электромагнитных свойств вещества, в особенности полупроводников, ферритов, плазмы и т. д. Но уже из этого перечня видно, что определение предмета радиофизики путем перечисления ее составных частей представляет собой довольно безнадежное дело. Радиофизика существовала до возникновения радиоастрономии и радиоспектроскопии и существует после того, как вся электродинамика СВЧ, по существу, целиком отошла к радиотехнике. По-видимому, более целесообразно выделить те *направления*, которые позволяют уточнить предмет радиофизики на каждом этапе ее развития. Можно, по-видимому, считать, что радиофизика охватывает в основном два направления:

1) *Изучение физических явлений, существенных для радиосвязи* (в широком ее понимании), т. е. для всех основных этапов всякой радиосвязи — генерации электромагнитных сигналов, излучения и распространения электромагнитных волн и, наконец, приема радиосигналов. Это направление можно назвать «*физикой для радио*».

2) *Изучение методами и средствами радиотехники* самых разнообразных физических (и не только физических) объектов — атомных ядер, молекул, живых организмов, земной атмосферы, небесных тел и т. д. Это, коротко говоря, «*радио для физики*».

Если исходить из такого понимания радиофизики, то естественным образом обрисовывается и область *статистической радиофизики*. Возьмем, например, первое (и основное) из двух

названных направлений — «физику для радио», т. е. физику радиосвязи.

К статистическим явлениям при генерации электромагнитных сигналов относятся в первую очередь флуктуации в автоколебательных системах и связанные с ними вопросы о немонокро-матичности автоколебаний, о стабильности частоты и точности ее измерения (а значит, и точности измерения времени).

При распространении радиоволн нас интересуют случайные тепловые и турбулентные неоднородности среды, поскольку они вызывают рассеяние радиоволн, случайные пульсации рефракции, колебания интенсивности и фазы волны в месте приема. Сюда же относится и вопрос о влиянии случайных неоднородностей в фидерах, если волны распространяются не свободно, а по направляющим линиям. Одной из важных статистических задач, относящихся к излучению радиоволн, является вопрос о роли случайных неоднородностей в сложных антенных системах [20].

Наконец, при приеме любого вида радиосигналов чрезвычайно существенны шумы в приемных и измерительных устройствах, трансформация внешних и внутренних шумов при разного рода преобразованиях сигнала в аппаратуре, вопрос о помехоустойчивости приемных систем и т. д.

Сделаем два замечания к этому, разумеется, неполному и до-вольно произвольному перечню.

Во-первых, некоторые из перечисленных вопросов (напри-мер, трансформация шумов в линейных и нелинейных цепях или помехоустойчивость аппаратуры) хотя и имеют первостепенное значение для радиотехники, но, по сути дела, не содержат ни-какой *физической* проблематики. Мы не будем избегать подоб-ных вопросов, так как зачастую они очень полезны для иллю-страции методов статистической радиофизики, но не будем и особенно в них углубляться, тем более что в настоящее время уже существует множество монографий и учебников, в которых они подробно освещены.

Во-вторых, мы пропустили обширную и интенсивно разви-вающуюся область, которая тоже опирается на применение ста-тистики к радиосвязи и связи вообще. Это — статистическая теория связи, или теория информации. Объектом статистических методов здесь являются не только помехи и шумы, но и сами полезные сигналы. Такой подход имеет очень веские основания (аппаратура проектируется и оценивается по отношению к це-лому *классу возможных сигналов*, а не какому-то одному виду сигнала из этого класса) и, как оказалось, действительно дает очень много — не только в теории связи, но и в задачах авто-матического регулирования, в теории регистрирующих приборов, в теории вибраций, качки и т. д. Но статистическая теория

связи, хотя и имеет некоторые интересные точки соприкосновения со статистической физикой (соотношение между понятиями информации и энтропии), носит в основном математический характер. Это, если можно так выразиться, «радиоматематика», а не радиофизика, как она очерчена выше.

Что касается второго из названных направлений радиофизики — применения радиометодов в самых различных областях физики, астрономии и т. д., то здесь, в той мере, в какой используются элементы радиосвязи (генерация, распространение, прием), могут сохранять свое значение те статистические явления, с которыми сталкиваются в области радиотехники, но, сверх того, могут добавиться и другие, характерные для данной конкретной области (оптические флуктуации, акустическая реверберация и т. д.).

Как правило, случайные явления, с которыми приходится иметь дело в радиофизике, — это *процессы*, протекающие во времени, или еще шире — *поля*, зависящие и от времени, и от точки пространства. Адекватным математическим аппаратом для трактовки таких явлений служит *теория случайных функций*, которая за последние десятилетия приобрела большое значение во многих областях физики и техники. Эта теория представляет собой непосредственное обобщение классической теории вероятностей, рассматривающей случайные события и величины. Если не углубляться пока в вопрос о том, что означает *задание* случайной функции, то можно сказать, что это такая функция  $f(t)$ , значение которой при каждом из возможных значений аргумента  $t$  есть случайная величина. Для простоты здесь взят единственный аргумент  $t$ , под которым в приложениях чаще всего приходится понимать время. Конечно, это еще не предрешает того, дискретны или непрерывны возможные значения  $t$ , чему соответствуют два типа случайных функций — случайные *последовательности* (дискретное  $t$ ) и случайные *процессы* (непрерывное  $t$ ).

Если аргумент  $t$  считать временем, то соотношение между классической теорией вероятностей и теорией случайных функций представляется аналогичным (в математическом аспекте) соотношению между статикой и динамикой в механике или между термостатикой и кинетикой в термодинамике. Основы классической теории вероятностей предполагаются в данном курсе уже известными.

Все сказанное позволяет пояснить теперь те соображения, исходя из которых было выбрано содержание и построение данного курса лекций.

С одной стороны, как это видно уже из того сжатого перечня проблем, который был приведен выше, область статистической радиофизики чрезвычайно обширна. Отразить в курсе все мно-

гообразии статистических задач радиофизики просто невозможно, да и вряд ли подобная попытка могла бы быть как-либо обоснована. Вместе с тем широкий обзор по необходимости был бы беглым и уже поэтому принес бы мало пользы. С другой стороны, математический аппарат статистической радиофизики значительно шире и менее знаком, чем классическая теория вероятностей. Полное освещение теории случайных функций — это предмет самостоятельного математического курса.

При этих условиях представлялось наиболее целесообразным выделить немногие радиофизические вопросы, которые, во-первых, важны и интересны сами по себе и, во-вторых, позволяют ознакомиться с теорией случайных функций и ее применениями. Разумеется, речь идет при этом не о математическом изложении теории.

Хорошо известно, насколько трудно найти компромисс между требованиями, которым должно удовлетворять строгое изложение математической теории, и необходимой при первом соприкосновении наглядностью. Безукоризненная аргументация математика зачастую представляется физику или инженеру не более, а менее убедительной, чем простые и осязаемые соображения, которые в свою очередь, с точки зрения математика, лишены какой бы то ни было доказательной силы. Необходимо подчеркнуть поэтому, что данный курс написан не математиком и не для математиков. В своей математической части он дает лишь некоторую предварительную подготовку, достаточную для того, чтобы приступить к самостоятельной работе, но, конечно, не заменяющую углубленного изучения математических работ.

До главы III теория случайных функций вообще не затрагивается и речь идет о некоторых, настолько простых задачах, что при их трактовке можно обойтись средствами классической теории вероятностей.

## Г л а в а I

---

### ЗАДАЧА БЕРНУЛЛИ

#### § 1. Физическое понятие вероятности

Как показывает опыт преподавания, изучение теории вероятностей в чисто математическом плане не всегда приводит к достаточной ясности в принципиальных вопросах, существенных для физика. Целесообразно поэтому хотя бы коротко остановиться на том, что такое вероятность и как пользуется этим понятием физик.

Хорошо известно, что вычислять вероятности научились долго до того, как по-настоящему поняли, что такое вероятность. Теория возникла из попыток рассчитать шансы на выигрыш, «справедливые» ставки и т. п. в так называемых азартных играх<sup>1)</sup>, примерами которых могут служить игра в кости, в орлянку, такие карточные игры, как «очко», т. е. игры, в которых все зависит от «воли случая» и ничего не зависит от способностей игрока, его сообразительности или умения. В этом смысле подобные игры можно назвать глупыми. Между тем, как любят говорить математики, умная игра в шахматы практически ничего не дала науке, тогда как глупая игра в кости дала очень много. В чем причина этого интересного факта?

Дело в том, что шахматы подчинены своим специальным правилам и все ситуации, которые здесь возникают, не выходят за рамки этих правил, т. е. не могут претендовать на какую-либо всеобщность. Напротив, игра в кости элементарно проста и позволяет проявиться в чистом виде чрезвычайно общей *статистической* закономерности — устойчивости относительных частот при возрастании числа испытаний. Если при  $n$  бросаниях кости число очков  $i$  выпало  $n_i$  раз, то относительная частота  $n_i/n$  обнаруживает с увеличением  $n$  удивительное постоянство. Этот

---

<sup>1)</sup> Французское слово «hasard» означает случай, риск.

эмпирический факт не зависит от того, «хорошая» кость или «плохая». У заведомо фальшивой кости, содержащей, например, кусочек свинца со стороны одной из граней, устойчивость величин  $n_i/n$  все равно имеет место, хотя для разных граней относительные частоты оказываются неодинаковыми, не равными  $1/6$ .

Итак, устойчивость  $n_i/n$  не требует, чтобы кость была «хорошей», а конкретные «асимптотические» значения  $n_i/n$  не вытекают из самого факта устойчивости. Их дает только *статистический опыт*, либо специально поставленный, либо накопленный ранее. Говоря, что у «хорошей» (пригодной для игры) кости  $n_i/n$  близки к  $1/6$ , мы, в сущности, определяем, какую кость мы будем называть «хорошей».

Иногда полагают, что значения  $n_i/n \approx 1/6$  следуют из принадлежащего Лапласу классического определения вероятности:

$$P = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{число равновозможных исходов}}.$$

Это определение недостаточно широко, так как оно не охватывает случаев, когда возможные исходы составляют бесконечное счетное или непрерывное множество. Но даже не требуя от определения больше того, на что оно распространяется, легко заметить тавтологичность данного определения. Ведь равновозможность означает здесь не что иное, как равновероятность, и, следовательно, вероятность  $P$  «определена» через вероятность же. Просто здесь дается правило подсчета вероятностей интересующих нас исходов по принятому заранее *равномерному* распределению вероятностей всех возможных исходов. Полагая, что из определения Лапласа следует вероятность  $P = 1/6$  выпадения каждой из граней кости, мы на самом деле лишь извлекаем из него то, что в него вкладываем, — равновозможность выпадения каждой из граней. Совершенно так же мы предполагаем, что равновозможно появление любой из 36 или 52 карт при извлечении одной карты из колоды и т. п.

На что опираются все такие «самоочевидные» предположения?

В качестве их опоры иногда привлекается так называемый «принцип недостаточного основания»: если кость сделана геометрически аккуратно, из однородного материала и т. п., то *нет оснований* считать иначе.

Психологически это, может быть, и понятно. Для человека, ровно ничего не знающего ни о каком статистическом опыте, равновероятность выпадения граней аккуратной кости или обеих сторон монеты представляется очевидной по «здравому смыслу». Конечное число возможных исходов и наличие *симметрии* делают здесь равновероятность естественной до самоочевидности. Но в отсутствие симметрии или, скажем, при непрерывных

возможных исходах «здравый смысл» пасует или подводит. В случае фальшивой кости только статистический опыт с *данной* костью позволяет получить оценку вероятностей выпадения различных граней. Трудности, возникающие при выборе равновероятных исходов при непрерывном их множестве, были очень ярко продемонстрированы на ряде геометрических задач в «Исчислении вероятностей» Бертрана (1888 г.). Эти так называемые парадоксы Бертрана с «геометрическими» вероятностями — еще один пример недостаточности «здорового смысла» или интуиции в этой более сложной ситуации [21]. Более того, когда мы говорим, что в простых случаях интуитивное предсказание *правильно*, то сама эта «правильность» означает лишь то, что проверка на статистическом опыте подтвердила бы предсказание. Таким образом, даже «самоочевидные» предположения о равновероятности в *конечном счете* опираются на огромное количество испытаний, фактически проведенных с соблюдением определенных условий, т. е. на накопленный статистический опыт.

Конечно, здесь нет возможности углубляться в историю развития теории вероятностей. На протяжении этой долгой истории возникали и сталкивались разные воззрения на понятие вероятности. Созревание теории вероятностей как аксиоматизированной ветви математики затянулось почти на три столетия.

Математическая теория, возникнув на основе каких-то (обычно довольно простых) идей, почерпнутых из реальных явлений и фактов, большей частью стремится в дальнейшем к эмансипации, к отрыву от своих эмпирических корней, к достижению уровня аксиоматизированной теории. У теории вероятностей этот процесс завершился лишь в 30-х годах нашего века, когда А. Н. Колмогоров сформулировал аксиомы, сделавшие теорию вероятностей главой метрической теории функций<sup>1)</sup>.

Сегодня математик называет вероятностью неотрицательную, нормированную к единице, вполне аддитивную функцию множеств, определенную на некоторой алгебре множеств. Событие  $A$  изображается множеством  $A$  точек пространства всевозможных «элементарных исходов» рассматриваемого опыта (испытания), и вероятность  $P\{A\}$  события  $A$  — функция множества такая, что если она имеет смысл для множеств  $A_1, \dots, A_n$ , то она может быть определена и для множества, состоящего из всех точек, входящих хотя бы в одно из множеств  $A_1, \dots, A_n$ , а также и для множества точек, входящих сразу во все множества

<sup>1)</sup> Следует отметить, что С. Н. Бернштейн уже в 1917 г. указывал на необходимость аксиоматизации теории вероятностей и предложил конкретный набор аксиом, оказавшийся, однако, заметно менее удобным, чем аксиомы, предложенные А. Н. Колмогоровым.

$A_1, \dots, A_n$  (см. [8, 22]). Эта функция подчинена следующим трем аксиомам:

I. Вероятность  $P\{A\}$  события  $A$  удовлетворяет неравенству  $P\{A\} \geq 0$ .

II. Для достоверного события  $U$  имеет место равенство  $P\{U\} = 1$ .

III. Для взаимно исключающих друг друга событий  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  может быть сколь угодно велико)

$$P\left\{\sum_{k=1}^n A_k\right\} = \sum_{k=1}^n P\{A_k\}.$$

Знак суммы имеет различный смысл слева и справа. Слева он означает, что речь идет о вероятности того, что произойдет хоть какое-то из событий  $A_k$ , так что  $\sum_{k=1}^n A_k$  — это событие ( $A_1$  или  $A_2, \dots$ , или  $A_n$ ), а справа стоит обычная сумма неотрицательных чисел  $P\{A_k\}$ .

«Достоверное событие», о котором идет речь в аксиоме II, отвечает множеству  $U$ , состоящему из всех мыслимых «элементарных исходов», так что все другие события  $A$  представляют собой подмножества  $U$ .

Аксиома III (аксиома сложения) охватывает и случай  $n = \infty$ , в силу чего  $P$  и называется *вполне* аддитивной функцией.

Из аксиом I—III, дополненных определениями ряда связанных с вероятностью понятий (например, понятия случайной величины или понятия математического ожидания), логически вытекает вся теория вероятностей.

Конечно, в аксиомах, определяющих величину  $P$ , нетрудно разглядеть связь этой абстрактной величины с эмпирической относительной частотой, но это *генетическая* связь, касающаяся происхождения аксиом, а не их содержания, из которого все эмпирическое уже исключено. Поэтому, выслушав это абстрактное определение вероятности, физик, инженер, экономист и т. д., т. е. человек, имеющий дело с реальными вещами и явлениями, сразу же спросит, что ему делать с этой вполне аддитивной функцией множеств, как связывать уравнения и формулы математической теории с реальным миром. Ситуация здесь та же, что и во всякой физической теории.

Уравнения и формулы для неких величин, взятые сами по себе, еще не исчерпывают физической теории. Последняя требует, чтобы мы знали, как извлекать из реальных вещей и явлений те числа, которые следует подставлять в математические формулы в качестве значений входящих в них величин, т. е.



знали, как *измерять* эти величины<sup>1)</sup>. Разумеется, физическая теория представляет собой органическое целое, ее математическая и измерительная части никоим образом не независимы друг от друга, но они не заменяют одна другую. Располагая одной, нельзя обойтись без другой. Поэтому для всех физических (и вообще практических) приложений математической теории вероятностей необходимо дополнить последнюю по крайней мере одним (реализуемым и конкретным) *способом измерения* входящей в нее величины  $P$  — вероятности. Естественно обратиться в поисках такого способа, или «аксиомы измерения», к относительной частоте.

Примем, что вероятность события *измеряется* (приближенно, как и при любом измерении) *относительной частотой* его появления в достаточно длинной серии испытаний, осуществляемых при определенных неизменных условиях, в достаточно обширном ансамбле «однородных» систем, т. е. в статистическом опыте. Будучи самостоятельным постулатом, не содержащимся в аксиомах математической теории вероятностей, этот способ не предуказан как единственный и не дает априорных гарантий успеха. Конечно, от него надо заранее требовать, чтобы он был логически совместим с математической теорией. Как мы убедимся далее (§ 19), частотная «аксиома измерения» вероятности этому требованию удовлетворяет. Но приведет ли получающаяся в результате добавления этой аксиомы физическая теория случайных явлений к согласию с опытом — это уже *дальнейший* вопрос, на который может ответить только статистический опыт. Важно, однако, подчеркнуть, что без *какого-либо* способа измерения вероятностей нельзя не только ответить на подобный вопрос, но даже его поставить.

Принимая предложенный способ измерения вероятности, мы отнюдь не отождествляем ее с относительной частотой, как это делает *частотная концепция* вероятности, выдвинутая Р. Мизесом в 1928 г. [24]. Он предложил понимать под вероятностью предел относительной частоты  $n_i/n$  при  $n \rightarrow \infty$  в «статистическом коллективе», т. е. в ансамбле или в серии испытаний, удовлетворяющих некоторым требованиям. Однако такое определение понятия вероятности не могло дать удовлетворительное обоснование для математической теории. Ведь никто не знает, что такое предел эмпирической величины. Если же понимать «предел» в каком-либо вероятностном смысле (§ 19), то мы вновь оказываемся в порочном кругу, так как пытаемся определить понятие вероятности через вероятность.

<sup>1)</sup> Так, по крайней мере, ставит вопрос об измерениях классическая (доквантовая) физика. В уравнениях квантовой механики фигурируют и такие величины, непосредственное измерение которых не является необходимым. (См. в [23] Лекции по основам квантовой механики.)

Еще и поныне в зарубежной литературе пользуется иной раз успехом так называемая *субъективная концепция* вероятности, согласно которой вероятность есть мера нашего незнания. Мы не знаем, какая выпадет грань кости, и *поэтому*  $P = 1/6$ . Если принимать эту точку зрения всерьез, то происходит чудо: из самого незнания якобы рождается некое знание, некое положительное утверждение. В сущности, здесь утверждается, что если распределение неизвестно, то оно равномерно. Конечно, мы вправе испытать и такую гипотезу, с тем чтобы судить о ее пригодности по тем следствиям, к которым она приводит. Но почему именно эту гипотезу надо считать с необходимостью вытекающей из нашего незнания? В случае фальшивой кости мы тоже не знаем, какая выпадет грань, но наше незнание несколько не подвигает нас в установлении правильных значений вероятностей для граней такой кости.

Что касается математической теории, то она попросту не нуждается в том, чтобы распределение возможных исходов было равномерным. Несколько огрубляя положение вещей, можно сказать, что математическая теория вероятностей, вытекающая логически из определенных аксиом, учит тому, как по известным распределениям одних случайных событий или величин находить распределения различным образом связанных с ними других случайных событий или величин. Например, по аксиоме сложения вероятность выпадения четного числа очков есть

$$p_{\text{чет}} = p_2 + p_4 + p_6,$$

независимо от того, одинаковы ли и, вообще, чему равны вероятности  $p_2$ ,  $p_4$  и  $p_6$  выпадения грани с числом очков 2, 4 и 6.

Откуда известны исходные распределения — это вопрос, лежащий за пределами математики. Алгебра, например, учит, как для квадратного уравнения вычислить корни  $x_1$  и  $x_2$ , т. е. как выразить  $x_1$  и  $x_2$  через известные коэффициенты уравнения  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Откуда мы знаем коэффициенты — этим алгебра не интересуется. В сущности, именно внематематический вопрос об источнике исходных распределений и был корнем различных воззрений на вероятность и теорию вероятностей до ее аксиоматизации, т. е. до того, как она раз и навсегда была освобождена от обязанности отвечать на этот вопрос. Ответ на него дает измерение, т. е. статистический опыт.

## § 2. Законы распределения случайных величин

Из сказанного ясно, почему физик (как и любой другой «потребитель» математической теории вероятностей), говоря о вероятности, всегда имеет в виду относительную частоту в статистическом ансамбле, в достаточно обширном статистическом

коллективе. Именно так он интерпретирует и закон распределения вероятностей случайной величины  $\xi$ , т. е. числовой характеристики исхода испытаний. Если возможные значения  $x$  величины  $\xi$  лежат в интервале  $a < x \leq b$  (в частности, в неограниченном интервале  $-\infty < x < \infty$ ), то закон распределения задается *интегральной функцией* распределения

$$W(x) = P\{a < \xi \leq x\}$$

— неотрицательной неубывающей функцией  $x$ , дающей вероятность попадания  $\xi$  в субинтервал  $a < \xi \leq x$  (случайное событие). При этом  $W(a) = 0$ , а по аксиоме II  $W(b) = P\{a < \xi \leq b\} = 1$ .

Если с ростом  $x$  функция  $W(x)$  возрастает скачками высоты  $p_i$  в точках  $x = x_i$ , а между этими точками постоянна (ступенчатая функция), то мы имеем частный случай дискретных возможных значений  $\xi$ , причем  $p_i$  — это вероятность события  $\xi = x_i$ :

$$p_i = P\{\xi = x_i\}.$$

Числа  $p_i$  аналогичны интенсивностям дискретных линий в линейчатом спектре или массам, сосредоточенным в точках  $x_i$  на оси  $x$ , причем полная интенсивность или полная масса равна единице:

$$\sum_i p_i = 1.$$

Если же функция распределения  $W(x)$  дифференцируема, т. е. существует *плотность вероятности*  $w(x) = dW(x)/dx$ , то это означает, что возможна непрерывная совокупность значений  $x$ , причем

$$w(x) dx = P\{x < \xi \leq x + dx\}, \quad \int_a^b w(x) dx = W(b) = 1.$$

Неотрицательная функция  $w(x)$  аналогична плотности интенсивности в сплошном спектре или плотности массы, непрерывно распределенной по интервалу  $(a, b]$  оси  $x$ .

Как сказано, для физика числа  $p_i$  или  $w(x) dx$  — это относительные частоты в статистическом ансамбле, т. е. доля тех реализаций случайного явления в обширном статистическом опыте, которые привели к значениям  $\xi = x_i$  при дискретных возможных значениях или к попаданию  $\xi$  в интервал  $(x, x + dx]$  при непрерывных возможных значениях.

Пусть, например, капелька краски внесена в момент  $t = 0$  в сосуд с водой, причем соблюдены необходимые предосторожности для того, чтобы не возникло движения воды. Тогда дальнейшее поведение капельки будет определяться диффузией

краски. Концентрацию краски  $c(\mathbf{r}, t)$  в любой точке  $\mathbf{r}$  в любой момент  $t > 0$  можно однозначно подсчитать, решив уравнение диффузии с заданными начальными и граничными условиями. Таким образом, это вполне детерминированное явление, подчиненное определенной динамической закономерности. Но если говорить о поведении отдельных частиц или молекул краски, то перед нами статистический опыт. Даже малая капля краски, скажем, объемом в  $10^{-3}$  мм<sup>3</sup>, содержит более  $10^{15}$  молекул. Все они находятся в практически тождественных условиях и совершают в воде хаотическое броуновское движение, которое и приводит к диффузионному расплыванию капли. Следовательно, здесь реализуется весьма обширный ансамбль молекул краски и ее количество  $c(\mathbf{r}, t)d^3r$  в элементе объема  $d^3r = dx dy dz$  в момент  $t$  — это те молекулы, которые случайно оказались к моменту  $t$  в этом элементе объема. Относительная концентрация  $c(\mathbf{r}, t)$  (т. е. нормированная так, что по всему объему сосуда  $\int c(\mathbf{r}, t)d^3r = 1$ ) — это для физика и есть плотность вероятности попадания отдельной молекулы в  $d^3r$  к моменту  $t$ , если движение началось из точки  $\mathbf{r} = 0$  в момент  $t = 0$ . Детерминированное поведение концентрации  $c(\mathbf{r}, t)$  — это проявление устойчивости относительных частот в достаточно обширном ( $10^{15}$ !) ансамбле.

В общем случае распределение вероятностей может быть смешанным — дискретно-непрерывным, — подобно суперпозиции линейчатого и сплошного спектров. Для лаконичной записи, охватывающей единым образом как дискретную, так и непрерывную компоненты, удобно пользоваться интегралом Стильтеса по  $dW(x)$ , где приращение  $dW(x)$  функции распределения на интервале  $(x, x + dx]$  может быть как бесконечно малым (сплошной спектр,  $dW(x) = w(x)dx$ ), так и конечным (дискретный спектр,  $dW(x) = W(x+0) - W(x) = p$ ). С помощью математического понятия интеграла Стильтеса можно, например, записать среднее значение какой-либо детерминированной функции  $f$  от случайной величины  $\xi$  в виде<sup>1)</sup>

$$\langle f(\xi) \rangle = \int_a^b f(x) dW(x), \quad (2.1)$$

независимо от того, дифференцируема функция  $W(x)$  или нет. Физики, однако, предпочитают иную, хотя и менее «строгую»,

<sup>1)</sup> Статистическое усреднение, т. е. усреднение по распределению вероятностей (или, как скажет физик, усреднение по ансамблю), мы будем обозначать угловыми скобками или, когда это будет удобно, просто чертой над усредняемой величиной.

но наглядную трактовку. Считается, что плотность  $w(x)$  имеет смысл везде и, соответственно,

$$\langle f(\xi) \rangle = \int_a^b f(x) w(x) dx. \quad (2.2)$$

В дискретном случае  $w(x)$  переходит в сумму дельта-функций в точках  $x = x_i$  с весами  $p_i$ :

$$w(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i). \quad (2.3)$$

Интеграл (2.2) тотчас приводит тогда к «дискретной» формуле

$$\langle f(\xi) \rangle = \sum_i f(x_i) p_i.$$

Представление (2.3) отвечает не только строго дискретным возможным значениям, но и непрерывным, при условии, что плотность вероятности  $w(x)$  имеет *достаточно острые пики*. Ширина этих пиков должна быть мала по сравнению с масштабами, фигурирующими в данной конкретной задаче. Следует, однако, иметь в виду, что идеализация этих пиков в виде дельта-выбросов, принятая в начале расчета, не всегда приводит к тому же результату, какой получается при переходе к пределу (2.3) уже в окончательных выражениях. С этой оговоркой неслучайную (детерминированную) величину  $\xi$ , достоверно принимающую значение  $x_0$ , можно почти всегда рассматривать как случайную величину с предельно острой плотностью вероятности  $w(x) = \delta(x - x_0)$ . Всякая динамическая теория предстает тогда перед нами как частный случай статистической теории, в которой сделан переход к предельно острым распределениям для величин, с которыми она оперирует. В подобном взгляде нет ничего парадоксального, в особенности после того, как волновая механика уже давно показала, что наиболее фундаментальные законы природы имеют статистический характер, а высказанный в свое время тезис, будто бы «наука — враг случайности», потерпел полный провал.

Практическая трактовка вероятности, как относительной частоты в достаточно обширном ансамбле, охватывает, разумеется, и многомерные случайные величины, т. е. совокупности случайных величин. В приведенном примере диффузии краски случайным был радиус-вектор каждой ее молекулы, т. е. совокупность трех случайных координат молекулы. Более того, в этом примере мы, по сути дела, рассматривали не случайные величины, а случайную функцию: плотность вероятности (концентрация)  $c$  зависла и от времени  $t$ . Такого рода обобщение классической

теории вероятностей будет в дальнейшем находиться в центре нашего внимания. Сейчас важно подчеркнуть лишь то, что и это обобщение не уведет от частотной трактовки законов распределения вероятностей.

Мы обратимся теперь к одному специальному дискретному закону распределения — биномиальному закону, — который не только позволит познакомиться с некоторыми интересными фактами и приложениями, но и послужит для дополнительной подготовки к переходу от случайных величин к случайным функциям.

### § 3. Биномиальный закон распределения

Если выполнение *конечного* числа испытаний можно расположить определенным образом во времени, например, приурочив испытание номера  $\nu$  к моменту времени  $t_\nu = \nu t$  (или как-либо иначе), то мы получим тем самым некоторую *модель случайного процесса*, для рассмотрения которой достаточны представления и методы классической теории вероятностей. В качестве примера рассмотрим хорошо известную задачу теории вероятностей — задачу Бернулли (1713 г.), в которой речь идет о последовательности *независимых* испытаний и которая может служить одной из наиболее ярких иллюстраций того, как одна и та же математическая схема (динамическая или статистическая) охватывает множество совершенно разнородных явлений.

Перечислим ряд конкретных вопросов, непосредственно сводящихся к математической схеме задачи Бернулли. Для части этих вопросов не требуется какой-либо локализации испытаний во времени, другие же допускают или даже предполагают такую локализацию, т. е. касаются процессов, разворачивающихся со временем.

1. Урновая задача. В урне лежат белые и черные шары, причем вероятность вынимания белого шара (событие  $A$ ) есть  $P(A) = p$  и соответственно для черного шара (событие  $\bar{A}$ )  $P(\bar{A}) = q = 1 - p$ . Производится  $N$  испытаний, причем каждый раз вынутый шар кладется обратно и шары перемешиваются (этим обеспечивается независимость испытаний). Какова вероятность  $P_N(n)$  того, что при  $N$  испытаниях *какие-либо*  $n$  раз будет вынут белый шар?

2. Бросание монеты. Какова вероятность того, что при  $N$  бросаниях  $n$  раз выпадет «орел», если вероятность выпадения «орла» при одном бросании есть  $p = 1/2$ ? Или какова вероятность того, что из  $N$  новорожденных  $n$  окажутся мальчиками, если вероятность рождения мальчика  $p = 0,51$ ?

3. Флуктуации плотности. В объеме  $V$  находится  $N$  молекул газа. Вероятность попадания молекулы в выделенный

из  $V$  объем  $v$  (событие  $A$ ) равна  $p$ . Какова вероятность того, что в  $v$  находится  $n$  каких-то молекул?

4. Флуктуации интенсивности. Складываются  $N$  колебаний вида  $a_i \cos \omega t$ , причем  $a_i = \pm a$  с вероятностями  $p$  и  $q$ . Какова вероятность того, что интенсивность суммарного колебания будет равна

$$J(N, n) = [n(+a) + (N - n)(-a)]^2 = (2n - N)^2 a^2,$$

т. е. амплитуда  $+a$  войдет  $n$  раз?

5. Телефонные вызовы. Телефонистка дежурит в течение времени  $T$ . Вероятность того, что за очень малый интервал  $\tau$  произойдет вызов, равна  $p$ . Какова вероятность  $n$  вызовов за все время дежурства?

6. Дробовой эффект в вакууме. Из накаленной нити вылетают электроны, причем вероятность вылета за весьма малое время  $\tau$  есть  $p$ . Какова вероятность того, что за время  $T$  на анод прилетит  $n$  электронов, т. е. поступит заряд  $ne$ ? Если в анодной цепи стоит интегрирующий прибор, суммирующий заряд за время  $T$ , то наш вопрос направлен к выяснению того, что покажет этот прибор в среднем и насколько он будет флуктуировать.

7. Случайные блуждания. Примем следующую модель движения брауновской частицы: она совершает скачки на отрезок  $a$  вправо или влево с вероятностями  $p$  и  $q$ . Какова вероятность того, что за  $N$  скачков частица уйдет на расстояние  $s(N, n) = (2n - N)a$ , т. е. сделает  $n$  шагов вправо? Если здесь  $p = q = 1/2$ , то можно сказать, что это одномерное движение «абсолютно пьяного человека»; если же  $A$  — шаг вправо,  $\bar{A}$  — шаг на месте, то это движение «нерешительного человека».

Три последних вопроса касаются процессов во времени. Они естественным образом связываются с представлением об испытаниях, производимых в последовательные моменты времени.

Общая постановка задачи, следовательно, такова: производится  $N$  независимых испытаний, при каждом происходит одно из противоположных событий  $A$  или  $\bar{A}$ . Какова вероятность того, что за  $N$  испытаний какие-либо  $n$  раз произойдет событие  $A$ ? Хотя решение задачи Бернулли хорошо известно, все же воспроизведем его здесь.

Итак,

$$P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = q = 1 - p.$$

Какова вероятность того, что при  $N$  независимых испытаниях получится последовательность

$$A\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A} \dots A,$$

т. е. на 1-м месте  $A$ , на 2-м месте  $\bar{A}$  и т. д., причем  $A$  произойдет всего  $n$  раз? Ответ очевиден:

$$p q p r r q \dots p = p^n q^{N-n}.$$

Нас интересует событие  $B$ , состоящее в том, что  $A$  произошло  $n$  раз при *каких-то*  $n$  испытаниях из  $N$ . Появление  $n$  раз  $A$  при *определенных* испытаниях — это все частные случаи  $B$ , взаимно исключающие друг друга. По аксиоме сложения

$$P_N(n) = \sum_{\substack{\text{по всем частным} \\ \text{случаям } B}} p^n q^{N-n}.$$

Но число частных случаев  $B$  — это число способов, которыми можно выбрать  $n$  элементов из  $N$ , т. е.  $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ . Следовательно,

$$P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n} \quad (3.1)$$

— закон распределения, называемый *биномиальным*, так как  $P_N(n)$  представляет собой  $n$ -й член разложения бинома  $(p+q)^N = \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^{N-n} = \sum_{n=0}^N P_N(n)$ . Написанная сумма должна быть равна единице, поскольку она выражает вероятность *какого-либо* из возможных значений  $n$ . Очевидно, это так и есть ввиду того, что  $p+q=1$ <sup>1)</sup>.

В более общем случае, когда при каждом испытании возможно наступление одного из  $k$  взаимно исключающих событий  $A_1, A_2, \dots, A_k$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_k$  (разумеется,  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ ), вероятность того, что за  $N$  испытаний событие  $A_i$  произойдет  $n_i$  раз  $\left(\sum_{i=1}^k n_i = N\right)$ , будет выражаться соответствующим членом степенного разложения  $(p_1 + p_2 + \dots + p_k)^N$ , а именно:

$$P_N(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}.$$

<sup>1)</sup> Приведем решение так называемой задачи де Мере: каково должно быть число испытаний  $N$ , чтобы событие  $A$  произошло *хотя бы один раз*? Вероятность наступления  $A$  один, два, три и т. д. раза при  $N$  испытаниях есть

$$P_N = \sum_{n=1}^N P_N(n) = \sum_{n=0}^N P_N(n) - P_N(0) = 1 - q^N = 1 - (1-p)^N.$$

С ростом  $N$  она стремится к единице. Принимая то или иное значение  $P_N$  в качестве «гарантирующей достоверности», нетрудно вычислить соответствующее  $N$ .



Рассмотрим некоторые свойства и следствия биномиального закона распределения.

Если обозначить через  $n_m$  то значение  $n$ , при котором вероятность  $P_N(n)$  максимальна, т. е. *наивероятнейшее* значение  $n$ , то из условия

$$P_N(n_m - 1) \leq P_N(n_m) \geq P_N(n_m + 1)$$

нетрудно получить, что

$$(N + 1)p - 1 \leq n_m \leq (N + 1)p.$$

Таким образом, имеется либо одно, либо два оптимальных значения. Если  $Np \gg 1$ , то

$$n_m \approx Np. \quad (3.2)$$

Найдем теперь *среднее* значение  $\bar{n}$  и *дисперсию*  $D[n] \equiv \sigma_n^2 \equiv \overline{(\Delta n)^2} \equiv \bar{n}^2 - \bar{n}^2$ . Для момента  $k$ -го порядка имеем

$$\begin{aligned} \bar{n}^k &= \sum_{n=0}^N n^k P_N(n) = \sum_{n=0}^N C_N^n n^k p^n q^{N-n} = \\ &= p \underbrace{\frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} \dots}_{k \text{ раз}} \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^{N-n} = \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right)^k (p+q)^N. \end{aligned}$$

После того как оператор  $p \frac{\partial}{\partial p}$  применен  $k$  раз, нужно учесть в полученном результате, что  $p+q=1$ . В частности,

$$\bar{n} = p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N = pN (p+q)^{N-1} = pN, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{n}^2 &= p \frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N = p \frac{\partial}{\partial p} pN (p+q)^{N-1} = \\ &= pN [(p+q)^{N-1} + p(N-1)(p+q)^{N-2}] = pN [1 + p(N-1)], \end{aligned} \quad (3.4)$$

и, следовательно,

$$\sigma_n^2 = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = Npq. \quad (3.5)$$

Заметим, что при больших  $N$  среднее значение  $\bar{n}$  совпадает, согласно (3.2), с *наивероятнейшим*. Что касается дисперсии  $\sigma_n^2$ , то она растет с числом испытаний  $N$  так же, как и среднее значение, т. е. пропорционально  $N$ . Поэтому среднее *относительное* отклонение

$$\frac{\sigma_n}{\bar{n}} = \sqrt{\frac{q}{pN}}$$

с ростом  $N$  убывает. Таким образом, с увеличением  $N$  флуктуации растут, но относительные флуктуации падают,

### § 4. Примеры применения биномиального закона

Для уяснения физического смысла полученных результатов полезно обратиться к некоторым из поставленных выше конкретных задач.

Рассматривая газ в сосуде ( $N$  молекул в объеме  $V$ ), мы примем, что вероятность попадания молекулы в объем  $v$  есть  $p = v/V$ . Плотность газа в объеме  $v$  будет  $\rho_v = n/v$ . Следовательно,

$$\bar{\rho}_v = \frac{\bar{n}}{v} = \frac{pN}{v} = \frac{N}{V} \equiv \bar{\rho} = \text{const},$$

т. е. в среднем плотность равномерна.

Дисперсия  $n$  определяет интенсивность флуктуаций плотности<sup>1)</sup>:

$$D[\rho_v] = D\left[\frac{n}{v}\right] = \frac{1}{v^2} D[n] = \frac{Npq}{v^2} = \frac{N}{vV} \left(1 - \frac{v}{V}\right),$$

или

$$D[\rho_v] \equiv \overline{(\Delta\rho_v)^2} = \bar{\rho} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V}\right).$$

Таким образом, абсолютные флуктуации плотности растут с уменьшением рассматриваемого объема  $v$  и с увеличением средней плотности, т. е. увеличением общего числа молекул  $N$  в объеме  $V$ . Обычно представляет интерес случай  $v \ll V$ , так что членом  $1/V$  можно пренебречь.

Что касается относительных флуктуаций, то

$$\frac{\overline{(\Delta\rho_v)^2}}{\bar{\rho}^2} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V}\right) \approx \frac{1}{\bar{\rho}v},$$

т. е. они тоже растут с уменьшением  $v$ , но падают с увеличением  $\bar{\rho}$ .

Отметим, в чем именно здесь заключается независимость испытаний. Мы приняли, что вероятность попадания молекулы в объем  $v$  равна  $p = v/V$  независимо от того, имеются ли и в каком количестве другие молекулы внутри или вне  $v$ . Другими словами, газ считается идеальным. При учете конечного объема молекул и их взаимодействия этого уже не будет: вероятность  $p$  при данном испытании (вероятность попадания *данной* молекулы в объем  $v$ ) будет зависеть от исходов остальных испытаний.

Рассмотрим теперь задачу о сложении колебаний. Биномиальный закон (3.1) выражает вероятность того, что  $n$  из  $N$  складываемых колебаний имеют амплитуду  $+a$ . Тем самым  $P_N(n)$

<sup>1)</sup> Как известно,  $D[ax + b] = a^2 D[x]$ .

есть вероятность значения результирующей интенсивности

$$J \equiv J(N, n) = (2n - N)^2 a^2.$$

Следовательно, средняя интенсивность будет

$$\bar{J} = \overline{(2n - N)^2} a^2 = (4\bar{n}^2 - 4N\bar{n} + N^2) a^2 = N^2 a^2 \left[ 1 + 4pq \left( \frac{1}{N} - 1 \right) \right].$$

Если  $p = q = 1/2$ , то  $\bar{J} = Na^2$ , т. е. интенсивности складываются (полная некогерентность). При  $p = 1$  или  $q = 1$  получается  $\bar{J} = N^2 a^2$  (полная когерентность).

Дисперсия  $J$  есть

$$D[J] = \bar{J}^2 - \overline{J^2} = \overline{(2n - N)^4} a^4 - \bar{J}^2.$$

Таким образом, вычисление *флуктуаций интенсивности* — величины, квадратичной относительно  $n$ , — требует нахождения моментов  $n$  высших порядков, а именно  $\bar{n}^3$  и  $\bar{n}^4$ . Способ вычисления  $\bar{n}^k$  для распределения Бернулли уже был указан:  $k$ -кратное применение оператора  $p \frac{\partial}{\partial p}$  к биному  $(p + q)^N$ . Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат для случая полной некогерентности, когда  $p = q = 1/2$  и соответственно  $\bar{J} = Na^2$ . В этом случае дисперсия получается равной

$$D[J] \equiv \overline{(\Delta J)^2} = 2N(N - 1) a^4,$$

так что относительная флуктуация интенсивности будет

$$\sqrt{\frac{\overline{(\Delta J)^2}}{\bar{J}^2}} = \sqrt{2 \left( 1 - \frac{1}{N} \right)}.$$

С ростом  $N$  относительная флуктуация вовсе не уменьшается, а, напротив, растет, приближаясь к значению  $\sqrt{2}$ . Таким образом, никакого «сглаживания» относительных флуктуаций здесь нет: при сложении двух колебаний относительная флуктуация интенсивности меньше, чем при сложении тысячи.

Привычное представление о «сглаживании» связано с моментом *второго* порядка. Если «шум» зависит от моментов высших порядков, то его роль может усиливаться с ростом  $N$ .

В этой связи следует остановиться на том, что называть «шумом» в том случае, когда прибор, например, квадратичен, т. е. измеряет не  $n$ , а  $n^2$ . Измеритель величины  $\xi = n^2$  показывает  $\bar{\xi} = \bar{n}^2$ . Он не обнаруживает никакого  $\xi$ -шума, хотя  $D[n] = \overline{n^2} - \bar{n}^2 \neq 0$ , т. е. само  $n$  флуктуирует. Шум для « $\xi$ -метра» определяется величиной  $D[\xi] = \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 = \overline{n^4} - (\bar{n}^2)^2$  и связан, таким образом, с «флуктуацией флуктуации»  $n$ .

Отсюда видно, что причисление явления к флуктуационным или нефлуктуационным существенно зависит от того, какой величиной это явление характеризовать, — обстоятельство, подчеркнутое М. А. Леонтовичем ([25], § 34; см. также [26]). Пусть, например, речь идет об энергии  $U$  теплового излучения, заключенного в некотором объеме  $V$ . Она флуктуирует около своего среднего значения  $\bar{U}$ , так что дисперсия

$$D[U] = \bar{U}^2 - \bar{U}^2$$

есть мера интенсивности флуктуаций  $U$ . Но с точки зрения электродинамики энергия  $U$  равна интегралу от суммы квадратов напряженностей электрического и магнитного полей:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V (E^2 + H^2) dV,$$

и, следовательно,

$$\bar{U} = \frac{1}{8\pi} \int_V (\bar{E}^2 + \bar{H}^2) dV.$$

Заметим теперь, что средние значения напряженностей в поле теплового излучения равны нулю ( $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{H}} = 0$ ), так что  $\bar{E}^2 = D[\mathbf{E}]$ ,  $\bar{H}^2 = D[\mathbf{H}]$  и

$$\bar{U} = \frac{1}{8\pi} \int_V (D[\mathbf{E}] + D[\mathbf{H}]) dV,$$

т. е. сама средняя энергия  $\bar{U}$  есть мера интенсивности флуктуаций  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Таким образом, мы имеем следующее расхождение терминологии при двух подходах:

1) *Энергетический подход*

Величина  $U$  со средним значением  $\bar{U}$ .

Флуктуация  $(\Delta U)^2$ .

2) *Электродинамический подход*

Величины  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  со средними значениями, равными нулю.

Флуктуация полей  $\bar{U}$ .

«Флуктуация флуктуации»  $(\Delta U)^2$ .

Обратимся теперь к задачам, в которых процесс «испытаний» развертывается во времени, и в качестве первого примера возьмем описанную выше модель брауновского движения. Смещение частицы вправо за  $N$  шагов на величину

$$s = s(N, n) = (2n - N)a$$

имеет вероятность  $P_N(n)$ . Следовательно,

$$\bar{s} = (2\bar{n} - N)a = N(p - q)a,$$

т. е. в изотропном случае ( $p = q = 1/2$ ) среднее смещение будет  $\bar{s} = 0$ .

Разброс около  $\bar{s}$ , определяемый дисперсией, есть

$$D[s] = \overline{s^2} - \bar{s}^2 = D[2na - Na] = D[2na] = 4a^2 D[n] = 4a^2 Npq.$$

В изотропном случае, когда  $\bar{s} = 0$ , и  $D[s] = \overline{s^2}$ , получаем

$$\overline{s^2} = Na^2.$$

Если скачки происходят через равные промежутки времени  $\tau$ , так что  $t = N\tau$  — полное время, протекшее от начального момента, то

$$\overline{s^2} = \frac{a^2}{\tau} t.$$

Это — так называемая *диффузионная* зависимость пути от времени. В дальнейшем нам еще придется остановиться на связи рассматриваемой статистической схемы с диффузией. Мы увидим также, что простая рассмотренная модель представляет интерес и для радиофизики, будучи самым непосредственным образом связана с вопросом о флуктуациях фазы в автоколебательных системах.

### § 5. Дробовой эффект. Распределение Пуассона

Рассмотрим в заключение задачу о дробовом эффекте, вполне аналогичную задаче о телефонных вызовах.

Мы по-прежнему принимаем, что при каждом испытании вероятность события  $A$  (в данном случае это вылет электрона из катода в течение некоторого малого времени  $\tau$ ) имеет одно и то же значение  $p$ , не зависящее ни от исходов остальных испытаний, ни от номера рассматриваемого испытания, т. е. от эмиссии и присутствия других электронов и наличия объемного заряда. С учетом объемного заряда, вызывающего явление так называемой депрессии (подавления) дробового эффекта, задача существенно усложняется.

Перелет электрона от катода к аноду создает импульс анодного тока, длительность которого порядка времени пролета (в обычных электронных лампах — порядка  $10^{-9}$  сек), а интегральное значение равно заряду электрона  $e$ . Если средний анодный ток составляет, скажем,  $5$  ма, то каждую секунду на анод поступает примерно  $3 \cdot 10^{16}$  электронов. Отсюда ясно, что импульсы анодного тока густо перекрываются. Если бы они следовали вплотную друг за другом, но без перекрытия, то пролет указанного количества электронов занял бы около года. Но для нас сейчас нет необходимости рассматривать степень перекрытия импульсов, равно как и их форму. Под событием  $A$  мы будем понимать мгновенный акт вылета электрона из катода, т. е. *начало импульса* анодного тока.

Нас интересует заряд, поступивший на анод за некоторое время  $T = N\tau$ , где каждый интервал  $\tau$  — это одно из  $N$  испытаний, в результате которого констатируется либо наличие вылета в интервале  $\tau$  (с вероятностью  $p$ ), либо его отсутствие. Сразу же возникает вопрос о том, как быть с теми интервалами  $\tau$ , в которых оказалось два или более вылетов. Интуитивно ясно, что вероятность вылета  $p$  должна убывать с уменьшением  $\tau$ . Тогда при все более мелком дроблении промежутка времени  $T$  на части  $\tau = T/N$  вероятности двукратного, трехкратного и т. д. вылетов за время  $\tau$  будут уменьшаться, как величины соответственно второго, третьего и т. д. порядка малости относительно  $\tau$ . Мы можем поэтому рассчитывать на то, что при достаточно больших  $N$  (а никаких ограничений в этом отношении нет) для подавляющей доли интервалов  $\tau$  имеет место простая альтернатива: либо произошел один вылет (вероятность  $p$ ), либо интервал пустой (вероятность  $q = 1 - p$ ). Тем самым задача приводится к схеме Бернулли, и мы получаем, что вероятность  $n$  вылетов за время  $T$  (за  $N$  испытаний) есть  $P_N(n)$ . Сила тока в среднем за время  $T$  равна <sup>1)</sup>

$$I_T = \frac{ne}{T}.$$

Среднее значение тока  $I_T$  будет

$$\bar{I}_T = \frac{\bar{n}e}{T} = \frac{epN}{T} \equiv \bar{I}, \quad (5.1)$$

интенсивность флуктуаций  $I_T$  (дисперсия) —

$$D[I_T] \equiv \overline{(\Delta I_T)^2} = D\left[\frac{ne}{T}\right] = \frac{e^2}{T^2} D[n] = \frac{e^2 N p q}{T^2},$$

а относительное квадратичное отклонение —

$$\frac{\overline{(\Delta I_T)^2}}{\bar{I}_T^2} = \frac{q}{Np}.$$

Но в таком виде полученные результаты не могут претендовать на физическую значимость, так как они зависят от произвольного числа испытаний  $N$ .

Естественно, напрашивается предельный переход  $N \rightarrow \infty$ , осуществляемый при условии, что средняя сила тока  $\bar{I}$  фиксирована, т. е.

$$\bar{I} = n_1 e = \text{const},$$

<sup>1)</sup> В примере с плотностью газа мы полагали  $\rho_v = n/v$ , т. е. вводили величину, усредненную по рассматриваемой области  $v$ . Там это была область пространства, здесь — промежуток времени  $T$ .

где  $n_1$  — среднее число электронов, вылетающих за одну секунду. Согласно (5.1) это означает, что вероятность  $p$  вылета электрона за интервал времени  $\tau$  должна быть связана с  $N$  следующим образом:

$$p = \frac{n_1 T}{N} = n_1 \tau,$$

т. е.  $p$  должно стремиться к нулю вместе с  $\tau$ . Подставив  $p = n_1 T/N$  и  $q = 1 - n_1 T/N$  в выражение для  $D[I_T]$  и перейдя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , получаем теперь

$$\overline{(\Delta I_T)^2} = \frac{e\bar{I}}{T}, \quad \frac{\overline{(\Delta I_T)^2}}{\bar{I}^2} = \frac{e}{\bar{I}T}. \quad (5.2)$$

С ростом времени усреднения  $T$  флуктуации тока уменьшаются как абсолютно, так и относительно. С увеличением среднего тока  $\bar{I}$  происходит абсолютное усиление флуктуаций, но относительное их сглаживание. Формулы (5.2) — это основные формулы дробового эффекта без объемного заряда (без депрессии). Они явным образом отражают тот факт, что флуктуации тока — это следствие дискретности электрического заряда.

Дробовой эффект дает пример такой задачи, когда целесообразно считать, что число испытаний  $N$  за время  $T$  неограниченно растет, но при этом среднее число наступлений события  $A$  за единицу времени  $n_1$ , а значит и среднее их число за время  $T$ , т. е.  $\bar{n} = n_1 T$ , остается конечным. Тем самым вероятность  $A$  при отдельном испытании

$$p = \frac{n_1 T}{N} = \frac{\bar{n}}{N}$$

с ростом  $N$  стремится к нулю, т. е. в подавляющей доле испытаний событие  $A$  не наступает.

Во всех задачах такого типа (к ним относится и задача о телефонных вызовах, о сцинтилляциях, об ожидании трамвая, о соударениях молекул между собой или об их ударах о стенку и т. п.) напрашивается переход от общей формулы для  $P_N(n)$  к предельному выражению при  $N \rightarrow \infty$  и  $p \rightarrow 0$ , но фиксированном  $\bar{n}$ .

Заменяя в (3.1)  $p$  через  $\bar{n}/N$ , получаем

$$\begin{aligned} P_N(n) &= \frac{N(N-1)\dots[N-(n-1)]}{n!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = \\ &= \frac{\bar{n}^n}{n!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}. \end{aligned}$$

В пределе при  $N \rightarrow \infty$  для вероятности  $n$  отсюда следует закон распределения Пуассона:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}. \quad (5.3)$$

Единственный параметр  $\bar{n}$ , входящий в этот закон, представляет собой именно среднее значение  $n$ , т. е.  $\sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = \bar{n}$ . Все моменты высших порядков, конечно, тоже выражают через  $\bar{n}$  и, в частности,

$$\bar{n}^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}, \quad \bar{n}^3 = \bar{n}^3 + 3\bar{n}^2 + \bar{n}.$$

Заметим, что если с самого начала считать вероятность наступления события  $A$  за время  $dt$  равной  $n_1 dt$  ( $dt$  вместо прежнего  $\tau$ ), то с точностью до величин второго порядка малости относительно  $dt$  совершенно строго получается закон Пуассона.

Легко видеть, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1,$$

как это и должно быть. Разумеется, среднее значение  $\bar{n}$  и стандарт  $\sigma_n$ , вычисленные при помощи распределения Пуассона, можно получить и посредством предельного перехода из выражений для этих величин, даваемых биномиальным законом, а именно:

$$\bar{n} = pN = n_1 T, \quad \sigma_n = \sqrt{Npq} = \sqrt{\bar{n}(1-p)} \rightarrow \sqrt{\bar{n}}.$$

С равномерным распределением вероятности события  $A$  ( $p = n_1 dt$ , где  $n_1 = \text{const}$ ) однозначно связан не только закон Пуассона, дающий вероятность того или иного числа  $n$  осуществлений события  $A$  за время  $T$ , но и вполне определенный (экспоненциальный) закон распределения для промежутка времени  $t$  от произвольно выбранного момента до *первого* наступления события  $A$ . Подойдем к этой задаче, отпрявляясь снова от схемы Бернулли.

Вероятность  $\omega(t)\Delta t$  осуществления двух независимых событий — того, что интервал  $(0, t)$  «пустой» и что в интервале  $(t, t + \Delta t)$  событие  $A$  произошло хотя бы один раз, — равна произведению вероятностей этих событий. Разобьем ось  $t$  на малые интервалы длины  $\tau$ , и пусть  $N$  таких интервалов содержится в  $(0, t)$ , так что  $t = N\tau$ , и  $\Delta N$  — в  $\Delta t$  ( $\Delta N = \frac{\Delta t}{\tau} = \frac{\Delta t}{t} N$ ). Вероятность «пустого» интервала  $(0, t)$  равна, следовательно,

$$q^N = (1-p)^N = (1-n_1\tau)^N = \left(1 - \frac{n_1 t}{N}\right)^N,$$

а вероятность *хотя бы одного* наступления  $A$  в  $\Delta t$  равна (см. сноску на стр. 27)

$$1 - (1-p)^{\Delta N} = 1 - \left(1 - \frac{n_1 t}{N}\right)^{\frac{\Delta t}{t} N}.$$



В пределе при  $N \rightarrow \infty$  первая вероятность переходит в  $e^{-n_1 t}$ , а вторая — в  $1 - e^{-n_1 \Delta t}$ , т. е. с точностью до первого порядка относительно  $\Delta t$  — в  $n_1 \Delta t$ . В результате получаем<sup>1)</sup>

$$w(t) = n_1 e^{-n_1 t}. \quad (5.4)$$

Согласно (5.4) среднее время ожидания есть

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t w(t) dt = \frac{1}{n_1},$$

что можно было написать сразу, исходя из определения  $n_1$ . Следует подчеркнуть, что момент, от которого отсчитывается время  $t$ , ничем не выделен. В частности, это может быть момент наступления события  $A$ , и тогда  $t$  будет промежутком времени между двумя осуществлениями  $A$  (соударениями молекул, телефонными вызовами, вылетами электронов и т. д.)<sup>2)</sup>.

### § 6. Предельная теорема Муавра — Лапласа

Другой предельный случай биномиального закона при  $N \rightarrow \infty$  получается тогда, когда  $p$  не стремится к нулю, а имеет определенное значение, отличное от нуля и единицы. Тем самым с ростом  $N$  растет также и  $\bar{n} = pN$ . Этот переход дается так называемой *локальной предельной теоремой*, доказанной Муавром (1730 г.) для альтернативы с  $p = q = 1/2$ , а затем Лапласом — для альтернативы с любыми  $p$  и  $q$  (конечно,  $p + q = 1$ ). Мы не будем рассматривать общий случай предельного перехода для  $P_N(n_1, n_2, \dots, n_k)$ , а ограничимся условиями теоремы Лапласа.

Формулируем первоначально какую-либо физическую задачу, для которой указанный предельный переход был бы естественным. Вполне подходящей для этого является уже рассмотренная модель брауновского движения. За  $N$  шагов частица

<sup>1)</sup> При проведенном предельном переходе мы перестаем следить за номерами испытаний, переносим внимание на фиксированный интервал времени  $\Delta t$ , в пределах которого число испытаний и их номера неограниченно растут вместе с  $N$ . Примером такого же изменения точки зрения, говоря гидродинамическим языком, с «материальной» на «локальную» может служить и часто используемый способ перехода от ряда к интегралу Фурье, когда вместо номеров (или частот) дискретных гармоник фиксируется частотный интервал  $\Delta\omega$ .

<sup>2)</sup> На первый взгляд это кажется странным. Кажется естественным, что если мы подошли к остановке трамвая как раз в тот момент, когда вагон уходит, то следующего трамвая придется ждать дольше, чем в том случае, когда мы приходим в промежуток между трамваями. Однако при отсутствии какого-либо расписания движения трамваев это неверно (см. [27], где рассмотрен вопрос о времени между соударениями молекул).

удаляется от начального положения на расстояние  $s(N, n) = (2n - N)a$  с вероятностью  $P_N(n)$ . Если шаг занимает время  $\tau$ , то расстояние  $s(N, n)$  проходится за время  $t = N\tau$ . Ввиду малости  $\tau$  реальным условиям наблюдения соответствуют промежутки времени  $t$ , охватывающие колоссальное количество  $N$  элементарных перемещений  $\pm a$ . Однако вероятности  $p$  и  $q = 1 - p$  перемещений  $+a$  и  $-a$  характеризуют рассматриваемую систему и не зависят от наблюдаемого числа шагов  $N$ . Таким образом, для всякого  $t \gg \tau$  здесь целесообразно пользоваться асимптотическим выражением  $P_N(n)$  при весьма больших  $N$ , но при фиксированном  $p$ .

Локальная теорема Муавра — Лапласа утверждает следующее:

*Если вероятность  $p$  события не зависит от номера испытания и отлична от 0 и 1, то вероятность  $P_N(n)$  дается при больших  $N$  асимптотическим выражением*

$$L_N(n) = \frac{e^{-x_n^2/2}}{\sqrt{2\pi Npq}}, \quad \text{где } x_n = \frac{n - pN}{\sqrt{Npq}}, \quad (6.1)$$

причем с ростом  $N$   $L_N(n)/P_N(n) \rightarrow 1$  равномерно для всех  $n$ , при которых  $x_n$  находится в конечном интервале, т. е.  $|x_n| < M$ , где  $M$  — некоторое положительное число.

Нетрудно убедиться, что распределение Лапласа (6.1) дает то же среднее значение  $\bar{n} = pN$  и дисперсию  $\sigma^2 = Npq$ , что и биномиальный закон. Можно поэтому записать  $L_N(n)$  в виде

$$L_N(n) = \frac{e^{-(n - \bar{n})^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}. \quad (6.2)$$

С ростом  $N$  происходит абсолютное расплывание, но относительное обострение распределения  $L_N(n)$ . Если фиксировать среднее значение и считать, что  $\sigma$  меняется независимо, то при  $\sigma \rightarrow 0$  распределение становится все острее, переходя в дельта-функцию.

Отметим, что аппроксимация распределения  $P_N(n)$  посредством  $L_N(n)$  при возрастании  $N$  становится весьма точной очень быстро (и тем быстрее, чем ближе  $p$  к  $1/2$ ). Если ввести  $\eta = P_N(n)/L_N(n)$ , то при  $p = 1/2$  имеем, например,

$N$	$n$	$\eta$
25	15	1,0065
100	55	1,0030
1150	595	1,0001

На рис. 1 дан график, показывающий для частного случая  $n = \bar{n}$ , в каких областях плоскости  $(\bar{n}, 1/p)$  применимы полученные приближения. В области со штриховкой, наклоненной вправо,  $P_N(\bar{n})$  превышает  $P(\bar{n})$  не более чем на 1%, а в области со штриховкой, наклоненной влево,  $P_N(\bar{n})$  меньше, чем  $L_N(\bar{n})$ , тоже не более чем на 1%. Следует заметить, что вследствие выбора  $n = \bar{n}$  граничные кривые, строго говоря, имеют смысл только при целочисленных  $\bar{n}$ .

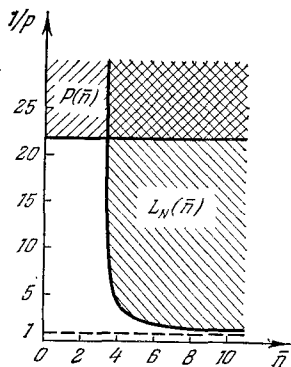


Рис. 1.

В верхнем правом углу графика пригодны обе асимптотические формулы, причем формула Лапласа удобней, так как она не содержит факториалов. В этой области — малых  $p$  и не слишком малых  $\bar{n}$  — распределение Лапласа тоже зависит только от одного параметра  $\bar{n}$ , поскольку при  $p \rightarrow 0$

$$\sigma^2 = Npq \rightarrow Np = \bar{n}.$$

Таким образом, распределение Лапласа может быть записано здесь в виде

$$L_N(n) = \frac{e^{-(n-\bar{n})^2/2\bar{n}}}{\sqrt{2\pi\bar{n}}}. \quad (6.3)$$

## § 7. Нормальный или гауссов закон распределения

В области применимости распределения Лапласа количество произведенных испытаний  $N$ , в сущности, уже не представляет интереса. Заранее известно, что за данное время  $t$  брауновская частица совершила чрезвычайно большое количество  $N$  (не существенно — какое именно) очень малых перемещений, и важно только распределение результирующего перемещения  $s$  (или результирующей амплитуды в задаче о сложении колебаний со случайными амплитудами  $\pm a$ ). Поэтому здесь также целесообразно перейти к «локальному» описанию<sup>1)</sup>, т. е. к непрерывному распределению  $w(s)ds$ , дающему вероятность попадания  $s$  в интервал  $(s, s + ds)$ .

Какова вероятность того, что  $x_n$  лежит в интервале  $(x, x + \Delta x)$ ? Этому интервалу  $x_n$  отвечает интервал  $n$  от  $n = \bar{n} + \sigma x$  до  $n = \bar{n} + \sigma(x + \Delta x)$ , т. е. в нем укладывается  $\sigma \Delta x = \sqrt{Npq} \Delta x$  значений  $n$ . Это число растет, как  $\sqrt{N}$ , в то

<sup>1)</sup> См. сноску <sup>1)</sup> на стр. 36.

время как относительная ширина интервала убывает, как

$$\frac{\sigma \Delta x}{\bar{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Все значения  $L_N(n)$  для  $n$ , попадающих в интервал ширины  $\sigma \Delta x$ , практически одинаковы, а реализация любого из них является одним из взаимно исключающих частных случаев интересующего нас события. Поэтому, согласно аксиоме сложения, получаем

$$P\{x < x_n \leq x + \Delta x\} = \sum_{\bar{n} + \sigma x}^{\bar{n} + \sigma(x + \Delta x)} L_N(n) = L_N(n) \sigma \Delta x = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \Delta x \quad (7.1)$$

— *нормальный* или *гауссов* закон распределения.

Теорему Муавра — Лапласа можно, следовательно, формулировать и так: биномиальный закон с  $0 < p < 1$  переходит при  $N \rightarrow \infty$  в нормальный закон для  $x$ , причем равномерно для любых конечных  $x$ .

Закон (7.1) получен для так называемой *нормированной* случайной величины

$$x_n = \frac{n - \bar{n}}{\sqrt{D[n]}} ,$$

т. е. такой, у которой среднее значение равно нулю ( $\bar{x}_n = 0$ ), а дисперсия равна единице ( $D[x_n] = 1$ ). Если переписать гауссово распределение для ненормированной величины  $y$  со средним значением  $\bar{y}$  и с дисперсией  $D[y] = \sigma^2$ , то, поскольку  $x = (y - \bar{y})/\sigma$ , получим

$$w(y) dy = \frac{e^{-(y-\bar{y})^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dy. \quad (7.2)$$

В частности, для перемещения  $s$  за время  $t$  при изотропном блуждании брауновской частицы мы нашли ранее (стр. 32), что  $\bar{s} = 0$ ,  $D[s] = \bar{s}^2 = Bt$ , где  $B = a^2/\tau$  — коэффициент диффузий. Следовательно,

$$w(s) ds = \frac{e^{-s^2/2Bt}}{\sqrt{2\pi Bt}} ds. \quad (7.3)$$

В начальный момент  $t = 0$  плотность  $w(s)$  превращается в  $\delta(s)$  (частица с достоверностью находится в точке  $s = 0$ ), а затем — с ростом  $t$  — происходит неограниченное расплывание распределения, как показано на рис. 2.

Нетрудно подсчитать, что для распределенной по нормальному закону (7.2) случайной величины  $y$  центральные моменты

имеют следующие значения:

$$\gamma_k = \overline{(y - \bar{y})^k} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ 1 \cdot 3 \dots (k-1) \sigma^k & \text{при } k \text{ четном.} \end{cases}$$

Как уже было отмечено, распределение Гаусса имеет очень большое и очень общее значение. Задача Бернулли при больших  $N$  и  $\bar{n}$  — лишь одна из многих, приводящих к этому распределению. В дальнейшем мы еще обратимся к тем причинам, которые обуславливают особую роль и широкое распространение нормального закона. Здесь же достаточно напомнить следующее.

Вероятность состояния  $X$  ( $X$  — совокупность обобщенных координат  $q$  и импульсов  $p$ ) для системы в термостате с энергетической температурой  $\Theta = kT$  ( $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг/град — постоянная Больцмана) дается так называемым каноническим распределением Гиббса:

$$\omega(X) dX = e^{-\frac{\Psi - H(X)}{\Theta}} dX, \quad (7.4)$$

где  $\Psi$  — свободная энергия,  $H(X)$  — гамильтониан системы. В тех случаях, когда  $H$  — неотрицательная билинейная форма, мы имеем именно гауссово (многомерное) распределение. Для

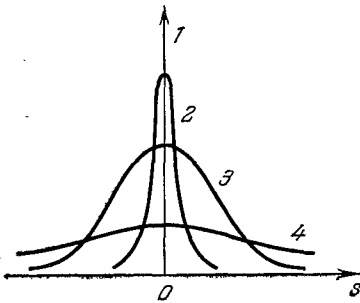


Рис. 2.

кинетической энергии, дающей распределение по скоростям, это справедливо всегда. Так, для одной частицы в силу того, что ее кинетическая энергия есть  $\frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ , из (7.4) следует нормальное распределение для  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , т. е. максвелловское распределение:

$$\omega(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = A e^{-\frac{m}{2\Theta}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z.$$

Отсюда для распределения абсолютной величины скорости  $v$  вытекает закон

$$\omega(v) dv = B e^{-\frac{mv^2}{2\Theta}} v^2 dv, \quad (7.5)$$

уже не являющийся нормальным.

Иногда вызывает недоумение следующий парадокс. Согласно (7.5) сколь угодно большие значения  $v$  имеют конечную вероятность

$$P\{v > v_0\} = B \int_{v_0}^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2\Theta}} v^2 dv.$$

Следовательно, конечную вероятность имеет и тот заведомо невозможный случай, когда одна молекула обладает кинетической энергией, превышающей энергию всего газа (всего термостата). Дело здесь как раз в предельном переходе от очень больших, но конечных  $N$  к  $N \rightarrow \infty$ . Ведь для  $n$  в биномиальном законе возможны значения только от 0 до  $N$ , распределения же Пуассона и Лапласа допускают любые  $n$ . При переходе от  $L_N(n)$  к непрерывному нормальному распределению верхняя граница отсутствует и для  $x$ .

Если рассматриваемая физическая система находится вблизи устойчивого состояния равновесия, совершая малые отклонения от него (флуктуации), то во многих случаях можно считать и потенциальную энергию  $U(q)$  неотрицательной квадратичной формой, т. е. распределение координат тоже гауссово.

Поясняя роль нормального распределения, мы сослались на примеры распределений Гиббса и Максвелла, т. е. на распределения, характеризующие систему случайных величин. Это естественное обобщение — переход от одной случайной величины к совокупностям таких величин и соответственно от одномерного распределения к многомерным — существенно как для непосредственных приложений, так и в качестве очередного шага на пути к теории случайных процессов. Достаточно заметить, что довольно часто используется способ задания случайной функции как *детерминированной* функции  $t$  и некоторой системы случайных параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ :

$$\xi(t) = f(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Переход от одной случайной величины к системе таких величин особенно важен еще и потому, что именно здесь входит понятие о *статистической зависимости* между случайными величинами. Напомним, что означает статистическая независимость.

Пусть  $x_k$  — возможные значения случайной величины  $\xi_k$ . Величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  называются попарно независимыми (или, как еще говорят, независимыми в совокупности), если их совместная функция распределения распадается на произведение функций распределения каждой из них:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = W_{\xi_1}(x_1) \cdot W_{\xi_2}(x_2) \dots W_{\xi_n}(x_n).$$

Очевидно, такая же формула справедлива при этом и для плотностей вероятности:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_{\xi_1}(x_1) \cdot w_{\xi_2}(x_2) \dots w_{\xi_n}(x_n),$$

а любой смешанный момент порядка  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  распадается на произведение моментов:

$$\langle \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_n^{m_n} \rangle = \langle \xi_1^{m_1} \rangle \langle \xi_2^{m_2} \rangle \dots \langle \xi_n^{m_n} \rangle.$$

В частности, для двух независимых случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  имеем

$$\overline{\xi\eta} = \bar{\xi} \cdot \bar{\eta}.$$

Однако обращение разности  $\overline{\xi\eta} - \bar{\xi} \cdot \bar{\eta}$  в нуль еще не означает статистической независимости  $\xi$  и  $\eta$ . Статистическая связь между  $\xi$  и  $\eta$ , мерой которой служит разность  $\overline{\xi\eta} - \bar{\xi} \cdot \bar{\eta}$ , называется *корреляцией* случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ . Во многих случаях удобно пользоваться симметричной и безразмерной мерой корреляции — *коэффициентом корреляции*, который определен как

$$K_{\xi\eta} = \frac{\overline{\xi\eta} - \bar{\xi} \cdot \bar{\eta}}{\sqrt{D[\xi] \cdot D[\eta]}} = \frac{\overline{\xi\eta} - \bar{\xi} \cdot \bar{\eta}}{\sqrt{(\overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2)(\overline{\eta^2} - \bar{\eta}^2)}}. \quad (7.6)$$

Нетрудно видеть, что при линейной связи  $\eta = a\xi + b$  имеем  $K_{\xi\eta} = 1$ . Легко также показать, что всегда  $|K_{\xi\eta}| \leq 1$ . При  $K_{\xi\eta} = 0$  говорят, что величины  $\xi$  и  $\eta$  некоррелированы, при  $K_{\xi\eta} < 0$  корреляция отрицательна, а случай  $K_{\xi\eta} = -1$  иногда (не очень удачно) называют антикорреляцией. Статистическая независимость случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  влечет за собой их некоррелированность, но обратное в общем случае неверно.

Среднее значение суммы случайных величин всегда равно сумме их средних значений, но дисперсия суммы случайных величин есть

$$\begin{aligned} D\left[\sum_i \xi_i\right] &= \left\langle \left[\sum_i (\xi_i - \bar{\xi}_i)\right]^2 \right\rangle = \\ &= \sum_i D[\xi_i] + 2 \sum_{i < k} \sqrt{D[\xi_i] D[\xi_k]} K_{\xi_i \xi_k}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Таким образом, дисперсия суммы равна сумме дисперсий при достаточном условии попарной некоррелированности всех случайных величин (что, как сказано, еще не означает их попарной независимости).

Систему случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  можно представлять себе как случайную точку или вектор  $\mathbf{r}$  в  $n$ -мерном пространстве. Поэтому такую систему часто называют, как известно,  $n$ -мерной случайной величиной.

Приведем в качестве примера общий вид нормального или гауссова закона распределения для  $n$ -мерной случайной величины  $\mathbf{r}$  (сама величина  $\mathbf{r}$  называется при этом нормальной или гауссовой). Общее выражение этого закона таково:

$$\omega(\mathbf{r}) d^n r = C e^{-H(\mathbf{r})} d^n r, \quad d^n r = dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (7.8)$$

где  $H(\mathbf{r})$  — неотрицательная симметричная квадратичная форма:

$$H(\mathbf{r}) = \sum_{i, k} a_{ik} x_i x_k, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad (7.9)$$

постоянная  $C$  выражается через элементы матрицы  $A = (a_{ik})$  в соответствии с условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(r) d^n r = 1.$$

Таким образом, поверхности равной плотности вероятности — это семейство вложенных друг в друга подобных  $n$ -мерных эллипсоидов  $H(\mathbf{r}) = \text{const}$ . Плотность вероятности максимальна в начале координат  $\mathbf{r} = 0$ , где она равна  $C$ <sup>1)</sup>.

Обычно нормальное распределение записывается в канонической форме, т. е. через так называемую *корреляционную матрицу*  $B = (b_{ik})$ , где  $b_{ik}$  — моменты второго порядка:

$$b_{ik} = \overline{\xi_i \xi_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i x_k \omega(r) d^n r. \quad (7.10)$$

Если ввести стандарты  $\sigma_k$  компонент  $\xi_k$  рассматриваемой  $n$ -мерной случайной величины  $\mathbf{r}$  ( $b_{ii} = \overline{\xi_i^2} = \sigma_i^2$ ), то можно записать  $b_{ik}$  через коэффициенты корреляции  $K_{ik}$ :

$$b_{ik} = \sigma_i \sigma_k K_{ik}.$$

Очевидно, матрица  $B$  симметрична, как и исходная матрица  $A$ . Мы имеем поэтому  $n(n+1)/2$  уравнений (7.10), выражающих все независимые  $b_{ik}$  через независимые  $a_{ik}$ . Если разрешить эти уравнения относительно  $a_{ik}$  и подставить полученные выражения  $a_{ik}$  через  $b_{ik}$  в (7.8) и (7.9), то распределение (7.8) принимает канонический вид:

$$\omega(\mathbf{r}) d^n r = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i, k} B_{ik}^{-1} x_i x_k \right\} d^n r. \quad (7.11)$$

Здесь  $|B| = \text{Det } B$ , а  $B_{ik}^{-1}$  — элементы матрицы  $B^{-1}$ , обратной матрице  $B$ .

<sup>1)</sup> Для распределения (7.8) средние значения  $\overline{\xi_i} = 0$ , как и вообще все моменты нечетных порядков. Если  $\overline{\xi_i} \neq 0$ , то это означает просто, что центр эллипсоидов смещен из начала координат в точку  $\bar{\rho} = \{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_n\}$ . В этом случае в формуле (7.9)  $H$  будет квадратичной формой от компонент разности  $\mathbf{r} - \bar{\rho}$ :

$$H(\mathbf{r}) = \sum_{i, k} a_{ik} (x_i - \bar{\xi}_i) (x_k - \bar{\xi}_k).$$



В частности, для двумерной нормальной случайной величины закон распределения будет

$$\begin{aligned} \omega(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{b_{22}x_1^2 + b_{11}x_2^2 - 2b_{12}x_1x_2}{2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)} \right\} dx_1 dx_2, \quad (7.12) \end{aligned}$$

или, через стандарты и коэффициент корреляции  $K$  ( $b_{11} = \sigma_1^2$ ,  $b_{22} = \sigma_2^2$ ,  $b_{12} = b_{21} = \sigma_1\sigma_2K$ ),

$$\begin{aligned} \omega(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \\ &= \frac{dx_1 dx_2}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-K^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-K^2)} \left( \frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} - 2K \frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} \right) \right\}. \quad (7.13) \end{aligned}$$

В числе многих других особенностей нормального распределения следует указать и на ту, что для него некоррелированность влечет за собой статистическую независимость. Из двумерной формулы (7.13) это видно непосредственно, так как при  $K = 0$  плотность вероятности  $\omega(x_1, x_2)$  становится произведением двух одномерных нормальных плотностей. Но то же самое нетрудно показать и в общем  $n$ -мерном случае. Действительно, попарная некоррелированность  $\xi_i$  означает, что матрица  $B$  диагональна (отличны от нуля только  $b_{ii} = \sigma_i^2$ ). Следовательно, диагональна и обратная матрица  $B^{-1}$ , причем

$$B_{ii}^{-1} = \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad |B|^{1/2} = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n.$$

В результате получаем из (7.11)

$$\omega(\mathbf{r}) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} e^{-x_i^2/2\sigma_i^2},$$

т. е.  $\omega(\mathbf{r})$  распадается на произведение  $n$  одномерных нормальных плотностей вероятности каждой из величин  $\xi_i$ .

Таким образом, для нормальных случайных величин некоррелированность и независимость равнозначны.

Заметим в заключение, что в физической литературе широко принято обозначать случайную величину той же буквой, что и ее возможные значения. Мы уже делали это выше, например, при рассмотрении модели брауновского движения: мы обозначали через  $n$  как случайное число шагов вправо, так и возможные значения  $n = 1, 2, \dots, N$  этого случайного числа. Такой прием сокращает количество употребляемых символов и в боль-

шинстве случаев не приводит к недоразумениям. В дальнейшем мы будем поступать так же, используя разные обозначения для случайной величины и ее возможных значений лишь тогда, когда без этого действительно возможно искажение смысла.

### Задачи

1. Написать совместную плотность вероятности случайных величин  $x = \sin \theta$  и  $y = \cos \theta$ , если известна плотность вероятности  $w(\theta)$  в интервале  $(-\pi, \pi)$ .

Решение. Запишем  $w_2(x, y)$  через условную плотность вероятности  $y$ :

$$w_2(x, y) = w_1(x) v(y|x).$$

Так как  $y$  — детерминированная функция  $x$ :

$$y = \begin{cases} +\sqrt{1-x^2} & \text{при } |\theta| < \pi/2, \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{при } \pi/2 < |\theta| < \pi, \end{cases}$$

условная плотность есть

$$v(y|x) = \delta(y \mp \sqrt{1-x^2}).$$

Одномерное распределение  $x$  следует из заданного распределения  $\theta$ :

$$w(\theta) d\theta = w(\arcsin x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = w_1(x) dx.$$

Таким образом,

$$w_2(x, y) = \frac{w(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} \delta(y \mp \sqrt{1-x^2})$$

с верхним знаком при  $|\arcsin x| < \pi/2$  и с нижним — при  $\pi/2 < |\arcsin x| < \pi$ . Разумеется, можно написать аналогичное выражение и через  $v(x|y)$ .

2. Какие распределения случайной величины  $x$  на интервале  $(-a, a)$  обеспечивают некоррелированность  $x$  и любой четной детерминированной функции  $f(x)$ ?

Решение. Достаточным условием некоррелированности  $x$  и  $f(x)$  является четность  $w(x)$ , так как при этом обращаются в нуль моменты  $\langle x^j f(x) \rangle$  и  $\langle x \rangle$ .

3. Каким условиям должна удовлетворять плотность вероятности случайной фазы  $\theta$  в интервале  $(-\pi, \pi)$  колебаний  $\xi = \sin(\omega t + \theta)$  и  $\eta = \cos(\omega t + \theta)$ , чтобы они были некоррелированы?

Решение. Коэффициент корреляции  $\xi$  и  $\eta$  пропорционален разности

$$\begin{aligned} \overline{\xi\eta} - \bar{\xi} \cdot \bar{\eta} &= [\langle \sin \theta \cos \theta \rangle - \langle \sin \theta \rangle \cdot \langle \cos \theta \rangle] \cos 2\omega t + \\ &+ \frac{1}{2} [\langle \cos^2 \theta \rangle - \langle \cos \theta \rangle^2 - \langle \sin^2 \theta \rangle + \langle \sin \theta \rangle^2] \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (1)$$

Представим плотность вероятности  $w(\theta)$  в виде

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta).$$

Вычислив для такого распределения моменты, входящие в коэффициенты при  $\sin 2\omega t$  и  $\cos 2\omega t$  в соотношении (1), и приравняв эти коэффициенты нулю,

находим следующие два условия:

$$a_2 = 2\pi a_1 b_1, \quad b_2 = \pi (b_1^2 - a_1^2).$$

Если ввести амплитуды и фазы первой и второй гармоник  $\omega(\theta)$ :

$$a_i = A_i \sin \alpha_i, \quad b_i = A_i \cos \alpha_i, \quad i = 1, 2,$$

то полученные условия означают, что

$$A_2 = \pi A_1^2, \quad \alpha_2 = 2\alpha_1.$$

В частности, колебания  $\xi$  и  $\eta$  будут некоррелированы при отсутствии в  $\omega(\theta)$  первой и второй гармоник ( $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$ ), а также, конечно, и при отсутствии всех гармоник, т. е. при равномерном распределении  $\omega(\theta) = 1/2\pi$ .

4. Найти дисперсию суммы случайного числа  $n$  независимых случайных величин  $x_i$ , обладающих одинаковыми дисперсиями  $\sigma^2$ .

Решение. Совместную функцию распределения  $W(y, n)$  случайных величин  $y = \sum_{i=1}^n x_i$  и  $n$  можно записать через условную вероятность  $V(y|n)$ , умноженную на вероятность  $p_n$  значения  $n$ :

$$W(y, n) = p_n V(y|n).$$

Следовательно,

$$D[y] = \sum_n p_n D[y|n] = \sum_n p_n n \sigma^2 = \bar{n} \sigma^2.$$

5. Показать, что для  $n$  нормальных величин  $x_i$  всегда можно найти такие  $n$  линейных комбинаций  $y_k = \sum_i \alpha_{ki} x_i$ , которые будут независимы в совокупности.

Решение. Справедливость данного утверждения следует из того, что всегда существует ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму  $H(\mathbf{r})$  к сумме квадратов. Геометрически это поворот осей в  $n$ -мерном пространстве  $x_i$ , при котором новые оси совпадают с главными осями эллипсоидов  $H = \text{const}$ .

6. Показать, что для нормальной величины  $x$  со средним значением  $\bar{x} = 0$  и дисперсией  $\overline{x^2} = \sigma^2$  для всякой детерминированной дифференцируемой функции  $f(x)$ , возрастающей при  $|x| \rightarrow \infty$  медленнее, чем  $e^{x^2/2\sigma^2}$ , справедлива формула

$$\langle x f(x) \rangle = \sigma^2 \langle f'(x) \rangle. \quad (1)$$

Решение. Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \langle x f(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi} \sigma} = \\ &= -\sigma^2 \left\{ \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi} \sigma} \right\} = \sigma^2 \langle f'(x) \rangle. \end{aligned}$$

Обобщение этой формулы на функционалы от случайных гауссовых полей используется в теории случайных полей.

Если  $\bar{x} \neq 0$ , то формула (1) принимает вид

$$\langle xf(x) \rangle = \bar{x} \langle f(x) \rangle + \sigma^2 \langle f'(x) \rangle,$$

где  $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ .

7. Пусть задана  $n$ -мерная случайная величина  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ , т. е. известна ее  $n$ -мерная плотность вероятности  $w_\xi(x_1, \dots, x_n)$ , где  $x_k$  — возможные значения  $\xi_k$ . Величина  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  связана с  $\xi$  функциональной зависимостью  $\eta = F(\xi)$ , где  $F$  — детерминированная однозначная вектор-функция с однозначной обратной функцией  $\xi = F^{-1}(\eta)$ . Выразить плотность вероятности  $w_\eta(y)$  через  $w_\xi(x)$ .

Решение. Однозначную связь  $\xi = F^{-1}(\eta)$  можно рассматривать как преобразование координат в  $n$ -мерном пространстве возможных значений:

$$x_i = F_i^{-1}(y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Как известно, элемент «объема»  $d^n x = dx_1 \dots dx_n$  преобразуется по формуле  $d^n x = Q(y) d^n y$ , где  $Q(y)$  — якобиан преобразования:

$$Q(y) = \text{Det} \left| \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \right| = \text{Det} \left| \frac{\partial F_i^{-1}(y)}{\partial y_k} \right|.$$

В силу взаимной однозначности преобразования вероятность попадания  $\eta$  в область  $(y, y + dy)$  та же, что и  $\xi$  в область  $(x, x + dx)$ , т. е.

$$w_\eta(y) d^n y = w_\xi(x) d^n x.$$

Подставив в правую часть  $x = F^{-1}(y)$  и  $d^n x = Q(y) d^n y$ , находим

$$w_\eta(y) = w_\xi[F^{-1}(y)] \cdot Q(y).$$

## Г л а в а II

### СЛУЧАЙНЫЕ ИМПУЛЬСЫ

#### § 8. Постановка задачи

Мы обратимся теперь к одному частному виду случайных процессов — так называемым пуассоновским импульсным процессам. Этот практически важный класс процессов вместе с тем настолько специален, что для получения многих относящихся к нему результатов можно и здесь обойтись средствами классической теории вероятностей. Поясним, в чем здесь дело.

Мы уже отметили, что случайная функция времени  $t$  иногда может быть задана как детерминированная функция  $f$  от  $t$  и от некоторого *конечного* числа случайных величин  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Все статистические свойства функции  $\xi(t) = f(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  полностью определяются тогда  $n$ -мерной случайной величиной  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , т. е. ее распределением  $\omega(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n$ .

Примером такого задания случайной функции могут служить тригонометрические суммы со случайными коэффициентами  $a_k, b_k$

$$\xi(t) = f[t; (a_k), (b_k)] = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

определяющие случайные функции  $\xi(t)$ , периодические с периодом  $2\pi$ .

Пока число  $n$  случайных параметров конечно, мы можем оставаться в рамках тех понятий и методов, которыми оперирует классическая теория вероятностей, но переход к счетному множеству случайных параметров (в приведенном примере — к ряду Фурье) требует уже более общего подхода. Импульсные процессы можно, по крайней мере в простейших случаях, трактовать именно указанным способом, задавая их как детерминированные функции времени и конечной совокупности случайных параметров. Тем самым мы имеем возможность познакомиться

с этими процессами, не прибегая пока к общей теории случайных функций.

Рассмотрим процесс, представляющий собой суперпозицию одинаковых по форме импульсов. Пусть форма импульса описывается детерминированной функцией  $F(t)$ , причем импульсы могут различаться по величине или «амплитуде». Интересующий нас процесс запишется тогда в виде

$$\xi(t) = \sum_{\nu} a_{\nu} F(t - t_{\nu}), \quad (8.1)$$

где  $t_{\nu}$  — момент «возникновения»  $\nu$ -го импульса, а  $a_{\nu}$  — его «амплитуда». Мы называем  $t_{\nu}$  моментом возникновения лишь условно, т. е. не предполагаем, что  $F(t - t_{\nu}) = 0$  при  $t < t_{\nu}$ . Функция  $F(t)$  может и не обладать начальным значением  $t$ , до которого она равна нулю. Предполагается только, что  $F(t)$  достаточно быстро стремится к нулю при  $|t| \rightarrow \infty$ . Моменты времени  $t_{\nu}$  могут быть связаны с любой характерной точкой — с каким-либо из экстремумов  $F(t)$  или с какой-нибудь из точек перехода через нуль, если таковые имеются, и т. п.

Если параметры  $a_{\nu}$ ,  $t_{\nu}$  — случайные величины, то  $\xi(t)$  — случайная функция времени: при всяком  $t$  значение  $\xi(t)$  само будет случайной величиной. Таким образом, мы имеем здесь пример описанного способа задания случайной функции как детерминированной функции некоторой совокупности случайных параметров (в данном случае  $a_{\nu}$  и  $t_{\nu}$ ).

Укажем на некоторые физические вопросы, приводящие к рассмотрению случайных процессов вида (8.1). Таким процессом является, например, ток или напряжение на выходе четырехполюсника, на вход которого воздействует аналогичный процесс, но состоящий из очень коротких толчков — в пределе дельта-импульсов:

$$I_{\text{вх}}(t) = \sum_{\nu} a_{\nu} \delta(t - t_{\nu}). \quad (8.2)$$

Под «очень короткими» понимаются при этом толчки, длительность которых гораздо меньше временных постоянных четырехполюсника. В частности, если этому условию удовлетворяет время пролета электрона в электронной лампе, то анодный ток можно записать в виде (8.2) с  $a_{\nu} = e = \text{const}$ . Если же необходимо учитывать время пролета и тем самым форму импульсов анодного тока, вызванных отдельными электронами, то тот же анодный ток можно записать в виде (8.1), по-прежнему с  $a_{\nu} = e$ , если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = 1.$$

Другой пример возникновения случайного процесса вида (8.1) — это отражение волнового импульса, посланного в среду, содержащую хаотически вкрапленные неоднородности со случайными коэффициентами отражения или рассеяния. Отраженные от неоднородностей импульсы будут иметь в отсутствие дисперсии ту же форму, что и первичный импульс, но вернуться со случайными запаздываниями и амплитудами.

Возможна еще более общая постановка задачи, которую далее мы и будем рассматривать. Она состоит в том, что случайной предполагается форма самих импульсов, а именно — импульс описывается детерминированной функцией  $F$  от  $t - t_\nu$  и от совокупности некоторого конечного числа  $m$  случайных параметров, т. е. от  $m$ -мерной случайной величины  $\mathbf{a}_\nu = \{a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu m}\}$ :

$$\xi(t) = \sum_{\nu} F(t - t_\nu, \mathbf{a}_\nu). \quad (8.3)$$

Здесь мы снова используем, таким образом, тот же ограниченный способ задания случайной функции  $F$  как детерминированной функции конечного числа случайных параметров. При этом компоненты  $\mathbf{a}_\nu$  могут быть и статистически зависимыми между собой.

Относительно вероятностных свойств случайных параметров  $\mathbf{a}_\nu$  и  $t_\nu$ , определяющих статистические характеристики процесса  $\xi(t)$ , мы сделаем следующие простейшие предположения:

1. Все  $\mathbf{a}_\nu$  и  $t_\nu$  статистически независимы между собой, и их распределения не зависят от номера импульса  $\nu$ . Тогда для системы, состоящей из любого количества  $n(m + 1)$  параметров  $\mathbf{a}_\nu$  и  $t_\nu$ , достаточно задать только функции распределения  $w_a(\mathbf{a}) d\mathbf{a}$  и  $w_t(t) dt$ , поскольку функция распределения системы распадается на множители:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n; t_1, \dots, t_n) d\mathbf{a}_1 \dots d\mathbf{a}_n dt_1 \dots dt_n = \\ = \prod_{\nu=1}^n w_a(\mathbf{a}_\nu) d\mathbf{a}_\nu w_t(t_\nu) dt_\nu. \end{aligned} \quad (8.4a)$$

Здесь  $d\mathbf{a}_\nu \equiv d^m a_\nu = da_{\nu 1} \dots da_{\nu m}$ .

2. Вероятность появления импульса в промежутке времени от  $t$  до  $t + dt$  не зависит от  $t$  и пропорциональна  $dt$ , т. е.

$$w_t(t) dt = n_1 dt, \quad n_1 = \text{const}. \quad (8.4b)$$

Как уже отмечалось (§ 5), это предположение означает, что вероятность появления  $n$  импульсов в интервале времени  $T$  дается распределением Пуассона:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!}, \quad \bar{n} = n_1 T. \quad (8.5)$$

В этих предположениях мы вычислим теперь функцию распределения  $\xi(t)$ .

Чтобы избежать оперирования с бесконечной совокупностью случайных параметров  $a_n, t_n$ , мы поступим следующим образом. Выделим интервал времени  $(-T/2, T/2)$  настолько большой по сравнению с длительностью отдельного импульса и со средним временем  $1/n_1$  между импульсами, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами, т. е. чтобы учет (или неучет) тех импульсов, которые частично срезаются краями интервала  $(-T/2, T/2)$ , не играл роли. Выполнимость этого последнего требования как раз и связана с условием достаточно быстрого стремления  $F(t)$  к нулю при  $|t| \rightarrow \infty$ . Вопрос о том, насколько быстрым должно быть уменьшение  $F(t)$ , мы пока отложим, отметив лишь, что поставленное условие пренебрежимости краевыми эффектами может быть выполнено даже тогда, когда интервал, в котором  $F(t) \neq 0$ , не является конечным.

Мы хотим найти распределение случайной величины  $\xi(t)$  (а при всяком фиксированном  $t$  это случайная величина), т. е. вероятность события  $B$ , состоящего в том, что  $\xi(t)$  находится в интервале  $(x, x + dx)$ :

$$P\{B\} = P\{x < \xi(t) \leq x + dx\} = \omega(x) dx.$$

Событие  $B$  может реализоваться при осуществлении какого-либо из событий  $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ , где  $A_n$  состоит в том, что в интервале  $(-T/2, T/2)$  появилось  $n$  импульсов. События  $A_n$  несовместимы, так что по формуле полной вероятности

$$P\{B\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{A_n\} P\{B|A_n\}.$$

Очевидно,  $P\{A_n\}$  есть не что иное, как вероятность  $P(n)$ , даваемая законом Пуассона. Введем теперь плотность условной вероятности  $P\{B|A_n\}$ , т. е. вероятности события  $B = \{x < \xi(t) \leq x + dx\}$  при условии, что в  $(-T/2, T/2)$  возникло  $n$  импульсов:

$$P\{B|A_n\} = v(x|n) dx. \quad (8.5)$$

Тогда

$$\omega(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) v(x|n) dx \quad (8.7)$$

и, следовательно, среднее значение какой-либо функции  $f(\xi)$  может быть вычислено в два этапа:

$$\begin{aligned} \overline{f(\xi)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \omega(x) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) v(x|n) dx = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) {}^n\overline{f(\xi)}, \end{aligned} \quad (8.8)$$



где  $\overline{nf(\xi)}$  — условное среднее [при условии, что в  $(-T/2, T/2)$  было  $n$  импульсов].

Итак, согласно (8.7), для нахождения  $w(x)$  надо располагать условной плотностью вероятности  $v(x|n)$ . Можно сказать, что  $v(x|n)$  — это плотность вероятности случайной функции

$$\xi_n(t) = \sum_{v=1}^n F(t - t_v, a_v), \quad (8.9)$$

зависящей от конечного числа параметров  $a_v$  и  $t_v$ , относящихся к тем  $n$  импульсам, которые по условию появились в интервале  $(-T/2, T/2)$ . Для нахождения  $v(x|n)$  целесообразно воспользоваться очень сильным аппаратом так называемых *характеристических функций*.

### § 9. Характеристическая функция

Характеристические функции играют большую роль как в доказательствах многих важных теорем теории вероятностей, так и при решении конкретных задач. Характеристическая функция *однозначно* связана с функцией распределения  $W(x)$  и имеет по сравнению с  $W(x)$  очень существенное преимущество. При сложении *независимых* случайных величин, когда распределение суммы вычисляется по формуле свертки (композиция или символическое перемножение функций распределения), характеристическая функция суммы получается простым перемножением характеристических функций слагаемых. Это особенно важно для центральной предельной теоремы теории вероятностей, где речь идет именно о распределении суммы *независимых* случайных величин (§ 13).

Характеристическая функция случайной величины  $x$  (как уже было сказано, мы будем сплошь и рядом обозначать случайную величину и принимаемые ею значения одной и той же буквой) есть среднее значение (математическое ожидание) величины  $e^{iux}$ , где  $u$  — вещественный параметр:

$$\varphi_x(u) = \langle e^{iux} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dW(x) \quad (9.1)$$

(разумеется, здесь принято, что  $\overline{a + ib} = \bar{a} + i\bar{b}$ ). Интеграл Фурье — Стильеса (9.1) всегда сходится, так как

$$|\varphi_x(u)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{iux}| dW(x) = 1.$$

Нетрудно видеть, далее, что всегда  $\varphi_x(0) = 1$  и что  $\varphi_x(-u) = \varphi_x^*(u)$ . Приведем два примера характеристической функции.

Для *нормального распределения*

$$dW(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx$$

имеем

$$\varphi_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx = e^{iau - \sigma^2 u^2/2}.$$

Чем острее распределение (чем меньше  $\sigma$ ), тем шире характеристическая функция. Конечно, это не особенность нормального распределения, а известное общее свойство пары функций, связанных интегральным преобразованием Фурье. Если  $\sigma \rightarrow 0$ , т. е.  $\omega(x) \rightarrow \delta(x-a)$ , то  $\varphi_x(u) \rightarrow e^{iau}$  (в частности, при  $a=0$  имеем  $\varphi_x(u) \rightarrow 1$ ).

Для *распределения Пуассона*

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

получаем

$$\varphi_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{iun} P(n) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n}e^{iu})^n}{n!} = \exp\{\bar{n}(e^{iu} - 1)\}.$$

Если для какого-либо  $k > 0$  конечен абсолютный момент  $\beta_k = |x|^k$ , то выражение  $\varphi_x(u)$  можно  $k$  раз продифференцировать по  $u$ . Поскольку

$$e^{iux} = 1 + \frac{iux}{1!} + \dots + \frac{(iux)^k}{k!} + R_k(iux),$$

получаем

$$\varphi_x(u) = \sum_{m=0}^k \frac{\alpha_m (iu)^m}{m!} + o(u^k), \quad \alpha_m = \overline{x^m}. \quad (9.2)$$

Если все  $\beta_k$  конечны, то имеет смысл разложение в бесконечный ряд

$$\varphi_x(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m (iu)^m}{m!}. \quad (9.3)$$

Заметим, что  $m$ -й момент  $\alpha_m$ , если он конечен, вычисляется при помощи характеристической функции, как значение ее  $m$ -й производной по  $iu$  в нуле:

$$\alpha_m = \left. \frac{\partial^m \varphi_x(u)}{\partial (iu)^m} \right|_{u=0}. \quad (9.4)$$

Таким образом, нахождение моментов, требующее — если оно производится при помощи функции распределения — вычисления интегралов, здесь осуществляется посредством дифференцирования, т. е., вообще говоря, более простой операции (правда, лишь для целых  $m$ ).

Вряд ли надо пояснять, что для  $n$ -мерной случайной величины  $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  характеристическая функция определяется точно таким же образом, т. е. как функция, сопряженная по Фурье:

$$\varphi_{\mathbf{r}}(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{u}\mathbf{r}} dW(\mathbf{r}), \quad (9.5)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор с компонентами  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

Для плотности вероятности величины  $z = x + y$ , где  $x$  и  $y$  — независимые случайные величины, имеем формулу композиции (свертки)

$$\omega(z) = \omega_1 * \omega_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1(x) \omega_2(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1(z-y) \omega_2(y) dy,$$

т. е. довольно сложную функциональную связь между  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega$ . Для характеристической функции  $z$ , учитывая независимость  $x$  и  $y$ , получаем

$$\varphi_z(u) = e^{iuz} = e^{iux} e^{iy} = \varphi_x(u) \varphi_y(u).$$

Таким образом, композиция  $\omega$  или  $W$ , т. е. символическому перемножению функций распределения, соответствует *обыкновенное перемножение* характеристических функций.

Нетрудно сообразить, что если  $y = \sum_i x_i$  и каждое слагаемое независимо от суммы предшествующих, то

$$\varphi_y(u) = \prod_i \varphi_{x_i}(u). \quad (9.6)$$

Разумеется, это и подавно верно для  $x_i$ , независимых в совокупности.

Другой важный вопрос заключается в том, как по характеристической функции  $\varphi_x(u)$  найти функцию распределения  $W(x)$ .

Если распределение дифференцируемо, т. е.  $dW(x) = \omega(x) dx$ , то формула (9.1) переходит в обычный интеграл Фурье:

$$\varphi_x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \omega(x) dx, \quad (9.7)$$

обращение которого тотчас же дает

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \varphi_x(u) du, \quad (9.8)$$

а значит,

$$W(x) - W(0) = \int_0^x w(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-iux}}{iu} \varphi_x(u) du. \quad (9.9)$$

Пусть теперь  $w(x)$  — дискретное распределение. Пользуясь дельта-функцией, можно применять те же формулы обращения. Имеем

$$w(x) = \sum_k p_k \delta(x - a_k)$$

и, следовательно,

$$\varphi_x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \sum_k p_k \delta(x - a_k) dx = \sum_k e^{iua_k} p_k.$$

Формула обращения тотчас же дает

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \sum_k p_k e^{iua_k} du = \\ &= \sum_k p_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu(a_k - x)} du = \sum_k p_k \delta(x - a_k), \end{aligned}$$

т. е. и в этом случае возвращает нас к правильному выражению для  $w(x)$ .

Именно эта однозначная связь между функцией распределения и характеристической функцией широко используется как в общей теории, так и при решении конкретных задач. В одних случаях оказывается проще находить непосредственно функцию распределения, в других — характеристическую функцию. Укажем в этой связи на теорему Леви о том, что если последовательность функций распределения  $W_k(x)$  сходится при  $k \rightarrow \infty$  к функции распределения  $W(x)$  [в точках непрерывности  $W(x)$ ], то и последовательность соответствующих характеристических функций  $\varphi_k(u)$  сходится к характеристической функции  $\varphi(u)$ , отвечающей  $W(x)$ , и обратно.

Если взять  $\ln \varphi_x(u)$  и разложить его в степенной ряд по  $u$  [беря ту ветвь логарифма, которая вместе с  $u$  обращается в нуль, и разлагая в соответствии с (9.2) тоже до члена

порядка  $u^k$ ], то получим

$$\ln \varphi_x(u) = \sum_{m=1}^R \frac{\lambda_m}{m!} (iu)^m + o(u^k).$$

Величины  $\lambda_m$  называются *кумулянтами* (или *семиинвариантами*) распределения. Кумулянт  $m$ -го порядка есть целая рациональная функция первых  $m$  моментов  $\alpha_m$  (или центральных моментов  $\gamma_m$ ). В частности,

$$\lambda_1 = \alpha_1, \quad \lambda_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \gamma_2, \quad \lambda_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = \gamma_3,$$

$$\lambda_4 = \alpha_4 - 3\alpha_2^2 - 4\alpha_3\alpha_1 + 12\alpha_2\alpha_1^2 - 6\alpha_1^4 = \gamma_4 - 3\gamma_2^2.$$

Следует обратить внимание на аддитивность кумулянтов при композиции распределений независимых величин. При композиции  $\varphi_{x_k}$  перемножаются,  $\ln \varphi_{x_k}$  складываются, а значит, складываются и кумулянты:

$$\lambda_m = \sum_{k=1}^n \lambda_m^{(k)}, \quad x = \sum_{k=1}^n x_k.$$

При помощи характеристических функций чрезвычайно просто устанавливается сохранение или несохранение вида некоторых распределений при композиции. Если, например, независимые случайные величины  $n_k$  распределены по Пуассону, то

$$\varphi_{n_k}(u) = \exp\{\bar{n}_k(e^{iu} - 1)\}$$

и, следовательно, для  $n = \sum_k n_k$  имеем

$$\varphi_n(u) = \exp\{\bar{n}(e^{iu} - 1)\}, \quad \bar{n} = \sum_k \bar{n}_k,$$

т. е. опять распределение Пуассона. Если сумма независимых одинаково распределенных случайных величин обладает тем же распределением, что и слагаемые, то такое распределение называется *устойчивым*. Таким образом, мы показали, что распределение Пуассона является устойчивым. Легко убедиться, что нормальное распределение тоже устойчиво.

Пусть независимые слагаемые распределены нормально со средними значениями  $\bar{x}_k = a_k$  и дисперсиями  $D[x_k] = \sigma_k^2$ , т. е.

$$W_k(x) = \Phi\left(\frac{x - a_k}{\sigma_k}\right), \quad \text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx.$$

Характеристическая функция для  $x_k$  есть

$$\varphi_k(u) = e^{iua_k - \sigma_k^2 u^2/2},$$

Это значит, что для  $\sum_{k=1}^n x_k$  характеристическая функция будет

$$\varphi(u) = \prod_{k=1}^n \varphi_k(u) = e^{iuA_n - B_n^2 u^2/2}, \quad \text{где } A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2,$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} W_1(x) * W_2(x) * \dots * W_n(x) &= \\ &= \Phi\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right) * \dots * \Phi\left(\frac{x-a_n}{\sigma_n}\right) = \Phi\left(\frac{x-A_n}{B_n}\right). \end{aligned}$$

Если все  $W_k(x)$  одинаковы, т. е.  $a_k = a$ ,  $\sigma_k = \sigma$ , то  $A_n = na$ ,  $B_n = \sqrt{n}\sigma$ . Обозначая композицию одинаковых нормальных функций распределения  $W(x)$  через  $[W(x)]^{n*}$ , имеем

$$[W(x)]^{n*} = \left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)\right]^{n*} = \Phi\left(\frac{x-na}{\sqrt{n}\sigma}\right).$$

В частности, при  $a=0$  и  $\sigma=1/\sqrt{n}$

$$[\Phi(x\sqrt{n})]^{n*} = \Phi(x).$$

Это значит, что если  $x_k$  имеют одну и ту же функцию распределения  $\Phi(x)$ , то и сумма

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n x_k$$

тоже имеет функцию распределения  $\Phi(x)$ .

Иногда оказывается удобным пользоваться не характеристической функцией — средним значением от  $e^{iux}$ , — а средними значениями от величин  $e^{\theta x}$ :

$$F_x(\theta) = e^{\overline{\theta x}} = \int e^{\theta x} dW(x),$$

или от  $u^x$ :

$$F_x(u) = \overline{u^x} = \int u^x dW(x),$$

разумеется, при ограничениях, обеспечивающих существование этих средних. Такого рода функции называются *моментопроизводящими* или просто *производящими* функциями распределения  $W(x)$ . Если возможно  $m$ -кратное дифференцированное  $F_x(\theta)$  по  $\theta$ , то, полагая затем  $\theta = 0$ , получаем  $\alpha_m = x^m$ . Аналогичным образом можно получать  $\alpha_m$  из  $F_x(u)$ , применяя  $m$  раз операцию  $u \frac{\partial}{\partial u}$  и полагая потом  $u = 1$ .

### § 10. Функция распределения импульсного пуассоновского процесса

Нахождение характеристической функции, будучи равносильно нахождению функции распределения, оказывается более простой задачей и для случайной величины (8.9):

$$\xi_n(t) = \sum_{\nu=1}^n x_{\nu}, \quad x_{\nu} = F(t - t_{\nu}, \mathbf{a}_{\nu}),$$

так как слагаемые  $x_{\nu}$  независимы. Поэтому характеристическая функция (8.9) [т. е. условная функция — при условии, что в интервале  $(-T/2, T/2)$  было  $n$  импульсов] равна

$$\varphi_{\xi}(u|n) = \prod_{\nu=1}^n \varphi_{x_{\nu}}(u).$$

В свою очередь характеристическая функция для  $x_{\nu}$  (очевидно, не зависящая от номера импульса  $\nu$ ) есть

$$\varphi_{x_{\nu}}(u) = e^{\overline{iux_{\nu}}} = \int \omega_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-T/2}^{T/2} e^{iuF(t-\tau, \mathbf{a})} \omega_t(\tau) d\tau.$$

Мы не пишем здесь пределов в интегралах по  $\mathbf{a}$ , подразумевая, что интегрирование по  $\mathbf{a}$  распространяется на всю область возможных значений (конечную или бесконечную) компонент этой  $m$ -мерной случайной величины. Что касается распределения моментов возникновения импульсов  $\omega_t(\tau) d\tau$ , то теперь, конечно, нельзя воспользоваться формулой (8.4), так как речь идет об импульсах, появляющихся не где угодно на оси  $t$ , а обязательно (с достоверностью) внутри интервала  $(-T/2, T/2)$ . Это значит, что равномерное распределение  $\tau$  должно быть проинтегрировано к единице на этом интервале:

$$\omega_t(\tau) d\tau = \frac{n_1 d\tau}{T/2} = \frac{d\tau}{T}. \quad (10.1)$$

Таким образом,

$$\varphi_{\xi}(u|n) = \left\{ \int \omega_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-T/2}^{T/2} e^{iuF(t-\tau, \mathbf{a})} \frac{d\tau}{T} \right\}^n. \quad (10.2)$$

Обращая по Фурье формулу (8.7) [или полагая в (8.8)  $f(x) = e^{iux}$ ], мы получаем соотношение между безусловной и условной характеристическими функциями:

$$\varphi_{\xi}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \varphi_{\xi}(u|n). \quad (10.3)$$

Подстановка в (10.3) выражений (8.5) для  $P(n)$  и (10.2) для  $\Phi_{\xi}(u|n)$  дает

$$\begin{aligned}\Phi_{\xi}(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n_1 T}}{n!} \left\{ n_1 \int \omega_a(a) da \int_{-T/2}^{T/2} e^{iuF(t-\tau, a)} d\tau \right\}^n = \\ &= \exp \left\{ n_1 \int \omega_a(a) da \int_{-T/2}^{T/2} e^{iuF(t-\tau, a)} d\tau - n_1 T \right\},\end{aligned}$$

что можно записать также в виде

$$\begin{aligned}\Phi_{\xi}(u) &= \exp \left\{ n_1 \int \omega_a(a) da \int_{-T/2}^{T/2} [e^{iuF(t-\tau, a)} - 1] d\tau \right\} = \\ &= \exp \left\{ n_1 \int \omega_a(a) da \int_{t-T/2}^{t+T/2} [e^{iuF(\theta, a)} - 1] d\theta \right\}.\end{aligned}$$

В последнем выражении введена новая переменная интегрирования  $\theta = t - \tau$ .

Заметим теперь, что скобка под интегралом по  $\theta$  отлична от нуля только при тех  $\theta$ , для которых  $F(\theta, a) \neq 0$ , т. е. в пределах импульса. Поэтому для всех  $t$ , отступающих от краев интервала  $(-T/2, T/2)$  не менее чем на длительность импульса  $\theta$  (пренебрежение краевыми эффектами), можно раздвинуть пределы интегрирования по  $\theta$  в  $\pm \infty$ , или, другими словами, устремить  $T$  в бесконечность. Далее мы будем делать такой переход, не оговаривая его каждый раз заново, но следует помнить, что он возможен лишь при достаточно быстром убывании  $F(\theta, a)$  при  $|\theta| \rightarrow \infty$ . В результате

$$\Phi_{\xi}(u) = \exp \left\{ n_1 \int \omega_a(a) da \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{iuF(\theta, a)} - 1] d\theta \right\}. \quad (10.4)$$

Итак, характеристическая функция  $\xi(t)$  получена. В показателе экспоненты в (10.4) стоит логарифм этой характеристической функции. В его разложении по степеням  $iu$  коэффициентами при  $(iu)^m/m!$  являются, как мы знаем, кумулянты распределения  $\xi(t)$ . Разлагая этот показатель в ряд по степеням  $iu$ , получаем, что  $m$ -й кумулянт есть

$$\lambda_m = n_1 \int \omega_a(a) da \int_{-\infty}^{+\infty} F^m(\theta, a) d\theta. \quad (10.5)$$



В частности, для первого и второго кумулянтов, т. е. для среднего значения и дисперсии  $\xi(t)$ , имеем

$$\begin{aligned}\lambda_1 = \overline{\xi(t)} &= n_1 \int \omega_a(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, \mathbf{a}) d\theta, \\ \lambda_2 = D[\xi(t)] &= n_1 \int \omega_a(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\theta, \mathbf{a}) d\theta.\end{aligned}\quad (10.6)$$

В случае, когда  $\mathbf{a}_v$  — одномерная случайная величина, представляющая собой просто «амплитуду» импульса [процесс вида (8.1)], формулы (10.6) принимают вид

$$\overline{\xi(t)} = n_1 \bar{a} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) d\theta, \quad D[\xi(t)] = n_1 \bar{a}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\theta) d\theta. \quad (10.7)$$

Заметим, что  $\overline{\xi} = 0$  либо при  $\bar{a} = 0$ , либо при нулевой площади импульса  $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) d\theta = 0\right)$ . Наконец, если «амплитуда» фиксирована, скажем,  $a_v = 1$  [другими словами, плотность вероятности  $a_v$  есть  $\omega_a(a_v) = \delta(a_v - 1)$ ], то мы приходим к формулам, первоначально полученным Кембеллом [1]:

$$\overline{\xi(t)} = n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) d\theta, \quad D[\xi(t)] = n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\theta) d\theta. \quad (10.8)$$

Как характеристическая функция (10.4), так и кумулянты (10.5) содержат единственную характеристику «густоты» импульсов, а именно  $n_1$  — среднее число импульсов в единицу времени  $t$ . В этом проявляется *стационарность* рассматриваемого процесса, о чем еще будет идти речь в дальнейшем.

Разумеется, полученные формулы охватывают элементарную теорию дробового эффекта, которая была развита ранее (§ 5). Пусть отдельные импульсы одинаковы ( $a = e = \text{const}$ ), и пусть форма импульсов — прямоугольник продолжительности  $\vartheta$  и высоты  $1/\vartheta$  (рис. 3). Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) d\theta = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\theta) d\theta = \frac{1}{\vartheta}.$$

Согласно (10.7) для импульсного тока  $I(t) = e \sum_v F(t - t_v)$  получаем

$$\bar{I} = n_1 e, \quad D[I] = \frac{n_1 e^2}{\vartheta} = \frac{e \bar{I}}{\vartheta}. \quad (10.9)$$

На первый взгляд выражение для  $D[I]$  находится в противоречии с полученным ранее [формула (5.2)], так как теперь в знаменателе стоит длительность импульса  $\vartheta$ , т. е. величина порядка времени пролета электрона, тогда как в (5.2) в знаменателе находилось время наблюдения  $T \gg \vartheta$ . В действительности никакого противоречия нет, так как формула (10.9) дает дисперсию *мгновенного* тока  $I(t)$ , в то время как (5.2) — это дисперсия тока, уже усредненного по промежутку времени  $T$ , т. е. дисперсия величины

$$I_T = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt. \quad (10.10)$$

Естественно, что флуктуации  $I_T$  сглажены по сравнению с флуктуациями  $I(t)$ , и тем сильнее, чем больше  $T$ . Нетрудно убедиться в том, что для  $D[I_T]$  получается прежнее выражение (5.2) (см. задачу 6).

Полагая  $a_\nu = e = \text{const}$ , мы получали модель дробового эффекта. Если же значения случайного параметра  $a_\nu$  кратны заряду электрона, то процесс

$$\xi(t) = \sum_{\nu} e m_{\nu} \delta(t - t_{\nu})$$

может при подходящем распределении вероятностей для  $m_{\nu}$  описать ток вторичной электронной эмиссии и его флуктуации:  $\nu$ -й электрон первичного тока  $I(t) = e \sum_{\nu} \delta(t - t_{\nu})$  порождает слу-

чайное число  $m_{\nu} = 0, 1, 2, \dots$  вторичных электронов. Вместо формул (10.9) мы получим при этом для моментов  $\xi(t) \equiv I_{\text{вт.эм}}$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\text{вт.эм}} &= n_1 \bar{m} e, \\ (\Delta I_{\text{вт.эм}})^2 &= \frac{n_1 \bar{m}^2 e^2}{\vartheta} = \frac{e \bar{I}_{\text{вт.эм}} \bar{m}^2}{\bar{m}}. \end{aligned}$$

Зная характеристическую функцию (10.4), мы в принципе знаем и ее трансформанту Фурье, т. е. плотность вероятности  $\omega(x)$  процесса  $\xi(t)$ . Однако вычисление соответствующего интеграла Фурье в замкнутом виде осуществимо лишь в немногих простейших случаях. Если, например, процесс состоит из одинаковых прямоугольных импульсов фиксированной амплитуды  $a$  и длительности  $\vartheta$ :

$$F(\theta, a) = aF(\theta), \quad F(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{в интервале } (0, \vartheta), \\ 0 & \text{вне этого интервала,} \end{cases} \quad (10.11)$$

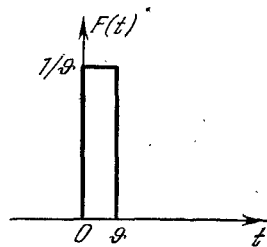


Рис. 3.

то (10.4) дает

$$\varphi_{\xi}(u) = \exp \left\{ n_1 \int_0^{\theta} (e^{iua} - 1) d\theta \right\} = \exp \{ n_1 \theta (e^{iua} - 1) \}.$$

Но это характеристическая функция распределения Пуассона с параметром  $\bar{n} = n_1 \theta$  и дискретными возможными значениями  $na$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$P \{ \xi(t) = na \} = \frac{(n_1 \theta)^n}{n!} e^{-n_1 \theta}. \quad (10.12)$$

В общем же случае решенная задача как раз такова, когда целесообразно искать не функцию распределения, а характеристическую функцию, что мы и сделали выше.

Однако при определенных условиях можно установить, что (10.4) принимает некоторый универсальный вид. Выясним, каков этот вид и в чем состоят упомянутые условия.

Обращая характеристическую функцию

$$\varphi_{\xi}(u) = \exp \left\{ \sum_1^{\infty} \lambda_m \frac{(iu)^m}{m!} \right\}$$

по Фурье, находим плотность вероятности

$$\begin{aligned} \omega(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\xi} \varphi_{\xi}(u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -iu\xi + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \frac{(iu)^m}{m!} \right\} du. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\lambda_1 = \bar{\xi}, \quad \lambda_2 = \sigma_{\xi}^2 = D[\xi(t)], \quad x = \frac{\xi - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_2}},$$

$$\Phi^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n}$$

и, начиная с  $m = 3$ , разложить экспоненту под интегралом по степеням  $iu$ , то почленное интегрирование приводит к представлению  $\omega(\xi)$  в виде ряда по производным  $\Phi^{(n)}(x)$ . Собрав в этом ряде члены одного порядка относительно  $n_1$ , мы получаем так называемый ряд Эджворта <sup>1)</sup>:

$$\omega(\xi) = \frac{\Phi^{(0)}(x)}{\sigma_{\xi}} - \frac{\lambda_3 \Phi^{(3)}(x)}{3! \sigma_{\xi}^4} + \left[ \frac{\lambda_4 \Phi^{(4)}(x)}{4! \sigma_{\xi}^5} + \frac{\lambda_3^2 \Phi^{(6)}(x)}{72 \sigma_{\xi}^7} + \dots \right]. \quad (10.13)$$

<sup>1)</sup> См. [2], гл. 17, § 7.

Первый член здесь порядка  $n_1^{-1/2}$ , второй — порядка  $n_1^{-1}$ , третий —  $n_1^{-3/2}$  и т. д. Все члены пропорциональны  $e^{-x^2/2}$ , а первый член есть просто нормальное распределение для  $x$ . Очевидно, с ростом  $n_1$ , т. е. с увеличением «густоты» импульсов, первый член будет все более преобладать, т. е. распределение  $\omega(\xi)$  будет приближаться к нормальному.

Сделаем грубую оценку того значения  $n_1$ , при котором уже можно ограничиться первым членом ряда (10.13). Два первых члена ряда в раскрытой форме таковы:

$$\omega(\xi) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \left\{ 1 - \frac{\lambda_3}{6\sigma_\xi^3} x(3-x^2) \right\}.$$

Наличие экспоненциального множителя позволяет не рассматривать большие значения  $x$ , при которых  $\omega(\xi)$  уже очень мало. Если ограничиться  $x \leq 2$ , то  $|x(3-x^2)| \leq 2$ . Значит, условие малости второго члена будет

$$\frac{|\lambda_3|}{3\sigma_\xi^3} \ll \frac{n_1 |\bar{a}|^3 \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\theta)|^3 d\theta}{3 \left[ n_1 \bar{a}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\theta) d\theta \right]^{3/2}} \ll 1$$

или, если отбросить коэффициент порядка единицы,

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\theta)|^3 d\theta}{n_1^{1/2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\theta) d\theta \right]} \ll 1.$$

Если  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) d\theta = 1$  и длительность импульса порядка  $\theta$ , то интеграл в числителе будет порядка  $1/\theta^2$ , а в знаменателе — порядка  $1/\theta$ , так что написанное условие сведется к следующему:

$$n_1 \theta \gg 1. \quad (10.14)$$

Это означает, что число импульсов, возникающих за длительность одного импульса, должно быть достаточно велико. Можно выразить то же самое и несколько иначе. В момент времени  $t$  величина  $\xi(t)$  складывается из тех импульсов, которые возникли в интервале времени от  $t-\theta$  до  $t$ , так как более ранние импульсы к моменту  $t$  уже успели «затухнуть». Следовательно,  $n_1 \theta$  — это в среднем число слагаемых  $x_v$ , из которых состоит  $\xi(t)$ .

в каждый данный момент. Условие (10.14) говорит, таким образом, о том, что распределение  $\xi(t)$  тем ближе к нормальному, чем больше импульсов налагается в каждый момент времени. Если толчки редкие, то распределение будет существенно зависеть от формы индивидуального толчка, нормального распределения не будет. Прийти к нему можно либо учащая толчки, либо увеличивая длительность импульса. В обоих случаях число толчков за время одного импульса будет расти.

Этот результат представляет собой весьма частный случай так называемой *центральной предельной теоремы* теории вероятностей. По сути дела, здесь было воспроизведено доказательство этой теоремы, но применительно к очень специальным условиям рассмотренной задачи. Мы увидим в дальнейшем (§ 13), что и найденный результат, и условие (10.14) непосредственно вытекают из гораздо более общих положений.

В работе Джильберта и Поллака [3] распределение импульсного процесса (8.1) было найдено для некоторых форм импульса  $F(t)$  в явном виде и в общем случае, т. е. без предельного перехода к «густому» шуму ( $n_1\theta \rightarrow \infty$ ). Во-первых, авторы показали, что процесс (8.1) и даже более общий процесс

$$\xi(t) = \sum_{\nu} F(t - t_{\nu}, a_{\nu}) \quad (10.15)$$

всегда можно свести к шуму вида

$$\xi(t) = \sum_{\nu} F_{\text{ЭКВ}}(t - t_{\nu}) \quad (10.16)$$

с такой формой импульса  $F_{\text{ЭКВ}}(t)$ , что распределение

$$W(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} w(x) dx$$

будет для (10.15) и (10.16) одним и тем же. Во-вторых, для  $W(\xi)$  они вывели (двумя различными способами) интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\xi} x dW(x) = n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} W[\xi - F(\theta)] F(\theta) d\theta,$$

которое и сумели решить для некоторых форм импульса  $F(t)$ .

Конечно, для прямоугольных импульсов высоты  $a$  и длительности  $\theta$  этому уравнению удовлетворяет распределение Пуассона (10.12), которое, как мы помним, переходит с ростом  $n_1\theta$  в распределение Лапласа, т. е. при сглаживании ступенек высоты  $a$  — в нормальное распределение.

Если форма импульса задана следующим несколько искусственным образом (рис. 4; через  $\gamma$  на нем обозначена постоянная Эйлера):

$$F(t) = 0 \quad \text{при } t \leq 0,$$

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad \text{при } t > 0,$$

то распределение  $\xi$  получается экспоненциально-степенным («непрерывным пуассоновским»):

$$w(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \quad (0 < x < \infty), \quad (10.17)$$

где  $\alpha = \bar{\xi}$ . С ростом  $\alpha$  оно также переходит в нормальное.

К сожалению, для такой важной формы импульса, как затухающее колебание (импульсная функция резонансного контура), уравнение для  $W$  удастся решить только численными методами, но и такую возможность следует рассматривать как определенное достижение.

Отметим, что (10.17) представляет собой частный случай так называемого *гамма-распределения*:

$$w(x) = \frac{\kappa^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\kappa x} \quad (0 < x < \infty), \quad (10.18)$$

характеристическая функция которого

$$\varphi(u) = \left( \frac{\kappa}{\kappa - iu} \right)^\alpha, \quad (10.19)$$

а среднее значение и дисперсия следующим образом выражаются через положительные параметры  $\alpha$  и  $\kappa$ :

$$\bar{x} = \frac{\alpha}{\kappa}, \quad D[x] \equiv \sigma_x^2 = \frac{\alpha}{\kappa^2}.$$

Очевидно, (10.17) следует из (10.18), если параметр  $\kappa$  (называемый масштабным) положить равным единице. При целочисленных значениях  $\alpha$  ( $\alpha = n$ ) имеем из (10.18)

$$w(x) = \frac{\kappa^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\kappa x}.$$

Обычно это распределение записывают через параметр  $\mu = 1/\bar{x}$  (так что  $\kappa = n\mu$  и  $\sigma_x^2 = 1/n\mu^2$ ):

$$w(x) = \frac{(n\mu)^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-n\mu x}. \quad (10.20)$$

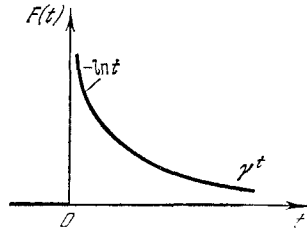


Рис. 4.

### § 11. Корреляционная функция

Рассматривая  $\xi(t)$  как случайную величину, мы нашли в предыдущем параграфе характеристическую функцию (10.4) и тем самым кумулянты  $\xi(t)$ , в частности среднее значение и дисперсию (10.6). Но для вычисления смешанных моментов двух случайных величин  $\xi_1 = \xi(t_1)$  и  $\xi_2 = \xi(t_2)$ , т. е. значений случайного процесса  $\xi(t)$  в два *различных* момента времени, надо знать совместную (двумерную) функцию распределения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  или найти соответствующую двумерную характеристическую функцию. Однако мы не будем решать эту задачу, а ограничимся вычислением только смешанного момента  $\overline{\xi_1 \xi_2} - \overline{\xi_1} \cdot \overline{\xi_2}$ , который является одной из важнейших характеристик случайных процессов, поскольку он определяет *корреляцию* между величинами  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . В общем случае этот момент зависит от  $t_1$  и  $t_2$ , или, если положить  $t_1 = t$ ,  $t_2 = t + \tau$ , — от  $t$  и  $\tau$ ; он называется *корреляционной функцией* случайного процесса  $\xi(t)$ :

$$\psi_{\xi}(t, \tau) = \overline{\xi(t) \xi(t + \tau)} - \overline{\xi(t)} \cdot \overline{\xi(t + \tau)}. \quad (11.1)$$

Так как кумулянт  $\lambda_1 = \overline{\xi(t)}$  оказался не зависящим от  $t$  (как и все  $\lambda_m$ ), второй член в правой части (11.1) равен  $\lambda_1^2$ . Следовательно, нам надо вычислить только смешанный момент

$$B_{\xi}(t, \tau) = \overline{\xi(t) \xi(t + \tau)}. \quad (11.2)$$

Схема расчета та же, что и в одномерном случае.

Запишем двумерную плотность вероятности для случайных величин

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \xi(t) = \sum_{\nu} F(t - t_{\nu}, \mathbf{a}_{\nu}), \\ \xi_{\tau} &\equiv \xi(t + \tau) = \sum_{\mu} F(t + \tau - t_{\mu}, \mathbf{a}_{\mu}) \end{aligned} \quad (11.3)$$

через условные плотности вероятности [при условии, что интервал времени  $(-T/2, T/2)$  содержит  $n$  импульсов]:

$$\omega(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) v(x, y | n). \quad (11.4)$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\xi \xi_{\tau}} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \overline{\xi \xi_{\tau}}^{n-}$$

где

$$\overline{\xi \xi_{\tau}}^{n-} = \int_{-\infty}^{+\infty} xy v(x, y | n) dx dy$$

— *условный* момент, т. е. среднее произведение величин (11.3), но с суммированием, распространенным только на те  $n$  импульсов, которые содержатся в  $(-T/2, T/2)$ :

$$\overline{\xi\xi_\tau} = \sum_{\nu, \mu=1}^n \langle F(t - t_\nu, \mathbf{a}_\nu) F(t + \tau - t_\mu, \mathbf{a}_\mu) \rangle.$$

Усреднение производится здесь по всем случайным параметрам  $t_\nu, t_\mu, \mathbf{a}_\nu, \mathbf{a}_\mu$  ( $\nu, \mu = 1, 2, \dots, n$ ). Так как величины с  $\nu \neq \mu$  по предположению независимы, двойную сумму можно разбить на две части:

$$\begin{aligned} \overline{\xi\xi_\tau} &= \sum_{\nu=1}^n \langle F(t - t_\nu, \mathbf{a}_\nu) F(t + \tau - t_\nu, \mathbf{a}_\nu) \rangle + \\ &\quad + \sum_{\nu \neq \mu} \langle F(t - t_\nu, \mathbf{a}_\nu) \rangle \langle F(t + \tau - t_\mu, \mathbf{a}_\mu) \rangle. \end{aligned}$$

Но средние значения не зависят в силу наших исходных допущений от номеров импульсов  $\nu$  и  $\mu$ . Поэтому первая сумма содержит  $n$  одинаковых слагаемых, а вторая —  $(n^2 - n)$ :

$$\begin{aligned} \overline{\xi\xi_\tau} &= n \langle F(t - \chi, \mathbf{a}) F(t + \tau - \chi, \mathbf{a}) \rangle + \\ &\quad + (n^2 - n) \langle F(t - \chi, \mathbf{a}) \rangle \langle F(t + \tau - \chi', \mathbf{a}') \rangle, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \langle F(t - \chi, \mathbf{a}) F(t + \tau - \chi, \mathbf{a}) \rangle &= \\ &= \int \omega_a(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-T/2}^{T/2} F(t - \chi, \mathbf{a}) F(t + \tau - \chi, \mathbf{a}) \frac{d\chi}{T}, \end{aligned}$$

$$\langle F(t - \chi, \mathbf{a}) \rangle = \int \omega_a(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-T/2}^{T/2} F(t - \chi, \mathbf{a}) \frac{d\chi}{T},$$

$$\langle F(t + \tau - \chi', \mathbf{a}') \rangle = \int \omega_a(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-T/2}^{T/2} F(t - \tau - \chi', \mathbf{a}) \frac{d\chi'}{T}.$$

Сделав в двух первых выражениях замену переменной интегрирования  $t - \chi = \theta$ , а в третьем — замену  $t + \tau - \chi' = \theta$  и раздвигая затем пределы интегралов по  $\theta$  в  $\pm \infty$ , получаем

$$\begin{aligned} \overline{\xi\xi_\tau} &= \frac{T}{n} \int \omega_a(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, \mathbf{a}) F(\theta + \tau, \mathbf{a}) d\theta + \\ &\quad + \frac{n^2 - n}{T} \left[ \int \omega_a(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, \mathbf{a}) d\theta \right]^2. \end{aligned}$$



Это условное среднее остается усреднить теперь по распределению Пуассона, для которого, как мы знаем,  $\bar{n} = n_1 T$  и  $D[n] = = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = \bar{n}$  (т. е.  $\bar{n}^2 - \bar{n} = \bar{n}^2 = n_1^2 T^2$ ), и мы получаем, согласно (11.4), момент второго порядка

$$B_{\xi}(\tau) = \overline{\xi\xi_{\tau}} = n_1 \int \omega_a(a) da \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, a) F(\theta + \tau, a) d\theta + \lambda_1^2,$$

где мы воспользовались первой формулой (10.6). Следовательно, но, корреляционная функция (11.1) есть

$$\psi_{\xi}(\tau) = n_1 \int \omega_a(a) \bar{d}a \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, a) F(\theta + \tau, a) d\theta. \quad (11.5)$$

Итак, корреляционная функция (и момент  $B_{\xi}$ ) не зависит от времени  $t$ , а только от *разности*  $\tau$  обоих моментов времени. Это снова результат стационарности рассматриваемого случайного процесса. При  $\tau = 0$  формула (11.5) переходит в формулу для дисперсии  $\xi(t)$  [см. вторую формулу (10.6)]:

$$\psi_{\xi}(0) = D[\xi(t)] = \lambda_2,$$

как это и должно быть в соответствии с определением (11.1) корреляционной функции.

Нетрудно видеть, что  $\psi_{\xi}(\tau)$  — четная функция  $\tau$ . При  $|\tau| \rightarrow \infty$ , если  $F(\theta)$  достаточно быстро убывает при  $|\theta| \rightarrow \infty$  (быстрее, чем  $1/\sqrt{|\theta|}$ ),  $\psi_{\xi}(\tau)$  стремится к нулю. Ясно, что с ростом  $|\tau|$  сомножители подынтегрального выражения в (11.5) раздвигаются и при указанном условии произведение стремится при больших  $|\theta|$  к нулю быстрее, чем  $1/|\theta|$ .

В частном случае, когда  $a$  — одномерная случайная величина, а именно «амплитуда» импульса [ $F(\theta, a) = aF(\theta)$ ], получаем

$$\psi_{\xi}(\tau) = n_1 \bar{a}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta. \quad (11.6)$$

Одной из компонент  $n$ -мерной случайной величины  $a_v$  может быть и случайная длительность  $v$ -го импульса  $\theta_v$ . Пусть  $\theta_v$  независимо от остальных компонент  $a_v$ , так что распределение  $\omega_a(a_v) da_v$  должно быть заменено на  $\omega_a(a_v) da_v \cdot \omega_{\theta}(\theta_v) d\theta_v$ . Если мы хотим явным образом учесть даваемое  $\theta_v$  случайное изменение длительности импульсов, то целесообразно представить детерминированную функцию  $F$ , описывающую форму импульса, в виде  $F\left(\frac{t - t_v}{\theta_v}, a_v\right)$ . Весь вывод характеристической

функции, кумулянтов и корреляционной функции остается при этом таким же, как и выше, но при усреднении по  $t_v$  — случайным моментам возникновения импульсов — удобно ввести новую переменную интегрирования  $\theta$  следующим образом:  $\theta = (t - t_v)/\vartheta_v$ . Тогда распределение  $dt_v/T$  в  $(-T/2, T/2)$  перейдет в  $\vartheta_v d\theta/T$  в пределах от  $(t - T/2)/\vartheta_v$  до  $(t + T/2)/\vartheta_v$ . После раздвигания пределов в  $\pm\infty$  параметр  $\vartheta_v$  сохранится только множителем в подынтегральной функции (а при вычислении корреляционной функции — еще и как масштаб для временного сдвига  $\tau$ , т. е. вместо  $\tau$  будет  $\tau/\vartheta_v$ ). В результате для кумулянтов  $\lambda_m$  мы получим вместо (10.5) формулу

$$\lambda_m = n_1 \bar{\vartheta} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle F^m(\theta, \mathbf{a}) \rangle d\theta, \quad (11.7)$$

а для корреляционной функции вместо (11.5) формулу

$$\psi_{\xi}(\tau) = n_1 \int_0^{\infty} \vartheta \omega_{\vartheta}(\vartheta) d\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} \langle F(\theta, \mathbf{a}) F(\theta + \frac{\tau}{\vartheta}, \mathbf{a}) \rangle d\theta, \quad (11.8)$$

где угловыми скобками обозначено для краткости усреднение по распределению  $\mathbf{a}$ .

Рассмотрим следующий пример. Пусть  $\mathbf{a}_v$  — одномерная случайная «амплитуда», так что

$$\xi(t) = \sum_v a_v F\left(\frac{t - t_v}{\vartheta_v}\right). \quad (11.9)$$

Пусть, далее,  $F(\theta) = 1$  в интервале  $(0, 1)$  и равно нулю вне этого интервала, причем длительности  $\vartheta$  распределены по закону

$$\omega(\vartheta) d\vartheta = e^{-\vartheta/\bar{\vartheta}} \frac{d\vartheta}{\bar{\vartheta}}.$$

Тогда при  $\tau > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) F\left(\theta + \frac{\tau}{\vartheta}\right) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } \vartheta < \tau, \\ 1 - \frac{\tau}{\vartheta} & \text{при } \vartheta > \tau, \end{cases}$$

а значит,

$$\psi(\tau) = n_1 \bar{a}^2 \int_{\tau}^{\infty} (\vartheta - \tau) e^{-\vartheta/\bar{\vartheta}} \frac{d\vartheta}{\bar{\vartheta}} = n_1 \bar{a}^2 \bar{\vartheta} e^{-\tau/\bar{\vartheta}}.$$

Функция корреляции четна по  $\tau$ , так что при произвольном знаке  $\tau$  результат можно записать в виде

$$\psi(\tau) = n_1 \bar{a}^2 \bar{\vartheta} e^{-|\tau|/\bar{\vartheta}}. \quad (11.10)$$

Рис. 5 дает представление о характере этого процесса в частном случае фиксированных  $a_v = 1$ . Было высказано предположение, что такого рода процесс способен послужить моделью для эффекта мерцания — относительно медленных флуктуаций тока эмиссии, обусловленных локальными изменениями эмиссионной способности поверхности катода [4]. Если причиной этих изменений является присутствие на поверхности примесных атомов, в частности сающихся на катод атомов остаточного газа,

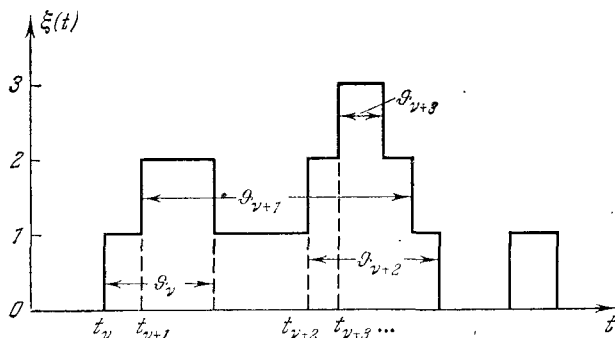


Рис. 5.

то  $\xi(t)$  — это случайное мгновенное число таких атомов, а  $\tau_v$  — времена их пребывания на поверхности. Однако подобная модель не согласуется с формой спектра эффекта мерцания, которая в широком диапазоне частот  $\omega$  большей частью близка к  $\omega^{-1}$  (см. § 55). Наряду с попытками усовершенствовать теорию введением набора средних времен пребывания  $\bar{\tau}$  с некоторыми весами или посредством других аналогичных допущений, была высказана мысль о том, что спектр требуемого вида может быть связан с процессом (8.1), если импульсы  $F(t)$  очень медленно спадают с ростом  $t^1$ , а именно, если при достаточно больших  $t$  функция  $F(t)$  убывает, как  $t^{\alpha/2-1}$  ( $0 < \alpha < 2$ ). Однако при  $\alpha \geq 1$  процесс уже не является стационарным. Мы вернемся к этому кругу вопросов в дальнейшем, при рассмотрении спектральных разложений случайных процессов.

Приведем в заключение еще один пример импульсного процесса, связанного с пуассоновским. Это — так называемый обобщенный телеграфный сигнал — чередующиеся скачки  $\xi(t)$  между значениями  $-a$  и  $+a$ , причем моменты скачков  $t_v$  распределены по Пуассону (рис. 6). Для простоты мы примем среднюю густоту скачков  $n_1$  постоянной. Добавление к  $\xi(t)$  постоянной составляющей  $\xi_0 > a$  дало бы односторонние импульсы, и тогда

<sup>1)</sup> См. [5], где приведен также обзор литературы.

рассматриваемый процесс мог бы служить очень упрощенной моделью флуктуаций проводимости в находящихся под током гранулированных сопротивлениях, представляющих собой конгломерат (чаще всего пленку) из хорошо проводящих контактирующих зерен. Поскольку постоянная составляющая  $\bar{\xi} = \xi_0$  не существенна для статистических свойств процесса, мы будем считать  $\bar{\xi} = 0$ . Распределение моментов  $t_v$  смены знака  $\xi$  по Пуассону означает, что длительности импульсов имеют экспоненциальное распределение

$$n_1 e^{-n_1 t} dt.$$

Казалось бы, что, рассматривая производную  $\dot{\xi}(t)$ , состоящую из импульсов  $\pm 2a\delta(t - t_v)$ , мы возвращаемся к уже разобранный задаче — процессу вида (8.1). Легко видеть, однако, что это не так, поскольку теперь является обязательным чередование знаков скачков, в то время как в (8.1) значения  $a_v$  были взаимно независимы.

Если в интервале  $(t, t + \tau)$  знак  $\xi(t)$  изменился четное число раз, то  $\xi(t + \tau)$  того же знака, что и  $\xi(t)$ , т. е.  $\xi(t + \tau)\xi(t) = a^2$ . В противном случае это произведение равно  $-a^2$ . Следовательно, при  $\tau > 0$

$$\psi(\tau) = a^2 P_{\text{чет}} - a^2 P_{\text{неч}},$$

где  $P_{\text{чет}}$  и  $P_{\text{неч}}$  — вероятности четного и нечетного числа скачков за время  $\tau$ . В соответствии с законом Пуассона

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad \text{где } \bar{n} = n_1 \tau,$$

имеем

$$P_{\text{чет}} = P(0) + P(2) + \dots = e^{-\bar{n}} \left( 1 + \frac{\bar{n}^2}{2!} + \frac{\bar{n}^4}{4!} + \dots \right) = e^{-\bar{n}} \text{ch } \bar{n},$$

$$P_{\text{неч}} = P(1) + P(3) + \dots = e^{-\bar{n}} \left( \bar{n} + \frac{\bar{n}^3}{3!} + \frac{\bar{n}^5}{5!} + \dots \right) = e^{-\bar{n}} \text{sh } \bar{n}.$$

Следовательно, при  $\tau > 0$

$$\psi(\tau) = a^2 e^{-\bar{n}} (\text{ch } \bar{n} - \text{sh } \bar{n}) = a^2 e^{-2\bar{n}} = a^2 e^{-2n_1 \tau},$$

а при любом знаке  $\tau$

$$\psi(\tau) = a^2 e^{-2n_1 |\tau|}. \quad (11.11)$$

Отметим, что функция корреляции (11.11) совпадает по форме с (11.10), несмотря на совершенно различный вид реализации самих случайных процессов (рис. 5 и 6). Такая же функция

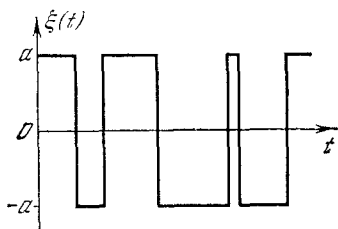


Рис. 6.

корреляции будет и у процесса (8.1), если он состоит из экспоненциальных импульсов

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ e^{-\alpha t} & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Несложный расчет по формуле (11.6) показывает, что и в этом случае

$$\psi(\tau) = \frac{n_1 \bar{a}^2}{2\alpha} e^{-\alpha |\tau|}. \quad (11.12)$$

Представление о реализации такого процесса, который может являться откликом RC-цепочки на случайную последовательность дельта-импульсов, дает рис. 7.

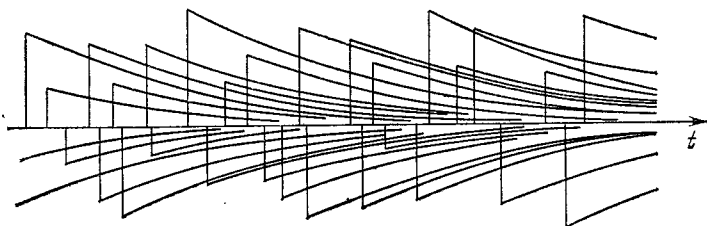


Рис. 7.

Функция корреляции вида  $Ae^{-\alpha|\tau|}$  часто употребляется в качестве аппроксимации в тех случаях, когда фактическая  $\psi(\tau)$  монотонно спадает, не меняя знака. Такая аппроксимация очень удобна (наряду с гауссовой кривой) для разного рода теоретических оценок и приближенных выводов.

## § 12. Некоторые обобщения задачи об импульсах

В основе предыдущих выводов лежало предположение о том, что плотность вероятности возникновения импульса в промежутке  $(t, t + dt)$  постоянна и, следовательно, не зависит ни от момента времени  $t$ , ни от наличия и положения других импульсов. Отказ от любого из этих допущений ведет к более общим случаям.

Если вероятность появления импульса в  $(t, t + dt)$  зависит от промежутков времени между  $t$  и моментами возникновения некоторого числа предшествующих импульсов, то это будет уже условная вероятность<sup>1)</sup>. Рассмотрим первоначально именно эту задачу, но ограничимся случаем, когда на вероятность появления  $\nu$ -го импульса влияет только  $(\nu - 1)$ -й импульс, т. е. эта

<sup>1)</sup> Постановку и решение этой задачи дал Домб [6].

вероятность зависит от времени  $\vartheta$ , протекшего с момента появления  $(\nu - 1)$ -го импульса:

$$P \left\{ \begin{array}{l} \nu\text{-й импульс} \\ \text{в } (\vartheta, \vartheta + d\vartheta) \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{при условии, что} \\ \text{интервал } \vartheta \text{ пустой} \end{array} \right\} = \varphi(\vartheta) d\vartheta. \quad (12.1)$$

Естественно ожидать, что с ростом  $\vartheta$  влияние  $(\nu - 1)$ -го импульса ослабевает, т. е.  $\varphi(\vartheta) \rightarrow \text{const}$ .

Раньше у нас было  $\varphi(\vartheta) = n_1^0 = \text{const}$  при всяком  $\vartheta$  [т. е. распределение (12.1) было безусловным], и это давало для числа импульсов  $n$  в интервале  $(0, T)$  распределение Пуассона<sup>1)</sup>. Теперь распределение  $n$ , конечно, не будет пуассоновским, и соответствующее изменение моментов  $\bar{n}$  и  $\bar{n}^2$  будет интересовать нас в первую очередь.

Как связана с  $\varphi(\vartheta)$  вероятность  $W(\vartheta)$  того, что промежуток  $\vartheta$  после  $(\nu - 1)$ -го импульса пустой? Очевидно, вероятность  $W(\vartheta + d\vartheta)$  пустого промежутка  $\vartheta + d\vartheta$  равна произведению вероятности  $W(\vartheta)$  пустого  $\vartheta$  на условную вероятность того, что при пустом  $\vartheta$  интервал  $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$  тоже пустой. «Не пустой» интервал  $d\vartheta$  означает, что в нем может возникнуть не только  $\nu$ -й импульс, но и  $(\nu + 1)$ -й,  $(\nu + 2)$ -й и т. д. Мы уже видели, однако, что вероятность появления  $m$  импульсов в бесконечно малом интервале  $d\vartheta$  является величиной порядка  $(d\vartheta)^m$ . Поэтому условная вероятность пустого  $d\vartheta$  с точностью до первого порядка малости по  $d\vartheta$  равна  $1 - \varphi(\vartheta)d\vartheta$ . Таким образом,

$$W(\vartheta + d\vartheta) = W(\vartheta) [1 - \varphi(\vartheta) d\vartheta].$$

Ограничиваясь и слева первым порядком относительно  $d\vartheta$  и выполнив интегрирование, находим

$$W(\vartheta) = \exp \left\{ - \int_0^{\vartheta} \varphi(\theta) d\theta \right\}. \quad (12.2)$$

Введем, далее, вероятность  $g(\vartheta)d\vartheta$  того, что между двумя последовательными импульсами протекло время от  $\vartheta$  до  $\vartheta + d\vartheta$ . Эта вероятность равна произведению вероятности  $W(\vartheta)$  пустого  $\vartheta$  на условную вероятность (12.1) появления импульса в  $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$  при пустом  $\vartheta$ :

$$g(\vartheta) d\vartheta = W(\vartheta) \varphi(\vartheta) d\vartheta = \exp \left\{ - \int_0^{\vartheta} \varphi(\theta) d\theta \right\} \varphi(\vartheta) d\vartheta. \quad (12.3)$$

Обратимся теперь к непосредственно интересующей нас вероятности  $P_n(T)$  появления в интервале  $(0, T)$   $n$  импульсов. Со-

<sup>1)</sup> Верхний индекс 0 при  $n_1$  введен теперь специально, чтобы выделить случай некоррелированных импульсов.

бытие « $n$  импульсов в  $(0, T)$ » можно разбить на взаимно исключающие частные случаи, состоящие в том, что последний ( $n$ -й) импульс возник за время  $(\eta, \eta + d\eta)$  до конца интервала  $(0, T)$ . Обозначив вероятность такого частного случая через  $p_n(T, \eta) d\eta$ , имеем

$$P_n(T) = \int_0^T p_n(T, \eta) d\eta.$$

Но  $p_n(T, \eta) d\eta$  можно записать как произведение вероятности  $W(\eta)$  того, что интервал  $\eta$  пустой (т. е.  $n$ -й импульс последний), на вероятность того, что  $n$ -й импульс появился в конце интервала  $(0, T - \eta)$ , равную  $p_n(T - \eta, 0) d\eta$ :

$$p_n(T, \eta) = W(\eta) p_n(T - \eta, 0).$$

Следовательно,

$$P_n(T) = \int_0^T W(\eta) p_n(T - \eta, 0) d\eta. \quad (12.4)$$

Вероятности же  $p_n(t, 0) \equiv w_n(t)$  удовлетворяют следующему интегрально-разностному уравнению:

$$w_n(T) = \int_0^T w_{n-1}(T - \eta) g(\eta) d\eta. \quad (12.5)$$

Действительно, под интегралом мы имеем произведение вероятностей того, что  $(n - 1)$ -й импульс появился в конце интервала  $(0, T - \eta)$ , и того, что между  $(n - 1)$ -м и  $n$ -м импульсами прошло время  $\eta$ , т. е.  $n$ -й импульс оказался в конце интервала  $(0, T)$ . Разные значения  $\eta$  дают взаимно исключающие частные случаи события « $n$ -й импульс в конце  $(0, T)$ », полная вероятность которого и записана в (12.5).

Решая (12.5) при заданных  $g(\eta)$  и  $w_1(t)$ , мы получаем  $w_n(t) \equiv p_n(t, 0)$ , что позволяет при помощи (12.4) вычислить  $P_n(T)$ . Однако прямое осуществление этой программы довольно сложно.

В цитируемой работе [6] задача решается асимптотически (для достаточно больших  $T$ ) при помощи преобразования Лапласа и введения моменто-производящей функции

$$f(T, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(T) e^{n\theta}.$$

При больших  $T$  эта функция зависит только от  $g(t)$  [но не от  $w_1(t)$ ] и может быть представлена рядом по степеням  $\theta$ , коэффициенты которого выражаются через (асимптотические) зна-

чения  $\bar{n}$ ,  $\bar{n}^2$ , ... Таким путем получается, в частности, что

$$\bar{n} = \frac{T}{\bar{\vartheta}}, \quad \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = \frac{\overline{\vartheta^2} - \bar{\vartheta}^2}{\bar{\vartheta}^3} T, \quad \text{где } \overline{\vartheta^m} = \int_0^{\infty} \vartheta^m g(\vartheta) d\vartheta. \quad (12.6)$$

Для некоррелированных импульсов (12.1) имеет вид (§ 8)

$$\varphi(\vartheta) d\vartheta = n_1^0 d\vartheta,$$

где  $n_1^0$  — среднее число импульсов в единицу времени в этом случае. Соответственно формулы (12.2) и (12.3) дают следующие выражения для вероятности пустого промежутка  $\vartheta$  после импульса:

$$W(\vartheta) = e^{-n_1^0 \vartheta},$$

и для вероятности промежутка  $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$  между последовательными импульсами:

$$g(\vartheta) d\vartheta = e^{-n_1^0 \vartheta} n_1^0 d\vartheta. \quad (12.7)$$

Если для больших  $\vartheta$  отождествить  $g(\vartheta) d\vartheta$  с  $\omega_1(\vartheta) d\vartheta$ , т. е. с вероятностью того, что *первый* (он же последний) импульс появился в конце пустого промежутка  $(0, \vartheta)$ , то прямой расчет по формуле (12.5) дает

$$\omega_n(t) = \frac{e^{-n_1^0 t} (n_1^0)^n t^{n-1}}{(n-1)!},$$

а по (12.4) получаем распределение Пуассона:

$$P_n(T) = \frac{e^{-n_1^0 T} (n_1^0 T)^n}{n!},$$

согласно которому

$$\bar{n} = n_1^0 T, \quad \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = \bar{n} = n_1^0 T.$$

К тому же результату приводят, конечно, и формулы (12.6) при

$$g(\vartheta) = e^{-n_1^0 \vartheta} n_1^0.$$

Рассмотрим теперь примеры иного задания  $g(\vartheta)$ .

1. Пусть  $g(\vartheta)$  — плотность гамма-распределения:

$$g(\vartheta) = \frac{\alpha \vartheta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\alpha \vartheta}.$$

Если  $0 < \alpha < 1$ , то вероятность промежутка  $\vartheta$  между импульсами спадает с ростом  $\vartheta$  быстрее, чем в случае  $\alpha = 1$ , который



соответствует отсутствию корреляции, т.е. формуле (12.7) с  $n_1^0 = \kappa$ . Таким образом, при  $0 < \alpha < 1$  мы имеем «притягательную» корреляцию: импульс повышает вероятность последующего импульса. Напротив, при  $\alpha > 1$  корреляция «отталкивательная». Расчет по формулам (12.6) дает

$$\bar{n} = \frac{\kappa\Gamma}{\alpha}, \quad \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \frac{\kappa\Gamma}{\alpha^2} = \frac{\bar{n}}{\alpha}.$$

Из выражения для  $\bar{n}$  видно, что теперь среднее число импульсов в единицу времени есть

$$n_1 = \frac{\kappa}{\alpha} = \frac{n_1^0}{\alpha}.$$

Если в общие выражения (12.6) ввести густоту импульсов  $\kappa$  при отсутствии корреляции, то можно записать их в виде

$$\bar{n} = \gamma\kappa\Gamma, \quad \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \Gamma^2\bar{n}, \quad (12.8)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\kappa\bar{\phi}}, \quad \Gamma^2 = \frac{\overline{\phi^2}}{\bar{\phi}^2} - 1. \quad (12.9)$$

В нашем примере

$$\gamma = \frac{1}{\alpha}, \quad \Gamma^2 = \frac{1}{\alpha}.$$

Выражения вида (12.8) получаются при расчете дробового эффекта с учетом влияния объемного заряда. Величина  $\Gamma^2$  называется *коэффициентом депрессии*, так как (в случае  $\Gamma^2 < 1$ ) она показывает, в какой мере дробовой шум подавлен по сравнению с его уровнем при отсутствии объемного заряда. Вычислению  $\Gamma^2$  в зависимости от различных физически интересных условий посвящено много работ. Из теории, развитой Домбом, видно, что  $\gamma$  и  $\Gamma^2$  выражаются в общей форме в терминах корреляции между событиями, так что задача физической теории депрессии дробового эффекта может быть сформулирована как задача отыскания вида распределения  $g(\phi)$  [или  $\varphi(\phi)$ , или  $W(\phi)$ ]<sup>1)</sup>. Подавление дробового шума при наличии объемного заряда означает, что последний создает «отталкивательную» корреляцию между импульсами анодного тока.

<sup>1)</sup> Если вероятность появления импульса зависит от моментов появления не одного, а  $r$  предыдущих импульсов, то формулы (12.8) сохраняются, но для вычисления  $\gamma$  и  $\Gamma^2$  должны быть известны как средние значения  $\bar{\phi}_1$  и  $\bar{\phi}_1^2$ , так и смешанные моменты для интервала  $\phi_1$  и  $r$  последующих интервалов  $\phi_i\phi_i$  ( $i = 2, 3, \dots, r$ ). При  $i > r$  длины интервалов уже некоррелированы, так что  $\overline{\phi_1\phi_i} = \bar{\phi}_1^2$ .

2. Счетчик частиц восстанавливается после пролета частицы в течение постоянного промежутка времени  $\beta$ , т. е. вероятность регистрации частицы в течение времени  $\beta$  равна нулю, после чего имеет место равномерное распределение  $\varphi(\theta) d\theta = \lambda d\theta$ . Таким образом,

$$g(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta < \beta, \\ \lambda e^{-\lambda(\theta-\beta)} & \text{при } \theta > \beta. \end{cases}$$

Это дает

$$\bar{\theta} = \beta + \frac{1}{\lambda}, \quad \bar{\theta}^2 - \bar{\theta}^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

так что по (12.9)

$$\gamma = \frac{1}{1 + \lambda\beta}, \quad \Gamma^2 = \frac{1}{(1 + \lambda\beta)^2},$$

т. е. всегда  $\Gamma^2 < 1$ , чего, конечно, и следовало ожидать.

3. Пусть

$$g(\theta) = \beta \delta(\theta) + (1 - \beta) \lambda e^{-\lambda\theta}.$$

Первый член означает, что имеются *конечные* вероятности  $\beta, \beta^2, \dots$  одновременного наступления двух, трех и т. д. событий. В этом случае

$$\bar{\theta} = \frac{1 - \beta}{\lambda}, \quad \bar{\theta}^2 - \bar{\theta}^2 = \frac{1 - \beta^2}{\lambda^2}$$

и, следовательно,

$$\gamma = \frac{1}{1 - \beta}, \quad \Gamma^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Здесь всегда  $\Gamma^2 > 1$ .

Обратимся теперь к случаю *независимых* моментов возникновения импульсов, но с неравномерным распределением  $t_v$ . Вероятность  $n_1(t) dt$  появления импульса в интервале  $(t, t + dt)$  теперь по-прежнему не зависит от того, имелись ли и в каком количестве импульсы до момента времени  $t$ , но зависит от этого времени. Отсчет  $t$  производится от какого-то фиксированного начального момента  $t = 0$ . Ясно, что этим вносится известная упорядоченность: густота толчков будет явно зависеть от  $t$ , и тем самым процесс уже не будет стационарным. Как изменятся формулы для среднего значения, среднего квадрата и функции корреляции импульсного процесса  $\xi(t)$ ?

Можно показать, что и в этом случае для вероятности  $n$  импульсов в интервале  $(0, T)$  остается в силе закон Пуассона с параметром

$$\bar{n} = \int_0^T n_1(t) dt$$

(см. задачу 10). Вероятность же  $\omega_t(t)dt$  того, что импульс, заведомо появившийся в интервале  $(0, T)$ , возник в промежутке  $(t, t + dt)$  внутри  $(0, T)$ , будет

$$\omega_t(t) dt = \frac{n_1(t) dt}{\bar{n}}.$$

[При  $n_1(t) = n_1^0 = \text{const}$  мы возвращаемся к распределению  $dt/T$ .] С этими отличиями надо повторить те же выводы, которые были сделаны выше при постоянном  $n_1$  в §§ 10 и 11. Так, например, теперь

$$\begin{aligned} \langle F(t - t_\nu) F(t + \tau - t_\mu) \rangle &= \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\bar{n}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) n_1(t - \theta) d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta' + \tau) n_1(t - \theta') d\theta' & (\nu \neq \mu), \\ \frac{1}{\bar{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) n_1(t - \theta) d\theta & (\nu = \mu). \end{cases} \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\overline{\xi(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} n_1(t - \theta) \langle F(t, \mathbf{a}) \rangle d\theta, \quad (12.10)$$

$$\begin{aligned} \psi(t, \tau) &= \overline{\xi(t) \xi(t + \tau)} - \overline{\xi(t)} \cdot \overline{\xi(t + \tau)} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} n_1(t - \theta) \langle F(\theta, \mathbf{a}) F(\theta + \tau, \mathbf{a}) \rangle d\theta, \quad (12.11) \end{aligned}$$

откуда, в частности,

$$D[\overline{\xi(t)}] = \psi(t, 0) = \overline{\xi^2(t)} - \overline{\xi(t)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} n_1(t - \theta) \langle F^2(\theta, \mathbf{a}) \rangle d\theta. \quad (12.12)$$

Согласно (12.10) и (12.12) среднее значение и дисперсия  $\xi(t)$  теперь не постоянны, а зависят от  $t$ , в чем проявляется нестационарность процесса. Функция корреляции (12.11), характеризующая статистическую связь между  $\xi(t)$  и  $\xi(t + \tau)$ , зависит теперь не только от временного сдвига  $\tau$ , но и от исходного момента времени  $t$ . Разумеется, если положить  $n_1(t) = n_1 = \text{const}$ , то формулы перейдут в полученные ранее<sup>1)</sup>.

Предположим, что  $n_1(t)$  есть некоторая почти-периодическая (в частности, периодическая) функция времени. Тогда такой же почти-периодический (соответственно периодический) характер

<sup>1)</sup> Обобщение на нестационарные импульсные процессы рассматривалось в очень многих работах (см., например, [7]).

будут иметь и моменты (12.10)—(12.12) рассматриваемого нестационарного процесса.

Если на протяжении одного импульса, т. е. за время  $\vartheta$ ,  $n_1(t)$  успевает много раз просциллировать, т. е.  $n_1(t)$  меняется быстро по сравнению с  $F(t)$ , то практически в интегралы даст вклад только среднее значение  $n_1(t - \theta)$ , равное  $\bar{n}/T = \bar{n}_1$ . Мы получим тогда

$$\overline{\xi(t)} = \bar{n}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle F(\theta, \mathbf{a}) \rangle d\theta, \quad \psi(\tau) = \bar{n}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle F(\theta, \mathbf{a}) F(\theta + \tau, \mathbf{a}) \rangle d\theta,$$

т. е. формулы для стационарного процесса со средним по времени значением числа импульсов в единицу времени  $\bar{n}_1$ .

Такое положение вещей имеет место, например, в усилителе промежуточной частоты. Гетеродин меняет параметры шумящего смесителя с высокой частотой  $\omega_0$ , в результате чего с этой частотой меняется густота  $n_1(t)$  импульсов дробового шума. Длительность же отдельного импульса  $\vartheta$  на выходе усилителя промежуточной частоты определяется, как известно, его полосой  $\Delta\omega \ll \omega_0$  ( $\vartheta \sim 1/\Delta\omega$ ). Таким образом,  $\vartheta \gg 1/\omega_0$  и шум на выходе усилителя промежуточной частоты можно рассматривать как стационарный.

Напротив, если изменение  $n_1(t)$  очень медленное, т. е. на протяжении длительности импульса  $\vartheta$  функция  $n_1(t)$  практически не меняется, то в интегралах можно принять  $n_1(t - \theta) = n_1(t)$  и вынести этот множитель из-под интегралов. Мы получаем тогда квазистационарное изменение статистических характеристик процесса:

$$\xi(t) = n_1(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \langle F(\theta, \mathbf{a}) \rangle d\theta,$$

$$\psi(t, \tau) = n_1(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \langle F(\theta, \mathbf{a}) F(\theta + \tau, \mathbf{a}) \rangle d\theta.$$

В каждый момент времени  $t$  процесс ведет себя как стационарный со значением густоты импульсов, взятым в этот момент. Так будет обстоять дело, например, при прохождении шума через линейную систему с медленно «ползающими» параметрами.

В дальнейшем нам еще не раз придется вернуться к случайным процессам, представляющим собой хаотическую последовательность импульсов, но уже на основе тех методов, которыми располагает теория случайных функций. Прежде чем перейти к этим методам, остановимся на вопросе о том, как связан асимптотический результат, полученный в § 10, с центральной предельной теоремой теории вероятностей.

### § 13. Импульсный шум и центральная предельная теорема

Как известно, под названием «центральной предельной теоремы» в теории вероятностей фигурирует не одна, а целое семейство теорем различной степени общности, касающихся одного и того же вопроса — предельного распределения суммы независимых случайных величин при неограниченном увеличении числа слагаемых.

Мы видели (§ 9), что сумма *любого* числа нормально распределенных величин тоже распределена по гауссову закону. Центральная предельная теорема сразу же выводит за пределы «нормального семейства». Уже в частном примере пуассоновского импульсного случайного процесса (§ 10) мы убедились, что при увеличении «густоты» шума, т. е. увеличении числа независимых импульсов  $x_v = F(t - t_v, a_v)$ , складывающихся в каждый данный момент времени  $t$ , распределение суммы  $\xi(t) = \sum_v x_v$  стремится к нормальному. Слагаемые  $x_v$  были при этом распределены не по гауссову, но по некоторому специальному закону, *одинаковому* для всех  $x_v$  (и вытекающему из распределений случайных параметров  $a_v$  и  $t_v$ ).

Другой пример того же рода дает теорема Муавра — Лапласа (§ 6), которую нетрудно записать в такой форме, чтобы она относилась к среднему арифметическому (т. е. к сумме независимых случайных величин-фиксаторов  $\epsilon_i$ ):

$$\zeta_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i = \frac{n}{N}.$$

Согласно теореме при неограниченном росте числа  $N$  независимых случайных слагаемых  $\epsilon_i$  распределение (нормированной) суммы  $\zeta_N$  стремится к нормальному. Здесь все слагаемые распределены, как и в примере импульсного процесса, *одинаково*, но теперь это распределение — простая альтернатива ( $\epsilon_i = 1$  или  $0$  с вероятностями  $p$  и  $q = 1 - p$ ).

Не будет ли нормальное распределение суммы предельным при иных распределениях слагаемых или даже при распределениях, различных для каждого слагаемого? Если это так, то насколько жестким ограничениям должны быть подчинены распределения слагаемых? На эти вопросы и отвечает центральная предельная теорема.

Эти вопросы важны потому, что они касаются статистики таких физических величин, на значение которых влияет очень много независимых случайных факторов, причем каждый из них вызывает лишь весьма малое случайное отклонение. С таким положением вещей мы сталкиваемся и при измерениях, и в

флуктуациях макроскопических величин, обусловленных хаотичностью положений и движений огромного количества микрочастиц — молекул, ионов, электронов и т. д. Эта проблема в свое время привлекла внимание уже Гаусса, Чебышев, Марков, Ляпунов дали первое ее решение, показав, что на случайные слагаемые действительно достаточно наложить лишь очень общие ограничения. Смысл этих ограничений именно в том и состоит, что отдельные слагаемые должны мало влиять на сумму, и тем меньше, чем больше  $N$ .

Строгое доказательство теоремы дал в 1898 г. Марков, а затем в 1900 г. в более общей форме — Ляпунов. Теорема Ляпунова (вместе с дальнейшими ее обобщениями) и получила название *центральной предельной теоремы* теории вероятностей.

Поясним идею доказательства на очень простом случае теоремы *Линдберга — Леви*. В этой теореме (доказанной позже теоремы Ляпунова) содержится очень сильное ограничение: предполагается, что *все слагаемые  $x_v$  распределены одинаково*. Содержание теоремы следующее: пусть  $x_v$  — независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения  $W(x)$ , причем  $\bar{x}_v = 0$ ,  $\overline{x_v^2} = 1$ ; тогда, равномерно для всех  $x$ , распределение суммы

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_1^N x_v$$

стремится при  $N \rightarrow \infty$  к

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx,$$

т. е.

$$[W(x\sqrt{N})]^{N*} \rightarrow \Phi(x),$$

откуда

$$\left[ W\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \right]^{N*} \rightarrow \Phi\left(\frac{x-Na}{\sqrt{N}\sigma}\right)$$

равномерно относительно  $x$  при любых фиксированных  $a$  и  $\sigma$ . Это, конечно, весьма частный случай центральной предельной теоремы, но, в отличие от теоремы Ляпунова, здесь не предполагается существования у  $x_v$  абсолютных моментов порядка  $k > 2$  (см. ниже).

Доказательство теоремы очень простое — благодаря использованию характеристических функций. Пусть  $W(x)$  соответствует характеристическая функция  $\varphi(u)$ . По условию  $\alpha_1 = \bar{x}_v = 0$ ,  $\alpha_2 = \overline{x_v^2} = 1$ . Следовательно,

$$\varphi(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2),$$

откуда

$$\varphi\left(\frac{u}{\sqrt{N}}\right) = 1 - \frac{u^2}{2N} + o(N^{-3/2}).$$

Для

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_1^N x_\nu$$

характеристическая функция есть

$$\left[\varphi\left(\frac{u}{\sqrt{N}}\right)\right]^N = \left[1 - \frac{u^2}{2N} + o(N^{-3/2})\right]^N.$$

При  $N \rightarrow \infty$  она стремится равномерно в каждом конечном интервале  $u$  к  $e^{-u^2/2}$ , т. е. к характеристической функции для  $\Phi(x)$ . Это все, что нужно, так как по теореме Леви, если последовательность характеристических функций сходится к  $\varphi(u)$ , то последовательность соответствующих функций распределения сходится к  $W(x)$ , соответствующей  $\varphi(u)$ .

Теорема Ляпунова является более общей в том отношении, что касается суммы *неодинаково распределенных* независимых случайных величин. И здесь, если предположить, что  $\bar{x}_\nu = 0$  (что, конечно, несколько не уменьшает общности, а делается просто для удобства), а дисперсии  $\sigma_\nu^2 = \overline{x_\nu^2}$  *конечны*, то при определенных условиях закон распределения нормированной суммы

$$S_N = \frac{1}{B_N} \sum_1^N x_\nu$$

(где  $B_N^2 = \sum_1^N \sigma_\nu^2$  — дисперсия суммы  $\sum_1^N x_\nu$ ) стремится при  $N \rightarrow \infty$  к  $\Phi(x)$ . Весь вопрос в этих условиях.

Особенно важен случай, когда при  $N \rightarrow \infty$  имеем  $B_N \rightarrow \infty$ , но  $\sigma_\nu/B_N \rightarrow 0$ , т. е. каждая отдельная компонента  $\sigma_\nu^2$  составляет исчезающе малую долю от суммарной дисперсии  $B_N^2$ , неограниченно растущей с увеличением  $N$ . В этом случае является *достаточным* условием, фигурирующее в теореме Ляпунова. Обозначим через  $[C_{kN}]^k$  сумму *абсолютных* моментов  $x_\nu$   $k$ -го порядка:

$$[C_{kN}]^k = \sum_1^N \overline{|x_\nu|^k}. \quad (13.1)$$

Условие Ляпунова можно записать тогда в виде

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_{kN}}{B_N} = 0 \quad \text{при } k > 2, \quad (13.2)$$

т. е. требуется, чтобы у величин  $x_v$  существовали абсолютные моменты *какого-либо* порядка  $k > 2$  и чтобы корень  $k$ -й степени из суммы этих моментов возрастал при  $N \rightarrow \infty$  медленнее, чем квадратный корень из суммы дисперсий. Если условие (13.2) выполнено, то распределение  $F_N(x)$  нормированной суммы  $S_N$  стремится при  $N \rightarrow \infty$  к нормальному закону  $\Phi(x)$ . Пользуясь условием (13.2), Ляпунов не только доказал свою теорему, но и дал оценку величины  $|F_N(x) - \Phi(x)|$ , т. е. нашел, как быстро она стремится к нулю с ростом  $N$  [не медленнее, чем  $C \ln N / \sqrt{N}$ ; Крамер усилил эту оценку: при несколько более жестких условиях модуль разности  $F_N(x)$  и  $\Phi(x)$  меньше  $C/\sqrt{N}$ ].

Заметим, что в том же случае  $B_N \rightarrow \infty$  и  $\sigma_v/B_N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  самое общее (*необходимое и достаточное*) условие справедливости центральной предельной теоремы — это условие Линдберга<sup>1)</sup>. Мы ограничимся, однако, формулировкой теоремы при условии Ляпунова, поскольку им вполне можно обойтись в подавляющем большинстве физических задач. Более того, как правило, достаточно пользоваться условием Ляпунова при  $k = 3$ , т. е. брать это условие в виде

$$C_{3N}/B_N \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty. \quad (13.3)$$

Для теории шумов условие Ляпунова означает, что нет больших *редких выбросов* (если только сами эти выбросы не подчинены нормальному закону распределения), что в каждый момент складывается чрезвычайно много равноправных (в смысле их относительной малости) случайных независимых величин. При этих условиях, выполняющихся для широкого класса шумов, распределение шума будет нормальным. Но при одинаковом распределении шумов могут существенно различаться по другим свойствам, в частности по своим спектрам. Для шумов, возникающих от наложения независимых импульсов, эти различия зависят от особенностей отдельных слагаемых, от формы складывающихся импульсов.

Заметим, что проведенный выше вывод условия (10.14), при котором распределение суперпозиции случайных импульсов приближается к нормальному, по сути дела означал применение условия Ляпунова (13.3), причем в данной задаче  $n_1 \neq 0$  и есть число  $N$  случайных величин  $x_v$ , определяющих мгновенное значение суммы  $\sum_v x_v$ .

<sup>1)</sup> См. [8], стр. 73.



## З а д а ч и

1. Логарифмически-нормальным (коротко, логнормальным) распределением случайной величины  $x \geq 0$  называется распределение

$$w(x) dx = \frac{dx}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (1)$$

где  $\lambda = \langle \ln x \rangle$  и  $\sigma^2 = D[\ln x]$ . Нетрудно видеть, что (1) — это стандартное нормальное распределение нормированной случайной величины  $y = (\ln x - \lambda)/\sigma$ , т. е.

$$w(x) dx = \Phi(y) dy, \quad \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}. \quad (2)$$

Пользуясь преобразованием от  $x$  к  $y$

$$x = e^{\sigma y + \lambda},$$

найти моменты  $\alpha_k = \overline{x^k}$ .

Р е ш е н и е. Имеем

$$\alpha_k = \overline{x^k} = \int_0^{+\infty} x^k w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k(\sigma y + \lambda)} \Phi(y) dy = e^{k\lambda + k^2\sigma^2/2},$$

или, поскольку  $\alpha_1 = e^{\lambda + \sigma^2/2}$ ,

$$\alpha_k = e^{k(k-1)\sigma^2/2} \alpha_1^k.$$

Для дисперсии  $x$  получаем

$$D[x] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = (e^{\sigma^2} - 1) \alpha_1^2.$$

Если ввести обозначения  $\lambda = \langle \ln x \rangle \equiv \ln x_0$  и  $e^{\sigma^2/2} = \rho$ , то

$$\alpha_1 = x_0 \rho, \quad D[x] = (\rho^2 - 1) \alpha_1^2, \quad \alpha_k = \rho^{k(k-1)} \alpha_1^k.$$

Логнормальное распределение является предельным для произведения независимых случайных величин  $z_k$  при возрастании числа сомножителей  $n$ .

Если  $x = \prod_{k=1}^n z_k$ , то  $\ln x = \sum_{k=1}^n \ln z_k$ , т. е.  $\ln x$  есть сумма  $n$  независимых случайных величин. По центральной предельной теореме [если, конечно, ее условия выполнены для  $\ln x$  (§ 13)] распределение  $\ln x$  должно стремиться к нормальному.

В силу этой же теоремы должно, в частности, стремиться с ростом  $n$  к нормальному и распределение суммы логнормальных величин  $x_k$ , т. е. величины

$X = \sum_{k=1}^n x_k$ . Однако сходимость распределения величины  $Y =$

$(X - \bar{X})/\sqrt{D[X]}$  к  $\Phi(Y)$  оказывается в случае логнормальных слагаемых очень медленной. Из-за этого получается, что в широкой области значений  $\rho$  и (больших)  $n$  распределение  $Y$ , прежде чем приблизиться с дальнейшим ростом  $n$  к нормальному, лучше аппроксимируется не гауссовым, а логнормальным законом. Соответствующие оценки подробно исследованы в работе [9].

2. Как выражается характеристическая функция случайной величины  $y = ax + b$  через характеристическую функцию случайной величины  $x$ ?

Решение. Имеем

$$\varphi_y(u) = e^{iuy} = e^{ibu} e^{iaux} = e^{ibu} \varphi_x(au).$$

В частности, для нормированной величины  $y = (x - \bar{x})/\sigma_x$

$$\varphi_y(u) = e^{-i\bar{x}u/\sigma_x} \varphi_x\left(\frac{u}{\sigma_x}\right).$$

3. Найти характеристическую функцию распределения Коши

$$dW(x) = \frac{dx}{\pi(1+x^2)}.$$

Решение. Для этого распределения формула (9.1) дает

$$\varphi_x(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux} dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(ux)}{1+x^2} dx = e^{-|u|}.$$

Точка заострения при  $u = 0$  делает невозможным дифференцирование  $\varphi_x(u)$  в нуле, т. е. вычисление моментов по формуле (9.4).

4. Найти характеристическую функцию случайной величины  $\xi_n = n - pN$  при биномиальном распределении для  $n$  и выполнить предельные переходы к характеристическим функциям распределений Пуассона и Лапласа.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi_n}(u) &= \langle e^{iu(n-pN)} \rangle = e^{-iupN} \sum_{n=0}^N e^{iun} P_N(n) = \\ &= e^{-iupN} \sum_{n=0}^N C_N^n (pe^{iu})^n q^{N-n} = e^{-iupN} (pe^{iu} + q)^N = (pe^{iqu} + qe^{-ipu})^N. \end{aligned}$$

При  $p = \bar{n}/N$  и, соответственно,  $q = 1 - \frac{\bar{n}}{N}$  отсюда следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{\xi_n}(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-i\bar{n}u} \left[ 1 + \frac{\bar{n}}{N} (e^{iu} - 1) \right]^N = e^{-i\bar{n}u} e^{\bar{n}(e^{iu} - 1)},$$

т. е. получается характеристическая функция величины  $n - \bar{n}$  при распределении Пуассона для  $n$ .

Для нормированной величины  $x_n = (n - pN)/\sqrt{Npq} = \xi_n/\sqrt{Npq}$  характеристическая функция есть

$$\varphi_{x_n}(u) = \varphi_{\xi_n}\left(\frac{u}{\sqrt{Npq}}\right) = (pe^{iu\sqrt{q/Np}} + qe^{-iu\sqrt{p/Nq}})^N.$$

Разлагая экспоненты в ряды по степеням  $u$ , нетрудно убедиться, что при  $N \rightarrow \infty$  получается  $\varphi_{x_n}(u) = e^{-u^2/2}$ , т. е. характеристическая функция нормального закона распределения для нормированной случайной величины  $x_n$ .

5. Найти характеристическую функцию  $n$ -мерного нормального закона распределения.

Решение. Согласно (7.11) и (9.5)

$$\varphi_{\mathbf{r}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |B|^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i\mathbf{u}\mathbf{r} - \sum_{j,k} b_{jk}^{-1} x_j x_k \right\} dx_1 \dots dx_n,$$

где  $\mathbf{ur} = \sum_{k=1}^n u_k x_k$ . Последовательное интегрирование по  $x_1$ , по  $x_2$  и т. д. приводит к результату

$$\varphi_{\Gamma}(\mathbf{u}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{jk} u_j u_k \right\}.$$

Это можно записать и иначе, поскольку

$$\sum_{j,k=1}^n b_{jk} u_j u_k = \sum_{j,k=1}^n \overline{x_j x_k} u_j u_k = \overline{\left( \sum_{k=1}^n x_k u_k \right)^2} = \overline{(\mathbf{ur})^2}.$$

Следовательно, для нормального распределения

$$\varphi_{\Gamma}(\mathbf{u}) = \langle e^{i\mathbf{ur}} \rangle = e^{-\langle (\mathbf{ur})^2 \rangle / 2}.$$

6. Случайные величины  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) с  $\bar{x}_k = 0$  распределены нормально. Пользуясь характеристической функцией многомерного нормального распределения

$$\varphi(\mathbf{u}) = e^{-S(\mathbf{u})}, \quad S(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{jk} u_j u_k, \quad b_{jk} = b_{kj} = \overline{x_j x_k},$$

показать, что моменты нечетного порядка равны нулю:

$$\langle x_{i_2} x_{i_2} \dots x_{i_{2n+1}} \rangle = 0, \quad (1)$$

а для моментов четного порядка справедливо выражение

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{2n}} \rangle = \frac{1}{2^n n!} \sum b_{i_1 i_2} b_{i_3 i_4} \dots b_{i_{2n-1} i_{2n}}, \quad (2)$$

где  $i_k$  — положительные целые числа, а сумма берется по всем перестановкам индексов  $i_1, \dots, i_{2n}$ .

Решение. Формулы (1) и (2) выводятся по общему правилу:

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} \rangle = \frac{\partial^m \varphi(\mathbf{u})}{i^m \partial u_{i_1} \partial u_{i_2} \dots \partial u_{i_m}} \Big|_{\mathbf{u}=0}.$$

Число перестановок индексов в (2) равно  $(2n)!$ , но получающиеся при этих перестановках члены частично совпадают. А именно, значение каждого слагаемого не меняется при перестановках сомножителей (таких перестановок  $n!$ ), а кроме того, каждый сомножитель не меняется при перестановке его индексов в силу симметрии  $b_{jk}$  (таких перестановок  $2^n$ ). Таким образом, слагаемые в (2) распадаются на группы по  $2^n n!$  одинаковых слагаемых в каждой. Число различных групп равно, следовательно,

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)!!.$$

Можно поэтому записать (2) и в виде суммы  $(2n-1)!!$  различных слагаемых:

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{2n}} \rangle = \sum_{\text{п. п.}} b_{i_1 i_2} b_{i_3 i_4} \dots b_{i_{2n-1} i_{2n}},$$

понимая под  $\sum_{p, \text{ п.}}$  сумму по перестановкам, дающим разные слагаемые (с учетом симметрии  $b_{jk}$ ). Например,

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle &= b_{12} b_{34} + b_{13} b_{24} + b_{14} b_{23}, \\ \langle x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \rangle &= b_{12} (b_{34} b_{56} + b_{35} b_{46} + b_{36} b_{45}) + \\ &+ b_{13} (b_{24} b_{56} + b_{25} b_{46} + b_{26} b_{45}) + b_{14} (b_{23} b_{56} + b_{25} b_{36} + b_{26} b_{35}) + \\ &+ b_{15} (b_{23} b_{46} + b_{24} b_{36} + b_{26} b_{34}) + b_{16} (b_{23} b_{45} + b_{24} b_{35} + b_{25} b_{34}). \end{aligned}$$

В частности, если  $i_1 = i_2 = \dots = i_{2n}$ , получаем

$$\langle x^{2n} \rangle = (2n - 1)!! \langle x^2 \rangle^n.$$

Если  $\overline{x_k} \neq 0$ , то полученные выше выражения представляют собой *центральные* моменты  $\langle (x_{i_1} - \overline{x_{i_1}}) (x_{i_2} - \overline{x_{i_2}}) \dots (x_{i_m} - \overline{x_{i_m}}) \rangle$ .

7. Показать, что для детерминированной функции  $f(x)$  от гауссовой случайной величины  $x$  справедлива формула

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(2n)}(\bar{x}) \frac{(\sigma^2/2)^n}{n!}, \quad (1)$$

где  $\sigma^2 = D[x] = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ .

Решение. Формула (1) получается в результате усреднения разложения  $f(x)$  в ряд Тэйлора по степеням  $x - \bar{x}$ , если воспользоваться значениями центральных моментов  $\langle (x - \bar{x})^k \rangle$  гауссовой величины  $x$  (см. предыдущую задачу).

8. Пусть случайная величина  $x$  распределена по закону

$$w(x) dx = A(a) F(x) e^{af(x)} dx, \quad (1)$$

где  $A(a)$  — нормировочная постоянная. Показать, что для кумулянтов случайной величины  $f(x)$  справедливо выражение

$$\lambda_n(a) = \frac{d^{n-1} \lambda_1(a)}{da^{n-1}}. \quad (2)$$

Решение. Характеристическая функция для  $f(x)$  есть

$$\varphi_f(iu) = \langle e^{iuf(x)} \rangle = A(a) \int F(x) e^{(a+iu)f(x)} dx,$$

где интегрирование распространено на всю область возможных значений  $x$ . Следовательно,

$$\ln \varphi_f(iu) = \ln A(a) + \ln \int F(x) e^{(a+iu)f(x)} dx = \ln A(a) + \mathcal{F}(a + iu).$$

Для первого кумулянта  $f(x)$  имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1(a) \equiv \langle f(x) \rangle &= \frac{\partial \ln \varphi_f(iu)}{\partial iu} \Big|_{u=0} = \frac{\partial \mathcal{F}(a + iu)}{\partial iu} \Big|_{u=0} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{F}(a + iu)}{\partial a} \Big|_{u=0} = \frac{d\mathcal{F}(a)}{da}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $n$ -й кумулянт равен

$$\lambda_n(a) = \frac{\partial^n \ln \varphi_f(iu)}{\partial (iu)^n} \Big|_{u=0} = \left[ \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \frac{\partial \mathcal{F}(a+iu)}{\partial iu} \right]_{u=0} = \frac{d^{n-1} \lambda_1(a)}{da^{n-1}}.$$

Заметим, что (1) — это, в частности, распределение Гиббса для системы с гамильтоновой функцией вида  $H(x) = H_0(x) - bf(x)$ :

$$w(x) dx = A e^{-\beta [H_0(x) - bf(x)]} dx \quad (\beta = 1/kT),$$

т. е. в этом случае  $F(x) = e^{-\beta H_0(x)}$  и  $a = \beta b$ .

9. Найти характеристическую функцию и плотность вероятности случайной величины  $z = f(x)$ , где  $x$  —  $n$ -мерная случайная величина с законом распределения  $w_n(x) dx = w_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ , а  $f$  — детерминированная функция.

Решение. Характеристическая функция  $z$  есть

$$\varphi_z(u) = \langle e^{iuz} \rangle = \langle e^{iuf(x)} \rangle = \int e^{iuf(x)} w_n(x) dx.$$

Следовательно,

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuz} \varphi_z(u) du = \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu[z-f(x)]} du \right\rangle = \langle \delta[z-f(x)] \rangle.$$

Смысл последнего выражения становится вполне ясным, если записать его в развернутом виде:

$$w(z) = \int \delta[z-f(x)] w_n(x) dx.$$

Из всей области возможных значений  $x$  дельта-функция выделяет как раз ту подобласть, в которой  $f(x)$  имеет значение  $z$ . Тем самым  $w(z)dz$  дает вероятностную меру интервала  $(z, z+dz)$  для  $z$ .

10. Показать, что для усредненного дробового тока (10.10) дисперсия выражается формулой (5.2), если время усреднения  $T$  заметно превышает длительность импульса  $\phi$ .

Решение. В соответствии с (10.10)

$$\begin{aligned} D[I_T] &= \overline{(I_T - \bar{I}_T)^2} = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [\overline{I(t)I(t')} - \bar{I}(t) \cdot \bar{I}(t')] dt dt' = \\ &= \frac{1}{T^2} \iint_0^T \psi_I(\tau) dt dt', \end{aligned}$$

где  $\tau = t - t'$ . Так как корреляционная функция  $\psi_I(\tau)$  — четная функция  $\tau$ , можно написать

$$D[I_T] = \frac{2}{T^2} \int_0^T dt \int_t^T dt' \psi_I(t-t') = \frac{2}{T^2} \int_0^T dt \int_0^{T-t} \psi_I(\tau) d\tau.$$

Функция корреляции мгновенного тока  $I(t)$  выражается формулой (11.6), если в ней положить  $a = e$  и считать площадь импульса единичной:

$$\psi_I(\tau) = n_1 e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) d\theta = 1.$$

Достаточно вычислить  $D[I_T]$  для какой-либо простейшей формы импульса, например для прямоугольного импульса (рис. 3). В этом случае получается «треугольная» функция корреляции:

$$\psi_I(\tau) = \begin{cases} \frac{e\bar{I}}{\phi} \left(1 - \frac{|\tau|}{\phi}\right) & \text{при } |\tau| < \phi, \\ 0 & \text{при } |\tau| \geq \phi. \end{cases}$$

Подставив ее в двукратный интеграл для  $D[I_T]$ , находим

$$D[I_T] = \begin{cases} \frac{e\bar{I}}{T} \left(1 - \frac{\phi}{3T}\right) & \text{при } T > \phi, \\ \frac{e\bar{I}}{\phi} \left(1 - \frac{T}{3\phi}\right) & \text{при } T < \phi. \end{cases}$$

Таким образом, с увеличением времени усреднения  $T$  устанавливается значение дисперсии (5.2). Практически достаточно уже небольшого превышения  $T$  над длительностью импульса  $\phi$ .

11. При помощи вероятностей  $P_{чет}$  и  $P_{неч}$ , вычисленных в § 11, рассчитать двумерные характеристическую функцию и плотность вероятности для случайного телеграфного сигнала.

Решение. Если в момент времени  $t$  значения  $\pm a$  имеют вероятности  $1/2$ , то характеристическая функция двумерного распределения будет (полагая  $a = 1$ )

$$\begin{aligned} \varphi_2(u_1, u_2, \tau) &= e^{i(u_1 \xi + u_2 \xi_\tau)} = \\ &= e^{i(u_1 + u_2) \frac{P_{чет}}{2}} + e^{-i(u_1 + u_2) \frac{P_{чет}}{2}} + e^{i(u_1 - u_2) \frac{P_{неч}}{2}} + e^{-i(u_1 - u_2) \frac{P_{неч}}{2}} = \\ &= e^{-\bar{n}} [\operatorname{ch} \bar{n} \cdot \cos(u_1 + u_2) + \operatorname{sh} \bar{n} \cdot \cos(u_1 - u_2)]. \end{aligned}$$

Отсюда, обращением по Фурье, находим

$$\begin{aligned} \omega_2(\xi, \xi_\tau, \tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(u_1 \xi + u_2 \xi_\tau)} \varphi_2(u_1, u_2, \tau) du_1 du_2 = \\ &= \frac{1 + e^{-2\bar{n}}}{4} [\delta(\xi - 1) \delta(\xi_\tau - 1) + \delta(\xi + 1) \delta(\xi_\tau + 1)] + \\ &\quad + \frac{1 - e^{-2\bar{n}}}{4} [\delta(\xi - 1) \delta(\xi_\tau + 1) + \delta(\xi + 1) \delta(\xi_\tau - 1)], \end{aligned}$$

причем  $\bar{n} = n_1 \tau$ .

12. В литературе был описан класс двумерных *эллиптически-симметричных* распределений [10], обобщающих двумерный гауссов закон для величин  $x_1$  и  $x_2$ , обладающих одинаковыми дисперсиями. При  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  гауссова

плотность вероятности (7.13) имеет вид

$$\omega_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-K^2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2(1-K^2)}\right\}, \quad (1)$$

т. е. зависит от  $x_1$  и  $x_2$  только через

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2Kx_1x_2}.$$

У эллиптически-симметричных распределений  $\omega_2$  тоже зависит только от  $r$

$$\omega_2(x_1, x_2) = F(r),$$

но  $F$  — любая неотрицательная и нормированная к единице функция. Такие распределения, как и их частный случай (1), удобны для исследования ряда вопросов, касающихся прохождения сигналов и шумов через безынерционные нелинейные устройства.

Показать, что двумерная характеристическая функция для эллиптически-симметричных распределений может быть записана в виде модифицированного преобразования Бесселя от  $F(r)$ :

$$\varphi_2(u_1, u_2) \equiv \tilde{\varphi}(s) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-K^2}} \int_0^\infty F(r) J_0\left(\frac{sr}{\sqrt{1-K^2}}\right) r dr, \quad (2)$$

где  $J_0$  — нулевая бесселева функция и

$$s = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2Ku_1u_2}.$$

Найти одномерную характеристическую функцию.

Решение. По определению

$$\varphi_2(u_1, u_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(r) \exp\{i(u_1x_1 + u_2x_2)\} dx_1 dx_2.$$

Перейдя на плоскости  $(x_1, x_2)$  к координатам  $r$  и  $\alpha$ :

$$x_1 - Kx_2 = r \cos \alpha, \quad x_2 \sqrt{1-K^2} = r \sin \alpha,$$

$$dx_1 dx_2 = \frac{r dr d\alpha}{\sqrt{1-K^2}},$$

получаем

$$\varphi_2(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-K^2}} \int_0^\infty F(r) r dr \int_0^{2\pi} d\alpha \exp\left\{ir \left[u_1 \cos \alpha + \frac{Ku_1 + u_2}{\sqrt{1-K^2}} \sin \alpha\right]\right\}.$$

Как известно,

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \exp\{i[a \cos \alpha + b \sin \alpha]\} = 2\pi J_0(\sqrt{a^2 + b^2}).$$

Пользуясь этой формулой, получаем результат (2).

Из определения характеристической функции следует, что одномерная функция  $\varphi_1(u_1)$  получается из двумерной  $\varphi_2(u_1, u_2)$ , если положить в последней  $u_2 = 0$ :

$$\varphi_1(u_1) = \varphi_2(u_1, 0).$$

Поэтому из формулы (2) следует, что для эллиптически-симметричных распределений

$$\varphi_1(u_1) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-K^2}} \int_0^\infty F(r) J_0\left(\frac{u_1 r}{\sqrt{1-K^2}}\right) r dr \equiv \tilde{\varphi}(u_1),$$

т. е. одномерная характеристическая функция зависит от своего аргумента так же, как двумерная от  $s$ :

$$\varphi_2(u_1, u_2) = \tilde{\varphi}(s) = \varphi_1(s).$$

Таким образом, задавая четную одномерную плотность вероятности  $w_1(x)$  и находя соответствующую четную по  $s$  характеристическую функцию

$$\varphi_1(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} w_1(x) dx = 2 \int_0^\infty w_1(x) \cos sx \cdot dx,$$

можно посредством преобразования, обратного (2), получить затем двумерную плотность вероятности  $w_2(x_1, x_2) = F(r)$ :

$$F(r) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-K^2}} \int_0^\infty \varphi_1(s) J_0\left(\frac{sr}{\sqrt{1-K^2}}\right) s ds.$$

Следует, однако, иметь в виду, что пригодны не любые четные  $w_1(x)$ , так как не все они приводят к неотрицательной и интегрируемой  $w_2(x_1, x_2)$ .

13. Показать, что из экспоненциального распределения (5.4) для времени ожидания события в хаотическом потоке событий вытекает распределение Пуассона (5.3) для вероятности наступления  $n$  событий в фиксированном интервале времени  $(0, T)$ .

Решение. Пусть  $t_1, t_2, \dots$  — моменты наступления событий 1, 2, ..., отсчитываемые от  $t = 0$ . Согласно (5.4) вероятность того, что событие 1 произойдет в  $(t_1, t_1 + dt_1)$ , есть

$$u(t_1) dt_1 = e^{-n_1 t_1} n_1 dt_1, \quad \text{где } 0 \leq t_1 < \infty.$$

Вероятность наступления события 2 в  $(t_2, t_2 + dt_2)$ , т. е. спустя время  $\tau_2 = t_2 - t_1$  после события 1, есть

$$u(\tau_2) dt_2 = e^{-n_1 \tau_2} n_1 dt_2, \quad \text{где } t_1 \leq t_2 < \infty,$$

и т. д., вплоть до вероятности наступления  $(n+1)$ -го события в интервале  $(t_{n+1}, t_{n+1} + dt_{n+1})$ , равной

$$u(\tau_{n+1}) dt_{n+1} = e^{-n_1 \tau_{n+1}} n_1 dt_{n+1}, \quad \text{где } \tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n \text{ и } t_n \leq t_{n+1} < \infty.$$

Так как промежутки времени  $\tau_k$  между событиями независимы, совместная вероятность наступления  $n+1$  событий в моменты  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+1}$  равна

$$\begin{aligned} w_{n+1}(\tau_1, \dots, \tau_{n+1}) dt_1 \dots dt_{n+1} &= \prod_{k=1}^{n+1} u(\tau_k) dt_k = \\ &= e^{-n_1(\tau_1 + \dots + \tau_{n+1})} n_1^{n+1} dt_1 \dots dt_{n+1} = e^{-n_1 t_{n+1}} n_1^{n+1} dt_1 \dots dt_{n+1}. \end{aligned}$$

Нас интересует вероятность  $P(n)$  наступления  $n$  событий в интервале  $(0, T)$ , т. е.  $n$ -е событие происходит еще внутри  $(0, T)$ , но  $(n+1)$ -е — уже



вне  $(0, T)$ . Поэтому  $P(n)$  равно интегралу от  $\omega_{n+1}$  по  $(n+1)$ -мерной области, выделенной условиями  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T \leq t_{n+1} < \infty$ :

$$\begin{aligned} P(n) &= \int_T^\infty dt_{n+1} \int_0^T dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} \omega_{n+1} dt_1 = \\ &= \int_T^\infty e^{-n_1 t_{n+1} n_1} dt_{n+1} \cdot n_1^n \int_0^T dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1. \end{aligned}$$

Первый интеграл (по  $t_{n+1}$ ) равен  $e^{-n_1 T}$  и представляет собой вероятность того, что  $(n+1)$ -е событие произошло после момента  $T$ . Остальные интегралы (после знака умножения) дают  $\frac{(n_1 T)^n}{n!}$ , и это есть вероятность того, что  $n$  предыдущих событий наступили в  $(0, T)$ . В результате получаем

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad \text{где } \bar{n} = n_1 T,$$

т. е. закон Пуассона (5.3).

14. Показать, что для потока независимых событий с неравномерным распределением  $n_1(t) dt$  вероятности наступления события в интервале  $(t, t + dt)$  остается в силе закон Пуассона с параметром  $\bar{n} = \int_0^t n_1(t) dt$ .

Решение. Вероятность пустого интервала  $(0, t)$  равна теперь  $\exp \left\{ - \int_0^t n_1(t) dt \right\}$ , так что вероятность ожидания  $n$ -го события в интервале  $(t_n, t_n + dt_n)$  после наступления  $(n-1)$ -го события в момент  $t_{n-1}$  будет

$$u(t_n, t_{n-1}) dt_n = \exp \left\{ - \int_{t_{n-1}}^{t_n} n_1(t) dt \right\}, \quad \text{где } t_{n-1} \leq t_n < \infty.$$

Совместная вероятность наступления  $n+1$  событий в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ , в силу их независимости, равна ( $t_0 = 0$ )

$$\begin{aligned} \omega_{n+1}(t_1, \dots, t_{n+1}) dt_1 \dots dt_{n+1} &= \prod_{k=1}^{n+1} u(t_k, t_{k-1}) dt_k = \\ &= \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{n+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} n_1(t) dt \right\} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} n_1(t_k) dt_k = \\ &= \exp \left\{ - \int_0^{t_{n+1}} n_1(t) dt \right\} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} n_1(t_k) dt_k. \end{aligned}$$

Те же рассуждения, что и в предыдущей задаче, приводят к следующему выражению для вероятности  $n$  событий в интервале  $(0, T)$ :

$$P(n) = \int_0^T \exp \left\{ - \int_0^{t_{n+1}} n_1(t) dt \right\} n_1(t_{n+1}) dt_{n+1} \int_0^{t_n} n_1(t_n) dt_n \times \\ \times \int_0^{t_n} n_1(t_{n-1}) dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} n_1(t_1) dt_1 = \frac{\bar{n}}{n!} e^{-\bar{n}},$$

где

$$\bar{n} = \int_0^T n_1(t) dt.$$

15. Предполагая, что логарифм характеристической функции одномерной случайной величины  $x$ , определенной на интервале возможных значений  $(-\infty, \infty)$ , разлагается в бесконечный ряд:

$$\ln \varphi(u) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{m!} (iu)^m,$$

показать, что для плотности вероятности  $w(x)$  справедливо соотношение

$$\frac{\partial w(x)}{\partial \lambda_k} = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k w(x)}{\partial x^k}. \quad (1)$$

Решение. Запишем характеристическую функцию в виде

$$\varphi(u) = \exp \{ \ln \varphi(u) \} = \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{m!} (iu)^m \right\}.$$

Отсюда, если кумулянт  $\lambda_k$  отличен от нуля, находим

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial \lambda_k} = \frac{(iu)^k}{k!} \varphi(u),$$

и поэтому дифференцирование (9.8) по  $\lambda_k$  дает

$$\frac{\partial w(x)}{\partial \lambda_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \frac{\partial \varphi(u)}{\partial \lambda_k} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(iu)^k}{k!} e^{-iux} \varphi(u) du.$$

С другой стороны, согласно (9.8)

$$\frac{\partial^k w(x)}{\partial x^k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-iu)^k e^{-iux} \varphi(u) du.$$

Сопоставляя две последние формулы, получаем (1).

16. Показать при помощи соотношения (1) предыдущей задачи:

$$\frac{\partial w(x)}{\partial \lambda_k} = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k w(x)}{\partial x^k}. \quad (1)$$

что для любой функции  $f(x)$  справедливо уравнение [11]

$$\frac{\partial^n \langle f(x) \rangle}{\partial \lambda_k^n} = \frac{1}{(k!)^n} \left\langle \frac{d^{nk} f(x)}{dx^{nk}} \right\rangle. \quad (2)$$

Решение. Дифференцируя равенство

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \omega(x) dx$$

по  $\lambda_k$  и пользуясь (1), получаем

$$\frac{\partial \langle f(x) \rangle}{\partial \lambda_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial \omega(x)}{\partial \lambda_k} dx = \frac{(-1)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial^k \omega(x)}{\partial x^k} dx.$$

$k$ -кратное интегрирование по частям, если учесть, что  $\omega(x)$  вместе со своими производными обращается в нуль при  $|x| \rightarrow \infty$ , приводит к соотношению

$$\frac{\partial \langle f(x) \rangle}{\partial \lambda_k} = \frac{1}{k!} \left\langle \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right\rangle. \quad (3)$$

Применение этой формулы последовательно  $n$  раз приводит к (2). Если продифференцировать (2) еще  $m$  раз по *другому* кумулянту  $\lambda_l$ , то, пользуясь повторно формулой (2), получим

$$\frac{\partial^{n+m} \langle f(x) \rangle}{\partial \lambda_k^n \partial \lambda_l^m} = \frac{1}{(k!)^n (l!)^m} \left\langle \frac{d^{nk+ml} f(x)}{dx^{nk+ml}} \right\rangle. \quad (4)$$

Одно из применений «кумулянтных уравнений» (1)–(4) — быстрое вычисление коэффициентов в разложениях моментов  $\alpha_k = \langle x^k \rangle$  случайной величины  $x$  по кумулянтам  $\lambda_m$  этой величины [11]. Например, в таком разложении  $\alpha_4$  коэффициент при  $\lambda_1 \lambda_3$  равен, согласно (4),

$$\frac{\partial^2 \langle x^4 \rangle}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3} = \frac{1}{1! 3!} \left\langle \frac{d^4 x^4}{dx^4} \right\rangle = \frac{4!}{3!} = 4,$$

а при  $\lambda_1^2 \lambda_2$  —

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \langle x^4 \rangle}{\partial \lambda_1^2 \partial \lambda_2} = \frac{1}{2 (1!)^2 2!} \left\langle \frac{d^4 x^4}{dx^4} \right\rangle = \frac{4!}{2 \cdot 2!} = 6.$$

Вывод кумулянтных уравнений, проведенный в двух предыдущих задачах для одномерной случайной величины, легко обобщается на многомерные величины. Пользуясь характеристической функцией двумерной величины  $\xi = \{x, y\}$  [см. (9.5)]

$$\varphi(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(ux+vy)} \omega(x, y) dx dy$$

и разложением в ряд ее логарифма

$$\ln \varphi(u, v) = \sum_{m+n \geq 1} \frac{(iu)^m (iv)^n}{m! n!} \lambda_{m+n},$$

где  $m$  относится к  $x$ , а  $n$  — к  $y$  ( $m + n$  — порядок кумулянта), нетрудно показать, что для совместной плотности вероятности  $\omega(x, y)$  справедливо соотношение

$$\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial \lambda_{p+q}} = \frac{(-1)^{p+q}}{p! q!} \left\langle \frac{\partial^{p+q} \omega(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} \right\rangle. \quad (5)$$

Можно показать, далее, что для произвольной функции  $f(x, y)$

$$\frac{\partial \langle f(x, y) \rangle}{\partial \lambda_{p+q}} = \frac{1}{p! q!} \left\langle \frac{\partial^{p+q} f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} \right\rangle. \quad (6)$$

Повторное применение этой формулы  $m$  раз дает, очевидно,

$$\frac{\partial^m \langle f(x, y) \rangle}{\partial \lambda_{p+q}^m} = \frac{1}{(p! q!)^m} \left\langle \frac{\partial^{m(p+q)} f(x, y)}{\partial x^{mp} \partial y^{mq}} \right\rangle, \quad (7)$$

а дифференцирование (7)  $n$  раз по *другому* кумулянту  $\lambda_{p_1+q_1}$  приводит к уравнению

$$\frac{\partial^{m+n} \langle f(x, y) \rangle}{\partial \lambda_{p+q}^m \partial \lambda_{p_1+q_1}^n} = \frac{1}{(p! q!)^m (p_1! q_1!)^n} \left\langle \frac{\partial^{m(p+q)+n(p_1+q_1)} f(x, y)}{\partial x^{mp+np_1} \partial y^{mq+nq_1}} \right\rangle. \quad (8)$$

Кумулянтные уравнения, в частности уравнения (7), (8), очень полезны при рассмотрении нелинейных преобразований случайных величин [11]. В дальнейшем (задача 3 гл. VII) будет приведен пример их использования.

---

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 14. Общие определения

Наглядное представление о случайном процессе можно почерпнуть из самых различных областей физики и техники. Осциллограмма дробового тока электронной лампы или тепловых флуктуаций напряжения на каком-либо сопротивлении, перемещение брауновской частицы, записанные сейсмографом колебания почвы, пульсации давления или температуры в атмосфере — все это примеры случайных процессов. Осуществленная запись наблюдаемой величины, т. е. временная развертка значений, *фактически принятых* ею в данном эксперименте, изображает одну из возможных *реализаций* рассматриваемого процесса.

Если представить себе множество идентичных экземпляров рассматриваемой системы, поставленных в одни и те же условия (*ансамбль систем*), то при одинаковом способе регистрации процесса полученные реализации будут, вообще говоря, различны, в чем и проявляется случайный характер процесса<sup>1)</sup>. Элемент случайности в совокупности реализаций может быть различным. Когда он полностью отсутствует, мы приходим к частному случаю вполне детерминированного течения процесса.

В широком, хотя и не особенно точном понимании случайным процессом  $\xi(t)$  является любой протекающий во времени процесс, управляемый вероятностными законами. Более определенно: случайная функция  $\xi(t)$  — это такая функция, значение которой при любом возможном  $t$  есть случайная величина.

В математической теории нет никаких оснований к тому, чтобы придавать аргументу  $t$  какую-либо определенную интер-

---

<sup>1)</sup> Естественно, сразу же возникает вопрос о том, что физически означает *идентичность систем*, образующих ансамбль, но мы обратимся к нему позднее (§ 20).

претацию. Параметр  $t$ , вещественный или комплексный, может быть как непрерывным, так и дискретным. Но в приложениях речь идет большей частью о случайных функциях *времени* и (или) *пространственных координат*. Нас будет интересовать поэтому только тот случай, когда возможные значения  $t$  вещественны. Что касается дискретности или непрерывности значений  $t$ , то могут встретиться обе эти возможности. Например, можно фиксировать координату брауновской частицы  $\xi$  только в отдельные моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ , получая тем самым последовательность случайных величин  $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots$ . В дальнейшем мы в большинстве случаев будем понимать под  $t$  время. Возможные значения функции  $\xi(t)$  при каком-либо фиксированном  $t = t_k$  будут обозначаться через  $x_k$ .

Принято называть  $\xi(t)$  *случайным* (или стохастическим, или вероятностным) *процессом*, если  $t$  меняется *непрерывно*, и *случайной последовательностью* (процессом с дискретным параметром, с дискретным временем), если  $t$  принимает *счетное* множество значений. Термин «случайная функция» охватывает оба эти случая, т. е. применяется тогда, когда характер изменения  $t$  произволен.

В свою очередь множество возможных значений  $x$  самой случайной функции  $\xi(t)$  тоже может быть как непрерывным, так и дискретным. Таким образом, имеются четыре разновидности случайной функции в соответствии с четырьмя комбинациями дискретности и непрерывности  $x$  и  $t$ . Иногда все эти разновидности называют случайными процессами, говоря о дискретном или непрерывном процессе (в зависимости от характера  $x$ ) с дискретным или непрерывным временем  $t$ . Разумеется, возможны и смешанные — дискретно-непрерывные — процессы, но изучать удобнее каждый из этих видов в отдельности.

Если аргумент  $t$  принимает *конечное* множество значений  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , то случайная последовательность сводится, очевидно, к совокупности  $n$  случайных величин  $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ , т. е. может быть интерпретирована как  $n$ -мерная случайная величина, задаваемая, как обычно, своим  $n$ -мерным распределением вероятности  $\omega_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Если же множество значений  $t$  бесконечно (счетно или непрерывно), то мы выходим за рамки классической теории вероятностей и необходимо специально определить, как в этом случае надо понимать *задание* случайной функции  $\xi(t)$ .

Беря за исходный пункт множество всех возможных реализаций случайной функции, можно получить исчерпывающую ее характеристику заданием распределения вероятностей этих реализаций. Равносильный, но по форме отличный подход, принадлежащий Е. Е. Слуцкому, опирается на то, что  $\xi(t)$  при каждом фиксированном значении  $t$  есть случайная величина. Эта

величина полностью задана, если известно ее распределение

$$\omega_1(t, x) dx = P\{x < \xi(t) \leq x + dx\},$$

т. е. известна мгновенная плотность вероятности  $\omega_1(t, x)$ , вообще говоря, зависящая от  $t$ . Разумеется, вместо  $\omega_1(t, x)$  можно задать соответствующую характеристическую функцию

$$\varphi_1(t, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \omega_1(t, x) dx.$$

Легко видеть, однако, что, зная распределение  $\xi(t)$  для любого  $t$ , мы располагаем еще в высшей степени неполной характеристикой случайной функции. Возможны функции  $\xi(t)$ , обладающие одинаковыми распределениями  $\omega_1(t, x)$ , но различающиеся статистическим соотношением между значениями  $\xi(t_1)$  и  $\xi(t_2)$ , принимаемыми в два *разных* момента времени  $t_1$  и  $t_2$ . Другими словами, при одинаковых распределениях  $\omega_1(t, x)$  у этих функций могут быть различны двумерные распределения  $\omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2 =$

$$= P\{x_1 < \xi(t_1) \leq x_1 + dx_1; x_2 < \xi(t_2) \leq x_2 + dx_2\}$$

и, в частности, могут быть различны функции корреляции

$$\psi(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1) \xi(t_2)} - \overline{\xi(t_1)} \overline{\xi(t_2)}.$$

Разумеется,

$$\omega_1(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_2(t, x; t', x') dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_2(t', x'; t, x) dx',$$

т. е., зная двумерное распределение, мы знаем и одномерное, но *не обратно*, так что совпадение одномерных распределений для каких-либо случайных функций еще ничего не говорит об их двумерных распределениях.

В свою очередь задание двумерного распределения, т. е. плотности вероятности  $\omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2)$  или характеристической функции

$$\varphi_2(t_1, u_1; t_2, u_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(u_1 x_1 + u_2 x_2)} \omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2,$$

которые в общем случае зависят от двух параметров  $t_1$  и  $t_2$ , давая более полную характеристику  $\xi(t)$ , тоже не является исчерпывающим. Двумерное распределение не позволяет судить о статистических соотношениях между значениями  $\xi(t)$ , принимаемыми в какие-либо *три* момента времени  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ . Эти соотношения могут быть различны при одинаковом двумерном (а зна-

чит, и одномерном) распределении. Ясно, что это рассуждение можно продолжить, и оно приведет тогда к тому, что для любого фиксированного числа моментов времени  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \dots, n$ )  $n$ -мерное распределение

$$\omega_n(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ = P\{x_i < \xi(t_i) \leq x_i + dx_i; i = 1, 2, \dots, n\}$$

дает полные сведения о  $\xi(t)$  «вниз» от  $n$ , но оставляет столь же полную неопределенность «вверх». В этом и состоит принципиальное отличие случайной функции, у которой аргумент  $t$  может принимать бесконечное множество значений, от частного случая, когда это множество конечно ( $n$  значений) и дело сводится к  $n$ -мерной случайной величине.

Для практических целей можно было бы ограничиться заданием  $n$ -мерного распределения с весьма большим  $n$ , но подобный выход из положения был бы столь же мало удовлетворительным, как если бы, например, мы согласились рассматривать в анализе вместо непрерывно меняющихся величин только дискретные изменения, хотя бы и с достаточно малым шагом. Можно, однако, считать, что нам известны *конечномерные* ( $n$ -мерные) распределения, но для *всякого сколь угодно большого значения*  $n$ . Мы приходим, таким образом, к следующему исчерпывающему способу задания случайной функции: *случайная функция задана, если ее конечномерное распределение  $\omega_n(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n)$  известно для любого числа  $n$  произвольно выбранных значений  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .*

Очевидно,  $\omega_n(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n)$  должны быть *симметричны* относительно любых перестановок всех пар аргументов  $(t_i, x_i)$ , так как содержание рассматриваемого события — совместное, осуществление  $n$  неравенств  $x_i < \xi(t_i) \leq x_i + dx_i$  — не зависит от того, в каком порядке эти неравенства перечислять. Например,

$$P\{x_i < \xi(t_i) \leq x_i + dx_i; i = 1, 2\} = \\ = \omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2 = \omega_2(t_2, x_2; t_1, x_1) dx_1 dx_2.$$

Считая это условие симметрии выполненным, мы часто не будем писать всех аргументов функций  $\omega_n$ .

Кроме условия симметрии, все конечномерные плотности вероятности должны быть еще *согласованы* между собой в смысле их соподчинения, т. е. любое  $k$ -мерное распределение должно определяться из всякого  $n$ -мерного с  $n > k$ :

$$\omega_k(t_1, x_1; \dots; t_k, x_k) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_n(t_1, x_1; \dots; t_k, x_k; \dots; t_n, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n.$$



В рассматриваемой теории случайных *функций*, когда  $\omega_n$  зависят от параметров  $t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), это условие, ограничивающее класс допустимых  $\omega_n$ , далеко не тривиально. В самом деле, интегрирование  $\omega_n$  по «лишним» переменным  $x_{k+1}, \dots, x_n$  должно автоматически приводить к результату, не зависящему от параметров  $t_{k+1}, \dots, t_n$ , содержащихся в подынтегральной функции.

Условия симметрии и согласованности должны выполняться для *всякой* случайной функции. Дальнейшая детализация свойств конечномерных распределений ведет уже к установлению специальных классов или типов этих функций. Имеется сравнительно немного таких классов, практическое значение которых особенно велико и для которых теория продвинута в наибольшей степени. Среди них должны быть в первую очередь названы *случайные процессы марковского типа* (иначе — процессы без вероятностного последствия) и *стационарные процессы*<sup>1)</sup>. Мы приведем сначала определения обоих этих классов случайных процессов, после чего остановимся на каждом из них более подробно. Подчеркнем сразу же, что эти классы выделены по *разным* признакам, т. е. их границы не совпадают. Будучи марковским, случайный процесс может являться как стационарным, так и нестационарным; будучи стационарным, он может быть или не быть марковским.

### § 15. Марковские процессы

Выберем  $n$  последовательных моментов времени  $t_1 < \dots < t_n$ . По определению условной вероятности мы всегда можем написать

$$\begin{aligned} \omega_n(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ = \omega_{n-1}(t_1, x_1; \dots; t_{n-1}, x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1} \times \\ \times v_n(t_n, x_n | t_1, x_1; \dots; t_{n-1}, x_{n-1}) dx_n. \end{aligned} \quad (15.1)$$

Множитель  $v_n dx_n$  в правой части есть условная вероятность того, что в момент  $t_n$  значение случайной функции  $\xi(t)$  окажется в интервале  $(x_n, x_n + dx_n)$  *при условии*, что в предшествующие моменты  $t_i$  она принимала значения, равные  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ). Таким образом, условная вероятность  $v_n$  *состояния*  $x_n$  в момент  $t_n$  зависит от предшествующего пути, пройденного случайной функцией, от множества предшествую-

<sup>1)</sup> В дальнейшем мы будем иметь дело главным образом с *процессами* — случайными функциями непрерывного аргумента. Общая теория случайных процессов марковского типа была развита в начале 30-х годов А. Н. Колмогоровым.

щих состояний, из которых, в зависимости от числа измерений  $n$ , выбраны  $n - 1$  состояний  $x_1, \dots, x_{n-1}$ .

Если обозначить через  $\xi_p(\theta)$  значение  $\xi(t)$ , фактически принятое в момент  $\theta \leq t_0$ , то для всякого  $t > t_0$  распределение, вообще говоря, будет зависеть от всего предшествующего течения процесса  $\xi_p(\theta)$ .

Эту ситуацию иллюстрирует рис. 8, на котором  $v$  построена в функции от  $x$  и  $t$ . Над кривой  $\xi_p(\theta)$ , лежащей на плоскости  $(x, t)$ , — кривой фактически принятых до момента  $t_0$  значений — возвышается бесконечно высокий «забор» дельта-функций. Ход  $v \parallel x$  для любого  $t > t_0$  зависит от всей формы этого «забора», т. е. будучи функцией от  $x$  и  $t$ , является функционалом от  $\xi_p(\theta)$ .

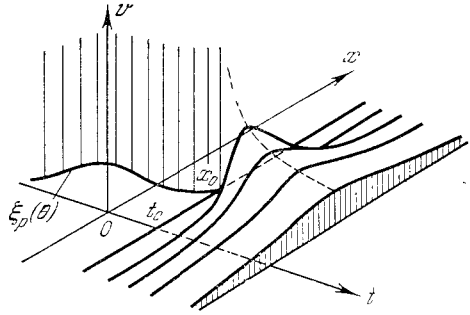


Рис. 8.

Если при том же значении  $x_0$  в момент  $t_0$  взять иной вид  $\xi_p(\theta)$ , т. е. иначе изогнуть «забор», то форма поверхности  $v(x, t)$  над участком  $t > t_0$  плоскости  $(x, t)$  изменится. Говорят, что  $\xi(t)$  испытывает *вероятностное последствие* со стороны ранее принятых значений.

Разные участки кривой  $\xi_p(\theta)$  могут влиять на последующее распределение вероятности в различной степени. В частности, процесс может обладать затухающим последствием: значения  $\xi_p(\theta)$  оказывают тем меньшее влияние, чем более давними они являются. Это «забывание» может быть не только постепенным, но и резко наступающим. Например, может отсутствовать влияние всех  $\xi_p(\theta)$  при  $\theta < t_0 - \tau$ , т. е. последствие оказывают только значения, принятые на отрезке времени  $\tau$  до момента  $t_0$ . Еще более частный, но физически важный случай — тот, когда для всех  $t > t_0$  условная вероятность однозначно определяется значением  $x_0$ , принятым в момент  $t_0$ , и совсем не зависит от предшествующей истории, т. е. имеет вид  $v_2(t, x | t_0, x_0) dx$ . Это и есть *процесс марковского типа*, или *процесс без последствия*.

Заметим, что такой процесс можно рассматривать как непосредственное обобщение динамической закономерности, описываемой дифференциальным уравнением движения первого порядка. Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию  $x = x_0$  при  $t = t_0$ , есть

$$x = f(t, x_0, t_0), \quad \text{причем} \quad x_0 \equiv f(t_0, x_0, t_0).$$

Детерминированная функция  $f$  однозначно определяет значение  $x$  в момент  $t$  при заданном значении  $x_0$  в момент  $t_0$ . Можно сказать поэтому, что плотность условной вероятности значения  $x$  в момент  $t$  выражается в этом частном случае дельта-функцией:

$$v_2(t, x | t_0, x_0) = \delta[x - f(t, x_0, t_0)].$$

Примером такого динамического процесса может служить движение частицы в вязкой жидкости, реакция которой учитывается в виде стокового трения, т. е. силой  $F = -hu$ , где  $u$  — скорость частицы. Мы имеем тогда для  $u$  (это и есть величина  $x$  в данном примере) уравнение движения  $m\dot{u} + hu = 0$ , из которого следует

$$u = u_0 e^{-\frac{h}{m}(t-t_0)} \equiv f(t, u_0, t_0).$$

Известно, однако, что выражение  $F = -hu$  для силы трения представляет собой лишь первое приближение, пригодное только для малых ускорений. В общем случае те возмущения (вязкие волны), которые создаются в жидкости движением частицы, влияют на испытываемую ею реакцию в течение длительного времени. В результате реакция в какой-либо момент  $t$  зависит не просто от скорости  $u$  частицы в этот же момент, а от всего ее *предшествующего* движения (вязкое последствие). Следовательно, при более точной постановке задачи уравнение движения частицы в вязкой жидкости будет уже интегро-дифференциальным и состояние  $u$  в момент  $t$  не будет определяться однозначно состоянием  $u_0$  в момент  $t_0$  (§ 35).

Нетрудно представить себе соответствующий переход к статистическому явлению, например брауновскому блужданию частицы в жидкости. При реакции стокова типа это марковский процесс, а с учетом вязкого последствия появится вероятностное последствие: *распределение вероятности  $u$*  в момент  $t$  будет зависеть от всего предшествующего движения частицы.

Вернемся к общей формуле (15.1). Для процесса марковского типа плотность условной вероятности состояния  $(x_n, t_n)$  относительно цепочки предыдущих состояний  $(x_{n-1}, t_{n-1}), \dots, (x_1, t_1)$  совпадает, согласно сказанному, с плотностью условной вероятности относительно последнего из предыдущих состояний  $(x_{n-1}, t_{n-1})$  и не зависит от более ранней истории. Другими словами, статистические свойства процесса в момент  $t_n$  определены состоянием в момент  $t_{n-1}$  и никак не зависят от любой информации о течении процесса до момента  $t_{n-1}$ :

$$v_n(t_n, x_n | t_{n-1}, x_{n-1}; \dots; t_1, x_1) = v_2(t_n, x_n | t_{n-1}, x_{n-1})$$

для любых  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ). Связь между  $\omega_n$  и  $\omega_{n-1}$  имеет, следовательно, вид

$$\begin{aligned} \omega_n(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n) &= \\ &= \omega_{n-1}(t_1, x_1; \dots; t_{n-1}, x_{n-1}) v_2(t_n, x_n | t_{n-1}, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Применяя эту формулу последовательно к  $\omega_{n-1}$ ,  $\omega_{n-2}$  вплоть до  $\omega_2$ :

$$\omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2) = \omega_1(t_1, x_1) v_2(t_2, x_2 | t_1, x_1), \quad (15.2)$$

получаем

$$\begin{aligned} \omega_n(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n) &= \\ &= \omega_1(t_1, x_1) v_2(t_2, x_2 | t_1, x_1) v_2(t_3, x_3 | t_2, x_2) \dots \\ &\quad \dots v_2(t_n, x_n | t_{n-1}, x_{n-1}). \end{aligned} \quad (15.3)$$

Таким образом, для того чтобы написать  $n$ -мерную плотность вероятности марковского процесса, надо знать только две функции — одномерную плотность вероятности  $\omega_1$  и плотность условной вероятности  $v$  (индекс 2 при  $v$  мы далее опустим).

Соотношение (15.3), конечно, тоже может быть положено в основу определения марковского процесса. Если оно имеет место, то принято называть  $v$  вероятностью перехода (из предыдущего состояния в последующее), что оправдано именно отсутствием последствия.

Выражение (15.2) для двумерного распределения может быть написано для любого процесса — просто по определению условной вероятности. Но уже для  $n = 3$  существование вероятностей перехода означает сильное ограничение вида возможных функций распределения<sup>2)</sup>.

Итак, случайная функция марковского типа полностью определяется заданием одномерной функции распределения и вероятности перехода между любыми двумя  $t_1$  и  $t_2$ , тогда как

<sup>1)</sup> Иногда этот случай называют марковским процессом *первого порядка*, понимая под марковским процессом  $k$ -го порядка процесс, у которого условная вероятность состояния зависит от фиксированного числа  $k$  предшествующих состояний. Например, для процесса второго порядка она имеет вид  $v_3(t_3, x_3 | t_2, x_2; t_1, x_1)$ . Эти более общие случаи мы рассматривать не будем.

<sup>2)</sup> Это ограничение можно привести к некоторому интегральному соотношению для  $\omega_n$ . Возьмем случай  $n = 3$ . Учитывая, что

$$v(x_2 | x_1) = \frac{\omega_2(x_1, x_2)}{\omega_1(x_1)}, \quad v(x_3 | x_2) = \frac{\omega_2(x_2, x_3)}{\omega_1(x_2)},$$

и выражая  $\omega_2$  и  $\omega_1$  через интегралы по «лишним» переменным от  $\omega_3(x_1, x_2, x_3)$ , получаем из равенства  $\omega_3 = \omega_1(x_1) v(x_2 | x_1) v(x_3 | x_2)$  условие

$$\omega_3 \int \omega_3 dx_1 dx_3 = \int \omega_3 dx_3 \int \omega_3 dx_1.$$

в общем случае необходимо задание всех конечномерных распределений.

Случайная функция *марковского* типа называется *однородной* по  $t$ , если вероятность перехода  $v(t_2, x_2 | t_1, x_1)$  зависит только от  $t_2 - t_1$ . Тогда

$$\omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2) = \omega_1(t_1, x_1) v(x_2 | t_2 - t_1, x_1). \quad (15.4)$$

Одномерное распределение, вообще говоря, зависит от  $t_1$ , так что двумерное зависит от  $t_1$  и  $t_2$  в отдельности. Возможно, однако, случаи, когда существует *стационарное* одномерное распределение  $\omega(x)$ , одинаковое для всех  $t$ . Тогда

$$\omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2) = \omega(x_1) v(x_2 | t_2 - t_1, x_1) = \omega_2(x_1, t_2 - t_1, x_2), \quad (15.5)$$

т. е. двумерное распределение зависит теперь только от  $t_2 - t_1$ . При этом, поскольку распределение  $\omega$  должно иметь место при любом  $t$ , необходимо

$$\int \omega_2(x_1, t_2 - t_1, x_2) dx_1 = \omega_1(t_2 - t_1, x_2) = \omega(x_2),$$

т. е. распределение  $\omega(x)$  должно удовлетворять условию

$$\int \omega(x_1) v(x_2 | t_2 - t_1, x_1) dx_1 = \omega(x_2).$$

В этом случае однородная случайная функция марковского типа является *стационарной*, в соответствии с определением стационарности, которое мы приведем далее.

## § 16. Стационарные процессы

Представление о стационарном процессе может дать, например, наблюдение каких-либо флуктуаций при неизменных макроскопических условиях. Электрический шум в сопротивлении, температура которого постоянна; турбулентность в установившемся потоке; дробовой эффект при постоянном анодном токе и т. п. — все это стационарные случайные процессы. Практически достаточно наблюдения постоянства условий в течение конечного промежутка времени, к началу которого возможные переходные процессы в рассматриваемой системе уже закончились, а в конце еще не начались.

Все вероятностные характеристики стационарной случайной функции не должны, таким образом, меняться при изменении начала отсчета времени. Это значит, что

$$\omega_n(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n) \equiv \omega_n(t_1 + \tau, x_1; \dots; t_n + \tau, x_n),$$

т. е.  $\omega_n$  (а значит, и соответствующие характеристические функции) могут зависеть только от *разностей* значений  $t_1, \dots, t_n$ ,

но не от самих этих значений порознь. Про случайную функцию, удовлетворяющую этому условию, говорят, что она *однородна по аргументу  $t$* . Этот общий термин используется обычно в том случае, когда под  $t$  понимается пространственная координата (например, функция, однородная по абсциссе). Если же параметр  $t$  есть время, то однородность по времени большей частью называется *стационарностью*.

Из определения стационарной случайной функции вытекает, что ее одномерная плотность вероятности  $\omega_1$  вообще не зависит от  $t$ , двумерная плотность  $\omega_2$  может зависеть только от  $t_2 - t_1$ , трехмерная — от  $t_2 - t_1$  и  $t_3 - t_1$  и т. д. Следовательно, и условная вероятность  $x_2$  относительно  $x_1$  для стационарной функции тоже зависит только от  $t_2 - t_1$ :

$$v(t_2, x_2 | t_1, x_1) = \frac{\omega_2(x_1, t_2 - t_1, x_2)}{\omega_1(x_1)} = v(x_2 | t_2 - t_1, x_1).$$

Во многих случаях у условной вероятности существует стационарный предел при возрастании  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} v(x_2 | \tau, x_1) = \frac{1}{\omega_1(x_1)} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \omega_2(x_1, \tau, x_2) = \omega_1(x_2),$$

т. е. зависимость распределения в момент  $t_1 + \tau$  от значения, принятого в момент  $t_1$ , при  $\tau \rightarrow \infty$  ослабевает и в пределе исчезает. Условная вероятность переходит в стационарную одномерную вероятность состояния. Это обеспечивает так называемую *эргодичность* процесса, очень важное свойство, которое мы рассмотрим в дальнейшем (§ 20).

Подчеркнем еще раз, что марковские и стационарные процессы не представляют собой двух не перекрывающихся классов. Для процесса без последствия  $n$ -мерная плотность вероятности имеет вид (15.3), так что, вообще говоря, стационарности нет. Она будет иметь место, как уже было сказано, тогда, когда, во-первых, марковский процесс однороден (т. е. вероятность перехода  $v$  от  $x_1$  к  $x_2$  зависит только от  $t_2 - t_1$ ) и, во-вторых, существует стационарная одномерная функция распределения  $\omega_1(x)$ . С другой стороны, стационарный процесс описывается конечномерными плотностями вероятности  $\omega_n$ , которые зависят только от разностей  $t_i - t_n$ , но которые при  $n > 2$  в общем случае непредставимы через вероятности перехода  $v$  между двумя последовательными состояниями.

Все приведенные выше определения и свойства легко распространяются, по аналогии с многомерными случайными величинами, на *многомерные случайные функции*, т. е. совокупности любого числа  $N$  одномерных случайных функций  $\rho(t) \equiv \{\xi^{(1)}(t), \dots, \xi^{(N)}(t)\}$ . Обозначая возможные значения  $\rho(t)$  в какой-либо момент времени  $t_i$  через  $r_i$ , мы можем повторить

все сказанное ранее применительно к  $Nn$ -мерному распределению

$$\omega_n(t_1, \mathbf{r}_1; \dots; t_n, \mathbf{r}_n) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n.$$

Для марковского многомерного процесса  $\omega_n$  выражается через вероятность состояния  $\omega_1(t_1, \mathbf{r}_1)$  и вероятности перехода  $v(t_2, \mathbf{r}_2 | t_1, \mathbf{r}_1)$ . Для стационарной функции плотности вероятности  $\omega_n$  зависят только от разностей  $t_i$ ; смотря по тому, меняется ли  $t$  дискретно или непрерывно, можно различать многомерные случайные последовательности и процессы и т. д.

### § 17. Моменты случайных функций

Моменты случайной функции  $\xi(t)$  вводятся совершенно так же и с той же целью, что и для системы случайных величин. Это средние значения вида

$$\overline{\xi(t_1) \dots \xi(t_n)},$$

причем произвольно выбираемые  $t_1, \dots, t_n$  могут и совпадать между собой как частично ( $m$  различных значений  $t_i$ ,  $m \leq n$ ), так и полностью ( $t_1 = \dots = t_n$ , т. е.  $m = 1$ ). Число сомножителей  $n$  называется *порядком* момента, так что  $\overline{\xi(t)}$  есть момент первого порядка,  $\overline{\xi(t_1)\xi(t_2)}$ ,  $\overline{\xi^2(t_1)}$ ,  $\overline{\xi^2(t_2)}$  — моменты второго порядка (смешанный и два средних квадрата) и т. д. Существенное новое состоит в том, что моменты случайных величин являются просто числами, в то время как моменты случайных функций представляют собой функции выбранных значений параметра  $t$ , поскольку от этих значений зависят функции распределения.

Очевидно, для вычисления момента любого порядка  $n$  достаточно  $m$ -мерного распределения, где  $m$  — по-прежнему число различных значений  $t_i$  ( $1 \leq m \leq n$ ). Например, момент  $n$ -го порядка  $\overline{\xi^n(t_1)}$  определяется при помощи одномерного распределения:

$$\overline{\xi^n(t_1)} = \int x_1^n \omega_1(t_1, x_1) dx_1 = M_n(t_1). \quad (17.1)$$

Смешанный момент того же порядка  $n$ , содержащий  $t_1$  и  $t_2$ , — при помощи двумерного распределения:

$$\begin{aligned} \overline{\xi^\alpha(t_1) \xi^\beta(t_2)} &= \int x_1^\alpha x_2^\beta \omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= M_{\alpha+\beta}(t_1, t_2), \quad \text{где } \alpha + \beta = n, \end{aligned} \quad (17.2)$$

и т. д. вплоть до

$$\overline{\xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_n)} = \int x_1 x_2 \dots x_n \omega_n dx_1 \dots dx_n = M_n(t_1, \dots, t_n). \quad (17.3)$$

Это вытекает, конечно, из согласованности всех конечномерных распределений: выполняя усреднение  $n$  сомножителей, из которых только  $m \leq n$  различны, мы можем воспользоваться любой функцией распределения  $\omega_N$  с  $N \geq m$ , но интегрирование по «лишним» переменным тотчас же сведет ее к  $\omega_m$ . Например,

$$\begin{aligned} \int x_1^\alpha x_2^\beta \omega_N dx_1 \dots dx_N &= \int x_1^\alpha x_2^\beta dx_1 dx_2 \int \omega_N dx_3 \dots dx_N = \\ &= \int x_1^\alpha x_2^\beta \omega_2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Полагая в (17.3) значения  $t_i$  в том или ином количестве одинаковыми, мы можем, очевидно, получить из (17.3) полный набор всех моментов  $n$ -го порядка. В дальнейшем мы часто будем пользоваться более лаконичными обозначениями для моментов:

$$\overline{x_1^n}, \overline{x_1^\alpha x_2^\beta}, \overline{x_1 x_2 \dots x_n} \text{ и т. д.}$$

Центральные моменты определяются как средние значения пульсаций (или флуктуаций)  $\tilde{\xi}(t_i) = \xi(t_i) - \bar{\xi}(t_i)$ . Аналогичное (17.3), выражение для центрального момента  $n$ -го порядка есть

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\xi}(t_1) \dots \tilde{\xi}(t_n)} &= \overline{[\xi(t_1) - \bar{\xi}(t_1)] \dots [\xi(t_n) - \bar{\xi}(t_n)]} = \\ &= \overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) \dots (x_n - \bar{x}_n)^n} \end{aligned}$$

что нетрудно, конечно, записать в виде алгебраической суммы произведений простых моментов порядка от  $n$  до 1.

Относительно роли моментов случайной функции можно сказать то же, что и о роли моментов случайных величин. Конечно, они дают менее полную характеристику случайной функции, чем ее функции распределения, но, во-первых, в ряде практически важных вопросов эта характеристика оказывается достаточной, а, во-вторых, само нахождение моментов зачастую значительно проще, чем вычисление конечномерных функций распределения. Кроме того, для практических целей, а также в ряде вопросов теории наиболее существенную роль играют моменты низших порядков, в особенности первого и второго.

Момент первого порядка, или *среднее значение* функции, есть

$$\overline{\xi(t)} = \int x \omega_1(t, x) dx \equiv \bar{\xi}(t). \quad (17.4)$$

Моменты второго порядка, для которых удобно ввести специальные обозначения, — это *смешанный момент*:

$$\overline{\xi(t_1) \xi(t_2)} = \int x_1 x_2 \omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2 \equiv B(t_1, t_2), \quad (17.5)$$



равный при совпадающих аргументах  $t_1=t_2=t$  среднему квадрату функции в момент времени  $t$ :

$$\overline{\xi^2(t)} = B(t, t) \equiv \overline{\xi^2}(t), \quad (17.6)$$

и центральный момент второго порядка, называемый *функцией корреляции* (иногда — автокорреляции)<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \overline{[\xi(t_1) - \overline{\xi}(t_1)] [\xi(t_2) - \overline{\xi}(t_2)]} = \\ = B(t_1, t_2) - \overline{\xi}(t_1) \overline{\xi}(t_2) \equiv \psi(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (17.7)$$

равный при  $t_1=t_2=t$  дисперсии  $\xi(t)$  в момент времени  $t$ :

$$\overline{\xi^2}(t) - \overline{\xi}^2(t) = \psi(t, t) \equiv D[\xi(t)]. \quad (17.8)$$

Среднее значение определяет «центр тяжести» распределения, но, в отличие от случайной величины, теперь — в каждый момент времени  $t$ . Дисперсия является простейшей мерой расплывчатости, или разброса, относительно центра тяжести (опять-таки в каждый момент времени  $t$ ). Наконец, функция корреляции служит характеристикой *статистической связи* между значениями случайной функции, принимаемыми ею в какие-либо два различных момента времени  $t_1$  и  $t_2$ . Этой последней цели служит также *коэффициент корреляции*, определяемый как

$$K(t_1, t_2) = \frac{\psi(t_1, t_2)}{\sqrt{\psi(t_1, t_1) \psi(t_2, t_2)}} = \frac{\overline{\xi(t_1) \xi(t_2)} - \overline{\xi}(t_1) \overline{\xi}(t_2)}{\sqrt{D[\xi(t_1)] D[\xi(t_2)]}}, \quad (17.9)$$

т. е. пропорциональный функции корреляции и нормированный к единице при  $t_1 = t_2$ . Если  $\xi(t_1)$  и  $\xi(t_2)$  статистически независимы, т. е. двумерное распределение распадается на произведение двух одномерных:

$$\omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2) = \omega_1(t_1, x_1) \omega_1(t_2, x_2),$$

то

$$B(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1) \xi(t_2)} = \overline{\xi}(t_1) \overline{\xi}(t_2),$$

в силу чего функция и коэффициент корреляции обращаются в нуль. *Статистическая независимость влечет за собой отсутствие корреляции*, но, как и для случайных величин, обратное утверждение в общем случае неверно.

<sup>1)</sup> К сожалению, общепринятая терминология до сих пор еще не установилась. В английской литературе  $\psi(t_1, t_2)$  большей частью именуется ковариацией (covariance — в соответствии с тем, что дисперсия называется variance), а функцией корреляции (correlation function) называется момент  $B(t_1, t_2)$  и коэффициент корреляции  $K(t_1, t_2)$  (см. ниже). В последнее время, в связи с развитием корреляционной теории когерентности колебаний и волн, смешанный момент  $B(t_1, t_2)$  часто называют в оптике *функцией когерентности* (второго порядка) и используют для него обозначение  $\Gamma^{(2)}(t_1, t_2)$ .

Заметим, что  $B(t_1, t_2)$  всегда можно при помощи (15.2) представить в виде

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= \int x_1 x_2 \omega_2 dx_1 dx_2 = \\ &= \int x_1 \omega_1(t_1, x_1) \bar{dx}_1 \int x_2 v(t_2, x_2 | t_1, x_1) dx_2. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл представляет собой *условное среднее* от  $\xi(t_2)$ , т. е. среднее значение в момент времени  $t_2$  при условии, что в момент времени  $t_1$  функция приняла значение  $x_1$ . Обозначив это условное среднее, зависящее от  $t_1, t_2$  и  $x_1$ , через

$$\bar{x}_2(t_2 | t_1, x_1),$$

мы получаем, таким образом,

$$B(t_1, t_2) = \int x_1 \bar{x}_2(t_2 | t_1, x_1) \omega_1(t_1, x_1) dx_1. \quad (17.10)$$

Для многомерной случайной функции  $\rho(t) = \{\xi^{(1)}(t), \dots, \xi^{(N)}(t)\}$  в рассмотрение входят моменты, содержащие произведения разных компонент  $\xi^{(h)}(t)$ . Если не идти дальше моментов второго порядка, то для многомерной функции, наряду со средними значениями  $\bar{\xi}^{(h)}(t)$ , приходится иметь дело не только с моментами вида  $B_{hk}(t_1, t_2) = \overline{\xi^{(k)}(t_1) \xi^{(h)}(t_2)}$  и соответственно с функциями автокорреляции  $\psi_{hk}(t_1, t_2)$ , но и со *взаимными* моментами второго порядка, содержащими произведения двух различных функций  $\xi^{(h)}(t)$ . Мы получаем, таким образом, *матрицу* моментов второго порядка с элементами

$$B_{ik}(t_1, t_2) = \overline{\xi^{(i)}(t_1) \xi^{(k)}(t_2)}, \quad i, k = 1, 2, \dots, N, \quad (17.11)$$

и *корреляционную матрицу* с элементами

$$\begin{aligned} \psi_{ik}(t_1, t_2) &= [\overline{\xi^{(i)}(t_1) - \bar{\xi}^{(i)}(t_1)}] [\overline{\xi^{(k)}(t_2) - \bar{\xi}^{(k)}(t_2)}] = \\ &= B_{ik}(t_1, t_2) - \bar{\xi}^{(i)}(t_1) \bar{\xi}^{(k)}(t_2). \end{aligned} \quad (17.12)$$

## § 18. Корреляционная теория

Теория случайных функций, рассматривающая только одномерное и двумерное распределения, называется *корреляционной теорией* таких функций. Распределения высшего числа измерений она оставляет вне поля зрения. Соответственно в пределах корреляционной теории мы имеем возможность находить моменты различных порядков, но содержащие не более двух значений параметра  $t$ , в том числе среднее значение случайной функции и ее функцию корреляции. Вообще, мы можем вычислить среднее значение любой детерминированной функции вида

$F[\xi(t_1), \xi(t_2)]$ , если, конечно, это среднее существует:

$$\overline{F[\xi(t_1), \xi(t_2)]} = \int F(x_1, x_2) \omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2.$$

Что можно сказать о моментах первого и второго порядков специально для марковских и для стационарных процессов?

Очевидно, марковость процесса не вносит здесь ничего специфического, так как двумерное распределение *всегда* может быть выражено по (15.2) через условную вероятность  $v(t_2, x_2 | t_1, x_1)$ . То, что для марковского процесса  $v$  является вероятностью перехода, существенно лишь для  $n$ -мерных распределений с  $n \geq 3$ , но этих распределений корреляционная теория не рассматривает.

Напротив, стационарность процесса существенно сказывается на интересующих нас моментах первого и второго порядков. Действительно, поскольку одномерная плотность вероятности  $\omega_1(x)$  не зависит в этом случае от  $t$ , моменты любого порядка, вычисленные для *одного* значения  $t$ , тоже не будут зависеть от  $t$ , т. е. будут числовыми константами:

$$\overline{\xi^n(t)} = \int x^n \omega_1(x) dx = \overline{\xi^n} = \text{const.}$$

В частности, постоянными будут среднее значение  $\overline{\xi}$ , средний квадрат  $\overline{\xi^2}$  и дисперсия  $D[\xi] = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2$ . Далее, поскольку двумерная плотность вероятности стационарного процесса зависит от  $t_1$  и  $t_2$  только через разность  $\tau = t_2 - t_1$ , смешанный момент второго порядка, а значит, и функция корреляции тоже будут зависеть только от  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \overline{\xi(t_1) \xi(t_2)} &= B(\tau), & \overline{\xi^2} &= B(0), \\ B(\tau) - \overline{\xi}^2 &= \psi(\tau), & D[\xi] &= \psi(0), \\ K(\tau) &= \frac{\psi(\tau)}{\psi(0)} = \frac{\psi(\tau)}{D[\xi]}. \end{aligned} \quad (18.1)$$

Заметим, что  $B(\tau)$  [а тем самым  $\psi(\tau)$  и  $K(\tau)$ ] — обязательно четная функция  $\tau$ . Это следует из инвариантности по отношению к сдвигу начала отсчета времени  $t$  на  $\tau$ :

$$B(\tau) = \overline{\xi(t) \xi(t + \tau)} = \overline{\xi(t - \tau) \xi(t)} = B(-\tau).$$

Так как постоянное среднее значение обычно является легко измеряемой величиной, во многих случаях можно рассматривать только флуктуацию  $\tilde{\xi} = \xi - \overline{\xi}$ , т. е., не теряя общности, предполагать, что  $\overline{\xi} = 0$ . Тогда  $\psi(\tau)$  совпадает с  $B(\tau)$ :

$$\psi(\tau) = B(\tau) = \overline{\xi(t) \xi(t + \tau)}. \quad (18.2)$$

а коэффициент корреляции будет

$$K(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\psi(0)} = \frac{\overline{\xi(t)\xi(t+\tau)}}{\overline{\xi^2}}.$$

Для стационарных случайных функций особая роль функции корреляции связана еще и с тем, что она определяет *гармонический спектр* процесса, но к этому мы обратимся позднее.

В пределах корреляционной теории возможно более широкое определение стационарности. *Стационарными в широком смысле* (просто стационарными по А. Я. Хинчину [1]) называются случайные функции  $\xi(t)$ , у которых *среднее значение постоянно*:  $\overline{\xi(t)} = \bar{\xi} = \text{const}$ , а *момент второго порядка В зависит только от*  $\tau = t_2 - t_1$  и *конечен при*  $\tau = 0$ , т. е. конечен средний квадрат  $\overline{\xi^2} = B(0)$ . Тем самым конечно и постоянное среднее значение  $\bar{\xi}$ , поскольку  $D[\xi] = \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 \geq 0$ . Прежнее определение, предполагавшее инвариантность всех конечномерных распределений при сдвиге начала отсчета  $t$  (*стационарность в узком смысле*), не содержало требования конечности моментов первых двух порядков и в этом смысле было менее жестким. Но стационарность в широком смысле не означает, что все  $\omega_n$  при  $n > 2$  инвариантны при изменении начала отсчета  $t$ , и в этом отношении она действительно шире.

Посмотрим, при каких условиях может быть стационарной в широком смысле функция  $\xi(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ , где в общем случае  $A$ , и  $\theta$  — случайные величины.

Если случайна только амплитуда  $A$ , а фаза  $\theta$  имеет какое-то фиксированное значение, то

$$\overline{\xi(t)} = \bar{A} \cos(\omega t + \theta)$$

и условие постоянства среднего значения выполняется лишь при  $\bar{A} = 0$ , когда и  $\overline{\xi(t)} = 0$ . Для смешанного момента получаем

$$\begin{aligned} \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} &= \overline{A^2 \cos(\omega t + \theta) \cos[\omega(t+\tau) + \theta]} = \\ &= \frac{\bar{A}^2}{2} [\cos(2\omega t + \omega\tau + 2\theta) + \cos \omega\tau], \end{aligned}$$

т. е.  $B = B(t, \tau)$ , и, следовательно, даже при  $\bar{A} = 0$  стационарности нет.

Пусть теперь фаза  $\theta$  тоже случайна, причем независима от  $A$ . Тогда

$$\overline{\xi(t)} = \overline{A \cos(\omega t + \theta)} = \bar{A} (\cos \omega t \overline{\cos \theta} - \sin \omega t \overline{\sin \theta}).$$

Очевидно, независимость  $\overline{\xi(t)}$  от  $t$ , т. е. равенство  $\overline{\xi(t)} = 0$ , можно обеспечить теперь не только при  $\bar{A} = 0$ , но и при

$\overline{\cos \theta} = \overline{\sin \theta} = 0$ , что будет иметь место, если плотность вероятности фазы  $\omega_\theta(\theta)$  ортогональна в интервале  $(0, 2\pi)$  к  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$ , т. е. представима рядом Фурье:

$$\omega_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \geq 0.$$

Смешанный момент

$$\overline{\xi(t) \xi(t+\tau)} = \frac{A^2}{2} [\overline{\cos(2\omega t + \omega\tau + 2\theta)} + \cos \omega\tau]$$

теперь тоже может быть сделан функцией только от  $\tau$ . Надо только потребовать  $\overline{\cos 2\theta} = \overline{\sin 2\theta} = 0$ , т. е. чтобы в ряде Фурье, выражающем  $\omega_\theta(\theta)$ , отсутствовали также члены с  $n = 2$ . Тогда

$$\overline{\xi(t) \xi(t+\tau)} = \frac{A^2}{2} \cos \omega\tau = B(\tau).$$

Таким образом, при случайных и независимых  $A$  и  $\theta$  стационарность случайной функции  $\xi(t) = A \cos(\omega t + \theta)$  в широком смысле будет обеспечена, если  $A^2$  конечно, а распределение  $\theta$  имеет вид

$$\omega_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=3}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Нетрудно понять, что при наличии в этом ряде Фурье только гармоник с  $n > N$  все смешанные моменты  $\xi(t)$  до порядка  $N$  включительно будут зависеть только от разностей соответствующих моментов времени. В частности, если распределение равномерно в интервале  $(0, 2\pi)$ :

$$\omega_\theta(\theta) = 1/2\pi,$$

то сказанное относится к моментам любого порядка, что равносильно стационарности  $\xi(t)$  в узком смысле.

Как сказано, оперирование только распределениями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  часто оказывается практически достаточным, хотя оно и не заменяет в общем случае полного задания случайной функции. Существует, однако, очень важное исключение, благодаря которому ценность корреляционной теории существенно возрастает.

Довольно часто рассматриваемые случайные функции принадлежат к классу *нормальных* (или гауссовых) процессов, т. е. все  $\omega_n$  представляют собой  $n$ -мерные гауссовы распределения. Это имеет место в силу того, что выполнены условия централь-

ной предельной теоремы, как, например, в явлении дробового шума (§ 10), в распределении скоростей микрочастиц [максвелловское распределение (§ 7)] и т. д. Но  $n$ -мерное гауссово распределение содержит в качестве параметров только средние значения и моменты второго порядка (причем и те, и другие всегда конечны), а для нахождения этих моментов достаточно знать лишь  $\omega_2$  (и тем самым  $\omega_1$ ). Таким образом, нормальная случайная функция  $\xi(t)$  вполне определена заданием плотности вероятности  $\omega_2$ . Зная  $\omega_2$ , можно написать любую  $n$ -мерную функцию распределения и, следовательно, ответить на любой вопрос, касающийся какой-либо детерминированной функции от величин  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ .

Ясно также, что для нормальной случайной функции стационарность в широком смысле совпадает со стационарностью в узком смысле, так как из первой следует вторая: если  $\omega_1$  не зависит от  $t$ , а  $\omega_2$  зависит только от  $\tau = t_2 - t_1$ , то все  $\omega_n$  будут инвариантны по отношению к сдвигу начала отсчета  $t$ . Наконец, для нормальных функций некоррелированность означает статистическую независимость, чего нет в общем случае.

Не представляет затруднений распространить любое из определений стационарности на многомерные случайные функции. В корреляционной теории целесообразно по-прежнему понимать стационарность в широком смысле, т. е. подразумевать под стационарностью  $N$ -мерной функции  $\rho(t) = \{\xi^{(1)}(t), \dots, \xi^{(N)}(t)\}$  конечность и постоянство всех  $\xi^{(h)}(t)$  и  $[\xi^{(h)}(t)]^2$  и зависимость элементов матрицы  $B_{ih}$  (или корреляционной матрицы  $\psi_{ih}$ ) только от  $\tau = t_2 - t_1$ .

## § 19. Вероятностная сходимость

В дальнейшем нам придется широко оперировать производными и интегралами от случайных процессов. Обе операции — дифференцирование и интегрирование — предполагают, как известно, сходимость некоторой последовательности величин к пределу. Но для случайных величин, задаваемых не детерминированно, а своими распределениями вероятностей, понятие сходимости к пределу (а тем самым и понятия непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости для случайных функций) не может обладать тем же смыслом, какой вкладывается в него в анализе. Для последовательности случайных величин  $\xi_N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) возможно лишь *вероятностное* определение сходимости к пределу, что, кстати сказать, открывает и более разнообразные возможности в выборе самого определения. Вероятностная сходимость существенна также и для рассмотрения так называемых *эргодических* свойств случайных функций, к чему мы обратимся в следующем параграфе.

Начнем, для простоты, с рассмотрения различных типов сходимости последовательности случайных величин  $\zeta_N$  к (неслучайному) числу  $a$ .

Один из видов вероятностной сходимости — *сходимость в среднем квадратичном* (ср. кв.), под которой понимается обращение в нуль среднего квадратичного отклонения  $\zeta_N$  от числа  $a$  при  $N \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle (\zeta_N - a)^2 \rangle = 0, \quad (19.1)$$

что записывают в виде

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta_N = a \text{ (ср. кв.)}, \quad \text{или} \quad \zeta_N \xrightarrow{\text{ср. кв.}} a \text{ при } N \rightarrow \infty,$$

$$\text{или} \quad \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \zeta_N = a.$$

Обозначение l. i. m. составлено из начальных букв английского названия этого предела (limit in the mean square). Использование этого вида сходимости наиболее целесообразно в тех случаях, когда приходится иметь дело с квадратичными (в частности, имеющими энергетический смысл) комбинациями случайных величин.

Равенство (19.1) предполагает, очевидно, конечность  $\overline{\zeta_N^2}$ . Тем самым конечно и среднее значение  $\bar{\zeta}_N$ , поскольку  $D[\zeta_N] = \overline{\zeta_N^2} - \bar{\zeta}_N^2 \geq 0$ . Вычитая и прибавляя  $\bar{\zeta}_N$  в скобках в (19.1), перепишем это равенство иначе:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle (\zeta_N - \bar{\zeta}_N + \bar{\zeta}_N - a)^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \{D[\zeta_N] + (\bar{\zeta}_N - a)^2\} = 0.$$

Но предел суммы двух неотрицательных величин может быть равен нулю, только если равны нулю пределы обоих слагаемых, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\zeta}_N = a, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} D[\zeta_N] = 0.$$

Таким образом,  $a$  — это предел последовательности средних значений  $\bar{\zeta}_N$ , а предел дисперсии  $\zeta_N$  равен нулю.

Другой вид вероятностной сходимости  $\zeta_N$  к  $a$  — *сходимость по вероятности* (по вер.) — определен следующим образом:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|\zeta_N - a| < \epsilon\} = 1, \quad (19.2)$$

где, как обычно,  $\epsilon$  — любое сколь угодно малое положительное число. В этом случае пишут

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta_N = a \text{ (по вер.)} \quad \text{или} \quad \zeta_N \xrightarrow{\text{по вер.}} a \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Равенство (19.2) означает, что вероятность попадания  $\zeta_N$  куда-либо вне сколь угодно узкого интервала  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  в пределе ( $N \rightarrow \infty$ ) обращается в нуль. Ввиду произвольной малости  $\varepsilon$  это в свою очередь означает, что плотность вероятности  $w_N(x)$  случайной величины  $\zeta_N$  переходит при  $N \rightarrow \infty$  в  $\delta(x - a)$ . Однако отсюда отнюдь не следует, что  $a$  есть предел последовательности  $\bar{\zeta}_N$  и что  $D[\zeta_N]$  стремится к нулю. Более того,  $\bar{\zeta}_N$  и  $\bar{\zeta}_N^2$  могут неограниченно нарастать с увеличением  $N$  или даже быть бесконечными при всяком  $N$ . Пусть, например,  $\zeta_N$  неотрицательны и распределены по закону Коши:

$$w_N(x) = \frac{2N}{\pi(1 + N^2x^2)} \quad (x \geq 0, \quad N = 1, 2, \dots).$$

При всяком  $x > 0$  предел  $w_N(x)$  при  $N \rightarrow \infty$  равен нулю, тогда как  $w_N(0) = 2N/\pi$  и предела не существует. Вместе с тем условие нормировки выполнено всегда:

$$\int_0^{\infty} w_N(x) dx = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(Nx) \Big|_0^{\infty} = 1,$$

так что  $w_N(x)$  стремится при  $N \rightarrow \infty$  к  $\delta(x)$ . Нетрудно, однако, убедиться, что при *любом*  $N$   $\bar{\zeta}_N$  и  $\bar{\zeta}_N^2$  бесконечны.

Сходимость по вероятности часто называют *сходимостью в смысле закона больших чисел*. Про случайные величины  $\zeta_N$  говорят, что они являются предельно постоянными, если существует такая последовательность постоянных  $a_N$ , что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|\zeta_N - a_N| < \varepsilon\} = 1.$$

Если все  $a_N$  одинаковы (равны  $a$ ), то это равенство переходит в (19.2), т. е. означает, что  $\zeta_N$  сходится по вероятности к  $a$  или же разность  $\zeta_N - a$  сходится по вероятности к нулю.

Сходимость по вероятности следует четко отличать от обычной сходимости

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\zeta_N - a| = 0 \quad \text{или} \quad \zeta_N \rightarrow a.$$

Действительно, относительно поведения *эмпирических чисел* — значений  $\zeta_N$  — математически доказать ничего нельзя. Доказаны могут быть только утверждения, относящиеся к *теоретическим понятиям*, в том числе к понятию вероятности, как оно определено в исходных аксиомах. В сходимости по вероятности речь идет не о том, что  $\zeta_N \rightarrow a$  при  $N \rightarrow \infty$ , а о том, что *вероятность события*  $|\zeta_N - a| < \varepsilon$  стремится к единице. Связь этого утверждения с опытом заключена в «аксиоме измерения», согласно которой вероятность *измеряется* относительной частотой



наступления рассматриваемого случайного события в достаточно длинной серии испытаний, в достаточно обширном ансамбле систем и т. п.

Для лучшего уяснения этой принципиальной стороны вопроса остановимся на некоторых предельных теоремах теории вероятностей, объединяемых под общим названием *закона больших чисел*, а именно на теоремах, относящихся к тому случаю, когда  $\xi_N$  в (19.2) есть среднеарифметическое  $N$  случайных величин  $\xi_k$ :

$$\xi_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k. \quad (19.3)$$

Мы производим *серию* из  $N$  испытаний, берем их результаты  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  и вычисляем среднее (19.3). Затем мы смотрим, имеет ли место событие (назовем его событием  $B_N$ ), состоящее в том, что

$$|\xi_N - a| < \varepsilon.$$

Для того чтобы *измерить* вероятность события  $B_N$ , мы должны осуществить *очень большое число  $M$  серий по  $N$  испытаний*, должны иметь *коллектив таких серий*. Закон больших чисел (19.2) утверждает, что чем длиннее серии, образующие коллектив (чем больше  $N$ ), тем ближе  $P\{B_N\}$  к единице, т. е., по «аксиоме измерения», тем большее количество серий будет отвечать наступлению  $B_N$  (в пределе — практически все):

$$\frac{m(B_N)}{M} \rightarrow 1 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Таким образом, это вполне содержательное утверждение, но оно становится таким только при четком сопоставлении математического понятия вероятности с эмпирическим понятием относительной частоты. Без этого закон больших чисел остается некоторой теоремой, логически вытекающей из определенной системы аксиом для величины  $P$ , которая определена как вполне аддитивная, неотрицательная и нормированная к единице функция области.

Зачастую этот вопрос, который мы уже затрагивали в § 1, излагается в учебной литературе довольно сбивчиво, без четкого указания на то, что «аксиома измерения», связывающая понятия теории вероятностей с реальными явлениями, с экспериментом и практикой, *не содержится* в математической теории как таковой. Можно встретить утверждения о том, что фундамент успехов применения теории вероятностей в различных проблемах естествознания и техники заложен именно в законе больших чисел. Если бы это было так, то это означало бы, что

фундамент *практических* успехов есть *логическое следствие* определенных *абстрактных* аксиом и что эти математические аксиомы сами по себе предписывают, как должны вести себя эмпирические величины.

В принципе можно было бы исходить из других аксиом и построить другую теорию вероятностей, выводы которой, будучи иными, чем в существующей теории, были бы столь же логически безупречны и столь же необязательны для реальных явлений. Положение здесь такое же, как и с различными возможными геометриями. Но как только математическая теория *дополняется* определенными способами измерения тех величин, с которыми она оперирует, и становится тем самым физической теорией, ситуация меняется. Правильность или неправильность теории перестает тогда быть вопросом только ее логической непротиворечивости, а становится вопросом ее соответствия реальным вещам и явлениям. Приобретает содержание вопрос об *истинности* самих аксиом, так как теперь это может быть подвергнуто экспериментальной и вообще практической проверке.

Однако еще до такой проверки необходимо внутреннее соответствие между обеими частями физической теории: устанавливаемые способы измерения величин не должны находиться в противоречии с теми уравнениями, которым подчиняют эти величины математическая часть теории. Например, уравнения движения Ньютона предполагают, что сила есть вектор, и поэтому несовместимы с таким способом измерения силы, который характеризовал бы ее только по абсолютной величине. Может быть, в действительности сила не вектор, а скажем, тензор, но это уже *другой* вопрос, касающийся того, насколько хорошо отражает объективную реальность данная физическая теория в целом. Мы же говорим сейчас лишь о том, что наличие противоречия между математической и измерительной частями физической теории делает ее несостоятельной еще до всякой проверки ее следствий на опыте.

С этой точки зрения закон больших чисел отличается от других — логически равносильных ему — теорем теории вероятностей лишь тем, что он, как будет видно из дальнейшего, особенно отчетливо и явно показывает *совместимость* математического определения вероятности и частотного способа ее измерения. Он показывает, что частотная «аксиома измерения» не противоречит математической теории, но последняя, разумеется, не заменяет и не может заменить эту «аксиому».

Доказательство различных теорем, имеющих форму закона больших чисел, использует обычно неравенство Чебышева, доказанное в его диссертации в 1846 г. Пусть случайная величина  $\xi$  имеет конечную дисперсию  $D[\xi]$ . Неравенство Чебышева

утверждает, что

$$P\{|\zeta - a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{(\zeta - a)^2}{\varepsilon^2}. \quad (19.4)$$

Если, в частности,  $a = \bar{\zeta}$ , то неравенство (19.4) принимает вид <sup>1)</sup>

$$P\{|\zeta - \bar{\zeta}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D[\zeta]}{\varepsilon^2}. \quad (19.5)$$

Хотя неравенства (19.4) и (19.5) дают лишь весьма грубую оценку  $P$  (более точную оценку можно получить, если известен закон распределения  $\zeta$ ), для теоретических построений они очень полезны и важны.

В случае, когда  $\zeta$  в неравенстве Чебышева есть среднее арифметическое (19.3) из  $N$  случайных величин  $\xi_i$ , неравенство (19.5) позволяет доказать *теорему Чебышева*, являющуюся довольно общим выражением закона больших чисел. А именно, если  $\xi_i$  — последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих равномерно ограниченные дисперсии ( $D[\xi_i] \leq C$ ), то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|\zeta_N - \bar{\zeta}_N| < \varepsilon\} = 1. \quad (19.6)$$

Действительно,

$$D[\zeta_N] = D\left[\frac{1}{N} \sum_1^N \xi_i\right] = \frac{1}{N^2} \sum_1^N D[\xi_i] \leq \frac{C}{N}.$$

Согласно неравенству Чебышева

$$P\{|\zeta_N - \bar{\zeta}_N| \geq \varepsilon\} \leq \frac{C}{N\varepsilon^2},$$

откуда для вероятности противоположного события и следует теорема (19.6), т. е. сходимость по вероятности  $\zeta_N$  к  $\bar{\zeta}_N$ .

Частный случай теоремы Чебышева — теорема Пуассона. Пусть  $\xi_i = e_i$  — случайные величины-фиксаторы исхода  $i$ -го испытания [ $e_i = 1$  или  $0$  в соответствии с наступлением или ненаступлением события  $A$  при  $i$ -м испытании, при котором  $P\{A\} = p_i$ ]. Тогда

$$\zeta_N = \frac{1}{N} \sum_1^N e_i = \frac{n}{N}, \quad \bar{e}_i = p_i, \quad D[e_i] = p_i q_i \leq \frac{1}{4} \equiv C.$$

---

<sup>1)</sup> Самая общая форма неравенства Чебышева есть  $P\{f(\zeta) \geq K\} \leq \frac{\overline{f(\zeta)}}{K}$ , где  $f(\zeta)$  — неотрицательная детерминированная функция случайной величины  $\zeta$ , а  $K$  — произвольное положительное число. Неравенство (19.4) получается отсюда при  $f(\zeta) = (\zeta - a)^2$  и  $K = \varepsilon^2$ .

Значит,

$$\bar{\xi}_N = \frac{1}{N} \sum_1^N p_i$$

и теорема Чебышева дает

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{n}{N} - \frac{1}{N} \sum_1^N p_i \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (19.7)$$

Это и есть теорема Пуассона. Еще более частный случай — когда  $p_i = p$ . Тогда мы приходим к теореме Бернулли, одной из первых формулировок закона больших чисел:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{n}{N} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (19.8)$$

Остановимся на этой простейшей форме закона. Теорема (19.8) показывает, что с ростом числа испытаний  $N$  относительная частота события  $A$ , т. е. эмпирическая величина  $n(A)/N$ , сходится *по вероятности* к  $p$  — вероятности события  $A$ . Если бы это было не так, то было бы бессмысленно измерять вероятность при помощи относительной частоты. Но коль скоро это так, то частотный способ измерения вероятностей как  $p$  (по относительной частоте  $n(A)/N$  наступления события  $A$  в серии из  $N$  испытаний), так и  $P$  (по относительной частоте  $m(B_N)/M$  наступления события  $B_N = \left\{ \left| \frac{n}{N} - p \right| < \varepsilon \right\}$  в коллективе из  $M$  серий по  $N$  испытаний) может быть принят в качестве дополнения к математической теории, поскольку он ей не противоречит. После этого уже можно и спрашивать, и проверять на опыте, отражает ли получившаяся в результате физическая теория реальные статистические закономерности.

Любопытно, что для выполнения теоремы (19.8) при всяких значениях  $p$ , т. е. для сходимости по вероятности

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} = p \text{ (по вер.)},$$

достаточно потребовать, чтобы эта сходимость имела место лишь для  $p \ll 1$  (относительная частота маловероятных событий должна быть мала).

Запишем теперь теорему Чебышева для случая, когда все  $\bar{\xi}_i = a$ . Тогда

$$\bar{\xi}_N = \frac{1}{N} \sum_1^N \bar{\xi}_i = a$$

и теорема принимает вид

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_1^N \xi_i - a \right| < \varepsilon \right\} = 1, \text{ т. е. } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_1^N \xi_i = a \text{ (по вер.)},$$

что является основой правила среднего арифметического при измерениях. Отдельные  $\xi_i$  могут сильно отклоняться от  $a$ , но с вероятностью  $P \rightarrow 1$  имеем  $\zeta_N \rightarrow a$  при  $N \rightarrow \infty$ . Это происходит потому, что при вычислении среднего значения случайные отклонения отдельных слагаемых компенсируются и в подавляющем большинстве случаев отклонение  $|\zeta_N - a|$  оказывается очень малым.

Отклонения  $\xi_i$  от  $a$  могут быть *случайными* ошибками измерения. Но если сама *точность отсчета* при измерении не меньше  $\delta$ , т. е. присутствует *систематическая* ошибка, связанная с ценой деления шкалы, то и точность  $\zeta_N$  не меньше  $\delta$  при любом  $N$ , так что бессмысленно, апеллируя к закону больших чисел, стремиться получить и в этом случае значение  $a$  с погрешностью, меньшей  $\delta$ , за счет  $N \rightarrow \infty$ . Довольно широко распространено заблуждение, будто бы среднее арифметическое позволяет превзойти ограниченную снизу точность измерения и получать, скажем, с помощью щиткового амперметра отсчет силы тока с точностью до микроамперов.

Возможна и другая ситуация: сама измеряемая величина может быть случайной (шумовой ток и т. п.). Тогда мы можем быть уверены ( $P \rightarrow 1$ ), что  $\zeta_N \rightarrow a$  при  $N \rightarrow \infty$ , т. е. среднее арифметическое стремится к математическому ожиданию случайной величины.

Условие взаимной независимости результатов  $\xi_i$  измерения случайной величины требует, вообще говоря, выполнения ее замеров через достаточно большие промежутки времени. Однако для справедливости закона больших чисел само это условие независимости не необходимо, так как неравенство Чебышева требует лишь  $D[\zeta_N] \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Мы не будем останавливаться на более общих теоремах и на необходимых и достаточных условиях, при которых для среднего арифметического  $\zeta_N$  (19.3) справедлив закон больших чисел, так как эти условия касаются самой величины  $\zeta_N$  и поэтому менее интересны практически, чем более узкие условия, но относящиеся к отдельным слагаемым  $\xi_i$ .

В 1909 г. Э. Борелем (затем — в более общей форме — Ф. П. Кантелли, потом А. Н. Колмогоровым) было доказано более сильное утверждение, чем закон больших чисел. По теореме Бернулли

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{n}{N} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

По Борелю (*усиленный закон больших чисел*)

$$P\left\{\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{N} - p \right| = 0\right\} = 1, \quad (19.9)$$

т. е. с достоверностью, или, как принято говорить, «почти наверное», относительная частота имеет своим пределом вероятность  $p$ . Это еще более твердое основание для того, чтобы измерять вероятность относительной частотой.

Опираясь на (19.9), можно ввести еще один вид вероятностной сходимости — сходимость в смысле *усиленного закона больших чисел*, которую называют также сходимостью с вероятностью  $P = 1$  или *сходимостью почти наверное* (п. н.):

$$P\left\{\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N = a\right\} = 1. \quad (19.10)$$

Коротко это можно записать в виде

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N = a \text{ (п. н.) или } \xi_N \xrightarrow{\text{п. н.}} a \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Иногда в связи с определением (19.10) возникает недоумение по поводу того, что в нем фигурирует *обычный* предел последовательности *случайных* величин. Создается впечатление, что мы как будто отступаем здесь от высказанного выше утверждения, что сходимость случайных величин может иметь только вероятностный смысл. Но именно об этом идет речь и в данном случае. Среди различных реализаций последовательности  $\xi_N$  возможны и такие реализации, которые сходятся к  $a$  в обычном смысле. Можно показать, что множество таких реализаций обладает определенной вероятностью  $P$  [2]. Сходимость почти наверное означает, что эта вероятность, т. е. вероятность *случайного события*  $\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N = a$ , равна единице. Иначе говоря,

реализации  $\xi_N$ , сходящиеся к  $a$  в обычном смысле, «почти исчерпывают» множество всех возможных реализаций последовательности  $\xi_N$ . Таким образом, мы никуда не уходим в (19.10) от вероятностного определения сходимости, хотя теперь имеется в виду не предел вероятности (как в сходимости по вероятности), а вероятность предела.

Приведем два из условий сходимости  $\xi_N$  к  $a$  почти наверное. Одно из них — *необходимое и достаточное*:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P\{|\xi_N - a| > \varepsilon \text{ хотя бы для одного } N \geq M\} = 0.$$

Однако на практике это условие никогда нельзя проверить. Другое — более сильное *достаточное* условие — состоит в том,

что при каком-либо  $h > 0$  должен сходиться ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} \overline{(\zeta_N - a)^h}.$$

Другие достаточные условия и вообще детальную математическую дискуссию вопросов, касающихся вероятностной сходимости, можно найти в книгах [2] (гл. 3) и [3] (гл. 1).

Сходимость в среднем квадратичном влечет за собой (в силу неравенства Чебышева) сходимость по вероятности, а если все  $\zeta_N$  почти наверное равномерно ограничены по модулю, то, и обратно, из сходимости по вероятности следует сходимость в среднем квадратичном. Сходимость почти наверное также влечет за собой сходимость по вероятности, но не сходимость в среднем квадратичном не влечет за собой сходимости почти наверное.

Все сказанное выше о сходимости последовательности случайных величин  $\zeta_N$  к числу  $a$  естественным образом распространяется и на сходимость к случайной величине  $\zeta$ , определенной на том же множестве возможных значений, что и величины  $\zeta_N$ . Так, например, определение сходимости  $\zeta_N$  к  $\zeta$  в среднем квадратичном есть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle (\zeta_N - \zeta)^2 \rangle = 0, \quad (19.11)$$

а сходимость по вероятности —

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \{ |\zeta_N - \zeta| < \varepsilon \} = 1. \quad (19.12)$$

Отличие от (19.1) и (19.2) заключается в том, что усреднение в (19.11) и подсчет вероятности  $P$  в (19.12) требуют теперь знания *совместного* распределения величин  $\zeta_N$  и  $\zeta$ . Если плотность вероятности этого распределения есть  $\omega_N(x, y)$ , то (19.11) означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \iint (x - y)^2 \omega_N(x, y) dx dy = 0,$$

а (19.12) означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int dy \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \omega_N(x, y) dx = 1.$$

Так как  $\varepsilon$  сколь угодно мало, из последнего равенства вытекает, что при  $N \rightarrow \infty$   $\omega_N(x, y)$  переходит в  $\omega_\zeta(y) \delta(x - y)$ .

Обратимся теперь к случайным процессам, т. е. к случайным функциям  $\xi(t)$  с непрерывным аргументом  $t$ .

В соответствии с тремя приведенными определениями вероятностной сходимости можно определить и непрерывность слу-

чайной функции  $\xi(t)$  в точке  $t$ . Речь идет о сходимости  $\xi(t + \Delta t)$  к  $\xi(t)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Следовательно, непрерывность в среднем квадратичном означает, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{\{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)\}^2} = 0,$$

или

$$\text{l.i.m. } \xi(t + \Delta t) = \xi(t).$$

Подчеркнем, что непрерывность случайной функции по вероятности отнюдь не предполагает непрерывности ее возможных значений. Последние могут быть и дискретными, как, например, заряд, поступивший на анод в задаче о дробовом шуме. Возможные значения заряда  $q(t)$  кратны заряду электрона  $e$ , т. е.  $q(t)$  меняется разрывно. Тем не менее функция  $q(t)$  предполагается непрерывной по вероятности, т. е. при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$P\{|q(t + \Delta t) - q(t)| > \varepsilon\} < \eta.$$

Другими словами, предполагается, что вероятность прихода на анод за время  $\Delta t$  заряда  $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ , равного одному или нескольким  $e$ , стремится к нулю вместе с  $\Delta t$ .

Аналогично вероятностной непрерывности определяется и дифференцируемость случайной функции  $\xi(t)$ , а именно — как существование предела  $\dot{\xi}(t)$  (в каком-либо из указанных смыслов) выражения

$$\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t}$$

при произвольном переходе  $\Delta t \rightarrow 0$ . Например, дифференцируемость в среднем квадратичном означает, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{\left\{ \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \dot{\xi}(t) \right\}^2} = 0,$$

или

$$\text{l.i.m.}_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} = \dot{\xi}(t),$$

а дифференцируемость почти наверное означает, что

$$P\left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} = \dot{\xi}(t) \right\} = 1.$$

Следует, однако, предостеречь от поспешного вывода, что переход от случайных последовательностей к случайным процессам представляет собой некий тривиальный шаг. В отношении процессов возможны такие, вполне оправданные, вопросы, ответы на которые связаны с определенными трудностями. Например, непрерывность (или дифференцируемость) процесса  $\xi(t)$  в некотором интервале значений  $t$  (т. е. в *несчетном* множестве



точек  $t$ ), вообще говоря, не принадлежит к случайным событиям, вероятности которых однозначно определяются конечными распределениями  $\xi(t)$ . Однако в соответствии с общими установками, принятыми в этой книге, мы не можем углубляться в такие вопросы, вновь отсылая читателя к математической литературе [2, 3].

В тех же трех смыслах сходимости можно понимать существование предела суммы

$$R_N = \sum_0^{N-1} \xi(t_i) (t_{i+1} - t_i),$$

где  $t_0 = a$ ,  $t_n = b$ , т. е. существование риманова интеграла от случайной функции  $\xi(t)$

$$R = \int_a^b \xi(t) dt.$$

Функция  $\xi(t)$  называется тогда  $R$ -интегрируемой (по вер., или п. н., или в ср. кв., смотря по тому, какая сходимость  $R_N$  к  $R$  имеется в виду). Аналогично можно определить интегралы Стильеса:

$$S = \int_a^b \xi(t) df(t), \quad S = \int_a^b f(t) d\xi(t),$$

где  $f(t)$  — детерминированная функция, — как пределы в каком-либо из вероятностных смыслов интегральных сумм

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \xi(t_i) [f(t_{i+1}) - f(t_i)],$$

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) [\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)],$$

а также для двух независимых случайных функций  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  — интеграл Стильеса:

$$S = \int_a^b \xi(t) d\eta(t).$$

## § 20. Эргодичность случайного процесса

Свойство эргодичности, о котором далее пойдет речь, важно потому, что при его наличии имеют место чрезвычайно существенные соотношения между функцией распределения и временем пребывания случайной функции  $\xi(t)$  в определенном интервале значений, между статистическими средними и средними по времени.

Функции распределения, согласно «аксиоме измерения» вероятности, имеют *статистический* смысл. Это *относительные частоты в ансамбле одинаковых систем*, т. е. систем, в каждой из которых воспроизведены одни и те же условия протекания данного случайного процесса и одни и те же способы его регистрации или наблюдения. Если, например, речь идет о флуктуациях, то одинаковыми должны быть *макроскопические* характеристики всех систем, составляющих ансамбль. Имея ансамбль систем, мы располагаем обширным набором *реализаций* реализуемой случайной функции  $\xi(t)$  и с помощью соответствующих вероятностей, т. е. распределений систем ансамбля по возможным значениям  $\xi(t)$ , можем находить  $\overline{\xi(t)}$ ,  $\psi(t_1, t_2)$  и т. д.

Теоретики любят оперировать с ансамблями, но у экспериментаторов обычно одна лаборатория и одна установка, а не  $10^6$  или  $10^9$ <sup>1)</sup>. За данный промежуток времени  $(0, T)$  экспериментатор может получить лишь *одну* реализацию интересующего его случайного процесса и предпочитает поэтому усреднять *по времени*, пользуясь *одной* реализацией  $\xi(t)$ , одной осциллограммой или аналогичным образцом. Спрашивается, в каком соотношении находятся эти способы усреднения — по времени и по ансамблю?

Забегая вперед, укажем уже теперь, что для *стационарных* процессов, обладающих *свойством эргодичности*, оба способа усреднения при достаточно больших  $T$  практически совпадают, так как в этом случае стационарная вероятность состояния равна относительному времени пребывания системы в данном состоянии. Соответственно среднее статистическое равно среднему по достаточно большому промежутку времени<sup>2)</sup>. Говоря «равно» или «совпадает», мы, конечно, допускаем неточность, так как речь идет лишь о вероятностной сходимости — по вероятности, в среднем квадратичном или почти наверное.

Формулируем эти утверждения более точно и докажем их [4].

Пусть  $f(\xi)$  — некая детерминированная функция случайной функции  $\xi(t)$ . Обозначим ее среднее по времени за промежуток  $(0, T)$  индексом  $T$  и волнистой чертой сверху:

$$\overline{f(\xi(t))}_T = \frac{1}{T} \int_0^T f[\xi(t)] dt. \quad (20.1)$$

1) Конечно, случаи, когда ансамбль реализуется в одной установке, не исключены. Напомним, например, диффузию капли краски в воде. Правда, членами ансамбля здесь являются не сложные макроскопические системы, а малые частицы.

2) Именно поэтому стационарная вероятность имеет смысл вероятности состояния при термодинамическом равновесии, а средние статистические — смысл термодинамически равновесных значений.

Как сказано, это эмпирическая величина, получаемая в результате определенной обработки осциллограммы  $f(\xi)$  в интервале  $(0, T)$ . Вместе с тем это случайная величина, различная для разных реализаций  $\xi(t)$  в интервале  $(0, T)$ . Пусть  $\omega_1(x, t)$  и  $\omega_2(t, x; t', x')$  — одномерная и двумерная плотности вероятностей  $\xi(t)$ . Вычислим среднее значение и дисперсию случайной величины  $\overline{f_T}(\xi)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \overline{f_T}(\xi) &= \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(\xi)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \omega_1(t, x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \frac{1}{T} \int_0^T \omega_1(t, x) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_T(x) dx, \end{aligned} \quad (20.2)$$

где мы ввели «эффективную» плотность вероятности

$$p_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \omega_1(t, x) dt. \quad (20.3)$$

Имеем, далее,

$$\begin{aligned} D[\overline{f_T}(\xi)] &= \langle \{ \overline{f_T}(\xi) - \overline{f_T}(\xi) \}^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \{ \overline{f(\xi) f(\xi')} - \overline{f(\xi)} \overline{f(\xi')} \} dt dt' = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \psi_f(t, t') dt dt', \end{aligned} \quad (20.4)$$

где  $\psi_f(t, t')$  — функция корреляции  $f(\xi)$ :

$$\begin{aligned} \psi_f(t, t') &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x') \{ \omega_2(t, x; t', x') - \\ &\quad - \omega_1(t, x) \omega_1(t', x') \} dx dx'. \end{aligned} \quad (20.5)$$

Таким образом, для всех  $f(\xi)$  с конечным  $\langle f^2(\xi) \rangle$  требование

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \psi_f(t, t') dt dt' = 0 \quad (20.6)$$

есть *необходимое и достаточное* условие того, чтобы имела место сходимость в среднем квадратичном:

$$\text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \{ \overline{f_T}(\xi) - \overline{f_T}(\xi) \} = 0, \quad (20.7)$$

причем необходимость вытекает просто из определения этого вида сходимости. В силу неравенства Чебышева для случайной величины  $\overline{f_T(\xi)}$ :

$$P \{ |\overline{f_T(\xi)} - \overline{f_T(\xi)}| \geq \varepsilon \} \leq \frac{D[f_T(\xi)]}{\varepsilon^2},$$

условие (20.6) достаточно и для сходимости по вероятности:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} |\overline{f_T(\xi)} - \overline{f_T(\xi)}| = 0 \text{ (по вер.)},$$

или в развернутой форме:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{T} \int_0^T f[\xi(t)] dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_T(x) dx \right| = 0 \text{ (по вер.)},$$

где  $p_T(x)$  дается формулой (20.3). Можно сказать, что это закон больших чисел в применении к непрерывному наблюдению.

Докажем теперь, что при условии (20.6) *относительное время пребывания  $\xi(t)$  в промежутке  $(x, x + dx)$  сходится по вероятности при  $T \rightarrow \infty$  к  $p_\infty(x)dx$* , где

$$p_\infty(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} p_T(x),$$

если, конечно, этот предел существует. Относительным временем пребывания называется отношение суммарного времени  $T_{(x, x+dx)}$ , проведенного  $\xi(t)$  в промежутке  $(x, x + dx)$ , т. е. суммы всех отмеченных на рис. 9 жирной линией отрезков оси абсцисс от момента 0 до момента  $T$ , к продолжительности интервала  $T$ .

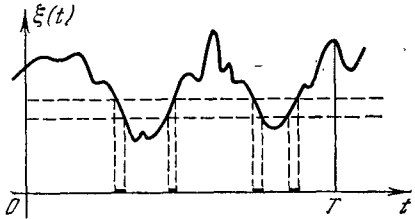


Рис. 9.

Для доказательства достаточно взять в качестве  $f(\xi)$  функцию-фиксатор:

$$f(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < \xi(t) \leq x + dx, \\ 0, & \text{если } \xi(t) \text{ вне } (x, x + dx). \end{cases}$$

Тогда по (20.1)

$$\overline{f_T(\xi)} = \frac{T_{(x, x+dx)}}{T},$$

а по (20.2)

$$\overline{f_T(\xi)} = p_T(x) dx,$$

т. е. распределение  $p_T(x) dx$ , вычисляемое из одномерной плотности вероятности  $\omega_1(t, x)$  путем усреднения ее по параметру  $t$  [см. (20.3)], имеет смысл среднего (по ансамблю) относительного времени пребывания:

$$\overline{\frac{T(x, x+dx)}{T}} = p_T(x) dx = \frac{dx}{T} \int_0^T \omega_1(t, x) dt. \quad (20.8)$$

Теорема же (20.7) принимает теперь вид

$$\text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{T(x, x+dx)}{T} - p_T(x) dx \right\} = 0. \quad (20.9)$$

Все сказанное справедливо для случайного процесса  $f[\xi(t)]$ , удовлетворяющего условию (20.6) — так называемому *условию эргодичности* этого процесса. Необходимое и достаточное условие (20.6) можно заменить более сильными требованиями — *достаточными* условиями эргодичности, которые в приложениях теории большей частью оказываются выполненными. Например, условие (20.6) будет удовлетворено, если функция корреляции  $\psi_f(t, t')$  всюду ограничена и при всяком  $t$  убывает с увеличением  $|t' - t|$ , как  $|t' - t|^{-\alpha}$ , где  $\alpha > 0$ . В свою очередь, согласно (20.5), это будет выполнено, если при всяком  $t$  увеличение  $|t' - t|$  достаточно быстро приводит к статистической независимости между  $\xi(t)$  и  $\xi(t')$ :

$$\omega_2(t, x; t', x') \rightarrow \omega_1(t, x) \omega_1(t', x') \quad \text{при } |t' - t| \rightarrow \infty. \quad (20.10)$$

Это последнее требование, означающее, в частности, достаточно быстрое «забывание» рассматриваемой системой ее предшествующих состояний, можно, согласно (15.2), формулировать и в терминах условной вероятности:

$$v(t', x' | t, x) \rightarrow \omega_1(t', x') \quad \text{при } t' - t \rightarrow \infty. \quad (20.11)$$

Для марковского процесса это означает, что на вероятность перехода в состояние  $x'$  в момент  $t'$  достаточно давние прошедшие состояния уже не влияют и она превращается просто в одномерную вероятность состояния. Довольно часто под условиями эргодичности подразумевают именно требования (20.10) или (20.11), хотя при их невыполнении необходимое условие (20.6) может остаться в силе.

Приведем некоторые примеры распределения  $p_T(x) dx$ .

Пусть  $\xi(t) = F(t)\eta(t)$ , где  $F(t)$  — детерминированная функция времени, а  $\eta(t)$  — *стационарный* случайный процесс с одномерной функцией распределения  $\omega(y) dy$ . Одномерная плотность вероятности для  $\xi(t)$  может быть вычислена по известной

формуле, дающей распределение произведения двух случайных величин, если для  $F(t)$  тоже ввести «функцию распределения», а именно  $\omega_F(z) dz = \delta[z - F(t)] dz$ . Тогда

$$\begin{aligned} \omega_1(t, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega\left(\frac{x}{y}\right) \omega_F(y) \frac{dy}{|y|} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega\left(\frac{x}{y}\right) \delta[y - F(t)] \frac{dy}{|y|} = \omega\left[\frac{x}{F(t)}\right] \frac{1}{|F(t)|}. \end{aligned} \quad (20.12)$$

Подставляя это в (20.3), получаем для среднего относительного времени пребывания выражение

$$\rho_T(x) dx = \frac{dx}{T} \int_0^T \omega\left[\frac{x}{F(t)}\right] \frac{dt}{|F(t)|}. \quad (20.13)$$

Большую роль в радиотехнике играют так называемые *периодически-нестационарные процессы*, у которых одномерная плотность вероятности, а значит, и моменты  $\xi^n$  периодически зависят от  $t$ . Очевидно, в этом случае при вычислении  $\rho_T(x)$  целесообразно понимать под  $T$  период  $\omega_1(x, t)$ . Тем самым,  $\rho_T(x)$  не зависит от  $T$  и совпадает с  $\rho_\infty(x)$ .

Пусть  $\omega_1(t, x)$  — нормальный закон с гармонически меняющимся стандартом  $\sigma = \sigma_0(1 + k \cos \omega t)$ ,  $k \leq 1$ :

$$\omega_1(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0(1 + k \cos \omega t)} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_0^2(1 + k \cos \omega t)^2} \right\}.$$

Вводя  $T = 2\pi/\omega$  и переменную интегрирования  $\varphi = \omega t$ , имеем

$$\rho_T(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_0} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_0^2(1 + k \cos \varphi)^2} \right\} \frac{d\varphi}{1 + k \cos \varphi}.$$

Подстановка

$$\frac{1 - k^2}{1 + k \cos \varphi} = 1 - k \cos \theta$$

приводит этот интеграл к виду

$$\rho_T(x) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2} \sigma_0 \sqrt{1 - k^2}} \int_0^\pi e^{-\beta(1 - k \cos \theta)^2} d\theta, \quad \beta = \frac{x^2}{2\sigma_0^2(1 - k^2)^2}.$$

Если  $k \rightarrow 0$ , то  $\omega_1(t, x)$  переходит в стационарное гауссово распределение  $\omega_1(x)$  с дисперсией  $\sigma_0^2$ , и тогда  $\rho_T(x)$  совпадает с  $\omega_1(x)$ . Если же  $k \rightarrow 1$ , т. е.  $k = 1 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то в интеграле существенны только малые значения  $\theta$ . Можно

приближенно положить

$$1 - k \cos \theta = \varepsilon + \theta^2/2 = \varepsilon (1 + s^2), \quad s = \theta/\sqrt{2\varepsilon}$$

и раздвинуть пределы интегрирования по  $s$  от 0 до  $\infty$ . Выражение для  $p_T(x)$  принимает вид

$$p_T(x) \approx \frac{2}{(2\pi)^{3/2} \sigma_0} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{x^2}{8\sigma_0^2} (1 + s^2)^2 \right\} ds.$$

Это выражение, справедливое для достаточно малых  $\varepsilon$  (т.е.  $k \approx 1$ ), при  $x \gg \sigma_0$ , когда в показателе можно отбросить  $s^4$ , дает

$$p_T(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2} \pi |x|} \exp \left\{ -\frac{x^2}{8\sigma_0^2} \right\} \quad (x \gg \sigma_0),$$

а в случае  $x \ll \sigma_0$ , когда в показателе существенно только  $s^4$ , дает

$$p_T(x) \approx \frac{2}{(2\pi)^{3/2} \sigma_0} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{x^2 s^4}{8\sigma_0^2} \right\} ds = \frac{\sqrt{2} \Gamma(1/4)}{4 \sqrt{\pi^3} \sigma_0 |x|} \quad (x \ll \sigma_0).$$

Мы видим отсюда, что даже кратковременное приближение стандарта  $\sigma$  к нулю влечет за собой значительное возрастание относительного времени пребывания  $\xi(t)$  в области малых значений  $x$ .

Как изменятся предыдущие результаты, если свойством эргодичности обладает *стационарный* процесс  $\xi(t)$ ? В этом случае  $\omega_1$  не зависит от  $t$ , а  $\omega_2$  зависит лишь от разности  $t' - t$ , в силу чего и функция корреляции для  $f(\xi)$  тоже зависит лишь от  $t' - t$ . Необходимое и достаточное условие эргодичности (20.6) принимает теперь следующий вид:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \psi_f(t' - t) dt dt' = 0. \quad (20.14)$$

Отсюда нетрудно получить другую форму условия, содержащую только однократный интеграл от  $\psi_f(\tau)$ . С учетом четности  $\psi_f(t' - t)$  по аргументу  $\tau = t' - t$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} \iint_0^T \psi_f(t' - t) dt dt' &= \frac{2}{T^2} \int_0^T dt \int_0^t \psi_f(t' - t) dt' = \\ &= \frac{2}{T^2} \int_0^T dt \int_0^t \psi_f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (20.15)$$

Но для функции корреляции стационарного в широком смысле процесса справедливо неравенство  $[\sigma^2 = \psi_f(0)]$

$$\frac{2\sigma^2}{T^2} \int_0^{2T} dt \int_0^t \psi_f(\tau) d\tau \geq \left[ \frac{2}{T} \int_0^T \psi_f(\tau) d\tau \right]^2, \quad (20.16)$$

(см. [5], а также задачу 3 гл. VI). В силу (20.15) и (20.16) выполнение условия (20.14) влечет за собой выполнение условия

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi_f(\tau) d\tau = 0, \quad (20.17)$$

которое является, таким образом, необходимым условием эргодичности стационарного случайного процесса. Но оно также и достаточно, поскольку (20.15) можно записать в виде

$$\frac{1}{T^2} \iint_0^T \psi_f(t' - t) dt dt' = \frac{2}{T^2} \int_0^T \frac{t}{T} dt \left( \frac{1}{t} \int_0^t \psi_f(\tau) d\tau \right),$$

откуда ясно, что при выполнении (20.17) имеет место и (20.14).

Условие (20.17), необходимое и достаточное для эргодичности стационарного в широком смысле случайного процесса, носит название условия Слуцкого (см. [6], стр. 18). Оно допускает, что  $\psi_f(\tau)$  не стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ , а, например, содержит члены вида  $a \cos \omega \tau$ <sup>1)</sup>. В этом случае

$$\frac{1}{T} \int_0^T \psi_f(\tau) d\tau = \frac{a \sin \omega T}{\omega T},$$

т. е. (20.17) выполнено.

Если интеграл от  $\psi_f(\tau)$  в пределах от 0 до  $\infty$  существует, то можно ввести эффективное время корреляции  $\tau_0$ :

$$\tau_0 = \frac{1}{\sigma_f^2} \int_0^{\infty} \psi_f(\tau) d\tau, \quad \sigma_f^2 = \psi_f(0)$$

(в действительности  $\psi_f(\tau)$  может обладать не одним, а несколькими характерными временными масштабами). В этом случае левая часть условия (20.17) при достаточно больших  $T$  (а именно  $T \gg \tau_0$ ) приближенно равна  $\sigma_f^2 \tau_0 / T$ .

<sup>1)</sup> Как мы видели (§ 18), функцией корреляции такого вида обладает гармоническое колебание со случайными и независимыми амплитудой и фазой, если, в частности, фаза распределена равномерно в интервале  $(0, 2\pi)$ .



*Достаточные* условия эргодичности стационарного процесса можно формулировать по-прежнему либо как требование

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \psi_f(\tau) = 0, \quad (20.18)$$

либо аналогично (20.10) или (20.11):

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \omega_2(x, \tau, x') &= \omega_1(x) \omega_1(x'), \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} v(x') | \tau, x &= \omega_1(x'). \end{aligned} \quad (20.19)$$

Но, быть может, наиболее существенным обстоятельством является то, что для стационарного процесса распределение  $p_T(x)$  совпадает с одномерной функцией распределения  $\omega_1(x)$ , поскольку последняя не зависит от  $t$  [см. (20.3)]. Тем самым, теоремы (20.7)—(20.9) утверждают теперь, что при условии эргодичности (20.17) мы имеем

$$\text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \overline{f_T(\xi)} = \overline{f(\xi)}, \quad (20.20)$$

т. е. среднее временное от  $f(\xi)$  сходится в среднем квадратичном (и по вероятности) к среднему статистическому и, в частности,

$$\text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \overline{\xi_T} = \text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt = \bar{\xi}. \quad (20.21)$$

Далее,

$$\text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \frac{T(x, x+dx)}{T} = \omega_1(x) dx, \quad (20.22)$$

т. е. *относительное время пребывания* сходится в среднем квадратичном (и по вероятности) к *одномерной функции распределения*. Последняя есть просто среднее статистическое от относительного времени пребывания:

$$\overline{\frac{T(x, x+dx)}{T}} = \omega_1(x) dx. \quad (20.23)$$

Это дает в руки экспериментатору, если он имеет дело со стационарным эргодическим случайным процессом, непосредственный метод измерения одномерной функции распределения: вероятность попадания  $\xi(t)$  в какой-либо интервал  $(a, b)$  измеряется относительным временем пребывания  $\xi(t)$  в этом интервале за достаточно длинный промежуток времени  $T$ .

Мы рассматривали до сих пор условия эргодичности применительно к временному среднему случайной функции  $f[\xi(t)]$ , т. е. функции, зависящей от значения  $\xi(t)$  в какой-то один мо-

мент времени (иногда это называют эргодичностью первого порядка); что можно сказать об эргодичности второго порядка, т. е. временных средних для функций  $f[\xi(t), \xi(t')]$ ? Ограничимся в этом вопросе частным случаем стационарного процесса  $\xi(t)$  и функцией  $f$ , равной произведению  $\xi(t)\xi(t')$ . Речь идет, следовательно, о том, при каком условии среднее временное

$$\overline{[\xi(t)\xi(t+\tau)]_T} = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)\xi(t+\tau) dt$$

сходится при  $T \rightarrow \infty$  к своему среднему статистическому, равному, как легко видеть, функции корреляции процесса  $\xi(t)$ <sup>1)</sup>:

$$\overline{[\xi(t)\xi(t+\tau)]_T} = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\tau) dt = \psi(\tau).$$

Очевидно, если такая сходимость имеет место, т. е.

$$\text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)\xi(t+\tau) dt = \psi(\tau), \quad (20.24)$$

то практически это означает возможность измерять функцию корреляции путем временного усреднения произведения  $\xi(t)\xi(t+\tau)$  по достаточно длинному промежутку времени  $T$ .

Равенство (20.24) означает, что дисперсия случайной величины  $[\xi(t)\xi(t+\tau)]_T$  стремится при  $T \rightarrow \infty$  к нулю. Если обозначить функцию корреляции случайной величины  $\eta_\tau(t) = \xi(t)\xi(t+\tau)$  через  $\psi_\eta(\sigma)$ :

$$\begin{aligned} \psi_\eta(\sigma) &= \langle \eta_\tau(t)\eta_\tau(t+\sigma) \rangle - \langle \eta_\tau(t) \rangle \langle \eta_\tau(t+\sigma) \rangle = \\ &= \langle \xi(t)\xi(t+\tau)\xi(t+\sigma)\xi(t+\sigma+\tau) \rangle - \psi^2(\tau), \end{aligned}$$

то, как показал Е. Е. Слуцкий, указанное требование сводится к тому, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi_\eta(\sigma) d\sigma = 0. \quad (20.25)$$

Если стационарность  $\xi(t)$  понимается в широком смысле (т. е. не утверждается, что функции распределения  $\omega_n$  для  $\xi(t)$  инвариантны по отношению к сдвигу начала отсчета времени при  $n \geq 3$ ), то независимость  $\psi_\eta$  от  $t$  представляет собой самостоятельное предположение. Если же стационарность  $\xi(t)$

<sup>1)</sup> Для простоты мы считаем, что  $\bar{\xi} = 0$ ,

понимается в узком смысле, то момент четвертого порядка будет зависеть только от разностей моментов времени, т. е. от  $\tau$  и  $\sigma$ . Обычно следует из физических соображений, что зависимость между  $\eta(t)$  и  $\eta(t + \sigma)$  при  $\sigma \rightarrow \infty$  исчезает, так что  $\psi_\eta(\sigma) \rightarrow 0$ , и тогда условие (20.25) выполнено. Тем самым верна и теорема (20.24).

Наличие в  $\psi_\eta$  момента четвертого порядка не позволяет в общем случае выразить (20.25) — условие справедливости эргодической теоремы (20.24) для момента второго порядка — через функцию корреляции самого процесса  $\xi(t)$ , т. е. через  $\psi(\tau)$ . Однако в том частном и важном случае, когда  $\xi(t)$  — нормальная функция, а значит, все ее моменты, в том числе и четвертые, выражаются через  $\bar{\xi}$  и  $\psi(\tau)$ , это возможно. А именно, если  $\xi(t)$  — нормальная функция (и для простоты  $\bar{\xi} = 0$ ), то необходимым и достаточным условием для выполнения (20.24) будет

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\psi(\tau)|^2 d\tau = 0. \quad (20.26)$$

Если в функции корреляции  $\psi(\tau)$  содержатся периодические члены, то условие (20.25) для нее выполнено, но (20.26) уже не имеет места. Заметим, что (20.26) обеспечивает выполнение эргодической теоремы для моментов не только второго, но и любого порядка, т. е. все временные средние по промежутку  $(0, T)$  от произведений  $\xi(t + \tau_1)\xi(t + \tau_2) \dots \xi(t + \tau_n)$  сходятся по вероятности при  $T \rightarrow \infty$  к соответствующим моментам. Более того, для любой функции от нормальных величин  $\xi(t + \tau)$

$$f[\xi(t + \tau_1), \xi(t + \tau_2), \dots, \xi(t + \tau_n)]$$

(если среднее значение ее модуля  $|\bar{f}|$  конечно) теорема тоже верна: при  $T \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} \text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} f_T &= \text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f[\xi(t + \tau_1), \xi(t + \tau_2), \dots, \xi(t + \tau_n)] dt = \\ &= \overline{f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}. \end{aligned}$$

### Задачи

1. Пользуясь ответом задачи 5 гл. II, написать характеристическую функцию для  $n$ -мерного распределения нормального случайного процесса  $\xi(t)$  со средним значением  $\bar{\xi}(t) = 0$ .

Решение. Элементы корреляционной матрицы  $n$  случайных величин  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$  равны

$$b_{ik} = \overline{\xi(t_i)\xi(t_k)} = \psi(t_i, t_k),$$

так что

$$\Phi_n(u_1, t_1; u_2, t_2; \dots; u_n, t_n) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n \psi(t_i, t_k) u_i u_k \right\}.$$

Если процесс  $\xi(t)$  в широком смысле стационарен, то

$$\Phi_n(u_1, t_1; u_2, t_2; \dots; u_n, t_n) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n \psi(t_i - t_k) u_i u_k \right\},$$

а это означает, что и  $n$ -мерная плотность вероятности зависит при любом  $n$  только от разностей  $n$  моментов времени. Таким образом, для нормального процесса стационарность в широком смысле влечет за собой стационарность и в узком смысле.

2. Располагая двумерным распределением  $w_2$  случайного процесса  $\xi(t)$ , получить совместную функцию распределения  $\tilde{w}$  для  $\xi(t)$  и  $\xi(t + \tau)$ . Найти  $\tilde{w}$  для стационарного нормального процесса.

Решение. Имеем  $w_2(x, t; x_\tau, t + \tau)$ , где  $x_\tau$  — возможные значения  $\xi(t + \tau)$ . Введем вместо  $x_\tau$  новую переменную  $y = (x_\tau - x)/\tau$ , так что при  $\tau \rightarrow 0$  имеем  $y \rightarrow \dot{x}$ , например, в среднем квадратичном. С точностью до первого порядка по  $\tau$  можно написать  $x_\tau = x + y\tau$ , и, следовательно,

$$w_2(x, t; x_\tau, t + \tau) dx dx_\tau \approx w_2(x, t; x + y\tau, t + \tau) \tau dx dy.$$

В пределе при  $\tau \rightarrow 0$  получаем

$$\tilde{w}(x, y, t) dx dy = dx dy \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau w_2(x, t; x + y\tau, t). \quad (1)$$

Для стационарного нормального процесса (для простоты с  $\overline{x_1^2} = \overline{x_2^2} = \sigma^2$ ) имеем

$$\Phi_2(u_1, u_2, \tau) = \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} (u_1^2 + u_2^2 + 2K(\tau) u_1 u_2) \right\},$$

где  $K(\tau)$  — коэффициент корреляции. Так как  $K(\tau)$  имеет при  $\tau = 0$  максимум (равный единице), степенное разложение  $K(\tau)$  есть

$$K(\tau) = 1 - \frac{1}{2} |K''|_0 \cdot \tau^2 + \dots$$

Следовательно,

$$\tilde{w}(x, y) =$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} \left[ u_1^2 + u_2^2 + 2 \left( 1 - \frac{1}{2} |K''|_0 \tau^2 \right) u_1 u_2 \right] - \right. \\ \left. - i [u_1 x + u_2 (x + y\tau)] \right\} du_1 du_2.$$

Если ввести переменные интегрирования  $\alpha = u_1 + u_2$  и  $\beta = \frac{\tau}{2}(u_2 - u_1)$ , то получим

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, y) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{\sigma^2 \alpha^2}{2} \left( 1 - |K''|_0 \frac{\tau^2}{4} \right) + i\alpha \left( x + \frac{y\tau}{2} \right) \right] d\alpha \right\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 \beta^2}{2} |K''|_0 + i\beta y \right\} d\beta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \sqrt{|K''|_0}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2\sigma^2} |K''|_0 \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Таким образом,  $\xi$  и  $\dot{\xi}$  нормальны и независимы (в один и тот же момент времени), причем

$$D[\xi] = \sigma^2, \quad D[\dot{\xi}] = \sigma^2 |K''(0)|. \quad (3)$$

3. Показать, что у стационарного в узком смысле случайного процесса  $\xi(t)$  смежные по порядку производные  $\xi^{(n)}(t)$  и  $\xi^{(n+1)}(t)$  некоррелированы.

Решение. Для вычисления  $n$ -й производной надо располагать  $(n+1)$ -мерным распределением самого процесса  $\xi(t)$ . Следовательно, стационарность и стационарная связанность *всех* производных требуют стационарности  $\xi(t)$  в узком смысле.

Для смежных по порядку производных, взятых в один и тот же момент времени  $t$ , имеем

$$\langle \xi^{(n)}(t) \xi^{(n+1)}(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} [\xi^{(n)}(t)]^2 \right) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle [\xi^{(n)}(t)]^2 \rangle = 0,$$

так как средний квадрат любой производной — постоянная величина. В частности,

$$\overline{\xi \dot{\xi}} = 0, \quad \overline{\dot{\xi} \dot{\xi}} = 0,$$

но  $\overline{\xi \dot{\xi}}$ , вообще говоря, отлично от нуля.

## Г л а в а IV

### МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

#### § 21. Предварительные замечания

Хотя марковские процессы (процессы без вероятностного последствия) представляют собой весьма специальный класс случайных процессов, значение их очень велико, поскольку выделяющие их условия оказываются выполненными в широкой области приложений теории. Это тем более справедливо, что случайные процессы общего вида во многих случаях могут быть приведены к схеме процесса без последствия, если воспользоваться более детальным описанием рассматриваемого процесса, т. е. должным образом увеличить количество переменных, описывающих состояние рассматриваемой системы. Для пояснения этого обратимся вновь к случаю детерминированного процесса, но допустим, что динамическая система описывается дифференциальным уравнением не первого порядка (как это предполагалось в § 15), а второго. Тогда решение при начальных условиях

$$x = x_0, \quad \dot{x} = u_0 \quad \text{при} \quad t = t_0$$

будет

$$x = f(t, x_0, u_0, t_0).$$

Если и теперь понимать под состоянием системы только координату  $x$ , то для плотности условной вероятности значения  $x$  в момент  $t$  надо было бы написать

$$v(t, x | t_0, x_0, u_0) = \delta[x - f(t, x_0, u_0, t_0)]. \quad (21.1)$$

Но задание  $u_0$  равносильно заданию *двух* значений  $x$  в весьма близкие моменты времени [скажем,  $x_0$  при  $t = t_0$  и  $x_0 - h$  при  $t = t_0 - \tau$ , так что  $u_0 = \lim_{\tau \rightarrow 0} (h/\tau)$ ]. Таким образом, условная

вероятность (21.1), по существу, зависит от *двух* предшествующих состояний:

$$v(t, x | t_0, x_0, u_0) \approx v(t, x | t_0, x_0; t_0 - \tau, x_0 - h),$$

и, следовательно, статистическое обобщение (21.1) не является процессом марковского типа.

Не только в статистической, но и в динамической теории обычно предпочитают избегать зависимости состояния системы от ее поведения до фиксированного начального момента. Это достигается *расширением самого понятия состояния* в момент  $t$  путем введения новых характеризующих состояние величин. В приведенном примере применение этого приема сводится к тому, что наряду с координатой  $x$  вводится еще и скорость  $\dot{x} = u$ . Понимая под состоянием совместное задание  $x$  и  $u$  в момент  $t$ , можно записать условную вероятность этого состояния для рассматриваемого динамического процесса в виде

$$\delta[x - f(t, x_0, u_0, t_0)] \delta[u - \dot{f}(t, x_0, u_0, t_0)],$$

что представляет собой частный случай вероятности перехода  $v(t, x, u | t_0, x_0, u_0)$ . Таким образом, в соответствующей статистической схеме мы приходим теперь к *марковскому* процессу, но для совокупности *двух* случайных функций  $x$  и  $u$ , т. е. для двумерной случайной функции.

Аналогичным образом  $k$ -мерный случайный процесс, не являющийся марковским, можно путем введения достаточно обширной совокупности «координат» сделать марковским, но для более высокого числа измерений  $k'$ . Грубо говоря, для этого достаточно понимать под «состоянием» системы совокупность значения рассматриваемого процесса в последний наблюдаемый момент времени  $t$  и некоторого количества значений из «предыстории» этого процесса при  $t' < t$ . Если, однако, требовать конечности  $k'$ , то этот прием будет осуществим не всегда. Именно так обстоит дело в приведенном ранее примере движения частицы в жидкости, оказывающей вязкое последствие (§ 25). Последнее описывается интегро-дифференциальным уравнением, т. е. не может быть исчерпано никакой конечной совокупностью производных от  $x$  в момент  $t$  или конечной совокупностью значений  $x$  в моменты  $t' \leq t$ .

В зависимости от дискретности или непрерывности возможных значений параметра  $t$  и возможных значений  $x$  самой случайной функции  $\xi(t)$  можно и для случайных функций марковского типа различать те же четыре разновидности, о которых говорилось в § 14.

Если время  $t$  дискретно, то вместо значений  $t_n$  можно рассматривать в качестве аргумента номера  $n$  этих значений и го-

ворить об «испытаниях», занумерованных целыми числами  $n$ . Случайная функция  $\xi(t)$  сводится тогда к последовательности случайных величин  $\xi(t_n) \equiv \xi_n$  ( $\xi$  при  $n$ -м испытании). Хотя схемы с дискретно меняющимся параметром  $t$  в некоторых отношениях более просты и наглядны, мы сосредоточим внимание на собственно процессах, т. е. на случае непрерывного изменения  $t$ , который впервые был рассмотрен в работах Эйнштейна и Смолуховского по теории брауновского движения. В отношении марковских последовательностей мы ограничимся отдельными замечаниями.

Наиболее близкими к классической теории вероятностей являются *дискретные последовательности*, т. е. процессы с *прерывным временем* и с дискретными возможными значениями случайных величин  $\xi_n = \xi(t_n)$ . Обозначим эти возможные значения через  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Марковость процесса означает, что существует вероятность перехода от любого из значений  $x_i$  при  $l$ -м испытании к любому значению  $x_k$  при  $n$ -м испытании ( $n > l$ ):

$$p(n, x_k | l, x_i) = P \{ \xi_n = x_k | \xi_l = x_i \}. \quad (21.2)$$

Если, в частности, число возможных значений (состояний)  $x_i$  конечно ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), то процесс называется *простой цепью Маркова*.

Однородность рассматриваемого процесса марковского типа состоит в том, что вероятность перехода зависит от  $n$  и  $l$  только через их разность, т. е. зависит только от числа «шагов»  $s = n - l$ , пройденных от начального испытания к конечному.

Очевидно, последовательности марковского типа можно рассматривать как непосредственное обобщение последовательностей независимых испытаний, о которых говорилось в гл. I. В терминах вероятностей перехода можно сказать, что у последовательности независимых испытаний  $p(n, x_k | l, x_i) = P \{ \xi_n = x_k \}$ , т. е. вероятность перехода в состояние  $x_k$  просто совпадает с вероятностью этого состояния при  $n$ -м испытании, независимо от результатов других испытаний.

Если случайные величины  $\xi_n$  имеют непрерывное множество возможных значений  $x$ , то марковость такого *непрерывного процесса с дискретным временем* означает существование вероятности перехода, которую можно записать как в интегральной форме:

$$V(n, x | l, y) = P \{ \xi_n \leq x | \xi_l = y \},$$

так и в дифференциальной:

$$v(n, x | l, y) dx = d_x V = P \{ x < \xi_n \leq x + dx | \xi_l = y \}.$$



## § 22. Уравнение Смолуховского

Фундаментальным для теории случайных функций марковского типа является уравнение Смолуховского [1], выражающее тот простой факт, что вероятности перехода для каких-либо *трех* последовательных моментов времени должны быть определенным образом согласованы между собой. Если взять для конкретности марковский процесс ( $t$  непрерывно) и непрерывные же возможные значения случайной функции  $\xi(t)$ , то речь идет о следующем.

Переход из состояния  $x_0$  в момент времени  $t_0$  в состояние  $x$  в момент  $t$  [вероятности этого перехода есть  $v(t, x | t_0, x_0) dx$ ] реализуется через какое-либо состояние  $y$  в промежуточный момент времени  $\theta$  ( $t_0 < \theta < t$ ), т. е. может быть представлен в виде двух последовательных переходов  $x_0 \rightarrow y$  и  $y \rightarrow x$ . Вероятность совместного осуществления этих двух переходов есть

$$v(\theta, y | t_0, x_0) dy v(t, x | \theta, y) dx,$$

причем с теми же самыми условными плотностями вероятности  $v$  (марковский процесс). Но переход  $x_0 \rightarrow y \rightarrow x$  есть один из взаимно исключающих частных случаев перехода  $x_0 \rightarrow x$

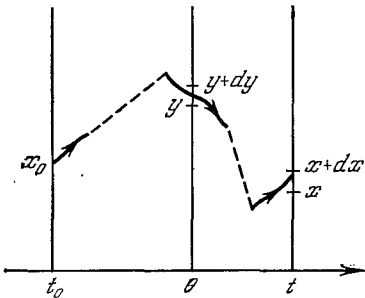


Рис. 10.

(рис. 10), так что суммирование по всем возможным состояниям  $y$  в момент  $\theta$  должно давать полную вероятность перехода  $x_0 \rightarrow x$ :

$$\begin{aligned} v(t, x | t_0, x_0) dx &= \\ &= dx \int v(t, x | \theta, y) v(\theta, y | t_0, x_0) dy. \end{aligned} \quad (22.1)$$

Это и есть уравнение Смолуховского.

Следует вновь обратить внимание на существенное ограничение, которое налагается уравнением (22.1) на допустимый вид функций  $v$ : интегрирование по  $y$  произведения двух  $v$  должно снова давать функцию  $v$  и должно автоматически исключать зависимость результата от промежуточного момента времени  $\theta$ , от которого зависит подынтегральная функция. По существу, это лишь иное выражение тех ограничений вида  $n$ -мерных функций распределения, которыми выделены марковские процессы. Действительно, нетрудно получить уравнение Смолуховского и другим путем, опираясь только на условие согласованности распределений различной мерности (§ 14) и на определение марковости (15.3) (см. задачу 1).

Проинтегрировав (22.1) по  $x$  от нижней границы интервала возможных значений до  $x$  и перейдя от риманова интеграла по  $y$  к интегралу Стильеса, мы получаем уравнение Смолуховского для *интегральных* вероятностей перехода:

$$V(t, x | t_0, x_0) = \int V(t, x | \theta, y) d_y V(\theta, y | t_0, x_0) \quad (t_0 < \theta < t). \quad (22.2)$$

В таком виде оно охватывает случаи как непрерывных, так и дискретных возможных значений  $\xi(t)$ . Это различие, в общем, является второстепенным, так как, даже не прибегая к интегралу Стильеса, а оперируя плотностями вероятности, мы всегда можем при дискретных возможных значениях записывать эти плотности через соответствующие дельта-функции. Приведем все же запись уравнения Смолуховского для процесса с дискретными возможными значениями случайной функции  $\xi(t)$ , т. е. для вероятностей перехода  $p(t, x_k | t_0, x_i)$ :

$$p(t, x_k | t_0, x_i) = \sum_j p(t, x_k | \theta, x_j) p(\theta, x_j | t_0, x_i) \quad (t_0 < \theta < t). \quad (22.3)$$

Если речь идет о случайных марковских *последовательностях*, т. е. значения параметра  $t$  дискретны, то в уравнениях (22.1) — (22.3) можно заменить аргументы  $t_n$  на «номера испытаний»  $n$ . Например, вместо (22.3) получим

$$p(n, x_k | l, x_i) = \sum_j p(n, x_k | m, x_j) p(m, x_j | l, x_i) \quad (l < m < n). \quad (22.4)$$

Для случая, когда число возможных дискретных значений *конечно* (цепи Маркова), т. е.  $i, j, k = 1, 2, \dots, N$ , уравнение (22.4) было установлено Марковым и носит название *уравнения Маркова*.

Если случайная функция марковского типа *однородна по  $t$* , то (22.1) примет вид

$$v(x | t - t_0, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x | t - \theta, y) v(y | \theta - t_0, x_0) dy \quad (t_0 < \theta < t), \quad (22.5)$$

а вместо (22.4) будет

$$p(x_k | n - l, x_i) = \sum_j p(x_k | n - m, x_j) p(x_j | m - l, x_i) \quad (l < m < n). \quad (22.6)$$

Как сказано, мы не будем углубляться в теорию марковских последовательностей и цепей (см. [2]), но все же рассмотрим в качестве примера применение (22.6) к однородной цепи Маркова. Введем следующее более лаконичное обозначение для вероятности перехода за  $s$  шагов:

$$p(x_k | s, x_i) = p_{ik}(s).$$

Уравнение Маркова (22.6) запишется тогда в виде

$$p_{ik}(s) = \sum_{j=1}^N p_{ij}(m) p_{jk}(s-m) \quad (0 < m < s). \quad (22.7)$$

Величины  $p_{ik}(s)$  образуют матрицу  $\pi_s$  вероятностей перехода (коротко — матрицу перехода) за  $s$  шагов. Уравнение (22.7) показывает, что матрица  $\pi_s$  равна произведению матриц  $\pi_m$  и  $\pi_{s-m}$ :

$$\pi_s = \pi_m \pi_{s-m} \quad (0 < m < s).$$

Но при  $s=2$  возможно только  $m=1$ , так что  $\pi_2 = \pi_1^2$ . При  $s=3$  имеем  $\pi_3 = \pi_1 \pi_2 = \pi_2 \pi_1 = \pi_1^3$ , и, вообще,

$$\pi_s = \pi_1^s. \quad (22.8)$$

По этой формуле вероятности перехода за  $s$  шагов выражаются через вероятности перехода  $p_{ik}(1) \equiv p_{ik}$  за один шаг. Заметим, что в матрице перехода

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

все элементы, разумеется, неотрицательны, причем ни один столбец не состоит сплошь из нулей (в числе  $x_k$  содержатся только *возможные* конечные состояния), равно как и ни одна строка не состоит из нулей, поскольку при всяком начальном состоянии  $x_i$



Рис. 11.

$$\sum_{k=1}^N p_{ik} = 1.$$

Пусть, например, рассматриваются случайные блуждания частицы между двумя отражающими стенками (рис. 11). Всюду, кроме положений  $i=1$  и  $i=N$ , шаг вправо имеет вероятность  $p$ , шаг влево — вероятность  $q = 1 - p$ . На стенках частица обязательно отступает на один шаг внутрь. Это типичная однородная цепь Маркова со следующими вероятностями

перехода за один шаг ( $1 < i < N$ ):

$$p_{ik} = \begin{cases} p & (k = i + 1), \\ q & (k = i - 1), \\ 0 & (\text{остальные } k), \end{cases}$$

$$p_{1k} = \begin{cases} 1 & (k = 2), \\ 0 & (\text{остальные } k), \end{cases} \quad p_{Nk} = \begin{cases} 1 & (k = N - 1), \\ 0 & (\text{остальные } k). \end{cases}$$

Таким образом, матрица  $\pi_1$  имеет вид

$$\pi_1 = (p_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что и для *неоднородной* марковской последовательности вероятности перехода за  $s$  шагов тоже могут быть выражены через вероятности перехода за один шаг. Последние зависят теперь от номера испытания, так что мы обозначим их следующим образом:

$$p(n+1, y | n, x) = p_n(y | x).$$

Согласно (22.4)

$$p(n+2, y | n, x) = \sum_z p_{n+1}(y | z) p_n(z | x),$$

$$\dots$$

$$p(n+s, y | n, x) = \sum_{z, u, \dots, v} p_{n+s-1}(y | z) p_{n+s-2}(z | u) \dots p_n(v | x).$$

Для непрерывной функции  $\xi(t)$  тот же результат можно записать через плотности вероятности:

$$v(n+s, y | n, x) =$$

$$= \int \dots \int v_{n+s-1}(y | z) v_{n+s-2}(z | u) \dots v_n(w | x) dz du \dots dw.$$

Нетрудно сообразить, что обе формулы представляют собой просто повторные композиции соответствующих условных функций распределения, так что их можно записать в виде

$$p(n+s, y | n, x) = p_{n+s-1}(y | z) * p_{n+s-2}(z | u) * \dots * p_n(w | x).$$

В частном случае однородной цепи Маркова, когда вероятности при однократном переходе не зависят от его номера, это дает для матрицы перехода за  $s$  шагов формулу (22.8).

### § 23. Марковский процесс с дискретными состояниями

Перепишем уравнение Смолуховского (22.3) для трех последовательных моментов времени  $t_0 < t < t + \tau$ :

$$p(t + \tau, x_k | t_0, x_i) = \sum_j p(t + \tau, x_k | t, x_j) p(t, x_j | t_0, x_i). \quad (23.1)$$

Допустим, что для достаточно малых  $\tau$  вероятность перехода имеет вид

$$p(t + \tau, x_k | t, x_j) = \delta_{jk} + A_{jk}\tau + o(\tau), \quad (23.2)$$

где  $o(\tau)$  — члены выше первого порядка относительно  $\tau$ . Мы учитываем в (23.2), что при  $\tau \rightarrow 0$  конечное состояние с достоверностью совпадает с начальным, т. е.

$$p(t, x_k | t, x_j) = \delta_{jk}, \quad (23.3)$$

а кроме того, предполагаем существование производной

$$A_{jk}(t) = \left. \frac{\partial p(u, x_k | t, x_j)}{\partial u} \right|_{u=t}. \quad (23.4)$$

Очевидно, при  $j \neq k$  (т. е.  $\delta_{jk} = 0$ )  $A_{jk}(t) dt$  есть вероятность перехода за время  $dt$  из состояния  $x_j$  в другое состояние  $x_k$ . Тем самым, при  $j \neq k$  должно быть

$$A_{jk}(t) \geq 0 \quad (j \neq k). \quad (23.5)$$

Так как вероятность перехода в *какое-нибудь* из возможных состояний должна равняться единице:

$$\sum_k p(t + \tau, x_k | t, x_j) = 1, \quad (23.6)$$

имеем

$$\sum_k A_{jk}(t) = 0, \quad A_{jj}(t) = - \sum_{k \neq j} A_{jk}(t) \leq 0. \quad (23.7)$$

Подставим (23.2) в правую часть (23.1) и перейдем к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ . Это приводит к следующему основному уравнению (точнее — системе уравнений) для марковского процесса с дискретными состояниями<sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial p(t, x_k | t_0, x_i)}{\partial t} = \sum_j A_{jk}(t) p(t, x_j | t_0, x_i). \quad (23.8)$$

При начальных условиях (23.3) эти уравнения определяют зависимость вероятностей перехода от времени. Если число возможных состояний конечно, то нетрудно показать, что для

<sup>1)</sup> Строгий вывод см. у А. Н. Колмогорова [3]. Заметим, что в силу (23.3) и (23.4) первоначальное предположение  $t > t_0$  можно отбросить, т. е. в (23.8) допустимо и  $t = t_0$ .

любых непрерывных  $A_{ik}(t)$ , удовлетворяющих условиям (23.5) и (23.7), уравнение (23.8) с начальным условием (23.3) имеет единственное решение, неотрицательное и удовлетворяющее (23.1) и (23.6), т. е. определяет марковский процесс. При бесконечном множестве возможных состояний вопрос о единственности и допустимости решения требует специального исследования, которое и проводилось в ряде математических работ. С точки зрения практических приложений этот вопрос не является обычно особо острым.

Наряду с (23.8) справедливы также следующие дифференциальные уравнения по начальному моменту  $t_0$  [3]:

$$\frac{\partial p(t, x_k | t_0, x_i)}{\partial t_0} = - \sum_j A_{ij}(t_0) p(t, x_k | t_0, x_j), \quad (23.9)$$

которые легко получить, выбрав промежуточный момент времени близким не к конечному, а к начальному моменту  $t_0$ .

Уравнениям (23.8) удовлетворяют не только вероятности перехода, но и одномерная вероятность состояния  $p_1(t, x_k)$ . Действительно, если задана начальная функция распределения  $P(t_0, x_i)$ , то

$$p_1(t, x_k) = \sum_i P(t_0, x_i) p(t, x_k | t_0, x_i). \quad (23.10)$$

Умножив (23.8) на  $P(t_0, x_i)$  и взяв сумму по  $i$ , получим в силу (23.10)

$$\frac{\partial p_1(t, x_k)}{\partial t} = \sum_j A_{jk}(t) p_1(t, x_j). \quad (23.11)$$

Эти уравнения надо интегрировать при начальных условиях

$$p_1(t_0, x_k) = P(t_0, x_k). \quad (23.12)$$

Если рассматриваемый марковский процесс однороден, т. е. вероятность перехода имеет вид  $p(x_k | t, x_i)$  ( $t$  вместо  $t - t_0$ ), то, согласно (23.4),  $A_{jk}$  — постоянные величины и уравнения (23.8) принимают вид

$$\frac{\partial p(x_k | t, x_i)}{\partial t} = \sum_j A_{jk} p(x_j | t, x_i). \quad (23.13)$$

В предположении, что при  $t \rightarrow \infty$  вероятности перехода «забывают» об исходном состоянии и превращаются в стационарные вероятности состояния (наличие эргодичности)<sup>1)</sup>:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(x_k | t, x_i) = P(x_k),$$

<sup>1)</sup> Это будет, в частности, в том случае, если все  $A_{jk} \neq 0$ , т. е. все переходы при малых  $t$  возможны.

мы получаем для нахождения  $P(x_k)$ , согласно (23.6) и (23.13), уравнения<sup>1)</sup>

$$\sum_k P(x_k) = 1, \quad \sum_j A_{jk} P(x_j) = 0. \quad (23.14)$$

Рассмотрим два примера, относящиеся к *однородным* процессам.

1. *Двусторонняя реакция*. Система может при этом находиться в одном из двух состояний 1 и 2. В частности, речь может идти о распаде частицы (ионизация, диссоциация, химическое разложение, радиоактивный распад), когда состояние 1 — это нераспавшаяся частица, а состояние 2 — распавшаяся.

В общем случае возможен как процесс распада (переход  $1 \rightarrow 2$  с вероятностью  $\alpha dt$  за время  $dt$ ), так и процесс восстановления (переход  $2 \rightarrow 1$  с вероятностью  $\beta dt$  за время  $dt$ ). Таким образом,  $A_{12} = \alpha$ ,  $A_{21} = \beta$  и, согласно (23.7),  $A_{11} = -\alpha$ ,  $A_{22} = -\beta$ , так что уравнения (23.11) для вероятностей состояния

$$p_1(t, 1) \equiv P_1(t) \quad \text{и} \quad p_1(t, 2) \equiv P_2(t)$$

принимают вид

$$dP_1/dt = -\alpha P_1 + \beta P_2, \quad dP_2/dt = \alpha P_1 - \beta P_2.$$

Второго уравнения можно было бы и не писать, а исключить  $P_2$  из первого, пользуясь тем, что  $P_1 + P_2 = 1$ . Тогда

$$dP_1/dt = -\lambda P_1 + \beta \quad (\lambda = \alpha + \beta).$$

Пусть при  $t = 0$  задано  $P_1 = 1$  (соответственно  $P_2 = 0$ ), т. е. система с достоверностью находится первоначально в состоянии 1. Решение будет

$$P_1(t) = e^{-\lambda t} + \frac{\beta}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}), \quad P_2(t) = \frac{\alpha}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}).$$

При  $t \rightarrow \infty$  достигаются стационарные значения обеих вероятностей, не зависящие от начальных условий:

$$P_1 = \beta/\lambda, \quad P_2 = \alpha/\lambda,$$

т. е. процесс эргодичен. Если восстановление невозможно ( $\beta = 0$ ), как это имеет место, например, в радиоактивном распаде, то

$$P_1(t) = e^{-\lambda t}, \quad P_2(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

2. *Двухпозиционное реле*. Пусть оно находится под воздействием случайной последовательности управляющих импульсов,

<sup>1)</sup> Предполагается, что  $\partial p/\partial t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , что, вообще, не следует из существования постоянных пределов у самих  $p$ .

с одинаковой вероятностью имеющих знаки плюс или минус. Пусть положительный импульс создает или сохраняет состояние 1, отрицательный — создает или сохраняет состояние 2. Тогда  $A_{12} = A_{21} = \alpha$  (т. е.  $\alpha dt$  — вероятность *изменения* состояния за время  $dt$ ) и, согласно (23.7),  $A_{11} = A_{22} = -\alpha$ . Очевидно, мы имеем здесь частный случай предыдущей схемы, соответствующий  $\beta = \alpha$ . Но теперь мы напишем уравнения (23.13) для четырех *вероятностей перехода* ( $x = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} dp(1|t, x)/dt &= -\alpha p(1|t, x) + \alpha p(2|t, x), \\ dp(2|t, x)/dt &= \alpha p(1|t, x) - \alpha p(2|t, x), \end{aligned}$$

которые надо решать при начальных условиях (23.3). Решения имеют вид

$$\begin{aligned} p(2|t, 1) &= p(1|t, 2) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\alpha t}), \\ p(1|t, 1) &= p(2|t, 2) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\alpha t}). \end{aligned}$$

Мы снова видим, что процесс эргодичен: при  $t \rightarrow \infty$  вероятности перехода стремятся к стационарным значениям (как это и должно быть, поскольку все  $A_{jk} \neq 0$ ), а именно:

$$P(1) = P(2) = \frac{1}{2}.$$

В обоих примерах мы имеем монотонное приближение вероятностей к их предельным значениям. Возможен, однако, и осцилляторный ход, т. е. затухающие колебания. Если искать частное решение уравнений (23.13), пропорциональное  $e^{\lambda t}$ , то для определения  $\lambda$  в случае  $N$  возможных значений получится характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{21} & \dots & A_{N1} \\ A_{12} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1N} & A_{2N} & \dots & A_{NN} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. уравнение  $N$ -й степени относительно  $\lambda$ . Эргодичность будет иметь место в том случае, если полином по степеням  $\lambda$ , остающийся в левой части после сокращения на некоторую степень  $\lambda$ , будет полиномом Гурвица, т. е. все отличные от нуля корни  $\lambda$  будут иметь отрицательные вещественные части. Очевидно, затухающие колебания будут происходить в том случае, когда среди корней имеются комплексно-сопряженные пары.

В примере двухпозиционного реле имелось два корня, а именно  $\lambda = 0$  и  $\lambda = -2\alpha$ . В цитированной работе А. Н. Колмогорова [3] приведен следующий пример для  $N = 3$ :

$$A_{12} = A_{23} = A_{31} = \alpha, \quad A_{21} = A_{32} = A_{13} = 0, \quad A_{11} = A_{22} = A_{33} = -\alpha.$$



Корни характеристического уравнения здесь равны

$$\lambda = 0, \quad \lambda = -\frac{3\alpha}{2} + i\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}, \quad \lambda = -\frac{3\alpha}{2} - i\frac{\sqrt{3}\alpha}{2},$$

так что вероятности перехода стремятся к стационарным значениям [ $P(1) = P(2) = P(3) = 1/3$ ], совершая затухающие колебания<sup>1)</sup>.

### § 24. Переход от дискретной последовательности к процессу с непрерывным множеством состояний. Распределение Релея

Прежде чем вывести основное дифференциальное уравнение для марковских процессов с непрерывным множеством возможных состояний, укажем на применяемый иногда упрощенный прием: время  $t$  и множество состояний  $x$  подразделяются на весьма малые промежутки  $\Delta t$  и  $\Delta x$ , составляется уравнение для марковской последовательности, а затем делается переход к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Рассмотрим конкретный пример блуждания частицы, которая в моменты времени  $N \Delta t$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) скачет на шаг  $\Delta x = a$  вправо или влево с вероятностями  $p$  и  $q = 1 - p$ . Это уже знакомая задача об «абсолютно пьяном человеке» или о сложении колебаний со случайными амплитудами  $\pm a$  (§§ 4 и 6). Мы имеем здесь однородную марковскую последовательность, но не стационарную (распределение зависит от номера испытания).

Напомним, что вероятность того, что за  $N$  шагов будет сделано  $n$  шагов вправо [частица уйдет вправо на  $x = (2n - N)a$ , или же интенсивность суммы  $N$  колебаний будет  $J = (2n - N)^2 a^2$ ], дается биномиальным законом  $P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}$ . Но сейчас мы подойдем к этой задаче с несколько иной стороны.

Обозначим абсциссу частицы в момент  $t = N \Delta t$  через  $x = ta$  и, считая, что в момент  $t = 0$  частица вышла из точки  $x = 0$ , введем *вероятность перехода* за  $N$  шагов:

$$p(N \Delta t, ta | 0, 0) \equiv p_{N,m}.$$

Нетрудно связать  $p_{N,m}$  с биномиальной вероятностью  $P_N(n)$ , но, как сказано, теперь мы будем искать  $p_{N,m}$ , не обращаясь к  $P_N(n)$  (см. задачу 6).

Частица может попасть при  $N$ -м шаге в точку  $x = ta$ , если при  $(N - 1)$ -м шаге она оказалась в  $(m - 1)a$  или в  $(m + 1)a$ , причем из первого положения — с вероятностью  $p$ , а из вто-

<sup>1)</sup> Другие примеры и обобщение на многомерный случай см. в [4], § 3.2 и [5].

рого — с вероятностью  $q$ . Следовательно, по формуле полной вероятности имеем

$$p_{N, m} = p p_{N-1, m-1} + q p_{N-1, m+1}$$

— уравнение Маркова для данной задачи. Если изменить обозначение вероятности перехода, введя  $v(t, x) a = p_{N, m}$ , то уравнение переписется в виде

$$v(t, x) = p v(t - \Delta t, x - a) + q v(t - \Delta t, x + a).$$

Разложим теперь  $v$  в правой части по степеням  $\Delta t$  и  $a = \Delta x$ . Учитывая, что  $p + q = 1$ , получаем

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{\partial v}{\partial t} \Delta t - (p - q) \frac{\partial v}{\partial x} a + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} + \\ & + (p - q) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} a \Delta t + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (24.1)$$

Разделим уравнение на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $p - q \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow 0$ , причем предположим, что существуют следующие конечные пределы:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(p - q) a}{\Delta t} = A, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a^2}{\Delta t} = B. \quad (24.2)$$

Таким образом, допускается, что  $a \sim (\Delta t)^{1/2}$  и  $(p - q) \sim (\Delta t)^{1/2}$ , в силу чего все члены в (24.1), кроме записанных в первой строке, стремятся при  $\Delta t \rightarrow 0$  к нулю. В результате указанный предельный переход приводит к следующему дифференциальному уравнению для плотности вероятности перехода  $v(t, x)$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -A \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (24.3)$$

Какому начальному условию должно удовлетворять решение при  $t = 0$ ? В общем случае для вероятности перехода  $v(t, x | t_0, x_0)$ , поскольку при  $t = t_0$  с достоверностью должно быть  $x = x_0$ , имеем

$$v(t_0, x | t_0, x_0) = \delta(x - x_0). \quad (24.4)$$

В нашем случае  $v(t, x) \equiv v(t, x | 0, 0)$ , так что надо требовать

$$v(0, x) = \delta(x)$$

и, конечно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t, x) dx = 1.$$

Этими условиями определено решение <sup>1)</sup>

$$v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Bt}} \exp \left\{ -\frac{(x - At)^2}{2Bt} \right\}, \quad (24.5)$$

т. е. нормальное распределение с  $\bar{x} = At$  и дисперсией  $\frac{(x - At)^2}{2Bt} = Bt$ . Для произвольных начальных  $x_0$  и  $t_0$  мы получили бы

$$v(t, x | t_0, x_0) = \frac{\exp \left\{ -\frac{[x - x_0 - A(t - t_0)]^2}{2B(t - t_0)} \right\}}{\sqrt{2\pi B(t - t_0)}}. \quad (24.6)$$

Мы имеем, таким образом, однородный, но нестационарный марковский процесс.

Если бы задача ставилась о блужданиях частицы между двумя *отражающими* стенками, удаленными на расстояние  $l$  друг от друга (при этом, естественно, не должно быть систематического потока, т. е.  $A = 0$ ), то существовала бы предельная стационарная вероятность, а именно равномерное распределение с плотностью  $1/l$ . Мы имели бы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, x | t_0, x_0) = \omega_1(x) = 1/l.$$

В этом случае налицо и эргодичность процесса, так как  $\omega_1(x)$  не зависит от начального состояния  $x_0$ . Напротив, при движении частицы между *поглощающими* стенками (прилипание частицы на стенках) предельное распределение существует и стационарно, но эргодичности нет, так как  $\omega_1(x)$  сохраняет зависимость от  $x_0$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, x | t_0, x_0) = \omega_1(x) = \left(1 - \frac{x_0}{l}\right) \delta(x) + \frac{x_0}{l} \delta(x - l).$$

Нетрудно убедиться в том, что вероятность перехода (24.6) удовлетворяет уравнению Смолуховского (22.5).

Поведение  $v(t, x | t_0, x_0)$  с ростом  $t$  вполне очевидно: распределение постепенно расплывается в соответствии с ростом дисперсии  $B(t - t_0)$ , причем максимум (среднее значение) равномерно перемещается из точки  $x_0$  при  $t = t_0$  с постоянной скоростью  $A$ . Иллюстрацией может служить движение брауновской частицы при наличии силы тяжести. Систематическая скорость равна при этом  $A = -mg/h = \text{const}$ , где  $h$  — коэффициент стокова трения. Таким образом, (24.6) описывает *диффузию в равномерном потоке*, что, впрочем, ясно уже из исходного дифференциального уравнения (24.3). При  $A = 0$  мы возвра-

<sup>1)</sup> Очевидно, что решение — просто теорема Муавра — Лапласа, формулированная применительно к непрерывным «испытаниям» [см. §§ 6, 7, в частности, формулу (7.3)].

щаемся к задаче об *изотропных* блужданиях или же о распределении суммарной *амплитуды*  $x$ , получающейся в результате сложения бесконечно большого числа  $N$  колебаний с *равновероятными* бесконечно малыми амплитудами  $\pm a$ . В последнем случае нас интересует обычно не  $x$ , а интенсивность  $J = x^2$ . Нетрудно подсчитать при помощи формулы (24.5) с  $A = 0$ , что

$$\bar{J} = \overline{x^2} = Bt, \quad \overline{(\Delta J)^2} = \bar{J}^2 - \bar{J}^2 = 2B^2t^2,$$

так что (ср. § 4)

$$\frac{\sqrt{\overline{(\Delta J)^2}}}{\bar{J}} = \sqrt{2}.$$

Относительного сглаживания флуктуаций интенсивности нет: как бы много колебаний мы ни сложили, средний разброс интенсивности будет того же порядка, что и сама средняя интенсивность.

Вопрос об интенсивности, получаемой в результате сложения большого числа колебаний со случайными амплитудами, впервые рассмотрел описанным способом Релей (см. [6], § 42а). Он исследовал также более общий случай равномерного распределения фаз складываемых колебаний в интервале  $(0, 2\pi)$ , т. е. случай *двумерной* векторной диаграммы, или задачу о блужданиях частицы не в одном измерении, а на плоскости (рис. 12). Здесь речь идет о вероятности перехода к моменту  $t$  из начала  $O$  в точку  $\Gamma(x, y)$ .

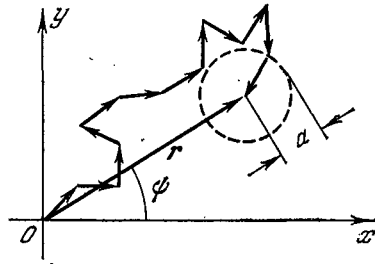


Рис. 12.

Попадание в  $(x, y)$  в момент  $t$  может осуществиться в результате перехода с любой точки окружности радиуса  $a$  (длина шага) с центром в  $(x, y)$ , если частица в момент  $t - \Delta t$  была на этой окружности. При этом все направления элементарного вектора  $\mathbf{a}$  равновероятны (равномерное распределение фазы  $\varphi$ , изотропные блуждания), так что

$$v(t, x, y) = \int_0^{2\pi} v(t - \Delta t, x - a \cos \varphi, y - a \sin \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Разлагая подынтегральное выражение по степеням  $a \cos \varphi$  и  $a \sin \varphi$  и выполняя интегрирование, получаем

$$v(t, x, y) = v(t - \Delta t, x, y) + \frac{a^2}{4} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + o(a^3).$$

Если предположить теперь, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a^2}{\Delta t} = 2B,$$

то в результате предельного перехода  $\Delta t \rightarrow 0$  получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{B}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (24.7)$$

— двумерное уравнение диффузии, нормированное решение которого, переходящее при  $t = 0$  в  $\delta(x)\delta(y)$ , есть

$$v(t, x, y) = \frac{1}{2\pi Bt} e^{-(x^2+y^2)/2Bt}, \quad (24.8)$$

т. е. произведение нормальных распределений для компонент  $x$  и  $y$ , которые, таким образом, независимы. Наивероятнейшее и среднее значения вектора  $\mathbf{r}$  равны нулю.

Если интересоваться абсолютной величиной вектора  $\mathbf{r}$  и его фазой  $\psi$ , т. е. перейти на плоскости  $(x, y)$  к полярным координатам ( $x = r \cos \psi$ ,  $y = r \sin \psi$ ,  $dx dy = r dr d\psi$ ), то вероятность перехода запишется в виде

$$v(t, x, y) dx dy = \bar{v}(t, r, \psi) dr d\psi = \frac{e^{-r^2/2Bt}}{Bt} r dr \frac{d\psi}{2\pi}. \quad (24.9)$$

Из (24.9) следует, что  $r$  и  $\psi$  независимы, причем фаза  $\psi$  равномерно распределена в  $(0, 2\pi)$ , а амплитуда  $r$  подчинена закону распределения

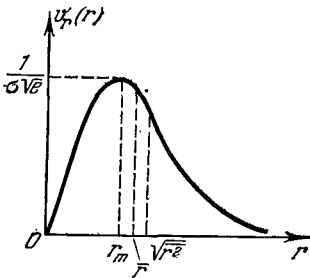


Рис. 13.

$$v_r(t, r) dr = \frac{e^{-r^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} r dr, \quad (24.10)$$

называемому *распределением Релея*. Через  $\sigma^2$  мы обозначили среднее квадратичное значение компонент  $x$  и  $y$ :

$$\bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \sigma^2 = Bt.$$

Из (24.10) следует, что наивероятнейшее значение  $r$  есть  $r_m = \sigma$  (рис. 13) и что

$$\bar{r} = \sqrt{\pi/2} \sigma, \quad \bar{r}^2 = 2\sigma^2 = 2Bt. \quad (24.11)$$

Последнее выражение вытекает также из того, что  $\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$ .

Изложенный релеевский метод явился первым шагом на пути к установлению общего дифференциального уравнения, которому удовлетворяют вероятности перехода и которое вытекает из уравнения Смолуховского при определенных предположениях об этих вероятностях. Это дифференциальное уравнение

принято называть *уравнением Эйнштейна — Фоккера* по имени ученых, которые впервые его вывели и использовали. А. Н. Колмогоров дал в 1931 г. строгое его обоснование. К выводу и обоснованию этого уравнения мы перейдем в § 26<sup>1)</sup>.

### § 25. Некоторые обобщения распределения Релея

В этом параграфе, хотя он и прерывает изложение теории марковских процессов, мы остановимся на некоторых обобщениях релеевского распределения, к которому нас привела простейшая постановка задачи о случайных блужданиях на плоскости. Отвлекаясь от этой задачи, в которой вектор  $\mathbf{r}$  есть сумма многих случайных шагов  $\mathbf{a}_k$ , можно резюмировать полученный результат следующим образом. Если компоненты  $x$  и  $y$  вектора  $\mathbf{r}$  независимы и распределены нормально с  $\bar{x} = \bar{y} = 0$  и  $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \sigma^2$ , то, согласно (24.10), модуль  $r$  и аргумент  $\psi$  этого вектора независимы,  $r$  распределено по Релею, а  $\psi$  — равномерно в интервале  $(0, 2\pi)$ . Отказ от любого из указанных ограничений распределения  $x$  и  $y$  ведет к распределениям  $\mathbf{r}$ , обобщающим релеевское. Рассмотрим сначала случай, когда при сохранении всех остальных предположений допускается, что среднее значение  $\mathbf{r}$  отлично от нуля.

Мы будем говорить о  $\mathbf{r}$  как о комплексной амплитуде колебания на векторной диаграмме ( $r$  — амплитуда,  $\psi$  — фаза колебания).

1. Рассмотрим распределение суммы детерминированного сигнала и нормального шума. Пусть сигнал изображается вектором  $\mathbf{A}$  с постоянными амплитудой  $A$  и фазой  $\psi_0$  (гармонический сигнал), а нормальный шум — вектором  $\mathbf{r}$  с распределением (24.10).

Нас интересует распределение вектора  $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{r}$ , т. е. совместное распределение его амплитуды  $R$  и фазы  $\varphi$  (рис. 14). Так как

$$r \cos \psi = R \cos \varphi - A \cos \psi_0, \quad r \sin \psi = R \sin \varphi - A \sin \psi_0,$$

имеем

$$r^2 = R^2 + A^2 - 2RA \cos(\varphi - \psi_0), \quad r dr d\psi = R dR d\varphi.$$

Поэтому преобразование (24.10) к переменным  $R$  и  $\varphi$  дает

$$\begin{aligned} \omega_R(R, \varphi) dR d\varphi = \\ = \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [R^2 + A^2 - 2RA \cos(\varphi - \psi_0)] \right\} \frac{R dR d\varphi}{2\pi\sigma^2}, \quad (25.1) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> См. [7], §§ 54—56.

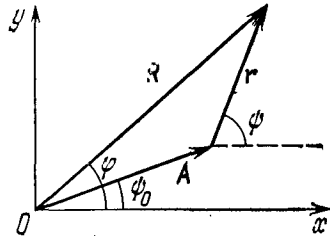


Рис. 14.

что и является искомым распределением. Здесь нет ни независимости  $R$  и  $\varphi$ , ни равномерного распределения  $\varphi$ .

Интегрируя (25.1) по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  и пользуясь известным выражением для нулевой бесселевой функции мнимого аргумента

$$I_0(a) = J_0(ia) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{a \cos \alpha} d\alpha, \quad (25.2)$$

получаем распределение амплитуды  $R$ :

$$\omega_R(R) dR = dR \int_0^{2\pi} \omega_R(R, \varphi) d\varphi = I_0\left(\frac{RA}{\sigma^2}\right) e^{-(R^2+A^2)/2\sigma^2} \frac{R dR}{\sigma^2}, \quad (25.3)$$

которое часто называют распределением Райса [8] или обобщенным релеевским. При  $A = 0$   $\omega_R$  переходит в  $\omega_r$  и, соответственно,  $\omega_R(R)$  — в релеевское распределение. Средний квадрат  $R$  равен  $\overline{R^2} = A^2 + 2\sigma^2$ , а моменты любого (не обязательно целого) порядка  $\nu$  выражаются формулой

$$\overline{R^\nu} = (2\sigma^2)^{\nu/2} \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \cdot {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}, 1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right),$$

где  ${}_1F_1$  — вырожденная гипергеометрическая функция. При больших значениях аргумента бесселевой функции, пользуясь асимптотической формулой  $I_0(z) \approx e^z / \sqrt{2\pi z}$  при  $|z| \gg 1$ , получаем из (25.3)

$$\omega_R(R) dR \approx \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{R}{2\pi A}} e^{-(R-A)^2/2\sigma^2} dR \quad (RA \gg \sigma^2).$$

Интегрируя (25.1) по  $R$  от 0 до  $\infty$ , находим распределение фазы  $\varphi$ :

$$\omega_\varphi(\varphi) d\varphi = e^{-A^2/2\sigma^2} \left[1 + \sqrt{\pi} \eta e^{\eta^2} (1 + \Phi(\eta))\right] \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (25.4)$$

где  $\Phi(\eta)$  — так называемый интеграл ошибок:

$$\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-t^2} dt,$$

и  $\eta = \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \cos(\varphi - \varphi_0)$ . При  $A = 0$  распределение (25.4) становится равномерным.

2. Теперь, сохраняя нормальный закон для  $x$  и  $y$  и предположение, что  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ , рассмотрим случай коррелированных  $x$  и  $y$  с неодинаковыми дисперсиями:

$$\overline{x^2} = \sigma_1^2, \quad \overline{y^2} = \sigma_2^2, \quad \overline{xy} = \sigma_1 \sigma_2 K,$$

т. е. нормальное распределение (7.13). Полагая в нем по-прежнему  $x = r \cos \psi$ ,  $y = r \sin \psi$ , получаем

$$\begin{aligned} \omega_r(r, \psi) dr d\psi = \\ = \exp \left\{ -\frac{r^2}{4(1-K^2)} \left[ \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \cos 2\psi - \frac{2K}{\sigma_1 \sigma_2} \sin 2\psi \right] \right\} \times \\ \times \frac{r dr d\psi}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-K^2}}. \quad (25.5) \end{aligned}$$

Интегрирование по  $\psi$  от 0 до  $2\pi$ , если воспользоваться формулой

$$I_0(\sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(a \cos \alpha + b \sin \alpha)} d\alpha,$$

приводит к распределению

$$\omega_r(r) dr = I_0 \left[ \frac{qr^2}{4(1-K^2)} \right] \exp \left\{ -\frac{r^2}{4(1-K^2)} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \right\} \frac{r dr}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-K^2}}, \quad (25.6)$$

где

$$q = \sqrt{\left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right)^2 - \frac{4(1-K^2)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}}.$$

Если отсутствует корреляция  $x$  и  $y$  ( $K=0$ ), то

$$\omega_r(r) dr = I_0 \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \frac{r^2}{4} \right] \exp \left\{ -\left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \frac{r^2}{4} \right\} \frac{r dr}{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (25.7)$$

Если корреляция есть, но  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ , то

$$\omega_r(r) dr = I_0 \left[ \frac{Kr^2}{2\sigma^2(1-K^2)} \right] \exp \left\{ -\frac{r^2}{2\sigma^2(1-K^2)} \right\} \frac{r dr}{\sigma^2 \sqrt{1-K^2}}. \quad (25.8)$$

Разумеется, обе формулы переходят в релеевское распределение, если в (25.7) положить  $\sigma_1 = \sigma_2$ , а в (25.8) —  $K=0$ .

При коэффициенте корреляции  $K$ , настолько близком к единице, что  $1-K^2 \ll \frac{1}{4} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2$ , и при условии, что аргумент бесселевой функции велик [ $qr^2 \gg 4(1-K^2)$ ], так что можно воспользоваться ее асимптотическим выражением, распределение (25.6) переходит в одностороннее гауссово ( $r \geq 0$ ):

$$\omega_r(r) dr = 2 \exp \left\{ -\frac{r^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right\} \frac{dr}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}.$$

3. Отказ от нормального распределения компонент  $x$  и  $y$ , естественно, уменьшает возможности получения каких-либо конкретных результатов. Рассмотрим случай, когда  $x$  и  $y$



независимы, но распределены по одному и тому же закону, так что их совместное распределение имеет вид  $\omega(x)dx \cdot \omega(y)dy$ . Переходя к полярным координатам, получаем

$$\omega_r(r, \psi) dr d\psi = \omega(r \cos \psi) \omega(r \sin \psi) r dr d\psi,$$

откуда

$$\omega_r(r) dr = r dr \int_0^{2\pi} \omega(r \cos \psi) \omega(r \sin \psi) d\psi. \quad (25.9)$$

Конечно, в случае гауссовой плотности  $\omega$  формула (25.9) возвращает нас к релеевской плотности  $\omega_r(r)$ .

Введем характеристическую функцию компонент  $x$  и  $y$ :

$$\varphi(u) = \langle e^{iux} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \omega(x) dx.$$

Плотность  $\omega_r(r)$  можно записать тогда в виде

$$\begin{aligned} \omega_r(r) &= \frac{r}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \varphi(v) du dv \int_0^{2\pi} e^{-ir(u \cos \psi + v \sin \psi)} d\psi = \\ &= \frac{r}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \varphi(v) J_0(r \sqrt{u^2 + v^2}) du dv. \end{aligned}$$

Если ввести полярные координаты также на плоскости  $(u, v)$ , положив  $u = \lambda \cos \alpha$ ,  $v = \lambda \sin \alpha$  ( $du dv = \lambda d\lambda d\alpha$ ), то последнее выражение преобразуется в следующее:

$$\omega_r(r) = r \int_0^{\infty} F(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (25.10)$$

где

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\lambda \cos \alpha) \varphi(\lambda \sin \alpha) d\alpha. \quad (25.11)$$

Таким образом,  $\omega_r(r)$  представляет собой умноженную на  $r$  трансформанту Бесселя от функции  $F(\lambda)$ .

4. Вернемся теперь к случайным блужданиям на плоскости, когда вектор  $\mathbf{r}$  рассматривается как сумма случайных векторов  $\mathbf{a}_k$  (элементарных скачков или шагов) и статистика  $\mathbf{r}$  не задается непосредственно, а определяется статистикой  $\mathbf{a}_k$ . Возьмем случай *изотропных случайных блужданий со случайной длиной шага*. Пусть все элементарные векторы  $\mathbf{a}_k$  независимы в совокупности и распределены одинаково, причем полярные углы

(фазы)  $\theta_k$  каждого из них независимы от его амплитуды  $a_k$  и распределены равномерно в интервале  $(0, 2\pi)$  (все направления элементарных шагов равновероятны, что и обеспечивает изотропность блужданий). Таким образом, для любого  $a_k$

$$w_a(a_k, \theta_k) da_k d\theta_k = w_a(a_k) da_k \frac{d\theta_k}{2\pi}.$$

Соответствующая характеристическая функция есть

$$\begin{aligned} \varphi_a(u, v) &= \int_0^\infty w_a(a_k) da_k \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ia_k(u \cos \theta_k + v \sin \theta_k)} d\theta_k = \\ &= \int_0^\infty w_a(a) J_0(\lambda a) da \equiv \varphi_a(\lambda), \end{aligned} \quad (25.12)$$

где  $\lambda = \sqrt{u^2 + v^2}$ . В силу статистической независимости всех  $a_k$  двумерная характеристическая функция суммарного вектора

$\mathbf{r} = \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k$  равна

$$\varphi_{\mathbf{r}}(u, v) = \varphi_a^n(\lambda) \equiv \varphi_{\mathbf{r}}(\lambda), \quad (25.13)$$

а совместная плотность вероятности декартовых компонент  $x$  и  $y$  вектора  $\mathbf{r}$  запишется в виде

$$\begin{aligned} w_{\mathbf{r}}(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mathbf{r}}(u, v) e^{-i(ux+vy)} du dv = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a^n(\lambda) e^{-i(ux+vy)} du dv. \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам как на плоскости  $(x, y)$  ( $x = r \cos \psi$ ,  $y = r \sin \psi$ ), так и на плоскости  $(u, v)$  ( $u = \lambda \cos \alpha$ ,  $v = \lambda \sin \alpha$ ), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{\mathbf{r}}(r, \psi) &= r w_{\mathbf{r}}(r \cos \psi, r \sin \psi) = \\ &= \frac{r}{4\pi^2} \int_0^\infty \varphi_a^n(\lambda) \lambda d\lambda \int_0^{2\pi} e^{-i\lambda r \cos(\psi-\alpha)} d\alpha = \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^\infty \varphi_a^n(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \equiv w_r(r) \frac{1}{2\pi}. \end{aligned} \quad (25.14)$$

Эта совместная плотность  $r$  и  $\psi$  не содержит  $\psi$ , т. е. направление результирующего вектора  $\mathbf{r}$  независимо от его амплитуды  $r$

и распределено равномерно в  $(0, 2\pi)$ . В соответствии с центральной предельной теоремой при  $n \rightarrow \infty$  и  $\overline{r^2} = n\overline{a^2} = 2\sigma^2 = \text{const}$  распределение  $w_r(x, y)$  стремится к нормальному закону для независимых  $x$  и  $y$  с  $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \sigma^2$ , а тем самым распределение амплитуды  $\tilde{w}_r(r)$  — к релеевскому [9].

Если вернуться к рассмотренному в § 24 случаю фиксированной длины шага, т. е. к плотности вероятности  $w_a(a_h) = \delta(a_h - a)$ , то по (25.12)  $\Phi_a(\lambda) = J_0(\lambda a)$ . Из (25.14) следует при этом, что

$$w_r(r) = r \int_0^{\infty} J_0^n(\lambda a) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda.$$

Учитывая, что

$$\lambda \int_0^R J_0(\lambda r) r dr = R J_1(\lambda R) = -\frac{dJ_0(\lambda R)}{d\lambda},$$

можно записать вероятность того, что  $r$  не превосходит  $R$ , в виде

$$\begin{aligned} P(r < R) &= \int_0^R w_r(r) dr = R \int_0^{\infty} J_0^n(\lambda a) J_1(\lambda R) d\lambda = \\ &= -\int_0^{\infty} J_0^n(\lambda a) \frac{dJ_0(\lambda R)}{d\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда при  $R = a$  находим

$$P(r < a) = -\left. \frac{[J_0(\lambda a)]^{n+1}}{n+1} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{n+1}.$$

5. Рассмотрим  $m$ -распределение Накагами [10]. Выше мы рассматривали модуль  $r$  вектора  $\mathbf{r}$ , задавая распределение его декартовых компонент  $x$  и  $y$  ( $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$ ), или же полагали, что  $\mathbf{r}$  есть сумма векторов  $\mathbf{a}_h$ , и специальным образом задавали распределение  $\mathbf{a}_h$ . Возьмем теперь существенно более общий случай, когда  $r$  — произвольная неотрицательная детерминированная функция  $2n$ -мерной случайной величины  $\mathbf{a} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ :

$$r = \Phi(\mathbf{a}).$$

Без каких-либо предположений о виде  $2n$ -мерного распределения величины  $\mathbf{a}$  (т. е. совместного распределения декартовых компонент всех  $\mathbf{a}_h$  или распределения всех модулей  $a_h$  и фаз  $\theta_h$ ) имеем (см. задачу 9 гл. II)

$$w_r(r) = \langle \delta[r - \Phi(\mathbf{a})] \rangle, \quad (25.15)$$

где угловые скобки означают усреднение по распределению  $\mathbf{a}$ . При  $\Phi \geq 0$  дельта-функция может быть представлена в виде разложения Ганкеля:

$$\delta(r - \Phi) = r^{\nu+1} \int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(\lambda\Phi)}{\Phi^{\nu}} J_{\nu}(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad \operatorname{Re} \nu \geq -\frac{1}{2}.$$

Подставив это в (25.15), получаем

$$\begin{aligned} \omega_r(r) &= r^{\nu+1} \int_0^{\infty} \left\langle \frac{J_{\nu}(\lambda\Phi)}{\Phi^{\nu}} \right\rangle J_{\nu}(\lambda r) \lambda d\lambda = \\ &= \frac{r^{\nu+1}}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)} \int_0^{\infty} F_{\nu}(\lambda) J_{\nu}(\lambda r) \lambda^{\nu+1} d\lambda, \end{aligned} \quad (25.16)$$

где

$$F_{\nu}(\lambda) = 2^{\nu} \Gamma(\nu+1) \left\langle \frac{J_{\nu}(\lambda\Phi)}{(\lambda\Phi)^{\nu}} \right\rangle. \quad (25.17)$$

Заметим, что формула (25.10) отвечает частному случаю  $\nu=0$ , когда  $F_0(\lambda) = \langle J_0(\lambda\Phi) \rangle$ .

Из известного степенного разложения

$$\frac{J_{\nu}(z)}{z^{\nu}} = \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

и из (25.17) следует, что  $F_{\nu}(\lambda)$  содержит только четные степени  $\lambda$  и только четные моменты  $\Phi$ :

$$F_{\nu}(\lambda) = \Gamma(\nu+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda/2)^{2k} \overline{\Phi^{2k}}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}. \quad (25.18)$$

При использовании формул (25.16) и (25.18) Накагами считает  $\nu$  вещественным, так что условие, наложенное на  $\operatorname{Re} \nu$ , сводится к требованию  $\nu \geq -1/2$ . Но и при этом ограничении формулы (25.16) и (25.18) охватывают, очевидно, чрезвычайно обширный набор самых разнообразных распределений  $r$ , так как возможен выбор не только значений  $\nu$ , но и распределения многомерной случайной величины  $\mathbf{a}$  — аргумента функции  $\Phi(\mathbf{a})$ . Автор поступает, однако, иначе: он просто *конструирует* функцию  $F_{\nu}(\lambda)$ , не задаваясь вопросом о том, какому распределению  $\mathbf{a}$  она при этом соответствует. Во-первых, налагается условие, чтобы  $F_{\nu}(\lambda)$  зависела только от двух параметров, связанных с моментами  $\overline{\Phi^2}$  и  $\overline{\Phi^4}$ , а именно от

$$\Omega = \overline{\Phi^2}, \quad m = \frac{(\overline{\Phi^2})^2}{D[\Phi^2]} = \frac{\Omega^2}{\overline{\Phi^4} - \Omega^2}. \quad (25.19)$$

Во-вторых, известное неравенство Ляпунова

$$\overline{\Phi^{2k+2l}} \geq \overline{\Phi^{2k}} \cdot \overline{\Phi^{2l}}$$

заменяется равенством, с помощью которого высшие четные моменты  $\Phi$  выражаются через  $\overline{\Phi^2}$  и  $\overline{\Phi^4}$  (например,  $\overline{\Phi^6} = \overline{\Phi^2} \cdot \overline{\Phi^4}$ ,  $\overline{\Phi^8} = (\overline{\Phi^4})^2$  и т. д.), т. е. через  $\Omega$  и  $m$ . Тогда (25.18) можно привести к ряду, который в случае  $\nu = 0$  суммируется и дает функцию

$$F_0(\lambda) = e^{-\Omega\lambda^2/4m} P_{m-1}(\Omega\lambda^2/4m), \quad (25.20)$$

где  $P_{m-1}$  — полиномы Лагерра. Если же  $\nu \neq 0$ , то значение  $\nu$  выбирается равным  $m-1$ . Тогда (25.18) приводится к ряду, который приближенно, но с хорошей точностью описывается функцией

$$F_\nu(\lambda) \approx e^{-\Omega\lambda^2/4(\nu+1)}, \quad \nu = m-1. \quad (25.21)$$

Хотя здесь и предполагалось, что  $m \neq 1$ , но, как легко видеть, обе формулы (25.20) и (25.21) при  $m = 1$  ( $\nu = 0$ ) совпадают, поскольку  $P_0 = 1$ .

Подстановка (25.20) (при  $\nu = 0$ ) и (25.21) (при  $\nu = m-1$ ) в (25.16) дает в результате вычисления интегралов одно и то же выражение для  $w_r(r)$ , а именно:

$$w_r(r) \equiv M(r, m, \Omega) = \frac{2m^m r^{2m-1} e^{-mr^2/\Omega}}{\Gamma(m) \Omega^m}, \quad (25.22)$$

что автор и назвал плотностью  $m$ -распределения. Отметим, что в случае  $\nu = m-1$  из условия  $\nu \geq -1/2$  следует, что  $m \geq 1/2$ . Так как по (25.19)  $m = \Omega^2/(r^4 - \Omega^2)$ , где  $\Omega = r^2$ , то это означает, что  $r^4 \leq 3(\overline{r^2})^2$ .

В цитируемой работе [10] рассмотрено много применений и обобщений  $m$ -распределения, но мы ограничимся лишь двумя замечаниями. Из (25.22) видно, что  $m$ -распределение переходит при  $m = 1/2$  в одностороннее гауссово, а при  $m = 1$  — в релеевское распределение. Далее, если перейти в (25.22) к переменной  $x = mr^2/\kappa\Omega$  ( $\kappa > 0$ ) и переобозначить  $m$  через  $\alpha$ , то для  $x$  получается гамма-распределение (10.18)<sup>1)</sup>.

Вернемся теперь к марковским процессам.

## § 26. Непрерывные марковские процессы. Уравнение Эйнштейна — Фоккера

В уравнении Смолуховского (22.1) промежуточный момент времени  $\theta$  может быть выбран между  $t_0$  и  $t$  произвольным образом. Возьмем его весьма близким к  $t$ , положив  $\theta = t - \tau$

<sup>1)</sup> Обобщениям релеевского распределения посвящена работа [11].

(рис. 15), и сделаем предположения о существовании следующих пределов.

Во-первых, мы предполагаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{x-y}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-y) v(t, x|t-\tau, y) dx = A(y, t). \quad (26.1)$$

Смысл этого выражения очевиден:  $\overline{x-y}$  — это условное среднее значение перемещения за время  $\tau$  из фиксированной точки  $y$ , так что  $A(y, t)$  — это средняя скорость изменения состояния в момент  $t$  в точке  $y$  (так называемый коэффициент сноса).

Во-вторых, мы допускаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(x-y)^2}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-y)^2 \times \\ \times v(t, x|t-\tau, y) dx = B(y, t). \quad (26.2)$$

Величина  $\overline{(x-y)^2}$  есть мера разброса конечных точек  $x$  относительно фиксированной исходной точки  $y$ . Предполагается, таким образом, что этот разброс при удалении от момента  $t-\tau$  на  $\tau$  растет по диффузионному закону, т. е. пропорционально  $\tau$ . Предположения (26.1) и (26.2) воспроизводят условия (24.2), которые мы приняли, когда рассматривали схему с дискретными скачками (§ 24). Коэффициент  $B(y, t)$  или, точнее,  $B/2$  называется коэффициентом диффузии.

В дальнейшем мы перейдем к описанию марковского процесса еще с иной точки зрения, пользуясь представлением о случайных толчках или *случайной силе*, действующей на рассматриваемую систему. Мы увидим тогда, что  $B(y, t)$  характеризует *интенсивность толчков*.

В-третьих, предположим, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{|x-y|^3}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|^3 v(t, x|t-\tau, y) dx = 0. \quad (26.3)$$

Мы считаем, таким образом, что вероятность больших изменений  $|x-y|$  достаточно быстро стремится к нулю при  $\tau \rightarrow 0$ , настолько быстро, что  $|x-y|^3$  убывает быстрее  $\tau$ . Именно это требование и позволяет рассматривать  $x$  в системе, подвергающейся действию случайных толчков, как *непрерывно* меняющуюся величину, т. е. как среднее за время, гораздо большее

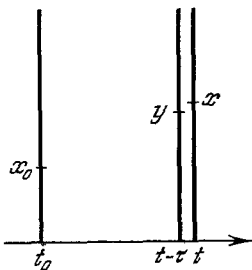


Рис. 15.

промежутка между случайными толчками. Выводы, полученные при предположении (26.3), неприменимы, следовательно, к промежуткам  $\tau$ , малым по сравнению со временем между толчками. Например, вероятность соударения молекул газа за время  $\tau$ , малое по сравнению со временем свободного пробега  $\theta$ , есть  $1 - e^{-\tau/\theta} \approx \tau/\theta$ . При соударении скорость молекулы  $u$  (которая и представляет собой в этом случае величину  $x$ , описывающую состояние молекулы) меняется в среднем на конечную величину  $\Delta u = \pm a$ . Следовательно, для  $\tau \ll \theta$

$$|\overline{\Delta u}|^3 \approx a^3 \tau / \theta$$

и условие

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{|\overline{\Delta u}|^3}{\tau} = 0$$

не выполнено.

Принимая условие (26.3), мы ограничиваемся марковскими процессами, у которых непрерывно не только множество возможных значений, но и само протекание процесса во времени, т. е. смена состояний происходит непрерывно (в вероятностном смысле), без скачков. Такие марковские процессы часто называют *диффузионными*. Случай скачкообразных изменений состояния будет рассмотрен ниже (§ 31).

Умножим уравнение Смолуховского (22.1), положив в нем  $\theta = t - \tau$ , на произвольную функцию  $q(x)$ , обращаящуюся вместе с  $q'(x)$  в нуль на границах области (у нас — в  $\pm\infty$ ) и имеющую ограниченную третью производную,  $|q'''(x)| < M$ . Интегрируя по  $x$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) v(t, x | t_0, x_0) dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t - \tau, y | t_0, x_0) dy \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, x | t - \tau, y) q(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t - \tau, y | t_0, x_0) dy \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, x | t - \tau, y) \times \\ &\times \left\{ q(y) + q'(y)(x - y) + q''(y) \frac{(x - y)^2}{2} + q'''(z) \frac{(x - y)^3}{6} \right\} dx, \end{aligned}$$

где  $y < z < x$ . В члене с  $q(y)$  интеграл по  $x$  дает единицу. Перенесем этот член в левую часть, заменим в нем переменную интегрирования  $y$  на  $x$ , разделим все уравнения на  $\tau$  и перей-

дем к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ . Это дает

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) \frac{\partial v(t, x | t_0, x_0)}{\partial t} dx = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, y | t_0, x_0) \left\{ q'(y) A(y, t) + q''(y) \frac{B(y, t)}{2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{q'''(z)}{6} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{|x-y|^3}{\tau} \right\} dy. \end{aligned}$$

Последний член в правой части ввиду ограниченности  $q'''$  и условия (26.3) равен нулю. Заменяв теперь и справа  $y$  на  $x$  и выполнив интегрирование по частям [с учетом того, что  $q(\pm\infty) = q'(\pm\infty) = 0$ ], получаем ввиду произвольности  $q(x)$

$$\frac{\partial v(t, x | t_0, x_0)}{\partial t} = - \frac{\partial A(x, t) v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B(x, t) v}{\partial x^2}. \quad (26.4)$$

Это параболическое уравнение (типа диффузионного) и есть уравнение Эйнштейна — Фоккера (иногда его называют уравнением Фоккера — Планка или вторым уравнением Колмогорова). Полученное ранее уравнение (24.3) представляет собой, очевидно, частный случай (26.4), соответствующий постоянным  $A$  и  $B$ .

Решение уравнения (26.4) должно быть неотрицательно, нормировано к единице и должно удовлетворять начальному условию

$$v(t_0, x | t_0, x_0) = \delta(x - x_0). \quad (26.5)$$

Наглядно уравнение (26.4) можно истолковать следующим образом. В момент  $t_0$  из точки  $x_0$  выходит большое число (ансамбль) частиц, движущихся независимо друг от друга. Их концентрация (относительная «частота») в точке  $x$  в момент  $t$  будет  $v(t, x | t_0, x_0)$ . Поток частиц  $S$  складывается из *систематического* («гидродинамического») потока  $Av$ , где  $A$  — скорость систематического движения в точке  $x$  в момент  $t$ , и из *диффузионного* потока  $-\frac{1}{2} \frac{\partial Bv}{\partial x}$ , где  $B/2$  коэффициент диффузии:

$$S = Av - \frac{1}{2} \frac{\partial Bv}{\partial x}. \quad (26.6)$$

Тогда уравнение Эйнштейна — Фоккера — это просто уравнение



непрерывности:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0,$$

выражающее сохранение числа частиц<sup>1)</sup>.

Нетрудно показать, что  $v(t, x | t_0, x_0)$ , рассматриваемая как функция начальных переменных  $x_0, t_0$ , удовлетворяет сопряженному уравнению (в смысле сопряженности линейных операторов  $\hat{L}$  и  $\hat{M}$ , т. е.  $\int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 \hat{L} f_2 - f_2 \hat{M} f_1) dx = 0$ ):

$$\frac{\partial v(t, x | t_0, x_0)}{\partial t_0} = -A(x_0, t_0) \frac{\partial v}{\partial x_0} - \frac{B(x_0, t_0)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2}. \quad (26.7)$$

Это уравнение называют первым уравнением Колмогорова.

Если в начальный момент  $t_0$  задано не начальное состояние  $x_0$ , а начальное распределение  $w(t_0, x_0)$ , то, поскольку двумерная плотность вероятности есть

$$w_2(t, x; t_0, x_0) = w(t_0, x_0) v(t, x | t_0, x_0),$$

одномерная функция распределения в момент  $t$  будет

$$w_1(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t_0, x_0) v(t, x | t_0, x_0) dx_0.$$

Умножив (26.4) на  $w(t_0, x_0)$  и проинтегрировав по  $x_0$ , нетрудно убедиться, что вероятность состояния  $w_1(t, x)$  удовлетворяет тому же уравнению:

$$\frac{\partial w_1(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial A(x, t) w_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B(x, t) w_1}{\partial x^2}. \quad (26.8)$$

Начальным условием здесь, конечно, будет

$$w_1(x, t_0) = w(x, t_0), \quad (26.9)$$

причем решение также должно быть неотрицательно и нормировано к единице. Рассмотрим некоторые следствия и частные случаи уравнения (26.4).

<sup>1)</sup> Обычно коэффициентом диффузии называется множитель при  $-\partial v/\partial x$ . Поэтому в (26.6), строго говоря, нельзя назвать  $B/2$  коэффициентом диффузии. Если же записать полный поток в виде

$$S = \left( A - \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x} \right) v - \frac{B}{2} \frac{\partial v}{\partial x},$$

то  $B/2$  — коэффициент диффузии, но тогда систематическая часть  $S$  содержит градиент  $B$ .

Введем условные моменты

$$\overline{x^n(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n v(t, x | t_0, x_0) dx,$$

т. е. средние значения  $x^n$  в момент  $t$  при условии, что  $\bar{x}(t_0) = x_0$ . Умножим (26.4) на  $x^n$  и проинтегрируем по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Интегрируя члены с  $A$  и  $B$  по частям и предполагая, что проинтегрированные выражения исчезают на границах (у нас — в  $\pm \infty$ ), получаем

$$\frac{d\overline{x^n}}{dt} = n\overline{Ax^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2} \overline{Bx^{n-2}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (26.10)$$

В частности, для  $n = 1$  и  $2$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \overline{A(x, t)}, \quad (26.11)$$

$$\frac{d\overline{x^2}}{dt} = 2\overline{A(x, t)x} + \overline{B(x, t)}. \quad (26.12)$$

Подчеркнем для ясности, что функции  $A(x, t)$  и  $B(x, t)$ , согласно их определениям (26.1) и (26.2), — это *детерминированные* функции. Черта над ними в (26.10) — (26.12) означает усреднение по условному распределению  $v(t, x | t_0, x_0) dx$  случайного аргумента  $x$  этих функций.

Если  $A$  и  $B$  — ряды (или полиномы) по степеням  $x$ , то (26.10) представляет собой систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для моментов  $\overline{x^n}$ . В общем случае все уравнения этой бесконечной системы «зацепляются», т. е. содержат моменты разных порядков. Это относится и к уравнению (26.10). Хотя из него и выпало влияние диффузионного потока вероятности —  $\frac{1}{2} \frac{\partial Bv}{\partial x}$ , оно не является уравнением феноменологической кинетики или динамики, которое должно быть замкнутым (содержащим только момент  $\bar{x}$ ). Исключением является только тот случай, когда  $A(x, t)$  — линейная функция  $x$ :  $A(x, t) = a(t)x + b(t)$ . Тогда уравнение (26.11) отщепляется и становится замкнутым:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\bar{x} + b(t).$$

Во всяком случае из (26.11) мы можем сделать вывод, что  $dx/dt$  и  $A(x, t)$  могут различаться только слагаемым, среднее значение которого равно нулю:

$$\frac{dx}{dt} = A(x, t) + F(x, t), \quad \overline{F(x, t)} = 0, \quad (26.13)$$

— замечание, которым мы еще воспользуемся (§ 37).

Возьмем теперь *стационарный* марковский процесс. Вероятность перехода зависит в этом случае от  $t - t_0$ , так что, согласно (26.1) и (26.2),  $A$  и  $B$  не зависят от  $t$ . Одномерная вероятность состояния, *если она существует*, вообще не зависит от  $t$  (§ 16). В результате для  $\omega_1(x)$  получаем из (26.8) уравнение

$$\frac{d}{dx} \left( A\omega_1 - \frac{1}{2} \frac{dB\omega_1}{dx} \right) = 0.$$

Если на границах области изменения  $x$  стационарный поток

$$S = A\omega_1 - \frac{1}{2} \frac{dB\omega_1}{dx} = 0,$$

то интегрирование дает, что он равен нулю всюду:

$$A\omega_1 - \frac{1}{2} \frac{dB\omega_1}{dx} = 0.$$

Для бесконечной области изменения  $x$  условия  $\omega = \omega' = 0$  при  $|x| = \infty$  имеют место при положительном и отличном от нуля  $B$  и при  $A > 0$  или  $A < 0$  соответственно для  $x \rightarrow -\infty$  или  $x \rightarrow +\infty$ , причем в обоих случаях  $|A| > C > 0$  [19]<sup>1)</sup>. Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\omega_1(x) = \frac{C}{B(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{2A(s)}{B(s)} ds \right\}. \quad (26.14)$$

Постоянная  $C$  определяется из условия нормировки.

Примером, когда стационарное распределение существует, может служить броуновское движение частицы при наличии силы тяжести ( $A = -mg/h = \text{const}$ ) над *отражающей границей*. Очевидно, на отражающей границе должно быть выполнено именно условие обращения потока  $S$  в нуль, так что выражение (26.14) справедливо; при постоянных  $A$  и  $B$  оно дает

$$\omega_1(x) = C \exp \left\{ -\frac{2mgx}{hB} \right\},$$

т. е. барометрическую формулу. Как известно (см. [7], § 53),

$$B = 2kT/h,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура. Следовательно,

$$\omega_1(x) = C \exp \left\{ -\frac{mgx}{kT} \right\}.$$

Стационарная вероятность  $\omega_1(x)$  соответствует именно той вероятности состояния, которая рассматривается в статистиче-

<sup>1)</sup> Если эти условия не выполнены, то стационарного решения может не существовать [см. формулу (26.14)].

ской термодинамике. Для изотермической системы распределение  $\omega_1$  является каноническим, для адиабатически изолированной системы — микроканоническим.

Укажем еще на *процесс, однородный по абсциссе* (процесс типа Башелье). В этом случае вероятность перехода зависит только от  $x - x_0$  и, следовательно, по (26.1) и (26.2),  $A$  и  $B$  могут зависеть от  $t$ , но не от  $x$ . Уравнение (26.4) принимает вид

$$\frac{\partial v(t, x - x_0, t_0)}{\partial t} = -A(t) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{B(t)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (26.15)$$

Замена переменных

$$x' = x - \int_{t_0}^t A(\theta) d\theta, \quad t' = \int_{t_0}^t B(\theta) d\theta$$

приводит это уравнение к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2},$$

так что в первоначальных переменных решение для неограниченной области есть

$$v = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(t)} \left[ x - x_0 - \int_{t_0}^t A(\theta) d\theta \right]^2 \right\},$$

$$\sigma^2(t) = \int_{t_0}^t B(\theta) d\theta.$$

В работе [12] подробно исследована гораздо более общая постановка вопроса — о дифференциальном уравнении для плотности условной вероятности  $v(t, x | T, X)$  любого случайного процесса с непрерывным множеством состояний. Под  $(T, X)$  понимается совокупность условий

$$(T, X) = (t_1, x_1; \dots; t_m, x_m; t_{m+1}, y_{m+1}; \dots; t_k, z_k),$$

причем  $x(t)$ ,  $y(t)$ , ...,  $z(t)$  могут быть и *разными* случайными процессами, а множество  $T$  моментов времени  $t_1, \dots, t_k$  может быть и *неупорядоченным*. Существенно только то, что момент времени  $t$  не принадлежит к множеству  $T$ .

Исходным является, конечно, уже не уравнение Смолуховского, а формула для полной плотности условных вероятностей:

$$v(t, x | T, X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{v}(t, x | t - \tau, y; T, X) v(t - \tau, y | T, X) dy, \quad (26.16)$$

где  $\bar{v}$  и  $v$ , вообще говоря, различные функции. Показано (см. задачу 16), что для плотности условной вероятности  $v(t, x | T, X)$  справедливо уравнение вида

$$\frac{\partial v(t, x | T, X)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n A_n v}{\partial x^n}, \quad (26.17)$$

$$A_n \equiv A_n(x, t | T, X) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x-y)^n \bar{v}(t, x | t-\tau, y; T, X) dy. \quad (26.18)$$

Допустимо, что пределы справа и слева ( $\tau \rightarrow 0 \pm$ ) могут быть здесь различны, но, по предположению, они конечны. Для коэффициентов  $A_n$  показано, что если для какого-нибудь четного  $n$  коэффициент  $A_n = 0$ , то  $A_n = 0$  для всех  $n \geq 3$ . Другими словами, если порядок уравнения (26.17) конечен, то он должен быть *не выше второго*, и тогда получается *обобщенное* уравнение Эйнштейна — Фоккера:

$$\frac{\partial v(t, x | T, X)}{\partial t} = - \frac{\partial A_1 v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_2 v}{\partial x^2}. \quad (26.19)$$

В частном случае марковских процессов совокупность условий  $(T, X)$  сводится к какому-либо одному предшествующему (или последующему) состоянию самого процесса  $x(t)$ , а функция  $\bar{v}$  совпадает с  $v$ . Указанная теорема об обращении в нуль всех  $A_n$  с  $n \geq 3$ , разумеется, остается в силе, так что уравнение (26.19) превращается в диффузионное уравнение (26.4) для плотности вероятности перехода  $v(t, x | t_0, x_0)$ .

В принципе, *если* известны коэффициенты  $A_n$  вида

$$A_n(x_k, t_k | t_1, x_1; \dots; t_{k-1}, x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

уравнения (26.17) или (26.19) позволяют найти все условные плотности  $v_k(t_k, x_k | t_1, x_1; \dots; t_{k-1}, x_{k-1})$ , а значит, и любую  $n$ -мерную функцию распределения:

$$\omega_n(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n) = \omega_1(t_1, x_1) \prod_{k=2}^n v_k(t_k, x_k | t_1, x_1; \dots; t_{k-1}, x_{k-1}).$$

Предполагается, что  $\omega_1$  существует и либо известно, либо может быть получено из условной плотности вероятностей  $v_k$  при отодвигании всех или части времен  $t_1, \dots, t_{k-1}$  в  $-\infty$  (выполнение сильного условия эргодичности). Однако реализация этой программы нахождения  $\omega_n$  связана с фундаментальной трудностью, на которую наталкиваются все рассматриваемые чисто вероятностные схемы, в том числе и классическая схема для марковских процессов. Ведь *регулярная* процедура нахождения коэффициентов  $A_n$  требует, чтобы мы *уже располагали* искомой

условной плотностью вероятностей  $\bar{v}$  (хотя бы для сколь угодно малых времен перехода  $\tau$ ). Сверх того, если допустить, что  $A_n$  откуда-то известны, имеется немало и других трудностей, но они носят более технический характер. Они связаны со сложностью самих уравнений, с необходимостью разбивать область возможных значений  $x(t)$  на участки, в которых  $v$  и ее производные непрерывны, с установлением правильных граничных условий для искомого решения и т. д.

К тому, что уравнения вида (26.17) или (26.19) верны и для немарковских процессов, независимо пришел ряд авторов, наряду с автором цитируемой работы [12], в которой проведен наиболее полный анализ вопроса. Теория легко распространяется и на многомерные случайные процессы. Переходя в следующем параграфе к этому обобщению, мы вернемся к *марковским* процессам и снова ограничимся диффузионным уравнением Эйнштейна — Фоккера.

### § 27. Обобщение на многомерные случайные функции

Пусть состояние системы в момент  $t$  описывается совокупностью  $n$  случайных величин  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , т. е. случайным «вектором»  $\mathbf{x}(t)$  в  $n$ -мерном пространстве. Компоненты случайной функции  $\mathbf{x}(t)$  могут представлять собой (обобщенные) координаты системы либо же совокупность координат и скоростей (или импульсов). «Координаты»  $x_i$  в  $n$ -мерном пространстве, вообще говоря, криволинейны, но вывод уравнения Эйнштейна — Фоккера не зависит от выбора координат и вообще от метрики пространства  $\mathbf{x}$ , поскольку исходное уравнение Смолуховского

$$v(t, \mathbf{x} | t_0, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \int v(t, \mathbf{x} | t - \tau, \mathbf{y}) v(t - \tau, \mathbf{y} | t_0, \mathbf{x}_0) d\mathbf{y}$$

связывает *вероятности*  $dP = v d\mathbf{x}$ , от которых естественно требовать, чтобы они были скалярами при любом преобразовании координат. Все рассуждения остаются теми же, что и в предыдущем параграфе, с тем только отличием, что теперь речь идет о вероятностях перехода для  $n$ -мерных случайных величин.

Аналогично одномерному случаю делаются предположения

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{x_i - y_i}{\tau} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x_i - y_i) v(t, z | t - \tau, \mathbf{y}) d\mathbf{x} = A_i(\mathbf{y}, t), \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{\tau} &= B_{ik}(\mathbf{y}, t), \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} |(x_i - y_i)(x_k - y_k)(x_l - y_l)| &= 0, \end{aligned} \quad (27.1)$$

что позволяет прежним путем вывести уравнение Эйнштейна — Фоккера:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial A_i v}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i, k} \frac{\partial^2 B_{ik} v}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (27.2)$$

Решение этого уравнения должно быть неотрицательно, нормировано к единице:

$$\int v(t, \mathbf{x} | t_0, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = 1, \quad (27.3)$$

и должно удовлетворять начальному условию:

$$\begin{aligned} v(t_0, \mathbf{x} | t_0, \mathbf{x}_0) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \\ &= \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \dots \delta(x_n - x_{n0}). \end{aligned} \quad (27.4)$$

Кроме того, могут быть наложены те или иные граничные условия.

Как уже было отмечено, вид уравнения (27.2) одинаков при любом выборе «координат»  $\mathbf{x}$ , т. е. должен сохраняться при всяком преобразовании  $x_i = x_i(\mathbf{x}')$ , удовлетворяющем, конечно, условиям взаимной однозначности и непрерывности. Однако ковариантность уравнения в целом не означает, что инвариантны величины, через которые оно записано. Действительно, из того, что вероятность  $dP$  — скаляр, вытекает неинвариантность плотности вероятности  $v$ , поскольку инвариантный элемент объема равен не  $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n$ , а  $\sqrt{g} d\mathbf{x}$ , где  $g$  — детерминант, составленный из элементов метрического тензора  $g_{ik}$ . Можно определить скалярную плотность вероятности  $\tilde{v} = v / \sqrt{g}$ :

$$dP = v d\mathbf{x} = \tilde{v} \sqrt{g} d\mathbf{x},$$

которой и удобно пользоваться при преобразованиях координат. В частности, если пространство  $\mathbf{x}$  —  $2n$ -мерное фазовое пространство ( $n$  координат  $x_1, \dots, x_n$  и  $n$  скоростей  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$  или импульсов  $p_1, \dots, p_n$ ), то  $\tilde{v}$  представляет собой *фазовую* плотность вероятности.

Далее, при переходе к новым координатам  $x'_\alpha$  коэффициенты  $A_i$  и  $B_{ik}$ , как это нетрудно установить при помощи формул (27.1), преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_\alpha A'_\alpha \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} B'_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}, \\ B_{ik} &= \sum_{\alpha, \beta} B'_{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta}, \end{aligned} \quad (27.5)$$

откуда видно, что  $B_{ik}$  — тензор второго ранга, но  $A_i$  не образуют вектора (если не ограничиваться линейными преобразованиями). Это значит, что равенство величин  $A_i$  нулю в одной системе координат не означает их равенства нулю в другой, т. е.  $A_i$  не характеризуют скорость систематического потока инвариантным образом. Однако, в согласии со сказанным выше, при правильных законах преобразования всех величин (включая, конечно, и операции дифференцирования по  $x_i$ ) можно убедиться в ковариантности уравнения (27.2) и непосредственно, т. е. не апеллируя к его выводу<sup>1)</sup>.

Запишем уравнение (27.2) для следующих двух случаев, которые нам вскоре понадобятся, — для частицы, испытывающей действие *однородных* и *изотропных* толчков, движущейся 1) на плоскости и 2) по поверхности единичной сферы.

В первом случае (на плоскости) нас будет интересовать уравнение (27.2), записанное в полярных координатах  $r$  и  $\varphi$ :

$$x_1 \equiv x = r \cos \varphi, \quad x_2 \equiv y = r \sin \varphi.$$

Изотропность толчков означает, что средний квадрат смещения одинаков по любому направлению:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(\Delta y)^2} = \overline{(\Delta r)^2} = r^2 \overline{(\Delta \varphi)^2} = \varepsilon^2, \quad (27.6)$$

что возможно только при условии некоррелированности взаимно ортогональных смещений:

$$\overline{\Delta x \cdot \Delta y} = \overline{\Delta r \cdot r \Delta \varphi} = 0. \quad (27.7)$$

Однородность толчков означает, что средний квадрат смещения один и тот же в любом месте плоскости, т. е.  $\varepsilon^2$  не зависит от координат  $x$ ,  $y$  или  $r$ ,  $\varphi$ .

Согласно (27.2) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial A_r v}{\partial r} - \frac{\partial A_\varphi v}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B_{rr} v}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 B_{r\varphi} v}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 B_{\varphi\varphi} v}{\partial \varphi^2} \right), \quad (27.8)$$

где, в соответствии с (27.1),

$$A_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}, \quad A_\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta \varphi}}{\Delta t}, \quad B_{rr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{(\Delta r)^2}}{\Delta t},$$

$$B_{r\varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta r \Delta \varphi}}{\Delta t}, \quad B_{\varphi\varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{(\Delta \varphi)^2}}{\Delta t}.$$

<sup>1)</sup> При произвольных преобразованиях координат необходимо, конечно, различать ко- и контравариантные компоненты. К вопросу о записи уравнения Эйнштейна — Фоккера через инвариантные характеристики марковского процесса см. [13] и [14]. Заметим, что вектором является величина  $\tilde{A}^i = A^i + \frac{1}{2} \Gamma_{rs}^i B^{rs}$ , где  $\Gamma_{rs}^i$  — символы Кристоффеля. См. также [15], § 2. 3.



Из (27.6) и (27.7) следует, что

$$B_{rr} = r^2 B_{\varphi\varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{\Delta t} = B, \quad B_{r\varphi} = 0. \quad (27.9)$$

Что касается  $A_r$  и  $A_\varphi$ , то их вычисление следует проводить более аккуратно, не ограничиваясь членами первого порядка относительно  $\varepsilon$ , а учитывая, в соответствии с (25.7), и второй. Из формул

$$(r + \Delta r)^2 = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2, \quad \varphi + \Delta\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y + \Delta y}{x + \Delta x}$$

имеем

$$\begin{aligned} \Delta r &= \Delta x \cos \varphi + \Delta y \sin \varphi + \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^2 \sin^2 \varphi + (\Delta y)^2 \cos^2 \varphi - 2 \Delta x \Delta y \sin \varphi \cos \varphi}{2r} + \dots, \\ r \Delta \varphi &= \Delta y \cos \varphi - \Delta x \sin \varphi + \\ &\quad + \frac{[(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2] \sin \varphi \cos \varphi - \Delta x \Delta y (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{r} + \dots \end{aligned}$$

Усредняя эти равенства, деля их на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем с учетом (27.6) и (27.7)

$$A_r = R + \frac{B}{2r}, \quad r A_\varphi = \Phi, \quad (27.10)$$

где введены величины

$$\begin{aligned} R &= A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi, \quad \Phi = A_y \cos \varphi - A_x \sin \varphi, \\ A_x &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t}, \quad A_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta y}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (27.11)$$

Если бы  $A_x$  и  $A_y$  были декартовыми компонентами вектора  $\mathbf{A}$ , то его полярные компоненты  $A_r$  и  $r A_\varphi$  совпадали бы соответственно с  $R$  и  $\Phi$ . Однако первое равенство (27.10) показывает, что  $A_r$  не совпадает с  $r$ -компонентой вектора  $\mathbf{A}$ . Легко видеть, что подстановка (27.9) и (27.10) в (27.8) приводит снова к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial R v}{\partial r} - \frac{\partial \Phi v}{r \partial \varphi} + \frac{B}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right], \quad (27.12)$$

где  $v = v(t, r, \varphi | t_0, r_0, \varphi_0)$  — обычная (неинвариантная) плотность вероятности перехода, т. е.  $dP = v \cdot dr d\varphi$ . Заметим, что для скалярной плотности  $\tilde{v} = v/r$ , для которой  $dP = \tilde{v} \cdot r dr d\varphi$ , уравнение (27.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial R r \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi \tilde{v}}{r \partial \varphi} + \frac{B}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \varphi^2} \right] = \\ &= -\operatorname{div}(\mathbf{A} \tilde{v}) + \frac{B}{2} \Delta \tilde{v}, \end{aligned}$$

где под  $\mathbf{A}$  понимается вектор с полярными компонентами  $R$  и  $\Phi$ .

Обратимся теперь к движению частицы по единичной сфере. Координатами частицы будут полярный угол  $\theta$  и азимут  $\varphi$ , так что уравнение (27.2) будет

$$\frac{\partial v(t, \theta, \varphi | t_0, \theta_0, \varphi_0)}{\partial t} = -\frac{\partial A_\theta v}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\varphi v}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B_{\theta\theta} v}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 B_{\theta\varphi} v}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial^2 B_{\varphi\varphi} v}{\partial \varphi^2} \right), \quad (27.13)$$

где

$$A_\theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta\theta}}{\Delta t}, \quad A_\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta\varphi}}{\Delta t}, \quad B_{\theta\theta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\overline{\Delta\theta})^2}{\Delta t},$$

$$B_{\theta\varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta\theta \Delta\varphi}}{\Delta t}, \quad B_{\varphi\varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\overline{\Delta\varphi})^2}{\Delta t}.$$

Это уравнение определяет обычную плотность вероятности перехода  $v(t, \theta, \varphi | t_0, \theta_0, \varphi_0)$ , т. е.  $dP = v d\theta d\varphi$ .

В силу предположенной изотропности толчков имеем

$$(\overline{\Delta\theta})^2 = \sin^2 \theta (\overline{\Delta\varphi})^2 = \varepsilon^2, \quad \sin \theta \overline{\Delta\varphi \Delta\theta} = 0,$$

так что

$$B_{\theta\theta} = \sin^2 \theta B_{\varphi\varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{\Delta t} \equiv B, \quad B_{\theta\varphi} = 0,$$

причем  $B$  на всей сфере постоянно (однородность толчков).

Если частица совершает малое перемещение  $\Delta\alpha$  из точки  $(\theta, \varphi)$  в точку  $(\theta', \varphi')$ , то по формуле сферической тригонометрии имеем

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \Delta\alpha + \sin \theta \cos \psi \sin \Delta\alpha,$$

где  $\psi$  — угол поворота дуги  $\Delta\alpha$ , отсчитанный от меридиана (рис. 16). Разлагая  $\cos \theta'$  по степеням  $\Delta\theta = \theta' - \theta$  и ограничиваясь вторым порядком относительно  $\Delta\alpha$ , получаем

$$\Delta\theta = \operatorname{ctg} \theta \sin^2 \psi \frac{(\Delta\alpha)^2}{2} - \cos \psi \Delta\alpha.$$

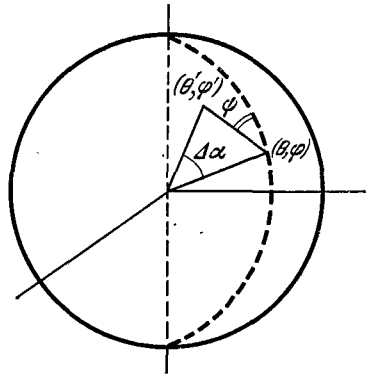


Рис. 16.

Очевидно, все направления  $\psi$  от 0 до  $2\pi$  равновероятны (изотропность толчков), так что  $\overline{\cos \psi} = 0$ ,  $\overline{\sin^2 \psi} = 1/2$ . С другой стороны, рассматривая малый участок сферы около точки  $(\theta, \varphi)$ , как плоскость, имеем

$$(\Delta\alpha)^2 = (\Delta\theta)^2 + \sin^2 \theta (\Delta\varphi)^2,$$

откуда

$$\overline{(\Delta\alpha)^2} = \overline{(\Delta\theta)^2} + \sin^2\theta \overline{(\Delta\varphi)^2} = 2\varepsilon^2.$$

В результате

$$\overline{\Delta\theta} = \operatorname{ctg}\theta \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \text{т. е.} \quad A_\theta = \frac{B}{2} \operatorname{ctg}\theta.$$

Аналогичным путем нетрудно установить, что  $A_\varphi = 0$ . Уравнение (27.13), в котором

$$\begin{aligned} A_\theta &= \frac{B}{2} \operatorname{ctg}\theta, & A_\varphi &= 0, & B_{\theta\theta} &= B, \\ B_{\varphi\varphi} &= \frac{B}{\sin^2\theta}, & B_{\theta\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (27.14)$$

принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{B}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{v}{\sin\theta} \right) \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} \right], \quad (27.15)$$

а для скалярной плотности  $\bar{v}$ , т. е. плотности в элементе телесного угла  $\sin\theta d\theta d\varphi$  ( $\bar{v} = v/\sin\theta$ ), уравнение будет

$$\sin\theta \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{B}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \bar{v}}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial\varphi^2} \right]. \quad (27.16)$$

Если отсчитывать  $\theta$  от начального положения частицы, т. е. провести полярную ось через это положение (таким образом  $\theta_0 = 0$ ), то в силу симметрии  $\bar{v}$  будет независима от  $\varphi$ . Уравнение примет тогда вид

$$\sin\theta \frac{\partial \bar{v}(t, \theta | t_0, 0)}{\partial t} = \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \bar{v}}{\partial\theta} \right), \quad (27.17)$$

причем решение надо искать при начальном условии

$$\bar{v}_{t=t_0} = \frac{\delta(\theta)}{2\pi \sin\theta}.$$

Решение выражается в полиномах Лежандра (§ 30).

## § 28. Флуктуации в томсоновском ламповом генераторе

Рассмотрим применение уравнения Эйнштейна — Фоккера к простейшей автоколебательной системе с одной степенью свободы — ламповому генератору с колебательным контуром в анодной цепи, индуктивной обратной связью и кубической характеристикой лампы (мягкий режим самовозбуждения). Схема генератора показана на рис. 17. Говоря, что генератор является *томсоновской* системой, имеют в виду его близость к линейному гармоническому осциллятору, т. е. достаточную малость диссипативных и нелинейных членов в описывающем генератор дифференциальном уравнении. Конкретные предположения о схеме генератора имеют целью только упрощение динамической мо-

дели, излагаемая же теория не связана рамками именно такой схемы, а применима в общем случае томсоновской автоколебательной системы, как автономной, так и неавтономной, и не только с одной степенью свободы, когда динамическое уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t)$$

( $\mu$  — малый параметр), но и со многими степенями свободы.

Равным образом не играют роли происхождение и конкретный вид нелинейности, т. е. теория приложима и к другим ламповым схемам, и к генераторам на полупроводниковых элементах, и к оптическим квантовым генераторам (в тех случаях, когда допустимо их квазиклассическое описание), и т. д.

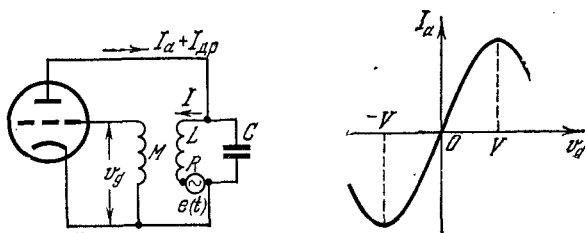


Рис. 17.

Имея в виду последующее использование рассматриваемой модели (§ 53), мы учтем при составлении дифференциального уравнения генератора два источника флуктуаций — *дробовой ток* в анодной цепи лампы  $I_{др}(t)$ , добавляющийся к мгновенному среднему (т. е. статистическому среднему, взятому по ансамблю идентичных генераторов) анодному току  $I_a(t)$ , и *тепловые флуктуации* тока и напряжения в колебательном контуре генератора. Истинным источником этих тепловых флуктуаций является тепловое движение микрочарядов в проводниках, из которых сделан контур. Но в дальнейшем будет обоснована возможность феноменологического описания тепловых флуктуаций в электрической цепи как результата действия некоторой эквивалентной случайной электродвижущей силы (§ 54). Поэтому на схеме автогенератора (рис. 17) в колебательный контур включен «генератор» этой флуктуационной «тепловой» э. д. с.  $e(t)$ .

В обозначениях, ясных из рис. 17, имеем

$$Li + RI - e = \frac{1}{C} \int (I_a + I_{др} - I) dt,$$

$$I_a = Sv_c \left( 1 - \frac{v_g^2}{3V^2} \right), \quad v_c = Mi.$$

Исключая  $I_a$  и  $v_c$ , получаем для тока  $I$  уравнение

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \dot{I} + \frac{I}{LC} = \frac{SM}{LC} \dot{i} \left( 1 - \frac{M^2 \dot{i}^2}{3V^2} \right) + \frac{I_{др}}{LC} + \frac{\dot{e}}{L}.$$

Поскольку мы считаем систему томсоновской, нелинейные и неконсервативные члены уравнения предполагаются малыми — порядка малого параметра  $\mu$ . Обозначим

$$1/LC = \omega_0^2$$

и введем следующие безразмерные переменные и коэффициенты:  $t' = \omega_0 t$ ,  $x = I/I_0$ ,  $I_0 = 2V/\omega_0 M$ ,  $\omega_0 MS = \mu$ ,  $\omega_0 (MS - RC) = \mu r$ .

Уравнение приводится тогда к виду

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x} \left( p - \frac{4}{3} \dot{x}^2 \right) + \mu F(t'), \quad (28.1)$$

где

$$\mu F(t') = \frac{M\omega_0}{2V} \left[ I_{др}(t) + \frac{\dot{e}(t)}{L\omega_0} \right] = \frac{1}{I_0} \left[ I_{др}(t) + \frac{\dot{e}(t)}{L\omega_0} \right] \quad (28.2)$$

— действующая на систему флуктуационная «сила», связанная с дробовым током и тепловыми флуктуациями. Эту силу мы тоже считаем малой — того же порядка  $\mu$ , что и диссипативный член уравнения (28.1). Как уже было сказано, ее конкретный вид и вообще ее явное присутствие в уравнении (28.2) понадобятся нам позднее. Сейчас она послужила лишь иллюстрацией того, как могут входить в описание динамической системы случайные воздействия. Дальнейшее развитие теории в этом параграфе, хотя оно и предполагает в действительности определенные ограничения статистических свойств  $F(t')$ , не оперирует с этой случайной «силой» явным образом, т. е. опирается на чисто динамическое уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x} \left( p - \frac{4}{3} \dot{x}^2 \right). \quad (28.3)$$

К томсоновским системам, близким к гармоническому осциллятору ( $\ddot{x} + x = 0$  при  $\mu = 0$ ), применим, как известно, приближенный (асимптотический) метод Ван-дер-Поля, или, как его называют иначе, метод медленных возмущений. В первом (относительно малого параметра  $\mu$ ) приближении решение уравнения (28.3) отличается от решения для гармонического осциллятора  $x = r \cos(t' + \varphi)$ , где амплитуда  $r$  и фаза  $\varphi$  — постоянные, тем, что  $r$  и  $\varphi$  оказываются *медленными* функциями времени, а именно зависящими от  $t'$  через так называемое «медленное время»  $\theta = \mu t'$ :

$$x = r(\theta) \cos[t' + \varphi(\theta)], \quad (28.4)$$

Таким образом, скорости изменения амплитуды  $r(\theta)$  и фазы  $\varphi(\theta)$  (т. е. добавка  $\dot{\varphi}(\theta)$  к частоте колебаний) являются величинами первого порядка малости относительно параметра  $\mu$ :

$$\dot{r} = \mu r', \quad \dot{\varphi} = \mu \varphi',$$

где штрихом обозначено дифференцирование по медленному времени  $\theta$ .

Напомним упрощенную процедуру получения ван-дер-полевских (или так называемых *укороченных*) уравнений для томсоновской системы, т. е. уравнений первого приближения для медленно меняющихся амплитуды  $r(\theta)$  и фазы  $\varphi(\theta)$ . Излагая эту чисто динамическую теорию, мы будем исходить не из уравнения (28.3) для выбранной модели автогенератора, а из более общего уравнения томсоновской системы с одной степенью свободы:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \mu F(t'). \quad (28.5)$$

Вычисляя с точностью до первого порядка по  $\mu$  производные по  $t'$  искомого решения (28.4), получаем

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt'} = -r \sin(t' + \varphi) + \mu [r' \cos(t' + \varphi) - r\varphi' \sin(t' + \varphi)],$$

$$\ddot{x} + x = -2\mu [r' \sin(t' + \varphi) + r\varphi' \cos(t' + \varphi)].$$

Что касается функции  $f(x, \dot{x})$  в (28.5), перед которой уже входит множитель  $\mu$ , то здесь можно ограничиться нулевым приближением для аргумента  $\dot{x}$ . В результате, после сокращения на  $\mu$ , получаем

$$\begin{aligned} -2[r' \sin(t' + \varphi) + r\varphi' \cos(t' + \varphi)] &= \\ &= f[r \cos(t' + \varphi); -r \sin(t' + \varphi)] + F(t'). \end{aligned}$$

Очевидно, функция  $f$ , зависящая от периодических по  $u = t' + \varphi$  аргументов, сама периодична по  $u$  с периодом  $2\pi$  и может быть поэтому разложена в ряд Фурье:

$$f(r \cos u; -r \sin u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + b_n \sin nu),$$

где

$$\left. \begin{array}{l} a_n(r) \\ b_n(r) \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos u; -r \sin u) \left. \begin{array}{l} \cos nu \\ \sin nu \end{array} \right\} du.$$

Высокая селективность системы (28.5) (неконсервативные члены входят только в порядке  $\mu$ , а в нулевом приближении мы имеем бесконечно селективный осциллятор  $\ddot{x} + x = 0$ ) означает, что из всего ряда Фурье существенны только члены, осциллирую-

щие по  $t'$  с основной безразмерной частотой  $n = 1$ . Постоянную составляющую ( $a_0$ ) и высшие гармоники ( $n = 2, 3, \dots$ ) можно отбросить, так как они далеки от резонанса. Таким образом, уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} -2[r' \sin(t' + \varphi) + r\varphi' \cos(t' + \varphi)] = \\ = a_1(r) \cos(t' + \varphi) + b_1(r) \sin(t' + \varphi) + F(t') \end{aligned}$$

По той же причине из всего спектра силы  $F(t')$  играет роль лишь ближайшая окрестность резонансной частоты 1. Вырезая из спектра  $F(t')$  некоторую полосу, центрированную около частоты 1 и имеющую ширину порядка  $\mu$  (но заметно превосходящую ширину резонансной кривой регенерированного контура, рис. 18), мы можем заменить  $F(t')$  процессом  $\tilde{F}(t')$ , у которого

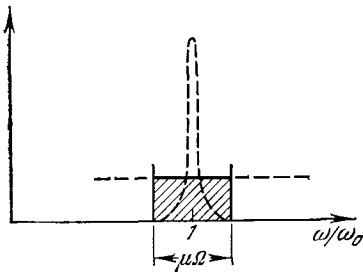


Рис. 18.

спектр ограничен указанной узкой полосой. Такой узкополосный процесс представляет собой колебание с медленно меняющимися амплитудой и частотой (модулированное колебание), и всегда может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t') = F_{\parallel}(\theta) \cos[t' + \varphi(\theta)] + \\ + F_{\perp}(\theta) \sin[t' + \varphi(\theta)]. \end{aligned} \quad (28.6)$$

В дальнейшем нам придется более обстоятельно заняться свойствами функций  $F_{\parallel}(\theta)$  и  $F_{\perp}(\theta)$ . Здесь же достаточно отметить только то очевидное обстоятельство, что в отсутствие внешней силы [ $F(t') = 0$ ] эти функции, конечно, тоже обращаются в нуль.

Подставляя выражение (28.6) для  $\tilde{F}(t')$  вместо  $F(t')$  в предыдущее уравнение и требуя, чтобы оно тождественно удовлетворялось по  $t'$ , т. е. собирая члены с  $\sin(t' + \varphi)$  и  $\cos(t' + \varphi)$  и приравнивая нулю получающиеся коэффициенты, получаем два уравнения Ван-дер-Поля для  $r$  и  $\varphi$  как функций «медленного времени»  $\theta = \mu t'$ :

$$r' = R(r) - \frac{1}{2} F_{\perp}(\theta), \quad r\varphi' = \Phi(r) - \frac{1}{2} F_{\parallel}(\theta). \quad (28.7)$$

Здесь введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} R(r) \\ \Phi(r) \end{aligned} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} b_1(r) \\ a_1(r) \end{aligned} \right. = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos u; -r \sin u) \begin{aligned} \sin u \\ \cos u \end{aligned} \left. \right\} du.$$

(28.8)

Если система автономна [ $F(t') = 0$ ], то уравнения (28.7) будут

$$r' = R(r), \quad r\varphi' = \Phi(r). \quad (28.9)$$

Интегрирование первого из них дает при заданном начальном значении  $r(0)$  закон изменения амплитуды  $r(\theta)$ . Внося это  $r(\theta)$  во второе уравнение, находим при заданном  $\varphi(0)$  закон изменения фазы  $\varphi(\theta)$ . В установившихся режимах (если они существуют) амплитуда  $r$  постоянна ( $r' = 0$ ), а сами эти постоянные значения  $r$  определяются из уравнения  $R(r) = 0$ . Пусть  $r_0$  — какое-либо из решений этого уравнения. Тогда второе уравнение (28.9) определяет соответствующую фазу:

$$\varphi(\theta) = \varphi(0) + \frac{\Phi(r_0)}{r_0} \theta = \varphi(0) + \mu \frac{\Phi(r_0)}{r_0} t'.$$

Таким образом, если  $\Phi(r_0)/r_0 \neq 0$ , автоколебания (28.4) происходят с частотой  $1 + \mu \frac{\Phi(r_0)}{r_0}$ , немного отличной от 1 — собственной частоты линейного осциллятора.

Каковы же уравнения (28.9) для нашей простой модели автогенератора, у которой  $f(x, \dot{x}) = \dot{x} \left( p - \frac{4}{3} \dot{x}^2 \right)$ ? Для функций  $f(x, \dot{x})$  столь простого вида (полином по степеням  $x$  и  $\dot{x}$ , а в данном случае — только по  $\dot{x}$ ) можно даже не вычислять интегралы (28.8), а обойтись элементарной тригонометрией. Подстановка  $\dot{x} = -r \sin u$  дает

$$\dot{x} \left( p - \frac{4}{3} \dot{x}^2 \right) = -pr \sin u + \frac{4}{3} r^3 \sin^3 u = -r(p - r^2) \sin u - \frac{r^3}{3} \sin 3u.$$

Отбросив третью гармонику, имеем, следовательно,  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = -r(p - r^2)$  или  $\Phi = 0$ ,  $R = \frac{r}{2}(p - r^2)$ , т. е. получаем уравнения

$$r' = \frac{r}{2}(p - r^2), \quad \varphi' = 0. \quad (28.10)$$

Возможные состояния равновесия — это  $r = 0$  и при  $p > 0$  еще  $r = \sqrt{p}$ . Элементарное исследование показывает, что при  $p < 0$  состояние равновесия  $r = 0$  устойчиво, а при  $p > 0$  неустойчиво, но устойчив предельный цикл с  $r = \sqrt{p}$ . Фаза  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ , т. е. сохраняет начальное значение. На рис. 19 показан ход траекторий на фазовой плоскости  $x = r \cos(t' + \varphi)$ ,  $\dot{x} \approx -r \sin(t' + \varphi)$ , а в нижней части рисунка — соответствующая картина на плоскости Ван-дер-Поля, т. е. на плоскости с полярными координатами  $r$  и  $\varphi$ . Связь обеих картин в рассматриваемом первом приближении очень проста: если вращать плоскость Ван-дер-Поля вокруг начала отсчета с угловой частотой



единица, то медленные движения изображающей точки по лучу  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$  перейдут в спирали, а устойчивое положение равновесия  $r = \sqrt{\rho}$  — в окружность (предельный цикл) на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$ . Таково в общих чертах решение динамической задачи.

Как изменятся эти результаты при учете случайных воздействий и чем эти воздействия обусловлены? Остановимся сначала на втором вопросе.

Анодный ток лампы испытывает флуктуации не только из-за дробового эффекта (§§ 5, 10), но и вследствие «эффекта мерцания» — хаотических вариаций эмиссии катода. В самом колебательном контуре флуктуации тока и напряжения обусловлены не только тепловым движением электронов, но и рядом других причин. Генератор подвержен разнообразным внешним воздействиям — механическим, которые вызывают, в частности, вибрацию электродов лампы (микрофонный эффект); температурным, которые могут влиять на значения параметров схемы; электромагнитным (электрические флуктуации в источниках питания, наводки) и т. п. Часть

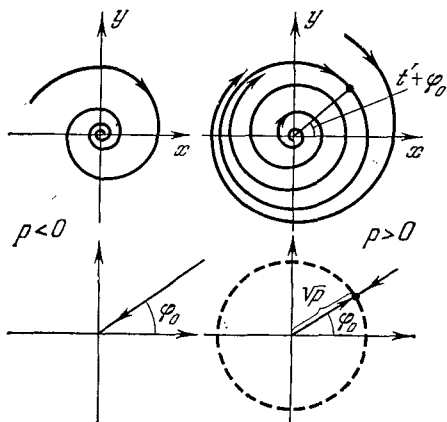


Рис. 19.

этих воздействий в принципе устранить: можно хорошо заблокировать источники питания, можно тщательно заэкранировать самый генератор, термостатировать и амортизировать его и т. д. Но такие явления, как дробовой эффект и тепловые флуктуации, принципиально неустранимы, так как они связаны с атомистической структурой электрического заряда. Эффект мерцания, обусловленный довольно сложными процессами диффузии и адсорбции в поверхностном слое катода, присутствует, как показывает опыт, во всех случаях, но, в отличие от дробовых и тепловых шумов, протекает довольно медленно по сравнению с высокочастотными колебаниями генератора.

Можно подразделить случайные воздействия на два вида. Одни вызывают медленные, но значительные изменения параметров устройства и соответствующие ухода частоты. Г. С. Горелков [16] предложил называть эти ухода и связанную с ними монохроматичность колебаний *техническими*, подчеркивая этим их обусловленность внешними факторами, от которых

генератор подвержен разнообразным воздействиям — механическим, которые вызывают, в частности, вибрацию электродов лампы (микрофонный эффект); температурным, которые могут влиять на значения параметров схемы; электромагнитным (электрические флуктуации в источниках питания, наводки) и т. п. Часть

в принципе можно избавиться (хотя эффект мерцания дает вклад именно в эту группу). Принципиально же неустранимую немонохроматичность, обусловленную чрезвычайно быстрой, но неглубокой хаотической модуляцией вследствие дробовых и тепловых флуктуаций, он предложил называть *естественной*. В дальнейшем мы еще вернемся к вопросу о влиянии обоих названных видов хаотической модуляции на спектр автоколебаний. В данный момент нас интересует протекание этих явлений во времени и возможность описания их как *непрерывного* марковского процесса.

Как уже отмечалось (§ 26), такое описание предполагает достаточную «густоту» независимых случайных толчков: вероятность конечных изменений состояния за макроскопически малое время  $\Delta t'$  должна стремиться к нулю быстрее, чем  $\Delta t'$ , но вместе с тем интервал  $\Delta t'$  должен быть велик по сравнению со временем между случайными толчками, т. е. за время  $\Delta t'$  система должна испытывать очень много независимых случайных воздействий.

Что является макроскопическим масштабом малости  $\Delta t'$ ? Очевидно, *период* автоколебаний (равный  $2\pi$  по безразмерному времени  $t'$ ), так как другие временные характеристики томсоновской системы (время установления генератора или отдельно взятого колебательного контура) охватывают очень много ( $\sim 1/\mu$ ) периодов. Следовательно,  $2\pi \gg \Delta t'$ , которое в свою очередь гораздо больше времени между толчками. Но этому условию удовлетворяют только дробовые и тепловые флуктуации. Случайные воздействия, с которыми связаны технические уходы частоты, гораздо более медленны по сравнению не только с периодом, но даже со временем установления генератора. Отсюда ясно, что они не могут быть включены в схему случайного процесса без вероятностного последствия, если, конечно, не отказываться от трактовки генератора как системы с *одной* степенью свободы. Таким образом, понимая под состоянием совокупность двух переменных  $x$  и  $\dot{x}$  (или  $r$  и  $\varphi$ ) в момент времени  $t'$  и описывая случайные изменения состояния как непрерывный двумерный марковский процесс, мы можем учесть влияние только *дробовых* и *тепловых* флуктуаций.

В результате этих флуктуаций, быстро меняющихся на протяжении даже маленького отрезка предельного цикла (малой доли периода), изображающая точка на фазовой плоскости ( $x, y$ ) [или на плоскости ( $r, \varphi$ ), где систематическое обращение по часовой стрелке с периодом  $2\pi$  исключено] совершает своего рода брауновское движение. Для того чтобы написать соответствующее уравнение Эйнштейна — Фоккера для вероятности перехода  $v(\theta, r, \varphi | \theta_0, r_0, \varphi_0)$ , необходимо конкретизировать вид коэффициентов  $B_{i\bar{j}}$ . Мы допустим, что случайные толчки

изотропны, т. е. справедливы выражения (27.9):

$$B_{rr} = r^2 B_{\varphi\varphi} = B, \quad B_{r\varphi} = 0.$$

Кроме того, мы примем, что толчки *однородны*, т. е.  $B$  — постоянная величина, не зависящая от состояния генератора  $(r, \varphi)$ .

Заметим, что это последнее предположение, строго говоря, непригодно для лампового генератора. Оно справедливо, если речь идет о тепловых флуктуациях в колебательном контуре, так как их интенсивность не зависит от силы текущего по проводникам тока. Но интенсивность флуктуаций анодного тока лампы (дробовой эффект) прямо пропорциональна среднему значению тока [см. (10.9)]. При наличии автоколебаний средний ток периодически пульсирует в такт с колебаниями напряжения на сетке. Следовательно, в переменных  $(r, \varphi)$  коэффициент  $B$  должен был бы зависеть не только от  $r$  и  $\varphi$ , но и от времени  $t'$  (периодическая нестационарность при установившемся режиме). Допуская постоянство  $B$ , мы переходим к сильно упрощенной модели, но она все же позволяет составить известное представление о влиянии флуктуаций на поведение генератора и довольно близка к реальным условиям в тех случаях, когда колебания анодного тока лампы относительно невелики.

Конечно, изложенные качественные соображения нельзя считать *доказательством* того, что при воздействии только «густых» дробовых и тепловых флуктуаций случайный процесс  $(r, \varphi)$  в генераторе действительно является непрерывным марковским процессом и подчинен (при дополнительном допущении однородности и изотропности случайных толчков) уравнению Эйнштейна — Фоккера (27.12). Более того, в это уравнение входят, кроме коэффициента  $B$ , еще детерминированные функции  $R(r, \varphi)$  и  $\Phi(r, \varphi)$ , которые надо откуда-то взять. У нас пока нет регулярного способа нахождения этих функций, так что и в этом вопросе мы тоже пока вынуждены опереться на наводящие соображения.

В § 26 мы убедились, что в случае одномерного марковского процесса коэффициент  $A(x, t)$  в уравнении Эйнштейна — Фоккера совпадает с правой частью «динамического» уравнения (26.13) с точностью до аддитивной случайной функции, среднее значение которой равно нулю. В нашей двумерной задаче такие функции могли бы появиться в правых частях динамических уравнений (28.10), если бы при их выводе мы не отбросили в исходном уравнении (28.1) случайную «силу»  $F(t)$  (у которой среднее значение как раз равно нулю). Естественно допустить, что в качестве  $R$  и  $\Phi$  в (27.12) надо подставить правые части динамических уравнений (28.10), т. е. положить

$$R = \frac{r}{2} (p - r^2), \quad \Phi = 0. \quad (28.11)$$

Тогда уравнение (27.12) для вероятности перехода  $v(r, \varphi | \theta - \theta_0, r_0, \varphi_0)$  будет

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial Rv}{\partial r} + \frac{B}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (28.12)$$

Однородность процесса во времени ( $v$  зависит от  $\theta - \theta_0$ ) является следствием независимости  $R$  и  $B$  от  $\theta$ .

Все наши правдоподобные допущения, приведшие к уравнению (28.12), будут обоснованы в следующей главе, посвященной стохастическим дифференциальным уравнениям.

Физически очевидно, что процесс эргодичен — система обладает конечной «памятью», так что с ростом  $\theta - \theta_0$  вероятность перехода превращается в одномерную вероятность состояния  $\omega_1$ , не зависящую от начальных значений  $r_0$  и  $\varphi_0$ :

$$v(r, \varphi | \theta - \theta_0, r_0, \varphi_0) \rightarrow \omega_1(r, \varphi), \quad |\theta - \theta_0| \rightarrow \infty. \quad (28.13)$$

Разумеется, полное решение уравнения (28.12) при начальном условии

$$v(r, \varphi | 0, r_0, \varphi_0) = \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (28.14)$$

обнаружило бы справедливость (28.13) без каких-либо добавочных предположений, но мы сразу ограничимся более простой задачей — получением *стационарного* решения  $\omega_1(r, \varphi)$ . Оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial R\omega_1}{\partial r} - \frac{B}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega_1}{r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \varphi^2} \right] = 0.$$

Подчеркнем теперь одно обстоятельство, которое станет совершенно очевидным в последующем (§ 29): стационарное распределение возможно только при условии, что в качестве области изменения фазы  $\varphi$  берется *конечный* интервал  $(0, 2\pi)$ . Это вовсе не единственно возможная постановка задачи, но если она принята, то без дальнейшего ясно, что все значения  $\varphi$  в интервале  $(0, 2\pi)$  равноправны. Это значит, что распределение по  $\varphi$  равномерно ( $\omega_1$  не зависит от  $\varphi$ ), так что уравнение для  $\omega_1$  принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left( R\omega_1 - \frac{B}{2} r \frac{d}{dr} \left( \frac{\omega_1}{r} \right) \right) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что не обладает особенностью в точке  $r = 0$  только то решение, которое обращает поток  $\omega_1$ , т. е. выражение, стоящее в скобках, в нуль. Интегрируя вторично, находим

$$\omega_1 = Cr \exp \left\{ \frac{2}{B} \int_0^r R dr \right\},$$

причем  $C$  определяется из условия нормировки

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \omega_1 dr = 2\pi C \int_0^{\infty} \exp \left\{ \frac{2}{B} \int_0^r R dr \right\} r dr = 1.$$

Подставив в эти выражения  $R$  из (28.10) и вычислив интегралы, получаем искомое стационарное распределение:

$$\omega_1(r, \varphi) dr d\varphi = \frac{e^{-(p-r^2)^2/4B}}{\pi \sqrt{\pi B} [1 + \operatorname{erf}(p/2\sqrt{B})]} r dr d\varphi, \quad (28.15)$$

где

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

На рис. 20 изображена поверхность  $\omega_1(r, \varphi)$  при  $p > 0$  (возбужденный генератор), когда эта поверхность имеет вид кратера. Наивероятнейшее значение  $r$  есть

$$r_m = \sqrt{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + B}},$$

т. е.

$$r_m \approx \sqrt{p} \left( 1 + \frac{B}{2p^2} \right) \quad \text{при } p \gg 2\sqrt{B},$$

$$r_m \approx \sqrt{\frac{B}{|p|}} \quad \text{при } p \ll -2\sqrt{B}.$$

В последнем случае, соответствующем достаточному удалению от порога самовозбуждения в сторону отрицательных  $p$ , можно пренебречь в показателе (28.15) четвертой степенью  $r$  и воспользоваться асимптотическим разложением

$$\operatorname{erf}(-x) = -1 + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}|x|} - \dots$$

Мы получаем тогда

$$\omega_1(r, \varphi) dr d\varphi = \frac{|p|}{B} e^{-r^2|p|/2B} r dr \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (28.16)$$

т. е. для амплитуды  $r$ , как этого и следовало ожидать в случае линейного диссипативного контура, имеет место распределение Релея (24.10), причем  $2\sigma^2 = \overline{r^2} = 2B/|p|$ .

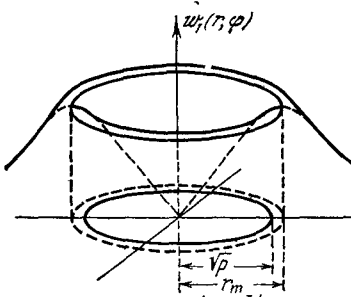


Рис. 20.

Напротив, если генератор достаточно сильно возбужден ( $p \gg 2\sqrt{B}$ ), то «вал», окружающий «кратер», имеет заметную высоту лишь над кольцом, содержащим предельный цикл. Полагая  $r = \sqrt{p} + \rho$ , ограничиваясь квадратом  $\rho$  в показателе (28.15) и пользуясь тем, что теперь

$$\operatorname{erf}(p/2\sqrt{B}) \approx 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} \omega_1(\rho, \varphi) d\rho d\varphi &= \\ &= \sqrt{\frac{p}{\pi B}} e^{-\rho^2 p/B} d\rho \frac{d\varphi}{2\pi}. \end{aligned} \quad (28.17)$$

Таким образом, радиальное отклонение  $\rho$  от предельного цикла распределено в этом случае нормально с дисперсией  $\sigma^2 = \rho^2 = B/2p$ .

На рис. 21 показан ход  $\omega_1$  в функции от  $r$  для трех значений  $p$ , в том числе на границе самовозбуждения  $p = 0$ . Разумеется, при всех значениях  $p$  увеличение интенсивности случайных толчков (рост  $B$ ) ведет к расплыванию максимума  $\omega_1$ .

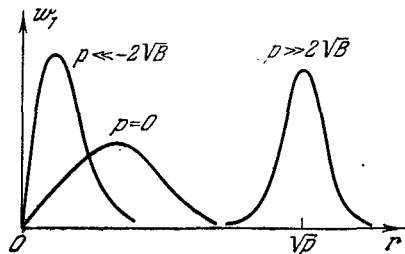


Рис. 21.

### § 29. Флуктуации при больших амплитудах автоколебаний

Рассмотрим подробнее случай больших положительных значений  $p$ . Условие  $p \gg 2\sqrt{B}$  означает, очевидно, что радиус предельного цикла  $\sqrt{p}$  велик по сравнению со стандартом флуктуаций амплитуды:

$$\sqrt{p} \gg \sqrt{B/2p} = \sqrt{\rho^2}.$$

Это позволяет линеаризовать динамические уравнения (28.10) относительно  $\rho = r - \sqrt{p}$ . Они принимают вид

$$\rho' = -p\rho, \quad \varphi' = 0, \quad (29.1)$$

т. е. отклонение изображающей точки от предельного цикла ведет себя так, как если бы эта точка была привязана к циклу пружиной и двигалась в среде с вязким трением. Инкремент  $p$  играет роль отношения коэффициента упругости пружины к коэффициенту вязкого трения и характеризует «прочность» предельного цикла — скорость возвращения изображающей точки на цикл после начального отклонения от него.

Соответственно (29.1) упрощается и уравнение Эйнштейна — Фоккера (28.12), в котором надо положить  $\partial/\partial r = \partial/\partial \rho$ ,  $r = \sqrt{p}$

и  $R = -\rho r$ :

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{B}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right). \quad (29.2)$$

Упрощение настолько значительно, что теперь можно не ограничиваться отысканием стационарного распределения, а получить решение (29.2) при произвольных начальных условиях  $\rho = \rho_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\theta = \theta_0$  (конечно, надо придерживаться при этом условия  $\rho_0 \ll \sqrt{p}$ ). Для вероятности перехода  $v(\rho, \varphi | \theta - \theta_0, \rho_0, \varphi_0)$  указанные начальные условия означают, что

$$v(\rho, \varphi | \theta_0, \rho_0, \varphi_0) = \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (29.3)$$

Если вновь предположить, что возможные значения  $\varphi$  лежат в интервале  $(0, 2\pi)$ , т. е. искать решение (29.2), периодическое по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ , то обычная процедура разделения переменных приводит к следующему результату:

$$v(\rho, \varphi | \theta - \theta_0, \rho_0, \varphi_0) = v_\rho(\rho | \theta - \theta_0, \rho_0) v_\varphi(\varphi | \theta - \theta_0, \varphi_0), \quad (29.4)$$

т. е. в любой момент времени  $\rho$  и  $\varphi$  независимы, причем флуктуации амплитуды  $\rho$  распределены нормально:

$$v_\rho(\rho | \theta - \theta_0, \rho_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho - \bar{\rho})^2/2\sigma^2}, \quad (29.5)$$

со средним значением и дисперсией, равными соответственно

$$\bar{\rho} = \rho_0 e^{-p(\theta - \theta_0)}, \quad \sigma^2 = \frac{B}{2\rho} [1 - e^{-2p(\theta - \theta_0)}], \quad (29.6)$$

а распределение фазы  $\varphi$  есть

$$v_\varphi(\varphi | \theta - \theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 D (\theta - \theta_0)} \cos n(\varphi - \varphi_0) \right\}, \quad (29.7)$$

где  $D = B/2\rho$ .

В начальный момент  $\theta = \theta_0$  имеем  $\bar{\rho} = \rho_0$ ,  $\sigma^2 = 0$ , т. е. распределение  $\rho$  превращается в  $\delta(\rho - \rho_0)$ , а распределение  $\varphi$  при  $\theta = \theta_0$  дает  $\delta(\varphi - \varphi_0)$ , поскольку  $1 + 2 \sum_1^{\infty} \cos n(\varphi - \varphi_0)$  есть разложение Фурье для периодически-повторяющейся функции  $2\pi\delta(\varphi - \varphi_0)$ . Как для амплитуды, так и для фазы имеет место эргодичность: при  $\theta \rightarrow \infty$  устанавливаются не зависящие от начальных условий стационарные распределения, а именно — нормальное распределение для  $\rho$  с  $\bar{\rho} = 0$  и дисперсией  $\sigma^2 = B/2\rho$  и равномерное в интервале  $(0, 2\pi)$  распределение для  $\varphi$ , что мы и получили ранее [см. (28.17)].

На рис. 22 показано, как устанавливается распределение амплитуды: среднее значение  $\bar{\rho}$  затухает по такому же экспоненциальному закону, по какому изображающая точка приближалась бы к предельному циклу в чисто динамической задаче. Наличие случайных толчков ведет вместе с тем к нарастанию дисперсии  $(\rho - \bar{\rho})^2$  вплоть до ее установившегося значения. Что

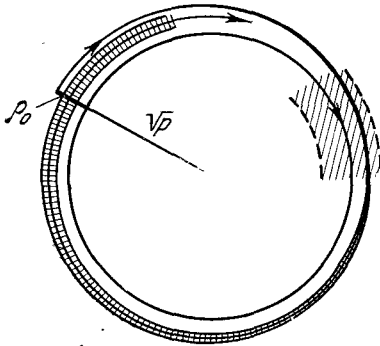


Рис. 22.

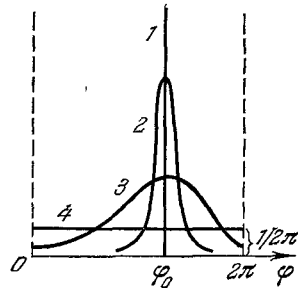


Рис. 23.

касается распределения фазы, то оно меняется так, как изображено на рис. 23: ансамбль идентичных генераторов, запущенных в момент  $\theta = \theta_0$  с одинаковой фазой  $\varphi_0$ , диффузионно растекается по предельному циклу, и спустя достаточно долгое время экземпляры из этого ансамбля населяют весь цикл равномерно.

Заметим теперь следующее. Выбор интервала  $(0, 2\pi)$  для  $\varphi$  означает применительно к отдельному генератору, что из полного набега его фазы мы сбрасываем всякое целое число полных циклов. Но если речь идет об использовании автогенератора в качестве часов, то отнюдь не безразлично, произошел ли уход фазы на угол  $\alpha$ , или на  $\alpha + 2\pi$ ,  $\alpha + 4\pi$  и т. д. Другими словами, нас здесь интересует именно *полный* набег фазы, так что для ее возможных значений надо брать интервал от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В этом случае решение уравнения (29.2) будет по-прежнему иметь вид (29.4); для флуктуаций амплитуды останутся в силе формулы (29.5) и (29.6), но вероятность перехода для фазы  $v_\varphi(\varphi | \theta - \theta_0, \varphi_0)$  не будет периодична по  $\varphi$  и при начальном условии  $\delta(\varphi - \varphi_0)$  выразится, как нетрудно убедиться, формулой  $(D = B/2p)$

$$v_\varphi(\varphi | \theta - \theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(\theta - \theta_0)}} \exp \left\{ -\frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{4D(\theta - \theta_0)} \right\}. \quad (29.8)$$

Мы возвращаемся, таким образом, к случаю изотропных блужданий брауновской частицы по бесконечной прямой (см. §§ 4,



7, 24) и, соответственно, уже не имеем эргодичности: не зависящее от  $\varphi_0$  стационарное распределение не достигается ни при каком  $\theta$ , и средний квадрат флуктуационного набега фазы за промежутков времени  $\theta - \theta_0$  неограниченно растет пропорционально  $\theta - \theta_0$ :

$$\overline{(\varphi - \varphi_0)^2} = 2D(\theta - \theta_0). \quad (29.9)$$

Связь обеих постановок задачи очень проста (рис. 24): если неограниченно растекающееся по бесконечной оси  $\varphi$  распределение (29.8) «свернуть» путем переноса всех интервалов  $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$  в полосу  $(0, 2\pi)$ , то в этой полосе получится распределение (29.7), т. е. мы вернемся к картине установления, показанной на рис. 23. Очевидно, до тех пор, пока расплывание распределения (29.7) еще невелико, т. е.  $\overline{(\varphi - \varphi_0)^2} \ll 2\pi$ , законы распределения (29.7) и (29.8) прак-

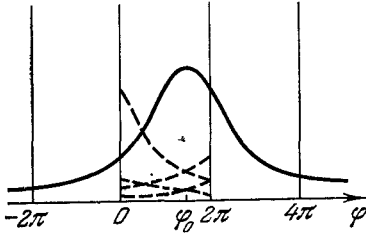


Рис. 24.

тически совпадают в интервале  $(0, 2\pi)$ . В этом нетрудно убедиться и прямым расчетом, заменив сумму в (29.7) интегралом.

Как следствие предположения об однородности случайных толчков рассматриваемый марковский процесс однороден по времени: вероятности перехода (29.5), (29.7) и (29.8) зависят лишь от разности между конечным ( $\theta$ ) и начальным ( $\theta_0$ ) моментами. Возьмем в качестве начального момента времени  $\theta = \mu t'$ , а в качестве конечного — момент  $\theta + \tau = \mu(t' + \tau')$ . Вероятности перехода для  $\rho$  и  $\varphi$  будут зависеть только от  $\tau = \mu\tau'$ . Обозначив значения  $\rho$  и  $\varphi$  в момент  $\theta + \tau$  через  $\rho_\tau$  и  $\varphi_\tau$ , можно переписать (29.5) и (29.7) в виде

$$\begin{aligned} v_\rho(\rho_\tau | \tau, \rho) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\tau} e^{-(\rho_\tau - \bar{\rho}_\tau)^2 / 2\sigma_\tau^2}, \\ \bar{\rho}_\tau &= \rho e^{-p\tau}, \quad \sigma_\tau^2 = \frac{B}{2p} (1 - e^{-2p\tau}), \\ v_\varphi(\varphi_\tau | \tau, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 D\tau} \cos n(\varphi_\tau - \varphi) \right\}. \end{aligned} \quad (29.10)$$

При  $\tau \rightarrow \infty$  отсюда получаются стационарные одномерные распределения:

$$\omega_{1\rho}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\infty} e^{-\rho^2 / 2\sigma_\infty^2}, \quad \sigma_\infty^2 = \frac{B}{2p} = 0, \quad (29.11)$$

$$\omega_{1\varphi}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}. \quad (29.12)$$

Как мы помним (§ 15), вероятность перехода и одномерная вероятность — это все, что необходимо для того, чтобы написать любое  $n$ -мерное распределение марковского процесса. В частности, двумерные распределения  $\rho$  и  $\varphi$  будут

$$\omega_{2\rho}(\rho_\tau, \tau, \rho) = \omega_{1\rho}(\rho) v_\rho(\rho_\tau | \tau, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_\infty\sigma_\tau} \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2\sigma_\infty^2} - \frac{(\rho_\tau - \bar{\rho}_\tau)^2}{2\sigma_\tau^2} \right\}, \quad (29.13)$$

$$\omega_{2\varphi}(\varphi_\tau, \tau, \varphi) = \omega_{1\varphi}(\varphi) v_\varphi(\varphi_\tau | \tau, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 D\tau} \cos n(\varphi_\tau - \varphi) \right\}. \quad (29.14)$$

Поскольку  $\omega_{1\rho}(\rho)$  и  $\omega_{1\varphi}(\varphi)$  не зависят от  $\theta$ , а вероятности перехода однородны по  $\theta$ , рассматриваемый марковский процесс *стационарен*.

Располагая двумерными распределениями (29.13) и (29.14), можно вычислить средние значения каких-либо функций от  $\rho$ ,  $\rho_\tau$  и от  $\varphi$ ,  $\varphi_\tau$ . Мы воспользуемся этим для расчета функции корреляции исследуемого автоколебательного процесса

$$x(t') = r(\theta) \cos [t' + \varphi(\theta)] = (\sqrt{p} + \rho) \cos (t' + \varphi),$$

которая понадобится в дальнейшем при изучении спектра автогенератора. Интересующая нас функция корреляции есть

$$\psi_x = \overline{xx_{\tau'}} - \bar{x}\bar{x}_{\tau'},$$

где  $x \equiv x(t')$  и  $x_{\tau'} \equiv x(t' + \tau') = (\sqrt{p} + \rho_\tau) \cos (t' + \tau' + \varphi_\tau)$ .

Поскольку  $\rho$  и  $\varphi$  в любой момент времени независимы, а одномерное распределение фазы (29.12) равномерно в интервале  $(0, 2\pi)$ , имеем  $\overline{\cos \varphi} = \overline{\sin \varphi} = 0$ . Следовательно, для всякого  $t'$

$$\bar{x} = (\sqrt{p} + \bar{\rho}) \overline{\cos (t' + \varphi)} = 0.$$

Учитывая, далее, что, согласно (29.11),  $\bar{\rho} = \bar{\rho}_\tau = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \psi_x &= \overline{xx_{\tau'}} = \overline{(\sqrt{p} + \rho)(\sqrt{p} + \rho_\tau) \cos (t' + \varphi) \cos (t' + \tau' + \varphi_\tau)} = \\ &= \frac{1}{2} (p + \overline{\rho\rho_\tau}) \{ \overline{\cos (\tau' + \varphi_\tau - \varphi)} + \overline{\cos (2t' + \tau' + \varphi_\tau + \varphi)} \}. \end{aligned} \quad (29.15)$$

Таким образом, для нахождения  $\psi_x$  надо вычислить следующие средние:

$$\overline{\rho\rho_\tau}, \quad \overline{\frac{\sin}{\cos}} \left\{ (\varphi_\tau - \varphi) \right\}, \quad \overline{\frac{\sin}{\cos}} \left\{ (\varphi_\tau + \varphi) \right\}.$$

В соответствии с (29.13) имеем

$$\begin{aligned}\bar{\rho\rho_\tau} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\rho_\tau w_{2\rho}(\rho_\tau, \tau, \rho) d\rho d\rho_\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho w_{1\rho}(\rho) d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\tau v_\rho(\rho_\tau | \tau, \rho) d\rho_\tau.\end{aligned}$$

Внутренний интеграл — это условное среднее значение  $\bar{\rho}_\tau$ , равное  $\rho e^{-\rho\tau}$  [см. (29.10)]. Следовательно [см. (29.11)],

$$\bar{\rho\rho_\tau} = e^{-\rho\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^2 w_{1\rho}(\rho) d\rho = \bar{\rho^2} e^{-\rho\tau} = \sigma_\infty^2 e^{-\rho\tau} = \frac{B}{2\rho} e^{-\rho\tau}.$$

Учитывая, что  $\overline{\rho\rho_{-\tau}} = \bar{\rho\rho_\tau}$ , можно записать этот результат при произвольном знаке  $\tau$  в виде

$$\overline{\rho\rho_\tau} = \frac{B}{2\rho} e^{-\rho|\tau|}. \quad (29.16)$$

Из того, что  $w_{2\varphi}(\varphi_\tau, \tau, \varphi)$  — четная функция  $\varphi_\tau - \varphi$  [см. (29.14)], тотчас же следует, что

$$\overline{\cos(\varphi_\tau + \varphi)} = \overline{\sin(\varphi_\tau + \varphi)} = \overline{\sin(\varphi_\tau - \varphi)} = 0. \quad (29.17)$$

Остается вычислить  $\overline{\cos(\varphi_\tau - \varphi)}$ , т. е. интеграл [см. (29.14)]

$$\begin{aligned}\overline{\cos(\varphi_\tau - \varphi)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi_\tau - \varphi) w_{2\varphi}(\varphi_\tau, \tau, \varphi) d\varphi d\varphi_\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi_\tau - \varphi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 D\tau} \cos n(\varphi_\tau - \varphi) \right\} d\varphi d\varphi_\tau.\end{aligned}$$

Очевидно, отличный от нуля результат дает только член суммы с  $n = 1$ :

$$\overline{\cos(\varphi_\tau - \varphi)} = \frac{e^{-D\tau}}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi_\tau - \varphi) d\varphi d\varphi_\tau = e^{-D\tau},$$

или при произвольном знаке  $\tau$ :

$$\overline{\cos(\varphi_\tau - \varphi)} = e^{-D|\tau|}. \quad (29.18)$$

Внося (29.16) — (29.18) в (29.15), получаем

$$\psi_x(\tau') = \frac{1}{2} (\rho + D e^{-\rho|\tau'|}) e^{-D|\tau'|} \cos \tau' \quad (\tau = \mu\tau', D = \frac{B}{2\rho}). \quad (29.19)$$

Три сомножителя, входящие в  $\psi_x(\tau')$ , меняются в функции от  $\tau'$  с существенно различными скоростями. Наиболее быстро — с частотой автоколебаний — осциллирует  $\cos \tau'$ . Гораздо медленнее меняется экспонента

$$e^{-\mu\rho|\tau'|} = e^{-\mu\rho|\tau'|},$$

вошедшая через функцию корреляции амплитудных флуктуаций (29.16). Последняя уменьшается в  $e$  раз за время  $1/\mu\rho$ , причем в обычных условиях безразмерный инкремент  $\mu\rho$  — величина порядка  $10^{-2}$ — $10^{-3}$ . Еще медленнее убывает экспонента

$$e^{-D|\tau'|} = e^{-\mu D|\tau'|},$$

где  $2\mu D$  — коэффициент диффузии фазы:

$$\overline{(\varphi_\tau - \varphi)^2} = 2D\tau = 2\mu D\tau'. \quad (29.20)$$

Для диффузии, обусловленной естественными флуктуациями, величина  $2\mu D$  имеет порядок  $10^{-10}$ — $10^{-13}$ . Это значит, что средний квадратичный уход фазы примерно на  $\pi$  занимает по безразмерному времени промежуток

$$\tau' \approx \frac{\pi^2}{2\mu D},$$

а по обычному времени

$$\Delta t = \frac{\tau'}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{4\mu D f_0} \approx (10^{10} - 10^{13}) \frac{1}{f_0}.$$

При  $f_0 = 10$  Мгц это составляет  $\Delta t' \approx 10^3$ — $10^6$  сек.

Хорошо известно, однако, что расхождение на  $\pi$  между фазами двух специально не стабилизированных генераторов происходит на таких частотах несравненно быстрее — за немногие секунды. Это связано с наличием *технических* уходов фазы (§ 28). Казалось бы, технические уходы должны полностью маскировать естественную диффузию фазы, но подобное заключение было бы слишком поспешным, так как технические уходы фундаментально отличаются от естественных своей гораздо более длительной корреляцией. Мы вернемся к этому вопросу в дальнейшем (§ 53).

Заметим в заключение этого параграфа, что параметр  $B$ , присутствующий во всех предыдущих формулах и определяющий, в частности, коэффициент диффузии фазы, вошел в эти формулы из исходного уравнения Эйнштейна — Фоккера (28.12). Мы не имеем пока никакой связи  $B$  с величинами, описывающими конкретный механизм случайных воздействий на генератор (дробовой ток, тепловой шум), или, говоря более определенно, со статистическими характеристиками случайной силы (28.2). Это еще один пробел развитой здесь чисто *вероятностной* схемы, который нам тоже предстоит восполнить в следующей главе.

### § 30. Вращательное брауновское движение. Случайная рефракция луча

Пусть сферическая частица взвешена в жидкости или газе, и пусть с частицей жестко связана некоторая ось, направление которой, характеризующее ориентацию частицы, определяется полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$ . Отвлечемся от поступательного движения частицы и от ее вращения вокруг оси. Тогда под действием ударов молекул или — что при данной постановке задачи то же самое — под действием флуктуаций тангенциальных (вязких) напряжений частица (ее ось) будет случайным образом поворачиваться, совершая так называемое вращательное брауновское движение<sup>1)</sup>. Это означает, что точка  $(\theta, \varphi)$  совершает поступательное брауновское движение на поверхности единичной сферы.

Очевидно, случайный вращающий момент будет изотропен (все его направления равноправны) и однороден (интенсивность толчков не зависит от ориентации частицы). Уравнение Эйнштейна — Фоккера, отвечающее этим условиям и определяющее скалярную плотность вероятности перехода  $\tilde{v}(\theta, \varphi | t - t_0, \theta_0, \varphi_0)$ , т. е. такую плотность, что  $dP = \tilde{v} \sin \theta d\theta d\varphi$ , уже было написано [см. (27.17)]. Оно упрощается, если полярный угол  $\theta$  отсчитывается от начального направления оси частицы ( $\theta_0 = 0$ ). Вследствие симметрии распределение по азимуту  $\varphi$  становится тогда равномерным, а уравнение для вероятности перехода  $\tilde{v}(\theta | t - t_0, 0)$  принимает вид (27.17):

$$\sin \theta \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right), \quad \tilde{v}(\theta | 0, 0) = \frac{\delta(\theta)}{2\pi \sin \theta}. \quad (30.1)$$

Решение уравнения (30.1) с этим начальным условием есть

$$v(\theta | t - t_0, 0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \theta) \exp \left\{ -\frac{n(n+1)}{2} B(t-t_0) \right\}, \quad (30.2)$$

где  $P_n(\cos \theta)$  — полиномы Лежандра. При  $t \rightarrow \infty$  достигается стационарное распределение: из всей суммы остается только член с  $n = 0$ , так что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}(\theta | t - t_0, 0) = \tilde{w}_1(\theta) = \frac{1}{4\pi}. \quad (30.3)$$

Если нас интересует условное среднее значение какой-либо функции  $f(\theta)$ , то его можно получить при помощи (30.2), разложив  $f(\theta)$  по полиномам Лежандра и воспользовавшись их

<sup>1)</sup> См. [17], а также [7], § 57.

взаимной ортогональностью:

$$\int_0^\pi P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}.$$

В некоторых случаях удобнее, не решая уравнения (30.1), получить с его помощью дифференциальное уравнение для самого среднего  $\overline{f(\theta)}$ . Пусть, например,  $f(\theta) = P_1(\theta) = \cos \theta$ . Умножим (30.1) на  $\cos \theta$  и проинтегрируем по  $\theta$  от 0 до  $\pi$ . Учитывая, что

$$\overline{\cos \theta} = \int_0^\pi \cos \theta \cdot \bar{\nu} \sin \theta d\theta,$$

получаем

$$\frac{d \overline{\cos \theta}}{dt} = -B \overline{\cos \theta}.$$

Решение этого уравнения с начальным условием  $\overline{\cos \theta} = 1$  при  $t = 0$  есть

$$\overline{\cos \theta} = e^{-Bt}. \quad (30.4)$$

При  $t \rightarrow \infty$  это дает  $\overline{\cos \theta} = 0$ , т. е., в соответствии с (30.3), все ориентации становятся равновероятными. Для малых  $t$  имеем

$$\overline{\cos \theta} = 1 - \overline{\theta^2}/2 = 1 - Bt,$$

т. е.

$$\overline{\theta^2} = 2Bt, \quad (30.5)$$

как и для двумерного брауновского движения на плоскости [см. (24.11)].

Если помимо случайных вращающих моментов имеется еще некоторый детерминированный момент, ориентирующий ось частицы в плоскостях  $\varphi = \text{const}$ , то стационарное распределение уже не будет равномерным. Пусть, например, частица обладает дипольным моментом  $p$  и находится в электрическом поле  $E$ . Вращающий момент будет

$$M(\theta) = -pE \sin \theta = -\partial U / \partial \theta,$$

где  $U = -pE \cos \theta$  — энергия во внешнем поле. Систематическая угловая скорость, если пренебречь инерцией частицы, равна  $\dot{\theta} = M/h$ , где  $h = 8\pi\eta a^3$  — вращательный коэффициент вязкого трения. Таким образом, считая по-прежнему, что не зависящие от  $V$  слагаемые в коэффициентах  $A_i$  уравнения Эйнштейна — Фоккера совпадают с правыми частями динамических уравнений для соответствующих скоростей, мы получим теперь

для  $A_\theta$  вместо (27.14) выражение

$$A_\theta = \frac{M}{h} + \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \theta.$$

Уравнение (27.17) заменится при этом на

$$\sin \theta \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{M}{h} \sin \theta \cdot \bar{v} \right) + \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right),$$

а уравнение для стационарной вероятности  $\tilde{w}_1(\theta)$  будет

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \left( \frac{B}{2} \frac{d\tilde{w}_1}{d\theta} - \frac{M}{h} \tilde{w}_1 \right) \right] = 0.$$

После однократного интегрирования и учета того, что постоянная интегрирования равна нулю, получим

$$\frac{B}{2} \frac{d\tilde{w}_1}{d\theta} - \frac{M}{h} \tilde{w}_1 = \frac{B}{2} \frac{d\tilde{w}_1}{d\theta} + \frac{1}{h} \frac{dU}{d\theta} \tilde{w}_1 = 0.$$

Отсюда

$$\tilde{w}_1(\theta) = C e^{-2U/hB},$$

причем  $C$  определяется из условия нормировки

$$2\pi \int_0^\pi \tilde{w}_1(\theta) \sin \theta d\theta = 1.$$

Но полученный результат должен совпадать с больцмановским распределением, а значит,  $hB/2 = kT$ , т. е. (см. § 26)

$$B = 2kT/h.$$

Казалось бы, вращательное брауновское движение не имеет никакого отношения к вопросам, интересующим радиофизику. Но предыдущие задачи уже не раз подтверждали, что одна и та же вероятностная схема может охватывать очень разнородные явления. В данном случае мы снова сталкиваемся с примером такого же рода. При определенных ограничениях аналогичной вращательному брауновскому движению оказывается задача о распространении луча в среде с плавными случайными неоднородностями. Говоря о плавности или медленности изменений свойств среды, мы имеем в виду применимость геометрической оптики (или акустики). Для достаточно коротких радиоволн соответствующие условия могут в известной степени выполняться и в тропосфере, и в ионосфере, и в солнечной короне, так что лучевая трактовка случайной рефракции оказывается допустимой. Самое же явление флуктуаций направления распространения луча представляет для радиофизики непосредственный интерес.

Свойства среды могут быть охарактеризованы показателем преломления  $n(x, y, z)$  или же фазовой скоростью волны  $v(x, y, z)$ , изменение которых от точки к точке и описывает неоднородности среды. Утверждение, что эти неоднородности случайны, означает, что  $n$  или  $v$  — случайные функции точки, т. е. не одного параметра  $t$ , как это было всюду ранее, а трех параметров  $x, y, z$ . Это пример так называемого *случайного* поля. В части II этой книги случайные поля будут рассмотрены более подробно, причем не только в связи с задачей о флуктуациях рефракции.

Подобно тому как одной из основных характеристик случайного процесса  $\xi(t)$  является его смешанный момент  $\overline{\xi(t)\xi(t')}$ , так и для случайного поля  $\xi(x, y, z)$ , или, короче,  $\xi(\mathbf{r})$ , момент  $\overline{\xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}')}$  чрезвычайно важен, так как он дает меру статистической связи между значениями  $\xi(\mathbf{r})$  в двух точках пространства. Предполагая, что  $\overline{\xi} = 0$ , мы будем далее отождествлять этот смешанный момент с функцией корреляции  $\psi_{\xi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Поле называется *однородным*, если функция корреляции зависит только от разностей координат этих точек  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , т. е. перенос начала отсчета не влияет на  $\psi_{\xi}(\mathbf{R}) = \overline{\xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}')}$ . Если же, сверх того,  $\psi_{\xi}$  зависит только от расстояния  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , но не от направления  $\mathbf{R}$ , то поле называется статистически *изотропным*.

Мы предположим, что рассматриваемое случайное поле  $v(\mathbf{r})$  однородно и изотропно, или, иначе говоря, что в среде нет статистически выделенных положений и направлений. Это допущение играет по отношению к случайным поворотам луча при его преломлении в неоднородностях среды такую же роль, как и гипотеза об однородности и изотропности случайных толчков при брауновском движении частицы.

Пространственная функция корреляции однородного и изотропного поля  $\psi_{\xi}(R)$  зависит лишь от одного аргумента, как это имеет место и для временной функции корреляции  $\psi_{\xi}(\tau)$  стационарного случайного процесса. Во многих задачах можно указать для  $\psi_{\xi}(\tau)$  некоторый характерный временной интервал  $\theta$ , в пределах которого корреляция заметна, а при сдвигах  $\tau > \theta$  достаточно быстро убывает. В таких случаях  $\theta$  называют «временем корреляции». В пространственных задачах аналогичную роль играет «радиус корреляции»  $a$ ; при увеличении  $R$  сверх  $a$  функция корреляции  $\psi_{\xi}(R)$  стремится к нулю. Очевидно, в интересующей нас задаче, если понимать под  $\xi$  случайный показатель преломления среды  $n$  (или случайную фазовую скорость волны  $v$ ), то  $a$  характеризует средний размер неоднородностей среды.



Применимость геометрического приближения предполагает, что выполнено не только условие  $a \gg \lambda$  ( $\lambda$  — длина волны), но и условие малости дифракционных эффектов  $z\lambda \ll a^2$ , где  $z$  — толщина слоя, пройденного лучом в неоднородной среде. Последнее условие означает, что даже при наиболее удаленных от точки наблюдения неоднородностях размер зоны Френеля  $\sim \sqrt{z\lambda}$  гораздо меньше размера неоднородностей  $a$ .

По отношению к форме луча  $a$  характеризует протяженность тех его участков, на которых луч испытывает «однократный» поворот. Вследствие этих случайных извилин, обусловленных отдельными неоднородностями, и набегают интересующая нас случайная интегральная рефракция — угловое отклонение  $\theta$  направления луча от оси  $z$ , т. е. от его начального направления  $\theta = 0$ , при входе в неоднородную среду.

Задача о рефракции луча на случайных неоднородностях была тщательно проанализирована в работе [18], в которой было показано, что угол  $\theta$  можно рассматривать как функцию марковского типа при следующих условиях.

1. На всем пути луча должно быть  $\theta \ll \pi/2$  (так называемое *маломуговое приближение*)<sup>1)</sup>, что позволяет не различать в первом приближении толщину  $z$  пройденного слоя среды и полную длину луча  $l$  в этом слое. Иначе это условие выражается требованием, чтобы средний квадрат поперечного смещения луча  $\rho$  от оси  $z$  был мал по сравнению с  $z^2$ :

$$\overline{\rho^2} \ll z^2. \quad (30.6)$$

2. На своем пути в слое толщины  $z$  луч должен испытать очень много «однократных» поворотов, т. е. должен встретить очень много неоднородностей:

$$z \gg a.$$

Неравенство должно быть настолько сильным, чтобы можно было разбить полную толщину  $z$  на отрезки  $\Delta z \ll z$ , причем/уже на каждом таком отрезке луч встречает очень много неоднородностей ( $\Delta z \gg a$ ), т. е. испытывает много взаимно некоррелированных «толчков» из-за случайных градиентов показателя преломления. Вместе с тем средний квадрат результирующего отклонения луча  $(\Delta\theta)^2$  на отрезке  $\Delta z$  еще мал — по порядку величины не ниже  $\Delta z$ . Это совершенно аналогично условиям марковости при блужданиях брауновской частицы: за элемент времени  $\Delta t$  частица испытывает очень много независимых толчков, но средний квадрат смещения  $(\Delta s)^2$  имеет порядок малости не

<sup>1)</sup> Необходимость этого условия не была замечена в первых работах по случайной рефракции.

ниже, чем  $\Delta t$ . В этом макроскопическом смысле промежуток  $\Delta t$  бесконечно мал.

При этих условиях<sup>1)</sup> существует вероятность перехода  $\bar{v}(\theta|z, 0)$ , удовлетворяющая тому же уравнению (30.1), что и вероятность поворота на угол  $\theta$  оси сферической частицы, подвергающейся действию случайных однородных и изотропных вращающих моментов. То, что вместо времени  $t$  теперь независимой переменной является толщина  $z$  пройденного лучом слоя среды, конечно несущественно. Принципиальное отличие состоит в том, что для частицы угол поворота  $\theta$  не лимитирован, а для луча уравнение (30.1) пригодно лишь при малых  $\theta$ , когда вообще можно заменить  $\sin \theta$  на  $\theta$ . Соответственно вместо (30.4) мы должны считать, что  $\overline{\cos \theta} = 1$ , а для среднего квадрата  $\theta$  можно пользоваться лишь формулой (30.5), т. е.

$$\overline{\theta^2} = 2Bz \ll 1.$$

При этом же ограничении средний квадрат поперечного смещения луча равен

$$\overline{\rho^2} = \frac{2}{3} Bz^3 = \frac{1}{3} \overline{\theta^2} z^2,$$

откуда и вытекает (30.6):

### § 31. Скачкообразные марковские процессы. Уравнение Колмогорова — Феллера

Уравнение Эйнштейна — Фоккера выведено для марковских процессов  $\xi(t)$ , непрерывных не только в смысле непрерывности возможных значений  $x$  случайной функции  $\xi(t)$ , но и в смысле вероятностной непрерывности изменения  $\xi(t)$  во времени («почти все» реализации  $\xi(t)$  непрерывны по  $t$  в обычном смысле). При отказе от этого последнего ограничения, т. е. от условия (26.3), мы получаем возможность рассматривать марковские процессы, у которых изменения состояния происходят *мгновенными скачками*. Общим будет при этом *смешанный* случай, когда состояние может меняться и непрерывно, и скачками, но сначала мы остановимся на чисто скачкообразных переходах. Пример такого процесса уже был упомянут ранее, когда речь шла о невыполнении условия (26.3) при соударениях молекул газа: скорость молекулы меняется при соударении скачком, но множество возможных значений скорости после удара непрерывно. Кроме соударений микрочастиц (молекул, атомов, электронов и т. д.)

<sup>1)</sup> В § 36 мы еще вернемся к этим условиям и выясним, откуда они вытекают.

в эту схему укладываются и квантовые переходы, и некоторые импульсные процессы.

Рассмотрим первоначально следующий простой пример одномерного пуассоновского скачкообразного процесса  $\xi(t)$ . Пусть случайные моменты времени  $t_v$  образуют пуассоновский поток событий, так что вероятность наступления  $n$  событий в интервале  $(0, t)$  дается законом Пуассона

$$P(n) = \frac{(n_1 t)^n}{n!} e^{-n_1 t}, \quad (31.1)$$

где  $n_1 t$  — среднее число событий в  $(0, t)$ ,  $n_1$  — среднее их число в единицу времени.

В момент  $t_v$  процесс  $\xi(t)$  скачком попадает в интервал  $(x_v, x_v + dx_v)^1)$  с вероятностью  $\varphi(x_v | x_{v-1}) dx_v$ , зависящей от предшествующего значения  $x_{v-1}$ , принятого в момент  $t_{v-1}$ . Таким образом, если задано начальное значение  $\xi(0) = x_0$ , то вероятность цепочки  $n$  значений  $x_1, \dots, x_n$ , принятых в последовательные моменты скачков  $t_1, \dots, t_n$  ( $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ ), равна

$$\prod_{v=1}^n \varphi(x_v | x_{v-1}) dx_v.$$

Найдем для  $\xi(t)$  плотность условной вероятности  $v(t, x | 0, x_0)$ , которую можно записать и в виде  $v(x | t, x_0)$ , поскольку заранее очевидно, что в силу независимости  $n_1$  и  $\varphi(x_v | x_{v-1})$  от времени процесс однороден по  $t$ . Предположим сначала, что в интервале  $(0, t)$  произошло фиксированное число  $n$  скачков, и найдем плотность условной вероятности  $v(x | t, x_0, n)$  при этом дополнительном условии. Ясно, что

$$v(x | t, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} v(x | t, x_0, n).$$

Так как переход  $x_0 \rightarrow x_n = x$  осуществляется при любых промежуточных значениях  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , имеем

$$v(x | t, x_0, n) = P(n) p_n(x | x_0),$$

где

$$p_n(x | x_0) = \int \varphi(x | x_{n-1}) \dots \varphi(x_1 | x_0) dx_1 \dots dx_{n-1}. \quad (31.2)$$

Заметим, что, согласно (31.2),

$$p_n(x | x_0) = \int \varphi(x | x_{n-1}) p_{n-1}(x_{n-1} | x_0) dx_{n-1}. \quad (31.3)$$

<sup>1)</sup>  $v$  — номер скачка, множество же возможных значений  $x_v$  при всяком  $v$  непрерывно.

В частном случае  $n = 0$ , т. е. при отсутствии скачков в  $(0, t)$ , значение  $x$  должно быть равно  $x_0$ , так что  $p_0(x|x_0) = \delta(x - x_0)$  и соответственно

$$v(x|t, x_0, 0) = P(0) \delta(x - x_0).$$

Суммируя теперь  $v(x|t, x_0, n)$  по всем взаимно исключающим частным случаям  $n = 0, 1, 2, \dots$ , мы получаем плотность условной вероятности  $v(x|t, x_0)$ , уже не связанную с фиксированным  $n$ :

$$\begin{aligned} v(x|t, x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(n) p_n(x|x_0) = \\ &= P(0) \delta(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(n) p_n(x|x_0), \end{aligned} \quad (31.4)$$

или, после подстановки  $P(n)$  из (31.1),

$$v(x|t, x_0) = e^{-n_1 t} \left\{ \delta(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n_1 t)^n}{n!} p_n(x|x_0) \right\} \quad (31.5)$$

В случае очень короткого интервала времени, заменяя  $t$  на  $\Delta t$  и ограничиваясь членами не выше первого порядка относительно  $\Delta t$ , т. е. пренебрегая многократными скачками ( $n = 2, 3, \dots$ ), мы получаем отсюда для малых промежутков времени

$$v(x|\Delta t, x_0) \approx (1 - n_1 \Delta t) \delta(x - x_0) + n_1 \Delta t \varphi(x|x_0). \quad (31.6)$$

Легко убедиться, что плотность условной вероятности (31.5) удовлетворяет уравнению Смолуховского (см. задачу 17), т. е. является плотностью *вероятности перехода*, определяющей *марковский* процесс  $\xi(t)$ . Кроме того, нетрудно получить для  $v(x|t, x_0)$  интегро-дифференциальное уравнение, решение которого при начальном условии

$$v(x|0, x_0) = \delta(x - x_0) \quad (31.7)$$

дается выражением (31.5). Действительно, дифференцируя (31.5) по  $t$ , получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -n_1 v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n_1 t)^{n-1}}{(n-1)!} n_1 e^{-n_1 t} p_n(x|x_0),$$

откуда в силу (31.3) и (31.4) следует, что

$$\frac{\partial v(x|t, x_0)}{\partial t} = -n_1 \left[ v(x|t, x_0) - \int \varphi(x|y) v(y|t, x_0) dy \right]. \quad (31.8)$$

Уравнение (31.8) представляет собой очень частный случай уравнения Колмогорова — Феллера — интегро-дифференциаль-

ного уравнения, которому удовлетворяет вероятность перехода марковского случайного процесса с чисто разрывными изменениями состояния (скачками). Это общее уравнение по-прежнему выводится из фундаментального уравнения Смолуховского, но при обобщенном по сравнению с (31.6) выражении для вероятности перехода за малое время  $\Delta t$ . А именно, предполагается, что на интервале  $(t, t + \Delta t)$  процесс  $\xi(t)$  либо переходит (если скачок произошел) от значения  $x$  в момент  $t$  в интервал  $(z, z + dz)$  с условной вероятностью  $\varphi(z|t, x)dz$ , либо сохраняет значение  $x$  (если скачка не было), т. е. в этом последнем случае вероятность попадания в  $(z, z + dz)$  есть  $\delta(z - x)dz$ . В свою очередь пусть скачок в течение малого времени  $\Delta t$  наступает с вероятностью  $a(t, x)\Delta t$ . Следовательно, с точностью до первого порядка относительно  $\Delta t$

$$v(t + \Delta t, z|t, x) \approx [1 - a(t, x)\Delta t] \delta(z - x) + a(t, x)\Delta t \cdot \varphi(z|t, x). \quad (31.9)$$

В отличие от (31.6), временная плотность вероятности скачка  $a(t, x)$  равна здесь не постоянной величине  $n_1$ , а зависит и от начального момента  $t$ , и от значения  $x$  в этот момент. Плотность условной вероятности  $\varphi$  значений  $z$ , принимаемых в результате скачка, тоже зависит не только от предшествующего значения  $x$ , но и от времени  $t$ , так что процесс  $\xi(t)$  уже нестационарен.

В предположении (31.9) и при некоторых дополнительных требованиях (непрерывности  $a$  и  $\varphi$  как функций  $t$  и ограниченности  $a$  на любом конечном интервале  $t$ ) из уравнения Смолуховского вытекает следующее интегро-дифференциальное уравнение для плотности вероятности перехода [17]:

$$\frac{\partial v(t, x|t_0, x_0)}{\partial t} = -a(t, x)v(t, x|t_0, x_0) + \int a(t, y)\varphi(x|t, y)v(t, y|t_0, x_0)dy. \quad (31.10)$$

Это уравнение для  $v$  как функции  $t$  и  $x$  представляет собой аналог уравнения Эйнштейна — Фоккера (26.4) для марковских процессов с непрерывно меняющимся состоянием. В тех же предположениях и таким же путем получается и другое уравнение, аналогичное (26.7), т. е. уравнение для  $v(t, x|t_0, x_0)$  как функции  $t_0$  и  $x_0$ :

$$\frac{\partial v(t, x|t_0, x_0)}{\partial t_0} = a(t_0, x_0) \left[ v(t, x|t_0, x_0) - \int \varphi(y|t_0, x_0)v(t, x|t_0, y)dy \right]. \quad (31.11)$$

При начальном условии

$$v(t_0, x|t_0, x_0) = \delta(x - x_0) \quad (31.12)$$

оба уравнения имеют *единственное* решение, причем *одно и то же* для обоих.

В каком соотношении находится рассматриваемая схема скачкообразного изменения состояний при непрерывном их множестве с исследованным в § 23 случае *дискретных* возможных состояний, когда из-за самой этой дискретности состояние может меняться только скачками, так сказать «поневоле»?

При дискретных состояниях  $x_k$  плотности условных вероятностей  $v(t + \Delta t, z | t, x_i)$  и  $\varphi(z | t, x_i)$  можно записать через дельта-функции  $\delta(z - x_k)$ :

$$v(t + \Delta t, z | t, x_i) = \sum_k p(t + \Delta t, x_k | t, x_i) \delta(z - x_k),$$

$$\varphi(z | t, x_i) = \sum_k \pi(x_k | t, x_i) \delta(z - x_k),$$

где  $p$  и  $\pi$  — интегральные условные вероятности состояния  $x_k$  ( $p$  — вероятность перехода, не зависящая от того, произошел скачок или нет,  $\pi$  — вероятность при условии, что скачок имел место). Подстановка этих выражений в (31.9) дает

$$\sum_k p(t + \Delta t, x_k | t, x_i) \delta(z - x_k) \approx [1 - a(t, x_i) \Delta t] \delta(z - x_i) + a(t, x_i) \Delta t \sum_k \pi(x_k | t, x_i) \delta(z - x_k).$$

Интегрируя это равенство по  $z$  (по  $\pm\varepsilon$ -окрестности состояния  $x_k$ ) и учитывая при этом, что

$$\int_{x_k - \varepsilon}^{x_k + \varepsilon} \delta(z - x_i) dz = \delta_{ik},$$

находим следующее выражение для вероятности перехода за малое время  $\Delta t$ :

$$p(t + \Delta t, x_k | t, x_i) \approx [1 - a(t, x_i) \Delta t] \delta_{ik} + a(t, x_i) \Delta t \cdot \pi(x_k | t, x_i) = \delta_{ik} + a(t, x_i) [\pi(x_k | t, x_i) - \delta_{ik}] \Delta t.$$

Но это выражение имеет вид (23.2):

$$p(t + \Delta t, x_k | t, x_i) \approx \delta_{ik} + A_{ik}(t) \Delta t,$$

т. е. именно тот вид, в предположении которого выводятся уравнения Колмогорова (23.8) для марковских процессов с дискретными возможными состояниями. При этом

$$A_{ik}(t) = a(t, x_i) [\pi(x_k | t, x_i) - \delta_{ik}],$$

чем обеспечивается выполнение условия (23.7):

$$\sum_k A_{ik}(t) = 0.$$

Таким образом, уравнения Колмогорова — Феллера (31.10) и (31.11) для скачкообразных марковских процессов охватывают случаи как непрерывных, так и дискретных возможных состояний. Целесообразно поэтому записывать их для интегральных вероятностей перехода  $V(t, x|t_0, x_0)$ , пользуясь интегралом Стильбеса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, x|t_0, x_0)}{\partial t} = & - \int_{-\infty}^x a(t, y) d_y V(t, y|t_0, x_0) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, y) \pi(x|t, y) d_y V(t, y|t_0, x_0), \end{aligned} \quad (31.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, x|t_0, x_0)}{\partial t_0} = & a(t_0, x_0) \left[ V(t, x|t_0, x_0) - \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} V(t, x|t_0, y) d_y \pi(y|t_0, x_0) \right]. \end{aligned} \quad (31.14)$$

В таком виде эти уравнения и были получены в работе Феллера [19].

Уравнение Колмогорова — Феллера (31.10) можно записать в более лаконичной форме, а именно в виде классического *уравнения Больцмана*, основного уравнения кинетической теории газов. Введем плотность вероятностей скачка в момент времени  $t$  из состояния  $y$  в состояние  $x$ <sup>1)</sup>:

$$u(x|t, y) = a(t, y) \varphi(x|t, y). \quad (31.51)$$

Нетрудно установить справедливость этого равенства. Действительно,  $a(t, y)dt$  — вероятность скачка из  $y$  куда-нибудь [т. е. вероятность наличия скачка в  $(t, t + dt)$ ], а  $\varphi(x|t, y)dx$  — условная вероятность того, что *при наличии скачка* процесс перешел в  $(x, x + dx)$ . Произведение  $a$  и  $\varphi$  представляет собой условную плотность вероятностей  $u$ , как она определена выше. Интегрируя (31.15) по всем  $x$ , учитывая при этом, что  $\int \varphi(x|t, y) dx = 1$ , и переобозначая переменные ( $x \rightleftharpoons y$ ), получаем

$$\int u(y|t, x) dy = a(t, x). \quad (31.16)$$

<sup>1)</sup> Разумеется, это лишь краткий способ выразиться. Более точно надо говорить о  $u(x|t, y)dx dt$  как о вероятности попадания в результате скачка в течение времени  $(t, t + dt)$  из состояния  $y$  в интервал  $(x, x + dx)$ .

Если подставить (31.16) в первый член правой части (31.10), а (31.15) — во второй, то уравнение (31.10) примет вид

$$\frac{\partial v(t, x | t_0, x_0)}{\partial t} = -v(t, x | t_0, x_0) \int u(y | t, x) dy + \\ + \int v(t, y | t_0, x_0) u(x | t, y) dy. \quad (31.17)$$

Это и есть уравнение Больцмана (для одномерного процесса). Из него особенно отчетливо видно, что это, по существу, уравнение баланса: скорость изменения  $v$  (например, концентрации частиц в точке  $x$ ) равна разности двух обусловленных скачками ежесекундных потоков: из  $x$  в какие-либо другие состояния и из всех других состояний в  $x$ .

Как уже было сказано, наиболее общим является смешанный случай суперпозиции дискретного и непрерывного «спектров» возможных значений процесса  $\xi(t)$ , когда состояние может меняться как скачками, так и непрерывно. Интегро-дифференциальные уравнения Колмогорова — Феллера для этого общего случая таковы<sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial v(t, x | t_0, x_0)}{\partial t} = -\frac{\partial A(x, t)v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B(x, t)v}{\partial x^2} - a(t, x)v + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, y)v(t, y | t_0, x_0) \frac{\partial \pi(x | t, y)}{\partial x} dy, \quad (31.18)$$

$$\frac{\partial V(t, x | t_0, x_0)}{\partial t_0} = -A(x_0, t_0) \frac{\partial V}{\partial x_0} + \frac{B(x_0, t_0)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + \\ + a(t_0, x_0) \left[ V(t, x | t_0, x_0) - \int_{-\infty}^{+\infty} V(t, x | t_0, x_0) d_y \pi(y | t_0, x_0) \right], \quad (31.19)$$

где  $A(x, t)$  и  $B(x, t)$  — коэффициенты сноса и диффузии, определенные через *непрерывную часть*  $V$  так же, как это было

<sup>1)</sup> Колмогоров независимо от Феллера указал на существование класса марковских процессов со скачками и в работе [3] привел без вывода уравнения (31.13) и (31.18). Кстати сказать, он предлагал называть процессы без вероятностного последования «стохастически определенными», но этот термин не прижился и установилось название «марковские процессы». В работах [19, 20] Феллер дал анализ условий, при которых получаются интегро-дифференциальные уравнения, а также исследовал вопросы о существовании и единственности решения задачи с начальным условием (31.12).



сделано выше при выводе уравнения Эйнштейна — Фоккера [см. (26.1) и (26.2)]. Уравнение (31.19) вытекает из уравнения Смолуховского при уже указанных выше предположениях относительно  $A$ ,  $B$ ,  $a$  и  $\pi$ , а для вывода (31.18) достаточно допустить, сверх того, существование плотности  $\varphi(x|t, y) = \partial\pi(x|t, y)/\partial x$  и дифференцируемость  $a(t, y)$  и  $\pi(x|t, y)$  по  $t$  и  $y$ . Тогда существует плотность вероятности перехода  $v = \partial V/\partial x$ , для которой и написано уравнение (31.18).

Если вероятность скачка равна нулю ( $a = 0$ ), то мы получаем из (31.18) и (31.19) уравнение Эйнштейна — Фоккера (26.4) и сопряженное уравнение (26.7), предполагающие, конечно, непрерывность множества возможных значений. Если  $a \neq 0$ , но равны нулю коэффициенты сноса и диффузии ( $A = 0$ ,  $B = 0$ ), то мы возвращаемся к уравнениям Колмогорова — Феллера (31.13) и (31.14) для чисто скачкообразных марковских процессов, в том числе для процессов с дискретными возможными значениями.

Вряд ли надо добавлять, что все уравнения легко обобщаются на многомерные марковские процессы  $\xi(t) = \{\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)\}$ .

### § 32. Задача о первом достижении границ

Эта задача может быть поставлена и не для марковских процессов, но только для них удается получить ее точное решение в общем виде, что и оправдывает включение этого параграфа в главу о марковских процессах. Даже в частном случае стационарного *нормального* процесса  $\xi(t)$ , для которого, казалось бы, ответ на любой вопрос должен каким-то образом выражаться через функцию корреляции  $\psi(t_1, t_2)$ , в задаче о достижении границ пока получены лишь некоторые частные результаты [21, 22].

Задача ставится следующим образом. Пусть случайный процесс  $\xi(t)$  принял в начальный момент  $t_0 = 0$  значение  $x_0$ . Какова статистика (функции распределения, моменты) *случайного времени*  $t$  первого достижения либо заданной одной границы  $a < x_0$  или  $b > x_0$ , либо достижения одной из них, если заданы обе? Речь идет, таким образом, о том, чтобы, располагая статистикой  $\xi(t)$  «по оси  $x$ » (распределениями  $\omega_n$  значений самой функции), получить статистику «по оси  $t$ ». Задачи такого типа принадлежат к числу наиболее интересных в теории случайных процессов. К ним относятся и вопросы, касающиеся статистики пересечений заданного уровня или «выбросов» случайных процессов [23].

Теория достижения границ *марковским* процессом  $\xi(t)$  впервые была развита Л. С. Понтрягиным, А. А. Андроновым и

А. А. Виттом [24]<sup>1)</sup>. Решение этой задачи находит разнообразные применения. В случае брауновского движения примером может служить опыт Бриллюэна, в котором брауновская частица *прилипаёт* к стенке сосуда, т. е. речь идет именно о *первом* достижении частицей поглощающей границы [7]. Из радиофизических задач можно указать на вопрос о времени достижения сепаратрисы при флуктуациях в нелинейных динамических системах, в частности о времени перехода через потенциальный барьер в консервативных системах и о времени самопроизвольной смены автоколебательных режимов или срыва автоколебаний в автогенераторах. Сюда же относится задача о срыве слежения в авторегулируемых следящих системах и др.

Следуя [24], мы рассмотрим одномерный марковский процесс<sup>2)</sup>, причем однородный по времени, т. е. с плотностью вероятности перехода  $v(x|t-t_0, x_0)$  и с не зависящими от  $t$  коэффициентами  $A(x)$  и  $B(x)$  в уравнении Эйнштейна — Фоккера. Плотность вероятности перехода  $v$  и одномерная плотность вероятности состояния  $w_1(x)$  (если она существует) определяют всю статистику марковского процесса «по  $x$ ». Но нас будет интересовать другое распределение, отличное от  $w_n$ , а именно вероятность *времени*  $t$  достижения одной из границ области изменения  $x$ :

$$\varphi(t|x) = P \left\{ \begin{array}{l} x=a \text{ или } x=b \text{ по} \\ \text{крайней мере один раз} \\ \text{за время } t \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{если при } t_0=0 \\ \text{имело место} \\ \text{состояние } x \end{array} \right\}.$$

Это *интегральная* вероятность (так что  $\varphi(\infty|x) = 1$ ), плотность же вероятности равна  $\partial\varphi/\partial t$ , и, следовательно, среднее время достижения  $a$  или  $b$  равно

$$\bar{t}(x) = \int_0^{\infty} t \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt. \quad (32.1)$$

Нетрудно установить, каковы начальные и граничные условия для  $\varphi(t|x)$ . Так как в начальный момент  $x \neq a$  и  $x \neq b$ , начальное условие будет

$$\varphi(0|x) = 0. \quad a < x < b. \quad (32.2)$$

Но если при  $t = 0$  либо  $x = a$ , либо  $x = b$ , т. е. граница уже достигнута, то для всякого  $t > 0$  будет справедливо граничное

<sup>1)</sup> Эта работа, опубликованная в 1933 г. и отраженная (в уточненном виде) даже в учебнике [7], по-видимому, осталась неизвестной за рубежом, где начало исследований по теории достижения границ марковским процессом связывают с работами С. Райса (1944—1945 гг.) [8], а также Д. Дарлингга и А. Зигерта (1953) [25].

<sup>2)</sup> Теория легко обобщается и на многомерный случай [7].

условие

$$\varphi(t|a) = \varphi(t|b) = 1. \quad (32.3)$$

Теперь надо составить уравнение для  $\varphi(t|x)$  — задача, которая полностью решается именно для марковского процесса при помощи вероятности перехода. Нам нужна при этом не вероятность перехода  $v(y|t, x)dy$  из точки  $x$  при  $t = 0$  в *любой* интервал  $(y, y + dy)$  на оси  $x$ , а вероятность  $\hat{v}(y|t, x)dy$  того же события, но с  $y$ , лежащим *внутри* интервала  $(a, b)$ . Конечно, начальные условия для  $v$  и  $\hat{v}$  одинаковы:

$$\hat{v}(y|0, x) = v(y|0, x) = \delta(y - x)$$

(поэтому при очень малых  $t$ , когда  $v$  и  $\hat{v}$  еще очень острые функции  $y$ , они практически совпадают). Но при любых  $t > 0$ , очевидно,  $\hat{v} \leq v$  и условия нормировки для  $v$  и  $\hat{v}$  тоже различны. В то время как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(y|t, x) dy = 1,$$

для  $\hat{v}$  имеем

$$\int_a^b \hat{v}(y|t, x) dy = 1 - \varphi(t|x). \quad (32.4)$$

Действительно, пусть  $P_n$  — вероятность прихода к моменту времени  $t$  в какую-либо точку интервала  $(a, b)$  с  $n$  достижениями (касаниями, пересечениями) границ по дороге. Полная система возможных событий отвечает  $n = 0, 1, 2, \dots$ , так что  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ . Но левая часть (32.4) есть  $P_0$  [вероятность прихода куда-либо в  $(a, b)$  без касания границ], а  $\varphi(t|x)$  — вероятность того же конечного результата, но с достижением границ *по крайней мере один раз*, т. е.

$$\varphi(t|x) = P_1 + P_2 + \dots, \quad (32.5)$$

из чего и следует (32.4).

Пользуясь  $\hat{v}$ , можно записать следующее интегральное уравнение (рис. 25):

$$\varphi(t + \tau|x) = \varphi(\tau|x) + \int_a^b \hat{v}(y|\tau, x) \varphi(t|y) dy, \quad (32.6)$$

т. е. вероятность хотя бы одного достижения  $a$  или  $b$  за время  $t + \tau$  (левая часть) равна вероятности того же события за время  $\tau$  [член  $\varphi(\tau|x)$  в правой части] плюс вероятность того, что за  $\tau$  не было касания границ, но оно произошло в течение

остального времени  $t$ . Именно этот смысл имеет второй член в правой части. Действительно,  $\hat{v}(y|\tau, x)dy$  — вероятность перехода за время  $\tau$  из  $x$  в  $y$  без касания границ, а  $\varphi(t|y)$  — вероятность хотя бы одного касания за время  $t$ , так что  $\hat{v}(y|\tau, x)\varphi(t|y)dy$  — это вероятность хотя бы одного касания в интервале времени  $(0, t + \tau)$  с прохождением через  $(y, y + dy)$  в момент  $\tau$ . Интеграл по всем  $y$  от  $a$  до  $b$  и дает полную вероятность того, что за  $\tau$  касания границ не было, но оно имело место в течение остальной части  $t$  промежутка времени  $t + \tau$ . Заметим, что, согласно (32.6), разность

$$\begin{aligned} \varphi(t + \tau|x) - \varphi(t|x) &= \\ &= \int_a^b \hat{v}(y|t, x) \varphi(\tau|y) dy \end{aligned}$$

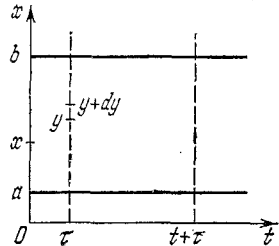


Рис. 25.

есть вероятность достижения границы (хотя бы один раз) в интервале  $(t, t + \tau)$  после «пустого» интервала  $(0, t)$ . Заменяя  $\tau$  на  $dt$ , мы получаем, что  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$  представляет собой с точностью до первого порядка относительно  $dt$  вероятность *первого* достижения границы в интервале  $(t, t + dt)$ .

Предельный переход  $\tau \rightarrow 0$  в уравнении (32.6) вполне строго приводит к (сопряженному) уравнению Эйнштейна — Фоккера для  $\varphi(t|x)$  [7]. Но тот же результат можно получить и при некотором физически очевидном упрощении исходного интегрального уравнения (32.6), что и было сделано в работе [24]. Поскольку  $\tau$  мало (а в дальнейшем  $\tau \rightarrow 0$ ), можно сразу же пренебречь в (32.6) членом  $\varphi(\tau|x)$ , отождествить острые функции  $\hat{v}$  и  $v$  и раздвинуть пределы интеграла в  $\pm \infty$ , т. е. исходить из уравнения

$$\varphi(t + \tau|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y|\tau, x) \varphi(t|y) dy. \tag{32.7}$$

Разлагая  $\varphi(t|y)$  по степеням  $y - x$ :

$$\begin{aligned} \varphi(t|y) &= \varphi(t|x) + \frac{\partial \varphi(t|x)}{\partial x} (y - x) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(t|x)}{\partial x^2} (y - x)^2 + O[(y - x)^3], \end{aligned}$$

подставляя это разложение в (32.7) и деля все уравнение на  $\tau$ , получаем (при тех же предположениях, какие были сделаны в § 26 при выводе уравнения Эйнштейна — Фоккера для вероят-

ности перехода  $v$ ) уравнение

$$\frac{\partial \Phi(t|x)}{\partial t} = A(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{B(x)}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad (32.8)$$

причем  $A(x)$  и  $B(x)$  те же, что и ранее. Конечно, этот упрощенный вывод оставляет некоторую неудовлетворенность, но, как сказано, уравнение (32.8) получается и в результате строгого вывода из (32.6).

Можно либо решать уравнение (32.8) с начальными и граничными условиями (32.2) и (32.3), либо перейти к уравнению для характеристической функции:

$$f_t(u|x) = e^{iut} = \int_0^{\infty} e^{iut} \frac{\partial \Phi(t|x)}{\partial t} dt,$$

либо составить обыкновенные дифференциальные уравнения для моментов  $\bar{t}^n(x)$ . Сделаем последнее.

Дифференцируя (32.8) по  $t$ , умножая результат на  $t^n$  и интегрируя по  $t$  от 0 до  $\infty$ , получаем

$$A(x) \frac{d\bar{t}^n}{dx} + \frac{B(x)}{2} \frac{d^2 \bar{t}^n}{dx^2} = \int_0^{\infty} t^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} dt = t^n \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_0^{\infty} - n \bar{t}^{n-1}.$$

В предположении, что плотность вероятности  $\partial \Phi / \partial t$  ограничена в нуле и достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности, получаем

$$\frac{B(x)}{2} \frac{d^2 \bar{t}^n}{dx^2} + A(x) \frac{d\bar{t}^n}{dx} + n \bar{t}^{n-1} = 0. \quad (32.9)$$

В частности, при  $n = 1$  и  $n = 2$

$$\frac{B(x)}{2} \bar{t}'' + A(x) \bar{t}' + 1 = 0, \quad (32.10)$$

$$\frac{B(x)}{2} \bar{t}^{2''} + A(x) \bar{t}^{2'} + 2\bar{t} = 0. \quad (32.11)$$

Очевидно, решения таких уравнений должны быть неотрицательными и должны обращаться в нуль всякий раз, когда начальное состояние  $x$  совпадает с одной из границ:

$$\bar{t}^n(a) = \bar{t}^n(b) = 0, \quad (32.12)$$

Если же имеется только одна граница, скажем  $b > x$ , то на ней по-прежнему  $\bar{t}^n(b) = 0$ , а при  $x \rightarrow -\infty$  естественно требовать  $\bar{t}^n \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть  $A(x) = 0$ , а  $B = \text{const}$ . Уравнение (32.8) принимает тогда вид

$$\dot{\varphi} = \frac{B}{2} \varphi'', \quad (32.13)$$

и его решение при условиях (32.2) и (32.3) есть

$$\varphi(t|x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{(b-x)/\sigma}^{(b-a)/\sigma} e^{-s^2} ds - \int_0^{(x-a)/\sigma} e^{-s^2} ds \right], \quad \sigma = \sqrt{2Bt}. \quad (32.14)$$

Ход  $\varphi(t|x)$  в функции от  $x$  показан на рис. 26, а для различных

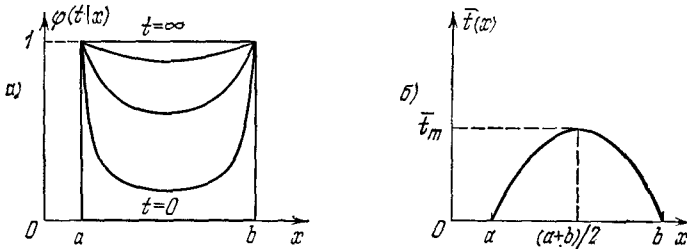


Рис. 26.

значений  $t$ . Для среднего времени достижения границы имеем из (32.10) уравнение

$$\frac{B}{2} \bar{t}'' = -1,$$

решение которого с условиями (32.12) есть

$$\bar{t}(x) = \frac{(b-x)(x-a)}{B} \quad (32.15)$$

(рис. 26, б). Наибольшее время отвечает начальному положению посередине между границами  $x = (a+b)/2$  и равно времени диффузии (с коэффициентом диффузии  $B/2$ ) на половинную длину отрезка  $(a, b)$ :

$$2 \cdot \frac{B}{2} \bar{t}_m = \left( \frac{b-a}{2} \right)^2.$$

Отодвинем теперь нижнюю границу в  $-\infty$ . Тогда решение уравнения (32.13) должно удовлетворять условиям

$$\varphi(t|b) = 1, \quad \varphi(t|-\infty) = 0.$$

Но именно такое решение получается из (32.14) при  $a \rightarrow -\infty$ :

$$\varphi(t|x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(b-x)/\sigma} e^{-s^2} ds, \quad \sigma = \sqrt{2Bt}.$$

Соответствующая плотность вероятности равна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2}{\sqrt{2\pi Bt}} e^{-(b-x)^2/2Bt}.$$

Она обращается в  $\delta(b-x)$  при  $t=0$ , но интеграл (32.1) расходится на верхнем пределе, так как с ростом  $t$  плотность  $\partial\varphi/\partial t$  убывает лишь как  $1/\sqrt{t}$ , т. е. удельный вес больших времен достижения границы слишком велик. Тем самым,  $\bar{t}(b) = 0$ , но для всякого  $x < b$  мы получаем  $\bar{t}(x) = \infty$ . То же самое следует и из формулы (32.15) при предельном переходе  $a \rightarrow -\infty$ .

В общем случае переменных коэффициентов  $A(x)$  и  $B(x)$  и при наличии *только одной* границы, (на которой  $\bar{t} = 0$ ), если потребовать наиболее медленного роста  $\bar{t}(x)$  при удалении  $x$  от границы, получаем следующие решения уравнения (32.10):

$$\bar{t}_a(x) = 2 \int_a^x e^{-q(z)} dz \int_z^\infty e^{q(y)} \frac{dy}{B(y)} \quad \text{для } a < x,$$

$$\bar{t}_b(x) = 2 \int_x^b e^{-q(z)} dz \int_{-\infty}^z e^{q(y)} \frac{dy}{B(y)} \quad \text{для } b > x,$$

где

$$q(z) = 2 \int_0^z \frac{A(z)}{B(z)} dz.$$

### Задачи

1. Показать, что уравнение Смолуховского следует из определения (15.3) марковского процесса и согласованности конечномерных распределений.

Решение. Согласно (15.3) при  $t_0 < \theta < t$

$$\omega_3(x_0, t_0; y, \theta; x, t) = \omega_1(x_0, t_0) v(y, \theta | x_0, t_0) v(x, t | y, \theta),$$

$$\omega_2(x_0, t_0; x, t) = \omega_1(x_0, t_0) v(x, t | x_0, t_0).$$

По условию согласованности

$$\omega_2(x_0, t_0; x, t) = \int \omega_3(x_0, t_0; y, \theta; x, t) dy.$$

Подставив сюда  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , получаем уравнение (21.1).

2. Пусть  $\xi_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) — дискретная последовательность независимых случайных величин с возможными значениями  $x_i = i = 0, 1, 2, \dots$  и со-

ответствующими вероятностями  $p_i = P \{ \xi_m = i \}$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ . Вероятности перехода (совпадающие с вероятностями состояний) не зависят от номера испытания  $m$ , т. е. последовательность однородна:

$$p_{ij} \equiv P \{ x_j, m + 1 | x_i, m \} = P \{ \xi_{m+1} = j | \xi_m = i \} = P \{ \xi_{m+1} = j \} = p_j.$$

Показать, что последовательность величин

$$\eta_m = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m$$

(по определению  $\eta_0 = 0$ ) является марковской, и найти для нее матрицу  $\pi_1$  вероятностей перехода за один шаг.

Решение. Последовательность  $\eta_m$  марковская, поскольку  $\eta_{m+1} = \eta_m + \xi_{m+1}$ , и, следовательно, если задано значение  $\eta_m$ , то распределение  $\eta_{m+1}$  известно. Обозначив через  $y_i = i$  возможные значения  $\eta_m$ , запишем вероятность перехода за один шаг:

$$\begin{aligned} p_{ij} &\equiv P \{ y_j, m + 1 | y_i, m \} = P \{ \eta_{m+1} = j | \eta_m = i \} = \\ &= P \{ \eta_m + \xi_{m+1} = j | \eta_m = i \} = P \{ \xi_{m+1} = j - i \} = \begin{cases} p_{j-i} & \text{при } j \geq i, \\ 0 & \text{при } j < i. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, матрица  $\pi_1$  имеет вид

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

3. Независимые случайные величины  $\xi_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) принимают значения  $+1$  или  $-1$  с вероятностями  $p$  и  $q = 1 - p$ . Является ли последовательность величин  $\eta_m = (\xi_m + \xi_{m+1})/2$  марковской?

Решение. Величина  $\eta_m$  может принимать значения  $i = -1, 0, +1$  с вероятностями  $p_i = P \{ \eta_m = i \}$ , равными соответственно  $q^2$ ,  $2qp$  и  $p^2$  (одномерное распределение  $\eta_m$ ). Для двух величин  $\eta_m$  и  $\eta_n$  совместная вероятность (двумерное распределение)  $p_{ij} = P \{ \eta_m = i, \eta_n = j \}$  будет различна в зависимости от разности  $n - m$ . Если  $|n - m| > 1$ , то  $\eta_m$  и  $\eta_n$  независимы, так что  $p_{ij} = p_i p_j$ . Если  $n = m + 1$ , то в  $\eta_m$  и  $\eta_{m+1}$  входит одна и та же величина  $\xi_m$  и матрица  $p_{ij}$  будет

$i \backslash j$	-1	0	1
-1	$q^3$	$pq^2$	0
0	$pq^2$	$pq$	$p^2q$
1	0	$p^2q$	$p^3$

Очевидно, такая же матрица получится и при  $n = m + 1$ , когда  $\xi_{m+1}$  входит и в  $\eta_m$  и в  $\eta_{m+1}$ . Наконец, если  $n = m$ , то  $p_{ij} = p_i \delta_{ij}$ .

Для условной вероятности

$$p(n, j | m, i) = P \{ \eta_n = j | \eta_m = i \} = \frac{P \{ \eta_m = i, \eta_n = j \}}{P \{ \eta_m = i \}} = \frac{p_{ij}}{p_i}$$



получаем в трех указанных случаях следующие матрицы:

$$p(n, j | m, i) = \begin{pmatrix} q^2 & 2pq & p^2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix} \quad \text{при } |n - m| > 1, \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q/2 & 1/2 & p/2 \\ 0 & q & p \end{pmatrix} \quad \text{при } |n - m| = 1, \quad (2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{при } n - m = 0. \quad (3)$$

Если  $\eta_m$  образуют марковскую последовательность, то  $p(n, j | m, i)$  должны быть вероятностями перехода, т. е. удовлетворять уравнению Смолуховского:

$$p(n, k | l, i) = \sum_j p(n, k | m, j) p(m, j | l, i), \quad l < m < n.$$

Однако нетрудно убедиться, что это не имеет места. Достаточно взять случай  $n = m + 1$ ,  $l = m - 1$ , так что  $n - l = 2$  и левая часть уравнения должна быть матрицей (1). Между тем сумма, стоящая в правой части уравнения и представляющая собой квадрат матрицы (2), есть матрица

$$\begin{pmatrix} q \left( q + \frac{p}{2} \right) & p \left( q + \frac{1}{2} \right) & \frac{p^2}{2} \\ \frac{q}{2} \left( q + \frac{1}{2} \right) & pq + \frac{1}{4} & \frac{p}{2} \left( p + \frac{1}{2} \right) \\ \frac{q^2}{2} & q \left( p + \frac{1}{2} \right) & p \left( p + \frac{q}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

4. Написать матрицу вероятностей перехода за один шаг для рассмотренного в § 22 примера случайных блужданий (рис. 11), но в случае *поглощающих* стенок.

Решение. Очевидно, при  $1 < i < N$  вероятности перехода  $p_{ik}$  остаются теми же, что и в случае отражающих стенок. Для частицы же, попавшей на стенку ( $i = 1$  или  $i = N$ ), движение останавливается, т. е.

$$p_{1k} = \begin{cases} 1 & (k = 1), \\ 0 & (k \neq 1), \end{cases} \quad p_{Nk} = \begin{cases} 1 & (k = N), \\ 0 & (k \neq N). \end{cases}$$

Таким образом,

$$\pi_1 = (p_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Доказать, что у нормального стационарного марковского процесса коэффициент корреляции равен

$$K(\tau) = e^{-\alpha |\tau|},$$

где  $\alpha > 0$  (теорема Дуба, см. [26], § 8, а также [27]).

Решение. Согласно (7.13) условная вероятность у нормального процесса с  $\bar{x} = 0$  и  $\bar{x}^2 = 1$  равна

$$v(x_2 | x_1) = \frac{\omega_2(x_1, x_2)}{\omega_1 \omega_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-K^2)}} \exp \left\{ -\frac{(Kx_1 - x_2)^2}{2(1-K^2)} \right\}, \quad (1)$$

где  $K = \overline{x_1 x_2} = K(t_2 - t_1)$  — коэффициент корреляции (процесс по условию стационарен и  $t_2 > t_1$ ). Поскольку процесс марковский,  $v$  должна удовлетворять уравнению Смолуховского:

$$v(x_2 | x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x_2 | y) v(y | x_1) dy.$$

Подставив сюда выражение вида (1) для  $v(x_2 | y)$  с  $K_2 = \overline{x_2 y} = K(t_2 - \theta)$  и для  $v(y | x_1)$  с  $K_1 = \overline{y x_1} = K(\theta - t_1)$  и выполнив интегрирование по  $y$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x_2 | y) v(y | x_1) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-K_2^2 K_1^2)}} \exp \left\{ -\frac{(K_2 K_1 x_1 - x_2)^2}{2(1-K_2^2 K_1^2)} \right\},$$

что должно быть равно (1). Следовательно,  $K = K_2 K_1$ , или

$$K(t_2 - t_1) = K(t_2 - \theta) K(\theta - t_1), \quad t_2 > \theta > t_1.$$

Для положительных аргументов решение этого функционального уравнения есть

$$K(\tau) = e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \geq 0,$$

где  $\alpha$  — любое комплексное число. Так как  $K$  должно удовлетворять условиям  $|K| \leq 1$ , и  $K(-\tau) = K^*(\tau)$ , необходимо, чтобы  $\alpha$  было вещественно и положительно. Отсюда же следует, что при продолжении функции  $K(\tau)$  в область  $\tau < 0$  должно выполняться условие ее четности.

6. Найти связь вероятности перехода  $p_{N,m} = p(N, m | 0, 0)$  из точки 0 в точку  $m$  за  $N$  шагов с биномиальной вероятностью  $P_N(n)$  того, что из общего числа  $N$  независимых шагов сделано вправо  $n$ .

Решение.  $P_N(n)$  — это вероятность перемещения вправо на  $2n - N$  шагов (из любой начальной точки). Если нас интересует смещение вправо на  $m$  шагов, т. е.  $m = 2n - N$ , то вправо должно быть сделано  $n = (m + N)/2$  шагов, что возможно, конечно, только при одинаковой четности  $N$  и  $m$ . Таким образом,

$$p_{N,m} = P_N \left( \frac{m + N}{2} \right), \quad \text{где } m + N \text{ четно.}$$

Нетрудно проверить подстановкой, что это выражение удовлетворяет как уравнению Маркова

$$p_{N,m} = p \cdot p_{N-1, m-1} + q \cdot p_{N-1, m+1},$$

так и условию нормировки  $\sum_{m=-N}^N p_{N,m} = 1$  (сумма по значениям  $m$  той же четности, что и  $N$ ).

7. Найти вероятности перехода  $p(x_k | t, x_i) \equiv p_{ik}(t)$  для однородного по  $t$  марковского процесса с дискретными состояниями, если (постоянные)

коэффициенты  $A_{jk}$  имеют значения

$$A_{j, j+1} = n_1, \quad A_{jj} = -n_1, \quad A_{jk} = 0 \quad \text{при остальных } k,$$

а начальные условия  $p_{ik}(0) = \delta_{ik}$  (Колмогоров [3]).

Ответ.

$$p_{ik}(t) = \begin{cases} \frac{(n_1 t)^{k-i}}{(k-i)!} e^{-n_1 t} & \text{при } k \geq i, \\ 0 & \text{при } k < i. \end{cases}$$

8. Найти стационарные вероятности состояния  $P_k$  для однородного по  $t$  марковского процесса со следующими (постоянными) значениями коэффициентов  $A_{jk}$  ( $j, k = 1, 2, \dots$ ):

$$A_{j, j+1} = \alpha, \quad A_{j, j-1} = \beta > \alpha, \quad A_{11} = -\alpha, \quad A_{jj} = -(\alpha + \beta) \quad \text{при } j > 1, \\ A_{jk} = 0 \quad \text{при остальных } k$$

(Колмогоров [3]).

Решение. Уравнения (23.14) имеют в данном случае вид

$$\beta P_2 - \alpha P_1 = 0 \quad (k=1), \\ \beta P_{k+1} - \alpha P_k = \beta P_k - \alpha P_{k-1} \quad (k > 1),$$

т. е.  $\beta P_k = \alpha P_{k-1}$  для всех  $k$ . Следовательно,  $P_k = P_1 (\alpha/\beta)^{k-1}$ , а из условия  $\sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1$  следует, что  $P_1 = 1 - \alpha/\beta$ . Окончательно  $P_k = (1 - \alpha/\beta) (\alpha/\beta)^{k-1}$ .

9. Задача ставится так же, как и предыдущая, но со следующими значениями коэффициентов  $A_{jk}$  ( $j, k = 1, 2, \dots$ ):

$$A_{j, j+1} = \alpha, \quad A_{j, j-1} = (j-1)\beta, \quad A_{jj} = -\alpha - (j-1)\beta, \\ A_{jk} = 0 \quad \text{при остальных } k$$

(Колмогоров [3]).

Ответ.

$$P_{k+1} = \frac{e^{-\alpha/\beta}}{k!} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^k.$$

10. Флуктуации почернения фотоэмульсии [28]. Пусть область эмульсии, соответствующая наименьшему разрешимому точечному объекту (коротко — ячейка), содержит в момент начала экспонирования  $t = 0$   $N$  «непроявленных» зерен. Каждое из них может находиться только в двух состояниях — непроявленном и проявленном. Если к моменту  $t$  остались непроявленными  $m$  зерен ( $m = 1, 2, \dots, N$ ), то предполагается, что вероятность проявления какого-либо одного из них в интервале  $(t, t + dt)$  равна  $A_{m, m-1}(t)dt = m\alpha(t)dt$ , а вероятности проявления двух или более зерен имеют более высокий порядок относительно  $dt$ .

Составить и решить систему уравнений Колмогорова для вероятности перехода  $p(t, m|0, N) \equiv p_m(t)$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) от  $N$  непроявленных зерен в момент  $t = 0$  к  $m$  таким зернам в момент  $t$ . Найти  $\bar{m}$  и  $D[m]$ .

Решение. При  $m$  непроявленных зернах в момент  $t$  возможен за последующий интервал  $dt$  либо переход к  $m-1$  непроявленным зернам с вероятностью  $m\alpha(t)dt$ , либо сохранение числа непроявленных зерен с вероятностью  $1 - A_{m, m}(t)dt$ , причем  $A_{m, m} + A_{m, m-1} = 0$ , т. е.  $A_{m, m}(t) = -m\alpha(t)$ . Следовательно, при  $m < N$  уравнение для  $p_m(t)$  будет

$$\frac{dp_m}{dt} = A_{m, m} p_m + A_{m+1, m} p_{m+1} = -m\alpha(t) p_m + (m+1)\alpha(t) p_{m+1},$$

а при  $m = N$ , поскольку  $p_{N+1} = 0$ ,

$$\frac{dp_N}{dt} = -N\alpha(t)p_N.$$

Решение этих уравнений при начальном условии  $p_m(0) = \delta_{Nm}$  дается биномиальным законом:

$$p_m(t) = \frac{N!}{(N-m)!m!} p^m(t) q^{N-m}(t),$$

где

$$p(t) = e^{-\rho(t)}, \quad q(t) = 1 - p(t) = 1 - e^{-\rho(t)}, \quad \rho(t) = \int_0^t \alpha(\theta) d\theta.$$

Очевидно,  $p(t)$  — вероятность того, что за время  $t$  зерно останется непроявленным. Таким образом, среднее значение и дисперсия  $m$  таковы:

$$\bar{m} = Np(t) = Ne^{-\rho(t)}, \quad \sigma^2 \equiv D[m] = Np(t)q(t) = Ne^{-\rho(t)} [1 - e^{-\rho(t)}].$$

Процесс нестационарен, и  $D[m]$  зависит от  $\bar{m}$ :

$$\sigma^2 = \bar{m} \left(1 - \frac{\bar{m}}{N}\right) = \bar{n} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right),$$

где  $\bar{n} = N - \bar{m}$  — среднее число проявленных зерен.

С ростом  $N$  биномиальное распределение переходит (при фиксированном  $\bar{m}$ ) в пуассоновское. Поэтому в задаче 7, где сразу предполагалось, что  $N = \infty$ , получился закон Пуассона, причем стационарный, так как  $A_{jk}$  там приняты постоянными.

Согласно [28], хорошей аппроксимацией для  $\alpha(t)$  может служить линейная функция времени экспозиции  $t$ :  $\alpha(t) = t/\theta^2$ . Тогда  $\rho(t) = t^2/2\theta^2$  и

$$\bar{n} = N - \bar{m} = N [1 - e^{-t^2/2\theta^2}] = N (1 - e^{-t^2/2\theta^2}).$$

По такому же закону нарастает с  $t$  и почернение, пропорциональное  $\bar{n}$ . Следовательно,  $\theta$  — такая длительность экспозиции, при которой скорость роста почернения максимальна. Разумеется,  $\theta$  зависит от освещенности эмульсии. В отличие от почернения, растущего с  $t$  монотонно, фотографический «шум» (т. е.  $\sigma^2$ ) максимален при  $t = \theta \sqrt{\ln 4}$ , достигая здесь значения  $\sigma^2 = N/4$ . При  $t = 0$  и  $t = \infty$   $\sigma^2 = 0$ . «Шум» тем сильнее, чем больше зерен в ячейке, так как  $\sigma^2 \sim N$ .

11. Вывести методом Релея (§ 24) уравнение Эйнштейна — Фоккера для вероятности перехода  $v(t, x) \equiv v(t, x|0, 0)$  в случае, когда частица может совершать за время  $\Delta t$  шаги  $+ka$  и  $-ka$  с вероятностями соответственно  $p_k$  и  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ , так называемые  $n$ -шаговые блуждания), где, конечно,

$$\sum_{k=1}^n (p_k + q_k) = 1.$$

Решение. Полагая  $t = N\Delta t$ ,  $x = ma$ , получаем для вероятности перехода  $p_{N, m}$  уравнение Маркова:

$$p_{N, m} = \sum_{k=1}^n (p_k p_{N-1, m-k} + q_k p_{N-1, m+k}),$$

или

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^n [p_k v(t - \Delta t, x - ka) + q_k v(t - \Delta t, x + ka)].$$

Разложение правой части в ряд по степеням  $a$  дает

$$v(t, x) - v(t - \Delta t, x) = -a \sum_{k=1}^n (p_k - q_k) k \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \sum_{k=1}^n (p_k + q_k) k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dots$$

Если предположить, что при  $\Delta t \rightarrow 0$  порядок  $a$  и  $\sum_{k=1}^n (p_k - q_k) k$  есть  $\sqrt{\Delta t}$ , то в пределе отличны от нуля будут только члены с  $\partial v / \partial x$  и  $\partial^2 v / \partial x^2$ , т. е. получится диффузионное уравнение

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = -A \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

где

$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a}{\Delta t} \sum_{k=1}^n (p_k - q_k) k, \quad B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a^2}{\Delta t} \sum_{k=1}^n (p_k + q_k) k^2.$$

Пусть, например,

$$p_k = p_1 e^{-(k-1)\alpha}, \quad q_k = q_1 e^{-(k-1)\alpha}$$

( $\alpha > 0$  и  $k = 1, 2, \dots$ , т. е.  $n = \infty$ ). Тогда из условия нормировки получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (p_k + q_k) = \frac{p_1 + q_1}{1 - e^{-\alpha}} = 1, \quad \text{т. е. } p_1 + q_1 = 1 - e^{-\alpha}.$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k k = -p_1 e^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\alpha} = \frac{p_1}{(1 - e^{-\alpha})^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k k = \frac{q_1}{(1 - e^{-\alpha})^2}.$$

Аналогично получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k k^2 = p_1 \frac{1 + e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^3}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k k^2 = q_1 \frac{1 + e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^3}.$$

В результате

$$A = \frac{A_0}{(1 - e^{-\alpha})^2}, \quad B = \frac{B_0 (1 + e^{-\alpha})}{(1 - e^{-\alpha})^2},$$

где

$$A_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(p_1 - q_1) a}{\Delta t}, \quad B_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a^2}{\Delta t}.$$

При  $\alpha \rightarrow \infty$  отличны от нуля только  $p_1$  и  $q_1$ , и мы возвращаемся к случаю одношаговых блужданий, рассмотренному в § 24, причем  $A = A_0$  и  $B = B_0$ . При  $\alpha \rightarrow 0$  вероятности многошаговых скачков возрастают и поэтому ускорятся как систематическое движение, так и диффузия:

$$\bar{s} \approx At \approx \frac{A_0}{\alpha^2} t, \quad (\Delta s)^2 \approx 2Bt \approx \frac{4B_0}{\alpha^2} t.$$

12. Рассчитать по формуле (25.9) распределение модуля вектора  $r$ , компоненты которого  $x$  и  $y$  независимы и распределены равномерно в интервале  $(-A, A)$ , т. е.

$$\omega(x) = \begin{cases} 1/2A & \text{при } -A \leq x \leq A, \\ 0 & \text{при } |x| > A. \end{cases}$$

О т в е т.

$$\omega_r(r) = \begin{cases} \pi r/2A^2 & \text{при } r \leq A, \\ \frac{\pi r}{2A^2} \left(1 - \frac{4}{\pi} \arccos \frac{A}{r}\right) & \text{при } A < r \leq \sqrt{2}A, \\ 0 & \text{при } \sqrt{2}A < r. \end{cases}$$

13. Коэффициент  $B$  определен в (26.2) через  $\overline{(x-y)^2}$ , т. е. через среднее квадратичное отклонение случайной конечной точки  $x$  в момент  $t$  от фиксированной исходной точки  $y$  в момент  $t-\tau$ . Переход из  $y$  в  $x$  обусловлен как хаотическим движением (диффузией), так и систематическим сносом со скоростью

$$A(y, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{x-y}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\bar{x}-y}{\tau},$$

где  $\bar{x}$  — среднее значение  $x$  в момент  $t$ . Казалось бы естественным ввести в качестве меры чисто случайного (диффузионного) смещения не величину  $B$ , а

$$\tilde{B} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(x-\bar{x})^2}}{\tau}.$$

Показать, что  $\tilde{B} = B$ , и истолковать этот результат.

Решение. С точностью до первого порядка относительно  $\tau$  имеем

$$\bar{x} - y \approx A(y, t) \tau.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{B}(y, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(x-\bar{x})^2}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \overline{(x-y-A\tau)^2} \right\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \left[ \overline{(x-y)^2} - 2A\tau \overline{(x-y)} + A^2\tau^2 \right] \right\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \left[ \overline{(x-y)^2} - A^2\tau^2 \right] \right\} = B(y, t). \end{aligned}$$

Причина, очевидно, в том, что полное отклонение  $x-y$  и чисто случайное  $x-\bar{x}$ , оба растущие по диффузионному закону (стандарты обоих порядка  $\sqrt{\tau}$ ), отличаются друг от друга в более высоком (первом) порядке по  $\tau$ :

$$(x-y) - (x-\bar{x}) = \bar{x}-y \approx A\tau.$$

14. Уравнение Колмогорова (23.8) для случайного процесса с дискретными состояниями было получено из уравнения Смолуховского в предположении, что существуют вероятности перехода за единицу времени  $A_{jk}(t)$  ( $k \neq j$ ), причем  $A_{jj}(t) = -\sum_{k \neq j} A_{jk}(t)$ . При этом предположении уравнение

(23.8) можно вывести и из уравнения Маркова. Показать это для одношаговых случайных блужданий, у которых возможны смещения на один шаг вправо и влево (с вероятностями  $p$  и  $q$ ), а также «шаг на месте» с вероятностью  $\bar{p}$ .

Решение. Уравнение Маркова для вероятности перехода  $p_{N, m}$  будет

$$p_{N+1, m} = p \cdot p_{N, m-1} + q \cdot p_{N, m+1} + \tilde{p} \cdot p_{N, m}, \quad p + q + \tilde{p} = 1.$$

Полагая  $N \Delta t = t$ , перепишем это уравнение в виде

$$p_m(t + \Delta t) = p \cdot p_{m-1}(t) + q \cdot p_{m+1}(t) + \tilde{p} \cdot p_m(t).$$

Если

$$p = A_{m-1, m} \Delta t + o(\Delta t), \quad q = A_{m+1, m} \Delta t + o(\Delta t), \quad \tilde{p} = 1 + A_{m, m} \Delta t + o(\Delta t)$$

причем

$$A_{m, m} = -(A_{m-1, m} + A_{m+1, m}),$$

то в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  получаем уравнение Колмогорова:

$$\dot{p}_m(t) = A_{m-1, m} p_{m-1}(t) + A_{m+1, m} p_{m+1}(t) - (A_{m-1, m} + A_{m+1, m}) p_m(t).$$

В частности, если блуждания симметричны ( $A_{m-1, m} = A_{m+1, m}$ ), то, выбирая такой масштаб для  $t$ , чтобы эти временные плотности вероятности были равны единице, получаем

$$\dot{p}_m = p_{m-1} + p_{m+1} - 2p_m.$$

Под  $p_m$  можно, конечно, понимать как вероятность перехода  $p(t, ma|0, 0)$ , так и вероятность состояния  $p(t, ma)$ . Следует обратить внимание на то, что для существования  $A_{j, m}$  введение «шага на месте» необходимо.

15. В § 24 уравнение Эйнштейна — Фоккера для процесса с непрерывными возможными состояниями было выведено из уравнения Маркова для дискретной последовательности. В предыдущей задаче показано, что предельный переход  $\Delta t \rightarrow 0$  позволяет при определенных условиях получить из уравнения Маркова уравнение Колмогорова для процесса с дискретными состояниями. Естественно ожидать, что последующее «сближение» этих состояний (например, неограниченное укорочение длины шага  $a$  при случайных блужданиях) позволит вывести уравнение Эйнштейна — Фоккера из уравнения Колмогорова. Показать это на примере симметричных одношаговых блужданий, т. е. для уравнения Колмогорова

$$\dot{p}_m = p_{m+1} + p_{m-1} - 2p_m.$$

Решение. Полагая  $x = ma$  и вводя плотность вероятности  $v(t, x) = p(t, ma)/a = p_m/a$ , приводим уравнение Колмогорова к виду

$$\dot{v}(t, x) = v(t, x+a) + v(t, x-a) - 2v(t, x).$$

Разложение  $v(t, x \pm a)$  по степеням  $a$  дает

$$\dot{v}(t, x) = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{a^4}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \dots$$

Если вместо  $t$  ввести  $\tau = a^2 t$  и разложить  $v(\tau, x, a^2)$  по степеням  $a^2$ :

$$v(\tau, x, a^2) = v^{(0)}(\tau, x) + a^2 v^{(1)}(\tau, x) + \dots,$$

то получим систему уравнений последовательных приближений:

$$\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 v^{(0)}}{\partial x^4}, \dots$$

Нулевое приближение, т. е. уравнение для  $v^{(0)}$ , представляет собой уравнение Эйнштейна — Фоккера.

Учет «поправок на дискретность»  $v^{(1)}$ ,  $v^{(2)}$ , ... представляет интерес во многих задачах, в которых описание дискретной случайной структуры или

процесса заменяется «сглаженным» описанием при помощи дифференциальных уравнений в частных производных для непрерывных переменных. Иногда важно выяснить, как сказывается на таких уравнениях многошаговость исходной дискретной задачи и к каким граничным условиям для непрерывных переменных приводят (в разных порядках по  $a^2$ ) различные способы ограничения области изменения дискретных переменных. Эти вопросы подробно исследованы в работе [29] на моделях одношаговых и двухшаговых случайных блужданий.

16. Пользуясь характеристической функцией условного распределения  $\tilde{v}(t, x | t - \tau, y; T, X)$ , показать, что из интегрального соотношения (26.16) следует уравнение вида (26.17) для условной вероятности  $v(t, x | T, X)$ , коэффициенты которого  $A_n$  определены по (26.18) [12].

Решение. Запишем характеристическую функцию в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(t, u | t - \tau, y; T, X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu(x-y)} \tilde{v}(t, x | t - \tau, y; T, X) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} a_n(t - \tau, y; T, X), \end{aligned}$$

где

$$a_n(t - \tau, y; T, X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - y)^n \tilde{v}(t, x | t - \tau, y; T, X) dx.$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t, x | t - \tau, y; T, X) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(x-y)} \tilde{\Phi}(t, u | t - \tau, y; T, X) du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(x-y)} (iu)^n du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_n \frac{\partial^n \delta(x-y)}{\partial x^n}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение для  $\tilde{v}$  в интеграл в (26.16), получаем

$$\begin{aligned} v(t, x | T, X) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} a_n(y, t - \tau; T, X) v(t - \tau, y | T, X) \frac{\partial^n \delta(x-y)}{\partial x^n} dy = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [a_n(x, t - \tau; T, X) v(t - \tau, x | T, X)] \end{aligned}$$

Член суммы с  $n = 0$  равен просто  $v(t - \tau, x | T, X)$ . Перенесем его в левую часть, разделим все уравнение на  $\tau$  и перейдем к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ . Учитывая, что, согласно (26.18),

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{a_n(x, t - \tau; T, X)}{\tau} = A_n(x, t | T, X),$$



получаем

$$\frac{\partial v(t, x | T, X)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [A_n(x, t | T, X) v(t, x | T, X)].$$

Очевидно, весь проделанный вывод остается в силе и тогда, когда  $\bar{v} = v$ , а условия  $(T, X)$  сводятся к предшествующему состоянию  $x_0 = x(t_0)$  самого процесса  $x(t)$ , т. е. в случае марковского процесса. Мы получаем тогда уравнение (26.4) для вероятности перехода  $v(t, x | t_0, x_0)$ , поскольку отличны от нуля только  $A_1$  и  $A_2$ .

17. Показать, что плотность вероятности  $v(x | t, x_0)$ , выражающаяся формулой (31.5), удовлетворяет уравнению Смолуховского

$$v(x | t, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x | t - \theta, y) v(y | \theta, x_0) dy, \quad 0 < \theta < t.$$

Решение. Разлагая  $t^n = [(t - \theta) + \theta]^n$  по формуле бинома, нетрудно убедиться, что для закона Пуассона  $P(n) \equiv P_n(t) = \frac{(nt)^n}{n!} e^{-nt}$  справедливо соотношение

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n P_{n-k}(t - \theta) P_k(\theta). \quad (1)$$

Далее, из выражения (31.2) для  $p_n(x | x_0)$  вытекает формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_m(x | y) p_k(y | x_0) dy = p_{m+k}(x | x_0), \quad (2)$$

справедливая и в том случае, когда  $m$  и (или)  $k$  — нули.

Записав  $v(x | t, x_0)$  в виде (31.4):

$$v(x | t, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) p_n(x | x_0),$$

получаем

$$v(x | t - \theta, y) v(y | \theta, x_0) = \sum_{k, m=0}^{\infty} P_m(t - \theta) P_k(\theta) p_m(x | y) p_k(y | x_0).$$

Интегрируя это выражение по  $y$  и учитывая (2), находим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} v(x | t - \theta, y) v(y | \theta, x_0) dy = \\ & = \sum_{k, m=0}^{\infty} P_m(t - \theta) P_k(\theta) p_{m+k}(x | x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x | x_0) \sum_{k=0}^n P_{n-k}(t - \theta) P_k(\theta). \end{aligned}$$

В силу (1) это равно  $v(x | t, x_0)$ .

18. Найти вероятность перехода, одномерную плотность вероятности и функцию корреляции в том частном случае пуассоновского процесса (31.5), когда апостериорная (после скачка) плотность вероятности  $\varphi(x_\nu | x_{\nu-1}) dx_\nu$  не зависит от  $x_{\nu-1}$ , т. е. равна  $\varphi(x_\nu) dx_\nu$ . Если  $x_\nu$  — скорость частицы в газе, то данный случай отвечает легкой частице (например, электрону), соударяющейся с тяжелыми частицами. Легкая частица практически «забывает» свою скорость до удара при каждом соударении.

**Решение.** Согласно (31.2) имеем  $p_n(x|x_0) = \varphi(x)$ , и поэтому вероятность перехода (31.5) равна

$$v(x|t, x_0) = e^{-n_1 t} \left\{ \delta(x - x_0) + \varphi(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n_1 t)^n}{n!} \right\} = e^{-n_1 t} \delta(x - x_0) + (1 - e^{-n_1 t}) \varphi(x), \quad (1)$$

т. е.  $x = x_0$  с вероятностью  $e^{-n_1 t}$  того, что в  $(0, t)$  не было соударений, или же  $x$  имеет распределение  $\varphi(x)$  с вероятностью  $1 - e^{-n_1 t}$  того, что в  $(0, t)$  было хотя бы одно соударение. Такая эволюция распределения (1) описывает, например, поведение скоростей в пучке легких частиц, проходящем через газ тяжелых частиц. Слагаемое с  $\delta(x - x_0)$  описывает частицы, не испытавшие соударений до момента  $t$  и поэтому все еще принадлежащие пучку, а второе слагаемое — частицы, рассеянные газом.

При  $t \rightarrow \infty$  устанавливается стационарное распределение  $w_1(x) = \varphi(x)$ , и, следовательно, двумерное распределение будет

$$w_2(x, t; x_0, 0) = w_1(x_0) v(x|t, x_0) = \varphi(x_0) [e^{-n_1 t} \delta(x - x_0) + (1 - e^{-n_1 t}) \varphi(x)].$$

Вычисляя при помощи  $w_2$  функцию корреляции, получаем

$$\psi(t) = \overline{xx_0} - \bar{x} \cdot \bar{x}_0 = \int xx_0 w_2(x, t; x_0, 0) dx dx_0 - \bar{x}^2 = \sigma^2 e^{-n_1 t},$$

где  $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ . Функция корреляции такая же, как у нормального марковского процесса (см. задачу 5), хотя распределение  $w_1$  — даже при гауссовом распределении  $\varphi(x)$  — не является нормальным.

**19.** Найти среднее время достижения границ при наличии постоянной систематической скорости  $A$ , направленной к верхней границе  $b > x$  (т. е.  $A > 0$ ), для случая, когда имеется нижняя граница  $a < x$  и когда она отсутствует. Коэффициент диффузии постоянен.

**Решение.** Уравнение (32.10) при постоянных  $A$  и  $B$

$$\frac{B}{2} \bar{i}'' + A \bar{i}' + 1 = 0$$

имеет общее решение

$$\bar{i}(x) = \frac{1}{A} \left( C_1 - x + \frac{1}{\lambda} \right) + C_2 e^{-\lambda x}, \quad \lambda = \frac{2A}{B}. \quad (1)$$

При наличии обеих границ, находя  $C_1$  и  $C_2$  из условий  $\bar{i}(a) = \bar{i}(b) = 0$ , получаем

$$\bar{i}(x) = \frac{1}{A} \left[ \frac{ae^{-\lambda b} - be^{-\lambda a} + (b-a)e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}} - x \right].$$

При  $A = 0$  (а значит, и  $\lambda = 0$ ) мы возвращаемся к формуле (31.15).

Если при  $A \neq 0$  отодвинуть нижнюю границу в бесконечность ( $a \rightarrow -\infty$ ), то получим

$$\bar{i}(x) = \frac{b-x}{A},$$

т. е. среднее время достижения верхней границы  $b$  равно в этом случае просто времени перемещения до нее с систематической скоростью  $A$ . Это следует и из общего решения (1), если наложить только одно условно  $\bar{i}(b) = 0$  и потребовать неотрицательности  $\bar{i}(x)$ . Это последнее требование сводится, как нетрудно видеть, к условию наиболее медленного роста  $\bar{i}(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$  (т. е. при удалении начальной точки  $x$  от границы  $b$ ), что достигается при отсутствии в (1) экспоненциального члена ( $C_2 = 0$ ).

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ

## § 33. Постановка вопроса

Мы уже отмечали, что марковские процессы можно рассматривать как непосредственное обобщение детерминированных процессов, а именно как отклик динамической системы на случайное воздействие. Конечно, это не означает, что отклик любой динамической системы на произвольное случайное воздействие обязательно будет процессом без вероятностного последствия. Напротив, можно предвидеть заранее, что для этого необходимо выполнение определенных условий. Однако в рамках того чисто вероятностного подхода, который был изложен в предыдущей главе, т. е. при выводе уравнений для функций распределения (вероятностей состояний, вероятностей перехода), мы, по существу, не анализировали вопроса ни о динамических свойствах системы, ни о вероятностных свойствах воздействий на нее. Применяя теорию марковских процессов (например, к автогенератору), мы были вынуждены поэтому апеллировать к различным качественным соображениям об условиях марковости отклика. Действительно, коэффициенты  $A_{jk}(t)$  в уравнениях Колмогорова для марковских процессов с дискретными состояниями (§ 23), коэффициенты  $A(x, t)$  и  $B(x, t)$  в уравнении Эйнштейна — Фоккера для диффузионных марковских процессов (§§ 26, 27), а также ядро  $\varphi(x|t, x_0)$  и вероятность  $a(t, x)$  в уравнении Колмогорова — Феллера в случае скачкообразного марковского процесса (§ 31) — все эти величины появились в результате определенных предположений о том, как должны вести себя искомые вероятности перехода на бесконечно малых промежутках времени. Связь этих функций с динамическими характеристиками системы и с вероятностными свойствами случайных воздействий установлена не была.

Обратимся теперь к другому подходу к случайным процессам в динамических системах, при котором исходными являются

уравнения не для вероятностей перехода (или других функций распределения), а для самого случайного отклика  $\xi(t)$ . Этот подход был введен Ланжевеном в связи с теорией броуновского движения [1], но его значение и возможности значительно шире. Достаточно указать на то, что он не ограничен требованием марковости отклика  $\xi(t)$ .

Для пояснения постановки вопроса возьмем случай *линейной* динамической системы (что тоже не обязательно), описываемой, например, дифференциальным уравнением

$$\hat{L}\xi(t) = f(t). \quad (33.1)$$

Здесь  $f(t)$  — внешняя сила, а  $L$  — линейный дифференциальный оператор, который в общем случае тоже явно зависит от времени  $t$  — через коэффициенты  $a_k(t)$  при производных:

$$\hat{L} = \sum_{k=0}^n a_k(t) \frac{d^k}{dt^k}$$

(*параметрическое воздействие*). Пусть динамическая задача, поставленная уравнением (33.1) с заданными начальными условиями  $\xi^{(k)}(0)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), имеет единственное решение  $\xi(t)$ . Предположим теперь, что и сила  $f(t)$ , и коэффициенты  $a_k(t)$  и начальные значения  $\xi^{(k)}(0)$  *случайны*, причём почти для всех реализаций этих случайных функций и величин (т. е. почти наверное) остаются в силе условия единственности решения  $\xi(t)$ . Тогда уравнение (33.1) порождает множество реализаций  $\xi(t)$  и естественно ожидать, что все вероятностные свойства этого (теперь уже случайного) процесса  $\xi(t)$  будут вполне определены статистикой исходных случайных функций и величин. Если это справедливо, то можно рассчитывать и на то, что в частном случае, когда отклик  $\xi(t)$  оказывается диффузионным марковским процессом, статистика исходных функций и величин должна *определять* коэффициенты  $A(x, t)$  и  $B(x, t)$  в уравнении Эйнштейна — Фоккера для вероятности перехода  $v(x, t | x_0, t_0)$  случайного процесса  $\xi(t)$ .

Конечно, здесь возникает ряд чисто математических вопросов. Например, в каких случаях можно получить дифференциальные уравнения для  $\omega_n$  или по крайней мере для любых моментов  $\xi(t)$ ? Когда обеспечена марковость процесса  $\xi(t)$ , которая, как сказано, вовсе не обязательна при описанной постановке вопроса? И т. п. Мы не можем и не будем пытаться анализировать эти вопросы во всей полноте, тем более что не все они уже имеют ответ, а ограничимся лишь некоторыми результатами, представляющими непосредственный интерес для приложений.

Прежде всего нам надо познакомиться с еще одним классом случайных функций, который играет важную роль именно в тех случаях, когда отклик  $\xi(t)$  динамической системы оказывается марковским процессом.

### § 34. Случайные функции с независимыми приращениями

Мы уже неоднократно встречались с такими функциями, хотя соответствующий термин еще не применялся. Примерами, с которыми мы уже имели дело, являются: перемещение частицы при броуновском движении как поступательном (§§ 7, 24), так и вращательном (§ 30); флуктуационный набег фазы в ламповом генераторе (§ 29); заряд, перенесенный потоком электронов на анод лампы в условиях, когда отсутствует явление депрессии дробового шума (§§ 5, 10). Во всех этих примерах речь идет о такой случайной функции  $\xi(t)$ , *приращения* которой на *неперекрывающихся* интервалах времени *независимы*.

Разбив промежуток времени  $(0, t)$  на произвольное число  $n$  последовательных интервалов  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  ( $t_0 = 0, t_n = t$ ), всегда можно поэтому представить значение  $\xi(t)$  как сумму *независимых* слагаемых — значения  $\xi(0)$  и приращений  $\Delta_i \xi = \xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)$  функции  $\xi(t)$  на этих последовательных интервалах:

$$\xi(t) = \xi(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i \xi. \quad (34.1)$$

Это справедливо для пути, пройденного броуновской частицей за время  $t$ , для числа распавшихся за время  $t$  радиоактивных ядер (при условии, что еще можно пренебречь убылью нераспавшихся ядер), для флуктуационного ухода фазы лампового генератора и т. п. Вследствие независимости слагаемых в (34.1), дисперсия  $\xi(t)$  будет

$$D[\xi(t)] = D[\xi(0)] + \sum_{i=0}^{n-1} D[\Delta_i \xi]. \quad (34.2)$$

Если, в частности, рассматриваемая функция с независимыми приращениями  $\xi(t)$  почти наверное *непрерывна*, то при увеличении  $n$  независимые слагаемые  $\Delta_i \xi$  могут быть сделаны сколь угодно малыми. Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , мы можем на основании центральной предельной теоремы заключить, что функция  $\xi(t) - \xi(0)$ , где  $\xi(t)$  — непрерывная функция с независимыми приращениями, распределена нормально с дисперсией

$$\int_0^t B(t) dt, \text{ причем } B(t) > 0.$$

Допустим теперь, что процесс рассматриваемого типа *однороден по  $t$* . Это означает, что распределение  $\Delta_i \xi$  зависит только от длительности интервала  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  (но по-прежнему не зависит от значений, принятых функцией в моменты времени  $\theta \leq t_i$ ). Примем, что  $\xi(0) = 0$ . Тогда  $\xi(t)$  равно сумме своих приращений на интервале  $(0, t)$ :

$$\Delta_i \xi = \xi(t_{i+1}) - \xi(t_i) \equiv \eta(t_{i+1} - t_i) = \eta(\Delta t_i),$$

причем  $\xi(t) = \eta(t - 0) = \eta(t)$ . Формулы (34.1) и (34.2) примут вид

$$\xi(t) = \eta(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta(\Delta t_i), \quad (34.3)$$

$$D[\eta(t)] = \sum_{i=0}^{n-1} D[\eta(\Delta t_i)]. \quad (34.4)$$

Единственное неотрицательное решение функционального уравнения (34.4) — это линейная однородная функция

$$D[\xi(t)] = Bt \quad (B > 0), \quad (34.5)$$

т. е. диффузионный закон. Таким образом, *однородная непрерывная функция с независимыми приращениями распределена по нормальному закону с дисперсией, пропорциональной  $t$* . Мы имели возможность убедиться в этом в § 24, когда перешли от случайной функции с независимыми приращениями, имеющей дискретные возможные значения (скачки на  $\pm a$  с вероятностями, не зависящими от номера скачка), к непрерывному изменению ( $a \rightarrow 0$ ). Если же с самого начала задача ставилась для непрерывной функции, то к тому же результату приводило предположение об однородности случайных толчков ( $B = \text{const}$ , §§ 27, 29).

Обратим теперь внимание на следующий существенный факт: непрерывная функция с независимыми приращениями *не дифференцируема*<sup>1)</sup>. Действительно, дисперсия приращения  $\Delta \xi = \xi(t + \Delta t) - \xi(t)$  — величина порядка  $\Delta t$ :

$$D[\Delta \xi] \sim \Delta t$$

(для однородной функции имеем просто  $D[\Delta \xi] = B \Delta t$ , где  $B = \text{const}$ ). Следовательно,

$$D\left[\frac{\Delta \xi}{\Delta t}\right] = \frac{1}{(\Delta t)^2} D[\Delta \xi] \sim \frac{1}{\Delta t},$$

т. е. в любой момент  $t$  дисперсия нормально распределенной величины  $\Delta \xi / \Delta t$  неограниченно растет при  $\Delta t \rightarrow 0$ , а это и означает,

<sup>1)</sup> Ни в одном из вероятностных смыслов этого понятия (§ 19).

что производной  $d\xi/dt$  не существует ни в одной точке  $t$  (§ 19). Выходит, таким образом, что если пройденный брауновской частицей путь  $s(t)$ , или поступивший на анод лампы заряд  $q(t)$ , или флукуационный набег фазы в генераторе  $\varphi(t)$  рассматриваются как непрерывные функции с независимыми приращениями, то не существует ни мгновенной скорости  $u = ds/dt$ , ни мгновенной силы тока  $I = dq/dt$ , ни мгновенной частоты  $\omega = d\varphi/dt$ . Между тем физики и инженеры охотно пользуются случайными функциями  $u(t)$ ,  $I(t)$ ,  $\omega(t)$  и т. п., не впадая при этом в ошибки в получаемых результатах. Целесообразно поэтому несколько задержаться на данном вопросе.

Будем для наглядности рассуждать над одномерным поступательным движением брауновской частицы, считая, что  $\xi(t) \equiv s(t)$  — однородная функция с независимыми приращениями. Для простоты примем, что  $\bar{s}(t) = 0$ .

Переход в (27.1) к пределу при  $n \rightarrow \infty$  (§ 19) приводит к выражению  $s(t)$  в виде интеграла

$$s(t) = \int_0^t ds(t'),$$

где  $ds(t')$  — приращение пути на элементе  $(t', t' + dt')$ . Следовательно,

$$D[s(t)] = \overline{s^2(t)} = \int_0^t \int_0^t \overline{ds(t') ds(t'')}.$$

Согласно (34.5) двукратный интеграл в правой части должен быть равен  $Bt$ , что возможно, только если функция корреляции для  $ds(t)$  имеет вид

$$\overline{ds(t') ds(t'')} = B \delta(t' - t'') dt' dt''. \quad (34.6)$$

Конечно, это прямое следствие независимости приращений на неперекрывающихся интервалах.

Если формально оперировать мгновенной скоростью  $u(t) = ds/dt$ , то

$$\overline{ds(t') ds(t'')} = \overline{u(t') u(t'')} dt' dt''.$$

Сопоставление с (34.6) показывает, что  $u(t)$  надо при этом считать так называемым *дельта-коррелированным* случайным процессом:

$$\overline{u(t') u(t'')} = B \delta(t' - t''). \quad (34.7)$$

Соответственно средний квадрат  $u(t)$  при всяком  $t$  бесконечно велик. Нетрудно выяснить, в каком пункте возникает такого рода особенность.

Допущение независимости приращений  $\Delta s$  на неперекрывающихся интервалах  $\Delta t$  справедливо при условии, что за время  $\Delta t$  частица испытывает очень много случайных ударов:  $\Delta t \gg \phi$ , где  $\phi$  — среднее время между ударами. Но определение непрерывности  $s(t)$  требует, чтобы при *неограниченном уменьшении*  $\Delta t$  мы имели  $\Delta s \rightarrow 0$  (хотя бы по вероятности). Оба условия строго совместимы только при  $\phi = 0$ , т. е. при *бесконечно-частых* случайных ударах, чем и исключается существование мгновенной скорости  $u = ds/dt$ .

Если же, как это имеет место в действительности,  $\phi \neq 0$ , то за время  $t < \phi$  может не произойти ни одного случайного толчка, а значит,  $s(t)$  уже не будет функцией с независимыми приращениями. Мгновенная скорость  $u(t)$  тогда существует и имеет время корреляции порядка  $\phi$ .

Пусть, например,

$$\overline{u(t')u(t'')} = \frac{B}{2\phi} e^{-|t'-t''|/\phi} \quad (\overline{u^2} = \frac{B}{2\phi}). \quad (34.8)$$

Тогда, поскольку  $\Delta s = \int_t^{t+\Delta t} u(t') dt'$ , имеем

$$\begin{aligned} D[\Delta s] &= \overline{(\Delta s)^2} = \iint_t^{t+\Delta t} \overline{u(t')u(t'')} dt' dt'' = \\ &= 2 \int_t^{t+\Delta t} e^{-t'/\phi} dt' \int_t^{t'} \frac{B}{2\phi} e^{t''/\phi} dt'' = B [\Delta t - \phi (1 - e^{-\Delta t/\phi})]. \end{aligned} \quad (34.9)$$

При  $\Delta t \ll \phi$  получаем

$$\overline{(\Delta s)^2} \approx \frac{B}{2\phi} (\Delta t)^2 = \overline{u^2} (\Delta t)^2, \quad (34.10)$$

так что для всякого  $\Delta t > 0$  неограниченное уменьшение  $\phi$  влечет за собой  $\overline{(\Delta s)^2} \rightarrow \infty$ . Но для  $\Delta t \gg \phi$  функция  $s(t)$  ведет себя так, как *если бы* ее приращения были независимы, и, в частности, как это следует из (34.9), вступает в силу диффузионный закон

$$\overline{(\Delta s)^2} = B \Delta t.$$

Разумеется, эти заключения не связаны со специальным выбором экспоненциальной функции корреляции (34.8) для  $u(t)$ . Существенно лишь то, является ли эта функция корреляции достаточно острой в масштабе интервала  $\Delta t$  (т. е.  $\phi \ll \Delta t$ ) или же этот интервал слишком мал ( $\Delta t \ll \phi$ ).

При учете отличного от нуля времени корреляции  $\phi$  мы не можем переходить в (34.2) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , считая при



этом, что приращения  $\Delta_i \xi$  на интервалах времени  $\Delta t_i$  остаются независимыми. Увеличение  $n$  ограничено условием, что интервалы  $\Delta t_i \sim t/n$  еще велики по сравнению с  $\vartheta$ , т. е.  $n$  ограничено и сверху ( $1 \ll n \ll t/\vartheta$ ). Тем самым, и нормальность распределения функции  $\xi(t) - \xi(0)$  имеет место лишь приближенно, но *тем точнее, чем меньше  $\vartheta$* .

Заметим теперь, что условие  $\Delta t_i \gg \vartheta$  для брауновской частицы означает  $\Delta t \gg 10^{-21}$  сек. Таким образом, для промежутков времени, которые в макроскопических масштабах вполне могут считаться бесконечно малыми (скажем,  $10^{-12}$  сек), число случайных ударов еще огромно ( $\sim 10^9$ ). Всякий раз, когда имеет место такое положение вещей, т. е. когда времена порядка  $\vartheta$  в реальных условиях неуловимы и никак не проявляются в наблюдаемых явлениях, практически все происходит так, как будто  $\vartheta = 0$ <sup>1)</sup>. Наглядная и удобная идеализация  $\vartheta = 0$  позволяет рассматривать  $s(t)$  как непрерывную функцию с независимыми приращениями и вместе с тем, если помнить, что *на самом деле существует некоторое достаточно малое  $\vartheta \neq 0$* , позволяет не избегать мгновенной скорости  $u = ds/dt$ , приписывая ей дельта-корреляцию (34.7). В сущности, это не связано ни с какими математическими затруднениями, так как одно из основных «свойств»  $\delta$ -функции — «работать» только под знаком интеграла.

### § 35. Простой пример стохастического дифференциального уравнения

Вернемся к динамическому уравнению первого порядка (система с 1/2 степени свободы), примером которого было уравнение для малых флуктуаций амплитуды в автогенераторе [первая формула (29.1)], т. е. уравнению вида

$$\dot{x} = -\beta x. \quad (35.1)$$

С таким же уравнением мы имеем дело в задачах о скорости  $u$  одномерного движения частицы массы  $m$  в среде с вязким трением  $F = -hu$  ( $\beta = h/m$ ), или о смещении  $s$  этой частицы, но лишенной массы и привязанной к пружине с коэффициентом упругости  $k$  ( $\beta = k/h$ ), или о напряжении  $V$  на емкости  $RC$ -контура ( $\beta = 1/RC$ ), или о токе  $I$  в  $LR$ -контуре ( $\beta = R/L$ ) и т. д.

В соответствии со сказанным в § 28, мы рассчитываем на то, что при действии на динамическую систему (35.1) достаточно «густых» (по сравнению со временем установления  $1/\beta$ ) однородных толчков отклик  $x(t)$  будет непрерывным однородным

<sup>1)</sup> Со спектральной точки зрения это означает, что верхняя граница используемых частот лежит гораздо ниже  $1/\vartheta$  (см. § 43).

марковским процессом с вероятностью перехода  $v(x|t, x_0)$ , удовлетворяющей уравнению Эйнштейна — Фоккера

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \beta \frac{\partial x v}{\partial x} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (35.2)$$

т. е. уравнению (29.2), но в одномерном случае, когда нет зависимости  $v$  от второй переменной. По способу, мотивированному в § 28, коэффициент  $A(x, t)$  в (35.2) приравнен выражению для  $\dot{x}$ , т. е. правой части уравнения (35.1):  $A = -\beta x$ .

При начальном условии

$$v(x|0, x_0) = \delta(x - x_0)$$

решение уравнения (35.2) выражается нормальным законом

$$v(x|t, x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}, \quad (35.3)$$

где

$$\bar{x} = x_0 e^{-\beta t}, \quad \sigma^2 = \frac{B}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \quad (35.4)$$

[см. (29.5) и (29.6)]. В пределе при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. для  $t \gg 1/\beta$ , формула (35.3) переходит в не зависящее от  $x_0$  стационарное распределение  $w_1(x)$  с  $\bar{x} = 0$  и  $\sigma_\infty^2 = B/2\beta$ . В задаче о скорости  $u$  частицы в вязкой среде, когда  $x \equiv u$  и  $\beta = h/m$ , распределение  $w_1(u)$  должно быть максвелловским:

$$w_1(u) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-mu^2/2kT},$$

так что  $\sigma_\infty^2 = kT/m = B/2\beta$ , откуда  $B = 2kTh/m^2$ . Аналогичные выражения для  $B$  можно написать и в остальных перечисленных выше задачах — просто как следствие теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы: средняя энергия системы с  $1/2$  степени свободы должна быть равна  $kT/2$  (в данном случае  $m\bar{u}^2/2 = m\sigma_\infty^2/2 = kT/2$ ).

Такова при сделанных исходных допущениях чисто вероятностная схема решения задачи о флуктуациях. Теперь мы поступим иначе. Введем в уравнение (35.1) случайную (или флуктуационную) силу  $f(t)$ :

$$\dot{x} = -\beta x + f(t). \quad (35.5)$$

Если для конкретности рассуждать над задачей о движении частицы в неограниченной вязкой среде, то речь идет об уравнении движения

$$m\dot{u} = -hu + \tilde{F}(t), \quad (35.6)$$

в котором воздействие среды на частицу разбито на две части: систематическую силу трения  $F = -hu$  и случайную силу  $F(t)$ .

Предполагая, что систематическая сила трения выражается законом Стокса (для сферической частицы радиуса  $a$  имеем  $h = 6\pi a\eta$ , где  $\eta$  — вязкость жидкости), мы делаем два допущения.

Во-первых, должно быть выполнено условие *ламинарности* обтекания частицы, т. е. малости числа Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\rho a u}{\eta},$$

где  $\rho$  — плотность жидкости. Если для  $u$  взять значение средней квадратичной скорости теплового движения [ $u \sim (kT/\rho_1 a^3)^{1/2}$ ,  $\rho_1$  — плотность вещества частицы], т. е. учесть самые быстрые дрожания частицы, то

$$\text{Re} = \frac{\rho}{\eta} \left( \frac{kT}{\rho_1 a} \right)^{1/2}.$$

При  $\eta/\rho \sim 10^{-2}$ ,  $\rho \sim \rho_1 \sim 1$ ,  $kT \sim 10^{-13}$  имеем  $\text{Re} \sim 3 \cdot 10^{-5} a^{-1/2}$ , что даже для молекулярных размеров  $a \sim 10^{-8}$  дает значение  $\text{Re} \sim 0,3$ . Таким образом, условие ламинарности выполнено.

Во-вторых, *полная* систематическая сила, действующая на шар, движущийся в вязкой несжимаемой жидкости, равна, согласно Буссине,

$$F = -hu - m'\dot{u} - 6\sqrt{\frac{hm'}{\pi}} \int_0^\infty \dot{u}(t - \alpha^2) d\alpha,$$

где  $m' = 2\pi a^3 \rho/3$  — присоединенная масса, равная половине массы, вытесненной частицей жидкости. В уравнении (35.6) из полной силы  $F$  удержан только первый член. Но при  $\rho \sim \rho_1$  второй и третий члены одного порядка с  $m'\dot{u}$ . В отношении  $m'\dot{u}$  это несущественно, так как роль этого члена сводится лишь к изменению эффективной массы частицы. Более важен третий член, выражающий вязкое гидродинамическое последствие (см. §§ 15 и 21), при учете которого система приобретает бесконечное множество степеней свободы.

При наличии вязкого (а тем самым и вероятностного) последствия средний квадрат смещения частицы был найден В. В. Владимирским и Я. П. Терлецким [2]. Обычное выражение оказывается справедливым лишь для промежутков времени  $t$ , достаточно больших по сравнению со временем релаксации ( $t \gg (m + m')/h$ ). Мы ограничимся упрощенной постановкой задачи, основанной на уравнении (35.5).

Мы будем обращаться с этим стохастическим уравнением так, как если бы это было обычное дифференциальное уравне-

ние. Проинтегрировав его при начальном условии  $x(0) = x_0$ <sup>1)</sup>, получаем

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta \theta} f(\theta) d\theta. \quad (35.7)$$

Так как по предположению  $\overline{f(t)} = 0$ , усреднение (35.7) по ансамблю случайных сил дает

$$\bar{x} = x_0 e^{-\beta t}, \quad (35.8)$$

т. е. для  $\bar{x}$  получается тот же динамический закон, что и из уравнения (35.1), и из уравнения Эйнштейна — Фоккера (35.2).

Найдем теперь дисперсию  $x(t)$ . Согласно (35.7) и (35.8)

$$D[x(t)] = \overline{(x - \bar{x})^2} = e^{-2\beta t} \iint_0^t e^{\beta(\theta + \theta')} \langle f(\theta) f(\theta') \rangle d\theta d\theta', \quad (35.9)$$

и, следовательно, для получения  $D[x]$  надо задать функцию корреляции случайной силы  $\psi_f(\theta, \theta') = \langle f(\theta) f(\theta') \rangle$ . Можно задать *любую* функцию корреляции, допускаемую общими ограничениями ее вида, но мы сделаем специальное предположение, а именно примем, что  $f(t)$  — *стационарный дельта-коррелированный* процесс:

$$\psi_f(\theta - \theta') = \langle f(\theta) f(\theta') \rangle = C \delta(\theta - \theta'), \quad (35.10)$$

где  $C$  — постоянная. Заметим, что тем самым импульс силы

$$p(t) = \int_0^t f(\theta) d\theta$$

представляет собой непрерывную случайную функцию с независимыми приращениями и, следовательно, распределен нормально при любом  $t$  (§ 34).

Подставив (35.10) в (35.9), находим

$$\begin{aligned} \sigma^2 = D[x] &= C e^{-2\beta t} \iint_0^t e^{\beta(\theta + \theta')} \delta(\theta - \theta') d\theta d\theta' = \\ &= C e^{-2\beta t} \int_0^t e^{2\beta\theta} d\theta = \frac{C}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}). \end{aligned} \quad (35.11)$$

<sup>1)</sup> Здесь и далее мы будем считать начальные условия детерминированными. В противном случае  $x_0$  было бы случайной величиной, заданной своим распределением  $\omega(x_0) dx_0$ , и вычисляемые далее условные моменты (т. е. моменты при фиксированном значении  $x_0$ ) надо было бы усреднять еще и по этому распределению.

Если положить  $C = B$ , то это совпадает с выражением (35.4) для  $\sigma^2$ , полученным из уравнения Эйнштейна — Фоккера (35.2).

Мы нашли только моменты  $\bar{x}$  и  $D[x]$ , но можно утверждать больше. Поскольку приращение импульса  $\Delta p = f(t)\Delta t$  распределено при всяком  $\Delta t$  нормально, постольку разность  $x - \bar{x}$  представляет собою, согласно (35.7), сумму (или, точнее, предел суммы) нормально распределенных величин. Следовательно, распределение  $x - \bar{x}$  тоже дается гауссовым законом с дисперсией (35.11). Это *условное* распределение (при условии  $x(0) = x_0$ ), если принять  $C = B$ , просто совпадает с (35.3). Далее, нетрудно убедиться прямой подстановкой, что такого вида условные вероятности удовлетворяют уравнению Смолуховского (являются вероятностями перехода), т. е. процесс  $x(t)$  оказывается марковским. Таким образом, если в стохастическом дифференциальном уравнении (35.5) случайная сила  $f(t)$  стационарна и дельта-коррелирована [см. (35.10)], то отклик  $x(t)$  — диффузионный марковский процесс, у которого вероятность перехода удовлетворяет уравнению Эйнштейна — Фоккера с  $B = C$ .

Оба подхода — основанный на уравнении Эйнштейна — Фоккера и основанный на стохастическом дифференциальном уравнении для случайной функции  $x(t)$  — оказываются в рассмотренной задаче равносильными. Это, конечно, не означает их тождества за пределами этой задачи. Уравнение Эйнштейна — Фоккера обладает, например, несомненным преимуществом в тех случаях, когда наложены определенные ограничения множества возможных значений случайной функции  $x(t)$  (наличие отражающих или поглощающих стенок и т. п.), учитываемые просто соответствующими граничными условиями. При ланжевеновской постановке задачи введение такого рода ограничений довольно сложно. С другой стороны, как это уже было подчеркнуто, ланжевеновский метод не требует, чтобы сила обязательно была дельта-коррелирована.

Стоит, быть может, отметить, что как раз в случае дельта-коррелированной силы оперирование дифференциальным уравнением (35.5) имеет в известном смысле условный характер. Это уравнение написано не для  $\bar{x}$ , а для мгновенного значения  $x(t)$ . Но при бесконечно-частых толчках отклик  $x(t)$  — *не дифференцируемая* функция, т. е.  $\dot{x}(t)$  не существует (ни в каком из вероятностных смыслов понятия производной). Таким образом, все «дифференциальное уравнение» имеет лишь некий *символический* смысл. Это надо понимать следующим образом.

Формальное интегрирование уравнения (35.5) приводит к решению (35.7) для  $x(t)$ , в котором уже нет никаких неприятностей, поскольку оно содержит дельта-коррелированную силу только под интегралом. Другими словами, уравнение (35.5) —

это (в рассматриваемом случае дельта-коррелированной силы) математически некорректная запись для последующего — уже вполне осмысленного и, в конечном счете, единственно интересующего нас — *решения* данного уравнения. Оправданием такого подхода являются хорошо известные преимущества оперирования дифференциальными уравнениями при *постановке* задачи — возможность исходить из общих динамических законов, возможность использования всего существующего арсенала математических средств для получения решения и т. д. Мы не говорим уже о том, что при не дельта-коррелированной  $f(t)$  все оговорки становятся излишними: стохастические дифференциальные уравнения для самих случайных функций приобретают тогда вполне определенное математическое содержание и, сверх того, позволяют выйти за пределы класса марковских процессов.

Постоянная  $C$  в функции корреляции (35.10) характеризует, очевидно, интенсивность случайных толчков. Вернемся к переменным, в которых сила и отклик системы *энергетически сопряжены*, т. е. произведение силы на производную отклика представляет собой мощность, отдаваемую системе. Это справедливо, например, для силы  $F(t)$  в уравнении (35.6), так как отдаваемая частице мощность равна  $F(t)\dot{u}$ . Уравнение (35.6) переходит в (35.5), будучи поделено на массу частицы  $m$ . Таким образом,  $f(t) = \dot{F}(t)/m$ , так что функция корреляции *настоящей* силы  $\dot{F}(t)$ , в соответствии с (35.10), равна

$$\langle \dot{F}(t) \dot{F}(t') \rangle = m^2 \langle f(t) f(t') \rangle = m^2 C \delta(t - t') \equiv \tilde{C} \delta(t - t').$$

Мы установили выше, что  $C = B$  и что в задаче о скорости брауновской частицы  $B = 2kTh/m^2$ . Следовательно, постоянная  $\tilde{C}$  в функции корреляции силы  $\dot{F}(t)$  равна

$$\tilde{C} = m^2 C = m^2 B = 2kTh, \quad (35.12)$$

т. е. связана *только с коэффициентом систематического трения*  $h$ . В задаче о токе в  $LR$ -контуре под  $F(t)$  надо понимать случайную тепловую э. д. с.  $e(t)$  (§ 28), а под  $h$  — активное сопротивление контура  $R$ , так что корреляционная постоянная для  $e(t)$  будет  $\tilde{C} = 2kTR$ :

$$\langle e(t) e(t') \rangle = 2kTR \delta(t - t'). \quad (35.13)$$

Метод стохастических дифференциальных уравнений позволяет продвинуться и дальше. Решение (35.7) для  $x$  — это скорость  $u$  в задаче о токе в брауновской частице или сила тока  $I$  в  $LR$ -контуре. Но  $u = \dot{s}$ , а  $I = \dot{q}$ , где  $s$  — пройденный частицей путь, а  $q$  — перенесенный через сечение цепи заряд. Следовательно, мы можем получить статистические характеристики и для этих величин. Будем говорить о  $s$ .

Интегрируя выражение (35.7) для  $u = ds/dt$  при (детерминированном) условии  $s(0) = s_0$ , получаем

$$s - s_0 = \frac{u_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \frac{1}{\beta} \int_0^t [1 - e^{-\beta(t-\theta)}] f(\theta) d\theta. \quad (35.14)$$

Отсюда следует, что

$$\bar{s} = s_0 + \frac{u_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t}). \quad (35.15)$$

Очевидно, для величины

$$s - \bar{s} = \frac{1}{\beta} \int_0^t [1 - e^{-\beta(t-\theta)}] f(\theta) d\theta \quad (35.16)$$

справедливы те же соображения, на основании которых мы пришли к выводу, что величина  $x - \bar{x}$ , т. е. в нашем случае  $u - \bar{u}$ , распределена нормально. Таким образом, вероятность перехода для  $s(t)$  есть

$$v(s | t, s_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D[s]}} \exp \left\{ -\frac{(s - \bar{s})^2}{2D[s]} \right\}.$$

Расчет дисперсии  $s(t)$  проводится так же, как и для  $u(t)$ . В обоих случаях речь идет о случайной функции вида

$$R(t) - \bar{R} = \int_0^t H(t, \theta) f(\theta) d\theta. \quad (35.17)$$

Следовательно, в силу (35.10), имеем

$$\begin{aligned} D[R] &= \overline{(R - \bar{R})^2} = \int_0^t \int_0^t H(t, \theta) H(t, \theta') \overline{f(\theta) f(\theta')} d\theta d\theta' = \\ &= C \int_0^t H^2(t, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Если  $H$  зависит только от разности  $t - \theta$ , то, как нетрудно видеть,

$$D[R] = C \int_0^t H^2(\theta) d\theta. \quad (35.18)$$

Для  $s(t)$  функция  $H$ , согласно (35.16), есть

$$H(\theta) = \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta\theta}).$$

Подставив это в (35.18) и воспользовавшись (35.12), получаем

$$D[s] = \frac{kT}{\beta^2 m} (2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}).$$

При  $\beta t \ll 1$  это дает

$$D[s] = \frac{2kT}{3} \frac{\beta t^3}{m} = \frac{2kTh}{3m^2} t^3.$$

Строго говоря, для брауновской частицы мы не имеем права рассматривать времена  $t \ll 1/\beta$  (времена релаксации), так как задача поставлена без учета вязкого последействия, но в задаче о  $LR$ -контуре это ограничение отпадает. В противоположном случае  $\beta t \gg 1$  имеем

$$D[s] = \frac{2kT}{\beta m} t = \frac{2kT}{h} t \quad (35.19)$$

— формула, полученная впервые Эйнштейном. Она показывает, что оживленность брауновского движения растет с повышением температуры и с уменьшением коэффициента вязкого трения  $h$ . Масса  $m$  в (35.19) не входит, что позволяет получить эту формулу из уравнения для  $s(t)$ , пренебрегая в нем инерцией, т. е. из уравнения

$$hs = \tilde{F}(t),$$

откуда

$$s - s_0 = \frac{1}{h} \int_0^t \tilde{F}(t) dt.$$

### § 36. Общий случай уравнения первого порядка и системы таких уравнений при гауссовых дельта-коррелированных воздействиях

Рассмотрим теперь более общий случай *нелинейной* и *неавтономной* системы с  $1/2$  степени свободы (системы первого порядка), описываемой дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = \Phi[x, t; F(x, t)], \quad (36.1)$$

где  $\Phi$  — детерминированная функция  $x$ ,  $t$  и воздействия  $F(x, t)$ . Последнее предполагается случайным, вообще говоря, нестационарным процессом, зависящим и от состояния  $x$  самой системы.

Разбив правую часть уравнения (36.1) на ее среднее значение [по ансамблю случайных воздействий  $F(x, t)$ ] и флуктуацию — случайное отклонение от этого среднего:

$$\langle \Phi[x, t; F(x, t)] \rangle = X(x, t), \quad \Phi = \langle \Phi \rangle + f(x, t),$$



всегда можно записать (36.1) в виде уравнения с *аддитивным* случайным воздействием:

$$\dot{x} = X(x, t) + f(x, t), \quad (36.2)$$

где  $X$  — детерминированная функция, а  $\langle f(x, t) \rangle = 0$ .

Вопрос о том, при каких условиях решение  $x(t)$  будет — в данном более общем случае — непрерывным марковским процессом, строго говоря, требует отдельного исследования, но мы ограничимся пока некоторыми наглядными соображениями и фактами, касающимися линейного уравнения (35.5).

Марковость решения уравнения (35.5) приближенно обеспечивается выполнением условия  $\vartheta_x \gg \vartheta_f$ , где  $\vartheta_x = 1/\beta$  — время установления системы, а  $\vartheta_f$  — время корреляции стационарной силы  $f(t)$ . Если считать  $f(t)$  дельта-коррелированной, т. е. положить  $\vartheta = 0$ , то указанное условие выполняется при любом сколь угодно малом  $\vartheta_x$  и процесс  $x(t)$  оказывается марковским вполне строго. Физически весьма правдоподобно, что для марковости решения уравнения (36.2) тоже необходима корреляция  $f(x, t)$ , кратковременная по сравнению с временными масштабами процесса  $x(t)$ . Конечно, понятие времени корреляции  $\vartheta_f$  для *нестационарного* процесса  $f(x, t)$ , равно как и понятие «времени установления»  $\vartheta_x$  для *нелинейной неавтономной* динамической системы, несколько расплывчато. Ясно, однако, что речь идет о *мгновенных* скоростях изменения  $x(t)$  и моментов функции  $f(x, t)$ . Наше условие заключается в том, чтобы при всяком  $t$  можно было выбрать интервал времени  $\tau$  такой, что

$$\vartheta_x \gg \tau \gg \vartheta_f.$$

Таким образом, за макроскопически бесконечно малое время  $\tau$  величина  $x(t)$  практически не меняется, тогда как функция корреляции процесса  $f(x, t)$ , зависящая от  $t$  и  $t' = t + \Delta t$ , обращается в нуль уже при  $\Delta t$  порядка  $\vartheta_f \ll \tau$ . Если  $\vartheta_f = 0$ , т. е. функция корреляции процесса  $f(x, t)$  пропорциональна  $\delta(t - t')$ :

$$\langle f(x, t) f(x', t') \rangle = C(x, x', t) \delta(t - t'), \quad (36.3)$$

то выдвигаемое условие будет выполняться даже при  $\tau \rightarrow 0$  (всюду, где скорость изменения  $x(t)$  конечна, т. е.  $\vartheta_x \neq 0$ ).

Допуская, что этим обеспечивается марковость процесса  $x(t)$ , т. е. что для него существует вероятность перехода  $v(t, x | t_0, x_0)$ , удовлетворяющая уравнению Эйнштейна — Фоккера

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial A(x, t) v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B(x, t) v}{\partial x^2}, \quad (36.4)$$

подсчитаем входящие сюда величины  $A(x, t)$  и  $B(x, t)$  в соответствии с их определениями (26.1) и (26.2):

$$A(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t}, \quad B(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{(\Delta x)^2}}{\Delta t}. \quad (36.5)$$

Усреднение в этих выражениях понималось ранее как усреднение по вероятности перехода  $v(t + \Delta t, x + \Delta x | t, x)$ , но теперь, поскольку мы ожидаем, что стохастическое уравнение (36.2) определяет *все* вероятностные свойства  $x(t)$  [и, в частности, все моменты  $x(t)$ ] через заданные вероятностные характеристики силы  $f(x, t)$ , естественно выполнять усреднение по ансамблю реализаций  $f(x, t)$ .

Согласно (36.2) приращение  $x(t)$  за малое время  $\tau$  есть

$$\Delta x(t, t + \tau) = \int_t^{t+\tau} \{X[x(\theta), \theta] + f[x(\theta), \theta]\} d\theta. \quad (36.6)$$

Как для  $X$ , так и для  $f$  можно написать

$$X[x(\theta), \theta] = X[x(t) + \Delta x(t, \theta), \theta] \approx X[x(t), \theta] + X'_x[x(t), \theta] \cdot \Delta x(t, \theta).$$

Для  $\Delta x(t, \theta)$  уже можно ограничиться первым приближением, т. е. положить в (36.6)  $x(\theta) = x(t)$ :

$$\Delta x(t, \theta) \approx \int_t^\theta \{X[x(t), \theta'] + f[x(t), \theta']\} d\theta'.$$

Подставляя это в предыдущее равенство, а результат — в (36.6), получаем

$$\begin{aligned} \Delta x(t, t + \tau) = & \int_0^{t+\tau} d\theta \{X(x, \theta) + f(x, \theta) + \\ & + \int_t^\theta [X'_x(x, \theta) + f'_x(x, \theta)] [X(x, \theta') + f(x, \theta')] d\theta'\}. \end{aligned}$$

При усреднении этого выражения надо учесть, что при любых  $x = x(t)$  и  $\theta$  мы имеем  $\langle f(x, \theta) \rangle = 0$ , а значит, и  $\langle f'_x(x, \theta) \rangle = 0$ , так что

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t, t + \tau) \rangle = & \int_t^{t+\tau} d\theta \left\{ X(x, \theta) + \right. \\ & \left. + \int_t^\theta [X'_x(x, \theta) X(x, \theta') + \langle f'_x(x, \theta) f(x, \theta') \rangle] d\theta' \right\}. \quad (36.7) \end{aligned}$$

Далее, из (36.3) следует, что

$$\begin{aligned} \langle f'_x(x, \theta) f(x, \theta') \rangle &= \left[ \frac{\partial}{\partial x'} \langle f(x', \theta') f(x, \theta) \rangle \right]_{x'=x} = \\ &= \frac{\partial C(x, x', \theta)}{\partial x'} \Big|_{x'=x} \delta(\theta - \theta'). \end{aligned}$$

Так как интеграл от дельта-функции дает на границе интервала значение  $1/2$ , (36.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t, t + \tau) \rangle &\approx \int_t^{t+\tau} d\theta \left\{ X(x, \theta) + X'_x(x, \theta) X(x, \theta) (\theta - t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial C(x, x', \theta)}{\partial x'} \Big|_{x'=x} \right\} \approx \left\{ X(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial C(x, x', t)}{\partial x'} \Big|_{x'=x} \right\} \tau + \\ &\quad + X'_x(x, t) X(x, t) \frac{\tau^2}{2}. \end{aligned}$$

Разделив это на  $\tau$  и переходя к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ , в соответствии с (36.5) получаем

$$A(x, t) = X(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial C(x, x', t)}{\partial x'} \Big|_{x'=x}. \quad (36.8)$$

Заметим, что из (36.3) следует симметрия функции  $C(x, x', t)$  относительно перестановки  $x \rightleftharpoons x'$ . Пользуясь этим, нетрудно показать, что

$$\frac{\partial C(x, x', t)}{\partial x'} \Big|_{x'=x} = \frac{1}{2} \frac{\partial C(x, x, t)}{\partial x},$$

так что  $A(x, t)$  можно записать и иначе:

$$A(x, t) = X(x, t) + \frac{1}{4} \frac{\partial C(x, x, t)}{\partial x}. \quad (36.9)$$

В задачах, в которых случайное воздействие  $f(x, t)$  не зависит от  $x$ , так что множитель при  $\delta(t - t')$  в (36.3) либо функция только от  $t$  (нестационарная сила), либо просто постоянная (стационарная сила), член с производной в (36.8) отсутствует, и мы получаем

$$A(x, t) = X(x, t),$$

т. е.  $A(x, t)$  совпадает с детерминированным членом в правой части стохастического уравнения (36.2), как это и было в рассмотренных ранее примерах.

Имея в виду, что и при вычислении  $B(x, t)$  нас интересуют для  $(\overline{\Delta x})^2$  только члены не выше первого порядка по  $\tau$ , мы можем, возводя  $\Delta x$  в квадрат, ограничиться первым приближением в (36.6), положив

$$\Delta x(t, t + \tau) \approx \int_t^{t+\tau} \{X(x, \theta) + f(x, \theta)\} d\theta, \quad x = x(t).$$

Тогда

$$\overline{(\Delta x)^2} = \int \int_{\tau}^{t+\tau} \{X(x, \theta) X(x, \theta') + \langle f(x, \theta) f(x, \theta') \rangle\} d\theta d\theta' \approx \\ \approx X^2(x, t) \tau^2 + C(x, x, t) \tau$$

и, следовательно,

$$B(x, t) = C(x, x, t). \quad (36.10)$$

Таким образом, функция  $B(x, t)$  в уравнении (36.4), определяющая диффузионную часть потока вероятности, совпадает с множителем  $C(x, x', t)$  в функции корреляции случайного воздействия (36.3), взятым при  $x' = x$ , т. е. с мерой интенсивности этого воздействия.

Результаты (36.8) и (36.10) получены в предположении, что дельта-корреляция  $f(x, t)$  обеспечивает марковость процесса  $x(t)$ . Но основная идея о том, что стохастические уравнения должны при заданной статистике всех исходных случайных функций и величин полностью определять вероятностные свойства решений, требует большего. Уравнения для функций распределения отклика  $x(t)$  (в общем случае многомерного) и, в частности, марковость  $x(t)$  — если она имеет место — должны вытекать из стохастических уравнений. В последнее время в этом направлении получен ряд важных и общих результатов. Для случая системы обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений первого порядка с нормальными аддитивными воздействиями, обладающими дельта-корреляцией по времени, математическая теория была развита К. Ито (см. [3] или изложение теории, например в [4]), а для достаточно короткой корреляции — Р. Л. Стратоновичем [5]. Мы будем следовать более простой и физически прозрачной форме теории, принадлежащей В. И. Кляцкину и В. И. Татарскому [6, 7], приведя только постановку вопроса и результаты. Доказательство требует более сильных и общих математических средств<sup>1)</sup>.

Пусть  $n$ -мерный случайный процесс  $x(t) = \{x_i(t)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяет системе стохастических уравнений

$$\dot{x}_i(t) = X_i(x, t) + f_i(x, t), \quad (36.11)$$

где  $X_i$  — детерминированные функции, а  $f_i$  — случайные воздействия, распределенные нормально в  $(n+1)$ -мерном пространстве параметров  $(x, t)$  (т. е.  $f_i$  — это случайные поля в этом пространстве), с нулевыми средними значениями ( $\langle f_i(x, t) \rangle = 0$ ).

<sup>1)</sup> Оно опирается на метод, разработанный Е. А. Новиковым [8] для гораздо более общего случая стохастических уравнений в частных производных, т. е. для случайных полей.

и с корреляционной матрицей

$$\Psi_{ik}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_k(\mathbf{x}', t') \rangle. \quad (36.12)$$

Пусть отношение характерных времен  $\vartheta_f/\vartheta_x$  [ $\vartheta_f$  — наибольшее из времен корреляции функций  $f_i(\mathbf{x}, t)$ , а  $\vartheta_x$  — наименьшее из времен изменения отклика  $\mathbf{x}(t)$ ] достаточно мало и система такова, что допускает при этом условии отыскание функций распределения  $\mathbf{x}(t)$  методом малых возмущений — в виде разложений по степеням малого параметра  $\vartheta_f/\vartheta_x$ . В нулевом приближении ( $\vartheta_f = 0$ ) корреляционная матрица сил  $f_i(\mathbf{x}, t)$  берется в виде<sup>1)</sup>

$$\Psi_{ik}^{\vartheta_f/\vartheta_x}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = C_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \delta(t - t'), \quad (36.13)$$

где функции  $C_{ik}$  определены условием равенства интегралов по  $t'$  от истинной и эффективной корреляционных матриц (36.12) и (36.13):

$$C_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{ik}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') dt'. \quad (36.14)$$

Тогда отклик  $\mathbf{x}(t)$  в нулевом приближении (36.13) *оказывается непрерывным (диффузионным) марковским процессом*. Это означает, что многомерные распределения вероятности для  $\mathbf{x}(t)$  выражаются произведениями одномерной плотности вероятности состояния  $\omega_1(\mathbf{x}, t)$  на цепочку вероятностей перехода  $v(t_k, \mathbf{x}_k | t_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1})$ , причем для  $v(t, \mathbf{x} | t_0, \mathbf{x}_0)$  *получается уравнение Эйнштейна — Фоккера*<sup>2)</sup>

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial A_i(\mathbf{x}, t) v}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_{ik}(\mathbf{x}, t) v}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (36.15)$$

в котором

$$A_i(\mathbf{x}, t) = X_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial C_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)}{\partial x'_k} \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}, \quad (36.16)$$

$$B_{ik}(\mathbf{x}, t) = C_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t).$$

Для плотности вероятности перехода  $v$  начальное условие есть

$$v(t_0, \mathbf{x} | t_0, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

<sup>1)</sup> Строго говоря, дельта-корреляция (36.13) несовместима с нормальным распределением, предполагающим конечность дисперсий. Однако в результирующее уравнение Эйнштейна — Фоккера (36.15) входят только *интегралы* (36.14) от функций корреляции. Поэтому в функциях распределения случайных сил  $f_i$  можно считать дисперсии конечными ( $\vartheta_f \neq 0$ ), но из-за малости  $\vartheta_f$  отклик  $\mathbf{x}(t)$  приближенно такой, как если бы было  $\vartheta_f = 0$ .

<sup>2)</sup> По дважды встречающимся индексам производится суммирование от 1 до  $n$ .

а для плотности вероятности состояния  $\omega_1$ , удовлетворяющей тому же уравнению (36.15), начальное условие имеет вид

$$\omega_1(t_0, \mathbf{x}) = \omega_0(\mathbf{x}),$$

где  $\omega_0$  — заданное начальное распределение.

Эта общая теорема приводит, таким образом, к уравнению (36.15), исходя непосредственно из стохастических уравнений (36.11). Кроме того, развитый в [6] метод обладает еще и тем преимуществом, что позволяет получать поправки к нулевому (диффузионному) приближению. Поправки возникают двоякого рода. Во-первых, в правой части уравнения (36.15) появляется добавочный член вида  $-\partial S'_k(\mathbf{x}, t)/\partial x_k$ . Это поправка к плотности потока вероятности (порядка не ниже  $\vartheta_f$ ). Во-вторых, матрица  $C_{ik}$  в (36.16) заменяется на

$$\tilde{C}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \int_0^t \Psi_{ik}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') dt'.$$

Отличие  $\tilde{C}_{ik}$  от  $C_{ik}$  заметно лишь при  $t \leq \vartheta_f$ , пренебрежение же членом с  $S'_k$  требует, вообще говоря, ограничения интенсивности флуктуационных сил  $f_i$ . В общем виде выражения для  $S'_k$  довольно громоздки [7], но их исследование в конкретных задачах позволяет уточнять условия применимости диффузионного приближения<sup>1)</sup>.

Мы можем теперь разъяснить высказанное в § 30 утверждение о том, что распространение лучей в случайно-неоднородной среде является марковским процессом только в маломугловом приближении.

Если в качестве независимой переменной берется длина луча  $l$ , то уравнения геометрической оптики записываются в виде

$$\frac{d\mathbf{r}(l)}{dl} = \boldsymbol{\tau}(l), \quad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} = \nabla\mu(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \nabla\mu) \equiv \mathbf{a}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\tau}),$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки луча,  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной к лучу в этой точке,  $\mu(\mathbf{r}) = \ln n(\mathbf{r})$ ,  $n(\mathbf{r})$  — показатель преломления среды. Если ввести шести-векторы  $\mathbf{f} = \{0, \mathbf{a}\}$ ,  $\mathbf{x} = \{\mathbf{r}, \boldsymbol{\tau}\}$ ,  $\mathbf{X} = \{\boldsymbol{\tau}, 0\}$ , то написанные уравнения приводятся к виду (36.11) с независимой переменной  $l$  (вместо  $t$ ). Пусть  $\mu(\mathbf{r})$  — гауссово случайное поле со средним значением  $\bar{\mu} = 0$ . Казалось бы, введя для  $\mathbf{f}$  функцию корреляции вида (36.13), можно было бы написать для шести-вектора  $\mathbf{x}(l)$ , объединяющего случайные

<sup>1)</sup> Дельта-корреляция (36.13) является лишь необходимым условием марковости процесса  $\mathbf{x}(t)$ .

координаты точек луча  $\mathbf{r}(l)$  и случайные направляющие косинусы луча  $\boldsymbol{\tau}(l)$ , уравнение Эйнштейна — Фоккера (36.15). Но величины  $\mathbf{a}$  зависят от  $\mathbf{x}$  и не зависят от  $l$ , так что корреляционная матрица «сил»  $\mathbf{f}$  имеет вид  $\psi_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , т. е. не зависит от  $l$  и  $l'$ . Иначе можно сказать, что интервал корреляции  $\mathbf{f}$  по  $l$  бесконечен, и поэтому записать  $\psi_{ik}$  в виде (36.13) с дельта-функцией  $\delta(l - l')$  невозможно.

Можно, однако, перейти к другому описанию луча, взяв за независимую переменную не его длину  $l$ , а толщину  $z$  пройденного им слоя неоднородной среды (луч падает на слой нормально). Точка луча задается тогда его *поперечным смещением*  $\boldsymbol{\rho} = \{x, y\}$  от точки входа в слой  $x = y = 0$ , а направление — *поперечным вектором*  $\boldsymbol{\tau}_\perp = \{\tau_x, \tau_y\}$ , которые рассматриваются как функции от  $z$ . Уравнения геометрической оптики принимают при этом вид

$$\frac{d\rho(z)}{dz} = \frac{\boldsymbol{\tau}_\perp(z)}{\sqrt{1 - \tau_\perp^2}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\tau}_\perp(z)}{dz} = \frac{\mathbf{a}_\perp(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\tau}_\perp, z)}{\sqrt{1 - \tau_\perp^2}}, \quad (36.17)$$

где  $\mathbf{a}_\perp = \{a_x, a_y\}$ . Уже отсюда видно, что эти уравнения можно использовать только до первой точки поворота луча на  $90^\circ$  от оси  $z$  (т. е. от его первоначального направления), так как в этой точке  $\sqrt{1 - \tau_\perp^2}$  обращается в нуль. Это значит, что в случайно-неоднородной среде мы должны ограничиться областью, в которой вероятности отрицательных  $\tau_z$  весьма малы, т. е. малыми угловыми отклонениями луча ( $\tau_z \approx 1$ ). В этом *малому углу приближении* уравнения (36.17) принимают вид

$$\frac{d\rho(z)}{dz} = \boldsymbol{\tau}_\perp(z), \quad \frac{d\boldsymbol{\tau}_\perp(z)}{dz} = \nabla_\perp \mu(\boldsymbol{\rho}, z) \equiv \mathbf{a}_\perp(\boldsymbol{\rho}, z).$$

Четырехмерный случайный процесс  $\mathbf{x}(z) = \{\boldsymbol{\rho}(z), \boldsymbol{\tau}_\perp(z)\}$  возникает под действием *поперечных* случайных «сил»  $\mathbf{f} = \{0, \mathbf{a}_\perp\} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}, z)$ , которые зависят теперь от переменной  $z$  и обладают корреляционной матрицей  $\psi_{ik}(\boldsymbol{\rho}, z; \boldsymbol{\rho}', z')$ . Процесс  $\mathbf{x}(z)$  будет марковским в предположении дельта-корреляции неоднородностей среды по  $z$ :

$$\psi_{ik}(\boldsymbol{\rho}, z; \boldsymbol{\rho}', z') = C_{ik}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', z) \delta(z - z'),$$

что и приводит к уравнению Эйнштейна — Фоккера (27.15), где дополнительно принято, что  $C_{ik} = B\delta_{ik} = \text{const}$ .

Для вращательного брауновского движения сферической частицы подобных ограничений не возникает, так как действующие на частицу случайные вращающие моменты — функции независимой переменной (времени  $t$ ), а от состояния системы (ориентации оси частицы) они вообще не зависят.

### § 37. Стохастические уравнения при случайных воздействиях с произвольными законами распределения

В работе [9] (см. также [10]) получены результаты, обобщающие приведенную в предыдущем параграфе теорему на негауссовы случайные воздействия<sup>1)</sup>. Кроме того, сами стохастические уравнения берутся более общего вида, чем (36.11), а именно в виде системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = X_i(\mathbf{x}, t) + \int D_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) f_k(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (37.1)$$

где  $X_i$  и ядро  $D_{ik}$  — детерминированные векторная и тензорная функции. Очевидно, уравнения (37.1) переходят в (36.11), если  $D_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \delta_{ik} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ . Существенно, что случайные воздействия  $f_k(\mathbf{y}, t)$  входят, как и ранее, *линейно* и что для решения  $\mathbf{x}(t)$  выполняется *принцип причинности*:  $\mathbf{x}(t)$  функционально зависит от  $f_k(\mathbf{x}, \tau)$  только при тех  $\tau$ , которые *предшествуют* моменту времени  $t$  ( $t_0 \leq \tau \leq t$ ). В момент  $t = t_0$  заданы начальные условия  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .

При этих условиях показано, что *точным* следствием уравнений (37.1) является некоторое уравнение для одномерной плотности вероятности  $\omega_1(\mathbf{x}, t)$ , которое, однако, *не является замкнутым* относительно  $\omega_1$ , так как содержит член, функционально зависящий от  $f_k(\mathbf{x}, \tau)$  при всех  $t_0 \leq \tau \leq t$ . Только в том случае, когда *воздействия  $f_k(\mathbf{x}, t)$  дельта-коррелированы по  $t$* , указанное уравнение для  $\omega_1(\mathbf{x}, t)$ <sup>2)</sup> становится *замкнутым* (содержит только одномерную функцию распределения), а процесс  $\mathbf{x}(t)$  оказывается *марковским*:  $n$ -мерная плотность вероятности  $\omega_n(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_n, t_n)$  выражается через  $\omega_1$  и *вероятность перехода  $v$*  формулой (15.3).

Если дельта-коррелированные  $f_k(\mathbf{x}, t)$  представляют собой гауссов процесс, то, в согласии с приведенной в предыдущем параграфе теоремой, уравнение для  $\omega_1$  или  $v$  будет уравнением Эйнштейна — Фоккера (*диффузионный марковский процесс*). Если же случайные воздействия — импульсные процессы, состоящие из дельта-импульсов

$$f_k(\mathbf{x}, t) = \sum_{\nu} a_{k\nu} \delta(t - t_{\nu})$$

<sup>1)</sup> В [9] рассмотрены не только случайные процессы, но и случайные поля, но в I части книги мы по-прежнему ограничиваемся процессами.

<sup>2)</sup> Или для условной плотности вероятности  $v(t, \mathbf{x} | t_0, \mathbf{x}_0)$ , если начальное условие при  $t = t_0$  есть

$$v(t_0, \mathbf{x} | t_0, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$



(подчеркнем, что такой процесс дельта-коррелирован, но он не обязательно должен быть пуассоновским или стационарным), то для  $\omega_1$  или  $v$  получается уравнение Колмогорова — Феллера (31.10) (*скачкообразный* марковский процесс).

Обратимся теперь к тому преимуществу стохастических дифференциальных уравнений, о котором уже говорилось выше, а именно возможности рассматривать с их помощью и такие (хотя бы линейные) задачи, когда случайная сила  $f(t)$  не обладает дельта-корреляцией, а значит, отклик системы  $\xi(t)$  уже не является марковским процессом.

Из приведенных выше результатов ясно, что при отказе от дельта-корреляции случайных воздействий общая теория очень усложняется. Мы ограничимся примерами, которые показывают тем не менее, насколько существенные результаты могут быть получены хотя бы при определенных ограничениях. Важно, однако, подчеркнуть, что в число этих ограничений уже не будет включаться в качестве обязательного требования точная или приближенная дельта-корреляция случайных воздействий на динамическую систему.

1. Рассмотрим линейное уравнение первого порядка, описывающее динамическую систему с *параметрическим* воздействием:

$$\dot{x} = [Q(t) + q(t)] x, \quad (37.2)$$

где  $Q(t)$  — детерминированная функция, а  $q(t)$  — случайный процесс с  $\overline{q(t)} = 0$ . Таким образом, это уравнение вида (36.2) с  $X(x, t) = Q(t)x$  и  $f(x, t) = q(t)x$ . Если же ввести функцию  $y = \ln x$ , то для нее мы получим линейное уравнение  $\dot{y} = Q(t) + q(t)$  с аддитивной случайной силой, не зависящей от состояния системы  $y$ . Предполагается, что  $q(t)$  — *нормальный* процесс, но с *произвольной* функцией корреляции

$$\psi_q(t, t') = \langle q(t) q(t') \rangle. \quad (37.3)$$

Оказывается, что и в этом случае можно без каких-либо дополнительных требований получить из (37.2) замкнутое уравнение для плотности условной вероятности  $v(x, t | x_0, 0)$  решения  $x(t)$ <sup>1)</sup>.

Решение уравнения (37.2) при начальном условии  $x(0) = x_0$  есть

$$x(t) = x_0 \exp \left\{ \int_0^t [Q(\tau) + q(\tau)] d\tau \right\}.$$

1) Вывод принадлежит В. И. Татарскому.

Поэтому (условная) характеристическая функция процесса  $x(t)$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi(u, t) &= \langle \exp\{iux\} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \langle x^n(t) \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iux_0)^n}{n!} \exp\left\{n \int_0^t Q(\tau) d\tau\right\} \left\langle \exp\left\{n \int_0^t q(\tau) d\tau\right\} \right\rangle. \end{aligned}$$

Так как интеграл  $\alpha = n \int_0^t q(\tau) d\tau$  — тоже гауссова величина, а для любой гауссовой величины  $\alpha$  при  $\bar{\alpha} = 0$  справедливо равенство  $\langle e^\alpha \rangle = \exp\{\bar{\alpha}^2/2\}$ , получаем

$$\left\langle \exp\left\{n \int_0^t q(\tau) d\tau\right\} \right\rangle = e^{n^2 F(t)},$$

где

$$F(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \psi_q(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

В результате

$$\varphi(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iux_0)^n}{n!} \exp\left\{n \int_0^t Q(\tau) d\tau + n^2 F(t)\right\}, \quad (37.4)$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial t} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iux_0)^n}{n!} [nQ(t) + n^2 \dot{F}(t)] \exp\left\{n \int_0^t Q(\tau) d\tau + n^2 F(t)\right\}. \quad (37.5) \end{aligned}$$

Пользуясь тождествами

$$nu^n = \left(u \frac{\partial}{\partial u}\right) u^n, \quad n^2 u^n = \left(u \frac{\partial}{\partial u}\right)^2 u^n$$

и выражением (37.4) для  $\varphi$ , нетрудно преобразовать (37.5) к виду

$$\frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial t} = Q(t) \left(u \frac{\partial}{\partial u}\right) \varphi + \dot{F}(t) \left(u \frac{\partial}{\partial u}\right)^2 \varphi. \quad (37.6)$$

Если учесть симметрию корреляционной функции  $\psi_q(\tau_1, \tau_2)$  по отношению к перестановке  $\tau_1 \rightleftharpoons \tau_2$ , то коэффициент  $\dot{F}(t)$  легко

выразить в виде *однократного* интеграла от  $\psi_q$ :

$$\begin{aligned} \dot{F}(t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \psi_q(\tau_1, \tau_2) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau_2 \psi_q(t, \tau_2) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau_1 \psi_q(\tau_1, t) = \int_0^t \psi_q(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (37.7)$$

Задача, в сущности, уже решена, так как мы получили дифференциальное уравнение для характеристической функции. Для того, чтобы вывести уравнение непосредственно для плотности вероятности

$$v(x, t | x_0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u, t) e^{-iux} du,$$

нужно только выполнить над (37.6) преобразование Фурье. Умножая это уравнение на  $e^{-iux}/2\pi$ , интегрируя по  $u$  и предполагая, что при  $|u| = \infty$  проинтегрированные члены обращаются в нуль, получаем с учетом (37.7)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -Q(t) \frac{\partial xv}{\partial x} + \left[ \int_0^t \psi_q(t, \tau) d\tau \right] \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial xv}{\partial x} \right). \quad (37.8)$$

Подчеркнем еще раз: ничего, кроме нормальности процесса  $q(t)$ , при выводе уравнения (37.8) не предполагалось, и это уравнение представляет собой *обобщенное* уравнение Эйнштейна — Фоккера вида (26.19), справедливое и для немарковского процесса. Если же случайное воздействие  $q(t)$  дельта-коррелировано:

$$\psi_q(t, \tau) = C(t) \delta(t - \tau), \quad (37.9)$$

то  $\int_0^t \psi_q(t, \tau) d\tau = \frac{1}{2} C(t)$  [половина входит потому, что дельта-выброс лежит на границе интервала  $(0, t)$ ], и мы приходим, согласно изложенной в § 36 общей теореме, к *марковскому* процессу  $x(t)$  с уравнением Эйнштейна — Фоккера

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -Q(t) \frac{\partial xv}{\partial x} + \frac{C(t)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial xv}{\partial x} \right). \quad (37.10)$$

Хотя вид уравнений (37.8) и (37.10) одинаков, их смысл различен. Только при *дельта-корреляции* (37.9)  $n$ -мерные функции распределения  $x(t)$  выражаются через произведение одинаковых условных вероятностей  $v$ , т. е. последние являются

вероятностями *перехода* (удовлетворяют уравнению Смолуховского).

Если параметрическое воздействие  $q(t)$  *стационарно*, так что  $\psi_q(t, \tau) = \psi_q(t - \tau)$ , то

$$\int_0^t \psi_q(t - \tau) d\tau = \int_0^t \psi_q(\theta) d\theta$$

и при временах  $t \gg \vartheta_q$  [ $\vartheta_q$  — наибольшее время корреляции  $q(t)$ ], можно устремить верхний предел интеграла в бесконечность. Таким образом, коэффициент в квадратных скобках в (37.8) будет с ростом  $t$  стремиться к постоянному значению, как *если бы* функция корреляции была  $C \delta(t - \tau)$ . В этом случае уравнение (37.8) примет вид (37.10) с постоянным  $C$  и действительно станет уравнением Эйнштейна — Фоккера. Другими словами, в случае стационарного воздействия  $q(t)$  отклик  $x(t)$  становится с ростом  $t$  марковским процессом. Подчеркнем еще раз, что в действительности  $\vartheta_q \neq 0$  и поэтому процесс будет марковским лишь приближенно — если рассматривать его поведение на интервалах времени  $\Delta t \gg \vartheta_q$ , но не на  $\Delta t \leq \vartheta_q$ .

В противоположность приведенному простому примеру в более общих случаях<sup>1)</sup> получение замкнутого уравнения хотя бы для одномерной вероятности, как уже было сказано, неосуществимо без предположения о дельта-корреляции случайного воздействия.

При наличии же *дельта-корреляции* и при *линейных* исходных уравнениях (линейных относительно  $x_i$ ) всегда можно получить *замкнутые* системы уравнений для моментов любого порядка, т. е. отдельную систему для первых моментов  $\langle x_i(t) \rangle$ , отдельную — для вторых моментов  $\langle x_i(t)x_k(t) \rangle$  и т. д. При указанных условиях эти системы уравнений взаимно не зацепляются. Это было показано уже давно [11] (см. задачу 7) и вновь установлено более общим способом в [10].

2. Возможности продвижения в теории стохастических дифференциальных уравнений зависят, конечно, и от степени сложности рассматриваемой динамической системы. Мы обратимся теперь ко второму примеру, имеющему весьма широкое значение, а именно к *линейным* системам, на которые действуют только *случайные внешние силы*, а параметры системы являются детерминированными.

Речь идет о частном случае уравнений (36.11):

$$\dot{x}_i(t) = a_{ik}(t) x_k(t) + f_i(t), \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (37.11)$$

<sup>1)</sup> Например, для системы линейных параметрических уравнений, содержащих параметрические случайные воздействия  $q_{ik}(t)$ :

$$\dot{x}_i = [Q_{ik}(t) + q_{ik}(t)] x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

где  $a_{ik}(t)$  — детерминированные функции, а  $f_i(t)$  — случайные силы, не зависящие от состояния системы  $x = \{x_i\}$ . Никаких специальных предположений о вероятностных свойствах сил  $f_i(t)$  не делается, но они считаются заданными.

Исключая из (37.11) все  $x_i(t)$ , кроме какой-либо одной функции [обозначим ее через  $x(t)$ ], можно сформулировать задачу и в виде одного уравнения  $n$ -го порядка:

$$x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + \dots + a_n(t) x = f(t). \quad (37.12)$$

Как уже было подчеркнуто ранее, на первом этапе мы обращаемся со стохастическими уравнениями так же, как если бы это были уравнения для детерминированных функций, т. е. решаем «динамическую» задачу. Именно такой путь полностью открыт в случае линейных уравнений, так как их решение всегда может быть записано в форме некоторого линейного же оператора, действующего на заданную силу  $f(t)$ . Воспользуемся истокообразным представлением решения — интегралом Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^t H(t, \theta) f(\theta) d\theta, \quad (37.13)$$

где  $H(t, \theta)$  — так называемый *импульсный отклик* рассматриваемой динамической системы, т. е. ее отклик в момент времени  $t \geq \theta$  на силу  $f(t) = \delta(t - \theta)$  при условии, что до момента  $\theta$  система находилась в покое. Соответственно частное решение (37.13) при произвольной силе  $f(t)$  отвечает нулевым начальным условиям:

$$x^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Если коэффициенты уравнения (37.12) постоянны, т. е. динамическая система является *гармонической*, то  $H(t, \theta) = H(t - \theta)$ .

Из линейности связи (37.13) между  $x(t)$  и  $f(t)$  следует, что моменты  $x(t)$  любого целого порядка выражаются в квадратурах через смешанные моменты того же порядка силы  $f(t)$ . Поскольку последние по предположению известны, мы знаем и *все моменты*  $x(t)$ , что в большинстве практически интересных случаев означает принципиальную возможность построения и конечномерных функций распределения  $x(t)$ . В частности,

$$\langle x(t) \rangle = \int_0^t H(t, \theta) \langle f(\theta) \rangle d\theta, \quad (37.14)$$

$$B(t, t') = \langle x(t) x(t') \rangle = \int_0^t H(t, \theta) d\theta \int_0^{t'} H(t', \theta') B_f(\theta, \theta') d\theta', \quad (37.15)$$

где

$$B_f(t, t') = \langle f(t) f(t') \rangle.$$

В случае гармонической системы интеграл Дюамеля можно записать в виде

$$x(t) = \int_0^t H(t-\theta) f(\theta) d\theta = \int_0^t H(\theta) f(t-\theta) d\theta, \quad (37.16)$$

так что

$$\langle x(t) \rangle = \int_0^t H(\theta) \langle f(t-\theta) \rangle d\theta, \quad (37.17)$$

$$\langle x(t) x(t+\tau) \rangle = \int_0^t H(\theta) d\theta \int_0^{t+\tau} H(\theta') \langle f(t-\theta) f(t+\tau-\theta') \rangle d\theta'. \quad (37.18)$$

Если  $f(t)$  — нормальная случайная функция, то, согласно (37.18), отклик  $x(t)$  тоже будет распределен нормально, поскольку он представляет собой в этом случае сумму (предел суммы) нормально распределенных слагаемых. Так как  $n$ -мерное нормальное распределение содержит в качестве параметров моменты только первого и второго порядков, в этом случае достаточно знать только  $\langle f(t) \rangle$  и  $B_f(t, t')$ . Но в общем случае для нахождения одномерного распределения  $x(t)$  необходимо исчерпывающее задание случайной функции  $f(t)$ , т. е. задание всех ее конечномерных распределений. Мы ограничимся рассмотрением моментов (37.17) и (37.18) в предположении, что  $f(t)$  — *стационарный* случайный процесс с нулевым средним значением:

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t) f(t') \rangle = \psi_f(t-t').$$

Тогда из (37.17) имеем  $\langle x(t) \rangle = 0$ , а из (37.18)

$$\psi(t, \tau) = \int_0^t H(\theta) d\theta \int_0^{t+\tau} H(\theta') \psi_f(\tau + \theta - \theta') d\theta'. \quad (37.19)$$

Таким образом, подынтегральное выражение не зависит от  $t$ , а так как реальные системы обладают «конечной памятью» (с ростом  $\theta$  отклик  $H(\theta)$  стремится к нулю), то из (37.19) ясно, что с увеличением  $t$  функция корреляции  $\psi$  перестает зависеть от  $t$ , т. е. в системе устанавливается стационарный процесс<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Стационарный в широком смысле, см. § 18.

с функцией корреляции

$$\psi(\tau) = \int_0^{\infty} H(\theta) d\theta \int_0^{\infty} H(\theta') \psi_f(\tau + \theta - \theta') d\theta'.$$

Поскольку импульсный отклик  $H(\theta)$  до момента действия дельта-импульса равен нулю, т. е.  $H(\theta) = 0$  при всех  $\theta < 0$ , можно заменить нижние пределы интегралов на  $-\infty$ . Вводя вместо  $\theta'$  переменную интегрирования  $\chi = \theta' - \theta$ , получаем в результате, что в установившемся режиме

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} H(\theta + \chi) \psi_f(\tau - \chi) d\chi,$$

что можно записать в виде

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\chi) \psi_f(\tau - \chi) d\chi, \quad (37.20)$$

где введена функция

$$H_2(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\theta) H(\theta + \chi) d\theta. \quad (37.21)$$

Функция  $H_2$ , определяемая импульсным откликом  $H$ , характеризует рассматриваемую динамическую систему, тогда как  $\psi_f$  является характеристикой внешней силы  $f(t)$ .

Заметим, что формула (37.20) — это композиция функций  $H_2$  и  $\psi_f$  в соответствии с определением композиции, данным в § 9. Формула же (37.21) не является композицией, так как переменная интегрирования  $\theta$  входит в оба сомножителя под интегралом с одним и тем же знаком.

Приведем в заключение простую иллюстрацию того, как немарковский процесс в линейной системе может быть приведен к марковскому с более высоким числом измерений, о чем уже упоминалось в § 21.

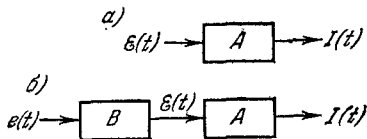


Рис. 27.

Если на вход линейного четырехполюсника  $A$  (рис. 27, а) действует дельта-коррелированная э. д. с.  $\mathcal{E}(t)$ , то выходной ток  $I(t)$  будет компонентой  $N_A$ -мерного марковского процесса, где  $N_A$  — удвоенное число степеней свободы четырехполюсника (возможно, и нечетное). Пусть теперь  $\mathcal{E}(t)$  не дельта-коррелирована, так что ток  $I(t)$  не является компонентой  $N_A$ -мерного марковского процесса. Однако если можно подобрать такой че-

тырехполюсник  $B$ , который под действием дельта-коррелированного шума  $e(t)$  дает на выходе э. д. с.  $\mathcal{E}(t)$ , то тот же ток  $I(t)$  будет откликом на дельта-коррелированную силу в системе  $A+B$  (рис. 27, б). Таким образом,  $I(t)$  будет компонентой  $(N_B + N_A)$ -мерного марковского процесса.

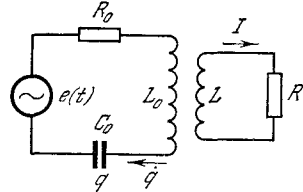


Рис. 28.

Возьмем для примера уже рассмотренную  $RL$ -ячейку, и пусть дельта-коррелированная э. д. с.  $e(t)$  действует на нее через фильтр  $L_0, C_0, R_0$  (рис. 28). Состояние фильтра описывается, скажем, зарядом  $q$  и током  $\dot{q}$  (1 степень свободы), а состояние  $RL$ -ячейки — током  $I$  (1/2 степени свободы). Ток  $I$  будет компонентой трехмерного марковского процесса с вероятностью перехода  $v(t, q, \dot{q}, I | t_0, q_0, \dot{q}_0, I_0)$ . Если же дельта-коррелированная э. д. с. действует на  $RL$ -ячейку непосредственно, то ток  $I$  будет одномерным марковским процессом с вероятностью перехода  $v(t, I | t_0, I_0)$ .

**Задачи**

1. Рассчитать функцию корреляции тока в  $RL$ -контуре, на который действует стационарная случайная э. д. с.  $\mathcal{E}(t)$  с функцией корреляции

$$\psi_{\mathcal{E}}(\tau) = \frac{\alpha C}{2} e^{-\alpha|\tau|}.$$

Решение. Уравнение для тока  $I(t)$  есть

$$\dot{I} + \beta I = \mathcal{E}(t)/L, \quad \beta = R/L.$$

Импульсный отклик контура  $H(t) = e^{-\beta t}$  при  $t \geq 0$  и равен нулю при  $t < 0$ . Согласно (37.19) имеем

$$\begin{aligned} \psi_I(t, \tau) &= \int_0^t e^{-\beta\theta} d\theta \int_0^{t+\tau} e^{-\beta\theta'} \frac{\alpha C}{2L^2} e^{-\alpha|\tau+\theta-\theta'|} d\theta' = \\ &= \frac{\alpha C}{2L^2(\alpha^2 - \beta^2)} \left\{ e^{-\beta\tau} \left[ \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-2\beta t}) - e^{-2\beta t} + e^{-(\alpha+\beta)t} \right] - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\alpha\tau} [1 - e^{-(\alpha+\beta)t}] \right\}. \quad (1) \end{aligned}$$

В частности, при  $\tau = 0$  получаем отсюда дисперсию тока:

$$D[I(t)] = \frac{\alpha C}{2L^2(\alpha^2 - \beta^2)} \left\{ \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-2\beta t}) - e^{-2\beta t} + 2e^{-(\alpha+\beta)t} - 1 \right\}. \quad (2)$$

Обе формулы справедливы при произвольном соотношении между временем релаксации контура  $(1/\beta)$  и временем корреляции случайной э. д. с.  $(1/\alpha)$ .

При  $\beta t \gg 1$  достигаются стационарные значения  $\psi_I$  и  $D[I]$ :

$$\psi_I(\tau) = \frac{\alpha C}{2L^2(\alpha^2 - \beta^2)} \left( \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta\tau} - e^{-\alpha\tau} \right), \quad D[I] = \frac{\alpha C}{2L^2\beta(\alpha + \beta)}.$$



При  $\alpha \rightarrow \infty$  мы приходим к дельта-коррелированной э. д. с.  $\mathcal{E}(t)$  и марковскому процессу  $I(t)$ . Формулы (1) и (2) принимают вид

$$\psi_I(t, \tau) = \frac{C e^{-\beta\tau}}{2L^2\beta} (1 - e^{-2\beta t}), \quad D[I(t)] = \frac{C}{2L^2\beta} (1 - e^{-2\beta t}).$$

Формула для  $D[I]$  совпадает, конечно, с (35.11).

Если  $\beta \rightarrow 0$ , то, согласно (2),

$$D[I(t)] = \frac{C}{L^2\alpha} (at + e^{-at} - 1),$$

что дает при  $at \gg 1$  диффузионный закон  $D[I] = \frac{C}{L^2} t$ , т. е. ток  $I(t) =$

$= \frac{1}{L} \int_0^t \mathcal{E}(t) dt$  начинает вести себя как функция с независимыми приращениями.

2. Используя результаты § 28, показать, что огибающая отклика селективного колебательного контура на белый шум удовлетворяет линейному стохастическому дифференциальному уравнению первого порядка.

Решение. Селективный контур — томсоновская система, описываемая уравнением

$$\frac{d^2x}{dt'^2} + \mu h \frac{dx}{dt'} + x = \mu F(t'),$$

где  $t' = \omega_0 t$ ,  $\mu$  — малый параметр. По условию

$$\langle F(t'_1) F(t'_2) \rangle = C \delta(t'_1 - t'_2).$$

Уравнение контура отличается от уравнения (28.1) для томсоновского автогенератора лишь отсутствием нелинейного члена и знаком члена с  $dx/dt'$  [ $\mu h$  — декремент, в отличие от инкремента  $\mu p$  в (28.1)]. Следовательно, для огибающей  $A(\theta)$  отклика  $x = A(\theta) \cos[t' + \varphi(\theta)]$  мы получаем первое уравнение Ван-дер-Поля (28.7) с  $R(A) = -\frac{h}{2} A$ , т. е.

$$\frac{dA}{d\theta} + \frac{h}{2} A = -\frac{1}{2} F_{\perp}(\theta), \quad (1)$$

где  $\theta = \mu t'$  — медленное безразмерное время.

Если компонента силы  $F_{\perp}(\theta)$  дельта-коррелирована, то по общей теореме (§ 36)  $A(\theta)$  — диффузионный марковский процесс, функция корреляции которого, в соответствии с (1), экспоненциальна. То, что для селективной системы можно в первом приближении считать  $F_{\perp}(\theta)$  дельта-коррелированным процессом, показано далее, в § 53.

Теорема о марковости огибающей была высказана в таком виде (и довольно громоздко доказана) Пирсом [12]. На ее доказательство при помощи уравнения Смолуховского (или уравнения Эйнштейна — Фоккера) указал Хелстром [3]. Из последующих работ по статистическим свойствам огибающей упомянем [14, 15].

3. Написать уравнение Эйнштейна — Фоккера для осциллятора с флуктуирующей собственной частотой

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 [1 + f(t)] x = 0, \quad (1)$$

где  $f(t)$  — нормальный дельта-коррелированный случайный процесс:

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t) f(t') \rangle = 2\mathcal{D} \delta(t - t'), \quad \mathcal{D} = \text{const.}$$

Решение. Условия общей теоремы, приведенной в § 36, выполнены, и, следовательно, в осцилляторе — системе с одной степенью свободы — происходит двумерный диффузионный марковский процесс. Записав стохастическое уравнение (1) в виде двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \equiv X(x, y, t) + \dot{f}_x(x, y, t), \\ \dot{y} &= -2hy - \omega_0^2 [1 + f(t)] x \equiv Y(x, y, t) + \dot{f}_y(x, y, t), \end{aligned} \quad (2)$$

получаем

$$X = y, \quad Y = -2hy - \omega_0^2 x, \quad \dot{f}_x = 0, \quad \dot{f}_y = -\omega_0^2 x f(t).$$

Таким образом, в корреляционной матрице случайных воздействий  $f_x$  и  $f_y$  отличен от нуля только элемент

$$\Psi_{yy}(x, y, t; x', y', t') = \langle \dot{f}_y(x, y, t) \dot{f}_y(x', y', t') \rangle = 2\mathcal{D}\omega_0^2 x x' \delta(t - t').$$

В результате уравнение Эйнштейна — Фоккера (36.15) для плотности вероятности перехода  $v(x, y, t | x_0, y_0, 0)$  имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -y \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial (2hy + \omega_0^2 x) v}{\partial y} + \mathcal{D}\omega_0^4 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Из-за квадратичной зависимости коэффициента диффузии от  $x$  это уравнение не может быть решено в общем виде.

4. Получить при помощи уравнения (3) предыдущей задачи уравнения для моментов  $M_{rs}(t) = \langle x^r(t) y^s(t) \rangle$ . Показать, что эти уравнения распадутся на замкнутые системы для моментов каждого фиксированного порядка  $r + s = n$ . Исследовать систему уравнений для моментов второго порядка

$$M_{20} = \overline{x^2}, \quad M_{11} = \overline{xy}, \quad M_{02} = \overline{y^2}$$

и найти условие параметрического возбуждения осциллятора в данном случае флуктуаций его частоты в виде нормального белого шума.

Решение. Умножим уравнение (3) на  $x^r y^s$  и проинтегрируем по  $x$  и  $y$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Учитывая, что

$$M_{rs}(t) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} x^r y^s v(x, y, t | x_0, y_0, 0) dx dy,$$

и предполагая, что проинтегрированные члены обращаются в нуль при  $|x| = \infty$  или  $|y| = \infty$ , получаем для  $M_{rs}(t)$  следующую систему уравнений:

$$\dot{M}_{rs} = r M_{r-1, s+1} - s(2h M_{rs} + \omega_0^2 M_{r+1, s-1}) - \mathcal{D}\omega_0^4 s(s-1) M_{r+2, s-2}, \quad (4)$$

которую надо решать с начальными условиями  $M_{rs}(0) = x_0^r y_0^s$ .

Сумма индексов при всех  $M$  в (4) одинакова (равна  $r + s = n$ ), откуда и следует, что для моментов порядка  $n$  уравнения (4) образуют замкнутую систему из  $n + 1$  уравнений. Полагая в (4)  $r = 1, s = 0$  и  $r = 0, s = 1$ , получаем уравнения для моментов первого порядка  $M_{10} = \bar{x}$  и  $M_{01} = \bar{y}$ :

$$\dot{\bar{x}} = \bar{y}, \quad \dot{\bar{y}} = -(2h\bar{y} + \omega_0^2 \bar{x}),$$

которые вытекают и из исходных уравнений (2) в отсутствие флуктуаций частоты [ $f(t) = 0$ ]. Таким образом,  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  меняются по динамическому закону.

Для моментов второго порядка получаем из (4) систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{M}_{20} &= 2M_{11}, & \dot{M}_{11} &= M_{02} - (2hM_{11} + \omega_0^2 M_{20}), \\ \dot{M}_{02} &= -2(2hM_{02} + \omega_0^2 M_{11}) + 2\mathcal{D}\omega_0^4 M_{20}. \end{aligned}$$

Ищем частное решение этих обыкновенных линейных уравнений с постоянными коэффициентами в виде

$$M_{20} = C_1 e^{\lambda t}, \quad M_{11} = C_2 e^{\lambda t}, \quad M_{02} = C_3 e^{\lambda t},$$

что дает для  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  систему однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \lambda C_1 &= 2C_2, & \lambda C_2 &= C_3 - (2hC_2 + \omega_0^2 C_1), \\ \lambda C_3 &= -2(2hC_3 + \omega_0^2 C_2) + 2\mathcal{D}\omega_0^4 C_1. \end{aligned}$$

Для того чтобы эта система имела нетривиальное решение, надо приравнять нулю ее определитель, что дает характеристическое уравнение для  $\lambda$ :

$$\lambda^3 + 6h\lambda^2 + 4(\omega_0^2 + 2h^2)\lambda + 4\omega_0^2(2h - \omega_0^2\mathcal{D}) = 0. \quad (5)$$

Как известно, необходимые и достаточные условия устойчивости, т. е. отсутствия положительных вещественных частей у корней  $\lambda_k$  уравнения (5), — это условия Рауса — Гурвица, которые для кубического уравнения

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

имеют вид

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0.$$

Для уравнения (5) эти условия таковы:

$$h > 0, \quad \omega_0^2 + 2h^2 > 0, \quad 2h - \omega_0^2\mathcal{D} > 0, \quad 4h(\omega_0^2 + 3h^2) + \omega_0^4\mathcal{D} > 0.$$

Нарушаться может только третье неравенство, т. е. при

$$\mathcal{D} > 2h/\omega_0^2 \quad (6)$$

и малейшем отклонении начальных значений от нуля будет происходить экспоненциальное нарастание моментов  $\overline{x^2}$ ,  $\overline{xy}$  и  $\overline{y^2}$  и, в частности, средней энергии осциллятора (параметрическое возбуждение).

Исследование уравнений для моментов порядка  $n > 2$  показывает, что условия параметрического возбуждения для разных  $n$  различны. В частности, для четвертых моментов это условие слабее (6), а именно:

$$\mathcal{D} > \frac{2h}{3\omega_0^2} \frac{\omega_0^2 + 3h^2}{\omega_0^2 + 6h^2}.$$

Те же замкнутые системы уравнений (4) для моментов можно получить и непосредственно из стохастических уравнений (2), не предполагая нормальности  $f(t)$ , но считая, что высшие моменты  $f(t)$  выражаются через произведение дельта-функций  $\delta(t_2 - t_1)\delta(t_3 - t_1)\dots\delta(t_n - t_1)$ . Исследование условий применимости диффузионного приближения [7] показывает, что при наличии у  $f(t)$  не равного нулю времени корреляции  $\theta_f$  должны выполняться условия

$$\theta_f \ll T_0 = 2\pi/\omega_0, \quad \theta_f \ll 1/\omega_0^2\mathcal{D}, \quad t \gg \theta_f.$$

5. Написать уравнение Эйнштейна — Фоккера для нелинейного осциллятора

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = f(t), \quad (1)$$

где потенциальная энергия  $U(x)$  содержит, кроме члена с  $x^2$ , члены с высшими степенями  $x$ , а случайная сила  $f(t)$  предполагается нормальной и дельта-коррелированной [7]. Исследовать стационарное решение уравнения Эйнштейна — Фоккера.

Решение. Система уравнений для  $x$  и  $y = \dot{x}$  имеет вид

$$\dot{x} = y = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -2hy - \frac{\partial H}{\partial x} + f(t),$$

где  $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$  — гамильтонова функция автономной ( $f = 0$ ) и консервативной ( $h = 0$ ) системы. Эта система уравнений удовлетворяет условиям общей теоремы (§ 36), и уравнение (36.15) для вероятности перехода  $v(x, y, t | x_0, y_0, 0)$  имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right\} + 2h \frac{\partial y v}{\partial y} + \mathcal{D} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -y \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{dU}{dx} \frac{\partial v}{\partial y} + 2h \frac{\partial y v}{\partial y} + \mathcal{D} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

[ $2\mathcal{D}$  — постоянная при дельта-функции в корреляционной функции  $f(t)$ ].

Легко проверить подстановкой, что стационарное решение  $\omega_1(x, y)$ , устанавливающееся при  $t \rightarrow \infty$ , имеет вид распределения Гиббса:

$$\omega_1(x, y) = C e^{-2hH(x, y)/\mathcal{D}} = C \exp \left[ -\frac{ky^2}{\mathcal{D}} - \frac{2h}{\mathcal{D}} U(x) \right] = \omega_x(x) \cdot \omega_y(y).$$

Таким образом,  $x$  и  $y$  независимы, а распределение скорости  $\dot{x} = y$  гауссово. Разумеется, стационарное решение существует только при условии интегрируемости функции  $\exp(-2hU(x)/\mathcal{D})$ . Максимумы и минимумы плотности вероятности  $x$ :

$$\omega_x(x) = C_1 e^{-2hU(x)/\mathcal{D}},$$

лежат в точках соответственно минимумов и максимумов потенциальной энергии  $U(x)$ , т. е. совпадают с устойчивыми и неустойчивыми положениями равновесия автономной динамической системы. Например, если  $U(x) = \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4} \alpha x^4$  ( $\alpha > 0$ ), то имеется только одно устойчивое положение равновесия  $x = 0$ . Автономная консервативная система описывается в этом случае уравнением Дuffинга:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0.$$

Если же  $U(x) = -\frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4} \alpha x^4$  ( $\alpha > 0$ ), то  $x = 0$  — неустойчивое положение равновесия, а устойчивы положения  $x = \pm \omega_0/\sqrt{\alpha}$ . В этом случае  $\omega_x(x)$  — симметричная двугорбая кривая.

6. Если в уравнении (1) предыдущей задачи можно пренебречь инерцией (членом с ускорением  $\ddot{x}$ ), т. е. равновесное распределение скорости устанавливается очень быстро, то дальнейшее поведение системы описывается одним уравнением первого порядка

$$2h\dot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = f(t).$$

Исходя из соответствующего уравнения Эйнштейна — Фоккера, составить и решить уравнение для среднего времени достижения границ и, в частности, найти среднее время перехода (см. § 32) из одного устойчивого положения в другое в случае  $U(x) = -\frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4}\alpha x^4$ .

Решение. В рассматриваемом случае уравнение Эйнштейна — Фоккера для вероятности перехода  $v(x, t|x_0, 0)$  будет

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2h} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dU}{dx} v \right) + \frac{\mathcal{D}}{4h^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

т. е. коэффициенты  $A(x, t)$  и  $B(x, t)$  не зависят от  $t$  и равны

$$A(x) = -\frac{1}{2h} \frac{dU}{dx}, \quad B(x) = \frac{\mathcal{D}}{4h^2} = \text{const.}$$

Поэтому уравнение (32.10) для среднего времени  $\bar{t}(x)$  достижения границы  $a < x$  или  $b > x$  из начального положения  $x$  будет

$$\frac{\mathcal{D}}{8h^2} \frac{d^2 \bar{t}}{dx^2} - \frac{1}{2h} \frac{dU}{dx} \frac{d\bar{t}}{dx} + 1 = 0.$$

Вспользуемся решением этого уравнения при наличии только верхней границы  $b > x$ , т. е. решением (см. § 32)

$$\bar{t}_b(x) = 2 \int_x^b e^{-q(z)} dz \int_{-\infty}^z e^{q(y)} \frac{dy}{B(y)}, \quad q(y) = 2 \int_0^y \frac{A(x)}{B(x)} dx.$$

В нашей задаче

$$q(y) = -\frac{4h}{\mathcal{D}} \int_0^y \frac{dU}{dx} dx = -\frac{4h}{\mathcal{D}} [U(y) - U(0)]$$

и, следовательно,

$$\bar{t}_b(x) = 2 \int_x^b e^{4hU(z)/\mathcal{D}} dz \int_{-\infty}^z e^{-4hU(y)/\mathcal{D}} dy.$$

Если нас интересует среднее время перехода  $T_{12}$  из состояния  $x_1$  в состояние  $x_2$  ( $x_1 < x_2 < b$ ), то его можно получить как разность средних времен достижения границы  $b$  из  $x_1$  и из  $x_2$ :

$$T_{12} = \bar{t}_b(x_1) - \bar{t}_b(x_2) = \frac{8h^2}{\mathcal{D}} \int_{x_1}^{x_2} e^{4hU(z)/\mathcal{D}} dz \int_{-\infty}^z e^{-4hU(y)/\mathcal{D}} dy$$

— величина, конечно, не зависящая от  $b$ .

В частном случае, когда  $U(y) = -\frac{1}{2}\omega_0^2 y^2 + \frac{1}{4}\alpha y^4$  и мы хотим найти среднее время перехода из одного устойчивого состояния  $x_1 = -\omega_0/\sqrt{\alpha}$  в другое  $x_2 = \omega_0/\sqrt{\alpha}$ , получаем

$$T_{12} = \frac{8h^2}{\mathcal{D}} \int_{-\omega_0/\sqrt{\alpha}}^{\omega_0/\sqrt{\alpha}} \exp \left\{ -\frac{h}{\mathcal{D}} (2\omega_0^2 z^2 - \alpha z^4) \right\} dz \int_{-\infty}^z \exp \left\{ \frac{h}{\mathcal{D}} (2\omega_0^2 y^2 - \alpha y^4) \right\} dy.$$

При достаточно малых  $\mathcal{D}$  экспонента в интеграле по  $y$  имеет два симметричных острых пика в точках  $\pm \omega_0/\sqrt{\alpha}$ , так что значение интеграла по  $y$  приближенно равно в интервале  $(-\omega_0/\sqrt{\alpha}, \omega_0/\sqrt{\alpha})$  величине  $C/2$ , где

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{\hbar}{\mathcal{D}} (2\omega_0^2 y^2 - \alpha y^4) \right\} dy,$$

а среднее время перехода из одного устойчивого состояния в другое будет

$$T_{12} \approx \frac{8\hbar^2 C}{\mathcal{D}} \int_0^{\omega_0/\sqrt{\alpha}} \exp \left\{ -\frac{\hbar}{\mathcal{D}} (2\omega_0^2 z^2 - \alpha z^4) \right\} dz.$$

7. Получить непосредственно из стохастического уравнения

$$\ddot{x} + p(t) \dot{x} + q(t) x = f(t), \tag{1}$$

где  $f(t)$  — стационарный случайный процесс с  $\langle f(t) \rangle = 0$ , а  $p(t)$ ,  $q(t)$  — детерминированные функции, уравнения для моментов — первого и второго порядков.

Решение. Усреднение уравнения (1), если учесть коммутативность операций усреднения и дифференцирования, дает для момента  $\bar{x}(t)$

$$\ddot{\bar{x}} + p(t) \dot{\bar{x}} + q(t) \bar{x} = 0.$$

Введем обозначения:  $\mu_{00} = x^2$ ,  $\mu_{01} = \mu_{10} = x\dot{x}$ ,  $\mu_{11} = \dot{x}^2$ . Дифференцируя эти  $\mu_{kl}$  по  $t$  и пользуясь (1) для исключения  $\ddot{x}$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_{00} &= 2x\dot{x} = 2\mu_{01}, \\ \dot{\mu}_{01} &= \dot{x}^2 + x\ddot{x} = \mu_{11} - p\mu_{01} - q\mu_{00} + x\dot{f}, \\ \dot{\mu}_{11} &= 2\dot{x}\ddot{x} = -2p\mu_{11} - 2q\mu_{01} + 2\dot{x}\dot{f}. \end{aligned}$$

Усреднение этих уравнений дает для моментов  $m_{kl} = \bar{\mu}_{kl}$  уравнения

$$\begin{aligned} \dot{m}_{00} &= 2m_{01}, \quad \dot{m}_{01} = m_{11} - pm_{01} - qm_{00} + \langle x\dot{f} \rangle, \\ \dot{m}_{11} &= -2pm_{11} - 2qm_{01} + 2\langle \dot{x}\dot{f} \rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, надо вычислить средние значения  $\langle x(t) \dot{f}(t) \rangle$  и  $\langle \dot{x}(t) \dot{f}(t) \rangle$ .

Воспользуемся выражением  $x(t)$  через интеграл Дюамеля (с нулевыми начальными условиями при  $t=0$ ):

$$x(t) = \int_0^t H(t, \theta) f(\theta) d\theta.$$

Если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — фундаментальные решения однородного уравнения (1), то импульсный отклик записывается в виде

$$H(t, \theta) = \frac{1}{\Delta(\theta)} [x_1(\theta) x_2(t) - x_2(\theta) x_1(t)],$$

где  $\Delta(\theta)$  — детерминант Вронского:

$$\Delta(\theta) = \begin{vmatrix} x_1(\theta) & x_2(\theta) \\ \dot{x}_1(\theta) & \dot{x}_2(\theta) \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$H(t, t) = 0, \quad \left. \frac{dH(t, \theta)}{d\theta} \right|_{\theta=t} = 1. \quad (3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \langle x(t) f(t) \rangle &= \int_0^t H(t, \theta) \langle f(\theta) f(t) \rangle d\theta = \int_0^t H(t, \theta) \psi_f(t - \theta) d\theta, \\ \langle \dot{x}(t) f(t) \rangle &= \int_0^t \dot{H}(t, \theta) \langle f(\theta) f(t) \rangle d\theta = \int_0^t \dot{H}(t, \theta) \psi_f(t - \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Эти интегралы не могут быть выражены ни через  $m_{kl}$ , ни через параметры  $\psi_f$ , за исключением того случая, когда сила дельта-коррелирована:

$$\psi_f(t - \theta) = \langle f(\theta) f(t) \rangle = 2\mathcal{D}\delta(t - \theta).$$

Тогда

$$\langle x(t) f(t) \rangle = \mathcal{D}H(t, t), \quad \langle \dot{x}(t) f(t) \rangle = \mathcal{D} \left. \frac{dH(t, \theta)}{d\theta} \right|_{\theta=t}$$

(из-за того, что дельта-функция отлична от нуля на границе интервала, входит множитель 1/2). В силу (3) получаем

$$\langle x f \rangle = 0, \quad \langle \dot{x} f \rangle = \mathcal{D}. \quad (4)$$

Смысл этого результата состоит в том, что отклик  $x(t)$  в момент  $t$  еще не содержит компоненты, обусловленной действием силы  $f(t)$  в этот самый момент. Напротив, производная уже «чувствует» действие силы  $f(t)$  в момент  $t$ .

Согласно (4) уравнения (2) становятся замкнутой системой:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{00} &= 2m_{01}, & \dot{m}_{01} &= m_{11} - pm_{01} - qm_{00}, \\ \dot{m}_{11} &= -2pm_{11} - 2qm_{01} + 2\mathcal{D}, \end{aligned}$$

которую надо решать при условиях  $m_{kl}(0) = 0$ .

Изложенный способ был развит в работе [11], в которой рассмотрен общий случай уравнения  $n$ -го порядка:

$$p_n(t) x^{(n)} + p_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + p_0(t) x = f(t). \quad (5)$$

В принципе процедура остается такой же и приводит в случае дельта-коррелированной силы  $f(t)$  к замкнутой системе  $n(n+1)/2$  уравнений для моментов  $m_{kl}(t) = \langle x^{(k)}(t) x^{(l)}(t) \rangle$ . При этом надо вычислить значения  $n$  смешанных моментов  $\langle x^{(k)}(t) f(t) \rangle$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Если  $f(t)$  не обладает дельта-корреляцией, то можно применить тот же метод к уравнению более высокого порядка, если подобрать такой линейный дифференциальный оператор  $\hat{L}$ , который даст в правой части нового уравнения дельта-коррелированную силу  $F(t) = \hat{L}\{f(t)\}$ .

## Г л а в а VI

### КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

#### § 38. Комплексные случайные функции. Аналитический сигнал

В § 18 уже была дана краткая характеристика корреляционной теории, которая описывает случайную функцию ее средним значением и ее моментами второго порядка. По причинам, которые выяснятся в дальнейшем (§ 41), корреляционная теория наиболее интересна и наиболее продвинута в применении к *стационарным* случайным функциям. Основное внимание мы уделим далее именно таким функциям, хотя в некоторой степени будут затронуты и нестационарные процессы.

Прежде чем переходить к конкретному содержанию корреляционной теории, сделаем одно обобщение — введем в рассмотрение *комплексные* случайные функции. Под такой функцией  $\zeta(t)$  понимается, как обычно, следующая линейная комбинация из двух вещественных случайных функций  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ :

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t),$$

задаваемая совместными функциями распределения  $\xi$  и  $\eta$ . Очевидно,

$$\overline{\zeta(t)} = \overline{\xi(t)} + i\overline{\eta(t)}.$$

Что касается моментов второго порядка, то в большинстве случаев приходится пользоваться теми из них, которые приводят к вещественным среднеквадратичным величинам. Таким является смешанный момент второго порядка

$$B(t, t') = \langle \zeta(t) \zeta^*(t') \rangle = \overline{\xi\xi'} + \overline{\eta\eta'} + i(\overline{\eta'\xi} - \overline{\eta\xi'}), \quad (38.1)$$



где  $\xi'$  и  $\eta'$  — значения  $\xi$  и  $\eta$  в момент времени  $t'$ . В частности,

$$B(t, t) = \overline{|\xi(t)|^2} = \overline{\xi^2(t)} + \overline{\eta^2(t)}$$

— величина вещественная и положительная. Аналогично определяется и функция корреляции:

$$\psi(t, t') = \overline{[\xi(t) - \overline{\xi(t)}][\xi^*(t') - \overline{\xi^*(t')}] = B(t, t') - \overline{\xi(t)} \overline{\xi^*(t')}.$$

В частности, дисперсия  $\xi(t)$  тоже будет вещественной и положительной:

$$\psi(t, t) = \overline{|\xi(t) - \overline{\xi(t)}|^2} = \overline{|\xi(t)|^2} - |\overline{\xi(t)}|^2 = D[\xi(t)].$$

Однако в ряде задач удобно рассматривать также другие моменты второго порядка, составленные без использования комплексно-сопряженных случайных функций; эти моменты мы будем называть «вторыми» (второй смешанный момент, вторая функция корреляции) и отмечать тильдой:

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t, t') &= \overline{\xi(t) \xi(t')} = \overline{\xi \xi'} - \overline{\eta \eta'} + i(\overline{\xi' \eta} + \overline{\xi \eta'}), \\ \tilde{\psi}(t, t') &= \tilde{B}(t, t') - \overline{\xi(t)} \cdot \overline{\xi(t')}. \end{aligned} \quad (38.2)$$

В частности, при  $t' = t$

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t, t) &= \overline{\xi^2(t)} = \overline{\xi^2(t)} - \overline{\eta^2(t)} + 2i\overline{\xi(t) \eta(t)}, \\ \tilde{\psi}(t, t) &= \overline{\xi^2(t)} - \overline{\xi(t)}^2. \end{aligned}$$

Разумеется, две комплексные функции  $B(t, t')$  и  $\tilde{B}(t, t')$  полностью определяют все моменты второго порядка вещественных функций  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ :

$$\begin{aligned} \overline{\xi \xi'} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(B + \tilde{B}), & \overline{\eta \eta'} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(B - \tilde{B}), \\ \overline{\xi' \eta} &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(B + \tilde{B}), & \overline{\xi \eta'} &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\tilde{B} - B). \end{aligned} \quad (38.3)$$

Мы будем рассматривать только такие случайные функции, у которых момент  $B(t, t')$  существует и непрерывен при всех  $t' = t^1$ , откуда следует, что он существует и непрерывен при всех  $t$  и  $t'$ . Поскольку средний квадрат модуля  $|\xi|^2$  конечен, будет конечен и модуль среднего значения, так как  $D[\xi] > 0$ , т. е.  $|\overline{\xi}|^2 < \overline{|\xi|^2}$ .

При переходе к частному случаю стационарной функции мы будем понимать стационарность в широком смысле (§ 18), т. е. включать в нее: 1) постоянство среднего значения  $\overline{\xi}$  (что

<sup>1)</sup> Этим условием выделен класс так называемых случайных функций второго порядка, всюду непрерывных в среднем квадратичном (см. ниже).

позволяет во всех случаях рассматривать  $\zeta$  за вычетом  $\bar{\zeta} = \text{const}$ , т. е. считать  $\bar{\zeta} = 0$ ), 2) стационарность  $B$  (а значит, и функции корреляции  $\psi$ ), т. е. их зависимость только от  $t - t' = \tau$ , и 3) непрерывность  $B(\tau)$  в нуле.

Пусть, например,  $\zeta(t) = cf(t)$ , где  $f(t)$  — детерминированная комплексная функция, а  $c$  — случайная комплексная величина. Условие 1) требует, чтобы было  $\bar{c} = 0$ . Тогда  $\overline{\zeta(t)} = 0$  и

$$B = \psi = \overline{|c|^2} f(t) f^*(t - \tau).$$

Условия 2) и 3) выполняются только для функции  $f(t) = e^{i\omega t}$ , когда

$$B(\tau) = \psi(\tau) = \overline{|c|^2} e^{i\omega\tau}.$$

При  $\bar{c} \neq 0$  имеем

$$\overline{\zeta(t)} = \bar{c} e^{i\omega t}, \quad B(\tau) = \overline{|c|^2} e^{i\omega\tau}, \quad \psi(\tau) = (\overline{|c|^2} - |\bar{c}|^2) e^{i\omega\tau},$$

т. е. условия 2) и 3) выполнены, но 1) нарушено, из чего видно, между прочим, что оно является независимым условием.

Следует заметить, что даже при выполнении всех трех условий 1)–3) «вторые» моменты, вообще говоря, нестационарны (зависят не только от сдвига  $\tau$ , но и от  $t$ ). В приведенном примере, когда  $\zeta(t) = ce^{i\omega t}$  и  $\bar{c} = 0$ , имеем

$$\tilde{B} = \tilde{\psi} = \overline{c^2} e^{i\omega(2t - \tau)}.$$

Реальные процессы описываются вещественными функциями  $t$ , но, как известно, часто гораздо удобнее работать с комплексными величинами, чем широко пользуются во многих областях физики и, в том числе, в теории колебаний и волн. Однако, заменяя вещественный процесс  $\xi(t)$  комплексной функцией  $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$  путем добавления произвольной мнимой части  $\eta(t)$ , мы неоправданным образом «удваиваем информацию». Этого можно избежать лишь наложением однозначной связи между  $\eta(t)$  и  $\xi(t)$ . Способ установления такой связи, обладающий рядом достоинств, которые полностью выявятся в дальнейшем, был предложен Д. Габором [1]. На данной стадии мы формулируем этот способ как некоторый рецепт.

Прежде всего, мы потребуем, чтобы продолжение  $\xi(t)$  на комплексную плоскость  $\tau = t + i\alpha$  давало аналитическую функцию  $\xi(\tau)$ , которая при  $\alpha \rightarrow 0$  переходит в  $\xi(t)$ . Выберем теперь  $\eta(t)$  так, чтобы комплексная функция  $\zeta(t)$  была *регулярной и аналитической в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\tau$*  и чтобы *при всяком  $t$  ее модуль  $|\zeta|$  достаточно быстро стремился к нулю при  $\alpha \rightarrow +\infty$* . Это сильные требования, ведущие к тому, что  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  оказываются парой трансформант преобразования Гильберта и, следовательно, однозначно

связаны друг с другом. Действительно, по формуле Коши имеем

$$\zeta(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - \tau} d\theta,$$

где полюс  $\tau$  лежит в верхней полуплоскости ( $\tau = t + i\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ), а путь  $\Gamma$  охватывает этот полюс (рис. 29). В силу первого требования к  $\zeta(\theta)$  можно растянуть контур  $\Gamma$  так, чтобы он охватывал всю верхнюю полуплоскость. Убывание же  $|\zeta|$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  должно быть настолько быстрым, чтобы интеграл по бесконечной полуокружности не давал вклада. Тогда остается только интеграл по вещественной оси:

$$\zeta(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - \tau} d\theta. \quad (38.4)$$

Но

$$\frac{1}{\theta - \tau} = \frac{1}{\theta - t - i\alpha} = \frac{\theta - t}{(\theta - t)^2 + \alpha^2} + i \frac{\alpha}{(\theta - t)^2 + \alpha^2},$$

причем в пределе, при  $\alpha \rightarrow 0$ , вещественная часть этого выражения дает главное значение интеграла от  $\zeta(\theta)/(\theta - t)$ , а мнимая часть переходит в дельта-функцию  $\pi\delta(\theta - t)$ . Таким образом, при переходе к  $\alpha = 0$  формула (38.4) дает

$$\zeta(t) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - t} d\theta + \pi i \zeta(t) \right],$$

откуда

$$\zeta(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - t} d\theta.$$

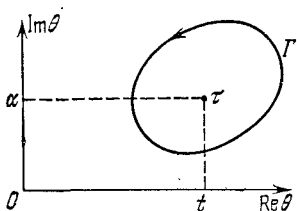


Рис. 29.

Черта на знаке интеграла означает, что он вычисляется в смысле главного значения Коши. Подставив в правую и левую части полученного соотношения  $\zeta = \xi + i\eta$ , получаем, что  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  связаны преобразованиями Гильберта:

$$\eta(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi(\theta)}{\theta - t} d\theta, \quad \xi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\theta)}{\theta - t} d\theta. \quad (38.5)$$

Легко видеть, что эти преобразования можно записать и иначе:

$$\eta(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi(t+\theta) - \xi(t-\theta)}{\theta} d\theta, \quad \xi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta(t+\theta) - \eta(t-\theta)}{\theta} d\theta. \quad (38.6)$$

Комплексная функция  $\zeta(t)$ , построенная указанным способом из вещественной функции  $\xi(t)$ , называется *аналитическим сигналом* — термин, отражающий аналитичность  $\zeta(t)$  в верхней полуплоскости комплексного  $t$ <sup>1)</sup>. Аналитический сигнал широко используется и в теории информации (которой мы не касаемся), и в теории когерентности (которую мы затронем ниже, в § 46, а также в части II книги). В классической (не квантовой) теории когерентности волновых полей аналитический сигнал, если не говорить о том, что он не содержит никакой информации сверх той, какая заключена в  $\xi(t)$ , обладает лишь формальными преимуществами, свойственными оперированию комплексными величинами. Но в квантовой электродинамике он приобретает и непосредственный физический смысл, так как описывает собственные функции оператора уничтожения фотонов.

Построение аналитического сигнала, конечно, не содержит обязательных предположений о том, является ли исходная вещественная функция  $\xi(t)$  детерминированной или случайной. Обратимся теперь именно к этому последнему случаю. Нетрудно понять, что однозначная связь  $\eta(t)$  с  $\xi(t)$  предопределяет и то, что вероятностные свойства  $\eta(t)$  полностью вытекают из статистики  $\xi(t)$ . Хотя это и естественно, но отнюдь не тривиально, поскольку связь между  $\eta(t)$  и  $\xi(t)$ , даваемая преобразованиями (38.5), *нелокальна по  $t$* . Исчерпывающий анализ между статистикой аналитического сигнала  $\zeta(t)$  и статистикой исходного вещественного случайного процесса  $\xi(t)$  проведен в работе [2]<sup>2)</sup>. Оставаясь в рамках корреляционной теории, мы ограничимся свойствами моментов первого и второго порядков.

Средние значения  $\overline{\xi(t)}$  и  $\overline{\eta(t)}$  связаны, очевидно, теми же преобразованиями Гильберта (38.5). Отсюда следует, что в случае стационарного процесса  $\xi(t)$  необходимо  $\overline{\xi(t)} = \overline{\eta(t)} = 0$ . Действительно, если  $\overline{\xi(t)} = \xi = \text{const}$ , то из первой формулы (38.5) [или (38.6)] вытекает, что  $\overline{\eta} = 0$ . Но тогда по второй формуле и  $\overline{\xi} = 0$ .

<sup>1)</sup> Разумеется, можно потребовать аналитичности  $\zeta(t)$  не в верхней, а в нижней полуплоскости комплексного  $t$ . В конечном счете это сводится к выбору знака при  $i$  в последующих комплексных разложениях Фурье: функция  $e^{i\omega t}$  экспоненциально затухает при удалении в верхнюю полуплоскость, а  $e^{-i\omega t}$  — в нижнюю.

<sup>2)</sup> В этой работе на  $\xi(t)$  наложено условие квадратичной интегрируемости, чем, строго говоря, исключены стационарные процессы  $\xi(t)$ . Однако это условие, как отмечают сами авторы, излишне жестко. Фактически достаточно существования спектрального разложения  $\xi(t)$  в среднем квадратичном (§ 40).

Умножив первую формулу (38.5) на  $\eta(t')$ , а вторую — на  $\xi(t')$  и усреднив результаты, получаем соотношения

$$B_{\eta}(t, t') \equiv \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_{\xi\eta}(\theta, t')}{\theta - t} d\theta, \quad (38.7)$$

$$B_{\xi}(t, t') \equiv \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_{\xi\eta}(t', \theta)}{\theta - t} d\theta,$$

где  $B_{\xi\eta}(t, t') = \langle \xi(t) \eta(t') \rangle$ . Умножая те же формулы соответственно на  $\xi(t')$  и  $\eta(t')$ , получаем после усреднения *обращенные* преобразования Гильберта:

$$B_{\xi\eta}(t, t') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_{\eta}(\theta, t')}{\theta - t} d\theta, \quad B_{\xi\eta}(t', t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_{\xi}(\theta, t')}{\theta - t} d\theta. \quad (38.8)$$

Таким образом, для моментов второго порядка мы имеем две пары трансформант Гильберта.

Посмотрим, что дают эти соотношения в случае *стационарного* (в широком смысле) процесса  $\xi(t)$ , когда  $B_{\xi}(t, t') = B_{\xi}(\tau) = B_{\xi}(-\tau)$ , где  $\tau = t - t'$ . Вторая формула (38.8) принимает вид

$$B_{\xi\eta}(t', t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_{\xi}(\theta - t')}{\theta - t} d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_{\xi}(\theta')}{\theta' - \tau} d\theta' = B_{\xi\eta}(\tau), \quad (38.9)$$

т. е.  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  *стационарно связаны*, причем из (38.9) следует, что  $B_{\xi\eta}(\tau)$  — нечетная функция  $\tau$ :

$$B_{\xi\eta}(-\tau) = -B_{\xi\eta}(\tau).$$

Но тогда из (38.7) вытекает, что  $B_{\eta}$  зависит от  $\tau = t - t'$  и равно  $B_{\xi}$ :

$$B_{\eta}(\tau) = B_{\xi}(\tau).$$

Итак, при стационарном исходном вещественном процессе  $\xi(t)$  сопряженный по Гильберту процесс  $\eta(t)$  тоже стационарен и стационарно связан с  $\xi(t)$ , причем

$$\bar{\xi} = \bar{\eta} = 0, \quad \overline{\xi\xi_{\tau}} = \overline{\eta\eta_{\tau}}, \quad \overline{\xi\eta_{\tau}} = -\overline{\xi_{\tau}\eta}, \quad (38.10)$$

где  $\xi \equiv \xi(t)$ ,  $\xi_{\tau} \equiv \xi(t + \tau)$  и аналогично для  $\eta$ . Согласно (38.1) и (38.2) это означает, что у стационарного аналитического сигнала

$$B_{\xi}(\tau) = 2[B_{\xi}(\tau) + iB_{\xi\eta}(\tau)], \quad \tilde{B}_{\xi}(\tau) = 0. \quad (38.11)$$

Так как вещественная и мнимая части  $B_{\zeta}(\tau)$  связаны преобразованием Гильберта,  $B_{\zeta}(\tau)$  тоже является аналитическим сигналом. Запишем  $B_{\zeta}(\tau)$  в виде

$$B_{\zeta}(\tau) = |B_{\zeta}(\tau)| e^{i\varphi(\tau)}. \quad (38.12)$$

Аналитичность и регулярность  $B_{\zeta}(\tau)$  в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\tau$  означает, что функция

$$\ln B_{\zeta}(\tau) = \ln |B_{\zeta}(\tau)| + i\varphi(\tau)$$

тоже аналитическая в этой полуплоскости, но в нулях  $|B_{\zeta}(\tau)|$  она может иметь логарифмические точки ветвления. В отсутствие таких точек в верхней полуплоскости  $\ln B_{\zeta}(\tau)$  не только аналитичен, но и регулярен и, следовательно, его вещественная и мнимая части тоже связаны преобразованиями Гильберта:

$$\begin{aligned} \ln |B_{\zeta}(\tau)| &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\theta)}{\theta - \tau} d\theta, \\ \varphi(\tau) &= -\frac{1}{\pi} \int \frac{\ln |B_{\zeta}(\tau)|}{\theta - \tau} d\theta. \end{aligned} \quad (33.13)$$

Таким образом, фаза  $\varphi(\tau)$  однозначно определена в этом случае модулем  $B_{\zeta}(\tau)$ , и обратно<sup>1)</sup>.

В дальнейшем, рассматривая комплексные случайные процессы, мы будем в тех случаях, когда это окажется целесообразным, пользоваться аналитическим сигналом.

### § 39. Свойства функции корреляции и связанные с ней свойства случайной функции

Для краткости последующие рассуждения проводятся над смешанным моментом  $B(t, t')$ , хотя они полностью применимы и к функции корреляции  $\psi(t, t')$ .

Из определения  $B(t, t')$  тотчас же следует, что имеет место эрмитовость:

$$B(t, t') = B^*(t', t). \quad (39.1)$$

Легко видеть, далее, что на всей плоскости  $(t, t')$  момент  $B(t, t')$  ограничен по модулю. Действительно, полагая  $B(t, t') = |B| e^{i\varphi}$ , имеем с учетом (39.1)

$$\begin{aligned} |\xi(t) + e^{i\alpha} \xi(t')|^2 &= |\xi|^2 + |\xi'|^2 + e^{i\alpha} B(t', t) + e^{-i\alpha} B(t, t') = \\ &= |\xi|^2 + |\xi'|^2 + 2|B| \cos(\alpha - \varphi) \geq 0, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> О наличии нулей  $|B_{\zeta}(\tau)|$  в верхней полуплоскости см. [3].

так что

$$|B| \leq \frac{|\bar{\xi}|^2 + |\bar{\xi}'|^2}{2}. \quad (39.2)$$

Свойства (39.1) и (39.2) вытекают из более общего утверждения, состоящего в том, что момент  $B$  является *положительно-определенной функцией*. Это означает, что для любых  $n$  моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  и  $n$  произвольных комплексных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  вещественна и неотрицательна сумма

$$\sum_{j, k=1}^n B(t_j, t_k) a_j a_k^* \geq 0. \quad (39.3)$$

Доказательство крайне простое: (39.3) вытекает из того, что

$$\left| \sum_{j=1}^n \xi(t_j) a_j \right|^2 = \sum_{j, k=1}^n \overline{\xi(t_j) \xi^*(t_k)} a_j a_k^* \geq 0.$$

Очевидно, «второй» смешанный момент  $\bar{B}(t, t')$  симметричен по отношению к перестановке  $t \rightleftharpoons t'$ , но свойством положительной определенности не обладает.

Можно доказать и обратную теорему: всякая положительно-определенная функция  $\bar{B}(t, t')$  является моментом второго порядка некоторой случайной функции рассматриваемого типа. Таким образом, класс положительно-определенных функций *совпадает* с классом моментов  $B(t, t')$  случайных функций второго порядка. Нетрудно видеть, что любые линейные комбинации моментов  $B_i(t, t')$  с произвольными положительными коэффициентами тоже положительно-определены, т. е. обладают свойствами смешанного момента  $B$  некоторой случайной функции второго порядка.

Если  $\xi(t)$  стационарна, так что  $B(t, t') = B(\tau)$ , где  $\tau = t - t'$ , то свойства (39.1)–(39.3) принимают следующую форму:

$$B(\tau) = B^*(-\tau) \quad (39.4)$$

(что непосредственно вытекает из инвариантности к сдвигу начала отсчета времени, см. § 18),

$$|B(\tau)| \leq |\bar{\xi}|^2 = B(0), \quad (39.5)$$

$$\sum_{j, k=1}^n B(t_j - t_k) a_j a_k^* \geq 0. \quad (39.6)$$

Заметим еще раз, что все сказанное справедливо и по отношению к функции корреляции  $\psi(t, t')$ . Для стационарной функции  $\xi(t)$  можно вообще отождествить  $B(\tau)$  и  $\psi(\tau)$ , считая  $\bar{\xi} = 0$ .

Убедимся теперь в том, что предположенная непрерывность  $B(t, t')$  при любых  $t = t'$  влечет за собой равномерную непрерывность  $B(t, t')$  на всей плоскости  $(t, t')$ . Имеем

$$\overline{\zeta(t + \tau) [\zeta^*(t - h) - \zeta^*(t)]} = B(t + \tau, t - h) - B(t + \tau, t).$$

Следовательно, воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского

$$\overline{ab^*}^2 \leq \overline{a^2} \overline{b^2},$$

получаем

$$\begin{aligned} |B(t + \tau, t - h) - B(t + \tau, t)|^2 &= \\ &= \overline{|\zeta(t + \tau) [\zeta^*(t - h) - \zeta^*(t)]|^2} \leq \overline{|\zeta(t + \tau)|^2} \overline{|\zeta(t) - \zeta(t - h)|^2} = \\ &= B(t + \tau, t + \tau) \{B(t, t) + B(t - h, t - h) - \\ &\quad - B(t, t - h) - B(t - h, t)\}. \end{aligned}$$

Так как правая часть при  $h \rightarrow 0$  обращается в нуль в силу непрерывности  $B(t, t')$  при всех  $t = t'$ , то и левая часть стремится к нулю, причем при любых  $\tau$ . В частности, если случайная функция  $\zeta(t)$  стационарна, то неравенство принимает вид

$$\begin{aligned} |B(\tau + h) - B(\tau)|^2 &\leq \\ &\leq B(0) \{2B(0) - \\ &\quad - B(h) - B(-h)\} = \\ &= 2B(0) \cdot \operatorname{Re} \{B(0) - B(h)\}, \end{aligned}$$

откуда видно, что непрерывность смешанного момента в нуле обеспечивает его непрерывность при всех  $\tau$ . Следовательно, из четырех изображенных на рис. 30 вещественных и четных функций  $B(\tau)$

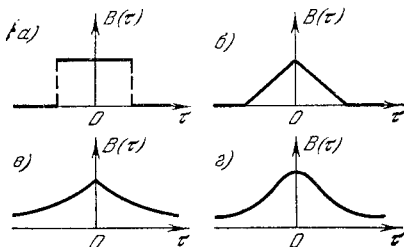


Рис. 30.

только три последние могут представлять момент второго порядка стационарного процесса, а первая — наверное не может.

Через определенные условия, налагаемые на момент  $B(t, t')$ , выражается ряд свойств самой случайной функции  $\zeta(t)$ . Так, например, из равенства

$$\overline{|\zeta(t) - \zeta(t')|^2} = B(t, t) + B(t', t') - B(t, t') - B(t', t)$$

следует, что непрерывность  $B(t, t')$  при  $t' \rightarrow t$  означает непрерывность в среднем квадратичном для  $\zeta(t)$ :

$$\lim_{t' \rightarrow t} \overline{|\zeta(t) - \zeta(t')|^2} = 0, \quad \text{или} \quad \text{l.i.m.}_{t' \rightarrow t} \zeta(t') = \zeta(t).$$



Легко также показать, что производная  $\dot{\zeta}(t)$  обязательно будет существовать и будет случайной функцией второго порядка, непрерывной в среднем квадратичном, только при условии существования непрерывной для всех  $t' = t$  смешанной производной  $\frac{\partial^2 B(t, t')}{\partial t \partial t'}$ . Действительно, легко проверить, что при этом условии

$$\lim_{h, h' \rightarrow 0} \left| \frac{\zeta(t+h) - \zeta(t)}{h} - \frac{\zeta(t+h') - \zeta(t)}{h'} \right|^2 = 0,$$

т. е. существует предел в среднем квадратичном отношения  $\frac{\zeta(t+h) - \zeta(t)}{h}$ , не зависящий от способа перехода к  $h = 0$ .

Чему равен момент  $B_1(t, t')$  случайной функции  $\dot{\zeta}(t)$ ? Имеем

$$\begin{aligned} B_1(t, t') &= \overline{\dot{\zeta}(t) \dot{\zeta}^*(t')} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\zeta(t+h) - \zeta(t)}{h} \frac{\zeta^*(t'+h) - \zeta^*(t')}{h} \right\} = \frac{\partial^2 B(t, t')}{\partial t \partial t'}. \end{aligned} \quad (39.7)$$

В частности, для стационарной случайной функции  $\zeta(t)$  достаточным условием существования  $\dot{\zeta}(t)$  является существование производной  $d^2 B(\tau)/d\tau^2$ , причем смешанный момент  $\dot{\zeta}(t)$  есть

$$B_1(\tau) = \overline{\dot{\zeta}(t+\tau) \dot{\zeta}^*(t)} = - \frac{d^2 B(\tau)}{d\tau^2}. \quad (39.8)$$

Таким образом, стационарные случайные функции  $\zeta(t)$  с моментами  $B(\tau)$ , показанными на рис. 30, б, в, не имеют производной, а с  $B(\tau)$ , изображенным на рис. 30, г, имеет производную. Непрерывность производной (в среднем квадратичном) опять-таки определяется непрерывностью  $B_1(\tau)$  в нуле.

Тем же способом, которым мы нашли  $B_1(t, t')$ , нетрудно убедиться, что

$$\overline{\dot{\zeta}(t) \dot{\zeta}^*(t)} = \frac{\partial B(t, t')}{\partial t'}, \quad \overline{\dot{\zeta}(t) \dot{\zeta}^*(t')} = \frac{\partial B(t, t')}{\partial t}, \quad (39.9)$$

а для стационарной  $\zeta(t)$

$$\overline{\dot{\zeta}(t+\tau) \dot{\zeta}^*(t)} = - \overline{\dot{\zeta}(t+\tau) \dot{\zeta}^*(t)} = - \frac{dB(\tau)}{d\tau}. \quad (39.10)$$

Разумеется,

$$\overline{\dot{\zeta}(t+\tau) \dot{\zeta}^*(t)} + \overline{\dot{\zeta}(t+\tau) \dot{\zeta}^*(t)} = \frac{d}{dt} \overline{\zeta(t+\tau) \zeta^*(t)} = 0,$$

так как  $\overline{\zeta(t+\tau) \zeta^*(t)} = B(\tau)$ , т. е. не зависит от  $t$ .

Наконец, необходимым и достаточным условием существования в среднем квадратичном интеграла

$$I = \int_a^b f(t) \xi(t) dt,$$

где  $f(t)$  — некоторая детерминированная функция, а пределы могут быть и бесконечными, является конечность двукратного интеграла

$$\iint_a^b f(t) f^*(t') B(t, t') dt dt',$$

который, если он существует, представляет собой величину  $\overline{|I|^2}$ . Очевидно, функция распределения случайной величины  $I$  зависит от  $a$  и  $b$ , как от параметров, а кроме того, является функционалом от  $f(t)$ .

#### § 40. Спектральные разложения случайных функций

Центральное место в корреляционной теории занимает вопрос о гармонических разложениях как самих, случайных функций, так и их моментов второго порядка, т. е. средних билинейных величин. Важность последних связана с тем, что во многих случаях они имеют энергетический смысл и во всех случаях служат простейшей мерой интенсивности случайных изменений. Разумеется, сказанное еще несколько не разъясняет, почему вообще целесообразно прибегать к каким-либо разложениям и почему из различных возможных разложений

$$\zeta(t) = \int \varphi(t, \omega) dC(\omega)$$

следует отдать предпочтение разложению по функциям  $\varphi(t, \omega) = e^{i\omega t}$ . Но ответы на оба эти вопроса не содержат ничего специфического для случайных функций.

Представление внешнего воздействия на динамическую систему и ее отклика на это воздействие в виде суммы каких-то «элементарных» слагаемых становится оправданным всякий раз, когда система *линейна*, т. е. удовлетворяет принципу суперпозиции (отклик на сумму сил равен сумме откликов на каждое из слагаемых). Это в равной мере относится как к детерминированным, так и к случайным воздействиям. Тот или иной выбор тех «элементарных» слагаемых, на которые оказывается целесообразным разлагать рассматриваемые функции, опять-таки определяется свойствами динамической системы. Среди линейных систем весьма обширный класс образуют

устройства с *постоянными* параметрами. Часто их называют *гармоническими* системами (в частности, гармоническими фильтрами), имея в виду то основное их свойство, что воздействие  $e^{i\omega t}$  вызывает гармонический же *установившийся* отклик  $k(i\omega)e^{i\omega t}$  с неизменной частотой  $\omega$ . Тем самым из различных полных систем «элементарных» функций оказываются выделенными для таких устройств именно функции  $e^{i\omega t}$  с непрерывным или дискретным набором частот  $\omega$ . Особая роль разложений Фурье обусловлена, таким образом, большой распространенностью и важностью линейных динамических систем с постоянными параметрами — обстоятельство, которое тоже в одинаковой мере касается как детерминированных, так и случайных процессов. По указанным причинам мы также уделим основное внимание разложениям

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dC(\omega), \quad (40.1)$$

где  $dC(\omega)$  — конечное или бесконечно малое (пропорциональное  $d\omega$ ) приращение функции  $C(\omega)$  на интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ :

$$dC(\omega) = C(\omega + d\omega) - C(\omega).$$

Интеграл Фурье — Стильеса (40.1) охватывает случаи и непрерывного, и дискретного, и смешанного спектров. В чисто дискретном случае можно записать его в более привычной форме обобщенного ряда Фурье:

$$\zeta(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}, \quad (40.2)$$

а при чисто непрерывном спектре можно в некотором формальном смысле (о чем речь пойдет в дальнейшем) ввести плотность комплексной амплитуды  $dC(\omega)$ :

$$dC(\omega) = c(\omega) d\omega, \quad (40.3)$$

так что (40.1) примет вид обычного интеграла Фурье:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} c(\omega) d\omega. \quad (40.4)$$

Формально же можно включить в (40.4) и случай дискретного спектра (40.2), допуская, что

$$c(\omega) = \sum_n c_n \delta(\omega - \omega_n). \quad (40.5)$$

Заметим, что при вещественной функции  $\zeta(t)$  должно, очевидно, выполняться условие

$$dC(\omega) = dC^*(-\omega), \quad (40.6)$$

причем  $dC(-\omega) = C(-\omega + d\omega) - C(-\omega)$ .

Если  $\zeta(t)$  — случайная функция, то существование интеграла (40.1) надо понимать в смысле какого-либо из видов вероятностной сходимости. Случайные функции, представимые в виде (40.1), называются *гармонизируемыми*.

В пределах корреляционной теории, ограничивающейся моментами не выше второго порядка, естественно и целесообразно понимать существование интеграла (40.1) в среднем квадратичном. Необходимым и достаточным условием гармонизируемости случайной функции  $\zeta(t)$  является тогда существование при любых  $t$  и  $t'$  двукратного интеграла Фурье — Стильбеса

$$B(t, t') = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega t - \omega' t')} d^2\Gamma(\omega, \omega'), \quad (40.7)$$

представляющего момент второго порядка  $B(t, t') = \langle \zeta(t)\zeta^*(t') \rangle$  функции  $\zeta(t)$ . Иначе говоря, если интеграл (40.7) существует, то это означает, что существует случайная комплексная функция  $C(\omega)$  такая, что интеграл (40.1) сходится в среднем квадратичном к  $\zeta(t)$ , причем двумерное приращение функции  $\Gamma(\omega, \omega')$  есть

$$d^2\Gamma(\omega, \omega') = \langle dC(\omega) dC^*(\omega') \rangle. \quad (40.8)$$

В частности, при  $t' = t$  имеем

$$\langle |\zeta(t)|^2 \rangle = B(t, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \omega')t} d^2\Gamma(\omega, \omega'). \quad (40.9)$$

Заметим, что условие конечности интеграла (40.7), разумеется, ничего не говорит о среднем значении функции  $\zeta(t)$  и не предполагает, скажем, стационарности (постоянства)  $\langle \zeta(t) \rangle$ . Единственность разложения (40.1) при условии (40.7), т. е. однозначность соответствия между статистическими характеристиками  $\zeta(t)$  и  $C(\omega)$ , может быть установлена только с привлечением *фильтрации*, позволяющей выделять те или иные участки плоскости частот  $(\omega, \omega')$ , но к фильтрации мы обратимся позднее (§§ 50 и 58).

Функцию

$$\Gamma(\omega, \omega') = \int_{-\infty}^{\omega} \int_{-\infty}^{\omega'} \langle dC(\omega) dC^*(\omega') \rangle \quad (40.10)$$

мы будем называть комплексной *спектральной «массой»* процесса  $\xi(t)$ . Эта «масса» может быть сконцентрирована в отдельных точках плоскости  $(\omega, \omega')$ , она может быть распределена на линиях — с непрерывной линейной плотностью — и, наконец, может быть размазана на плоскости с непрерывной поверхностной плотностью. Однако двумерное приращение (40.8), очевидно, всегда обладает тем свойством, что

$$d^2\Gamma(\omega, \omega') = d^2\Gamma^*(\omega', \omega),$$

т. е. в точках, расположенных симметрично по отношению к биссектрисе  $\omega = \omega'$ , значения плотностей любого вида комплексно-сопряжены, а на самой биссектрисе вещественны. Тем самым интегралы вида

$$\iint e^{i(\omega - \omega')t} d^2\Gamma(\omega, \omega'),$$

распространенные на любую область  $(\omega, \omega')$ , симметричную относительно биссектрисы  $\omega = \omega'$  [в частности, интегралы по всей плоскости  $(\omega, \omega')$ ], будут вещественными. Так как интеграл (40.7) существует, в частности, и при  $t' = t = 0$ , полное количество комплексной «массы» (40.10), т. е. величина  $\Gamma(\infty, \infty) = B(0, 0) = \langle |\xi(0)|^2 \rangle$ , вещественно и конечно.

Распределение «массы» (40.10) по всей плоскости  $(\omega, \omega')$ , обусловленное корреляцией амплитуд  $dC(\omega)$ , взятых в разных точках  $\omega \neq \omega'$ , влечет за собой невозможность представления моментов второго порядка (40.7), (40.9) в виде *однократных* интегралов по частоте. В частности, если эти моменты имеют энергетический смысл, например, если  $\langle |\xi(t)|^2 \rangle$  есть средняя мгновенная мощность случайного процесса  $\xi(t)$ , то указанное обстоятельство означает, что вклад в эту мощность в частотном интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$  вносит не только гармоническая компонента  $e^{i\omega t} dC(\omega)$  процесса  $\xi(t)$ , но и все остальные его гармонические компоненты, поскольку они коррелированы с  $dC(\omega)$ . При таких условиях говорят, что *средние энергетические* (или, более широко, *средние билинейные*) *величины не локализуемы по частоте*. Возможно ли противоположное положение вещей?

Как уже было подчеркнуто, интерес гармонических разложений (40.1) связан с тем, что для линейной системы с постоянными параметрами они позволяют по заданному внешнему воздействию (процессу на входе) сразу же построить соответствующий отклик (процесс на выходе). Каждая гармоника  $e^{i\omega t} dC(\omega)$  трансформируется при этом самостоятельно, т. е. динамическая система (фильтр) с функцией передачи  $k(i\omega)$  преобразует эту гармонику независимо от остальных гармоник в колебание  $k(i\omega)e^{i\omega t} dC(\omega)$ . В результате процесс (40.1) на

входе системы порождает на ее выходе процесс

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(i\omega) e^{i\omega t} dC(\omega).$$

Известно, однако, что конструирование процесса  $Z(t)$  может быть осуществлено и иначе, так сказать, непосредственно, если воспользоваться не спектральным, а *временным* подходом к задаче. В этом случае рассматриваемая динамическая система описывается не функцией передачи  $k(i\omega)$ , а откликом  $H(t)$  на импульс  $\delta(t)$ . Тогда процесс на выходе  $Z(t)$  выразится интегралом Дюамеля (§ 37), что позволяет, между прочим, очень просто охватить и переходные явления (процессы установления).

Таким образом, если спектральное представление ограничено локализацией по частоте только для линейных величин, то оно является одним из возможных и равносильных представлений, но какие-либо дополнительные физические аргументы в его пользу отсутствуют. Положение меняется и спектральный подход приобретает особое значение, коль скоро гармоники  $e^{i\omega t} dC(\omega)$  могут быть индивидуализированы также по их вкладу в «энергетические» (средние билинейные) величины, связанные с  $\zeta(t)$  и  $Z(t)$ . Именно так обстоит дело для *стационарных* случайных функций, к которым мы теперь и обратимся.

### § 41. Стационарные случайные функции

Каким ограничениям подчинены случайная комплексная спектральная амплитуда  $C(\omega)$  и распределение комплексной «массы»  $\Gamma(\omega, \omega')$ , если случайная функция  $\zeta(t)$  в широком смысле стационарна?

Требование постоянства среднего значения  $\overline{\zeta(t)} = \bar{\zeta} = \text{const}$  означает, согласно (40.1), что при всех  $\omega \neq 0$  должно быть

$$\overline{dC(\omega)} = 0 \quad (41.1)$$

и тогда

$$\bar{\zeta} = \overline{dC(0)}.$$

Рассматривая функцию  $\zeta(t) - \bar{\zeta}$ , всегда можно исключить постоянное среднее и тем самым считать, что (41.1) распространяется на все значения  $\omega$  без исключения. Мы будем далее предполагать, что у рассматриваемых стационарных функций  $\zeta(t)$  среднее значение  $\bar{\zeta} = 0$  и, следовательно, смешанный момент совпадает с функцией корреляции  $\psi$ .

Условие стационарности функции корреляции, согласно которому она зависит лишь от разности  $\tau = t - t'$ , может быть

выполнено, как это видно из (40.7), только в том случае, если

$$d^2\Gamma(\omega, \omega') = \langle dC(\omega) dC^*(\omega') \rangle = 0 \text{ при } \omega \neq \omega',$$

т. е. «масса»  $\Gamma(\omega, \omega')$  распределена только на биссектрисе  $\omega = \omega'$ . Тогда приращение  $d^2\Gamma(\omega, \omega')$  всегда вещественно и неотрицательно. Если воспользоваться дельта-функцией, то сказанное можно записать в виде

$$d^2\Gamma(\omega, \omega') = \langle dC(\omega) dC^*(\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') d\omega' dG(\omega), \quad (41.2)$$

причем вещественное приращение  $dG(\omega)$  неотрицательно:

$$dG(\omega) \geq 0.$$

Следовательно, если  $\xi(t)$  — стационарная функция, то  $C(\omega)$  — функция с некоррелированными приращениями (§ 34)<sup>1)</sup>.

Подставив (41.2) в (40.7), получаем

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega t - \omega' t')} \langle dC(\omega) dC^*(\omega') \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dG(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega t - \omega' t')} \delta(\omega - \omega') d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')} dG(\omega) = \psi(t-t'), \end{aligned} \quad (41.3)$$

т. е. функция корреляции стационарного в широком смысле случайного процесса представима в виде однократного интеграла Фурье — Стильеса (41.3), где  $G(\omega)$  — неубывающая вещественная функция  $\omega$ . Кроме того, поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dG(\omega) = \psi(0) = \langle |\xi|^2 \rangle, \quad (41.4)$$

а на рассматриваемые случайные функции второго порядка наложено условие конечности  $\langle |\xi|^2 \rangle$ , функция  $G(\omega)$  должна быть ограничена:  $G(\omega) \leq G(\infty)$ .

Эта фундаментальная теорема была доказана в 1934 г. А. Я. Хинчиным для стационарных (в широком смысле) случайных функций, удовлетворяющих условию непрерывности  $\psi(\tau)$  в нуле [4]. При этом было использовано не спектральное представление (40.1) самой случайной функции  $\xi(t)$  (возможность и смысл которого были установлены А. Н. Колмогоровым позднее [5]), а теорема гармонического анализа, доказанная ранее С. Бохнером ([6], стр. 76) и состоящая в том, что всякая поло-

<sup>1)</sup> Поскольку для приращений  $dC(\omega)$  мы не имеем надобности обращаться к моментам выше второго порядка, достаточно требования их некоррелированности, а не независимости.

жительно-определенная функция  $\psi(\tau)$  <sup>1)</sup> представима в виде

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dG(\omega),$$

где  $G(\omega)$  — вещественная, неубывающая и ограниченная. Эта последняя теорема, установленная вне всякой связи с теорией случайных функций, тотчас же приводит к теореме Хинчина, если учесть, что класс положительно-определенных функций совпадает с классом непрерывных в нуле функций корреляции стационарных случайных процессов.

Подчеркнем еще раз, что стационарность случайной функции  $\xi(t)$  предъявляет к распределению комплексной «массы»  $\Gamma(\omega, \omega')$  на плоскости  $(\omega, \omega')$  два требования. Во-первых, эта масса должна быть сосредоточена только на биссектрисе  $\omega' = \omega$ . Во-вторых, полная масса  $G(\infty)$  должна быть конечна, т. е. линейная ее плотность  $g(\omega)$  должна быть интегрируема на всей оси  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Нарушение хотя бы одного из этих условий означает нестационарность  $\xi(t)$ .

Итак, дельта-коррелированность приращений  $dC(\omega)$  в спектральном разложении стационарной случайной функции влечет за собой локализуемость по частоте для средних билинейных величин. Для лучшего уяснения этого обстоятельства и усвоения практически применяемой техники перехода от спектрального разложения  $\xi(t)$  к спектральному разложению  $\psi(\tau)$  мы оставим теперь в стороне оговоренные выше (и, разумеется, необходимые) математические условия и проделаем указанный переход в некоторых частных случаях, широко используя при этом дельта-функцию.

Возьмем случай чисто непрерывного спектра. Как мы знаем, непрерывная функция с некоррелированными приращениями  $C(\omega)$  не дифференцируема ни в одной точке. Однако в § 34 мы подробно разобрали вопрос о том, почему и в каком смысле практически возможно пользоваться дельта-коррелированной производной такой функции, т. е. в данном случае — комплексной амплитудной плотностью  $c(\omega) = dC(\omega)/d\omega$ . Введение  $c(\omega)$  отнюдь не преследует цель во что бы то ни стало нарушить математическую строгость. Оно действительно полезно, так как в физических задачах при переходе от стохастических дифференциальных уравнений для  $\xi(t)$  к спектральной записи было бы крайне непривычно и неудобно пользоваться приращениями  $dC(\omega)$ . Все такие уравнения всегда пишутся для амплитудных спектральных плотностей  $c(\omega)$ , и, как мы выяснили, при

<sup>1)</sup> То есть функция, непрерывная и ограниченная на всей оси  $\tau$ , удовлетворяющая условию (39,6).



известной осмотрительности это не влечет за собой никаких неприятностей.

Итак, если  $dC(\omega) = c(\omega)d\omega$  и (что уже вполне корректно)  $dG(\omega) = g(\omega)d\omega$ , то из (41.2) тотчас же следует, что

$$\langle c(\omega) c^*(\omega') \rangle = g(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (41.5)$$

Иногда бывает удобно писать  $g(\omega) = \overline{|c(\omega)|^2}$ . Это, конечно, всего лишь обозначение, так как функция  $c(\omega)$  не обладает конечным средним квадратом модуля. Пользуясь этим обозначением, следует помнить, что  $\overline{|c(\omega)|^2}$  является множителем при дельта-функции.

Из разложения (40.4)

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} c(\omega) d\omega$$

при помощи функции корреляции (41.5) сразу же получаем путем формального перемножения и усреднения результат:

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \langle \zeta(t + \tau) \zeta^*(t) \rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t+\tau) - i\omega't} \langle c(\omega) c^*(\omega') \rangle d\omega d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t+\tau) - i\omega't} \delta(\omega - \omega') d\omega' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} g(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (41.6)$$

т. е. обычный интеграл Фурье для  $\psi(\tau)$ . Его обращение дает

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (41.7)$$

Конечно, можно идти и обратным путем: требуя, чтобы  $\langle \zeta(t + \tau) \zeta^*(t) \rangle$  зависело только от  $\tau$ , получить для амплитудных плотностей  $c(\omega)$  функцию корреляции (41.5). Используем именно такой путь для другого частного случая — чисто дискретного спектра  $\zeta(t)$ , когда спектральное разложение имеет вид (40.2):

$$\zeta(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}.$$

Перемножение и усреднение дает в этом случае

$$\langle \zeta(t + \tau) \zeta^*(t) \rangle = \sum_{m, n} \overline{c_n c_m^*} e^{i\omega_n(t+\tau) - i\omega_m t}.$$

Очевидно, двойной ряд Фурье в правой части может быть функцией только от  $\tau$  при условии взаимной некоррелированно-

сти случайных коэффициентов  $c_n$ :

$$\overline{c_n c_m^*} = \overline{|c_n|^2} \delta_{mn} \equiv g_n \delta_{mn}. \quad (41.8)$$

Тогда

$$\psi(\tau) = \sum_n g_n e^{i\omega_n \tau}, \quad (41.9)$$

т. е.  $\psi(\tau)$  — почти-периодическая функция<sup>1)</sup> с вещественными и положительными коэффициентами  $g_n$ :

$$g_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \psi(\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau. \quad (41.10)$$

Разумеется, (41.6) и (41.9) — это частные случаи общей теоремы (41.3). Условия (41.1) и (41.4) записываются в этих частных случаях в виде (напомним, что  $\bar{\xi} = 0$ )

$$\begin{aligned} \overline{c(\omega)} &= 0, \quad \overline{|\xi|^2} = \psi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) d\omega, \\ \bar{c}_n &= 0, \quad \overline{|\xi|^2} = \psi(0) = \sum_n g_n. \end{aligned}$$

Интеграл Фурье — Стилтеса (41.3) можно, конечно, заменить обычным интегралом Фурье как для смешанного, так и для чисто дискретного спектра, описывая последний при помощи спектральной плотности

$$g(\omega) = \sum_n g_n \delta(\omega - \omega_n).$$

Более того, можно во всех случаях применять и формулу обращения (41.7), если при подстановке в нее функции корреляции (41.9) воспользоваться разложением Фурье для дельта-функции.

Условимся теперь относительно терминологии. В литературе по отношению к  $G(\omega)$  и  $g(\omega)$  часто применяется энергетическая терминология.  $G(\omega)$  называют спектральной функцией распределения средней мгновенной *мощности*  $|\xi|^2$ , спектральной *мощностью* в интервале  $(-\infty, \omega)$  и т. п. Соответственно  $g(\omega)$  — это спектральная *мощность* в единичном интервале  $\omega$ . Все это хорошо, если  $|\xi|^2$  действительно имеет энергетический смысл,

<sup>1)</sup> Почти-периодические функции занимают в известном смысле промежуточное положение между периодическими функциями, представимыми обычным рядом Фурье с частотами, кратными основной частоте  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  ( $T_0$  — период), и непериодическими функциями, представимыми интегралом Фурье. Гармонический ряд (41.9) с произвольными  $\omega_n$  (обобщенный ряд Фурье) изображает функцию, которая по прошествии времени  $T$  повторяется *приближенно и тем точнее, чем больше  $T$* . Иначе говоря, всегда можно указать столь большое  $T$ , что функция будет повторяться с заданной точностью.

будучи, например, квадратом случайного тока или напряжения. Но если, скажем,  $\zeta(t)$  — случайно меняющийся показатель преломления, то о какой «мощности» идет речь? Мы будем пользоваться более нейтральной терминологией. Говоря об «интенсивности флуктуаций», обычно не вкладывают в термин «интенсивность» энергетического содержания. Мы и воспользуемся этим термином.  $G(\omega)$  мы будем называть *спектральной интенсивностью* случайной функции  $\zeta(t)$  (в интервале от  $-\infty$  до  $\omega$ ), а  $g(\omega)$  — *спектральной плотностью* этого процесса. Как уже отмечалось, доказательство того, что  $dG(\omega) = g(\omega)d\omega$  есть спектральная интенсивность в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ , может быть получено только при помощи гармонической фильтрации (§ 50).

Если почему-либо нежелательно связывать себя заранее предположением о том, что у рассматриваемого стационарного процесса  $\bar{\xi} = 0$ , то смешанный момент  $B(\tau)$  и функция корреляции  $\psi(\tau)$  уже не совпадают:

$$B(\tau) = \psi(\tau) + |\bar{\xi}|^2. \quad (41.11)$$

Это влечет за собой и различие в спектрах  $B(\tau)$  и  $\psi(\tau)$ . Если, подобно (41.6), написать

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_B(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (41.12)$$

и учесть, что постоянная величина  $|\bar{\xi}|^2$  всегда может быть представлена в виде

$$|\bar{\xi}|^2 = |\bar{\xi}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

то получим

$$g_B(\omega) = g(\omega) + |\bar{\xi}|^2 \delta(\omega). \quad (41.13)$$

Таким образом, спектральные плотности  $g_B(\omega)$  и  $g(\omega)$  совпадают при всех  $\omega$ , кроме точки  $\omega = 0$ , где в спектре смешанного момента  $B(\tau)$  добавляется дискретная линия с интегральной интенсивностью  $|\bar{\xi}|^2$ .

Если  $\zeta(t) \equiv \xi(t)$  вещественна, то  $\psi(\tau)$  — четная функция, из чего следует, что и спектральная плотность  $g(\omega)$  — четная функция  $\omega$ . Формула (41.6) может быть записана при этом в виде

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \int_0^{\infty} g_+(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (41.14)$$

где

$$g_+(\omega) = 2g(\omega) \quad (41.15)$$

— спектральная плотность по положительным частотам. Формула (41.7) дает тогда

$$g_+(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau. \quad (41.16)$$

Из положительной определенности функции корреляции  $\psi(\tau)$  следует неотрицательность спектральной плотности  $g(\omega)$ , и *обратно*. Иногда бывает удобнее поэтому, решая вопрос о том, может ли какая-либо функция  $\psi(\tau)$ , удовлетворяющая условиям (39.4) и (39.5), представлять функцию корреляции стационарного в широком смысле случайного процесса  $\zeta(t)$ , просто проверять выполнение условия  $g(\omega) \geq 0$ . Если, например,  $\psi(\tau)$  имеет вид прямоугольника (рис. 30, а) ширины  $2\theta$ , то по (41.7)

$$g(\omega) = \frac{\psi(0)}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} e^{-i\omega\tau} \, d\tau = \frac{\psi(0)}{\pi\omega} \sin \omega\theta,$$

т. е. условие  $g(\omega) \geq 0$  нарушено. По той же причине невозможно, чтобы функция корреляции была равна  $+\psi(0)$  или  $-\psi(0)$  на каких-либо *конечных интервалах*  $\tau$  (хотя бы и симметричных относительно  $\tau = 0$ ).

Выясним теперь, в чем состоят особенности спектральных разложений комплексной функции  $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$  и ее функции корреляции в том случае, когда  $\zeta(t)$  — аналитический сигнал (§ 38). Запишем спектральные разложения обеих вещественных функций  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ :

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega, \quad \eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{c}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega,$$

где в силу вещественности  $\xi$  и  $\eta$

$$c(-\omega) = c^*(\omega), \quad \tilde{c}(-\omega) = \tilde{c}^*(\omega).$$

Другими словами, в разложении вещественной функции область  $\omega < 0$  не содержит никакой информации сверх той, какую несет спектр на полуоси  $\omega > 0$ . Вследствие взаимно-однозначной связи между  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  у аналитического сигнала спектральные амплитудные плотности  $c(\omega)$  и  $\tilde{c}(\omega)$  тоже однозначно связаны.

Нетрудно убедиться прямым расчетом по формулам (38.6), что преобразование Гильберта переводит  $\cos \omega t$  в  $\pm \sin \omega t$ , а  $\sin \omega t$  — в  $\mp \cos \omega t$  ( $\omega \geq 0$ ). Таким образом, экспоненциальная

функция  $e^{i\omega t}$  преобразуется в  $-ie^{i\omega t} \operatorname{sgn} \omega$ , где

$$\operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} +1 & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega = 0, \\ -1 & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

Следовательно, спектральная амплитудная плотность  $\bar{c}(\omega)$  процесса  $\eta(t)$ , сопряженного по Гильберту с  $\xi(t)$ , равна

$$\bar{c}(\omega) = -ic(\omega) \operatorname{sgn} \omega. \quad (41.17)$$

В результате из спектрального разложения аналитического сигнала отрицательные частоты выпадают:

$$\begin{aligned} \xi(t) \bar{\xi}(t) + i\eta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [c(\omega) + i\bar{c}(\omega)] e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) [1 + \operatorname{sgn} \omega] e^{i\omega t} d\omega = 2 \int_0^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (41.18)$$

Можно поэтому определить аналитический сигнал и как комплексный процесс, спектр которого отличен от нуля только на положительной полуоси  $\omega$ .

Если  $\xi(t)$  — стационарный случайный процесс с  $\overline{\xi(t)} = 0$  (так что  $c(\omega) = 0$ ) и

$$\langle c(\omega) c^*(\omega') \rangle = g(\omega) \delta(\omega - \omega'),$$

то в силу (41.17)  $\bar{c}(\omega) = 0$  и, следовательно,  $\overline{\eta(t)} = 0$ , а функция корреляции  $\bar{c}(\omega)$  есть

$$\langle \bar{c}(\omega) \bar{c}^*(\omega') \rangle = g(\omega) \delta(\omega - \omega') \operatorname{sgn}^2(\omega).$$

Таким образом, процесс  $\eta(t)$  тоже стационарен и имеет ту же спектральную плотность  $g(\omega)$ , что и процесс  $\xi(t)$  (за исключением точки  $\omega = 0$ , где  $\operatorname{sgn}^2 \omega = 0$ ), а значит, и ту же функцию корреляции:

$$B_{\xi}(\tau) = B_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2 \int_0^{\infty} g(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (41.19)$$

Пользуясь (41.17), получаем далее

$$B_{\xi\eta}(\tau) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega\tau} \operatorname{sgn} \omega d\omega = 2 \int_0^{\infty} g(\omega) \sin \omega\tau d\omega, \quad (41.20)$$

откуда непосредственно видна нечетность  $B_{\xi\eta}$  по  $\tau$  и, в частности, некоррелированность  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  в один и тот же момент времени ( $\tau = 0$ ). Эта некоррелированность, конечно, не озна-

чает статистической независимости, так как в общем случае  $\xi$  и  $\eta$  не являются нормальными процессами. Итак, спектральное рассмотрение включает, естественно, те же результаты, которые были получены ранее в § 38.

Из (38.11), (41.19) и (41.20) следует, что функция корреляции стационарного аналитического сигнала  $\zeta(t)$  есть

$$B_{\zeta}(\tau) = 4 \int_0^{\infty} g(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2 \int_0^{\infty} g_+(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (41.21)$$

Другими словами, спектральная плотность  $\zeta(t)$  равна

$$g_{\zeta}(\omega) = \begin{cases} 4g(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

Обращение преобразований Фурье (41.19) и (41.20) дает следующие выражения для спектральной плотности  $g(\omega)$ :

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) \cos \omega\tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_{\xi\eta}(\tau) \sin \omega\tau d\tau \quad (41.22)$$

(последнее выражение — при  $\omega > 0$ ).

Рассмотрим в заключение следующий вопрос. Пусть вещественный стационарный процесс  $\xi(t)$  имеет конечную в нуле спектральную плотность  $g(\omega)$ , представимую в виде

$$\frac{dG}{d\omega} = g(\omega) = g(0) + g''(0) \frac{\omega^2}{2} + \dots = g(0) + \omega^2 g_1(\omega^2),$$

причем  $g_1(0)$  конечно. При каком условии накопление за время  $t$ , т. е. операция

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(t) dt, \quad (41.23)$$

даст процесс, стремящийся с ростом  $t$  к стационарности?

Пользуясь спектральным разложением  $\xi(t)$ , получаем

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dC(\omega) \int_0^t e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega} dC(\omega)$$

и, следовательно, по (41.2)

$$\begin{aligned} \overline{\eta^2(t)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin(\omega t/2)}{\omega/2} \right)^2 g(\omega) d\omega = \\ &= g(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin(\omega t/2)}{\omega/2} \right)^2 d\omega + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\omega^2) (1 - \cos \omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Первый член равен  $2\pi g(0)t$ , а интеграл с  $\cos \omega t$  можно взять вычетами в полюсах  $g_1(\omega^2)$ , перейдя предварительно от  $\cos \omega t$  к  $e^{i\omega t}$  и замкнув путь интегрирования в верхней полуплоскости. В результате получим

$$\overline{\eta^2(t)} = 2\pi g(0)t + \text{const} + \text{экспоненциально затухающие члены.}$$

Отсюда ясно, что необходимое условие для стационарности  $\eta(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  есть

$$g(0) = 0. \quad (41.24)$$

В противном случае будет происходить диффузионный рост  $\overline{\eta^2}$ .

Таким образом, если пройденный телом путь  $s(t) = \int_0^t v(t) dt$

должен быть стационарным процессом, то спектральная плотность скорости  $v(t)$  должна обращаться в нуль при  $\omega = 0$ . То

же относится и к магнитному потоку  $\Phi(t) = -c \int_0^t \mathcal{E}(t) dt$ , обу-

словленному случайной стационарной э.д.с.  $\mathcal{E}(t)$ , например, в том случае, когда речь идет о так называемых магнитных шумах.

#### § 42. Примеры спектральных разложений стационарных функций

Переходя к примерам, иллюстрирующим теорему Хинчина, сделаем предварительно несколько замечаний общего характера.

Спектральная интенсивность  $G(\omega)$ , равно как и ее приращение на любом интервале частот, зависит лишь от модулей спектральных амплитуд  $dC(\omega)$ , но не от их аргументов. Таким образом, случайные стационарные функции

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dC(\omega), \quad \xi_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} e^{i\theta(\omega)} dC(\omega),$$

где  $\theta(\omega)$  — детерминированная функция [или случайная, но независимая от  $C(\omega)$ ], будучи, вообще говоря, совершенно различны, имеют одну и ту же спектральную интенсивность  $G(\omega)$ , а значит, и одинаковую функцию корреляции  $\psi(\tau)$ . Это непосредственно вытекает из дельта-корреляции приращений  $dC(\omega)$  [см. (41.2)]. В частности, в случае непрерывного спектра замена амплитудной плотности  $c(\omega)$  на  $c_1(\omega) = c(\omega)e^{i\theta(\omega)}$  не ме-

няет спектральной плотности  $g(\omega)$ , поскольку из (41.5) следует, что

$$\langle c_1(\omega) c_1^*(\omega') \rangle = \langle c(\omega) c^*(\omega') \rangle e^{i[\theta(\omega) - \theta(\omega')] = g(\omega) \delta(\omega - \omega')}.$$

Точно так же в случае дискретного спектра замена амплитуд  $c_n$  на  $c_{1n} = c_n e^{i\theta_n}$  с произвольными фазами  $\theta_n$  (тоже либо детерминированными, либо случайными, но независимыми от  $c_n$ ) не меняет, в силу (41.8), интенсивностей  $g_n$ :

$$\overline{c_{1n} c_{1m}^*} = \overline{c_n c_m^*} e^{i(\theta_n - \theta_m)} = g \delta_{mn}.$$

Именно эта нечувствительность к фазам приводит к тому, что функция корреляции может быть одинакова у совершенно различных случайных процессов. Например, процесс (8.1) в случае экспоненциальных импульсов (рис. 7), процесс (11.9) с экспоненциальным распределением длительности прямоугольных импульсов (рис. 5), обобщенный телеграфный сигнал (рис. 6) и флуктуации амплитуды в томсоновском генераторе — все обладают одной и той же (экспоненциальной) функцией корреляции [формулы (11.12), (11.10), (11.11) и (29.16) соответственно]. Заметим, что нечувствительность к фазам означает, в частности, что линия задержки, обладающая произвольной дисперсией, но равномерной амплитудно-частотной характеристикой, сохраняет функцию корреляции входного процесса неизменной.

То обстоятельство, что функция корреляции  $\psi(\tau)$  и спектральная плотность  $g(\omega)$  сопряжены по Фурье и, следовательно, однозначно определяют одна другую, широко используется в конкретных задачах. В одних случаях проще вычислять  $\psi(\tau)$  и затем находить спектр по формулам (41.7), (41.10) или (41.16); в других задачах, наоборот, нахождение спектра оказывается более легким, и тогда функция корреляции вычисляется при помощи (41.6), (41.9) или (41.14).

Отметим еще, что в случае непрерывного спектра для функций  $\psi(\tau)$  и  $g(\omega)$ , связанных преобразованием Фурье, выполняется хорошо известное «соотношение неопределенностей». Качественно оно может быть описано так, что «узкий» спектр означает «широкую», т. е. длительную корреляцию, большую «упорядоченность» процесса и, наоборот, «широкий» спектр дает короткую корреляцию, усиление хаотичности. Если существуют интегралы

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\psi(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega g(\omega) d\omega, \quad (\Delta\omega)^2 = \frac{1}{\psi(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 g(\omega) d\omega,$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2\pi g(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau \psi(\tau) d\tau, \quad (\Delta\tau)^2 = \frac{1}{2\pi g(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau - \bar{\tau})^2 \psi(\tau) d\tau.$$



то «соотношение неопределенностей» может быть выражено и количественно: в теории интегралов Фурье доказывается, что «размытости»  $\Delta\omega$  и  $\Delta\tau$  удовлетворяют неравенству

$$(\Delta\omega)^2 (\Delta\tau)^2 \geq \frac{1}{4}, \quad (42.1)$$

причем минимизирующая функция  $\psi(\tau)$ , для которой в (42.1) имеет место равенство, — это гауссова кривая<sup>1)</sup>:

$$\psi(\tau) = \psi(0) e^{-\tau^2/\tau_k^2}. \quad (42.2)$$

Гауссов закон корреляции (42.2) принадлежит к «инвариантным» законам — в том смысле, что соответствующая спектральная плотность тоже выражается гауссовой кривой:

$$g(\omega) = \frac{\tau_k \psi(0)}{2\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2 \tau_k^2/4}. \quad (42.3)$$

Ширины  $\delta\tau$  и  $\delta\omega$ , определенные на уровне  $1/e$  от максимальных значений  $\psi(0)$  и  $g(0)$ , равны  $\delta\tau = 2\tau_k$  и  $\delta\omega = 4/\tau_k$ , так что  $\delta\omega \cdot \delta\tau = 8$ . Другой пример «инвариантного» закона корреляции — обратный гиперболический косинус:

$$\psi(\tau) = \psi(0)/\text{ch}(\tau/\tau_k).$$

В этом случае

$$g(\omega) = \tau_k \psi(0)/2 \text{ch}(\pi\omega\tau_k/2).$$

Вычислим теперь при помощи теоремы Хинчина спектры ряда рассмотренных ранее стационарных процессов, для которых мы уже нашли функции корреляции.

В § 11 было отмечено, что у стационарного импульсного пуассоновского процесса

$$\xi(t) = \sum_{\nu} F(t - t_{\nu}, \mathbf{a}_{\nu}) \quad (42.4)$$

с достаточно быстро убывающей функцией  $F(t)$ , описывающей форму импульсов, функция корреляции равна

$$\psi(\tau) = n_1 \int \omega_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta + \tau, \mathbf{a}) F(\theta, \mathbf{a}) d\theta. \quad (42.5)$$

Здесь  $\omega_{\mathbf{a}}(\mathbf{a})$  — плотность вероятности многомерного случайного параметра  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , зависимость от которого детер-

<sup>1)</sup> А. Майером и Е. Леонтович [7] аналогичное неравенство доказано для вещественного интеграла Фурье, распространяющегося только на положительные частоты. В этом случае изменяется как минимизирующая функция, так и значение нижней границы  $(\Delta\omega)^2(\Delta\tau)^2$ . Это значение лежит между  $(\pi - 2)/4\pi^2 = 0,0289\dots$  и  $1/12\pi = 0,0265\dots$

минированной функции  $F$  позволила нам учесть случайные изменения *формы* импульсов<sup>1)</sup>. Теперь мы уже можем отказаться от этого частного способа задания случайной функции, заменив его общим, т. е. просто считая форму импульса *случайной функцией*<sup>2)</sup>, к тому же и комплексной, так что комплексным будет и импульсный процесс в целом:

$$\zeta(t) = \sum_{\nu} F_{\nu}(t - t_{\nu}). \quad (42.6)$$

Предполагая, что  $F_{\nu}(t)$  статистически независимы от пуассоновских моментов времени  $\{t_{\nu}\}$  и от  $F_{\mu}(t)$  при  $\mu \neq \nu$ , причем для всякого  $\nu$

$$\langle F_{\nu}(t) \rangle = F(t), \quad \langle F_{\nu}(t + \tau) F_{\nu}^*(t) \rangle = B_F(t, \tau).$$

нетрудно воспроизвести расчет, вполне аналогичный проведенному в § 11 и приводящий к почти очевидному обобщению полученных там результатов. Для среднего значения процесса (42.6)

$$\overline{\zeta(t)} = \sum_{\nu} \overline{F_{\nu}(t - t_{\nu})}$$

и его функции корреляции

$$\psi(\tau) = \overline{\zeta(t + \tau) \zeta^*(t)} - \overline{\zeta(t + \tau)} \cdot \overline{\zeta^*(t)},$$

где чертой обозначено полное усреднение как по распределению  $F_{\nu}$ , так и по распределению Пуассона для числа импульсов  $n$ , получаются выражения

$$\overline{\zeta(t)} = n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) d\theta, \quad (42.7)$$

$$\psi(\tau) = n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} B_F(\theta, \tau) d\theta. \quad (42.8)$$

Общий случай непуассоновского и нестационарного потока моментов времени  $t_{\nu}$  рассмотрен в работе [10].

Для того чтобы получить спектр процесса (42.6), надо воспользоваться формулой обращения (41.7). Но можно написать результат сразу, если воспользоваться известной теоремой

<sup>1)</sup> Напомним, что компоненты случайной величины  $\mathbf{a}$  могут быть и коррелированы между собой. Влияние такой корреляции на спектр процесса исследовано в работе [8], в которой в качестве компонент  $\mathbf{a}$  взяты «амплитуда» импульсов  $a$ , его длительность  $\theta$  и время  $\tau$  между данным импульсом и соседним.

<sup>2)</sup> В такой более общей постановке задачи импульсные процессы рассматривались в ряде работ. Укажем, например, на [9, 10].

о спектре интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(\theta) x_2(\theta + \tau) d\theta$ . Этот интеграл не является сверткой, так как переменная интегрирования  $\theta$  входит в оба сомножителя с одинаковым знаком [свертка, распространенная на комплексные функции, имеет вид  $\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(\theta) x_2(\tau - \theta) d\theta$ ]. Поскольку соответствующий вывод очень прост, а его результат еще понадобится в дальнейшем, мы воспроизведем здесь этот вывод.

Пусть  $\tilde{x}_1(\omega)$  и  $\tilde{x}_2(\omega)$  — спектральные амплитудные плотности функций  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , так что

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_j(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (j=1, 2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} I(\tau) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(t) x_2(t + \tau) dt = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_1^*(\omega) \tilde{x}_2(\omega') e^{i\omega'\tau} d\omega d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega' - \omega)t} dt = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_1^*(\omega) \tilde{x}_2(\omega') e^{i\omega'\tau} 2\pi\delta(\omega' - \omega) d\omega d\omega' = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\tilde{x}_1^*(\omega) \tilde{x}_2(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, спектральная амплитудная плотность  $I(\tau)$  есть <sup>1)</sup>

$$\tilde{I}(\omega) = 2\pi\tilde{x}_1^*(\omega) \tilde{x}_2(\omega). \quad (42.9)$$

Применив формулу (42.9) к (42.8), где  $x_1(t) = x_2(t) = F(t)$ , находим

$$\psi(\tau) = 2\pi n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle |\tilde{F}(\omega)|^2 \rangle e^{i\omega\tau} d\omega,$$

т. е. спектральная плотность процесса (42.6) равна

$$g(\omega) = 2\pi n_1 \langle |\tilde{F}(\omega)|^2 \rangle, \quad (42.10)$$

<sup>1)</sup> Такой же вывод для свертки  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  дал бы амплитудную плотность  $2\pi\tilde{x}_1^*(-\omega)\tilde{x}_2(\omega)$ , что в случае вещественных функций  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  равно  $2\pi\tilde{x}_1(\omega)\tilde{x}_2(\omega)$ , как это, например, имеет место для характеристической функции при композиции (свертке) плотностей вероятностей (§ 9).

где  $\tilde{F}(\omega)$  — амплитудная плотность случайной формы импульса  $F(t)$ . В частном случае (42.5) формула (42.10) принимает вид

$$g(\omega) = 2\pi n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} w_a(\mathbf{a}) |\tilde{F}(\omega, \mathbf{a})|^2 d\mathbf{a}, \quad (42.11)$$

где теперь  $\tilde{F}(\omega, \mathbf{a})$  — уже детерминированная функция. Наконец, если  $F(t, \mathbf{a}) = aF(t)$ , т. е. имеется только один случайный параметр — «амплитуда» импульсов одинаковой детерминированной формы  $F(t)$ , так что

$$\psi(\tau) = n_1 \overline{|a|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\theta) F(\theta + \tau) d\theta, \quad (42.12)$$

то

$$g(\omega) = 2\pi n_1 \overline{|a|^2} |\tilde{F}(\omega)|^2. \quad (42.13)$$

В этом последнем случае не только «густота» шума  $n_1$ , но и случайные амплитуды  $a_v$  влияют только на общий уровень шума, а форма спектра всецело определяется формой импульса<sup>1)</sup>. Конечно, это заложено уже в формуле (42.12), из которой видно, что характер зависимости функции корреляции от  $\tau$  связан только с видом функции  $F(t)$ . Можно, однако, дать этому результату еще и следующее пояснение.

Спектр отдельного импульса имеет амплитудную плотность  $\tilde{F}(\omega)$ , не зависящую от момента возникновения импульса  $t_v$ . Последний проявляется в спектральном разложении импульса  $F(t - t_v)$  только в наличии фазового множителя  $e^{-i\omega t_v}$ . Это означает, что для последовательности импульсов, каким-то образом разбросанных по оси времени, спектр будет иметь общую огибающую  $|\tilde{F}(\omega)|$ , причудливо «изрезанную» в результате того, что на каждой частоте  $\omega$  происходит интерференция колебаний с разными добавочными фазами  $\omega t_v$ . Так как  $t_v$  случайны и на любом интервале распределены равномерно, в среднем интерференция «замажется» и в интенсивность войдет только квадрат одинаковой для всех импульсов огибающей  $|\tilde{F}(\omega)|$ .

Приведем выражения функции корреляции (42.12) и спектральной плотности (42.13) для двух частных видов формы импульса  $F(t)$ .

Рассмотрим *прямоугольные импульсы* (рис. 31):

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < \theta. \\ 0 & \text{вне интервала } (0, \theta). \end{cases} \quad (42.14)$$

<sup>1)</sup> Напомним, что  $n_1$  или, точнее,  $n_1\theta$  — среднее число импульсов, возникающих в течение длительности одного импульса, — существенно влияет на распределение шума (§ 10).

Функция корреляции изображается треугольником

$$\psi(\tau) = \begin{cases} n_1 \overline{|a|^2} (\vartheta - |\tau|) & \text{при } |\tau| < \vartheta, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \vartheta, \end{cases} \quad (42.15)$$

а спектральная плотность равна

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi} n_1 \overline{|a|^2} \left( \frac{\sin(\omega\vartheta/2)}{\omega} \right)^2. \quad (42.16)$$

Если импульсы нормированы к единичной площади, для чего достаточно положить  $a_v = 1/\vartheta$  (т. е.  $\overline{|a|^2} = 1/\vartheta^2$ ), то

$$\psi(\tau) = \frac{n_1}{\vartheta} \left( 1 - \frac{|\tau|}{\vartheta} \right), \quad g(\omega) = \frac{n_1}{2\pi} \left( \frac{\sin(\omega\vartheta/2)}{\omega\vartheta/2} \right)^2. \quad (42.17)$$

Функция корреляции изображается теперь треугольником с основанием  $2\vartheta$  и с высотой  $n_1/\vartheta$ , так что площадь треугольника

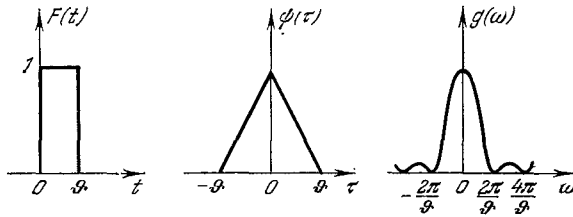


Рис. 31.

при любом  $\vartheta$  равна  $n_1$ . При  $\vartheta \rightarrow 0$  треугольник превращается в бесконечную «иглу» в нуле, т. е.

$$\psi(\tau) = n_1 \delta(\tau). \quad (42.18)$$

С уменьшением  $\vartheta$  главный максимум  $g(\omega)$  неограниченно расширяется, сохраняя неизменную высоту  $n_1/2\pi$  при  $\omega = 0$ . В пределе при  $\vartheta \rightarrow 0$  получается постоянная спектральная плотность

$$g(\omega) = \frac{n_1}{2\pi}. \quad (42.19)$$

Нетрудно убедиться, что предельные выражения (42.18) и (42.19) формально удовлетворяют соотношениям (41.6) и (41.7). Действительно,

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_1}{2\pi} e^{i\omega\tau} d\omega = n_1 \delta(\tau),$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} n_1 \delta(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{n_1}{2\pi}.$$

Но случайный процесс с дельта-корреляцией (42.18) уже не принадлежит к рассматриваемому классу стационарных функций, так как он не обладает конечным значением среднего квадрата модуля. Величины

$$|\bar{\xi}|^2 = \psi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) d\omega$$

для него не существует.

Возьмем теперь следующий *непуассоновский* стационарный процесс: с вероятностями 1/2 сменяются значения  $\xi(t) = \pm a$ , длящиеся одно и то же время  $\vartheta$ , причем начало «нулевого» импульса равномерно распределено на интервале  $(-\vartheta, 0)$  (иначе процесс не будет стационарным). Такую случайную функцию можно построить, бросая монету. Мы имеем здесь хаотические импульсы одинаковой формы, но не перекрывающиеся (рис. 32), а следующие вплотную друг за другом, т. е. в интервалах между импульсами никакой случайности нет и число их в единицу времени задано ( $n_1 = 1/\vartheta$ ). Тем не менее, как нетрудно сообразить, функция корреляции такая же, как и у пуассоновского процесса с прямоугольными импульсами (42.14), а именно:

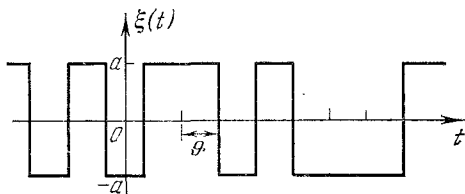


Рис. 32.

Это еще одна иллюстрация нечувствительности функции корреляции к фазам спектральных амплитуд самой случайной функции.

Вернемся к пуассоновскому процессу вида

$$\zeta(t) = \sum_{\nu} a_{\nu} F(t - t_{\nu})$$

и рассмотрим экспоненциальные импульсы (рис. 33)

$$F(t) = \begin{cases} e^{-t/\vartheta} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (42.20)$$

В этом случае, согласно (42.12) и (42.13),

$$\psi(\tau) = \frac{n_1 \vartheta |a|^2}{2} e^{-|\tau|/\vartheta}, \quad g(\omega) = \frac{n_1 \vartheta^2 |a|^2}{2\pi(1 + \omega^2 \vartheta^2)}. \quad (42.21)$$

Функция (42.20) может изображать отклик  $RC$ -ячейки на дельта-импульс, так что процесс  $\xi(t)$  с такой формой импульса описывает выходное напряжение на  $RC$ -ячейке, к которой подводится хаотическая (пуассоновская) последовательность дельта-импульсов. Следует, однако, еще раз напомнить, что одна и та же функция корреляции (а значит, и один и тот же спектр) может соответствовать совершенно различным случайным функциям, что уже было подчеркнуто в начале этого параграфа на примере именно экспоненциальной  $\psi(\tau)$ .

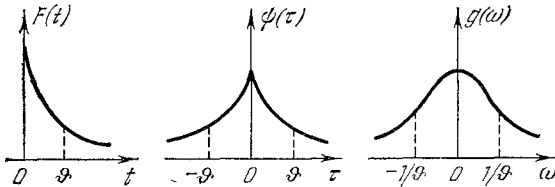


Рис. 33.

В данном примере тоже нетрудно проследить общую закономерность, касающуюся размытостей функций  $\psi(\tau)$  и  $g(\omega)$ . Ширина  $\psi(\tau)$  на уровне  $\psi(0)/e$  составляет  $2\theta$ , а ширина  $g(\omega)$  на уровне  $g(0)/2$  равна  $2/\theta$ , так что произведение этих мер расплывчатости при всяком  $\theta$  равно 4. Если фиксировать единичную площадь импульсов, положив  $a_v = 1/\theta$ , то и здесь, при переходе к пределу  $\theta \rightarrow 0$ , мы снова получим выражения (42.18) и (42.19).

Вопрос о спектральной форме условия дифференцируемости случайной функции еще будет затронут в дальнейшем (§ 50). Но можно заметить уже теперь, что в обоих рассмотренных примерах условие существования  $\dot{\xi}(t)$ , а именно существование  $\psi''(0)$ , нарушено. В спектральных разложениях  $\psi(\tau)$  это проявляется в том, что плотности  $g(\omega)$  убывают при  $|\omega| \rightarrow \infty$  только как  $1/\omega^2$ . Если формально вычислить спектральное разложение второй производной от  $\psi$ :

$$\psi''(\tau) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 g(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

то при спектральной плотности (42.16) получаем

$$\begin{aligned} \psi''(\tau) &= - \frac{n_1 |a|^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos \omega\theta) e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= - n_1 |a|^2 \{2\delta(\tau) - \delta(\tau + \theta) - \delta(\tau - \theta)\}, \end{aligned}$$

а при спектральной плотности (42.22)

$$\psi''(\tau) = -\frac{n_1 |a|^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 \theta^2}{1 + \omega^2 \theta^2} e^{i\omega\tau} d\omega = -n_1 |a|^2 \left\{ \delta(\tau) - \frac{e^{-|\tau|/\theta}}{2\theta} \right\}.$$

В обоих случаях  $\psi''(0)$  не существует.

В рассмотренных примерах мы каждый раз получали, что произведение размытостей  $\Delta\omega \cdot \Delta\tau$  — величина порядка единицы. Следует однако помнить, что «соотношение неопределенностей» (42.1) — это *неравенство*, так что вполне возможны случаи, когда произведение размытостей гораздо (даже на много порядков) больше единицы. Так обстоит дело, если в спектр разлагается импульс *сложной* формы, скажем импульс хотя бы и с простой детерминированной огибающей, но с меняющимся по сложному закону заполнением. Таким заполнением может быть как детерминированный процесс (например, сложным образом фазо-манипулированное или же частотно-модулированное колебание), так и случайный. В сущности, критерием сложности формы импульса  $F(t)$  является именно сильное неравенство  $\Delta\omega \cdot \Delta\tau \gg 1$ .

Проиллюстрируем сказанное на примере импульса с *гауссовой огибающей* ширины  $\sqrt{2}\theta$  на уровне  $1/e$  от максимума и с заполнением в виде *стационарного* случайного процесса  $\xi(t)$ , у которого  $\xi = 0$ , а функция корреляции дается формулой (42.2).

Из-за случайности процесса  $\xi(t)$  форма импульса

$$F(t) = e^{-2t^2/\theta^2} \xi(t)$$

в целом случайна, равно как случайна и его спектральная амплитуда

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\omega t} dt.$$

Найдем поэтому средний квадрат модуля спектральной амплитуды:

$$\begin{aligned} \langle |\tilde{F}(\omega)|^2 \rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \langle F(t) F(t') \rangle e^{i\omega(t'-t)} dt dt' = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t^2+t'^2)/\theta^2} \langle \xi(t) \xi(t') \rangle e^{i\omega(t'-t)} dt dt'. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (42.2), т. е.  $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \psi(t' - t) = \sigma^2 e^{-(t'-t)^2/\tau_k^2}$ , и вводя переменные интегрирования  $\tau = t' - t$  и  $\theta = (t' + t)/2$ ,



получаем

$$\langle |\tilde{F}(\omega)|^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\theta^2/\theta^2} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\theta^2 + \tau_K^2)\tau^2/\tau_K^2 \theta^2} e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Значения обоих интегралов известны и дают следующий результат:

$$\langle |\tilde{F}(\omega)|^2 \rangle = \frac{\sigma^2 \theta^2 \tau_K^2}{8\pi \sqrt{\theta^2 + \tau_K^2}} \exp \left\{ -\frac{\theta^2 \tau_K^2 \omega^2}{4(\theta^2 + \tau_K^2)} \right\}.$$

Таким образом, форма спектра в среднем гауссова, а ширина его на уровне  $1/e$  от максимума равна

$$\Delta\omega = \frac{4}{\theta\tau_K} \sqrt{\theta^2 + \tau_K^2}.$$

Произведение  $\Delta\omega$  на временную размытость  $\Delta\tau$  «импульса в целом», т. е. его огибающей ( $\Delta\tau = \sqrt{2}\theta$ ), будет поэтому

$$\Delta\omega \cdot \Delta\tau = 4\sqrt{2} \sqrt{1 + \theta^2/\tau_K^2}.$$

Оно невелико, если время корреляции  $\tau_K$  заполнения  $\xi(t)$  порядка или больше  $\theta$ . В этом случае форма импульса близка к гауссовой форме огибающей, поскольку  $\xi(t)$  не успевает сколько-нибудь заметно измениться за время  $\theta$ . Напротив, если  $\tau_K \ll \theta$ , то импульс сильно «изрезан» процессом  $\xi(t)$  и произведение ширин велико:

$$\Delta\omega \cdot \Delta\tau \approx 4\sqrt{2} \frac{\theta}{\tau_K} \gg 1.$$

Ширина спектра  $\Delta\omega = 4/\tau_K$  определяется в этом случае не длительностью огибающей, а временем корреляции  $\tau_K$  случайного заполнения. Если  $\tau_K \rightarrow 0$  (дельта-коррелированное заполнение), то  $\Delta\omega \cdot \Delta\tau \rightarrow \infty$  при любом фиксированном  $\theta$ .

В задаче 6 рассмотрен пример *детерминированного* заполнения при той же гауссовой огибающей импульса, т. е. пример случая, когда детерминирована форма импульса  $F(t)$  в целом. «Энергетический» спектр импульса описывается при этом детерминированной же функцией  $|\tilde{F}(\omega)|^2$ , причем, согласно (42.9), таким спектром обладает интеграл

$$\Psi_F(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) F(t + \tau) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{F}(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (42.22)$$

Можно поэтому условно называть  $\Psi_F(\tau)$  «корреляционной функцией» детерминированного импульса  $F(t)$ , а интервал  $\tau$ , в котором в основном сосредоточена  $\Psi_F(\tau)$ , называть *эффектив-*

ным «временем корреляции»  $\tau_{FK}$  этого импульса. Поскольку  $\Psi_F(\tau)$  и  $|F(\omega)|^2$  связаны комплексным преобразованием Фурье, размытости этих функций  $\tau_{FK}$  и  $\Delta\omega$  удовлетворяют «соотношению неопределенностей»  $\Delta\omega \cdot \tau_{FK} \geq 1$ . Даже если здесь имеет место равенство, но  $\tau_{FK} \ll \vartheta$  (импульс сложной формы), произведение  $\Delta\omega$  на ширину огибающей  $\Delta\tau \approx \vartheta$  будет велико.

Остановимся в заключение на вопросе о естественной некогерентности томсоновского автогенератора. Для автоколебания в таком генераторе

$$x(t) = (\sqrt{\rho} + \rho) \cos(t' + \varphi), \quad t' = \omega_0 t,$$

когда он возбужден настолько сильно, что радиус предельного цикла  $r_0 = \sqrt{\rho}$  гораздо больше стандарта флуктуаций амплитуды ( $r_0 \gg \sqrt{\rho^2}$ ), мы получили следующее выражение для функции корреляции [формула (29.19), которую мы переписываем теперь через размерный временной сдвиг  $\Delta t = \tau$ ]:

$$\psi_x(\tau) = \frac{r_0^2}{2} \left(1 + \frac{\mathcal{D}}{h} e^{-h|\tau|}\right) e^{-\mathcal{D}|\tau|} \cos \omega_0 \tau. \quad (42.23)$$

Здесь введены также размерные инкремент  $h = \mu r \omega_0$  и коэффициент диффузии фазы  $2\mathcal{D} = 2\mu D \omega_0$ , так что

$$\overline{(\varphi_\tau - \varphi)^2} = 2\mathcal{D}\tau. \quad (42.24)$$

По формуле (41.16) нетрудно получить спектральную плотность автоколебаний по положительным частотам, а именно:

$$\begin{aligned} g_+(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{r_0^2}{2\pi} \int_0^\infty \left(1 + \frac{\mathcal{D}}{h} e^{-h\tau}\right) e^{-\mathcal{D}\tau} [\cos(\omega - \omega_0)\tau + \cos(\omega + \omega_0)\tau] d\tau = \\ &= \Phi(\omega - \omega_0) + \Phi(\omega + \omega_0), \end{aligned}$$

где

$$\Phi(\alpha) = \frac{\mathcal{D}r_0^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{\alpha^2 + \mathcal{D}^2} + \frac{\mathcal{D} + h}{h} \frac{1}{\alpha^2 + (\mathcal{D} + h)^2} \right].$$

В реальных условиях  $\omega_0 \gg h \gg \mathcal{D}$ . Это позволяет пренебречь  $\mathcal{D}$  по сравнению с  $h$  и, кроме того, отбросить  $\Phi(\omega + \omega_0)$ , поскольку аргумент  $\alpha = \omega + \omega_0$  всегда не меньше  $\omega_0$ . В результате

$$g_+(\omega) \approx \Phi(\omega - \omega_0) \approx \frac{\mathcal{D}r_0^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \mathcal{D}^2} + \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + h^2} \right]. \quad (42.25)$$

Рис. 34 иллюстрирует полученное выражение, но без соблюдения фактического огромного различия  $\mathcal{D}$  и  $h$ . Спектр состоит из двух лоренцианов — чрезвычайно острой «линии», обусловленной естественной диффузией фазы (полуширина на половинном уровне от максимума равна  $\mathcal{D}$ ), и гораздо более слабого и расплывчатого фона, вызванного флуктуациями амплитуды (полуширина равна  $h$ ). Практически этим «амплитудным» фоном можно в окрестности диффузионной «линии» пренебречь.

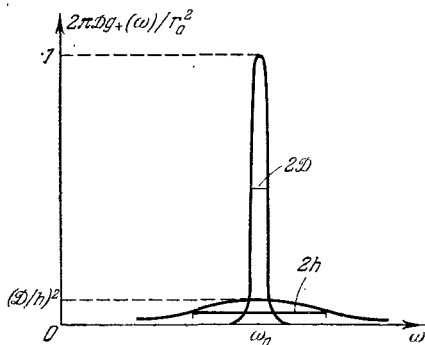


Рис. 34.

Изложенная теория естественной (или флуктуационной) ширины спектральной линии томсоновского автогенератора, опирающаяся на решение уравнения Эйнштейна — Фоккера (§ 28), была развита И. Л. Берштейном [11] и им

же впервые проверена с положительным результатом на опыте [12]. Как уже было отмечено, измерение естественной монохроматичности генератора являлось в то время очень трудной задачей, во-первых, из-за крайне малой ширины линии и, во-вторых, из-за медленных и гораздо более значительных по величине технических уходов частоты. Если даже допустить, что технические уходы удалось полностью устранить (что является вопросом умения и в принципе достижимо, поскольку по определению технические уходы — результат несовершенства аппаратуры), то и тогда обычные способы измерения столь малой монохроматичности практически неосуществимы.

Действительно, для измерения ширины линии  $\delta\omega \sim (10^{-10} \div 10^{-13})\omega_0$  при помощи резонатора нужно, чтобы ширина его собственной резонансной кривой была еще меньше, т. е. его добротность  $Q$  должна быть выше, чем  $\omega_0/\delta\omega \sim 10^{10} \div 10^{13}$ . Если же воспользоваться интерферометром, то при обычных способах наблюдения интерференционной картины, обнаруживающих смазывание последней только при разностях хода порядка длины когерентного цуга  $L \sim 2\pi c/\delta\omega$  (см. § 47), понадобился бы интерферометр астрономических размеров, так как

$$L \approx 2\pi c/\delta\omega = (10^{10} \div 10^{13}) 2\pi c/\omega_0 = (10^{10} \div 10^{13}) \lambda_0.$$

Даже при  $\lambda_0 = 10$  см это означает, что  $L \sim 10^6 \div 10^9$  км.

Если бы интерферометр был чувствителен к очень малым разностям фаз  $\Delta\varphi = 2\pi l/\lambda_0$  интерферирующих колебаний, так

что обнаруживаемая разность хода  $l$  составляла бы ничтожную долю от длины когерентного цуга  $L$  (например,  $\Delta\varphi = 0,01''$ , что дает  $l \approx 5 \cdot 10^{-8} L$ ), то положение существенно изменилось бы. Конечно, по-прежнему оставался бы в полной силе вопрос о том, как устранить технические уходы или по крайней мере обойти их влияние. Именно эти трудности и были преодолены при помощи остроумного и тонкого фазометрического метода, предложенного и осуществленного И. Л. Берштейном (§ 53).

### § 43. «Белый» шум и черное излучение

Чем «уже» функция корреляции стационарного процесса, тем шире его спектр. В § 42 это было показано на конкретных примерах, в которых получалось, что при неограниченном сужении  $\psi(\tau)$  спектральная плотность  $g(\omega)$  стремится к постоянному значению при всех  $\omega$ . Нетрудно получить этот же результат, допуская только, что  $\psi(\tau) = 0$  при  $|\tau| > \vartheta$ , а в остальном не уточняя вида  $\psi(\tau)$ . Действительно, для всех частот  $|\omega| \ll 1/\vartheta$  имеем

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \psi(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} e^{-i\omega\tau} \psi(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \psi(\tau) d\tau = \text{const.} \end{aligned}$$

Пока  $\vartheta$  конечно, «завал» спектральной плотности начинается при приближении  $|\omega|$  к  $1/\vartheta$ ; если же  $\vartheta \rightarrow 0$ , то интервал частот, в котором  $g = \text{const}$ , неограниченно расширяется. Случайная функция  $\xi(t)$  может быть стационарной при сколь угодно малых  $\vartheta$ , но предельный случай  $\vartheta = 0$  (дельта-корреляция) уже оказывается особым, так как дисперсия  $\xi(t)$  становится бесконечно большой, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g d\omega = \psi(0) = \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2$$

расходится.

Очевидно, во всех случаях, когда применяемая спектральная аппаратура (фильтр) обладает достаточно резко ограниченной полосой пропускания, целиком расположенной еще в той области частот, где  $g = \text{const}$ , поведение  $g(\omega)$  вдали от полосы пропускания будет несущественно и, в частности, не будет играть роли «завал» спектра на частотах  $|\omega| \sim 1/\vartheta$ , лежащих много выше верхней границы полосы (рис. 35, на котором изображена плотность по положительным частотам). Именно в таких

случаях можно без ощутимого влияния на результаты заменять реальный шум, обладающий малым, но конечным временем корреляции  $\vartheta$ , на дельта-коррелированный шум, у которого  $g = \text{const}$  на всей частотной шкале<sup>1)</sup>.

Примером шума, который почти всегда можно принимать дельта-коррелированным, является дробовой ток электронной лампы. Время корреляции  $\vartheta$  определяется здесь временем пролета электрона. Если эта величина порядка  $10^{-9}$  сек, то вплоть до частот в сотни мегагерц спектр будет ровным. При всех таких частотах можно считать дробовой ток дельта-коррелированным, т. е. рассматривать его как хаотическую (пуассоновскую)

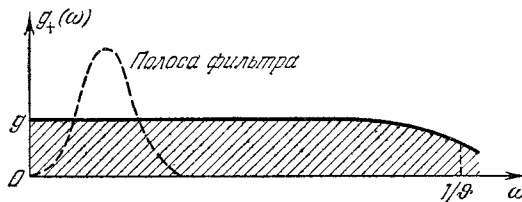


Рис. 35.

последовательность *мгновенных* импульсов с интегральным значением каждого импульса, равным заряду электрона  $e$  (§ 10):

$$I(t) = \sum_{\nu} e\delta(t - t_{\nu}). \quad (43.1)$$

Тогда, согласно (42.12) и (42.13),

$$\psi(\tau) = n_1 e^2 \delta(\tau) = e\bar{I}\delta(\tau), \quad g(\omega) = e\bar{I}/2\pi. \quad (43.2)$$

С учетом времени корреляции  $\vartheta$  мы получили следующее значение дисперсии  $I(t)$  [см. (10.9)]:

$$\overline{(\Delta I)^2} = \psi(0) = e\bar{I}/\vartheta.$$

При  $\vartheta \rightarrow 0$  дисперсия становится бесконечной, что и имеет место у процесса (43.1).

Другим примером шума, который в очень многих случаях можно считать дельта-коррелированным, является *тепловой* шум, обусловленный тепловым движением микрочастиц в телах. Теорию этого шума мы рассмотрим позднее (§ 54), но в связи с интересующим нас вопросом о равномерности спектра укажем уже здесь, что спектральная плотность тепловой э. д. с.,

<sup>1)</sup> То же относится и к более общему случаю, когда плотность  $g(\omega)$ , будучи постоянной в пределах полосы пропускания, меняется произвольным образом в *обе стороны* вне этой полосы, но без чрезмерно большого нарастания или выбросов, способных дать сильный эффект за счет «хвостов» амплитудной характеристики фильтра.

создаваемой каким-либо участком электрической цепи, пропорциональна активной части импеданса этого участка. Таким образом, проводник, сопротивление которого  $R$  в некотором интервале частот  $\omega$  постоянно, является источником случайной э. д. с., обладающей в этом частотном интервале равномерным спектром.

Если отвлечься от «макроскопических» факторов, обуславливающих зависимость  $R$  от  $\omega$  (наличие реактивных параметров в цепи, скин-эффект), то остается еще частотная дисперсия *проводимости* того металла, из которого сделано рассматриваемое сопротивление. Эта дисперсия начинает сказываться на частотах, сравнимых с  $1/\theta$ , где  $\theta$  — время свободного пробега электронов в металле. В результате спектр флуктуационного напряжения обрывается на частотах  $\omega \sim 1/\theta$ , что означает наличие корреляции между значениями этого напряжения на интервалах времени  $\tau < \theta$ . Следует заметить, что практически данный эффект не играет роли, поскольку в обычных условиях почти во всех металлах  $1/\theta \sim 10^{14}$  гц. Частотная зависимость  $R$ , обусловленная реактивными параметрами и скин-эффектом, проявляется на гораздо более низких частотах.

В американской литературе дельта-коррелированный шум получил название «белого» (white noise), и этот термин приобрел широкое распространение, в том числе и у нас. По-видимому, он возник по ассоциации с «белым светом», который в обычных интерференционных опытах обнаруживает якобы полную некогерентность (некоррелированность). Но белый свет, т. е. равновесное (или «черное») тепловое излучение, не является белым шумом, т. е. не обладает постоянной спектральной плотностью. Последняя дается формулой Планка для средней плотности электромагнитной энергии

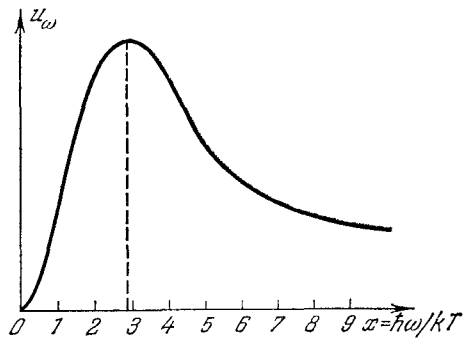


Рис. 36.

$$u_{\omega} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} (e^{\hbar \omega / kT} - 1)^{-1}, \quad \omega > 0. \quad (43.3)$$

Здесь  $\hbar$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ ,  $c$  — скорость света в вакууме,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура. На рис. 36 показан ход  $u_{\omega}$  в функции от  $x = \hbar \omega / kT$ . Максимум  $u_{\omega}$  приходится на значение  $x_m \approx 2,82$ .

С точки зрения теории случайных процессов  $u_\omega$  представляет собой спектральную плотность флуктуирующих напряженностей  $\mathbf{E}(t)$  и  $\mathbf{H}(t)$  поля теплового излучения. В каждой из плоских волн, на которые можно разложить это поле,  $E(t) = H(t)$ , причем все направления напряженностей равновероятны. В результате электрическая и магнитная энергии одинаковы, а компоненты  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  по какому-либо произвольному направлению имеют одинаковые функции корреляции, но не коррелированы между собой.

Найдем коэффициент корреляции, соответствующий спектральной плотности (43.3), т. е. величину

$$K_E(\tau) = \frac{\psi_E(\tau)}{\psi_E(0)}, \quad \psi_E(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u_\omega \cos \omega \tau d\omega.$$

Подставляя сюда выражение (43.3) для  $u_\omega$  и вычислив интеграл, получаем<sup>1)</sup>

$$K_E(\tau) = 15 \left( \frac{3}{\text{sh}^4 \beta} - \frac{3}{\beta^4} + \frac{2}{\text{sh}^2 \beta} \right) = -\frac{15}{2} \frac{d^3}{d\beta^3} L(\beta), \quad \beta = \frac{\pi k T}{\hbar} \tau, \quad (43.4)$$

где  $L(\beta) = \text{cth} \beta - 1/\beta$  — функция Ланжевена. Ход  $K_E$  в функции от  $\beta$  показан на рис. 37 и, разумеется, несколько не похож на дельта-функцию. При  $\beta \approx 1,37$ , что соответствует

$$\tau = \frac{1,37 \hbar}{\pi k T} = 0,44 \frac{\hbar}{k T} \equiv \vartheta,$$

положительная корреляция сменяется отрицательной. Это значит, что при временных сдвигах  $\tau < \vartheta$  значения компоненты  $E_p(t)$  по некоторому фиксированному направлению  $p$  чаще будут иметь в моменты  $t$  и  $t + \tau$  одинаковый знак, а при

$\tau > \vartheta$  — противоположный знак. Можно пояснить это следующим образом. Частота  $\omega_m$ , на которую приходится максимум спектральной плотности  $u_\omega$ , равна

$$\omega_m = x_m \frac{k T}{\hbar} \approx 2,82 \frac{k T}{\hbar}.$$

<sup>1)</sup> Эта формула была выведена М. Л. Левиным и автором в 1956 г., но не была опубликована. В дальнейшем ее получил Р. Бурре [13]; см. также [14].

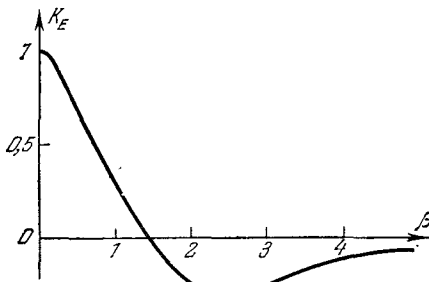


Рис. 37.

Таким образом, волны с частотами, близкими к  $\omega_m$ , представлены наиболее интенсивно, и в каждой точке пространства смена направления  $E$  на противоположное определяется преимущественно полупериодами этих волн. При этом более высокие частоты дают в  $u_\omega$  больший вклад, чем более низкие (рис. 36). Естественно, что время  $\vartheta$  должно быть порядка полупериода  $\pi/\omega_m$ , соответствующего частоте  $\omega_m$ , и должно лежать ниже этого полупериода. Действительно, из выражений для  $\vartheta$  и  $\omega_m$  находим

$$\vartheta = \frac{1,37\hbar}{\pi kT} = \frac{1,37 \cdot 2,82}{\pi^2} \frac{\pi}{\omega_m} = 0,39 \frac{\pi}{\omega_m}.$$

Времени  $\vartheta$  можно поставить в соответствие *пространственный* радиус корреляции  $a = c\vartheta$ , который с точностью до коэффициента совпадает с длиной волны

$$\lambda_m = 0,4\pi \frac{\hbar c}{kT}$$

в законе смещения В. Вина (на  $\lambda_m$  приходится максимум  $u_\lambda$  плотности электромагнитной энергии, пересчитанной на длины волн). Из выражений для  $\vartheta$  и  $\lambda_m$  следует, что

$$a = 0,44 \frac{\hbar c}{kT} = 0,35\lambda_m.$$

#### § 44. Модулированные случайные процессы

Мы рассмотрим теперь более подробно специальный вид случайных процессов — так называемые *модулированные* случайные процессы, которые в случае их стационарности (и, следовательно, существования спектральной интенсивности) можно называть также *узкополосными* или *квазимонохроматическими*. Нам уже приходилось сталкиваться с такого рода процессом ранее, когда мы рассматривали спектр автоколебаний в томсоновском генераторе (§ 42).

Сделаем несколько предварительных замечаний, которые в равной мере относятся как к детерминированным, так и к случайным модулированным процессам.

О модулированных колебаниях часто говорят как о «гармонических» колебаниях с медленно меняющейся амплитудой и (или) частотой. Такое, строго говоря, внутренне противоречивое словоупотребление (у гармонического колебания, по определению, амплитуда и частота — постоянные параметры на всей оси  $t$ ) обладает, однако, определенным смыслом, если достаточно малое частотное разрешение (селективность) используемой спектральной аппаратуры. Отклик на выходе такой аппаратуры успевает хорошо следовать за изменениями частоты и ампли-



туды на входе, т. е. *квазистационарно* воспроизводить модуляцию. В каждый момент времени отклик приблизительно такой же, какой вызвало бы гармоническое колебание со значениями частоты и амплитуды, взятыми в этот момент. В этом случае модулированные колебания целесообразно записывать в квазигармоническом виде:

$$\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (44.1)$$

где  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  — функции времени, медленные по сравнению с колебанием частоты  $\omega_0$ . Другими словами, изменения  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  за период высокой частоты  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  малы. Это не значит, что такое же представление оправдано и для более селективной спектральной аппаратуры, способной *выделить компоненты* спектра колебания (44.1). Поясним это на простом примере гармонической амплитудной модуляции, когда  $A(t) = 1 + k \cos \Omega t$ , где  $\Omega \ll \omega_0$ , и для простоты  $\varphi(t) = \varphi_0 = 0$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (1 + k \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = \\ &= \cos \omega_0 t + \frac{k}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t + \frac{k}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t. \end{aligned} \quad (44.2)$$

В радиотехнической литературе неоднократно возникала полемика о «реальности» *боковых частот*  $\omega_0 \pm \Omega$  (в общем случае — боковых полос или, вообще, компонент разложения Фурье). Спрашивали, что же имеет место «на самом деле» — колебание одной частоты  $\omega_0$  с медленно меняющейся амплитудой *или* три колебания с частотами  $\omega_0$  и  $\omega_0 \pm \Omega$ ? Поводом для первой дискуссии такого рода послужил важный практический вопрос о том, надо ли предоставлять каждой радиостанции частотную полосу конечной ширины или же можно ограничиваться сколь угодно узкой окрестностью несущей частоты  $\omega_0$  и «заселять эфир» гораздо плотнее. Исчерпывающее разъяснение подобных недоразумений было дано Л. И. Мандельштамом уже в начале 30-х годов (см. [15], стр. 35; [16], стр. 62 и 436), хотя это и не предотвратило возобновления полемики в значительно более поздней зарубежной литературе (см. [17]).

Л. И. Мандельштам указал на то, что сама постановка вопроса о «реальности» *левой или правой части* (44.2) лишена смысла, поскольку это математическое тождество. С таким же успехом можно дискутировать, что «реально»:  $(a + b)^2$  или  $a^2 + 2ab + b^2$ . Вопрос приобретает смысл только в связи со спектральными свойствами (селективностью) аппаратуры, регистрирующей колебание (44.2), причем речь может идти о «реальности» лишь в смысле *целесообразности* того или другого из двух математически равнозначных представлений  $\xi(t)$ . Если колебание воздействует, скажем, на колебательный контур с ре-

зонансной кривой полуширины  $h$ , то при  $h \gg \Omega$  (низкая селективность) отклик контура хорошо воспроизведет модуляцию, а при  $h \ll \Omega$  (высокая селективность) контур может выделить три гармонических колебания с частотами  $\omega_0$  и  $\omega_0 \pm \Omega$ . В первом случае целесообразно («реально») квазигармоническое представление, во втором — разложение на три гармонических колебания. Все зависит, таким образом, от соотношения между характеристиками самого колебания ( $\Omega$ ) и прибора ( $h$ ). Если отвлечься от прибора, то вопрос повисает в воздухе.

Представление (44.1), при котором одна функция  $\xi(t)$  записана через две функции  $A(t)$  и  $\varphi(t)$ , разумеется, неоднозначно. Для однозначности необходимо как-то отдельно определить либо  $A(t)$ , либо  $\varphi(t)$ . Один из возможных способов такого определения, который даже не связан с условием медленности  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  и, вместе с тем, не привносит никакой информации сверх той, которая содержится в  $\xi(t)$ , опирается на свойства аналитического сигнала (§ 38).

Перейдем от вещественного колебания  $\xi(t)$  к комплексному:

$$\zeta(t) = A(t) e^{i[\omega_0 t + \varphi(t)]}, \quad (44.3)$$

и потребуем, чтобы  $\zeta(t)$  было аналитическим сигналом, т. е. чтобы мнимая часть (44.3), равная

$$\eta(t) = A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (44.4)$$

была трансформантой Гильберта от вещественной части  $\xi(t)$  [см. (38.5)]. Располагая функциями  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ , мы получаем однозначное определение  $A(t)$  и  $\varphi(t)$ :

$$A(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)} = |\zeta(t)|, \quad (44.5)$$

$$\omega_0 t + \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\eta(t)}{\xi(t)} = \arg \zeta(t).$$

В общем случае  $A(t)$  и  $\varphi(t)$ , формально полученные посредством описанной процедуры, не будут медленными функциями, и, называя их мгновенной амплитудой и фазой, мы не извлечем из этого никаких физически оправданных следствий. Если же  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  медленны, то приобретает смысл наглядное представление об *огибающей*, в которую вписаны «гармонические» колебания с плавно меняющейся высокой частотой  $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\varphi}(t)$ . Определения (44.5) практически совпадают в этом случае с другими возможными определениями огибающей и мгновенной частоты, почерпнутыми из свойств гармонического колебания  $\xi(t) = A \cos \omega_0 t$ . Так, например, для этого колебания

$$A = \sqrt{\xi^2(t) + \frac{1}{\omega_0^2} \dot{\xi}^2(t)}, \quad \operatorname{tg} \omega_0 t = - \frac{\dot{\xi}(t)}{\omega_0 \xi(t)}.$$

Пренебрегая в первом приближении производными  $\dot{A}(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$ , мы получаем при дифференцировании (44.1)

$$\dot{\xi}(t) = -\omega_0 \eta(t),$$

т. е. преобразование Гильберта приближенно сводится к дифференцированию исходной функции  $\xi(t)$  по  $\omega_0 t$  (см. [18]).

Колебания (44.1) и (44.4) можно рассматривать как проекции вектора длины  $A(t)$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega_0 + \dot{\varphi}(t)$ , на взаимно ортогональные оси  $\xi$  и  $\eta$ . Вводя комплексную амплитуду

$$\mathfrak{A}(t) = A(t) e^{i\varphi(t)},$$

называемую также модулирующей функцией, можно записать аналитический сигнал (44.3) в виде

$$\zeta(t) = \mathfrak{A}(t) e^{i\omega_0 t}. \quad (44.6)$$

Часто бывает удобно пользоваться декартовыми компонентами вектора  $\mathfrak{A}(t)$  на плоскости Ван-дер-Поля, т. е. на плоскости, вращающейся вокруг начала координат с угловой скоростью  $\omega_0$  относительно плоскости  $(\xi, \eta)$ :

$$\mathfrak{A}(t) = a(t) + ib(t) = A(t) \cos \varphi(t) + iA(t) \sin \varphi(t). \quad (44.7)$$

Амплитуды  $a(t)$  и  $b(t)$  — это проекции вектора длины  $A(t)$ , поворачивающегося с мгновенной угловой скоростью  $\dot{\varphi}(t)$  относительно осей  $a, b$  на плоскости Ван-дер-Поля. Очевидно, в случае модулированного колебания, т. е. при медленно меняющихся  $A(t)$  и  $\varphi(t)$ , функции  $\mathfrak{A}(t)$ ,  $a(t)$  и  $b(t)$  тоже являются медленными. Как следует из (44.6),

$$\begin{aligned} a(t) &= \xi(t) \cos \omega_0 t + \eta(t) \sin \omega_0 t, \\ b(t) &= \eta(t) \cos \omega_0 t - \xi(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (44.8)$$

Обратимся теперь к случайным модулированным колебаниям, когда все рассматриваемые функции, как быстро меняющиеся  $(\xi, \eta, \zeta)$ , так и медленные  $(a, b, \mathfrak{A}, A, \varphi)$ , являются случайными. Пусть  $\xi(t)$  — стационарный случайный процесс. Тогда, как мы знаем,  $\eta(t)$  и  $\zeta(t)$  тоже стационарны, причем  $\overline{\xi(t)} = \overline{\eta(t)} = \overline{\zeta(t)} = 0$ , а для корреляционных функций имеем (§ 38)

$$\begin{aligned} \overline{\xi\xi_\tau} &= \overline{\eta\eta_\tau} = \psi_\xi(\tau), & \overline{\xi\eta_\tau} &= -\overline{\eta\xi_\tau} = \psi_{\xi\eta}(\tau), \\ \psi_\zeta(\tau) &= \overline{\zeta_\tau\zeta^*} = 2[\psi_\xi(\tau) + i\psi_{\xi\eta}(\tau)], \end{aligned} \quad (44.9)$$

где индексом  $\tau$  по-прежнему отмечены величины, взятые в момент  $t + \tau$ . В частности, при  $\tau = 0$

$$\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \frac{1}{2} \overline{|\xi|^2} \equiv \sigma^2, \quad \overline{\xi\eta} = 0. \quad (44.10)$$

При помощи (44.8) и (44.9) нетрудно вывести выражения для корреляционных функций  $a(t)$  и  $b(t)$  через  $\psi_{\xi}(\tau)$  и  $\psi_{\xi\eta}(\tau)$ :

$$\begin{aligned}\overline{aa_{\tau}} &= \overline{bb_{\tau}} = \psi_{\xi}(\tau) \cos \omega_0 \tau + \psi_{\xi\eta}(\tau) \sin \omega_0 \tau \equiv \psi_a(\tau), \\ \overline{ab_{\tau}} &= -\overline{ba_{\tau}} = \psi_{\xi\eta}(\tau) \cos \omega_0 \tau - \psi_{\xi}(\tau) \sin \omega_0 \tau \equiv \psi_{ab}(\tau).\end{aligned}\quad (44.11)$$

В частности,

$$\overline{a^2} = \overline{b^2} = \psi_a(0) = \psi_{\xi}(0) = \sigma^2, \quad \overline{ab} = 0. \quad (44.12)$$

Функция корреляции комплексной амплитуды  $\mathfrak{A}(t) = a(t) + ib(t)$ , согласно (44.11), равна

$$\psi_{\mathfrak{A}}(\tau) = \overline{\mathfrak{A}_{\tau} \mathfrak{A}^*} = 2[\psi_a(\tau) + i\psi_{ab}(\tau)]. \quad (44.13)$$

Разрешая (44.11) относительно  $\psi_{\xi}(\tau)$  и  $\psi_{\xi\eta}(\tau)$ , получаем

$$\begin{aligned}\psi_{\xi}(\tau) &= \psi_a(\tau) \cos \omega_0 \tau - \psi_{ab}(\tau) \sin \omega_0 \tau, \\ \psi_{\xi\eta}(\tau) &= \psi_{ab}(\tau) \cos \omega_0 \tau + \psi_a(\tau) \sin \omega_0 \tau.\end{aligned}\quad (44.14)$$

Таким образом, корреляционные функции исходных высокочастотных колебаний  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  сами имеют — как функции временного сдвига  $\tau$  — характер модулированных колебаний.

Обратимся теперь к спектральным разложениям рассматриваемых функций корреляции. Из (44.6) следует, что

$$\psi_{\mathfrak{A}}(\tau) = \psi_{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0 \tau}, \quad (44.15)$$

а для  $\psi_{\xi}(\tau)$  мы имеем спектральное разложение (41.21) (так как  $\bar{\xi} = 0$ , смешанный момент  $B_{\xi}$  совпадает с  $\psi_{\xi}$ ):

$$\psi_{\xi}(\tau) = 4 \int_0^{\infty} g(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega, \quad (44.16)$$

где  $g(\omega)$  — спектральная плотность колебаний  $\xi(t)$ . Если  $\xi(t)$  — модулированное (квазимонохроматическое) колебание, то на полуоси  $\omega > 0$  плотность  $g(\omega)$  заметно отлична от нуля только в окрестности  $\omega = \omega_0$ , узкой по сравнению с  $\omega_0$ . Подставив разложение (44.16) в (44.15), получаем

$$\psi_{\mathfrak{A}}(\tau) = 4 \int_0^{\infty} g(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\omega.$$

Вводя разностную частоту  $\Omega = \omega - \omega_0$  и функцию  $\tilde{g}(\Omega) = g(\omega_0 + \Omega)$ , отличную от нуля только в узкой полосе около  $\Omega = 0$ , можно записать предыдущую формулу в виде

$$\psi_{\mathfrak{A}}(\tau) = 4 \int_{-\omega_0}^{\infty} \tilde{g}(\Omega) e^{i\Omega \tau} d\Omega \approx 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\Omega) e^{i\Omega \tau} d\Omega, \quad (44.17)$$

что дает совместно с (44.13)

$$\left. \begin{array}{l} \psi_a(\tau) \\ \psi_{ab}(\tau) \end{array} \right\} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\Omega) \left\{ \begin{array}{l} \cos \Omega \tau \\ \sin \Omega \tau \end{array} \right. d\Omega. \quad (44.18)$$

Отметим, что в случае *симметричного* относительно  $\omega_0$  распределения плотности  $g(\omega)$ , т. е. при *четной* функции  $\tilde{g}(\Omega)$ , согласно (44.18)  $\psi_{ab}(\tau) = 0$  и модуляции  $\psi_{\xi}(\tau)$  и  $\psi_{\xi\eta}(\tau)$  оказываются чисто *амплитудными*:

$$\psi_{\xi}(\tau) = \psi_a(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \psi_{\xi\eta}(\tau) = \psi_a(\tau) \sin \omega_0 \tau.$$

Для  $\psi_a(\tau)$ , как для всякой функции корреляции, имеет место неравенство  $|\psi_a(\tau)| \leq \psi_a(0) = \sigma^2$ . Нетрудно, однако, установить, что справедливо более сильное неравенство [19]. Действительно, из (44.14) следует, что

$$\psi_{\xi}(\tau) = \sqrt{\psi_a^2(\tau) + \psi_{ab}^2(\tau)} \cos[\omega_0 \tau + \Phi(\tau)].$$

Но  $|\psi_{\xi}(\tau)| \leq \psi_{\xi}(0) = \sigma^2$ , а значит, «оггибающая»  $\sqrt{\psi_a^2 + \psi_{ab}^2}$  нигде не превосходит  $\sigma^2$ , и поэтому

$$|\psi_a(\tau)| \leq + \sqrt{\sigma^4 - \psi_{ab}^2(\tau)}$$

— неравенство более жесткое, чем  $|\psi_a(\tau)| \leq \sigma^2$ .

Основной круг вопросов, относящихся к случайному колебанию (44.6), касается связи вероятностных характеристик (функций распределения, моментов) исходного колебания  $\xi(t)$ , с одной стороны, и ван-дер-Польевских переменных  $a$ ,  $b$ ,  $A$  и  $\varphi$  — с другой. Если  $\xi(t)$  — *нормальный* процесс, то все такого рода вопросы могут быть решены до конца, причем не только при стационарном процессе  $\xi(t)$ , но и для более общего случая. Рассмотрим сначала более простой случай *нормального* и *стационарного* процесса  $\xi(t)$ .

Из (38.5) следует, что при гауссовом  $\xi(t)$  сопряженный процесс  $\eta(t)$  тоже гауссов. Следовательно, зная функции корреляции  $\psi_{\xi}$  и  $\psi_{\xi\eta}$ , мы можем составить корреляционную матрицу  $B$  для любой совокупности  $2n$  величин  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n), \eta(t_1), \dots, \eta(t_n)$ , а при помощи  $B$  и обратной матрицы  $B^{-1}$  написать  $2n$ -мерное распределение этих величин. Дальнейшее сводится к тривиальным преобразованиям переменных — переходу к  $a(t_1), b(t_1), \dots, a(t_n), b(t_n)$  или к  $A(t_1), \varphi(t_1), \dots, A(t_n), \varphi(t_n)$ . Сделаем это для двумерного распределения, т. е. совместного распределения  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ .

Согласно (44.10) матрица  $B$  имеет вид

$$\begin{array}{c|cc} & \xi & \eta \\ \hline \xi & \sigma^2 & 0 \\ \eta & 0 & \sigma^2 \end{array}$$

так что

$$\omega_{\tau}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(\xi^2 + \eta^2)/2\sigma^2} d\xi d\eta \quad (44.19)$$

(некоррелированность  $\xi$  и  $\eta$  влечет здесь за собой их независимость). Учитывая теперь, что

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 + b^2 = A^2, \quad d\xi d\eta = da db = A dA d\varphi,$$

получаем из (44.19) совместное распределение амплитуд  $a$  и  $b$ :

$$\omega_{\mathcal{A}}(a, b) da db = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(a^2 + b^2)/2\sigma^2} da db, \quad (44.20)$$

и совместное распределение огибающей  $A$  и фазы  $\varphi$ :

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{A}}(A, \varphi) dA d\varphi = \frac{A dA}{\sigma^2} e^{-A^2/2\sigma^2} \frac{d\varphi}{2\pi}. \quad (44.21)$$

Таким образом,  $a$  и  $b$  независимы и распределены нормально, а  $A$  и  $\varphi$  независимы, причем огибающая  $A$  распределена по релеевскому закону, а фаза  $\varphi$  — равномерно в интервале  $(0, 2\pi)$ .

Аналогичным образом для  $\xi, \xi_{\tau}, \eta$  и  $\eta_{\tau}$  можно при помощи корреляционной матрицы  $B$ :

$$\begin{array}{c|cccc} & \xi & \eta & \xi_{\tau} & \eta_{\tau} \\ \hline \xi & \sigma^2 & 0 & \psi_{\xi}(\tau) & \psi_{\xi\eta}(\tau) \\ \eta & 0 & \sigma^2 & -\psi_{\xi\eta}(\tau) & \psi_{\eta}(\tau) \\ \xi_{\tau} & \psi_{\xi}(\tau) & -\psi_{\xi\eta}(\tau) & \sigma^2 & 0 \\ \eta_{\tau} & \psi_{\xi\eta}(\tau) & \psi_{\eta}(\tau) & 0 & \sigma^2 \end{array}$$

и обратной матрицы  $B^{-1}$  записать четырехмерное распределение. Если воспользоваться коэффициентами корреляции  $K(\tau) = \psi_{\xi}(\tau)/\sigma^2$  и  $L(\tau) = \psi_{\xi\eta}(\tau)/\sigma^2$ , то получим

$$\begin{aligned} \omega_{\tau_2}(\xi, \eta, \xi_{\tau}, \eta_{\tau}) d\xi d\eta d\xi_{\tau} d\eta_{\tau} = \\ = \frac{d\xi d\eta d\xi_{\tau} d\eta_{\tau}}{4\pi^2\sigma^4(1 - K^2 - L^2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(1 - K^2 - L^2)} [\xi^2 + \eta^2 + \xi_{\tau}^2 + \eta_{\tau}^2 - \right. \\ \left. - 2K(\xi\xi_{\tau} + \eta\eta_{\tau}) - 2L(\xi\eta_{\tau} - \xi_{\tau}\eta)] \right\}. \quad (44.22) \end{aligned}$$

Замена переменных  $\xi = A \cos \varphi$ ,  $\eta = A \sin \varphi$ ,  $\xi_\tau = A_\tau \cos \varphi_\tau$ ,  $\eta_\tau = A_\tau \sin \varphi_\tau$  дает

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{A_2}(A, A_\tau, \varphi, \varphi_\tau) dA dA_\tau d\varphi d\varphi_\tau = \\ = \frac{AA_\tau dA dA_\tau d\varphi d\varphi_\tau}{4\pi^2\sigma^4(1-p^2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(1-p^2)} [A^2 + A_\tau^2 - \right. \\ \left. - 2AA_\tau(K \cos(\varphi_\tau - \varphi) + L \sin(\varphi_\tau - \varphi))] \right\}, \quad (44.23) \end{aligned}$$

где введено обозначение  $p^2 = K^2 + L^2$ .

Интегрирование (44.23) по «лишним» переменным позволяет получать различные частные случаи. Так, интегрируя по  $A_\tau$  (от 0 до  $\infty$ ) и  $\varphi_\tau$  (от 0 до  $2\pi$ ), мы получим, конечно, распределение (44.21) для  $A$  и  $\varphi$ . Интегрируя по  $\varphi$  и  $\varphi_\tau$ , получим распределение для  $A$  и  $A_\tau$ :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{A_2}(A, A_\tau) dA dA_\tau = \frac{AA_\tau dA dA_\tau}{4\pi^2\sigma^4(1-p^2)} \exp \left\{ -\frac{A^2 + A_\tau^2}{2\sigma^2(1-p^2)} \right\} \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi_\tau \exp \left\{ \frac{AA_\tau [K \cos(\varphi_\tau - \varphi) + L \sin(\varphi_\tau - \varphi)]}{\sigma^2(1-p^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Интеграл по  $\varphi_\tau$  (или, что то же, по  $\varphi_\tau - \varphi$ ) дает нулевую бесселеву функцию мнимого аргумента, а интеграл по  $\varphi$  добавляет множитель  $2\pi$ . Окончательно получается распределение Райса (§ 25):

$$\tilde{w}_{A_2}(A, A_\tau) dA dA_\tau = \frac{AA_\tau dA dA_\tau}{\sigma^4(1-p^2)} I_0 \left( \frac{pAA_\tau}{\sigma^2(1-p^2)} \right) \exp \left\{ -\frac{A^2 + A_\tau^2}{2\sigma^2(1-p^2)} \right\}. \quad (44.24)$$

В соответствии с теоремой Дуба (см. задачу 5 гл. IV) в том случае, когда корреляция экспоненциальна [ $p(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ ], огибающая  $A(t)$  представляет собой марковский нормальный процесс. В этом можно убедиться, вычислив при помощи (44.24) и одномерного (релеевского) распределения  $\tilde{w}_A(A)$  [см. (44.21)] условную вероятность:

$$\begin{aligned} v(A|\tau, A_0) dA = \frac{\tilde{w}_{A_2}(A, A_0) dA dA_0}{\tilde{w}_A(A_0) dA_0} = \\ = \frac{A dA}{\sigma^2(1-p^2)} I_0 \left( \frac{pAA_0}{\sigma^2(1-p^2)} \right) \exp \left\{ -\frac{A^2 + p^2 A_0^2}{2\sigma^2(1-p^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Она оказывается при  $p(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$  вероятностью перехода, т. е. удовлетворяет уравнению Смолуховского:

$$v(A|t-t_0, A_0) = \int_0^\infty v(A|t-\theta, B) v(B|\theta-t_0, A_0) dB \quad (t_0 < \theta < t).$$

Это вполне естественный результат, так как экспоненциальная корреляция означает, что  $A(t)$  удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению первого порядка с дельта-коррелированной случайной силой, т. е.  $A(t)$  ведет себя так же, как, например, скорость частицы при одномерном броуновском движении (§ 35). Можно сказать также, что  $A(t)$  представляет собой огибающую процесса, отфильтрованного из белого шума селективным колебательным контуром.

Интегрирование (44.23) по  $A$  и  $A_\tau$  приводит к совместному распределению  $\varphi$  и  $\varphi_\tau$ . При помощи двумерных распределений можно вычислить смешанные моменты  $A$  и  $\varphi$ , например  $\overline{AA_\tau}$  и  $\overline{\varphi\varphi_\tau}$  (они зависят от  $\rho^2 = K^2 + L^2$ ), а также получить распределения производных

$$\dot{A} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{A_\tau - A}{\tau}, \quad \dot{\varphi} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varphi_\tau - \varphi}{\tau}.$$

Мы не будем приводить эти расчеты, отсылая читателя к имеющейся литературе (см. [20], гл. 8).

Перейдем к более общему случаю гауссова процесса  $\xi(t) = a(t) \cos \omega_0 t + b(t) \sin \omega_0 t$ , причем стационарные амплитуды  $a$  и  $b$  не удовлетворяют условиям (44.12), при которых процесс  $\xi(t)$  стационарен. Пусть  $\bar{a} = \bar{b} = 0$ , но  $\overline{a^2} \neq \overline{b^2}$  и  $\overline{ab} \neq 0$ . Нетрудно понять, что моменты процесса  $\xi(t)$  в этом случае периодически меняются со временем<sup>1)</sup>. Например,

$$\begin{aligned} \overline{\xi^2(t)} &= \overline{a^2} \cos^2 \omega_0 t + \overline{b^2} \sin^2 \omega_0 t + 2\overline{ab} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t = \\ &= \frac{\overline{a^2} + \overline{b^2}}{2} + \frac{\overline{a^2} - \overline{b^2}}{2} \cos 2\omega_0 t + \overline{ab} \sin 2\omega_0 t, \end{aligned}$$

т. е.  $\overline{\xi^2(t)}$  — периодическая функция  $t$  с периодом  $\pi/\omega_0$ . Каково в этом случае распределение  $A$  и  $\varphi$ ?

Заметим, что подбором постоянной начальной фазы всегда можно ввести такие  $a$  и  $b$ , для которых  $\overline{ab} = 0$  [21]. Действительно, из (44.8) имеем

$$\xi(t) = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t, \quad \eta(t) = b(t) \cos \omega_0 t + a(t) \sin \omega_0 t.$$

Заменив здесь аргумент  $\omega_0 t$  на  $(\omega_0 t + \varphi_0) - \varphi_0$ , получаем

$$\xi(t) = a_1(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + b_1(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (44.25)$$

где

$$a_1(t) = a(t) \cos \varphi_0 - b(t) \sin \varphi_0, \quad b_1(t) = a(t) \sin \varphi_0 + b(t) \cos \varphi_0.$$

Следовательно,

$$\overline{a_1 b_1} = (\overline{a^2} - \overline{b^2}) \frac{\sin 2\varphi_0}{2} - \overline{ab} \cos 2\varphi_0,$$

<sup>1)</sup> Рассматриваемый процесс принадлежит к периодически-нестационарным, см. § 59.



и, выбрав  $\varphi_0$  таким, что  $\operatorname{tg} 2\varphi_0 = 2\bar{a}\bar{b}/(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)$ , получаем  $\overline{a_1 b_1} = 0$ . Будем рассматривать поэтому процесс (44.25), у которого

$$\overline{a_1^2} = \sigma_1^2 \neq \overline{b_1^2} = \sigma_2^2, \quad \overline{a_1 b_1} = 0. \quad (44.26)$$

По условию процесс  $\xi(t)$  гауссов, так что

$$\omega_{\mathfrak{N}}(a_1, b_1) da_1 db_1 = \frac{da_1 db_1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{b_1^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}.$$

Переход к полярным координатам ( $a_1 = A \cos \varphi$ ,  $b_1 = A \sin \varphi$ ) дает

$$\tilde{\omega}_{\mathfrak{N}}(A, \varphi) dA d\varphi = \frac{A dA d\varphi}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{A^2}{2}\left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2}\right)\right\}, \quad (44.27)$$

т. е. нет ни независимости между  $A$  и  $\varphi$ , ни равномерности распределения  $\varphi$ .

Интегрирование (44.27) от 0 до  $\infty$  по  $A$  дает распределение  $\varphi$ :

$$\omega_{\varphi}(\varphi) d\varphi = \left[2\pi\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cos^2 \varphi + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sin^2 \varphi\right)\right]^{-1} d\varphi,$$

которое при  $\sigma_1 = \sigma_2$  превращается в равномерное. При интегрировании (44.27) от 0 до  $2\pi$  по  $\varphi$  удобно ввести переменную  $\psi = 2\varphi$ :

$$\begin{aligned} \omega_A(A) dA &= dA \int_0^{2\pi} \tilde{\omega}_{\mathfrak{N}}(A, \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{A dA}{\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{A^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right\} \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \exp\left\{-\frac{A^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right) \cos \psi\right\} d\psi = \\ &= \frac{A dA}{\sigma_1\sigma_2} I_0\left[\frac{A^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right] \exp\left\{-\frac{A^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Введем параметры  $\sigma$  и  $\alpha$ , положив

$$\sigma_1^2 = \sigma^2(1 + \alpha), \quad \sigma_2^2 = \sigma^2(1 - \alpha). \quad (44.28)$$

При этом, согласно (44.25) и (44.26),

$$\overline{\xi^2(t)} = \sigma^2[1 + \alpha \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)],$$

а распределения  $\varphi$  и  $A$  принимают вид

$$\omega_{\varphi}(\varphi) d\varphi = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2} d\varphi}{2\pi(1 - \alpha \cos 2\varphi)}, \quad (44.29)$$

$$\omega_A(A) dA = \frac{A dA}{\sigma^2 \sqrt{1 - \alpha^2}} I_0\left[\frac{\alpha A^2}{2\sigma^2(1 - \alpha^2)}\right] \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma^2(1 - \alpha^2)}\right], \quad (44.30)$$

Нетрудно убедиться, что при всяком  $\alpha$  (44.30) дает  $\overline{A^2} = 2\sigma^2$ , как это и должно быть в силу (44.28), поскольку  $\overline{A^2} = \overline{a_1^2} + \overline{b_1^2} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .

Если

$$\left| \frac{\alpha A^2}{2\sigma^2(1-\alpha^2)} \right| \ll 1,$$

то  $I_0 \approx 1$  и (44.30) переходит в распределение Релея. Чем меньше  $\alpha$ , тем для больших значений  $A$  это справедливо, а при

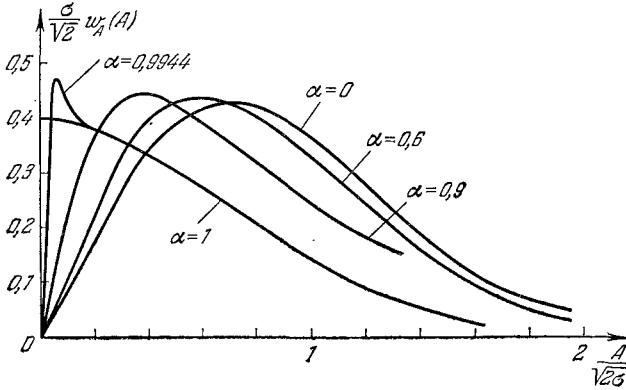


Рис. 38.

$\alpha = 0$  релеевское распределение верно для любых  $A$ . В противоположном предельном случае, когда

$$\left| \frac{\alpha A^2}{2\sigma^2(1-\alpha^2)} \right| \gg 1,$$

можно воспользоваться асимптотическим выражением

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (|x| \gg 1),$$

что дает

$$w_A(A) dA \approx \frac{dA}{\sqrt{\pi\alpha}\sigma} e^{-A^2/2\sigma^2(1+\alpha)},$$

т. е. гауссов закон. Этот закон справедлив при тем меньших  $A$ , чем ближе  $\alpha$  к единице. При  $\alpha = 1$  гауссово распределение верно для всей полуоси  $A > 0$ .

На рис. 38 приведены кривые  $w_A(A)$ , а на рис. 39 — кривые  $w_\varphi(\varphi)$  [в интервале  $\varphi$  от 0 до  $\pi$ , так как  $w_\varphi(\varphi + \pi) = w_\varphi(\varphi)$ ], взятые из цитированной выше работы [21]. В этой работе вычислены также моменты  $\overline{A^n}$  и показано, что четные моменты

являются элементарными функциями  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$ , а нечетные — выражаются через полные эллиптические интегралы. Кроме того, вычислен смешанный момент  $\overline{A^2 A_\tau^2}$ , получено (для специального вида корреляционной матрицы  $a_1, b_1, a_{1\tau}, b_{1\tau}$ ) четырехмерное распределение  $\tilde{w}_{\mathcal{M}2}(A, A_\tau, \varphi, \varphi_\tau)$  и найдено распределение огибающей и фазы процесса (44.25) при наличии регулярной составляющей, т. е. при  $\overline{a_1}$  и  $\overline{b_1}$ , отличных от нуля.

Рассмотрим теперь вопрос о связи распределений  $\xi$  и  $A$  в том случае, когда модулированный процесс  $\xi(t)$  стационарен, но не гауссов.

Найдем характеристическую функцию процесса  $\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ :

$$\begin{aligned} f_\xi(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\xi} w_\xi(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^\infty dA \int_0^{2\pi} e^{isA \cos(\omega_0 t + \varphi)} \tilde{w}_{\mathcal{M}}(A, \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Записав  $\tilde{w}_{\mathcal{M}}$  через условное распределение  $\varphi$ :

$$\tilde{w}_{\mathcal{M}}(A, \theta) = w_A(A) w_\varphi(\varphi | A),$$

и воспользовавшись известным разложением в ряд Фурье:

$$e^{isA \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i^n J_n(sA) e^{in(\omega_0 t + \varphi)},$$

получаем

$$\begin{aligned} f_\xi(s) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} i^n \int_0^\infty J_n(sA) w_A(A) dA \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} e^{in(\omega_0 t + \varphi)} w_\varphi(\varphi | A) d\varphi. \end{aligned}$$

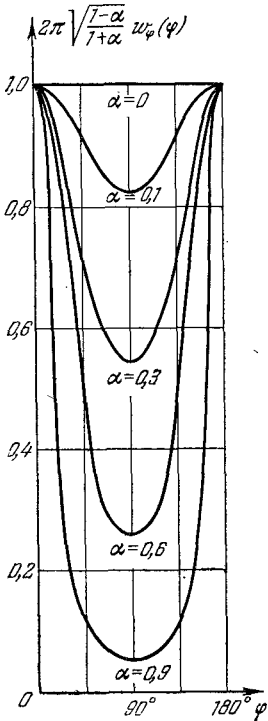


Рис. 39.

Но в силу стационарности  $\xi(t)$  характеристическая функция не должна зависеть от  $t$ , что возможно, очевидно, лишь при

$$w_\varphi(\varphi | A) = \text{const} = \frac{1}{2\pi},$$

т. е. при независимости  $\varphi$  от  $A$  и равномерном распределении  $\varphi$ :

$$\tilde{w}_{\mathcal{M}}(A, \varphi) dA d\varphi = w_A(A) dA \frac{d\varphi}{2\pi}. \quad (44.31)$$

Характеристическая функция  $f_{\xi}(s)$  принимает тогда вид

$$f_{\xi}(s) = \int_0^{\infty} \omega_A(A) J_0(sA) dA = \int_0^{\infty} \frac{\omega_A(A)}{A} J_0(sA) A dA, \quad (44.32)$$

т. е. представляет собой преобразование Ганкеля от функции  $\omega_A(A)/A$ . Обращение этого преобразования дает

$$\frac{\omega_A(A)}{A} = \int_0^{\infty} f_{\xi}(s) J_0(sA) s ds. \quad (44.33)$$

Таким образом, распределение  $\xi$  есть преобразование Фурье характеристической функции  $f_{\xi}(s)$ :

$$\omega_{\xi}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(s) e^{-is\xi} ds, \quad (44.34)$$

а распределение огибающей  $A$  — преобразование Ганкеля от этой же функции. Этот изящный результат был получен Блан-Лапьерром [22], но здесь приведен более последовательный его вывод, данный позднее Ф. В. Бункиным и Л. И. Гудзенко [23].

Пользуясь формулами (44.32) и (44.34), можно, однако, пойти дальше и получить *прямую* связь между  $\omega_{\xi}(\xi)$  и  $\omega_A(A)$  [24]. Для этого достаточно подставить (44.32) в (44.34) и воспользоваться значениями разрывного интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(sA) e^{-is\xi} ds = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - \xi^2}} & \text{при } A \geq |\xi|, \\ 0 & \text{при } A < |\xi|. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \omega_{\xi}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(s) e^{-is\xi} ds = \\ &= \int_0^{\infty} \omega_A(A) dA \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(sA) e^{-is\xi} ds = \frac{1}{\pi} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\omega_A(A) dA}{\sqrt{A^2 - \xi^2}}. \end{aligned} \quad (44.35)$$

Если ввести переменную интегрирования  $x$ , положив  $A = = |\xi| \operatorname{ch} x$ , то (44.35) запишется в еще более лаконичной форме, которая к тому же более удобна в некоторых конкретных случаях:

$$\omega_{\xi}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega_A(|\xi| \operatorname{ch} x) dx. \quad (44.36)$$

Нетрудно убедиться, что при релеевском распределении формула (44.36) (здесь она удобней) дает гауссов закон для  $\xi$ . При равномерном распределении  $A$  в интервале  $(0, A_0)$  из (44.35) получаем

$$\omega_{\xi}(\xi) = \frac{1}{2\pi A_0} \ln \left( \frac{A_0 + \sqrt{A_0^2 - \xi^2}}{A_0 - \sqrt{A_0^2 - \xi^2}} \right),$$

а при экспоненциальном распределении  $\omega_A(A) = \alpha e^{-\alpha A}$  по формуле (44.36) находим

$$\omega_{\xi}(\xi) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha |\xi| \operatorname{ch} x} dx = \frac{\alpha}{\pi} K_0(\alpha \xi),$$

где  $K_0$  — нулевая функция Макдональда, обладающая логарифмической особенностью в нуле и убывающая на бесконечности, как  $e^{-\alpha \xi} / \sqrt{\xi}$ .

#### § 45. Спектр колебания с флуктуирующей частотой

Пусть в колебании

$$\xi(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0] \quad (45.1)$$

девиация частоты  $\Omega(t) = \dot{\varphi}(t)$  — стационарный случайный процесс, а  $\varphi_0$  — случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $(0, 2\pi)$ . Рассмотрим, как связан спектр колебания  $\xi(t)$  со спектром девиации частоты  $\Omega(t)$ . Выяснению этого вопроса посвящено довольно много работ, из которых мы будем следовать в основном работам А. Н. Малахова [25], Г. А. Елкина и М. И. Родак (см. [26] и цитированную там литературу, а также [27]).

Естественно считать, что  $\overline{\Omega(t)} = 0$ , и тогда функция корреляции для  $\Omega(t)$  будет

$$\psi_{\Omega}(\tau) = \overline{\Omega(t+\tau)\Omega(t)} = \int_0^{\infty} g_{\Omega}(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (45.2)$$

где  $g_{\Omega}(\omega)$  — спектральная плотность  $\Omega(t)$  по положительным частотам. Для случайного набегу фазы за время от  $t$  до  $t + \tau$  имеем

$$\varphi_{\tau} - \varphi = \int_t^{t+\tau} \Omega(t) dt. \quad (45.3)$$

Очевидно, именно этот набег фазы адекватным образом характеризует качество тех «часов», в роли которых можно использо-

вать процесс (45.1). Для среднего квадрата  $\varphi_\tau - \varphi$ , который мы обозначим через  $F(\tau)$ , в соответствии с (45.2) и (45.3) получаем

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \overline{(\varphi_\tau - \varphi)^2} = \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \psi_\Omega(t-t') dt' = \\ &= \int_0^\infty g_\Omega(\omega) d\omega \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \cos \omega(t-t') dt dt' = \\ &= 2 \int_0^\infty g_\Omega(\omega) \frac{1 - \cos \omega\tau}{\omega^2} d\omega. \quad (45.4) \end{aligned}$$

Средний квадратичный набег фазы полностью определен, таким образом, спектром случайной девиации частоты  $\Omega(t)$ <sup>1)</sup>.

Предположим, далее, что  $\Omega(t)$ , а значит, и набег фазы  $\chi = \varphi_\tau - \varphi$  — нормальный процесс. Поскольку  $\bar{\chi} = 0$  в силу (45.3), а дисперсия  $\chi$  выражается по (45.4), распределение  $\chi$  будет

$$\omega_\chi(\chi) d\chi = \frac{1}{\sqrt{2\pi F}} e^{-\chi^2/2F} d\chi. \quad (45.5)$$

Усредняя произведение

$$\begin{aligned} \xi(t+\tau) \xi(t) &= \\ &= \frac{A_0^2}{2} \{ \cos[\omega_0\tau - (\varphi_\tau - \varphi)] + \cos[\omega_0(2t+\tau) - (\varphi_\tau + \varphi) + 2\varphi_0] \} \end{aligned}$$

при помощи распределения (45.5) для  $\chi$  и равномерного в  $(0, 2\pi)$  распределения  $\varphi_0$ , получаем

$$\begin{aligned} \psi_\xi(\tau) &= \frac{A_0^2}{2} \cos \omega_0\tau \cdot \overline{\cos \chi} = \frac{A_0^2}{2} e^{-\tau^2/2F} \cos \omega_0\tau = \\ &= \frac{A_0^2}{2} e^{-F(\tau)/2} \cos \omega_0\tau, \quad (45.6) \end{aligned}$$

что отличается от (42.23) — если не говорить о флуктуациях амплитуды, которыми мы теперь пренебрегаем, — только более общим законом диффузии фазы:  $F(\tau)$  вместо  $2\mathcal{D}\tau$ .

<sup>1)</sup> Формула (45.4) выражает спектр  $\varphi(\tau)$  в том смысле, в каком спектральное разложение понимается для случайных функций со стационарными приращениями, о которых речь пойдет далее, в § 56.

Согласно формуле (41.16) спектральная плотность колебания (45.1) (по  $\omega > 0$ ) равна

$$g_{\xi}(\omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-F(\tau)/2} [\cos(\omega - \omega_0)\tau + \cos(\omega + \omega_0)\tau] d\tau \approx \\ \approx \frac{A_0^2}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-F(\tau)/2} \cos(\omega - \omega_0)\tau d\tau, \quad (45.7)$$

где интеграл, содержащий  $\cos(\omega + \omega_0)\tau$ , отброшен ввиду его малости. Связь между спектрами  $g_{\xi}(\omega)$  и  $g_{\Omega}(\omega)$  оказывается, таким образом, довольно сложной. Если мы захотели бы получить по спектру колебания  $\xi(t)$  спектр девиации его частоты  $\Omega(t)$ , то, согласно (45.4) и (45.7), надо было бы решать нелинейное интегральное уравнение

$$g_{\xi}(\omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \int_0^{\infty} g_{\Omega}(u) \frac{1 - \cos u\tau}{u^2} du \right\} \cos(\omega - \omega_0)\tau d\tau. \quad (45.8)$$

Мы не будем пытаться решать эту сложную задачу, а обратимся к тем результатам, которые можно извлечь из (45.7) или (45.8) в некоторых предельных случаях. Рассмотрим прежде всего выражение (45.4) для среднего квадрата набег фазы.

Введем средний квадрат флуктуаций  $\Omega(t)$ :

$$\overline{\Omega^2} = \int_0^{\infty} g_{\Omega}(\omega) d\omega, \quad (45.9)$$

и предположим сначала, что  $\Omega(t)$  обладает некоторым временем корреляции  $\tau_{\Omega}$ , так что  $g_{\Omega}(\omega)$  заметно отличается от нуля лишь до  $\omega\tau_{\Omega} \sim 1$ . Рассмотрим два следующих крайних случая:

1. Пусть  $\overline{\Omega^2}\tau_{\Omega}^2 \gg 1$ , т. е. частота колебания (45.1) испытывает *большие и медленные* (долго-коррелированные) уходы. Иначе можно сказать, что «высота»  $\overline{\Omega^2}\tau_{\Omega}$  спектра  $g_{\Omega}(\omega)$  гораздо больше его ширины  $1/\tau_{\Omega}$ . Если допустить, что для  $g_{\xi}(\omega)$  в этом случае существенны только  $\tau \ll \tau_{\Omega}$  (т. е.  $\omega\tau \ll 1$ ), то можно положить в (45.4)  $1 - \cos \omega\tau \approx \omega^2\tau^2/2$ , и тогда

$$F(\tau) \approx \tau^2 \int_0^{\infty} g_{\Omega}(\omega) d\omega = \overline{\Omega^2}\tau^2. \quad (45.10)$$

Согласно (45.7) имеем

$$g_{\xi}(\omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\overline{\Omega^2}\tau^2/2} \cos(\omega - \omega_0)\tau d\tau,$$

откуда видно, что экспонента обрезает подинтегральное выражение на  $\tau^2 \sim 1/\bar{\Omega}^2 \ll \tau_\Omega^2$ , чем и оправдано сделанное допущение  $\tau \ll \tau_\Omega$ . Результат интегрирования:

$$g_\xi(\omega) = \frac{A_0^2}{2\sqrt{2\pi\bar{\Omega}^2}} e^{-(\omega - \omega_0)^2/2\bar{\Omega}^2}, \quad (45.11)$$

т. е. в исследуемом случае получается *гауссова* («колокольная») форма спектральной линии, характерная, например, для доплеровского уширения оптических спектральных линий. Полуширина на уровне  $1/e$  от максимума в  $\sqrt{2}$  раз превышает стандарт  $\sqrt{\bar{\Omega}^2}$  флуктуаций частоты.

2. Пусть  $\bar{\Omega}^2\tau_\Omega^2 \ll 1$ , т. е. частота колебания (45.1) испытывает *малые* и *быстрые* (коротко-коррелированные) флуктуации («высота»  $\bar{\Omega}^2\tau_\Omega$  спектра  $g_\Omega(\omega)$  мала по сравнению с его шириной  $1/\tau_\Omega$ )<sup>1)</sup>. В этом случае в (45.4) существенны значения  $g_\Omega(\omega)$ , лежащие в интервале главного максимума множителя  $(1 - \cos \omega\tau)/\omega^2$ , т. е. от  $\omega = 0$  до  $\omega \sim 1/\tau$ . Поэтому, если  $g_\Omega(0) \neq 0$  и  $\tau \gg \tau_\Omega$ , получаем

$$F(\tau) \approx 2g_\Omega(0) \int_0^\infty \frac{1 - \cos \omega\tau}{\omega^2} d\omega = \pi g_\Omega(0) \tau, \quad (45.12)$$

т. е. диффузионный закон с коэффициентом диффузии

$$2\mathcal{D} = \pi g_\Omega(0). \quad (45.13)$$

Конечно, этот результат имеет место и в предельном случае дельта-коррелированных флуктуаций  $\Omega(t)$ .

Формула (45.7) дает теперь

$$g_\xi(\omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\mathcal{D}\tau} \cos(\omega - \omega_0)\tau d\tau. \quad (45.14)$$

Экспонента обрезает подинтегральное выражение на  $\tau \sim 1/\mathcal{D}$ , что совместимо со сделанным допущением  $\tau \gg \tau_\Omega$  при условии

$$\mathcal{D}\tau_\Omega = \frac{\pi}{2} g_\Omega(0) \tau_\Omega \ll 1. \quad (45.15)$$

Если спектр  $g_\Omega(\omega)$  спадает с ростом  $\omega$  более или менее монотонно, то, согласно (45.9),  $\bar{\Omega}^2 \approx g_\Omega(0)/\tau_\Omega$  и условие (45.15)

<sup>1)</sup> Этот случай был рассмотрен Н. Винером ([28], лекция 5).



удовлетворено в силу исходного предположения  $\overline{\Omega^2 \tau_\Omega^2} \ll 1$ . Выполнив в (45.14) интегрирование, находим

$$g_\xi(\omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}^2 + (\omega - \omega_0)^2}, \quad (45.16)$$

т. е. форма линии — *резонансная* (лоренцева), какую мы получили в § 42 для «естественной» ширины линии генератора в результате действия на него дельта-коррелированных толчков. Такую же форму имеют спектральные линии в оптике, когда их ширина обусловлена соударениями между атомами, причем времена свободного пробега распределены экспоненциально (пуассоновский процесс). Резонансную форму (но с гораздо меньшей шириной) имеет и естественное уширение оптических спектральных линий, обусловленное конечным временем жизни возбужденного состояния, а в классической трактовке — экспоненциальным затуханием колебаний атомных осцилляторов в результате высвечивания (импульсный процесс с экспоненциальными импульсами).

Оценим форму линии  $g_\xi(\omega)$  в случае малых и быстрых флуктуаций  $\Omega(t)$  несколько точнее. Выделим с этой целью из  $g_\Omega(\omega)$  постоянную часть  $g_\Omega(0)$ . Формула (45.4) дает тогда

$$F(\tau) = 2\mathcal{D}|\tau| + \tilde{F}(\tau),$$

где  $\mathcal{D}$  выражается по (45.13), а функция

$$\tilde{F}(\tau) = 2 \int_0^\infty \frac{g_\Omega(\omega) - g_\Omega(0)}{\omega^2} (1 - \cos \omega\tau) d\omega \quad (45.17)$$

равномерно ограничена:

$$|\tilde{F}(\tau)| \leq 4 \int_0^\infty \frac{|g_\Omega(\omega) - g_\Omega(0)|}{\omega^2} d\omega = M = \text{const.}$$

Таким образом, (45.7) принимает вид

$$g_\xi(\omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\mathcal{D}\tau} e^{-\tilde{F}(\tau)/2} \cos(\omega - \omega_0)\tau d\tau. \quad (45.18)$$

Применим теперь к этому выражению теорему, взаимную (в смысле преобразования Фурье) с теоремой (42.9). Согласно (42.9) спектральная амплитуда интеграла

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(t) x_2(t + \tau) dt$$

равна  $\tilde{I}(\omega) = 2\pi \tilde{x}_1^*(\omega) \tilde{x}_2(\omega)$ , где  $\tilde{x}_{1,2}(\omega)$  — спектральные амплитуды функций  $x_{1,2}(t)$ . Тем же способом нетрудно показать, что в разложении Фурье произведения  $G(t) = x_1^*(t) x_2(t)$ :

$$G(t) = x_1^*(t) x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

спектральная амплитуда  $\tilde{G}(\omega)$  выражается интегралом

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(t) x_2(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_1^*(\Omega) \tilde{x}_2(\Omega + \omega) d\Omega. \quad (45.19)$$

Легко убедиться, что для вещественных и четных функций  $x_{1,2}(t)$  [а согласно (45.4) интересующая нас функция  $F(\tau)$  именно такова] теорема принимает вид

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x_1(t) x_2(t) \cos \omega t dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_1(\Omega) \tilde{x}_2(\Omega + \omega) d\Omega, \quad (45.20)$$

причем

$$\tilde{x}_{1,2}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x_{1,2}(t) \cos \omega t dt. \quad (45.21)$$

Полагая в (45.18)

$$x_1(\tau) = e^{-\tilde{F}(\tau)/2}, \quad x_2(\tau) = \frac{A_0^2}{2} e^{-\mathcal{D}|\tau|},$$

имеем, таким образом,

$$g_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_1(\Omega) \tilde{x}_2(\Omega + \omega - \omega_0) d\Omega, \quad (45.22)$$

где [см. (45.14) и (45.16)]

$$\tilde{x}_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\tilde{F}(\tau)/2} \cos(\omega - \omega_0)\tau d\tau,$$

$$\tilde{x}_2(\omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\mathcal{D}\tau} \cos(\omega - \omega_0)\tau d\tau = \frac{A_0^2 \mathcal{D}}{2\pi [\mathcal{D}^2 + (\omega - \omega_0)^2]}.$$

Рассматривая выше случай 2, мы совсем пренебрегли слагаемым  $\tilde{F}(\tau)$  в формуле для  $F(\tau)$ . Теперь мы допустим, что это слагаемое мало, и учтем его в первом порядке. Используя

(45.17), получаем

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_1(\omega) &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ 1 - \frac{\tilde{F}(\tau)}{2} \right] \cos(\omega - \omega_0) \tau \, d\tau = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ 1 - \int_0^{\infty} \frac{g_{\Omega}(u) - g_{\Omega}(0)}{u^2} \, du \right] \cos(\omega - \omega_0) \tau \, d\tau + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{g_{\Omega}(u) - g_{\Omega}(0)}{u^2} \cos u\tau \cos(\omega - \omega_0) \tau \, d\tau \, du = \\
 &= \left[ 1 - \int_0^{\infty} \frac{g_{\Omega}(u) - g_{\Omega}(0)}{u^2} \, du \right] \delta(\omega - \omega_0) + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{g_{\Omega}(u) - g_{\Omega}(0)}{u^2} [\delta(u + \omega - \omega_0) + \delta(u - \omega + \omega_0)] \, du \approx \\
 &\approx \delta(\omega - \omega_0) + \frac{g_{\Omega}(\omega - \omega_0) - g_{\Omega}(0)}{2(\omega - \omega_0)^2}.
 \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения  $\tilde{x}_{1,2}(\omega)$  в (45.22), надо учесть, что спектр  $\tilde{x}_2(\omega)$  ввиду малости  $\mathcal{D}$  гораздо более узок, чем второе слагаемое в  $\tilde{x}_1(\omega)$ . Поэтому

$$\begin{aligned}
 g_{\xi}(\omega) &= \frac{A_0^2 \mathcal{D}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \delta(\Omega - \omega_0) + \frac{g_{\Omega}(\Omega - \omega_0) - g_{\Omega}(0)}{(\Omega - \omega_0)^2} \right] \frac{d\Omega}{\mathcal{D}^2 + (\Omega + \omega - 2\omega_0)^2} \approx \\
 &\approx \frac{A_0^2}{4} \left\{ \frac{\frac{2}{\pi} \mathcal{D}}{\mathcal{D}^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{g_{\Omega}(\omega - \omega_0) - g_{\Omega}(0)}{(\omega - \omega_0)^2} \right\}. \quad (45.23)
 \end{aligned}$$

При малых расстройках от вершины линии, т. е. при  $|\omega - \omega_0| \sim \mathcal{D}$ , вторым слагаемым можно пренебречь, и мы возвращаемся к резонансной спектральной плотности (45.16). Напротив, при  $|\omega - \omega_0| \gg \mathcal{D}$ , пренебрегая  $\mathcal{D}^2$  в знаменателе первого слагаемого в (45.23) и учитывая (45.13), получаем

$$g_{\xi}(\omega) \approx \frac{A_0^2}{4} \frac{g_{\Omega}(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2}, \quad (45.24)$$

т. е. вдали от вершины, или, как говорят оптики, на «крыльях» спектральной линии, спектр колебания  $\xi(t)$  с точностью до множителя  $A_0^2/4(\omega - \omega_0)^2$  воспроизводит спектр флуктуаций частоты. Если условие  $|F(\tau)| \ll 1$  не выполнено, то спектр колебания  $\xi(t)$  становится сложным и только в другом предельном

случае — медленных и больших флуктуаций — вычисляется просто и имеет, как мы видели, форму гауссовой кривой. Можно, однако, показать, что при достаточно больших  $|\omega - \omega_0|$  формула (45.24) справедлива всегда [26]. Таким образом, исследуя спектр колебания  $\xi(t)$ , т. е.  $g_\xi(\omega)$ , на крыльях линии [на частотах, удаленных от  $\omega_0$  более чем на ширину центральной части или «вершины»  $g_\xi(\omega)$ ], можно получить высокочастотный участок спектра флуктуаций частоты  $\Omega(t)$ .

Заметим в заключение, что приведенный выше анализ предельных форм спектра  $g_\xi(\omega)$  предполагал относительно простой и монотонный ход спектра флуктуаций частоты  $g_\Omega(\omega)$ . Если, например,  $g_\Omega(\omega)$  спадает ступеньками, т. е.  $\Omega(t)$  обладает несколькими отчетливо выраженными временами корреляции, или же  $g_\Omega(\omega)$  имеет достаточно узкий максимум на высокой частоте  $\tilde{\omega}$ , так что  $\psi_\Omega(\tau)$  — осциллирующая функция с «несущей» частотой  $\tilde{\omega}$ , то критерии близости  $g_\xi(\omega)$  к резонансной или гауссовой форме требуют уточнения<sup>1)</sup>. В частности, в указанном случае узкого высокочастотного спектра  $g_\Omega(\omega)$  форма  $g_\xi(\omega)$  не будет гауссовой.

#### § 46. Спектр импульсного процесса с независимыми интервалами

Пуассоновский процесс, у которого вследствие независимости между импульсами безусловная вероятность появления  $\nu$ -го импульса в промежутке  $(t, t + dt)$  совпадает с условной вероятностью того же события при условии, что предшествующие импульсы возникли в какие-то фиксированные моменты  $t_\mu \leq t$  ( $\mu = \nu - 1, \nu - 2, \dots$ ), является, конечно, частным случаем более общего класса импульсных процессов, о которых шла речь в § 12. Как и там, мы ограничимся случаем, когда на вероятность появления  $\nu$ -го импульса влияет только  $(\nu - 1)$ -й импульс, т. е. она зависит лишь от времени  $\tau_{\nu-1}$ , протекшего с момента возникновения  $(\nu - 1)$ -го импульса. Таким образом, длительности интервалов  $\tau_\nu = t_{\nu+1} - t_\nu$  между импульсами независимы между собой.

Рассмотрим принадлежащий к этому классу импульсных процессов с независимыми интервалами процесс вида

$$\zeta(t) = \sum_{\nu} F_{\nu} \left( \frac{t - t_{\nu}}{\theta_{\nu}} \right). \quad (46.1)$$

Относительно входящих в  $\zeta(t)$  случайных функций  $F_{\nu}(\theta)$  и случайных параметров  $\theta_{\nu}$  делаются следующие предположения.

<sup>1)</sup> См. [26], а также [29, 30].

1. Форма импульсов, описываемая случайными функциями  $\{F_v(\theta)\}$ , длительности импульсов  $\{\theta_v\}$  и интервалы между импульсами  $\tau_v = t_{v+1} - t_v$  независимы между собой. Заметим, что при случайных функциях  $F_v(\theta)$ , вообще говоря, не обязательно вводить отдельный параметр  $\theta_v$ , но для дальнейшего такое выделение независимых от  $\{F_v(\theta)\}$  параметров  $\{\theta_v\}$  целесообразно.

2. Известны одномерные и двумерные функции распределения случайных функций  $F_v(\theta)$ , интервалов между импульсами  $\omega_\tau(\tau) d\tau$  и длительностей импульсов  $\omega_\nu(\theta) d\theta$ , причем *все* эти распределения *не зависят от  $v$* .

3. Распределение вероятности возникновения какого-либо одного из импульсов, скажем нулевого (момент  $t_0$ ), в любом временном интервале  $(-T/2, T/2)$  равномерно, т. е. имеет вид  $dt_0/T$ . Это значит, что все реализации с какими-то фиксированными длинами интервалов  $\tau_v$ , но сдвинутые относительно  $t = 0$  на отрезок  $t_0$ , заключенный в  $(-T/2, T/2)$ , равновероятны. Без этого процесс не был бы стационарным.

Очевидно,

$$\begin{aligned} t_v &= t_0 + (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_v - t_{v-1}) = \\ &= t_0 + \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{v-1}, \end{aligned} \quad (46.2)$$

так что

$$t_\mu - t_\nu = \begin{cases} -(\tau_{\nu-1} + \tau_{\nu-2} + \dots + \tau_\mu) & \text{при } \mu < \nu, \\ \tau_{\mu-1} + \tau_{\mu-2} + \dots + \tau_\nu & \text{при } \mu > \nu, \end{cases} \quad (46.3)$$

Эта постановка задачи, а также ее решение, при котором сразу ищется спектральная плотность  $g(\omega)$ , а не функция корреляции (здесь этот путь оказывается проще), были даны Я. И. Хургиным [31] для случая детерминированной формы импульсов  $F(t)$ . Существенная особенность развитого им общего подхода к теории случайных импульсных процессов состоит в том, что в основу исследования полагаются не статистические характеристики мгновенных значений  $\xi(t)$  (т. е. не многомерные функции распределения), а вероятностное описание поведения процесса вдоль оси времени — распределения длительностей импульсов, интервалов между ними и т. п.

С процессами типа (46.1) приходится иметь дело, например, в том случае, когда импульсы формируются при помощи выбросов флуктуационного шума над некоторым порогом<sup>1)</sup>, а также в задачах о флуктуациях в импульсных автогенераторах (см. ниже).

<sup>1)</sup> Выбросы стационарного нормального шума дают при повышении порога пуассоновский процесс только в том случае, если для функции корреляции нормального шума выполнены определенные условия (см. [32]).

Напишем спектральную амплитудную плотность отрезка процесса (46.1) в достаточно длинном интервале  $(-T/2, T/2)$ :

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\nu} \left( \frac{t-t_{\nu}}{\vartheta_{\nu}} \right) e^{-i\omega t} dt,$$

где суммирование распространяется на (случайное) число импульсов  $n$ , полностью охваченных интервалом  $(-T/2, T/2)$ . Если воспользоваться функцией  $\tilde{F}_{\nu}(\alpha)$ , сопряженной по Фурье с  $F_{\nu}(\theta)$ , то

$$c(\omega) = \sum_{\nu=1}^n \vartheta_{\nu} \tilde{F}_{\nu}(\omega \vartheta_{\nu}) e^{-i\omega t_{\nu}}.$$

Учитывая при вычислении функции корреляции  $\overline{c(\omega)c^*(\omega')} = g_B(\omega)\delta(\omega-\omega')$  взаимную независимость случайных параметров  $\vartheta_{\nu}$ ,  $t_{\nu}$  и случайной функции  $F_{\nu}$  (а значит, и ее спектральной амплитудной плотности  $\tilde{F}_{\nu}$ ), находим

$$g_B(\omega)\delta(\omega-\omega') = \sum_{\nu, \mu=1}^n \overline{\vartheta_{\nu}\vartheta_{\mu} \langle \tilde{F}_{\nu}(\omega\vartheta_{\nu}) \tilde{F}_{\mu}^*(\omega'\vartheta_{\mu}) \rangle} \cdot e^{i(\omega't_{\mu}-\omega t_{\nu})}, \quad (46.4)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по ансамблю реализаций  $\tilde{F}_{\nu}$ , а чертой сверху — усреднение по распределениям случайных величин  $\vartheta_{\nu}$  и  $t_{\nu}$ .

Так как момент  $t_0$  распределен в интервале  $(-T/2, T/2)$  равномерно, имеем, согласно (46.2),

$$\begin{aligned} e^{i(\omega-\omega')t_{\nu}} &= e^{i(\omega-\omega')(\tau_0 + \dots + \tau_{\nu-1})} \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(\omega-\omega')t_0} dt_0 = \\ &= e^{i(\omega-\omega')(\tau_0 + \dots + \tau_{\nu-1})} \cdot \frac{\sin(\omega-\omega')T/2}{(\omega-\omega')T/2} \rightarrow \frac{2\pi}{T} \delta(\omega-\omega'), \end{aligned}$$

причем последняя замена допустима при  $T \rightarrow \infty$ , что в дальнейшем и будет сделано. Имеем, далее,

$$e^{i(\omega't_{\mu}-\omega t_{\nu})} = e^{i\omega'(t_{\mu}-t_{\nu})} e^{i(\omega'-\omega)t_{\nu}} = e^{i\omega(t_{\mu}-t_{\nu})} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega-\omega'), \quad (46.5)$$

где в множителе при  $\delta(\omega-\omega')$  мы положили, конечно,  $\omega' = \omega$ . Подставив (46.5) в (46.4) и отбросив слева и справа  $\delta(\omega-\omega')$ , получаем

$$g_B(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{\nu, \mu=1}^n \overline{\vartheta_{\nu}\vartheta_{\mu} \langle \tilde{F}_{\nu}(\omega\vartheta_{\nu}) \tilde{F}_{\mu}^*(\omega\vartheta_{\mu}) \rangle} \cdot e^{i\omega(t_{\mu}-t_{\nu})}.$$

Если ввести теперь обозначения

$$\begin{aligned} \overline{\vartheta^2 \langle |\tilde{F}(\omega\vartheta)|^2 \rangle} &= \int_0^\infty \vartheta^2 \langle |\tilde{F}(\omega\vartheta)|^2 \rangle \omega_\vartheta(\vartheta) d\vartheta \equiv K(\omega), \\ \overline{\vartheta \langle \tilde{F}(\omega\vartheta) \rangle} &= \int_0^\infty \vartheta \langle F(\omega\vartheta) \rangle \omega_\vartheta(\vartheta) d\vartheta \equiv H(\omega) \end{aligned} \quad (46.6)$$

и выделить из суммы по  $\mu$  в формуле для  $g_B(\omega)$  члены с  $\mu \geq \nu$ , то выражение для  $g_B(\omega)$  примет вид

$$g_B(\omega) = \frac{2\pi}{T} \left\{ nK(\omega) + |H(\omega)|^2 \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu \neq \nu} e^{i\omega(t_\mu - t_\nu)} \right\}. \quad (46.7)$$

Но согласно (46.3)

$$e^{i\omega(t_\mu - t_\nu)} = \begin{cases} e^{-i\omega(\tau_{\nu-1} + \tau_{\nu-2} + \dots + \tau_\mu)} & (\mu < \nu), \\ e^{i\omega(\tau_{\mu-1} + \tau_{\mu-2} + \dots + \tau_\nu)} & (\mu > \nu), \end{cases}$$

причем интервалы, суммы которых стоят в показателях, по условию взаимно независимы. Поэтому, вводя характеристическую функцию интервала между импульсами

$$\varphi(\omega) = \overline{e^{i\omega\tau}} = \int_0^\infty e^{i\omega\tau} \omega_\tau(\tau) d\tau, \quad (46.8)$$

имеем

$$\overline{e^{i\omega(t_\mu - t_\nu)}} = \begin{cases} [\varphi^*(\omega)]^{\nu-\mu} & (\mu < \nu), \\ [\varphi(\omega)]^{\mu-\nu} & (\mu > \nu) \end{cases}$$

и, следовательно, всюду, где  $\varphi(\omega) \neq 1$ , т. е. заведомо за исключением точки  $\omega = 0$ ,

$$\sum_{\nu=1}^n \left( \sum_{\mu=1}^{\nu-1} + \sum_{\mu=\nu+1}^n \right) \overline{e^{i\omega(t_\mu - t_\nu)}} = 2n \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} - 2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega) [1 - \varphi^n(\omega)]}{[1 - \varphi(\omega)]^2}.$$

При  $T \rightarrow \infty$  случайное число  $n$  импульсов в интервале  $T$  в подавляющем большинстве случаев тоже будет неограниченно возрастать (в среднем — пропорционально  $T$ ). Имея в виду этот предельный переход, можно удерживать только первый член в правой части. Формула для  $g_B(\omega) = g(\omega)$  (напомним, что точку  $\omega = 0$  мы исключаем) дает тогда

$$g(\omega) = \frac{2\pi n}{T} \left\{ K(\omega) + 2 |H(\omega)|^2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \right\}.$$

Эта спектральная плотность соответствует, конечно, *условному* среднему при условии, что в интервале  $T$  было именно  $n$  импульсов, и требует дальнейшего усреднения по случайному параметру  $n$ . Но  $\bar{n} = T/\bar{\tau}$ , где  $\bar{\tau}$  — средняя продолжительность интервала между импульсами, обратная среднему числу импульсов  $n_1$  в единицу времени ( $\bar{\tau} = 1/n_1$ ):

$$\bar{\tau} = \frac{1}{n_1} = \int_0^{\infty} \tau \omega_{\tau}(\tau) d\tau. \quad (46.9)$$

Поэтому окончательно<sup>1)</sup>:

$$g(\omega) = 2\pi n_1 \left\{ K(\omega) + 2|H(\omega)|^2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \right\}. \quad (46.10)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Если случайные функции  $F_{\nu}(\theta)$  заданы как детерминированные функции  $F$  от  $\theta$  и от  $m$ -мерной случайной величины  $\mathbf{a}_{\nu}$ :

$$F_{\nu}(\theta) = F(\theta, \mathbf{a}_{\nu}),$$

то изменится только смысл угловых скобок в формулах (46.6): их надо понимать теперь как усреднение по распределению  $\omega_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) d\mathbf{a}$  случайного вектора  $\mathbf{a}_{\nu}$ :

$$\begin{aligned} \langle |\tilde{F}(\omega\theta, \mathbf{a})|^2 \rangle &= \int |\tilde{F}(\omega\theta, \mathbf{a})|^2 \omega_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) d\mathbf{a}, \\ \langle \tilde{F}(\omega\theta, \mathbf{a}) \rangle &= \int \tilde{F}(\omega\theta, \mathbf{a}) \omega_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) d\mathbf{a}, \end{aligned} \quad (46.11)$$

а сама трансформанта Фурье  $\tilde{F}$  от  $F$  в этом случае, конечно, тоже детерминирована.

Если имеет место еще более частный случай, когда  $\mathbf{a}_{\nu}$  — одномерная случайная величина, имеющая смысл «амплитуды» детерминированного импульса:

$$F(\theta, \mathbf{a}_{\nu}) = a_{\nu} F(\theta),$$

то, считая для простоты  $a_{\nu}$  вещественным параметром и обозначая

$$\bar{a}_{\nu} = a, \quad D[a_{\nu}] = \bar{a}_{\nu}^2 - a^2 = \sigma^2, \quad (46.12)$$

получаем из (46.11)

$$\begin{aligned} \langle |\tilde{F}(\omega\theta, \mathbf{a})|^2 \rangle &= |\tilde{F}(\omega\theta)|^2 \int a^2 \omega_{\mathbf{a}}(a) da = (a^2 + \sigma^2) |F(\omega\theta)|^2, \\ \langle \tilde{F}(\omega\theta, \mathbf{a}) \rangle &= \tilde{F}(\omega\theta) \int a \omega_{\mathbf{a}}(a) da = a \tilde{F}(\omega\theta). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Более корректный переход к (46.10) см. в [31].



Соответственно формулы (46.6) принимают вид

$$K(\omega) = (a^2 + \sigma^2) \int_0^{\infty} \vartheta^2 |\tilde{F}(\omega\vartheta)|^2 \omega_{\vartheta}(\vartheta) d\vartheta \equiv (a^2 + \sigma^2) K_1(\omega), \quad (46.13)$$

$$H(\omega) = a \int_0^{\infty} \vartheta \tilde{F}(\omega\vartheta) \omega_{\vartheta}(\vartheta) d\vartheta \equiv aH_1(\omega),$$

так что спектральная плотность (46.10) будет

$$g(\omega) = 2\pi n_1 \left\{ \sigma^2 K_1(\omega) + a^2 \left[ K_1(\omega) + 2 |H_1(\omega)|^2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \right] \right\}. \quad (46.14)$$

Различные факторы в этом выражении весьма удобным образом расчленены. Через случайные «амплитуды»  $a_v$  вошли параметры  $a^2$  и  $\sigma^2$ . Случайные интервалы  $\tau_v$  между импульсами характеризуются величиной  $n_1$  и функцией  $\varphi(\omega)$ . Наконец, случайные длительности  $\vartheta_v$  самих импульсов отражены в  $K_1(\omega)$  и  $H_1(\omega)$ . Если, например, все импульсы одинаковы по высоте ( $\sigma^2 = 0$ ), то

$$g(\omega) = 2\pi n_1 a^2 \left[ K_1(\omega) + 2 |H_1(\omega)|^2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \right]. \quad (46.15)$$

Если, сверх того, постоянна и длительность импульсов  $\vartheta_v = \vartheta_0$ , так что  $\omega_{\vartheta}(\vartheta) = \delta(\vartheta - \vartheta_0)$ , то, согласно (46.13),

$$K_1(\omega) = |H_1(\omega)|^2 = \vartheta_0^2 |\tilde{F}(\omega\vartheta_0)|^2$$

и (46.15) принимает вид (46.16)

$$g(\omega) = 2\pi n_1 a^2 K_1(\omega) \left[ 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \right].$$

В частном случае пуассоновского процесса, когда распределение интервалов между импульсами экспоненциально:

$$\omega_{\tau}(\tau) = n_1 e^{-n_1 \tau},$$

характеристическая функция (46.8) есть

$$\varphi(\omega) = \frac{n_1}{n_1 - i\omega},$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Re} \frac{\varphi}{1 - \varphi} = 0.$$

Тогда (46.14) дает

$$g(\omega) = 2\pi n_1 (\sigma^2 + a^2) K_1(\omega), \quad (46.17)$$

что совпадает с выражением (42.13), соответствующим теореме Кембелла (11.6) [следует учесть, что в (42.13) длительности

импульсов фиксированы, а кроме того,  $F(\omega)$  — спектральная амплитудная плотность по *размерной* частоте  $\omega$ , в отличие от плотности  $F(\omega\theta)$  в (46.6)].

Возьмем теперь для  $\tau$  гамма-распределение, которым мы воспользовались ранее в § 12 (пример 1):

$$\omega_\tau(\tau) = \frac{\kappa^\alpha \tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\kappa\tau}.$$

Здесь  $\kappa/\alpha = n_1$  — густота импульсов и, в частности,  $\kappa = n_1^\alpha$  — их густота при  $\alpha = 1$ , т. е. при отсутствии корреляции между моментами их возникновения (пуассоновский процесс). Напомним, что при  $\alpha < 1$  корреляция «притягательная», а при  $\alpha > 1$  — «отталкивательная», т. е. в первом случае импульс повышает вероятность появления последующего импульса, а во втором — понижает. Для характеристической функции (46.8) при условии  $\alpha > 0$  находим

$$\varphi(\omega) = \frac{\kappa^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} e^{-(\kappa-i\omega)\tau} d\tau = \frac{1}{(1-i\omega/\kappa)^\alpha},$$

что дает

$$\operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1-\varphi(\omega)} = \frac{R^\alpha \cos \alpha\psi - 1}{R^{2\alpha} - 2R^\alpha \cos \alpha\psi + 1}, \quad R = \frac{1}{\cos \psi} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2}.$$

Здесь  $\psi$  меняется от нуля при  $\omega = 0$  до  $\pi/2$  при  $|\omega| = \infty$ . Если  $\alpha$  настолько мало, что  $\alpha\psi \ll \pi/2$ , то

$$\operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1-\varphi(\omega)} \approx \frac{\ln R}{(\psi^2 + \ln^2 R) \alpha},$$

т. е. второй член в (46.14) будет велик. Напротив, при  $\alpha \rightarrow \infty$  он будет очень мал, так как в этом случае

$$\operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1-\varphi(\omega)} \approx \frac{\cos \alpha\psi}{R^\alpha}.$$

Обратимся теперь к вопросу о спектре импульсных автоколебаний.

В генераторах периодических импульсов случайные воздействия могут смещать моменты возникновения импульсов. Если время корреляции этих воздействий мало по сравнению с периодом следования импульсов, то на сдвиг  $\nu$ -го импульса может повлиять, кроме случайного толчка в момент  $t_\nu$ , только время  $\tau_\nu = t_\nu - t_{\nu-1}$ , протекшее с момента возникновения предыдущего ( $\nu-1$ )-го импульса. Продолжительности же соседних интервалов, очевидно, не связаны между собой. Таким

образом, импульсные автоколебания вполне укладываются в рассмотренную схему<sup>1)</sup>.

Отклонения  $\tau_v$  от среднего значения  $\tau_0$  обычно невелики, т. е.  $\omega_\tau(\tau)$  — острая функция, сосредоточенная около  $\tau_0$ . Разлагая  $e^{i\omega\tau}$  около  $e^{i\omega\tau_0}$  по степеням  $\tau - \tau_0$ , получаем

$$\varphi(\omega) = \left[ 1 - \frac{\omega^2\beta^2}{2} + o(\omega^2\beta^2) \right] e^{i\omega\tau_0},$$

где  $\beta^2 = \overline{(\tau - \tau_0)^2}$  — дисперсия интервалов между импульсами. Соответственно

$$\operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \approx \frac{\left(1 - \frac{\omega^2\beta^2}{2}\right) \left(\cos \omega\tau_0 - 1 + \frac{\omega^2\beta^2}{2}\right)}{\left(\frac{\omega^2\beta^2}{2}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{\omega^2\beta^2}{2}\right) (\cos \omega\tau_0 - 1)}.$$

Эта величина имеет острые максимумы на гармониках частоты  $\omega_0 = 2\pi/\tau_0$ . При  $\omega = n\omega_0$  и при  $(n\omega_0\beta)^2 \ll 1$  имеем

$$2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \approx \left(\frac{2}{n\omega_0\beta}\right)^2 \gg 1,$$

в то время как между значениями  $\omega = n\omega_0$  при том же условии  $(n\omega_0\beta)^2 \ll 1$  имеем

$$2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \approx -1.$$

Полагая  $\omega = n\omega_0 + \delta$ , где  $\delta$  мало по сравнению с  $\omega_0$ , нетрудно убедиться, что в окрестности  $n$ -й гармоники

$$2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \approx \frac{(n\omega_0\beta)^2 - (\tau_0\delta)^2}{(n^2\omega_0^2\beta^2/2) + (\tau_0\delta)^2}.$$

Таким образом, полуширина всплеска на уровне половины от максимума (рис. 40, а) есть

$$\delta_1 = (n\omega_0\beta)^2/2\tau_0,$$

а на уровне нулевого значения

$$\delta_2 = n\omega_0\beta/\tau_0.$$

В случае коротких импульсов функции  $H_1(\omega)$  и  $K_1(\omega)$  меняются на интервалах  $\omega_0$  между гармониками медленно. Поэтому вблизи  $\omega = n\omega_0$  ход спектральной плотности (46.14) будет определяться главным образом поведением члена  $\operatorname{Re} \frac{\varphi}{1 - \varphi}$

<sup>1)</sup> На это указал Г. С. Горелик (см. [31], а также работу [33], где для конкретной схемы импульсного генератора получена дисперсия интервалов  $\tau$ , обусловленная дробовым током ламп и тепловым шумом сеточных сопротивлений).

и спектр будет иметь вид, показанный на рис. 40, б. Разумеется, с ростом  $n$  «дискретные» линии будут становиться все ниже и шире (заметим, что  $\delta_1$  растет быстрее  $\delta_2$ ) и на достаточно высоких гармониках линейчатая структура размажется.

В рассмотренном процессе длительности импульсов  $\vartheta_v$  были независимы от интервалов  $\tau_v$  между ними. Часто представляет интерес другая постановка задачи, необходимая, в частности, тогда, когда речь идет о непрерывных автоколебаниях в сильно нелинейных системах, т. е. о несинусоидальных колебаниях с

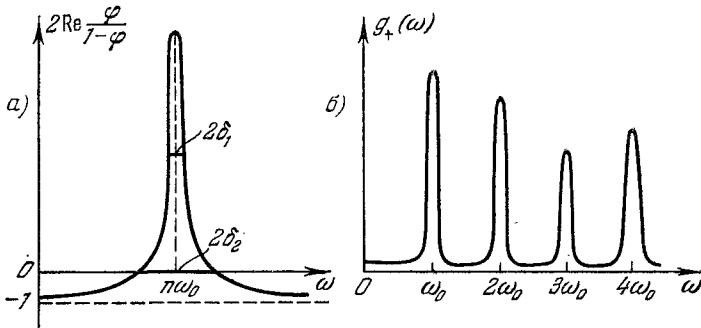


Рис. 40.

флуктуирующим «периодом» [34]. При определенной идеализации такой квазипериодический процесс можно привести к последовательности импульсов, которые *вплотную примыкают друг к другу*, т. е. их случайные длительности *равны* интервалам между импульсами:

$$\vartheta_v = \tau_v = t_{v+1} - t_v.$$

Таким образом, здесь нет независимого параметра  $\vartheta_v$  с его функцией распределения  $\omega_\vartheta(\vartheta)$ . Ограничимся при этом заданием формы импульсов при помощи *детерминированной* функции  $F(\theta, \mathbf{a}_v)$ , где  $\mathbf{a}_v$  — случайный вектор:

$$\xi(t) = \sum_v F\left(\frac{t-t_v}{\tau_v}, \mathbf{a}_v\right). \quad (46.18)$$

Различие между процессами (46.1) и (46.18) иллюстрирует рис. 41.

Спектр процесса (46.18) можно найти тем же способом, что и в рассмотренном случае [35]. Существенное отличие будет лишь в том, что в (46.18) уже нельзя отдельно усреднять функции от  $\vartheta_v$  и от  $\tau_v$ , поскольку  $\vartheta_v = \tau_v$ . Поэтому приходится

ввести, кроме функций (46.6), имеющих, согласно (46.11), вид

$$K(\omega) = \int_0^{\infty} \tau^2 \langle |\tilde{F}(\omega\tau, \mathbf{a})|^2 \rangle \omega_{\tau}(\tau) d\tau, \quad (46.19)$$

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} \tau \langle \tilde{F}(\omega\tau, \mathbf{a}) \rangle \omega_{\tau}(\tau) d\tau$$

(угловые скобки — усреднение по распределению  $\mathbf{a}$ ), еще функцию

$$I(\omega) = \int_0^{\infty} \tau \langle \tilde{F}(\omega\tau, \mathbf{a}) \rangle e^{i\omega\tau} \omega_{\tau}(\tau) d\tau. \quad (46.20)$$

Следует заметить, что в рассматриваемом случае совпадения длительности импульса с интервалом между импульсами надо

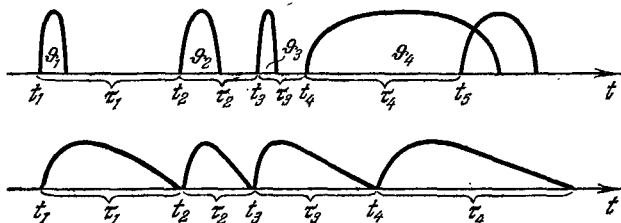


Рис. 41.

вычислять спектральную амплитуду  $\tilde{F}(\alpha, \mathbf{a})$ , полагая, что по безразмерной переменной  $\theta = t/\tau$  функция  $F(\theta, \mathbf{a})$  отлична от нуля в интервале фиксированной (единичной) длины:

$$\tilde{F}(\alpha, \mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 F(\theta, \mathbf{a}) e^{-i\alpha\theta} d\theta. \quad (46.21)$$

Спектральная плотность процесса (46.18) выражается через  $K$ ,  $H$  и  $I$  следующим образом:

$$g(\omega) = 2\pi n_1 \left\{ K(\omega) + 2 \operatorname{Re} \frac{I(\omega) H^*(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \right\}. \quad (46.22)$$

В частности, если  $\mathbf{a}$  — одномерная величина («амплитуда» импульсов):

$$\tilde{F}(\omega\tau, \mathbf{a}) = a\tilde{F}(\omega\tau),$$

то с учетом (46.12) получаем

$$g(\omega) = 2\pi n_1 \left\{ (a^2 + \sigma^2) K_1(\omega) + 2a^2 \operatorname{Re} \frac{I_1(\omega) H_1^*(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \right\}, \quad (46.23)$$

где

$$K_1(\omega) = \overline{\tau^2 |\tilde{F}(\omega\tau)|^2}, \quad H_1^*(\omega) = \overline{\tau \tilde{F}(\omega\tau)}, \quad I_1(\omega) = \overline{\tau \tilde{F}(\omega\tau) e^{i\omega\tau}} \quad (46.24)$$

(усреднение по распределению  $\tau$ ). Характер этого спектра в общем такой же, как и в предыдущем случае, и, в частности, все рассуждения о резких выбросах  $g(\omega)$ , получающихся при малом разбросе  $\tau$  около среднего значения  $\tau_0$ , полностью остаются в силе.

Заметим, что в обоих случаях, как это неизбежно должно быть в автономной системе, происходит диффузионный уход «фазы» генератора  $\Phi = \sum_{\nu=0}^N \tau_\nu$  от ее динамического значения  $\bar{\Phi} = N\tau_0$ , отвечающего строгой периодичности импульсов. С учетом взаимной независимости  $\tau_\nu$  имеем

$$\overline{(\Phi - \bar{\Phi})^2} = \sum_{\nu=0}^N \overline{(\tau_\nu - \tau_0)^2} = \beta^2 N,$$

т. е. средний квадратичный набег  $\Phi$  накапливается пропорционально числу периодов.

## § 47. Корреляционная теория когерентности

Хотя неадекватность элементарной концепции полной когерентности и полной некогерентности была понята уже давно (Е. Верде, 1869), эта концепция продержалась в учебниках по оптике до сравнительно недавнего времени. Общая количественная трактовка когерентности была развита, начиная с 50-х годов (Э. Вольф, А. Блан-Лапиерр и др.)<sup>1)</sup>, на основе теории случайных функций и, в частности, корреляционной теории (развернутая теория когерентности рассматривает моменты не только второго, но и высших порядков). Так как речь идет о свойствах *волновых полей* — функций времени и точки пространства, — теория когерентности даже там, где она не выходит за рамки корреляционной теории, должна оперировать со случайными *полями* (пространственно-временная когерентность), к которым мы обратимся только в части II этой книги. Здесь мы затронем лишь вопросы *временной* когерентности, т. е. будем рассматривать случайные колебательные процессы.

Понятие когерентности в равной мере применимо к колебаниям и волнам любой физической природы и любого диапазона частот, так что оптическая терминология здесь вовсе не

<sup>1)</sup> Из многих работ этого направления укажем на [36—42].

обязательна. Что же касается примеров, то, отдавая дань оптике, как той ветви физики, в которой впервые возникло само понятие когерентности, мы часто будем прибегать именно к оптическим интерференционным явлениям.

Рассмотрим один из наиболее простых примеров такого рода — двухщелевой интерферометр Юнга — Релея. Интерферометр состоит из экрана  $B$  с двумя параллельными щелями 1 и 2

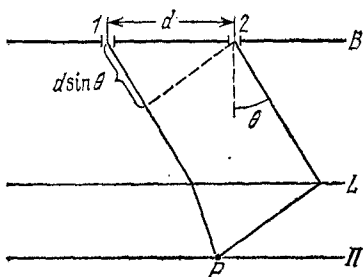


Рис. 42.

и линзы  $L$ , в главной фокальной плоскости которой  $\Pi$  наблюдается интерференционная картина (рис. 42)<sup>1)</sup>. Заметим, что линзы можно и не ставить, а рассматривать интерференцию «на бесконечности», т. е. на расстояниях  $R \gg d^2/\lambda$ , где  $d$  — расстояние между щелями,  $\lambda$  — длина световой волны (так называемая фраунгоферова зона). Щели мы будем считать настолько узкими, что изменений амплитуды и фазы па-

дающей на них волны по их ширине можно не учитывать, описывая поле на щелях просто двумя колебаниями — на первой щели  $\xi_1(t)$  и на второй  $\xi_2(t)$ . Линза предполагается идеальной, и ее конечная апертура тоже не учитывается.

Волны, распространяющиеся из щелей, можно представить в виде суперпозиции бегущих и так называемых неоднородных плоских волн. Последние не участвуют в переносе энергии и экспоненциально ослабевают с удалением от экрана  $B$ , спадавая практически до нуля на расстояниях порядка  $\lambda$ . Те из бегущих волн, которые распространяются от обеих щелей под одним и тем же углом  $\theta$ , фокусируются линзой в соответствующей точке  $P$  на плоскости  $\Pi$ . Таким образом, колебания  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  складываются в точке  $P$ , причем одно из них запаздывает на время  $\tau = d \sin \theta/c$ , где  $c$  — скорость света.

Запишем результирующее колебание в точке  $P$ :

$$\xi(t, \tau) = \xi_1(t + \tau) + \xi_2(t),$$

<sup>1)</sup> В этом интерферометре происходит «деление волнового фронта» в отличие от приборов, создающих две (или более) интерферирующие волны из одной посредством частичного отражения и пропускания («деление амплитуды»). В звездном интерферометре Майкельсона роль щелей играют разнесенные зеркала, а в радиоинтерферометрах — разнесенные антенны. В связи с вопросами когерентности интерферометр Юнга — Релея еще в 1950 г. рассматривал Г. С. Горелик, а затем Б. Томсон и Э. Вольф [43]. Аналогичная дискуссия о соотношении между полосой радиосигнала и диаграммой направленности была проведена Х. Нодведтом [44].

через аналитические сигналы

$$\xi_j(t) = \frac{1}{2} [\zeta_j(t) + \zeta_j^*(t)], \quad j = 1, 2.$$

Нас интересует распределение *интенсивности* (освещенности) на плоскости  $\Pi$ , описываемое зависимостью  $\xi^2(t, \tau)$  от координаты  $x \sim \operatorname{tg} \theta$  точки на этой плоскости, т. е. от задержки  $\tau \sim \sin \theta$ , с которой  $x$  однозначно связано. Для мгновенной интенсивности имеем

$$\begin{aligned} \xi^2(t, \tau) &= \frac{1}{4} [\zeta_1(t + \tau) + \zeta_2(t) + \text{к. с.}]^2 = \\ &= \frac{1}{4} [2|\zeta_{1\tau}|^2 + 2|\zeta_2|^2 + 2(\zeta_{1\tau}\zeta_2^* + \zeta_{1\tau}^*\zeta_2)] + \\ &+ [\zeta_{1\tau}^2 + \zeta_{1\tau}^{*2} + \zeta_2^2 + \zeta_2^{*2} + 2(\zeta_{1\tau}\zeta_2 + \zeta_{1\tau}^*\zeta_2^*)]. \end{aligned} \quad (47.1)$$

Очевидно, переход к мгновенной интенсивности идентичен действию квадратичного детектора в радиотехнике. В обоих случаях в  $\xi^2(t, \tau)$  представлены комбинационные частоты второго порядка — суммарные (в частности, удвоенные) и разностные (в частности, нулевые). Если считать  $\zeta_j(t)$  *модулированными* колебаниями (а далее мы увидим, что для наблюдения интерференции это необходимо):

$$\zeta_j(t) = \mathfrak{A}_j(t) e^{i\omega_j t}, \quad \mathfrak{A}_j(t) = A_j(t) e^{i\varphi_j(t)}, \quad j = 1, 2,$$

то

$$\begin{aligned} \xi^2(t, \tau) &= \frac{1}{4} \{2|\mathfrak{A}_{1\tau}|^2 + 2|\mathfrak{A}_2|^2 + 2[\mathfrak{A}_{1\tau}\mathfrak{A}_2^* e^{i\omega_1\tau + i(\omega_1 - \omega_2)t} + \text{к. с.}] + \\ &+ [\mathfrak{A}_{1\tau}^2 e^{2i\omega_1(t+\tau)} + \mathfrak{A}_2^2 e^{2i\omega_2 t} + 2\mathfrak{A}_{1\tau}\mathfrak{A}_2 e^{i\omega_1\tau + i(\omega_1 + \omega_2)t} + \text{к. с.}]\}. \end{aligned} \quad (47.2)$$

В радиотехнических устройствах используются всевозможные комбинационные частоты, создаваемые нелинейными элементами. В частности, широко используется, как известно, *промежуточная* частота  $\omega_1 - \omega_2$  — разность между частотой  $\omega_1$  интересующего нас колебания и частотой  $\omega_2$  гетеродина. Но в интерферометрах — как в радио, так и в оптике, — речь идет большей частью о колебаниях с одинаковой несущей частотой ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ ), и тогда  $\xi^2(t, \tau)$  принимает вид

$$\begin{aligned} \xi^2(t, \tau) &= \frac{1}{2} [|\mathfrak{A}_{1\tau}|^2 + |\mathfrak{A}_2|^2 + (\mathfrak{A}_{1\tau}\mathfrak{A}_2^* e^{i\omega_0\tau} + \text{к. с.})] + \\ &+ \frac{1}{4} [(\mathfrak{A}_{1\tau}^2 + \mathfrak{A}_2^2 + 2\mathfrak{A}_{1\tau}\mathfrak{A}_2 e^{i\omega_0\tau}) e^{2i\omega_0 t} + \text{к. с.}], \end{aligned} \quad (47.3)$$

т. е. содержит низкочастотную часть спектра (верхняя строка) и модулированное колебание с несущей частотой  $2\omega_0$  (нижняя строка, см. рис. 56).



Разумеется, можно и в оптике рассматривать колебания с разными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , в том числе и с настолько близкими, чтобы разностная частота  $\omega_1 - \omega_2$  находилась, например, в радиодиапазоне СВЧ. На принципиальную возможность и техническую осуществимость такого *гетеродинирования света* впервые — еще до появления лазеров — указал Г. С. Горелик [45]. Однако сейчас мы будем рассматривать обычные условия интерференционных наблюдений, когда  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$  и  $\xi^2(t, \tau)$  выражается формулой (47.3).

Под интенсивностью понимается при этом *низкочастотная* компонента  $\xi^2(t, \tau)$ , поскольку именно она выделяется при всяком реальном способе наблюдения. Дело в том, что *время наблюдения*  $T$ , даже когда оно очень мало по сравнению с временным масштабом  $\tau_K$  модулирующих функций  $\mathfrak{A}_j(t)$ , всегда гораздо больше периода несущей частоты  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Это относится и к *скользящему усреднению*, которое можно смоделировать операцией

$$\overline{\xi^2(t, \tau)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \xi^2(t, \tau) dt, \quad (47.4)$$

и к *накоплению*, которое отличается от (47.4) только умножением на  $T$  и тем, что под  $t$  понимается некоторый фиксированный момент начала накопления. В оптике, например, скользящее усреднение осуществляет глаз или электрический фильтр после ФЭУ, в радио — видеофильтр. Накопление осуществляют для света фотопластинка, болометр, а в радио — разного рода накопители и интегрирующие схемы. Учитывая сильное неравенство  $T \gg T_0$ , можно считать, что усреднение по периоду  $T_0$  заведомо происходит, и просто включить его в самое *определение* «мгновенной» интенсивности  $I(t, \tau)$ :

$$\begin{aligned} I(t, \tau) &= \overline{\xi_{T_0}^2(t, \tau)} = \frac{1}{2} [|\xi_{1\tau}|^2 + |\xi_2|^2 + 2 \operatorname{Re} (\xi_{1\tau} \xi_2^*)] = \\ &= \frac{1}{2} \{ |\mathfrak{A}_{1\tau}|^2 + |\mathfrak{A}_2|^2 + 2 \operatorname{Re} [\mathfrak{A}_{1\tau} \mathfrak{A}_2^* e^{i\omega_0 \tau}] \}. \end{aligned} \quad (47.5)$$

*Наблюдаемое* же распределение интенсивности представляет собою результат последующего усреднения  $I(t, \tau)$  по времени наблюдения  $T$ :

$$\overline{I_T(t, \tau)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} I(t, \tau) dt, \quad (47.6)$$

и, конечно, всецело зависит в общем случае от соотношения между  $T$  и временным масштабом модуляции  $\tau_K$ .

Мы сосредоточим внимание на явлениях, которые происходят при *случайной* модуляции. Формула (47.5) описывает то-

гда некоторую мгновенную реализацию распределения интенсивности на плоскости  $\Pi$ , т. е. в функции от задержки  $\tau$ .

В подавляющем большинстве интерференционных экспериментов и измерений приходится иметь дело со *стационарными* и *стационарно связанными* колебаниями  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$ . Если эти стационарные процессы удовлетворяют также условию эргодичности второго порядка, то, как мы знаем (§ 20), при увеличении времени наблюдения  $T$  получается такой же результат, как и при усреднении по ансамблю реализаций (47.5), поскольку имеет место сходимость по вероятности:

$$\overline{I_T(t, \tau)} \xrightarrow{\text{по вер.}} \langle I(t, \tau) \rangle, \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

Среднее же статистическое от выражения (47.5), если воспользоваться формулами (38.1) для моментов второго порядка, имеет вид

$$\begin{aligned} I(\tau) \equiv \langle I(t, \tau) \rangle &= \frac{1}{2} [B_1(0) + B_2(0) + 2 \operatorname{Re} B_{12}(\tau)] = \\ &= \frac{1}{2} \{B_{\Re 1}(0) + B_{\Re 2}(0) + 2 \operatorname{Re} [B_{\Re 12}(\tau) e^{i\omega_0\tau}]\}. \end{aligned} \quad (47.7)$$

где  $B$  — моменты модулированных колебаний  $\zeta_i(t)$ , а  $B_{\Re}$  — моменты комплексных амплитуд  $\mathfrak{A}_j(t)$  ( $j = 1, 2$ ).

Заметим, что статистическое среднее от мгновенной интенсивности (47.1) содержит в общем (нестационарном) случае как моменты  $B$ , так и «вторые» моменты  $\bar{B}$  [см. (38.2)]. Однако в рассматриваемом случае стационарных аналитических сигналов моменты  $\bar{B}$  равны нулю<sup>1)</sup>. Таким образом, статистическое усреднение, равносильное временному усреднению по достаточно большому интервалу  $T$ , автоматически включает в себя и усреднение по периоду  $T_0$  несущей частоты.

Очевидно, величины

$$I_{1,2} \equiv \frac{1}{2} B_{1,2}(0) = \frac{1}{2} B_{\Re 1,2}(0)$$

— это интенсивности равномерной засветки, даваемой каждой из щелей 1 и 2 в отдельности. Отклонения от равномерной суммарной освещенности  $I_1 + I_2$  всецело определяются вещественной частью корреляционной функции:

$$B_{12}(\tau) = \langle \zeta_1(t + \tau) \zeta_2^*(t) \rangle = B_{\Re 12}(\tau) e^{i\omega_0\tau} = \langle \mathfrak{A}_1(t + \tau) \mathfrak{A}_2^*(t) \rangle e^{i\omega_0\tau}.$$

Некоррелированные колебания на щелях интерферометра (например, освещение каждой из них волной от своего независимого

<sup>1)</sup> Нетрудно убедиться, что обращается в нуль не только «вторая» автокорреляционная функция стационарного аналитического сигнала [см. (38.11)], но и «вторая» взаимная корреляционная функция двух стационарно связанных сигналов.

источника) не дадут интерференционной картины, т. е. будет полное отсутствие когерентности.

В оптике корреляционную функцию  $B_{12}(\tau)$  теперь принято называть *комплексной функцией когерентности второго порядка* (в данном случае — функцией *временной* когерентности) и обозначать через  $\Gamma^{(2)}(1, 2) \equiv B_{12}(\tau)$ , но, как уже было отмечено, нет, в сущности, никаких оснований для того, чтобы отступать от общей терминологии, принятой в теории случайных функций. Формула (47.7) показывает, что распределение интенсивности на плоскости  $\Pi$  изображает с точностью до постоянной составляющей  $I_1 + I_2$  функцию корреляции интерферирующих колебаний.

Вводя взаимные коэффициенты корреляции для комплексных амплитуд  $\mathfrak{A}_j(t)$  и для высокочастотных колебаний  $\xi_j(t)$ :

$$\begin{aligned} K_{\mathfrak{A}12}(\tau) &= \frac{B_{\mathfrak{A}12}(\tau)}{2\sqrt{I_1 I_2}} = |K_{12}(\tau)| e^{i\Theta_{12}(\tau)}, \\ K_{12}(\tau) &= \frac{B_{12}(\tau)}{2\sqrt{I_1 I_2}} = |K_{12}(\tau)| e^{i[\Theta_{12}(\tau) + \omega_0\tau]}, \end{aligned} \quad (47.8)$$

можно записать (47.7) в виде

$$I(\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |K_{12}(\tau)| \cos[\Theta_{12}(\tau) + \omega_0\tau]. \quad (47.9)$$

Таким образом, как это и должно быть для модулированных колебаний (§ 44), распределение  $I(\tau)$  само представляет собой модулированное колебание: интерференционные полосы повторяются по  $\tau$  с частотой  $\omega_0 + \dot{\Theta}_{12}(\tau) \approx \omega_0$  и вписаны в огибающую  $|K_{12}(\tau)|$ .

В оптике издавна принято характеризовать контрастность интерференционной картины так называемой *видностью* полос. Эта легко измеряемая величина по определению есть

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (47.10)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  — значения интенсивности (освещенности экрана  $\Pi$ ) в соседних максимуме и минимуме. Для модулированных колебаний можно считать, что эти соседние значения  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$ , отвечающие изменению  $\Theta_{12}(\tau) + \omega_0\tau$  на  $\pi$ , соответствуют одному и тому же значению  $|K_{12}(\tau)|$ . Из (47.9) и (47.10) тогда следует, что

$$V(\tau) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |K_{12}(\tau)|, \quad (47.11)$$

т. е. видность с точностью до постоянного множителя совпадает с огибающей  $|K_{12}(\tau)|$ . Отсюда ясно, что коэффициент корреляции представляет собой адекватную и удобную количественную меру когерентности — от полной когерентности ( $|K_{12}| = 1$ ) до

полного ее отсутствия ( $K_{12} = 0$ ). В оптике  $K_{12}(\tau)$  называется *комплексной степенью когерентности*. Вместе с тем интерференция дает предельную наглядную иллюстрацию «соотношения неопределенностей» между шириной интерференционной картины и степенью монохроматичности используемого света, поскольку спектральная плотность этого света тоже непосредственно наблюдается, скажем, при помощи спектроскопа.

Возьмем для простоты случай, когда на щели интерферометра падает нормально плоская волна, так что  $\xi_1(t) = \xi_2(t) = \xi(t)$ . Соответственно  $I_1 = I_2 = I$  и (47.9) принимает вид

$$I(\tau) = 2I \{1 + |K(\tau)| \cos[\Theta(\tau) + \omega_0\tau]\}, \quad (47.12)$$

где  $K(\tau) = |K(\tau)| e^{i\Theta(\tau)}$  — коэффициент *автокорреляции* комплексной амплитуды  $\mathfrak{A}(t)$  колебания  $\xi(t)$ . Согласно (41.21)  $K(\tau)$  и спектральная плотность  $g_\xi(\omega)$  связаны преобразованием Фурье<sup>1)</sup>:

$$K(\tau) = \frac{B(\tau)}{B(0)} = \frac{\int_0^\infty g_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{\int_0^\infty g_\xi(\omega) d\omega}, \quad (47.13)$$

чем и обусловлено «соотношение неопределенностей» (§ 42). В частности, при гауссовой форме спектральной линии (ширины  $\Omega$  на уровне  $1/e$  от максимума, лежащего на частоте  $\omega = \omega_0$ ) огибающая коэффициента корреляции тоже будет гауссовой:

$$K(\tau) = e^{-\Omega^2\tau^2/16 + i\omega_0\tau} \quad (|K(\tau)| = e^{-\Omega^2\tau^2/16}, \Theta(\tau) = 0). \quad (47.14)$$

Лоренцевой форме линии (ширины  $\Omega$  на уровне  $1/2$  от максимума) отвечает экспоненциальная огибающая:

$$K(\tau) = e^{-\Omega|\tau|/2 + i\omega_0\tau} \quad (|K(\tau)| = e^{-\Omega|\tau|/2}, \Theta(\tau) = 0). \quad (47.15)$$

Для прямоугольного спектра<sup>2)</sup>, постоянного в полосе частот ( $\omega_0 - \Omega/2, \omega_0 + \Omega/2$ ), находим

$$K(\tau) = \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{\Omega\tau/2} e^{-i\omega_0\tau} \quad (47.16)$$

$$\left(|K(\tau)| = \left|\frac{\sin(\Omega\tau/2)}{\Omega\tau/2}\right|, \Theta(\tau) = 0 \text{ или } \pi^3\right).$$

<sup>1)</sup> Напомним, что  $g_\xi(\omega) = 2g_+(\omega) = 4g(\omega)$  при  $\omega > 0$  и  $g_\xi(\omega) = 0$  при  $\omega < 0$ , где  $g(\omega)$  — спектральная плотность исходного *вещественного* колебания  $\xi(t)$ , *четная* по  $\omega$ .

<sup>2)</sup> Случай, строго говоря, нереализуемый для колебаний во времени (§ 58).

<sup>3)</sup> В зависимости от знака  $\sin(\Omega\tau/2)$

Видность  $V = |K(\tau)|$  во всех случаях зависит от  $\Omega\tau$ , так что интерференционная картина расширяется по  $\tau$  с уменьшением ширины спектра  $\Omega$  и наоборот. При  $\Omega \rightarrow 0$  (идеальная монохроматичность)  $V = |K| = 1$ , т. е. в нашем идеализированном приборе интерференционные полосы заполняют весь сектор углов  $|\theta| \leq \pi/2$  с постоянной максимальной контрастностью (полная когерентность).

При нормальном падении плоской волны на экран  $B$  видность связана только с монохроматичностью колебания  $\xi(t) = \xi_1(t) = \xi_2(t)$ . В общем случае колебания на разнесенных щелях могут различаться не только задержкой одного из них на время  $\tau$ , поскольку они представляют собой временной ход волнового поля  $\xi(t, \mathbf{r})$  в *несовпадающих* точках пространства:  $\xi_1(t) = \xi(t, \mathbf{r}_1)$ ,  $\xi_2(t) = \xi(t, \mathbf{r}_2)$ . Тем самым, эти колебания (а значит, и видность) зависят от *пространственной структуры* поля, которая в случае точечного источника связана только с его положением, но для протяженного источника определяется еще и статистическими свойствами всей совокупности колебаний, излучаемых его «точечными» элементами. На пространственно-временную структуру поля могут влиять, кроме того, как детерминированные, так и случайные неоднородности среды на пути от источника к интерферометру, а также флуктуации в самом приборе, например флуктуации положения «щелей». Конечно, последний фактор практически исключен в двухщелевом интерферометре Юнга — Релея, но, например, в звездном интерферометре Майкельсона он играет существенную роль, так как речь идет о двух разнесенных на несколько метров зеркалах и пренебрегать вибрациями конструкции уже нельзя. Останемся на некоторых иллюстрациях сказанного.

Пусть плоская волна падает на интерферометр не по нормали к экрану  $B$ , а под достаточно малым углом  $\alpha$  к этой нормали (рис. 43). Плоской можно считать волну и от точечного источника, направление на который дается углом  $\alpha$ , при условии, что этот источник находится во фраунгоферовой зоне ( $R \gg d^2/\lambda$ )<sup>1)</sup>. При наклонном падении запаздывание колебания 1 относительно колебания 2 равно теперь  $\tau - \tau_\alpha$ , где

$$\tau = \frac{d}{c} \sin \theta, \quad \tau_\alpha = \frac{d}{c} \sin \alpha. \quad (47.17)$$

Это приводит, очевидно, к смещению всей интерференционной

<sup>1)</sup> Для ближайшей звезды  $R \approx 4$  свет. года и радиус нулевой зоны Френеля  $\sqrt{\lambda R}$  на волне  $\lambda = 5000$  Å составляет 140 км. Говоря о малости угла  $\alpha$ , мы имеем в виду условие синфазности колебаний поля  $\xi(t, \mathbf{r})$  в пределах ширины  $a$  каждой из щелей. Из рис. 43 видно, что условием такой синфазности является неравенство  $a \ll \lambda/\sin \alpha$ . При той же длине волны и при  $\alpha = 1''$  получаем  $a \ll \lambda/\alpha \approx 10$  м.

картины, так как аргументом в предыдущих формулах будет вместо  $\tau$  разность  $\tau - \tau_\alpha$ .

Если  $\alpha$  — случайная величина, независимая от  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  (скажем,  $\alpha$  — это флуктуации направления прихода волны из-за неоднородностей среды), то усреднение по ансамблю реализаций  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , выполненное в формуле (47.7), будет давать теперь *условное* среднее — среднее при фиксированном  $\alpha$ , например,  $B_{12}(\tau - \tau_\alpha)$ . Безусловная функция корреляции (отметим ее чертой сверху) получится в результате последующего усреднения по распределению  $w_\alpha(\alpha)$  случайной величины  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \overline{B}_{12}(\tau) &= \\ &= \int B_{12}(\tau - \tau_\alpha) w_\alpha(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \tag{47.18}$$

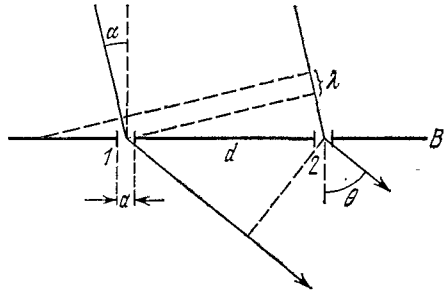


Рис. 43.

где  $\tau_\alpha$  дается формулой (47.17)<sup>1)</sup>. В отсутствие других различий между колебаниями  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  помимо дополнительного сдвига  $\tau_\alpha$ ) надо заменить в формуле (47.18)  $B_{12}$  на функцию автокорреляции  $B$ .

Запишем эту формулу в другом представлении. Пользуясь (47.13) (конечно, с заменой  $\tau$  на  $\tau - \tau_\alpha$ ) и вводя характеристическую функцию  $\varphi_\alpha(u)$  случайного угла  $\alpha$ :

$$w_\alpha(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\alpha(u) e^{-i\alpha u} du,$$

получаем из (47.18)

$$\begin{aligned} \overline{K}(\tau) &= \frac{\overline{B}(\tau)}{\overline{B}(0)} = \\ &= \frac{1}{2\pi \overline{B}(0)} \int_0^\infty g_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\alpha(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega\tau_\alpha + u\alpha)} d\alpha. \end{aligned}$$

Если распределение  $w_\alpha(\alpha)$  достаточно острое и, следовательно,

<sup>1)</sup> Если флуктуации  $\alpha$  происходят не в самом волновом поле, а, например, из-за дрожания интерферометра, то ту же функцию  $\overline{B}_{12}$ , даваемую формулой (47.18), естественно рассматривать как *искаженную* функцию корреляции поля.

существенны лишь столь малые  $\alpha$ , что можно считать  $\sin \alpha \approx \alpha$  и  $\tau_\alpha \approx \frac{d}{c} \alpha$ , то интеграл по  $\alpha$  равен  $2\pi\delta\left(u + \frac{\omega d}{c}\right)$ . После интегрирования по  $u$  это дает

$$\bar{K}(\tau) = \frac{1}{B(0)} \int_0^\infty g_\xi(\omega) \Phi_\alpha\left(-\frac{\omega d}{c}\right) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (47.19)$$

Рассмотрим теперь *протяженный* источник, состоящий из некогерентных (т. е. некоррелированных) «точечных» элементов. Каждый такой элемент, видимый под углом  $\alpha$ , дает плоскую волну, приходящую по направлению  $\alpha$ , причем соответствующее элементарное колебание  $\xi(t, \alpha) d\alpha$  может, вообще говоря, явно зависеть от  $\alpha$  — хотя бы из-за различной светимости разных элементов протяженного источника. Суммарное колебание на  $j$ -й щели ( $j = 1, 2$ ), создаваемое протяженным источником в целом, есть  $\xi(t) = \int \xi(t, \alpha) d\alpha$ , а так как, по предположению, колебания  $\xi_j(t, \alpha)$  дельта-коррелированы по  $\alpha$ , распределение интенсивности в интерференционной картине будет

$$\begin{aligned} I(\tau) &= \frac{1}{2} \left\langle \left| \int [\xi_1(t + \tau - \tau_\alpha, \alpha) + \xi_2(t, \alpha)]^2 d\alpha \right|^2 \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \int \langle |\xi_1(t + \tau - \tau_\alpha, \alpha) + \xi_2(t, \alpha)|^2 \rangle d\alpha = \\ &= \int [I_1(\alpha) + I_2(\alpha) + \operatorname{Re} B_{12}(\tau - \tau_\alpha, \alpha)] d\alpha. \end{aligned} \quad (47.20)$$

Другими словами, интерференционные картины, даваемые некоррелированными «точечными» элементами, сложатся по интенсивности. Пределы интегрирования определяются той областью углов  $\alpha$ , в которой  $I_1(\alpha)$  и  $I_2(\alpha)$  еще отличны от нуля, так что формально эти пределы можно раздвинуть в  $\pm\infty$ .

Так как спектральная плотность тоже зависит от  $\alpha$ :

$$B_{12}(\tau, \alpha) = \int_0^\infty g_{12}(\omega, \alpha) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

можно записать переменную (зависящую от  $\tau$ ) часть интенсивности в (47.20) в виде

$$\begin{aligned} I_{12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} B_{12}(\tau - \tau_\alpha, \alpha) d\alpha = \\ &= \operatorname{Re} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} g_{12}(\omega, \alpha) e^{i\omega(\tau - \tau_\alpha)} d\alpha. \end{aligned} \quad (47.21)$$

Конечно, угол  $\alpha$  теперь не случайная величина, а просто параметр, от которого зависят «элементарные» колебания на щелях. Тем не менее в том частном случае, когда спектральная плотность «факторизуется»:

$$g_{12}(\omega, \alpha) = g_{12}(\omega) w_{\alpha}(\alpha),$$

[т. е. у всех «элементарных» источников одинаковый спектр, а на каждой частоте  $\omega$  — одинаковое распределение  $w_{\alpha}(\alpha)$  светимости по углу], формула (47.21) формально приводится к виду (47.19). Действительно, в этом случае

$$I_{12}(\tau) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} g_{12}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\alpha}(\alpha) e^{-i\omega\alpha} d\alpha.$$

Поскольку  $w_{\alpha}(\alpha) \geq 0$  и всегда можно пронормировать  $w_{\alpha}(\alpha)$  на полной протяженности источника к единице, интеграл по  $\alpha$  (при столь малых размерах источника, что можно считать  $\tau_{\alpha} = \frac{d}{c} \sin \alpha \approx \frac{d}{c} \alpha$ ) совпадает с «характеристической функцией» распределения  $w_{\alpha}(\alpha)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w_{\alpha}(\alpha) e^{-i\omega\tau} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\alpha}(\alpha) e^{-ikd\alpha} d\alpha = \varphi_{\alpha}(-kd), \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

и мы получаем формулу вида (47.19).

Ясно без вычислений, что в случае двух точечных источников, разнесенных на угловое расстояние  $\alpha_0$ :

$$w_{\alpha}(\alpha) = \frac{1}{2} \left[ \delta\left(\alpha - \frac{\alpha_0}{2}\right) + \delta\left(\alpha + \frac{\alpha_0}{2}\right) \right],$$

наихудшая видность получится тогда, когда интерференционные полосы обеих картин сдвинуты на нечетное число угловых полуширин интерференционной полосы. Если же источник заполняет с постоянной яркостью угловой интервал  $(-\alpha_0/2, \alpha_0/2)$ , так что «характеристическая функция» есть

$$\varphi_{\alpha}(u) = \frac{1}{\alpha_0} \int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2} e^{-iu\alpha} d\alpha = \frac{\sin(u\alpha_0/2)}{u\alpha_0/2},$$

то формула (47.19) дает

$$K(\tau) = \frac{1}{B(0)} \int_0^{\infty} g_{\tau}(\omega) \frac{\sin(k d \alpha_0/2)}{k d \alpha_0/2} e^{i\omega\tau} d\omega.$$



При идеальной монохроматичности  $[g_{\tau}(\omega) \sim \delta(\omega - \omega_0)]$  получаем

$$K(\tau) = \frac{\sin(\pi d \alpha_0 / \lambda_0)}{\pi d \alpha_0 / \lambda_0} e^{i \omega_0 \tau}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}. \quad (47.22)$$

Таким образом, видность всей интерференционной картины уменьшается с ростом  $\alpha_0$  или  $d$  по такому же закону (47.16), по какому она спадает в случае точечного источника с ростом ширины  $\Omega$  прямоугольной спектральной полосы.

Аналогичное положение вещей имеет место и в *двумерном* случае, когда источник виден под некоторым *телесным* углом, а интерферометр содержит не щели, а достаточно малые «отверстия» (например, зеркала в звездном интерферометре Майкельсона или зеркальные антенны в радиоастрономическом интерферометре). Для круглого однородного по яркости монохроматического диска с угловым диаметром  $\alpha_0$  видность, выражающаяся через двумерную трансформанту Фурье от распределения яркости, равна

$$V = 2J_1\left(\frac{\pi d \alpha_0}{\lambda_0}\right) / \frac{\pi d \alpha_0}{\lambda_0}, \quad (47.23)$$

где  $J_1$  — бесселева функция первого порядка. Увеличение длины базы  $d$  повышает разрешающую силу по углу  $\alpha_0$ . Первый (наиболее отчетливо выраженный) нуль видности в (47.22) и (47.23) получается соответственно при  $d = \lambda_0 / \alpha_0$  и  $d = 1,22 \lambda_0 / \alpha_0$ .

В первом звездном интерферометре, установленном в 1920 г. на обсерватории Маунт-Вильсон, базу  $d$  можно было увеличить до 6 м, что дает при  $\lambda_0 = 5400 \text{ \AA}$  исчезновение интерференционной картины при  $\alpha_0 \approx 10^{-7} \approx 0,02''$ . Удалось измерить угловые диаметры шести звезд, лежащие в пределах от  $0,02''$  до  $0,05''$ .

Хотя *радиоинтерферометры* работают на волнах гораздо большей длины, они позволяют получать более высокие угловые разрешения, чем в оптических интерферометрах — за счет применения сверхдлинных баз (в сотни и тысячи километров). Например, при  $d = 1000 \text{ км}$  на волне  $\lambda_0 = 1 \text{ см}$  получаем  $\alpha_0 \approx 2 \cdot 10^{-8} \approx 2 \cdot 10^{-3}''$ . Увеличение базы до 10 000 км, что технически осуществимо, уменьшает  $\alpha_0$  еще на порядок. При таких разрешениях радиоинтерферометры позволят решать астрометрические задачи, измерять параллаксы квазаров и пульсаров, измерять угловые диаметры квазаров и внегалактических туманностей и т. п.

Чувствительность к атмосферным флуктуациям фазы световых колебаний и угла прихода световой волны, необходимость исключительной точности изготовления инструмента, а также точности его наведения и слежения — это основные причины, ограничившие возможности звездного интерферометра Майкельсона, измеряющего функцию корреляции высокочастотных

(световых) колебаний. От этих трудностей свободен так называемый *интерферометр интенсивностей*, предложенный Р. Х. Брауном и Р. К. Твиссом в 1954 г. для радиодиапазона [46], а в дальнейшем и для света [47]<sup>1)</sup>. Остановимся на принципе его работы.

Мы рассматривали среднюю интенсивность  $I(\tau)$  интерференционной картины, зависящую от функции корреляции колебаний  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ . Может ли дать какую-либо информацию о степени когерентности колебаний  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  корреляция *мгновенных интенсивностей*  $I_1(t) = |\xi_1(t)|^2$  и  $I_2(t) = |\xi_2(t)|^2$ ? На первый взгляд кажется, что ответ должен быть отрицательным, поскольку эти квадраты модулей уже не содержат фаз колебаний  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ , а только их амплитуды. Тем не менее корреляция между  $I_1(t)$  и  $I_2(t)$  позволяет, как мы сейчас убедимся, судить о корреляции  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ . Заметим, что теперь мы будем рассматривать момент более высокого (четвертого) порядка, т. е. выйдем за рамки корреляционной теории.

Корреляционная функция интенсивностей есть

$$\begin{aligned} \Psi_I(\tau) &= \overline{I_1(t+\tau) I_2(t)} - \overline{I_1(t+\tau)} \cdot \overline{I_2(t)} = \\ &= \langle \xi_1(t+\tau) \xi_1^*(t+\tau) \xi_2(t) \xi_2^*(t) \rangle - I_1 \cdot I_2, \end{aligned}$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — средние интенсивности, а  $\tau$  — по-прежнему относительная временная задержка, обусловленная разностью хода от обеих щелей. Если, как это часто бывает, колебания  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  можно считать *нормальными* случайными функциями, то входящий в формулу для  $\Psi_I(\tau)$  четвертый момент равен сумме попарных произведений вторых моментов (см. задачу 2):

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(t+\tau) \xi_1^*(t+\tau) \xi_2(t) \xi_2^*(t) \rangle &= \\ &= \langle \xi_1(t+\tau) \xi_1^*(t+\tau) \rangle \langle \xi_2(t) \xi_2^*(t) \rangle + \\ &+ \langle \xi_1(t+\tau) \xi_2(t) \rangle \langle \xi_1^*(t+\tau) \xi_2^*(t) \rangle + \\ &+ \langle \xi_1(t+\tau) \xi_2^*(t) \rangle \langle \xi_1^*(t+\tau) \xi_2(t) \rangle = I_1 \cdot I_2 + |\tilde{B}_{12}(\tau)|^2 + |B_{12}(\tau)|^2, \end{aligned}$$

где  $B_{12}(\tau) = \langle \xi_1(t+\tau) \xi_2^*(t) \rangle$  и  $\tilde{B}_{12}(\tau) = \langle \xi_1(t+\tau) \xi_2(t) \rangle$  — «первая» и «вторая» взаимные корреляционные функции (§ 38). Но у стационарно связанных аналитических сигналов  $\tilde{B}_{12}(\tau) = 0$ , и мы получаем для корреляционной функции интенсивностей простое выражение:

$$\Psi_I(\tau) = |B_{12}(\tau)|^2 = I_1 I_2 |K_{12}(\tau)|^2. \quad (47.24)$$

<sup>1)</sup> См. также [48].

Согласно (47.11) измерение  $\psi_I(\tau)$  непосредственно определяет видность  $V(\tau)$ .

Схема интерферометра интенсивностей показана на рис. 44. Фотоэлектрические умножители регистрируют интенсивности световых пучков, т. е. в конечном счете — флуктуации амплитуд.

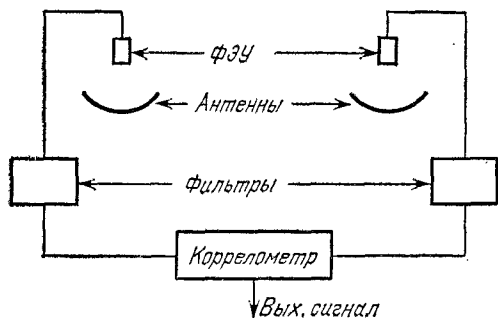


Рис. 44.

Полоса пропускаемых частот определяется теперь электрическими фильтрами, т. е.  $\Omega/2\pi \sim 10^8$  гц (в то время как оптическому фильтру с полосой в 100 Å соответствует  $\Omega/2\pi \sim 10^{13}$  гц). Взяв для оценки прямоугольную полосу, т. е. формулу

$$V(\tau) = \left| \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{\Omega\tau/2} \right|^2,$$

нетрудно убедиться, что разность хода в 30 см ( $\tau = 10^{-9}$  сек) уменьшает видность всего на 2%. Отсюда вытекает легкость получения высокого углового разрешения без исключительной точности изготовления прибора. Вторым преимуществом является именно нечувствительность к фазам самих световых колебаний: важны лишь фазы сравнительно низкочастотных флуктуаций интенсивностей. Поэтому на работе интерферометра практически не сказываются атмосферные флуктуации, при которых колебания углов прихода не превышают 1", а времен прихода —  $10^{-13}$  сек.

К недостаткам прибора относится, во-первых, малая чувствительность: наибольшая звездная величина, еще измеримая за не слишком длительное время экспозиции, определяется шумами на входе коррелятора. Во-вторых, необходима достаточно высокая спектральная плотность (число фотонов на единицу спектрального интервала), которую обеспечивают только горячие звезды.

Укажем в заключение на иное направление в использовании интерференции радиоволн для измерительных целей. Высокая монохроматичность колебаний радиогенераторов, возможность получить большую стабильность их частот (уменьшить технические уходы) и осуществить взаимную синхронизацию разнесенных передатчиков — все это явилось предпосылкой к тому, чтобы распространить использование интерференции на радиодиапазон. В 30-х годах Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси развили различные варианты радиоинтерференционных

методов для измерения скорости распространения радиоволн в реальных условиях (а при известной скорости — для измерения расстояний). При этом были использованы дополнительные возможности радиодиапазона — легкость трансформации частот радиоволн в простых дробных отношениях при ретрансляции этих волн и легкость непосредственной регистрации *разностей фаз* интерферирующих колебаний, т. е. не модуля коэффициента корреляции (видности), а его аргумента  $\omega_0\tau + \Theta_{12}(\tau)$  [см. (47.8)]. Одним из вариантов упомянутых методов является измерение положения приемника при помощи координатной гиперболической «сетки», созданной на местности тремя синхронизированными передатчиками. Все эти методы получили практическое применение в геодезии, картографии, навигации и других областях (см. [49]).

### § 48. Нестационарная интерференция. Корреляция источников колебаний

При стационарных и стационарно связанных колебаниях  $\xi_{1,2}(t)$  интерференционная картина абсолютно устойчива. Она сохраняется при произвольном увеличении времени усреднения (или накопления)  $T$  и описывается — при эргодичности процессов  $\xi_{1,2}(t)$  — статистическим средним от мгновенного распределения интенсивности (47.7). Если же колебания нестационарны или хотя бы нестационарно связаны, то усреднение по ансамблю реализаций уже не совпадает с усреднением по достаточно длительному интервалу времени.

Согласно (47.5) и (47.6) картина, наблюдаемая при некотором времени усреднения  $T$ , описывается выражением

$$\overline{I_T(t, \tau)} = \frac{1}{2T} \int_t^{t+T} \{ |\xi_1(t + \tau)|^2 + |\xi_2(t)|^2 + 2 \operatorname{Re} [\xi_1(t + \tau) \xi_2^*(t)] \} dt. \quad (48.1)$$

Распределение интенсивности по экрану (т. е. в функции от  $\tau$ ) зависит теперь и от текущего времени  $t$ , и от интервала усреднения  $T$ .

Возьмем, например, простой случай двух *разночастотных* гармонических колебаний:  $\xi_1(t) = e^{i\omega_0 t}$ ,  $\xi_2(t) = e^{i(\omega_0 + \Omega)t}$ . Формула (48.1) дает в этом случае

$$\begin{aligned} \overline{I_T(t, \tau)} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [1 + \cos(\Omega t - \omega_0 \tau)] dt = \\ &= 1 + \frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2} \cos\left(\Omega t - \omega_0 \tau + \frac{\Omega T}{2}\right). \end{aligned} \quad (48.2)$$

Мы видим, что полосы, повторяющиеся по  $\tau$  с периодом  $2\pi/\omega_0$ , не стоят на месте, а бегут со скоростью, равной (по  $\tau$ )

$$d\tau/dt = \Omega/\omega_0.$$

Видность этих полос есть  $|\sin(\Omega T/2)/(\Omega T/2)|$ , т. е. определяется произведением времени усреднения  $T$  на частоту биений  $\Omega$ . Видность близка к единице при  $\Omega T \ll 2\pi$ . Смысл этого условия заключается в том, что сдвиг полос за время усреднения  $T$ , равный (по  $\tau$ )  $\frac{d\tau}{dt} T = \frac{\Omega T}{\omega_0}$ , должен быть значительно меньше периода полос  $2\pi/\omega_0$ . В противном случае картина будет смазана, распределение интенсивности станет равномерным. Таким образом, формула (48.2) описывает непрерывный переход от полной когерентности при  $\Omega T \rightarrow 0$  к полной некогерентности при  $\Omega T \rightarrow \infty$ .

Следует подчеркнуть, что при частичной когерентности ( $\Omega T \neq 0$ ) мы наблюдаем *движущиеся* полосы, т. е. суждение о том, имеются ли отступления от равномерной суммарной засветки, вовсе не предполагает обязательной неподвижности картины. Все определяется соотношением между характеристикой прибора (временем  $T$ ) и некогерентностью (в нашем примере — разностью  $\Omega$  двух частот). Для глаза ( $T \sim 0,1$  сек) полосы могут быть не видны, но, скажем, фотоаппарат с экспозицией  $T = 0,01$  сек может их зарегистрировать.

Разумеется, сказанное применимо к любым модулированным колебаниям, как детерминированным, так и случайным. Если

$$\xi_j(t) = A_j(t) e^{i[\omega_0 t + \varphi_j(t)]}, \quad j = 1, 2, \quad (48.3)$$

где  $A_j$  и  $\varphi_j$  мало меняются за период высокой частоты  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , то и разность  $\varphi_{1\tau} - \varphi_2 \equiv \varphi_1(t + \tau) - \varphi_2(t)$  тоже будет медленной функцией  $t$ . Считая для простоты, что  $A_1 = A_2 = 1$  (интерференционная картина особенно чувствительна именно к фазам), и отбрасывая члены, меняющиеся по времени  $t$  с частотой  $2\omega_0$ , получаем для мгновенной интенсивности формулу

$$I(t, \tau) = 1 + \cos(\omega_0 \tau + \varphi_{1\tau} - \varphi_2).$$

В темпе изменения разности  $\varphi_{1\tau} - \varphi_2$  полосы будут «ерзать» и (или) односторонне смещаться с мгновенной скоростью

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_{1\tau}}{\omega_0 + \dot{\varphi}_{1\tau}} \approx \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_{1\tau}}{\omega_0},$$

а условие малости их смещения за время наблюдения  $T$  сведется, естественно, к тому, чтобы изменение  $\varphi_2 - \varphi_{1\tau}$  за время  $T$  было гораздо меньше  $2\pi$ .

Резюмируя, можно сделать вывод, что в общем случае целесообразно связать *само определение* понятия когерентности с временной постоянной прибора. Такое определение является и более общим, и более гибким, так как не предполагает абсолютной неизменности интерференционной картины. Однако если речь идет о хаотической (случайной) модуляции интерферирующих колебаний, то, как всегда в таких случаях, интерес представляют *статистические* характеристики наблюдаемого явления. Разумеется, для их вычисления необходим ансамбль реализаций, получаемых либо в одном и том же интервале времени  $(t, t + T)$  при помощи большого числа одинаковых интерферометров, либо, что, может быть, более реалистично, получаемых на одном интерферометре в последовательные интервалы времени  $(t_i, t_i + T)$  при воспроизведении одних и тех же условий в каждый начальный момент  $t_i$ .

Мы можем либо сначала найти статистическое среднее от (47.1), а потом выполнить усреднение по времени, либо наоборот. В первом случае мы получаем

$$\langle \xi^2(t, \tau) \rangle = \frac{1}{4} \{ 2B_1(t + \tau, t + \tau) + 2B_2(t, t) + 2 \operatorname{Re} B_{12}(t + \tau, t) + [\tilde{B}_1(t + \tau, t + \tau) + \tilde{B}_2(t, t) + 2 \operatorname{Re} \tilde{B}_{12}(t + \tau, t) + \text{к. с.}] \}. \quad (48.4)$$

Входящие сюда «вторые» моменты  $\tilde{B}$  теперь отличны от нуля, но, в отличие от «первых» моментов  $B$ , они содержат колебания с частотой  $2\omega_0$ , например:

$$\tilde{B}_1(t + \tau, t + \tau) = \overline{\mathfrak{A}_{1\tau}^2} e^{2i\omega_0 t}, \quad \tilde{B}_{12}(t + \tau, t) = \overline{\mathfrak{A}_{1\tau} \mathfrak{A}_2} e^{i\omega_0(2t + \tau)}.$$

Поэтому усреднение (48.4) по интервалу  $T \gg T_0 = 2\pi/\omega_0$  практически уничтожит члены с  $\tilde{B}$ , и мы получим

$$\langle \xi(t, \tau) \rangle_T = \frac{1}{2T} \int_t^{t+T} [B_1(t + \tau, t + \tau) + B_2(t, t) + 2 \operatorname{Re} B_{12}(t + \tau, t)] dt. \quad (48.5)$$

Тот же результат получается и при обратной последовательности операций, т. е. при статистическом усреднении формулы (48.1). Наличие или отсутствие интерференционной картины зависит от последнего члена формулы (48.5), т. е. от усредненного по интервалу  $T$  смешанного момента, а контрастность (видность) полос может быть определена аналогично тому, как это было сделано в § 47 для стационарных колебаний. В этом последнем случае все моменты  $B$  не зависят от  $t$ , так что волнистую черту можно просто снять (скользящее усреднение

вообще ничего не меняет, а накопление сводится к умножению на  $T$ )<sup>1)</sup>. Другими словами, формула (48.5) переходит в (47.7).

Остановимся в заключение на «механизме» тех статистических явлений в *источниках* колебаний, которые приводят к некогерентности этих источников. Под источником мы понимаем динамическую систему, в которой — наряду с возможными детерминированными воздействиями и взаимодействиями — имеют место и случайные, причем последние могут принадлежать к принципиально неустраиваемым (напомним естественные флуктуации в автогенераторе, § 28). Характер сил и взаимодействий может быть самым различным. Возможно, что парциальные системы, из которых состоит источник, связаны детерминированным образом, но случайные силы, действующие на парциальные системы, некоррелированы. Тем не менее наличие детерминированной связи может внести взаимную корреляцию в колебания парциальных систем. Примером могут служить связанные осцилляторы, каждый из которых находится под действием силы, не коррелированной с силой, приложенной к другому (см. задачу 15). Может быть и так, что само возбуждение колебаний в парциальных системах обусловлено случайным взаимодействием между ними. Примером являются соударения в газе «атомов»-осцилляторов (см. задачу 11). Разнообразие встречающихся условий очень велико, и вряд ли есть надобность в какой-либо исчерпывающей их классификации.

Мы рассмотрим здесь только одну иллюстрацию того, как утрачивается когерентность излучения (колебаний) двух связанных источников, причем ограничимся в основном качественной стороной дела и по возможности упростим саму постановку вопроса. Речь пойдет о двух связанных *томсоновских автогенераторах*, таких, как рассмотренный в § 28. В отличие от двух связанных осцилляторов (задача 15), т. е. *линейных диссипативных* систем, в которых колебания *поддерживаются* флуктуационными силами, здесь мы имеем *нелинейные автоколебательные* системы. Колебания происходят и в отсутствие флуктуационных сил (при этом они идеально монохроматичны), а роль последних состоит лишь в том, что они создают *немонохроматичность*, т. е. обуславливают *конечную* длительность когерентного цуга.

Вместо уравнения (28.1) для одного генератора

$$\ddot{x} + x = \mu \left[ \dot{x} \left( p - \frac{3}{4} \dot{x}^2 \right) + F(t) \right], \quad (48.6)$$

мы имеем теперь систему двух уравнений для двух идентичных

<sup>1)</sup> Напомним, что «вторые» моменты  $\hat{B}$  для стационарных аналитических сигналов обращаются в нуль сами по себе, т. е. их отсутствие в (48.5) даже не связано с условием  $T \gg T_0$ .

и слабо (в порядке малого параметра  $\mu$ ) связанных генераторов:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= \mu \left[ \kappa y + \dot{x} \left( p - \frac{4}{3} \dot{x}^2 \right) + F_1(t) \right], \\ \ddot{y} + y &= \mu \left[ \kappa x + \dot{y} \left( p - \frac{4}{3} \dot{y}^2 \right) + F_2(t) \right], \end{aligned} \quad (48.7)$$

причем стационарные белые шумы  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  взаимно некоррелированы:

$$\begin{aligned} \langle F_1(t) F_1(t') \rangle &= C_1 \delta(t - t'), \quad \langle F_2(t) F_2(t') \rangle = C_2 \delta(t - t'), \\ \langle F_1(t) F_2(t') \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Не имея возможности полностью излагать здесь теорию автоколебательной системы (48.7), мы приведем только те результаты, которые непосредственно нужны для интересующего нас вопроса. Заметим, однако, что для малых флуктуаций около установившихся автоколебаний  $x(t)$  и  $y(t)$  можно использовать *корреляционную* теорию автоколебаний. Это было сделано первоначально в работе [50] применительно к одному автогенератору, т. е. к уравнению (48.6) (см. § 53). Распространение аналогичной теории на более сложные автоколебательные системы томсоновского типа и, в частности, на связанные автогенераторы (48.7) не встречает принципиальных трудностей. Ряд таких задач детально исследован в книге [51].

Рис. 45 иллюстрирует стационарный динамический (т. е. в отсутствие шумов) режим. На плоскости Ван-дер-Поля изображены векторы обоих колебаний:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \cos(t + \varphi_1), \\ y(t) &= B_0 \cos(t + \varphi_2). \end{aligned}$$

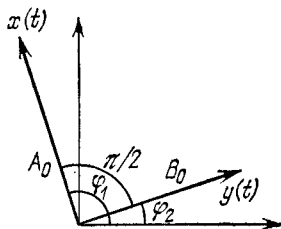


Рис. 45.

Возможны два равноправных устойчивых режима, при которых разность фаз равна  $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm \pi/2$  и соответственно величина  $\lambda \equiv A_0/B_0$  либо больше, либо меньше единицы. Равенство  $\lambda = 1$  достигается только в отсутствие связи ( $\kappa = 0$ ), и тогда угол  $\Phi$  произволен, т. е. определяется начальными условиями. Для определенности мы выберем режим с  $\Phi = \pi/2$  ( $\lambda \geq 1$ ), при котором  $A_0$  и  $B_0$  определяются уравнениями

$$A_0(p - A_0^2) + \kappa B_0 = 0, \quad B_0(p - B_0^2) - \kappa A_0 = 0. \quad (48.8)$$

Предполагается, что генераторы возбуждены ( $p \geq 0$ ). В отсутствие связи ( $\kappa = 0$ ) мы имеем тогда  $A_0 = B_0 = \sqrt{p}$ .



При наличии флуктуационных сил  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  мы для простоты полностью отвлечемся от *амплитудных* флуктуаций, считая  $A_0$  и  $B_0$  постоянными и равными их динамическим значениям. Что касается фаз, то мы введем их отклонения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  от начальных значений  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{20}$  в момент  $t = 0$ :

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \alpha_1, \quad \varphi_2 = \varphi_{20} + \alpha_2.$$

При этом мы подчиним начальные значения условию стационарной динамической связи:  $\Phi_0 = \varphi_{10} - \varphi_{20} = \pi/2$ . Тогда  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  удовлетворяют уравнениям ( $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \Phi - \pi/2$ )

$$\alpha'_1 - \frac{\kappa}{2\lambda} \sin \alpha = -\tilde{F}_1(\theta), \quad \alpha'_2 - \frac{\kappa\lambda}{2} \sin \alpha = -\tilde{F}_2(\theta), \quad (48.9)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по «медленному времени»  $\theta = \mu t$ , а силы  $\tilde{F}_1(\theta)$  и  $\tilde{F}_2(\theta)$ , линейно связанные с  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ , — тоже взаимно некоррелированные белые шумы:

$$\langle \tilde{F}_1(\theta) \tilde{F}_1(\theta') \rangle = \frac{\mu C_1}{2A_0^2} \delta(\theta - \theta'), \quad \langle \tilde{F}_2(\theta) \tilde{F}_2(\theta') \rangle = \frac{\mu C_2}{2B_0^2} \delta(\theta - \theta'),$$

$$\langle \tilde{F}_1(\theta) \tilde{F}_2(\theta') \rangle = 0.$$

Вычитая второе уравнение (48.9) из первого, получаем для флуктуаций угла между векторами  $x$  и  $y$  уравнение

$$\alpha' + \gamma \sin \alpha = \tilde{F}_2(\theta) - \tilde{F}_1(\theta), \quad \gamma \equiv \frac{\kappa}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \geq 0. \quad (48.10)$$

При сильной связи (больших  $\kappa$ ) флуктуации  $\alpha$  малы, так что уравнение (48.10) можно линеаризовать ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ):

$$\alpha' + \gamma \alpha = \tilde{F}_2(\theta) - \tilde{F}_1(\theta).$$

Поведение векторов  $x$  и  $y$  выглядит при этом следующим образом. Угол  $\Phi = \frac{\pi}{2} + \alpha$  между ними флуктуирует так, как если бы эти векторы были связаны пружиной (с равновесным состоянием при  $\alpha = 0$ ) и двигались в вязкой среде с коэффициентом трения  $\gamma$ . Вместе с тем вся связка векторов  $x$  и  $y$  случайным (диффузионным) образом поворачивается и может как угодно далеко уйти от своего начального положения. По мере ослабления связи (уменьшения  $\kappa$ ) «пружина», связывающая векторы  $x$  и  $y$ , становится все мягче и флуктуации угла  $\alpha$  растут, т. е. диффузионное вращение каждого из векторов все меньше зависит от положения другого. В конечном счете, при  $\kappa = 0$ , каждый вектор совершает диффузионное вращательное движение сам по себе, как это и должно быть у несвязанных автогенераторов.

Нас интересует интерференционная картина, создаваемая суперпозицией колебаний  $x(t)$  и  $y(t)$ , т. е. распределение интенсивности<sup>1)</sup>

$$\overline{I_{xy}(t, \tau)_T} = \frac{1}{2} \overline{[x(t+\tau) + y(t)]^2} = \frac{1}{2} \{A_0^2 + B_0^2 + 2A_0B_0 \overline{\cos(\tau + S)}\},$$

где

$$S = \varphi_{1\tau} - \varphi_2 = \varphi_{1\tau} - \varphi_1 + (\varphi_1 - \varphi_2) = \varphi_{1\tau} - \varphi_1 + \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

индекс  $\tau$  означает, как обычно, что величина берется в момент времени  $t + \tau$ , а волнистая черта (и индекс  $T$ ) указывает на усреднение по интервалу времени  $T$ . В случае линейризованных по  $\alpha$  уравнений (48.9) и (48.10) флуктуации  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$  — нормальные процессы, так что и  $S$  — гауссова величина (со средним значением  $\bar{S} = \pi/2$ ). Поэтому

$$\begin{aligned} \overline{\cos(\tau + S)} &= \overline{\cos[\tau + \bar{S} + (S - \bar{S})]} = \\ &= \cos(\tau + \bar{S}) e^{-D|S|/2} = -e^{-D|S|/2} \sin \tau \end{aligned}$$

и интенсивность равна

$$\overline{I_{xy}(t, \tau)_T} = \frac{1}{2} \{A_0^2 + B_0^2 - 2A_0B_0 e^{-D|S|/2} \sin \tau\}. \quad (48.11)$$

Интересно сравнить (48.11) с картиной, даваемой каким-либо одним из связанных генераторов, скажем колебанием  $x(t)$ :

$$\overline{I_x(t, \tau)_T} = \frac{1}{2} \overline{[x(t+\tau) + x(t)]^2} = A_0^2 [1 + \overline{\cos(\tau + S)}],$$

где теперь  $S = \varphi_{1\tau} - \varphi_1$  и  $\bar{S} = 0$ . Здесь при линейризации уравнений для фаз получаем

$$\overline{I_x(t, \tau)_T} = A_0^2 [1 + e^{-D|S|/2} \cos \tau]. \quad (48.12)$$

В обоих случаях задача сводится к вычислению  $D[S]$ . Мы и приведем теперь результат расчета при линейризованных фазовых уравнениях и для не слишком больших задержек  $\tau$  одного из колебаний (а именно предполагается, что  $\gamma\vartheta \ll 1$ , где  $\vartheta = \mu\tau$  — задержка по медленному времени  $\theta$ ). Последнее означает, что мы рассматриваем области интерференционной картины, не очень удаленные от ее центра ( $\tau = 0$ ). Для  $I_{xy}$  получается

$$\begin{aligned} D_{xy}[S] &= \frac{\rho(\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2 + 1)\mu\gamma} \left\{ (\lambda^2 - 1 + \gamma\vartheta) \left( \frac{\mathcal{D}_1}{\lambda^2} + \mathcal{D}_2 \right) \frac{1 - e^{-2\gamma\vartheta}}{2\gamma} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2} \mathcal{D}_1\vartheta \right\}, \quad (48.13) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Мы считаем, что  $\tau \geq 0$ . В противном случае в дальнейших формулах для дисперсии надо было бы писать  $|\tau|$  вместо  $\tau$ .

а для  $I_x$

$$D_x [S] = \frac{p}{(\lambda^2 + 1) \mu \gamma} \left\{ \gamma^2 \theta^2 \left( \frac{\mathcal{D}_1}{\lambda^2} + \mathcal{D}_2 \right) \frac{1 - e^{-2\gamma\theta}}{2\gamma} + \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{\lambda^2} \mathcal{D}_1 \theta \right\}. \quad (48.14)$$

Здесь  $\mathcal{D}_j = \mu^2 C_j / 4p$  ( $j = 1, 2$ ) — коэффициенты диффузии фазы каждого из генераторов в отсутствие связи между ними.

Если связь налицо ( $\kappa \neq 0$ ), то  $\lambda \neq 1$  и  $\gamma \neq 0$ . Тем самым, с ростом времени  $\theta = \mu t$  экспонента  $e^{-2\gamma\theta}$  затухает и устанавливаются стационарные дисперсии  $D^{(\infty)}[S]$ , причем в (48.14) можно пренебречь первым слагаемым в фигурной скобке ввиду его малости<sup>1)</sup>:

$$D_{xy}^{(\infty)} [S] = \frac{p(\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2 + 1) \gamma^2} \left\{ \frac{\lambda^2 - 1}{\mu} \left( \frac{\mathcal{D}_1}{\lambda^2} + \mathcal{D}_2 \right) + \left[ (2\lambda^2 - 1) \frac{\mathcal{D}_1}{\lambda^2} + \mathcal{D}_2 \right] \gamma \tau \right\}, \quad (48.15)$$

$$D_x^{(\infty)} [S] = \frac{\lambda^4 + 1}{\lambda^2(\lambda^2 + 1)} \cdot 2\mathcal{D}_1 \tau. \quad (48.16)$$

Строго говоря, мы не имеем права переходить в формулах (48.13) — (48.16) к случаю отсутствия связи ( $\kappa \rightarrow 0$ ), так как при этом утрачивается возможность линеаризации уравнений для фаз по  $\alpha$ . Однако с качественной стороны результаты остаются вполне осмысленными.

При малых  $\kappa$  имеем приближенно  $\lambda^2 - 1 \approx 2\kappa/p$  и  $\gamma = \kappa^2/p$ , так что (48.15) и (48.16) принимают вид

$$D_{xy}^{(\infty)} [S] \approx \frac{p}{2\kappa^2} (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) \left( \frac{2}{\mu} + \kappa \tau \right), \quad D_x^{(\infty)} [S] \approx 2\mathcal{D}_1 \tau.$$

Из-за множителя  $p/2\kappa^2$  и слагаемого  $2/\mu$  стационарная дисперсия  $D_{xy}^{(\infty)} [S]$  чрезвычайно велика при любых сдвигах  $\tau$ , включая и центр интерференционной картины ( $\tau = 0$ ). Это означает, согласно (48.11), что полос практически нет. Напротив, в «автоинтерференционной» картине одного генератора (48.12) полосы ( $\cos \tau$ ) вписаны в экспоненциально спадающую огибающую  $e^{-2\mathcal{D}_1 \tau}$  (при произвольном знаке  $\tau$  надо писать  $e^{-2\mathcal{D}_1 |\tau|}$ ). Здесь наличие очень слабой связи с другим генератором вносит лишь пренебрежимо малые поправки, исчезающие при  $\kappa = 0$ .

При  $\kappa = 0$  дисперсия  $D_{xy}^{(\infty)} = \infty$ , но это «стационарное значение» достигается лишь за бесконечно долгое время установления  $\theta \sim 1/2\gamma \rightarrow \infty$ . Для всякого конечного  $t$  (и  $\theta = \mu t$ ) переход к несвязанным генераторам, т. е. переход к  $\kappa = 0$

<sup>1)</sup> При преобразованиях использованы соотношения между  $\lambda = A_0/B_0$  и величинами  $\gamma$ ,  $\kappa$  и  $p$ , вытекающие из (48.8) и (48.10).

в формулах (48.13) и (48.14), дает

$$D_{xy}[S] = 2(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)t + 2\mathcal{D}_1\tau = 2\mathcal{D}_1(t + \tau) + 2\mathcal{D}_2t, \quad (48.17)$$

$$D_x[S] = 2\mathcal{D}_1\tau. \quad (48.18)$$

Таким образом, *автоинтерференция* стационарна и такая же, как выше, а *интерференция между* генераторами *нестационарна* и, как легко видеть, обусловлена независимой диффузией фаз обоих генераторов, первого — за время  $t + \tau$ , а второго — за время  $t$ .

Если под волнистой чертой в (48.11) понимать операцию накопления за время от 0 до  $T$ , то, в соответствии с (48.17) и (48.11), получаем (поскольку при  $\kappa = 0$  амплитуды одинаковы,  $B_0 = A_0$ )

$$\overline{I_{xy}(t, \tau)}_T = TA_0^2 \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)T}}{(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)T} e^{-\mathcal{D}_1\tau} \sin \tau \right\}.$$

Картина полос, такая же, как и у одного генератора (если не говорить о сдвиге на половину полосы), исчезает, как только время накопления  $T$  заметно превзойдет время «суммарной» диффузии  $1/(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)$ .

Наконец, что совсем тривиально, при «выключении» случайных сил, когда диффузия фаз прекращается и колебания становятся строго монохроматическими ( $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = 0$ ), обе интерференционные картины (48.11) и (48.12) стационарны и обладают постоянными видностями соответственно  $V = \frac{2A_0B_0}{A_0^2 + B_0^2}$  и  $V = 1$ .

Строго монохроматические колебания ничего «не знают» о том, зависимы или независимы их источники.

### § 49. Статистические характеристики поляризации модулированных колебаний

Рассматривая интерференционные явления, мы неявно предполагали, что в случае поперечных (в частности, электромагнитных) волн поляризация складываемых колебаний одинакова. Это позволило ограничиться *скалярной* теорией интерференции модулированных колебаний. В общем случае поперечных волн необходимо рассматривать *векторное* колебание — вектор  $\xi(t)$ , лежащий в плоскости, перпендикулярной к направлению волновой нормали. Вводя на этой плоскости декартовы координаты  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ , можно записать две проекции вектора  $\xi(t)$ , т. е. два взаимно ортогональных модулированных колебания:

$$\xi_j(t) = A_j(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_j(t)], \quad j = 1, 2. \quad (49.1)$$

При идеальной монохроматичности (при постоянных  $A_j$  и  $\varphi_j$ ) поляризация полная: вектор  $\xi$ , вращаясь с угловой частотой  $\omega_0$ , в общем случае описывает эллипс с отношением полуосей

$$\pm \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \chi, \quad \sin 2\chi = \frac{2A_1 A_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{A_1^2 + A_2^2} \quad (49.2)$$

и углом наклона  $\gamma$  большей полуоси  $a$  к оси  $x_1$ , определяемым равенством

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{A_1^2 - A_2^2}. \quad (49.3)$$

Если  $\varphi_1 - \varphi_2 = n\pi$ , где  $n$  — целое число, то поляризация линейна. При  $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi/2$  главные оси эллипса направлены по координатным осям  $x_1$  и  $x_2$ , а если, кроме того,  $A_1 = A_2$ , то поляризация круговая.

В случае модулированных колебаний, когда  $A_j$  и  $\varphi_j$  детерминированно или случайно меняются со временем, различные виды поляризации в темпе модуляции сменяют друг друга — соответственно детерминированным или случайным образом.

Удобно и в векторном случае перейти от вещественных процессов  $\xi_j(t)$  к аналитическим сигналам:

$$\zeta_j(t) = A_j(t) e^{i[\omega_0 t + \varphi_j(t)]} = \mathfrak{A}_j(t) e^{i\omega_0 t}, \quad j = 1, 2, \quad (49.4)$$

где  $\mathfrak{A}_j(t) = A_j(t) e^{i\varphi_j(t)}$  — комплексные амплитуды. Мы сразу предположим, что  $\xi_j(t)$ , а значит, и  $\zeta_j(t)$  — стационарные и стационарно связанные случайные процессы. Полное совместное их описание в рамках корреляционной теории дается корреляционной матрицей

$$\psi_{\zeta_{jk}}(\tau) = \langle \zeta_j(t + \tau) \zeta_k^*(t) \rangle = \langle \mathfrak{A}_{j\tau} \mathfrak{A}_k^* \rangle e^{i\omega_0 \tau} = \psi_{\mathfrak{A}_{jk}}(\tau) e^{i\omega_0 \tau},$$

которая характеризует как средние поляризационные свойства вектора  $\zeta(t)$ , так и его спектральные свойства, поскольку в стационарном случае существует матрица спектральных плотностей  $g_{\xi_{jk}}(\omega)$ :

$$\psi_{\zeta_{jk}}(\tau) = 4 \int_0^{\infty} g_{\xi_{jk}}(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega, \quad \psi_{\mathfrak{A}_{jk}}(\tau) \approx 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_{jk}(\Omega) e^{i\Omega \tau} d\Omega,$$

где функция  $\tilde{g}_{jk}(\Omega) = g_{\xi_{jk}}(\omega_0 + \Omega)$  отлична от нуля только в окрестности  $\Omega = 0$ , узкой по сравнению с  $\omega_0$ .

Однако если интерес представляют только поляризационные свойства  $\zeta(t)$ , то во многих случаях можно ограничиться квазистационарным (или даже, лучше сказать, квазистатистическим) приближением, а именно временными задержками  $\tau$ , гораздо меньшими длины когерентного пуга  $2\pi/\Omega_m$  ( $\Omega_m$  — ширина по-

лосы, в которой  $\tilde{g}_{jk}(\Omega)$  заметно отличны от нуля). Таким образом,  $\omega_0\tau \ll 2\pi\omega_0/\Omega_m$ , что не исключает, конечно, возможности  $\omega_0\tau \gg 2\pi$ , т. е. сдвиг  $\tau$  может охватывать много периодов высокой частоты  $\omega_0$ . За столь короткие времена  $\tau$  комплексные амплитуды  $\mathfrak{A}_j(t)$ , а тем самым и поляризация почти не меняются, и поэтому в первом приближении можно вообще пренебречь этими изменениями, описывая поляризацию средними значениями попарных произведений  $\mathfrak{A}_j(t)$ , взятых в *один и тот же* момент времени:

$$J_{jk} = \langle \mathfrak{A}_j(t) \mathfrak{A}_k^*(t) \rangle = \langle A_j(t) A_k(t) e^{i[\varphi_j(t) - \varphi_k(t)]} \rangle, \quad j, k = 1, 2. \quad (49.5)$$

Величины  $J_{jk}$  образуют так называемую *матрицу (тензор) поляризации*:

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \langle A_1^2 \rangle & \langle A_1 A_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \rangle \\ \langle A_1 A_2 e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \rangle & \langle A_2^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (49.6)$$

Эта матрица эрмитова ( $J_{21} = J_{12}^*$ ), ее след и детерминант, как легко видеть, вещественны и неотрицательны:

$$\begin{aligned} \text{сл. } \hat{J} &= J_{11} + J_{22} = \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle \equiv 2I_0 \geq 0, \\ |\hat{J}| &= J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \geq 0, \end{aligned} \quad (49.7)$$

и инвариантны при любом ортогональном повороте осей в плоскости  $(x_1, x_2)$ . Через  $I_0$  обозначена полная интенсивность векторного колебания  $\xi(t)$ :

$$\begin{aligned} I_0 &= \overline{\xi_1^2} + \overline{\xi_2^2} = \frac{1}{2} (\overline{|\xi_1|^2} + \overline{|\xi_2|^2}) = \frac{1}{2} (\overline{A_1^2} + \overline{A_2^2}) = \\ &= \frac{1}{2} (J_{11} + J_{22}) \equiv \frac{1}{2} \text{ сл. } \hat{J}. \end{aligned} \quad (49.8)$$

Найдем среднюю интенсивность, даваемую обоими колебаниями, если их спроектировать на некоторое направление  $\mathbf{N} = (\cos \theta, \sin \theta)$  в плоскости  $(x_1, x_2)$ <sup>1)</sup>. Предположим при этом, что одно из колебаний, скажем  $\xi_1(t)$ , задержано на время  $\tau \ll \ll 2\pi/\Omega_m$ , т. е. запаздывает по фазе на  $\varepsilon = \omega_0\tau$ . В амплитуде  $\mathfrak{A}_1(t)$  мы, как сказано, этого малого запаздывания не учитываем. Тогда

$$\begin{aligned} I(\theta, \varepsilon) &= \frac{1}{2} \langle |\mathfrak{A}_1(t) e^{i\varepsilon} \cos \theta + \mathfrak{A}_2(t) \sin \theta|^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \{ J_{11} \cos^2 \theta + J_{22} \sin^2 \theta + (J_{12} e^{i\varepsilon} + J_{21} e^{-i\varepsilon}) \sin \theta \cos \theta \}. \end{aligned} \quad (49.9)$$

<sup>1)</sup> В оптике эту операцию осуществляет николю или полярионд, в радио — линейная антенна, например линейный вибратор.

Если ввести коэффициент взаимной корреляции

$$\mu_{12} = \frac{J_{12}}{\sqrt{J_{11}J_{22}}} = |\mu_{12}| e^{i\beta_{12}}, \quad (49.10)$$

то

$$J_{12}e^{i\varepsilon} + J_{21}e^{-i\varepsilon} = J_{12}e^{i\varepsilon} + J_{12}^*e^{-i\varepsilon} = 2\sqrt{J_{11}J_{22}} |\mu_{12}| \cos(\beta_{12} + \varepsilon)$$

и, следовательно,

$$I(\theta, \varepsilon) = \frac{1}{2} \{J_{11} \cos^2 \theta + J_{22} \sin^2 \theta + 2\sqrt{J_{11}J_{22}} |\mu_{12}| \cos(\beta_{12} + \varepsilon) \sin \theta \cos \theta\}. \quad (49.11)$$

Этому выражению можно придать вид (47.4), если ввести интенсивности  $I_1 = J_{11} \cos^2 \theta$  и  $I_2 = J_{22} \sin^2 \theta$ , отвечающие амплитудам  $A_1 \cos \theta$  и  $A_2 \sin \theta$  проекций каждого из колебаний на направление  $\mathbf{N}$ . Существенное отличие от (47.4) заключается в том, что там коэффициент корреляции  $K_{12}$  — функция  $\tau$  (мы интересовались влиянием на интерференцию спектра складываемых колебаний), а в (49.11)  $\mu_{12}$  — комплексное число, характеризующее корреляцию одновременных значений амплитуд и фаз.

Полностью неполяризованное колебание (в оптике — естественный свет) обладает осевой симметрией, т. е. интенсивность  $I(\theta, \varepsilon)$  не зависит от угла  $\theta$ , а кроме того, не меняется при изменениях запаздывания по фазе  $\varepsilon$  (разумеется, при оговоренном выше условии  $\varepsilon \ll 2\pi\omega_0/\Omega_m$ ). Из (49.11) ясно, что это возможно только при  $J_{11} = J_{22}$  и  $\mu_{12} = 0$  ( $J_{12} = J_{21} = 0$ ). Так как  $J_{11} + J_{22} = 2I_0$ , где  $I_0$  — полная интенсивность, поляризационная матрица принимает в этом случае вид

$$\hat{J} = I_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (49.12)$$

В противоположном случае монохроматического (а значит, полностью поляризованного) колебания можно снять в (49.6) знак усреднения  $\langle \rangle$  (все реализации тождественны), и тогда, очевидно,

$$|\hat{J}| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = 0, \quad \mu_{12} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (49.13)$$

так что  $|\mu_{12}| = 1$ . Эти соотношения справедливы и в том частном случае неполной монохроматичности, когда

$$A_2(t)/A_1(t) = \text{const}, \quad \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \text{const}.$$

При этих последних условиях меняется только размер поляризационного эллипса (т. е. полная интенсивность), а его эксцентриситет и наклон остаются неизменными.

При линейной поляризации ( $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi l$ ) все элементы матрицы  $\hat{J}$  вещественны, а при круговой поляризации

$$\hat{J} = I_0 \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix}, \quad (49.14)$$

причем верхний знак соответствует правой поляризации, а нижний — левой.

Очевидно, при суперпозиции *некоррелированных* колебаний ( $\xi_j(t) = \sum_n \xi_j^{(n)}(t)$ ,  $j=1,2$ ) поляризационные матрицы складываются:

$$J_{jk} = \sum_n J_{jk}^{(n)}.$$

Обратное разложение колебания  $\xi_j(t)$  на сумму некоррелированных колебаний, вообще говоря, неоднозначно. Например, матрицу поляризации полностью неполяризованного колебания можно представить как в виде суммы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. разложить  $\xi_j(t)$  на некоррелированные колебания, линейно поляризованные по осям  $x_1$  и  $x_2$ , так и в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix},$$

что соответствует сумме двух некоррелированных циркулярно поляризованных колебаний — правого и левого. Но при дополнительных требованиях разложение может быть сделано однозначным.

Важным разложением такого рода является представление заданного векторного колебания в виде суммы двух некоррелированных колебаний — полностью неполяризованного и полностью поляризованного, так что

$$\hat{J} = \hat{J}^{(n)} + \hat{J}^{(m)}, \quad \hat{J}^{(n)} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \hat{J}^{(m)} = \begin{pmatrix} B & D \\ D^* & C \end{pmatrix}, \quad (49.15)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  неотрицательны, причем, в соответствии с (49.13), имеем  $BC - DD^* = 0$ . Из (49.15) в компонентах

$$J_{11} = A + B, \quad J_{12} = D, \quad J_{21} = D^*, \quad J_{22} = A + C$$

и, следовательно,

$$BC - DD^* = (J_{11} - A)(J_{22} - A) + J_{12}J_{21} = A^2 - (J_{11} + J_{22})A + |\hat{J}| = 0.$$



Из двух корней этого уравнения для  $A$  (оба корня, как легко видеть, вещественны и неотрицательны) следует выбрать корень

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \{ J_{11} + J_{22} - \sqrt{(J_{11} + J_{22})^2 - 4|\hat{J}|} \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ J_{11} + J_{22} - \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4J_{12}J_{21}} \}, \end{aligned} \quad (49.16)$$

так как только для него выполняется условие неотрицательности  $B$  и  $C$ :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \{ J_{11} - J_{22} + \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4J_{12}J_{21}} \}, \\ C &= \frac{1}{2} \{ J_{22} - J_{11} + \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4J_{12}J_{21}} \}. \end{aligned} \quad (49.17)$$

В результате разложение (49.15) оказывается единственным. Кроме того, оно инвариантно по отношению к ортогональному повороту осей в плоскости  $(x_1, x_2)$ .

*Степенью поляризации*  $P$  называется отношение интенсивности поляризованной части

$$I^{(n)} = \frac{1}{2} \text{сл. } \hat{J}^{(n)} = \frac{1}{2} (B + C) = \frac{1}{2} \sqrt{(J_{11} + J_{22})^2 - 4|\hat{J}|}$$

к полной интенсивности

$$I_0 = \frac{1}{2} \text{сл. } \hat{J} = \frac{1}{2} (J_{11} + J_{22}).$$

Таким образом,

$$P = \frac{I^{(n)}}{I_0} = \sqrt{1 - \frac{4|\hat{J}|}{(J_{11} + J_{22})^2}}. \quad (49.18)$$

Очевидно, степень поляризации — инвариант ортогонального поворота осей, поскольку она выражается через инварианты сл.  $\hat{J}$  и  $|\hat{J}|$ . Она меняется от значения  $P = 0$  (отсутствие поляризации,  $J_{11} = J_{22}$ ,  $J_{12} = J_{21} = 0$ ) до значения  $P = 1$  (полная поляризация,  $|\hat{J}| = 0$ ).

Переходя в формуле для интенсивности (49.11) к косинусу и синусу угла  $2\theta$ , получаем

$$I(\theta, \varepsilon) = \frac{1}{4} \{ J_{11} + J_{22} + \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4J_{12}J_{21} \cos^2(\beta_{12} + \varepsilon)} \cos(2\theta + \alpha) \},$$

откуда ясно, что наиболее сильные вариации  $I(\theta, \varepsilon)$  при изменении угла  $\theta$  происходят при такой фазовой задержке  $\varepsilon$ , для которой  $\cos^2(\beta_{12} + \varepsilon) = 1$ . В этом случае

$$I(\theta, \varepsilon) = \frac{1}{4} (J_{11} + J_{22}) \{ 1 + P \cos(2\theta + \alpha) \}.$$

Следовательно,

$$P = \frac{I(\theta, \varepsilon)_{\max} - I(\theta, \varepsilon)_{\min}}{I(\theta, \varepsilon)_{\max} + I(\theta, \varepsilon)_{\min}},$$

что позволяет находить значение степени поляризации  $P$  посредством соответствующих измерений.

Иногда, наряду с полной степенью поляризации  $P$ , оптики пользуются еще степенью циркулярной поляризации

$$P_c = 2 \frac{\langle A_1 A_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle}{\langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle} = \frac{i(J_{21} - J_{12})}{J_{11} + J_{22}} \quad (49.19)$$

и степенью линейной поляризации

$$\begin{aligned} P_l &= \frac{1}{\langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle} \sqrt{[\langle A_1^2 \rangle - \langle A_2^2 \rangle]^2 + 4 \langle A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle^2} = \\ &= \frac{1}{J_{11} + J_{22}} \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + (J_{12} + J_{21})^2}. \end{aligned} \quad (49.20)$$

Нетрудно убедиться, что полная степень поляризации  $P$  есть

$$P = \sqrt{P_l^2 + P_c^2}. \quad (49.21)$$

Предлагались и другие меры степени поляризации, пригодные при определенных дополнительных условиях (например, в случае нормально распределенных  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  — среднее поляризационное число  $R_{12} = \langle r_{12} \rangle = \langle \xi_2 / \xi_1 \rangle$ , см. [52]), но мы не будем на этом останавливаться. Укажем только на связь рассмотренных выше величин с параметрами, которые были введены Стоксом еще в 1852 г.

Матрица поляризации содержит четыре вещественных величины:  $J_{11}$ ,  $J_{22}$ ,  $\text{Re } J_{12}$  и  $\text{Im } J_{12}$ . Параметры Стокса, часто используемые в оптике, следующим образом связаны с элементами матрицы поляризации<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} I &= \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle = J_{11} + J_{22}, \\ U &= 2 \langle A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = J_{12} + J_{21}, \\ Q &= \langle A_1^2 \rangle - \langle A_2^2 \rangle = J_{11} - J_{22}, \\ V &= 2 \langle A_1 A_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = i(J_{21} - J_{12}), \end{aligned} \quad (49.22)$$

откуда

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{1}{2}(I + Q), & J_{12} &= \frac{1}{2}(U + iV), \\ J_{22} &= \frac{1}{2}(I - Q), & J_{21} &= \frac{1}{2}(U - iV). \end{aligned} \quad (49.23)$$

Во все безразмерные характеристики поляризации входят, конечно, только отношения параметров, что и понятно, так как

<sup>1)</sup> В наших обозначениях параметр Стокса  $I$  равен удвоенной полной интенсивности:  $I = 2I_0$ . Часто в определении интенсивности (49.8) опускают множитель  $1/2$ , т. е. считают, что  $I_0 = \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle$ , и тогда  $I = I_0$ .

указанные характеристики не должны зависеть от полной интенсивности. Другими словами, как элементы матрицы поляризации, так и параметры Стокса всегда можно нормировать на величину  $I = J_{11} + J_{22}$  (или просто считать  $I = 1$ ), и тогда остается только три независимых параметра. Все же использование четырех параметров обладает известным преимуществом, так как не требует перенормировки при сложении некоррелированных колебаний или разложении на такие колебания. Параметры Стокса, будучи линейно связаны с элементами матрицы поляризации, очевидно, тоже аддитивны при сложении некоррелированных колебаний.

Пользуясь соотношениями (49.23), нетрудно выразить поляризационные характеристики (49.18)–(49.20) через параметры Стокса:

$$P = \frac{1}{I} \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}, \quad P_c = \frac{V}{I}, \quad P_l = \frac{1}{I} \sqrt{Q^2 + U^2}.$$

Неотрицательность  $|J|$ , означающая, что  $P \leq 1$ , выражается неравенством

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2.$$

При полной поляризации здесь имеет место равенство, а в отсутствие поляризации  $Q = U = V = 0$ . Характеристики поляризационного эллипса (49.2) и (49.3) для полностью поляризованной части колебания выражаются через параметры Стокса следующим образом:

$$\sin 2\chi = V/I, \quad \operatorname{tg} 2\gamma = U/Q.$$

Итак, все статистические характеристики поляризации модулированных колебаний полностью описываются в рассматриваемом приближении ( $\tau \ll 2\pi/\Omega_m$ ) через моменты второго порядка одновременных значений комплексных амплитуд  $\mathfrak{A}_1(t)$  и  $\mathfrak{A}_2(t)$ .

В работе [53] показано, что для *нормальных* колебаний  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  степень поляризации  $P$  может быть выражена и через вторые моменты флуктуаций *мгновенных интенсивностей*  $I_j(t) = \langle \xi_j(t) \xi_j^*(t) \rangle$ ,  $j = 1, 2$ . Введем корреляционную матрицу интенсивностей  $\bar{\sigma}$  с элементами  $\sigma_{jk}$  такими, что

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^2 &= \langle \Delta I_j(t) \Delta I_k(t) \rangle = \langle (I_j - \bar{I}_j)(I_k - \bar{I}_k) \rangle = \\ &= \langle \xi_j \xi_j^* \xi_k \xi_k^* \rangle - \langle \xi_j \xi_j^* \rangle \langle \xi_k \xi_k^* \rangle. \end{aligned}$$

Так как для нормальных величин

$$\langle \xi_j \xi_i^* \xi_k \xi_k^* \rangle = \langle \xi_j \xi_j^* \rangle \langle \xi_k \xi_k^* \rangle + \langle \xi_j \xi_k \rangle \langle \xi_j^* \xi_k^* \rangle + \langle \xi_j \xi_k^* \rangle \langle \xi_j^* \xi_k \rangle,$$

а для аналитических сигналов  $\langle \zeta_j \zeta_k \rangle = 0$ , получаем

$$\sigma_{jk}^2 = \langle \zeta_j \zeta_k^* \rangle \langle \zeta_j^* \zeta_k \rangle = J_{jk} J_{kj}.$$

Это соотношение тотчас же приводит к равенствам  $|\hat{\sigma}| = |\hat{f}|$  и сл.  $\hat{\sigma} = \text{сл. } \hat{f}$ . Следовательно, для нормальных процессов  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  степень поляризации (49.18) можно записать также в виде

$$P = \sqrt{1 - \frac{4|\hat{\sigma}|}{(\text{сл. } \hat{\sigma})^2}},$$

т. е. можно находить  $P$ , измеряя моменты флуктуаций интенсивности.

Отметим в заключение, что в случае *нестационарных* колебаний  $\zeta_1(t)$  и  $\zeta_2(t)$  характеристики поляризации (матрица поляризации или параметры Стокса) будут — в том же квазистационарном приближении, т. е. при пренебрежении сдвигом  $\tau$  в комплексных амплитудах, — функциями времени  $t$ . Совершенно так же, как и для нестационарной интерференции, вопрос о том, в какой мере колебание  $\zeta(t)$  поляризовано, может теперь находить различный ответ в зависимости от соотношения между характерными временными масштабами изменения статистических средних  $J_{jk}(t) = \langle \mathfrak{M}_j(t) \mathfrak{M}_k^*(t) \rangle$  и длительностью  $T$  наблюдения (усреднения или накопления). Если, допустим, при достаточно малом  $T$  удастся фиксировать поляризационный эллипс определенного размера и формы, то при увеличении  $T$  может оказаться, что

$$\widetilde{J}_{11}(t)_T = \widetilde{J}_{22}(t)_T, \quad \widetilde{J}_{12}(t)_T = \widetilde{J}_{21}(t)_T,$$

т. е. при больших  $T$  колебание будет полностью неполяризованным. То, что целесообразно усреднять по времени наблюдения именно элементы матрицы поляризации [а, скажем, не степень поляризации  $P$ , вычисленную по (49.18) через  $J_{jk}(t)$ ], видно из (49.9): *наблюдаемая* средняя интенсивность  $\widetilde{I}(t, \theta, \varepsilon)_T$  линейно связана с  $\widetilde{J}_{jk}(t)_T$ .

### Задачи

1. Вывести выражение для многомерной характеристической функции комплексного нормального процесса  $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$  ( $c(\zeta(t)) = 0$ ) через его комплексные корреляционные матрицы, исходя из  $2n$ -мерной характеристической функции вещественных процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ .

Решение. Обозначим возможные значения  $\xi(t_k)$  через  $x_k$ , а  $\eta(t_k)$  — через  $x_{n+k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Характеристическая функция  $2n$  гауссовых величин  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2n$ ) есть

$$\Phi_{2n}(u) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left\langle \left( \sum_{j=1}^{2n} x_j \mu_j \right)^2 \right\rangle \right\}.$$

Параметры  $u_j$  тоже можно записать как  $u_k$  и  $u_{n+k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , так что

$$\sum_{j=1}^{2n} x_j u_j = \sum_{k=1}^n (x_k u_k + x_{n+k} u_{n+k}).$$

Воспользуемся теперь комплексными возможными значениями  $z_k = x_k + i x_{n+k}$  величины  $\xi(t_k)$  и комплексными параметрами  $U_k = u_k + i u_{n+k}$ . Так как

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{2} (z_k + z_k^*), & x_{n+k} &= \frac{1}{2i} (z_k - z_k^*), \\ u_k &= \frac{1}{2} (U_k + U_k^*), & u_{n+k} &= \frac{1}{2i} (U_k - U_k^*), \end{aligned}$$

получаем

$$\sum_{j=1}^{2n} x_j u_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k U_k^* + z_k^* U_k)$$

и, следовательно,

$$\left\langle \left( \sum_{j=1}^{2n} x_j u_j \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^{2n} [b_{kl} U_k^* U_l + b_{kl}^* U_k U_l^* + \tilde{b}_{kl} U_k^* U_l^* + \tilde{b}_{kl}^* U_k U_l], \quad (1)$$

где через  $b_{kl}$  и  $\tilde{b}_{kl}$  обозначены *половинные* значения элементов корреляционных матриц:

$$b_{kl} = \frac{1}{2} \langle z_k z_l^* \rangle, \quad \tilde{b}_{kl} = \frac{1}{2} \langle z_k z_l \rangle.$$

В силу эрмитовости матрицы  $B$  ( $b_{kl} = b_{lk}^*$ ) первые два члена в правой части (1) совпадают и характеристическая функция принимает вид

$$\varphi_{2n}(u) = \varphi_n(U, U^*) =$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{k, l=1}^n [2b_{kl} U_k^* U_l + \tilde{b}_{kl} U_k^* U_l^* + \tilde{b}_{kl}^* U_k U_l] \right\}. \quad (2)$$

Если  $\xi(t)$  — стационарный аналитический сигнал, то  $\tilde{b}_{kl} = 0$  (§ 38), и тогда

$$\varphi_n(U, U^*) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n b_{kl} U_k^* U_l \right\}. \quad (3)$$

Соответствующее (3) распределение есть

$$\omega_n(z_1, \dots, z_n) dx =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{dx}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \varphi_n(U; U^*) \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{k=1}^n (z_k U_k^* + z_k^* U_k) \right\} du = \\ &= \frac{dx}{(2\pi)^n |B|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n B_{kl}^{-1} z_k^* z_l \right\}, \end{aligned}$$

где  $B_{kl}^{-1}$  — элементы матрицы, обратной  $B = (b_{kl})$ ,  $dx = dx_1 \dots dx_{2n}$  и  $du = du_1 \dots du_{2n}$ ,  $|B|$  — детерминант матрицы  $B$ .

Исследованиям комплексного нормального распределения посвящено довольно много работ (см., например, [54] и приведенную там литературу).

2. Получить моменты любого порядка для стационарного аналитического сигнала с помощью найденной в предыдущей задаче характеристической функции (3):

$$\varphi(U, U^*) = e^{-S(U, U^*)}, \quad S(U, U^*) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} b_{kl} U_k^* U_l.$$

Решение. Общее правило вычисления моментов путем дифференцирования характеристической функции остается прежним:

$$\langle z_{k_1} \dots z_{k_m} z_{l_1}^* \dots z_{l_n}^* \rangle = \frac{\partial^{m+n} \varphi(U, U^*)}{i^{m+n} \partial U_{k_1}^* \dots \partial U_{k_m}^* \partial U_{l_1} \dots \partial U_{l_n}} \Big|_{U=0}.$$

Однако теперь надо учесть, что производная  $S(U, U^*)$  по какому-либо  $U_n$  зависит только от  $U^*$  и наоборот:

$$\frac{\partial S}{\partial U_n} = \frac{1}{2} \sum_k b_{kn} U_k^*, \quad \frac{\partial S}{\partial U_n^*} = \frac{1}{2} \sum_l b_{nl} U_l.$$

Поэтому из вторых производных  $S$  отличны от нуля только смешанные:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U_m \partial U_n^*} = \frac{1}{2} b_{nm} = \frac{1}{4} \langle z_n z_m^* \rangle.$$

Это означает, что отличны от нуля лишь те моменты четного порядка, которые содержат поровну сомножителей  $z_k$  и  $z_l^*$ . Результат можно записать следующим образом [55]:

1) если  $m \neq n$ , то

$$\langle z_{k_1} \dots z_{k_m} z_{l_1}^* \dots z_{l_n}^* \rangle = 0;$$

2) если  $m = n$ , то

$$\langle z_{k_1} \dots z_{k_n} z_{l_1}^* \dots z_{l_n}^* \rangle = \sum_{\pi} \langle z_{k_1} z_{l_{\pi(1)}}^* \rangle \langle z_{k_2} z_{l_{\pi(2)}}^* \rangle \dots \langle z_{k_n} z_{l_{\pi(n)}}^* \rangle,$$

где  $\pi$  — перестановка целых чисел  $1, 2, \dots, n$ . Сумма распространяется на все эти перестановки, т. е. содержит  $n!$  слагаемых, например:

$$\langle z_1 z_2 z_3 z_4^* \rangle = \langle z_1 z_3^* \rangle \langle z_2 z_4^* \rangle + \langle z_1 z_4^* \rangle \langle z_2 z_3^* \rangle,$$

$$\langle z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6^* \rangle =$$

$$= \langle z_1 z_4^* \rangle \langle z_2 z_5^* \rangle \langle z_3 z_6^* \rangle + \langle z_1 z_4^* \rangle \langle z_2 z_6^* \rangle \langle z_3 z_5^* \rangle + \langle z_1 z_5^* \rangle \langle z_2 z_4^* \rangle \langle z_3 z_6^* \rangle + \\ + \langle z_1 z_5^* \rangle \langle z_2 z_6^* \rangle \langle z_3 z_4^* \rangle + \langle z_1 z_6^* \rangle \langle z_2 z_4^* \rangle \langle z_3 z_5^* \rangle + \langle z_1 z_6^* \rangle \langle z_2 z_5^* \rangle \langle z_3 z_4^* \rangle.$$

В частности,

$$\langle (z_1 z_2^*)^n \rangle = n! \langle z_1 z_2^* \rangle^n, \quad \langle |z|^2 n \rangle = n! \langle |z|^2 \rangle^n.$$

3. Показать, пользуясь теоремой Хинчина, что корреляционная функция  $\psi(\tau)$  стационарна в широком смысле случайного процесса  $\xi(t)$

удовлетворяет неравенству

$$2 \left[ \int_0^T \psi(\tau) d\tau \right]^2 \leq \sigma^2 \int_0^{2T} dt \int_0^t \psi(\tau) d\tau,$$

где  $\sigma^2 = \psi(0) = D[\xi]$  [56].

Решение. Пусть для простоты  $\xi = 0$ , так что

$$\psi(\tau) = \overline{\xi(t+\tau)\xi(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega\tau dG(\omega), \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dG(\omega).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^T \psi(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega T}{\omega} dG(\omega), \\ \int_0^{2T} dt \int_0^t \psi(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} dG(\omega) \int_0^{2T} \sin \omega t dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin \omega T}{\omega} \right)^2 dG(\omega). \end{aligned}$$

В силу неравенства Шварца

$$\begin{aligned} 2 \left[ \int_0^T \psi(\tau) d\tau \right]^2 &= 2 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega T}{\omega} dG(\omega) \right]^2 \leq \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin \omega T}{\omega} \right)^2 dG(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} dG(\omega) = \sigma^2 \int_0^{2T} dt \int_0^t \psi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

4. Тем же способом, каким получена формула (41.9), установить условия стационарности вещественной случайной функции

$$\xi(t) = \sum_n (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t).$$

Ответ.

$$\overline{a_n} = \overline{b_n} = 0, \quad \overline{a_n^2} = \overline{b_n^2} = g_n, \quad \overline{a_n a_m} = \overline{b_n b_m} = g_n \delta_{mn}, \quad \overline{a_n b_m} = 0.$$

При этих условиях

$$\psi(\tau) = \sum_n g_n \cos \omega_n \tau \quad \left( \sum_n g_n < \infty \right).$$

Таким образом, гармоническое колебание  $A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , где  $\varphi_0$  — постоянная, а  $A$  — случайная величина, не может быть стационарным процессом даже при  $\overline{A} = 0$ .

5. Найти функцию корреляции процесса  $Z(t)$ , получаемого из стационарного процесса  $\zeta(t)$  посредством скользящего усреднения:

$$Z(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \zeta(t) dt.$$

Решение. Подставив в формулу для  $Z(t)$  спектральное разложение  $\xi(t)$ , находим

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dC(\omega) \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{i\omega t} dC(\omega).$$

Воспользовавшись формулой (41.2), получаем функцию корреляции (считаем, что  $\xi = 0$ )

$$\psi_Z(\tau) = \overline{Z(t+\tau)Z^*(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2 e^{i\omega\tau} dG(\omega).$$

Первый множитель под интегралом подавляет частоты  $|\omega| > 2\pi/T$ , т. е. скользящее усреднение сглаживает быстрые (в масштабе  $T$ ) изменения  $\xi(t)$ . Можно сказать, что эта операция отвечает действию фильтра с функцией передачи (см. § 50), у которой

$$|k(i\omega)| = \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|.$$

6. Для детерминированного импульса  $F(t) = e^{-2t^2/\theta^2} \xi(t)$ , у которого заполнение  $\xi(t)$  — синусоидальное колебание с линейно меняющейся частотой  $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$ , т. е.  $\xi(t) = \cos(\omega_0 t + \alpha t^2/2)$ , найти «корреляционную функцию»

$$\Psi_F(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) F(t+\tau) dt.$$

Оценить эффективное «время корреляции»  $\tau_{F_K}$  в том случае, когда девиация мгновенной частоты за время  $\theta$  мала по сравнению с  $\omega_0$  ( $\alpha\theta \ll \omega_0$ ), а  $\theta$  много больше среднего периода  $1/\omega_0$  ( $\omega_0\theta \gg 1$ ).

Решение. Подстановка  $F(t) = e^{-2t^2/\theta^2} \cos(\omega_0 t + \alpha t^2/2)$  в  $\Psi_F(\tau)$  и замена переменной интегрирования  $t$  на  $x = t + \tau/2$  приводят выражение для  $\Psi_F(\tau)$  к виду

$$\Psi_F(\tau) = \frac{e^{-\tau^2/\theta^2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2/\theta^2} \left\{ \cos(\alpha\tau x + \omega_0\tau) + \cos\left(\alpha x^2 + 2\omega_0 x + \frac{\alpha\tau^2}{4}\right) \right\} dx.$$

Для вычисления интегралов воспользуемся формулой [57]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(px^2 + 2qx + r) dx &= \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a^2 + p^2}} \exp\left\{-\frac{aq^2}{a^2 + p^2}\right\} \cos\left\{\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{p}{a} + r - \frac{pq^2}{a^2 + p^2}\right\} \end{aligned}$$



( $a > 0$ ), что дает

$$\Psi_F(\tau) = \frac{\sqrt{\pi} \vartheta}{4} \left\{ e^{-s\tau^2/\vartheta^2} \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{4\sqrt{s}} \exp \left[ -\left( \frac{\tau^2}{\vartheta^2} + \frac{\omega_0^2 \vartheta^2}{4s} \right) \right] \cos \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha \vartheta^2}{4} + \frac{\alpha \tau^2}{4} - \frac{\alpha \omega_0^2 \vartheta^4}{16s} \right) \right\},$$

где  $s = 1 + \alpha^2 \vartheta^4 / 16$ .

Если  $\alpha \vartheta^2 \ll 4$ , т. е.  $s$  близко к единице, то оба гауссова множителя одинаковы по ширине ( $\sim 2\vartheta$ ), но второй член мал из-за множителя  $e^{-\omega_0^2 \vartheta^2 / 4}$ , поскольку мы принимаем, что  $\omega_0 \vartheta \gg 1$ . Если же  $\alpha \vartheta^2 \gg 4$ , так что и  $s \approx \alpha^2 \vartheta^4 / 16 \gg 1$ , то в первом члене гауссов множитель имеет ширину  $\sim 2\vartheta / \sqrt{s}$ , малую по сравнению с шириной гауссова множителя во втором члене ( $\sim 2\vartheta$ ). Условие того, чтобы в пределах ширины первого члена ( $\tau \leq \vartheta / \sqrt{s}$ ) второй член был мал, очевидно, сводится к требованию

$$1 + \frac{\omega_0^2 \vartheta^2}{4} \gg s, \quad \text{или} \quad \frac{\omega_0^2 \vartheta^2}{4} \gg \frac{\alpha^2 \vartheta^4}{16}.$$

Это выполняется ввиду предположения о малости девиации ( $\alpha \vartheta \ll \omega_0$ ). Таким образом, при указанных условиях функция  $\Psi_F(\tau)$  во всей существенной области  $\tau$  с достаточной точностью описывается первым членом полученной формулы и, следовательно, имеет эффективное «время корреляции»

$$\tau_{FK} = \frac{2\vartheta}{\sqrt{s}} = \frac{2\vartheta}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 \vartheta^2}{16}}} = \frac{2\vartheta \tau_K}{\sqrt{\vartheta^2 + \tau_K^2}},$$

где  $\tau_K = 4/\alpha\vartheta$  — «время корреляции» частотно-модулированного заполнения, обратное девиации  $\alpha\vartheta$  мгновенной частоты  $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$  на ширине огибающей  $\vartheta$ . У сложного импульса  $\tau_K = 4/\alpha\vartheta \ll \vartheta$  и  $\tau_{FK} \approx 2\tau_K$ . Наоборот, при уменьшении  $\alpha$ , когда заполнение приближается к гармоническому колебанию, у которого «время корреляции»  $\tau_K$  бесконечно, импульс становится простым и  $\tau_{FK} \rightarrow 2\vartheta$ .

7. В § 11 был рассмотрен импульсный пуассоновский процесс со случайной длительностью импульсов  $\vartheta_v$  и получена формула (11.8) для функции корреляции такого процесса. В частном случае процесса (11.9):

$$\xi(t) = \sum_v a_v F\left(\frac{t - t_v}{\vartheta_v}\right),$$

эта формула принимает вид

$$\Psi_\xi(\tau) = n_1 \bar{a}^2 \int_0^\infty \vartheta \omega_\vartheta(\vartheta) d\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) F\left(\theta + \frac{\tau}{\vartheta}\right) d\theta.$$

Найти с помощью теоремы (42.9) спектральную плотность такого процесса.

Решение. Вводя спектральную амплитудную плотность импульса по безразмерной переменной  $\theta = t/\vartheta$ :

$$\bar{F}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) e^{-i\alpha\theta} d\theta,$$

получаем, в соответствии с теоремой (42.9), что

$$\psi_{\xi}(\tau) = 2\pi n_1 \bar{a}^2 \int_0^{\infty} \vartheta \omega_{\vartheta}(\vartheta) d\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{F}(\alpha)|^2 e^{i\alpha\tau/\vartheta} d\alpha,$$

или, через размерную частоту  $\omega = \alpha/\vartheta$ ,

$$\psi_{\xi}(\tau) = 2\pi n_1 \bar{a}^2 \int_0^{\infty} \vartheta^2 \omega_{\vartheta}(\vartheta) d\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{F}(\omega\vartheta)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Таким образом, спектральная плотность процесса (11.9) равна

$$g_{\xi}(\omega) = 2\pi n_1 \bar{a}^2 \int_0^{\infty} \vartheta^2 |\tilde{F}(\omega\vartheta)|^2 \omega_{\vartheta}(\vartheta) d\vartheta. \quad (1)$$

8. Для прямоугольных импульсов с экспоненциальным распределением длительностей  $\vartheta_{\nu}$ :

$$\omega_{\vartheta}(\vartheta) d\vartheta = e^{-\vartheta/\bar{\vartheta}} \frac{d\vartheta}{\bar{\vartheta}}$$

в § 11 получена экспоненциальная функция корреляции (11.10):

$$\psi_{\xi}(\tau) = n_1 \bar{a}^2 \bar{\vartheta} e^{-|\tau|/\bar{\vartheta}},$$

которой, по теореме Хинчина (41.7), соответствует спектральная плотность

$$g_{\xi}(\omega) = \frac{n_1 \bar{a}^2 \bar{\vartheta}^2}{\pi (1 + \omega^2 \bar{\vartheta}^2)}.$$

Убедиться, что к этому же результату приводит и расчет по формуле (1), полученной в предыдущей задаче.

Решение. Для прямоугольного импульса с  $F(\vartheta) = 1$  в интервале  $\vartheta \in (0, 1)$  имеем

$$\tilde{F}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^{-i\alpha\vartheta} d\vartheta = \frac{e^{-i\alpha/2}}{\pi\alpha} \sin \frac{\alpha}{2},$$

так что

$$|\tilde{F}(\omega\vartheta)|^2 = \left( \frac{\sin(\omega\vartheta/2)}{\omega\vartheta/2} \right)^2,$$

и формула (1) предыдущей задачи дает

$$g_{\xi}(\omega) = \frac{2n_1 \bar{a}^2}{\pi \omega^2 \bar{\vartheta}} \int_0^{\infty} \sin^2 \frac{\omega\vartheta}{2} \cdot e^{-\vartheta/\bar{\vartheta}} d\vartheta = \frac{n_1 \bar{a}^2 \bar{\vartheta}^2}{\pi (1 + \omega^2 \bar{\vartheta}^2)}.$$

9. Какой вид принимает формула (46.22) в случае пуассоновского процесса, когда  $\varphi(\omega) = n_1/(n_1 - i\omega)$ ?

О т в е т.

$$g(\omega) = 2\pi n_1 \left\{ K(\omega) + 2 \operatorname{Re} [I(\omega) H^*(\omega)] - 2 \frac{n_1}{\omega} \operatorname{Im} [I(\omega) H^*(\omega)] \right\}.$$

10. Найти спектральную плотность и функцию корреляции пуассоновского процесса с независимыми интервалами в случае импульсов, линейно нарастающих со временем с фиксированной скоростью  $a$  в каждом интервале  $(t_v, t_{v+1})$ , причем от нулевого значения при  $t = t_v$ , т. е. по закону (рис. 46)

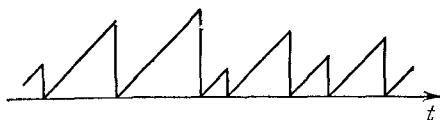


Рис. 46.

$$F\left(\frac{t-t_v}{\tau_v}, a\right) = a \cdot (t-t_v).$$

Так ведет себя, например, скорость заряженной частицы в среде, если в течение свободного пробега ускорение  $a$  постоянно (движение в постоянном электрическом поле), а при соударении с атомами среды скорость частицы падает до нуля.

Решение. Вводя  $\theta = (t-t_v)/\tau$ , получаем, согласно (46.21),

$$\tilde{F}(a) = \frac{a\tau}{2\pi} \int_0^1 \theta e^{-i a \theta} d\theta = \frac{a\tau}{2\pi a^2} [(1 + i a) e^{-i a} - 1].$$

При  $\omega_\tau(\tau) = n_1 e^{-n_1 \tau}$  расчет по формулам (46.19) и (46.20) дает

$$K(\omega) = \frac{a^2 (3n_1^2 + \omega^2)}{2\pi^2 n_1^2 (n_1^2 + \omega^2)^2}, \quad H(\omega) = \frac{a}{2\pi (n_1 + i\omega)^2}, \quad I(\omega) = \frac{a}{2\pi n_1 (n_1 - i\omega)}.$$

Учитывая, что  $\varphi(\omega) = n_1/(n_1 - i\omega)$ , находим из (46.22)

$$g(\omega) = \frac{a^2}{\pi n_1 (n_1^2 + \omega^2)}.$$

Этой спектральной плотности соответствует экспоненциальная функция корреляции

$$\psi(\tau) = \frac{a^2}{n_1^2} e^{-n_1 |\tau|}.$$

11. Найти спектральную плотность процесса (46.18) в случае пуассоновских импульсов, представляющих собой экспоненциально затухающие синусоидальные пуги (рис. 47):

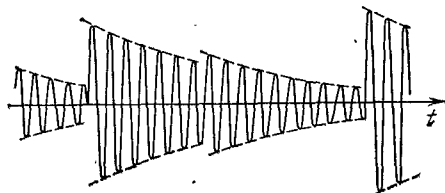


Рис. 47.

$$F\left(\frac{t-t_v}{\tau_v}, a_v\right) = a_v \exp[-(\gamma - i\omega_{0v}) \times (t-t_v) + \beta v].$$

Случайные величины  $a_v = \{a_v, \omega_{0v}, \beta v\}$  предполагаются взаимно независимыми. Этот процесс моделирует излучение осциллятора («атома»), возбуждаемого ударами в моменты  $t_v$ , после чего происходит высвечивание до следующего удара;  $1/\gamma$  — время высвечивания (в квантовой механике — время жизни возбужденного состояния), определяющее минимальную («радиационную») ширину спектральной линии. Частота  $\omega_{0v}$  в разных импульсах различна из-за эффекта Доплера, так как при ударах случайным образом меняется поступательная скорость «атома»  $v$  вдоль направления наблюдения, а сдвиг  $\omega_{0v}$  от частоты, излучаемой покоящимся атомом, пропорционален  $v$ .

Решение. Как и в предыдущей задаче,  $F$  — детерминированная функция и угловые скобки в (46.19) и (46.20) означают усреднение по параметрам  $a$ ,  $\omega_0$  и  $\beta$ . Вводя  $\theta = (t - t_v)/\tau$ , получаем по (46.21)

$$\tilde{F}(a, a) = \frac{ae^{i\beta}}{2\pi} \frac{1 - \exp[-(\gamma - i\omega_0)\tau - i\alpha]}{(\gamma - i\omega_0)\tau + i\alpha}.$$

Полагая  $\alpha = \omega\tau$  и  $w_\tau(\tau) = n_1 e^{-n_1\tau}$ , находим из (46.19) и (46.20)

$$K(\omega) = \frac{n_1 \bar{a}^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \left\langle \frac{1 - 2e^{-\gamma\tau} \cos(\omega_0 - \omega)\tau + e^{-2\gamma\tau}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \right\rangle e^{-n_1\tau} d\tau = \\ = \frac{(\gamma + n_1) \bar{a}^2}{2\pi^2 (2\gamma + n_1)} \left\langle \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma + n_1)^2} \right\rangle,$$

$$H(\omega) = \frac{n_1 \bar{a} e^{i\beta}}{2\pi} \int_0^\infty \left\langle \frac{\exp[-\gamma + i(\omega_0 - \omega)]\tau - 1}{i(\omega_0 - \omega) - \gamma} \right\rangle e^{-n_1\tau} d\tau = \\ = \frac{\bar{a} e^{i\beta}}{2\pi} \left\langle \frac{1}{\gamma + n_1 - i(\omega_0 - \omega)} \right\rangle,$$

$$I(\omega) = \frac{n_1 \bar{a} e^{i\beta}}{2\pi} \int_0^\infty \left\langle \frac{e^{-(\gamma - i\omega_0)\tau} - e^{i\omega\tau}}{i(\omega_0 - \omega) - \gamma} \right\rangle e^{-n_1\tau} d\tau = \\ = \frac{n_1 \bar{a} e^{i\beta}}{2\pi (n_1 - i\omega)} \left\langle \frac{1}{\gamma + n_1 - i(\omega_0 - \omega)} \right\rangle,$$

где теперь угловые скобки обозначают усреднение по распределению  $\omega_0$ . С учетом того, что  $\varphi(\omega) = n_1/(n_1 - i\omega)$ , имеем

$$\operatorname{Re} \frac{IH^*}{1 - \varphi} = \operatorname{Re} \frac{n_1 \bar{a}^2 |e^{i\beta}|^2}{4\pi^2 i\omega} \left| \left\langle \frac{1}{\gamma + n_1 - i(\omega_0 - \omega)} \right\rangle \right|^2 = 0,$$

т. е. в (46.22) остается (при любых распределениях  $a$ ,  $\beta$  и  $\omega_0$ ) только первый член:

$$g(\omega) = \frac{n_1 (\gamma + n_1) \bar{a}^2}{\pi (2\gamma + n_1)} \left\langle \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma + n_1)^2} \right\rangle. \quad (1)$$

Заметим, что при  $\bar{a} = 0$  и (или)  $e^{i\beta} = 0$  [т. е. при равномерном распределении фаз  $\beta$  в интервале  $(0, 2\pi)$ ] величины  $H(\omega)$  и  $I(\omega)$  обращаются в нуль и в формуле (46.22) остается только первый член без предположения о пуассоновском потоке моментов  $t_v$ .

В случае газа «атомов»-осцилляторов лучевая скорость  $v$  распределена нормально, в силу чего и доплеровский сдвиг  $\omega_0 - \bar{\omega}_0 \sim v$  имеет гауссово распределение. Однако интеграл

$$\left\langle \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma + n_1)^2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(\omega_0 - \bar{\omega}_0)^2 / 2\sigma_\omega^2}}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma + n_1)^2} d\omega_0 \quad (2)$$

при произвольном значении  $\omega$  не вычисляется в замкнутом виде. Вводя в (2) обозначения

$$x = \frac{\omega - \bar{\omega}_0}{\sqrt{2} \sigma_\omega}, \quad y = \frac{\omega_0 - \bar{\omega}_0}{\sqrt{2} \sigma_\omega}, \quad b = \frac{\gamma + n_1}{\sqrt{2} \sigma_\omega},$$

можно записать выражение (1) для спектральной плотности следующим образом:

$$g(\omega) = \frac{n_1 \bar{a}^2 U(b, x)}{(2\gamma + n_1) \sqrt{2} \sigma_\omega}, \quad U(b, x) = \frac{b}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(y-x)^2 + b^2}.$$

Функция  $U(b, x)$  называется (нормированной) функцией Фохта (см. [58]). Если параметр  $b$  мал, т. е. основную роль играет доплеровское уширение линии, то для грубой оценки можно вынести из-под интеграла значение экспоненты в точке  $y = x$ , и тогда  $U(b, x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ . Таким образом,

в этом случае получается форма линии, близкая к *гауссовой* (колокольной). Напротив, при  $b \gg 1$  можно вынести из-под интеграла знаменатель, положив в нем  $y = 0$ , что дает  $U(b, x) \approx \frac{b}{\pi(x^2 + b^2)}$ . Для  $g(\omega)$  получается формула (1) с  $\omega = \bar{\omega}_0$  и, конечно, уже без угловых скобок [при  $\sigma_\omega \rightarrow 0$  гауссово распределение  $\omega_0$  переходит в  $\delta(\omega_0 - \bar{\omega}_0) d\omega_0$ ]. Таким образом, при малой роли эффекта Доплера получается *лоренцева* форма линии с максимумом на  $\omega = \bar{\omega}_0$  и полушириной  $n_1 + \gamma$ . Радиационное затухание  $\gamma$  и среднее число соударений в единицу времени  $n_1$  входят в полуширину аддитивно. Полная интенсивность равна в этом случае

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) d\omega = \frac{n_1 \bar{a}^2}{2\gamma + n_1},$$

так что спектральную плотность можно записать в виде

$$g(\omega) = \frac{I}{\pi} \frac{n_1 + \gamma}{(\omega - \bar{\omega}_0)^2 + (n_1 + \gamma)^2}.$$

12. Если сложить  $N$  независимых процессов  $\xi_j(t)$  вида, рассмотренного в конце предыдущей задачи, т. е. интересоваться суммарным излучением  $N$  независимых одинаковых осцилляторов (без эффекта Доплера), то для

$\xi(t) = \sum_1^N \xi_j(t)$  спектральная плотность будет просто  $g_\Sigma(\omega) = Ng(\omega)$ , а

форма спектра останется прежней. Но, казалось бы, можно рассуждать иначе. Все независимые моменты ударов у всех осцилляторов  $t_{\nu_j}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ )

можно расположить в порядке их возрастания и занумеровать общим индексом  $\mu$ . Интервал  $t_{\mu+1} - t_\mu$  в среднем будет в  $N$  раз короче, чем у каждого процесса  $\xi_j(t)$  в отдельности, где он равен  $1/n_1$ , т. е. среднее число ударов в секунду для  $\xi(t)$  будет равно  $Nn_1$ . Форма импульса у процесса  $\xi(t)$  та же, что и у процессов  $\xi_j(t)$ , так как сумма цугов с некоторыми амплитудами и фазами, изменяющихся со временем по закону  $e^{-\gamma t + i\omega_0 t}$ , снова дает такой же затухающий цуг. Но тогда применение формулы (46.22) непосредственно к суммарному процессу  $\xi(t)$  должно дать лоренцеву линию с полушириной  $\gamma + Nn_1$ , а не  $\gamma + n_1$ , что противоречит выражению  $g_\Sigma(\omega) = Ng(\omega)$ . Объяснить, в чем причина противоречия.

Решение. При выводе (46.22) предполагалась *взаимная независимость* всех параметров  $a_\nu$  и  $\beta_\nu$  (частоту  $\omega_\nu = \bar{\omega}_0$  мы считаем теперь фиксированной), в результате чего все импульсы были *некоррелированы*. Для суммарного же процесса  $\xi(t)$  импульсы коррелированы, так как в каждый момент  $t_\mu$  случайным образом меняются амплитуда и фаза только одного из  $N$  складываемых колебаний  $j = 1, 2, \dots, N$ . Корреляция  $\mu$ -го импульса с соседними исчезнет лишь после того, как скачки произойдут у каждого из складываемых колебаний, а для этого потребуется в среднем  $N$  интервалов  $t_{\mu+1} - t_\mu$ , т. е. время  $1/n_1$ . Таким образом, формула (46.22) неприменима к суммарному процессу  $\xi(t)$  из-за наличия корреляции между его импульсами.

13. Выяснить, каково совместное влияние на видность интерференционной картины некогерентности излучения и малых флуктуаций угла падения волны  $\alpha$ , приняв гауссову форму спектральной линии и нормальное распределение для  $\alpha$  с  $\bar{\alpha} = 0$  и  $\alpha^2 = \sigma_\alpha^2$ . Для простоты можно положить, что

$$I_1 = I_2 = I = \frac{1}{2} \psi(0).$$

Решение. Согласно (47.14)

$$B(\tau - \tau_\alpha) = B(0) \exp \left\{ -\frac{\Omega^2 (\tau - \tau_\alpha)^2}{16} + i\omega_0 (\tau - \tau_\alpha) \right\}.$$

Если заменить (ввиду малости  $\sigma_\alpha^2$ )  $\sin \alpha$  на  $\alpha$ , то разность

$$\chi = \tau - \tau_\alpha = \tau - \frac{d}{c} \alpha$$

тоже будет нормальной величиной с  $\bar{\chi} = \tau$  и  $D[\chi] = \sigma^2 = d^2 \sigma_\alpha^2 / c^2$ , т. е. с распределением

$$w_\chi(\chi) d\chi = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(\chi - \tau)^2 / 2\sigma^2} d\chi.$$

Формула (47.18) приводит тогда к следующему выражению для безусловной функции корреляции  $\bar{B}(\tau)$ :

$$\bar{B}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\chi) w_\chi(\chi) d\chi = \frac{2I}{\sqrt{\beta}} \exp \left\{ -\left( \frac{\Omega^2 \tau^2}{16\beta} + \frac{\omega_0^2 \sigma^2}{2\beta} \right) + i \frac{\omega_0 \tau}{\beta} \right\}, \quad (1)$$

где  $\beta = 1 + \Omega^2 \sigma^2 / 8$ . Следовательно, усредненная по  $\alpha$  интенсивность (47.7) равна

$$\bar{I}(\tau) = I_1 + I_2 + \text{Re} \bar{B}(\tau) = 2I \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp \left[ -\left( \frac{\Omega^2 \tau^2}{16\beta} + \frac{\omega_0^2 \sigma^2}{2\beta} \right) \right] \cos \frac{\omega_0 \tau}{\beta} \right\}$$

и, соответственно, видность есть

$$\bar{V}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp \left[ -\left( \frac{\Omega^2 \tau^2}{16\beta} + \frac{\omega_0^2 \sigma^2}{2\beta} \right) \right].$$

В отсутствие флуктуаций угла  $\alpha$  ( $\sigma = 0$ ,  $\beta = 1$ ) мы возвращаемся к формуле (47.14). При  $\sigma \neq 0$ , но при идеальной монохроматичности ( $\Omega = 0$ ,  $\beta = 1$ ) получаем

$$\bar{V}(\tau) = e^{-\omega_0^2 \sigma^2 / 2}.$$

т. е. видность снижена на протяжении всей интерференционной картины одинаково и быстро убывает с ростом  $\sigma^2 = d^2 \sigma_a^2 / c^2$ . Согласно (1)

$$\bar{K}(\tau) = \frac{\bar{B}(\tau)}{\bar{B}(0)} = \exp \left\{ -\frac{\Omega^2 \tau^2}{16\beta} + i \frac{\omega_0 \tau}{\beta} \right\},$$

так что при  $\sigma \neq 0$   $\bar{V}(\tau) \neq |\bar{K}(\tau)|$ .

14. Рассчитать видность интерференционной картины в том случае, когда стационарные квазимонохроматические колебания на щелях интерферометра имеют вид

$$\zeta_j(t) = e^{i[\omega_0 t + \varphi_j(t)]}, \quad j = 1, 2,$$

причем  $\overline{\varphi_j(t)} = 0$ ,  $\overline{\varphi_j^2(t)} = \sigma^2$ ,  $\overline{\varphi_1(t + \tau) \varphi_2(t)} = \sigma^2 K(\tau)$  и разность  $\varphi_1(t + \tau) - \varphi_2(t)$  распределена по нормальному закону.

Решение. При указанных условиях

$$\overline{\cos(\varphi_{1\tau} - \varphi_2)} = e^{-\overline{(\varphi_{1\tau} - \varphi_2)^2}/2}, \quad \overline{\sin(\varphi_{1\tau} - \varphi_2)} = 0, \\ \overline{(\varphi_{1\tau} - \varphi_2)^2} = 2\sigma^2 [1 - K(\tau)].$$

Следовательно, интенсивность в интерференционной картине меняется по закону

$$I(\tau) = 2 [1 + \overline{\cos(\omega_0 \tau + \varphi_{1\tau} - \varphi_2)}] = 2 [1 + e^{-\sigma^2 [1 - K(\tau)]} \cos \omega_0 \tau],$$

т. е. видность полос равна

$$V(\tau) = e^{-\sigma^2 [1 - K(\tau)]}.$$

При  $K(\tau) \neq 1$  видность падает с ростом дисперсии фаз  $\sigma^2$ . Видность равна единице либо при полной корреляции ( $K = 1$ ), либо в отсутствие флуктуаций фаз ( $\sigma^2 = 0$ ), т. е. при идеальной монохроматичности колебаний.

15. Найти матрицу спектральных плотностей для колебаний двух связанных осцилляторов, на которые действуют взаимно некоррелированные стационарные белые шумы:

$$\ddot{x}_1 + 2h_1 \dot{x}_1 + n_1^2 x_1 - \kappa x_2 = f_1(t), \quad \ddot{x}_2 + 2h_2 \dot{x}_2 + n_2^2 x_2 - \kappa x_1 = f_2(t), \quad (1)$$

$$\langle \tilde{f}_j(\omega) \tilde{f}_k^*(\omega') \rangle = N_j \delta_{jk} \delta(\omega - \omega'), \quad j, k = 1, 2. \quad (2)$$

Решение. Согласно (1), уравнения для спектральных амплитудных плотностей  $\tilde{x}_{1,2}(\omega)$  таковы:

$$\tilde{x}_1(\omega) Z_1(i\omega) - \kappa \tilde{x}_2(\omega) = \tilde{f}_1(\omega), \quad \tilde{x}_2(\omega) Z_2(i\omega) - \kappa \tilde{x}_1(\omega) = \tilde{f}_2(\omega),$$

где  $Z_j(i\omega) = n_j^2 - \omega^2 + 2i\omega h_j$ ,  $j = 1, 2$ . Отсюда

$$\tilde{x}_1(\omega) = \frac{Z_2 \tilde{f}_1(\omega) + \kappa \tilde{f}_2(\omega)}{Z_1 Z_2 - \kappa^2}, \quad \tilde{x}_2(\omega) = \frac{\kappa \tilde{f}_1(\omega) + Z_1 \tilde{f}_2(\omega)}{Z_1 Z_2 - \kappa^2}. \quad (3)$$

Составив корреляционную матрицу спектральных амплитудных плотностей  $\tilde{x}_1(\omega)$  и  $\tilde{x}_2(\omega)$ :

$$\langle \tilde{x}_j(\omega) \tilde{x}_k^*(\omega') \rangle = g_{jk}(\omega) \delta(\omega - \omega'),$$

получаем при помощи (2) и (3)

$$g_{11}(\omega) = \frac{|Z_2|^2 N_1 + \kappa^2 N_2}{|Z_1 Z_2 - \kappa^2|^2}, \quad g_{22}(\omega) = \frac{\kappa^2 N_1 + |Z_1|^2 N_2}{|Z_1 Z_2 - \kappa^2|^2},$$

$$g_{12}(\omega) = g_{21}^*(\omega) = \frac{\kappa (Z_2 N_1 + Z_1^* N_2)}{|Z_1 Z_2 - \kappa^2|^2}.$$

Разумеется, взаимная корреляция откликов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  обусловлена наличием связи  $\kappa$  и исчезает при  $\kappa = 0$ . Если осцилляторы идентичны и спектральные плотности шумов одинаковы ( $N_1 = N_2 = N$ ), то

$$g_{11}(\omega) = g_{22}(\omega) = \frac{N (|Z|^2 + \kappa^2)}{|Z^2 - \kappa^2|^2}, \quad g_{12}(\omega) = g_{21}(\omega) = \frac{2\kappa N \operatorname{Re} Z}{|Z^2 - \kappa^2|^2}.$$

Корреляционная матрица откликов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  может быть получена из  $g_{jk}(\omega)$  по теореме Хинчина:

$$B_{jk}(\tau) = \langle x_j(t + \tau) x_k^*(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{jk}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$



## ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ. НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

### § 50. Спектральная теория воздействия случайных процессов на гармонические системы

При временном описании внешнего воздействия на линейную систему с постоянными параметрами последняя характеризуется своим откликом  $H(t - \theta)$  на «силу»  $\delta(\theta)$  (§ 37). Отклик на произвольную «силу»  $f(t)$  выражается интегралом Дюамеля, который при нулевых начальных условиях имеет вид

$$\xi(t) = \int_0^t H(t - \theta) f(\theta) d\theta = \int_0^t H(\theta) f(t - \theta) d\theta. \quad (50.1)$$

Отсюда ясно, что для вычисления любого момента  $n$ -го порядка выходного процесса  $\xi(t)$  надо знать смешанный момент того же порядка для входного процесса  $f(t)$ . Так, среднее значение  $\xi(t)$  и его смешанный момент второго порядка выражаются формулами (37.17) и (37.18):

$$\overline{\xi(t)} = \int_0^t H(\theta) \overline{f(t - \theta)} d\theta, \quad (50.2)$$

$$\begin{aligned} B_{\xi}(t + \tau, t) &= \overline{\xi(t + \tau) \xi(t)} = \\ &= \int_0^t H(\theta) d\theta \int_0^{t+\tau} H(\theta') B_f(t - \theta, t + \tau - \theta') d\theta', \end{aligned} \quad (50.3)$$

где  $B_f(t_1, t_2) = \overline{f(t_1) f(t_2)}$ . Если, в частности, «сила»  $f(t)$  стационарна и  $\overline{f(t)} = 0$ , то

$$\begin{aligned} \overline{\xi(t)} &= 0, \\ \psi_{\xi}(t + \tau, t) &= \int_0^t H(\theta) d\theta \int_0^{t+\tau} H(\theta') \psi_f(\tau + \theta - \theta') d\theta', \end{aligned} \quad (50.4)$$

поскольку  $\psi_f(t_1, t_2) = \psi_f(t_1 - t_2)$ . Наконец, если нас интересует *установившийся* отклик на стационарное воздействие  $f(t)$ , надо в (50.1) и (50.4) устремить верхний предел в  $+\infty^1$ . Так как для реализуемой пассивной системы  $H(t) = 0$  при  $t < 0$ , можно заменить нижний предел на  $-\infty$ , и формула (50.4) примет вид

$$\psi_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} H(\theta') \psi_f(\tau + \theta - \theta') d\theta',$$

или

$$\psi_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\chi) \psi_f(\tau - \chi) d\chi, \quad (50.5)$$

где введена «корреляционная функция» импульсного отклика

$$H_2(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\theta) H(\theta + \chi) d\theta \quad (50.6)$$

[см. (37.20) и (37.21)].

При спектральном подходе гармоническая система, динамическое уравнение которой можно записать, например, в виде

$$\hat{L}[\xi(t)] = \hat{M}[f(t)],$$

где  $\hat{L}$  и  $\hat{M}$  — линейные операторы, не зависящие от  $t$ , описывается своей функцией передачи  $k(i\omega)$ , представляющей собой, как известно, комплексную амплитуду *установившегося* вынужденного колебания  $\xi(t) = k(i\omega) e^{i\omega t}$  при воздействии гармонического колебания  $f(t) = e^{i\omega t}$ . Если  $\hat{L}$  и  $\hat{M}$  — полиномы по степеням  $d/dt$ , то  $k(i\omega)$  будет, очевидно, дробно-рациональной функцией  $i\omega$ , но такая специализация вида  $k(i\omega)$  для дальнейшего не необходима.

Зная  $k(i\omega)$  и разложив  $f(t)$  и  $\xi(t)$  в интегралы Фурье — Стильтеса:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dC_{\xi}(\omega), \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dC_f(\omega),$$

мы сразу же можем записать соотношение между спектральными амплитудами обоих процессов:

$$dC_{\xi}(\omega) = k(i\omega) dC_f(\omega) \quad (50.7)$$

и, следовательно,

$$\overline{dC_{\xi}(\omega) dC_{\xi}^*(\omega')} = k(i\omega) k^*(i\omega') \overline{dC_f(\omega) dC_f^*(\omega')}. \quad (50.8)$$

<sup>1)</sup> Это соответствует отодвиганию в  $-\infty$  начального момента  $t_0$ . В (50.1) и последующих формулах мы принимали  $t_0 = 0$ .

Если внешнее воздействие  $f(t)$  стационарно, так что

$$\overline{dC_f(\omega)} = 0, \quad \overline{dC_f(\omega) dC_f^*(\omega')} = \delta(\omega - \omega') d\omega' dG_f(\omega),$$

то, согласно (50.7) и (50.8),

$$\overline{dC_\xi(\omega)} = 0, \quad \overline{dC_\xi(\omega) dC_\xi^*(\omega')} = \delta(\omega - \omega') d\omega' dG_\xi(\omega),$$

где

$$dG_\xi(\omega) = |k(i\omega)|^2 dG_f(\omega). \quad (50.9)$$

Таким образом, при спектральном представлении стационарность  $f(t)$  влечет за собой стационарность установившегося отклика  $\xi(t)$ . В случае сплошного спектра можно записать (50.9) через спектральные плотности:

$$g_\xi(\omega) = |k(i\omega)|^2 g_f(\omega) \quad (50.10)$$

— спектральная плотность на выходе получается из спектральной плотности на входе просто умножением последней на квадрат модуля функции передачи. По теореме Винера — Хинчина функция корреляции на выходе будет

$$\psi_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dG_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} |k(i\omega)|^2 dG_f(\omega). \quad (50.11)$$

Во многих случаях интеграл удобно вычислять при помощи вычетов в полюсах  $|k(i\omega)|^2$ , которые у функции передачи  $k(i\omega)$  диссипативной системы лежат в верхней полуплоскости комплексной частоты  $\omega$ .

Как мы уже отмечали (§ 40), локализация интенсивности по частоте, имеющая место для стационарных процессов, получает однозначный смысл именно при гармонической фильтрации. Действительно, фильтр с соответствующей полосой пропускания, т. е. с подходящей функцией передачи  $k(i\omega)$ , открывает принципиальную возможность физически выделить требуемый интервал  $(\omega_1, \omega_2)$  и тем самым *проверить*, что из полной «мощности»  $|f|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g_f(\omega) d\omega$  на этот интервал приходится доля

$\int_{\omega_1}^{\omega_2} g_f(\omega) d\omega$ . Опираясь только на полную интенсивность, мы

могли бы добавить к  $g_f(\omega)$  функции  $g_1(\omega)$ , произвольные во всех отношениях, кроме условий

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\omega) d\omega = 0$$

(т. е.  $|f|^2$  не меняется) и  $g_f(\omega) + g_1(\omega) \geq 0$  при всех  $\omega$ .

Как ясно из (50.11), гармоническая фильтрация сохраняет дискретно-сплошной характер спектра. Если на вход фильтра подается суперпозиция дискретных гармонических колебаний и шума с непрерывным спектром, то и на выходе получится такого же рода суперпозиция, хотя форма сплошного спектра и соотношение интенсивностей дискретных линий изменяется в соответствии с весовым множителем  $|k(i\omega)|^2$ .

Связь временного и спектрального подходов мы рассмотрим несколько дальше, но отметим уже теперь, что спектральное представление наиболее просто и целесообразно при рассмотрении стационарных воздействий. Если нас интересует нестационарное воздействие (а к этому случаю сводится и вопрос об *установлении* колебаний в самой системе, если считать, что «сила»  $f(t)$  начала действовать в момент  $t = 0$ ), то локальная связь между функциями корреляции спектральных амплитуд утрачивается. Напротив, интегралы (50.2) и (50.3) охватывают как нестационарные воздействия  $f(t)$ , так и неустановившиеся режимы [через явно учтенные начальные условия, хотя бы и при стационарном процессе  $f(t)$ ].

Рассмотрим простой пример  $RC$ -ячейки, включенной в анодную цепь лампы (рис. 48). Если  $I$  — дробовой ток лампы, то шумовая компонента  $v$  напряжения на ячейке связана с  $I$  уравнением

$$\dot{v} + \frac{v}{\theta} = \frac{I}{C} \quad (\theta = RC). \quad (50.12)$$

Таким образом, функция передачи ( $\xi \equiv v$ ,  $f \equiv I$ ) есть

$$k(i\omega) = \frac{\theta}{C(1 + i\omega\theta)}$$

и спектральная плотность напряжения  $v(t)$ , если учесть, что для дробового тока  $g_I(\omega) = Ie/2\pi$  [см. (43.2)], будет

$$g_v(\omega) = |k(i\omega)|^2 g_I(\omega) = \frac{\theta^2 Ie}{2\pi C^2} \frac{1}{1 + \omega^2 \theta^2}. \quad (50.13)$$

Функция корреляции  $v(t)$  равна

$$\psi_v(\tau) = \frac{\theta^2 Ie}{2\pi C^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau} d\omega}{1 + \omega^2 \theta^2} = \bar{v}^2 e^{-|\tau|/\theta}, \quad (50.14)$$

где

$$\bar{v}^2 = \frac{IeR}{2C}.$$

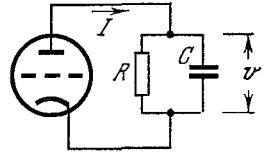


Рис. 48.

При  $\tau > 0$  интеграл берется вычетом в полюсе  $\omega = i/\theta$ , а при  $\tau < 0$  — вычетом в полюсе  $\omega = -i/\theta$ .

Как мы знаем, уравнение (50.12) при дельта-коррелированном воздействии  $I(t)$  является символическим, поскольку  $\dot{v}$  не существует. Что это означает со спектральной точки зрения? Если

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dC_v(\omega),$$

то формально

$$\dot{v}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} i\omega dC_v(\omega).$$

Условие существования  $\dot{v}(t)$  есть

$$|\overline{\dot{v}}|^2 = \psi_v(0) = -\psi_v''(0) < \infty.$$

Но, согласно (50.13),

$$\psi_v''(\tau) = -\frac{\theta^2 \bar{I} e}{2\pi C^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau} \omega^2 d\omega}{1 + \omega^2 \theta^2},$$

откуда ясно, что при  $\tau = 0$  интеграл расходится. Если бы плотность  $g_I(\omega)$  не была постоянной, т. е. дробовой ток не считался бы дельта-коррелированным, то мы имели бы

$$\psi_v''(0) = -\frac{\theta^2}{C^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_I(\omega) \omega^2 d\omega}{1 + \omega^2 \theta^2} < \infty,$$

т. е.  $\dot{v}(t)$  существовала бы и стохастическое уравнение (50.11) не надо было бы считать символическим.

Нетрудно обобщить это рассуждение. Последовательно дифференцируя

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} k(i\omega) dC_f(\omega) \quad (50.15)$$

по  $t$ , мы приходим к тому, что условием существования производной  $\xi^{(m)}(t)$  является требование конечности

$$\begin{aligned} (-1)^m \psi_{\xi}^{(2m)}(0) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m} g_{\xi}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |k(i\omega)|^2 \omega^{2m} g_f(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (50.16)$$

Если  $\xi(t)$  удовлетворяет уравнению вида

$$\xi^{(n)} + a_1 \xi^{(n-1)} + \dots + a_n \xi = f(t), \quad (50.17)$$

то  $|k(i\omega)|^2$  равно единице, деленной на полином степени  $2n$  по  $\omega$ . При  $m < n$  сходимость интеграла (50.16) обеспечена даже в том случае, когда «сила»  $f(t)$  — белый шум [ $g_f(\omega) = \text{const}$ ]. Но для существования  $\xi^{(n)}(t)$  уже необходима интегрируемость  $g_f(\omega)$ . Таким образом, если  $f(t)$  — белый шум, то уравнение (50.17) символическое, поскольку  $\xi^{(n)}$  не существует.

Сопоставим теперь спектральный и временной подходы к задаче о гармонической фильтрации стационарных процессов. Для функции корреляции *установившегося* отклика  $\xi(t)$  на *стационарную* «силу»  $f(t)$  мы располагаем, с одной стороны, спектральным выражением (50.11), а с другой — формулой (50.5), вытекающей из представления  $\xi(t)$  в виде интеграла Дюамеля. Нетрудно убедиться, что оба выражения совпадают. Для этого надо только вспомнить, что импульсный отклик  $H(t)$  и функция передачи  $k(i\omega)$  связаны преобразованием Фурье:

$$H(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(i\omega) e^{i\omega\theta} d\omega, \quad k(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta. \quad (50.18)$$

По теореме (42.9) о спектре интеграла вида (50.6) спектральная амплитуда  $H_2(\chi)$  есть

$$2\pi \frac{k(i\omega)}{2\pi} \frac{k^*(i\omega)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} |k(i\omega)|^2, \quad (50.19)$$

так что

$$H_2(\chi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |k(i\omega)|^2 e^{i\omega\chi} d\omega. \quad (50.20)$$

Но, согласно (50.5), функция корреляции  $\psi_\xi(\tau)$  является сверткой функций  $H_2(\tau)$  и  $\psi_f(\tau)$ , спектральные амплитуды которых равны соответственно (50.19) и спектральной плотности  $g_f(\omega)$  процесса  $f(t)$ . Следовательно, спектральная амплитуда  $\psi_\xi(\tau)$  есть <sup>1)</sup>  $2\pi \frac{|k(i\omega)|^2}{2\pi} g_f(\omega)$ , что совпадает с (50.10).

Рассмотрим следующие два примера.

1. Пусть спектр  $g_f(\omega)$  и квадрат модуля функции передачи  $|k(i\omega)|^2$  — достаточно «хорошие» плавные функции, не имеющие, помимо главного максимума на некоторой частоте, сильных выбросов вдали от нее. Пусть спектр  $g_f(\omega)$  гораздо шире,

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 286.

чем  $|k(i\omega)|^2$  (рис. 49). Тогда в пределах полосы фильтра  $g_f(\omega) \approx g_f(\omega_0)$  и по (50.11) и (50.20) получаем

$$\psi_{\xi}(\tau) \approx g_f(\omega_0) \int_{-\infty}^{+\infty} |k(i\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi g_f(\omega_0) H_2(\tau),$$

т. е.  $\psi_{\xi}(\tau)$  определяется свойствами фильтра. Такой же результат следует, конечно, и из (50.5), если учесть, что  $\psi_f(\tau)$  спадает гораздо быстрее, чем  $H_2(\tau)$ :

$$\psi_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\tau - \chi) \psi_f(\chi) d\chi \approx H_2(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_f(\chi) d\chi = 2\pi g_f(0) H_2(\tau).$$

Эта оценка грубее предыдущей [ $g_f(0)$  вместо  $g_f(\omega_0)$ ], но обе дают одну и ту же зависимость от  $\tau$ .

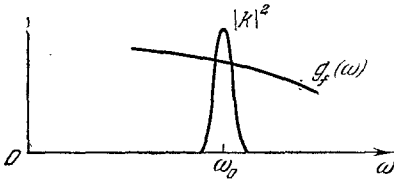


Рис. 49.

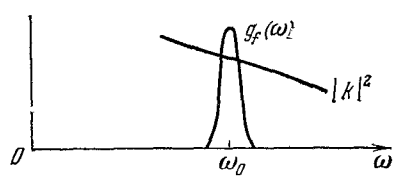


Рис. 50.

2. Пусть теперь, наоборот,  $g_f(\omega)$  гораздо уже, чем  $|k(i\omega)|^2$  (рис. 50), т. е.  $\psi_f(\tau)$  спадает гораздо медленнее, чем  $H_2(\tau)$ . Тогда  $|k(i\omega)|^2 \approx |k(i\omega_0)|^2$ , а значит, спектр и функция корреляции на выходе с точностью до коэффициента те же, что и на входе. По (50.11)

$$\psi_{\xi}(\tau) \approx |k(i\omega_0)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = |k(i\omega_0)|^2 \psi_f(\tau),$$

а по (50.5)

$$\psi_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\chi) \psi_f(\tau - \chi) d\chi \approx \psi_f(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\chi) d\chi = |k(0)|^2 \psi_f(\tau).$$

Итак, спектр на выходе фильтра формируется наиболее узкополосной из функций  $g_f(\omega)$  и  $|k(i\omega)|^2$  и, соответственно, выходная функция корреляции формируется наиболее медленной из функций  $f(t)$  и  $H_2(\tau)$ . Время корреляции на выходе  $\psi_{\xi}$  порядка наибольшей из величин  $\psi_f$  (время корреляции на входе) и  $\psi$  (время установления фильтра). Разумеется, эти качественные и сжатые формулировки тем точнее, чем сильнее различие между полосами или между временами, о которых идет речь.

Таким образом, влияние гармонической фильтрации на корреляционную функцию процесса на выходе фильтра представляется на первый взгляд очевидным. Функции передачи реальных диссипативных систем в той или иной мере суживают спектр входного воздействия и, следовательно, «удлиняют» корреляцию на выходе по сравнению со входом. В частности, при белом шуме на входе (т. е.  $g_f = \text{const}$  и время корреляции  $\vartheta_f = 0$ ) ход спектральной плотности на выходе, согласно (50.10), всецело определяется самой системой  $[g_\xi(\omega) = g_f |k(i\omega)|^2]$ . Поэтому

$$\psi_f(\tau) = g_f \int_{-\infty}^{+\infty} |k(i\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega$$

и отличное от нуля время корреляции  $\vartheta_\xi$  определяется просто временем установления фильтра. С таким случаем мы имели дело в рассмотренном выше примере  $RC$ -ячейки [формула (50.14)], где  $\vartheta_\xi = \vartheta$ .

Это понятно и с временной точки зрения. Фильтр *затягивает* входные импульсы, так что всегда  $\vartheta_\xi > \vartheta_f$  и неравенство тем сильнее, чем уже полоса пропускания фильтра. Поэтому напрашивается следующий, тоже, казалось бы, очевидный вывод, касающийся функции распределения выходного процесса.

Если процесс  $f(t)$  гауссов, то, как мы знаем, на выходе тоже будет гауссов процесс. Это ясно и из (50.1), если вспомнить, что сумма (в пределе — интеграл) нормальных процессов есть нормальный процесс. Если же входной процесс не гауссов, то в общем случае не будет гауссовым и выходной процесс. Но при очень узкой полосе фильтра, т. е. при  $\vartheta_\xi \gg \vartheta_f$ , мы получаем, что отклик  $\xi(t)$ , состоящий, грубо говоря, из откликов на  $f(t)$  за время от  $t - \vartheta_\xi$  до  $t$ , охватывает очень много интервалов  $\vartheta_f$ , т. е. очень много не коррелированных между собой воздействий. Если, например, входной процесс — импульсный шум, для которого условие нормальности распределения не выполнено, т. е. (см. § 10)

$$n_f \vartheta_f \leq 1,$$

то за счёт  $\vartheta_\xi \gg \vartheta_f$  может случиться, что на выходе будет

$$n_f \vartheta_\xi \gg 1,$$

и распределение процесса  $\xi(t)$  на выходе фильтра, в соответствии с центральной предельной теоремой (§ 10), должно быть ближе к нормальному. В очень многих случаях это действительно так, а именно в тех случаях, когда импульсный процесс  $f(t)$  на входе фильтра состоит из импульсов *простой* формы  $F(t)$ . Тогда оценка временной размытости импульса ( $\Delta\tau_F$ ), про-



изведенная по ширине его огибающей ( $\vartheta_F$ ), имеет тот же порядок величины, что и оценка по «временной корреляции» импульса ( $\tau_{F_K}$ ). Другими словами,  $\vartheta_F \sim \tau_{F_K}$ , а так как ширина спектра  $\Delta\omega_F \sim 1/\tau_{F_K}$ , произведение размытостей  $\Delta\omega_F \cdot \Delta\tau_F \sim \Delta\omega_F \cdot \vartheta_F \sim 1$ . При этих условиях предыдущие рассуждения вполне справедливы и узкополосная фильтрация действительно «нормализует» процесс  $\xi(t)$  на выходе фильтра<sup>1)</sup>. Но для импульсов сложной формы, когда  $\Delta\omega_F \cdot \vartheta_F \sim \vartheta_F/\tau_{F_K} \gg 1$  (§ 42), можно устроить такую фильтрацию, которая «денормализует» выходной процесс по сравнению со входным [2—4].

Речь идет о случае, когда при сложном импульсе  $F(t)$  на входе ( $\tau_{F_K} \ll \vartheta_F$ ) специально подобранный фильтр уменьшает эффективную длительность выходного импульса до «времени корреляции»  $\tau_{F_K}$ . Конечно, полная длительность выходного импульса, как всегда, возрастает ( $\vartheta_\xi > \vartheta_F$ ). Она не может быть меньше  $\vartheta_F$  хотя бы потому, что после окончания входного импульса колебания на выходе еще продолжают в течение времени установления фильтра. Но подавляющая доля энергии выходного импульса оказывается сосредоточенной в интервале ширины порядка  $\tau_{F_K}$ .

Такой эффект дает фильтр, согласованный со входным импульсом  $F(t)$ , т. е. фильтр, у которого импульсный отклик  $H(t)$  «зеркален» по отношению к  $F(t)$ :

$$H(t) = F(t_0 - t). \quad (50.21)$$

Момент  $t_0$  может быть здесь любым, но не меньшим  $\vartheta_F$  ( $t_0 \geq \vartheta_F$ ), так как начало отклика не должно предшествовать началу импульса  $F(t)$  на входе (условие реализуемости фильтра).

Пусть на вход такого согласованного фильтра подан импульсный пуассоновский процесс вида

$$f(t) = \sum_{\nu} a_{\nu} F(t - t_{\nu}), \quad (50.22)$$

<sup>1)</sup> В работе [1] получена простая количественная оценка верхней границы  $B$  отклонения распределения  $\xi(t)$  от гауссовой плотности вероятности

$$|\omega_{\xi}(x) - \omega_r(x)| < B$$

и показано, что  $B \rightarrow 0$  при сужении полосы фильтра ( $\Delta\omega_H \rightarrow 0$ ). Это сделано в предположении, что процесс на входе фильтра обладает порогом для времени статистической зависимости, т. е.  $f(t)$  и  $f(t + \tau)$  при  $\tau > a$  независимы. В частности, для отклика  $\xi(t) = \sum_{\nu} H(t - t_{\nu})$  на дробовой шум  $f(t) = \sum_{\nu} \delta(t - t_{\nu})$  получено, что  $B = \Delta\omega_H/2n_1$ , где  $n_1$  — средняя плотность импульсов.

функция корреляции которого пропорциональна «функции корреляции» импульса  $F(t)$  [см. (42.12) и (42.22)]:

$$\psi_f(\tau) = n_1 \bar{a}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta = n_1 \bar{a}^2 \Psi_F(t). \quad (50.23)$$

Согласно (50.22) и (50.21) на выходе фильтра получится процесс

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) H(t - \theta) d\theta = \sum_{\nu} a_{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta - t_{\nu}) F(t_0 - t + \theta) d\theta = \\ &= \sum_{\nu} a_{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\chi) F(\chi + t - t_0 - t_{\nu}) d\chi = \sum_{\nu} a_{\nu} \Psi_F(t - t_0 - t_{\nu}). \end{aligned} \quad (50.24)$$

Таким образом, импульсы на выходе описываются «функцией корреляции» входного импульса:

$$F_{\xi}(t) = \Psi_F(t - t_0).$$

Соответственно импульс  $F_{\xi}(t)$  сосредоточен в основном на интервале корреляции  $\tau_{F_{\kappa}}$ , который при сложной форме  $F(t)$  гораздо меньше  $\vartheta_F$  ( $\tau_{F_{\kappa}} \ll \vartheta_F < \vartheta_{\xi}$ ). Такое «сжатие» сложных импульсов согласованным фильтром широко используется в настоящее время в устройствах оптимального обнаружения сигналов, в частности — в радиолокации [5].

На рис. 51, а показаны сложный импульс  $F(t)$  с прямоугольной огибающей, заполненной частотно-модулированным колебанием с линейно меняющейся частотой, и импульсный отклик  $H(t)$  согласованного фильтра. На рис. 51, б изображены огибающие такого входного импульса  $\bar{F}(t)$  и отклика  $\bar{F}_{\xi}(t)$  согласованного фильтра. Огибающая  $|\bar{F}_{\xi}(t)|$  содержит главный максимум, в котором сосредоточена основная доля энергии и ширина которого  $\tau_{F_{\kappa}}$  порядка  $1/\alpha\vartheta_F$ , где  $\alpha\vartheta_F$  — девиация мгновенной частоты  $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$  на ширине  $\vartheta_F$  входного импульса (см. задачу 6 гл. VI).

Почему же распределение пуассоновского процесса (50.24) на выходе согласованного фильтра денормализуется? Дело в том, что для центральной предельной теоремы существенно *равноправность* независимых случайных слагаемых — в смысле одинаковой малости вклада каждого из них в суммарную дисперсию (§ 12). Здесь же, хотя процесс  $\xi(t)$  содержит больше импульсов, возникающих на полной длине импульса  $F_{\xi}(t)$ , чем процесс  $f(t)$ , т. е.

$$n_1 \vartheta_{\xi} > n_1 \vartheta_F,$$

слагаемые очень неравноправны. Гораздо чаще в  $\xi(t)$  перекрываются маленькие боковые лепестки импульсов  $\bar{F}_{\xi}(t)$  и лишь

изредка получают сильные выбросы, обусловленные наложением главных максимумов. Среднее число случайных слагаемых этого второго типа порядка  $n_1 \tau_{F_K} \ll n_1 \vartheta_F < n_1 \vartheta_{\xi}$ , и, если их выделить, их распределение гораздо дальше от нормального, чем распределение  $f(t)$ . Но эти сильные выбросы содержат около 90% всей мощности процесса  $\xi(t)$  [3], и поэтому характер распределения процесса  $\xi(t)$  в целом определяется в основном именно ими. Таким образом, явление денормализации ни в коей мере не противоречит центральной предельной теореме. Просто

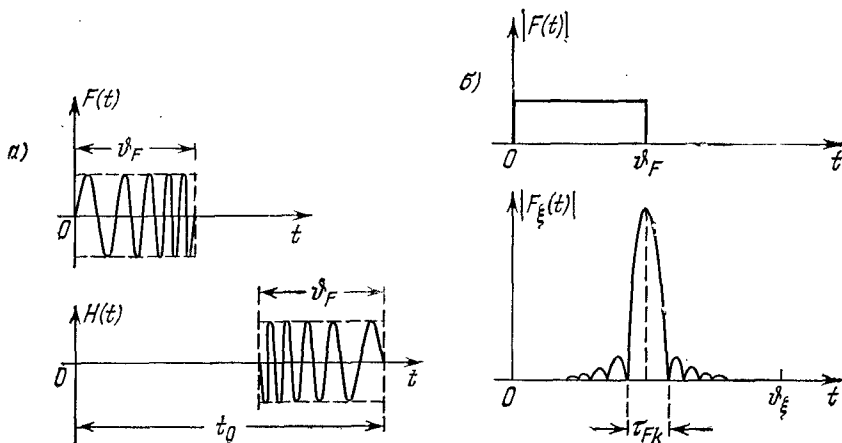


Рис. 51.

для нормализации распределения  $\xi(t)$  по сравнению с  $f(t)$  нужно, чтобы фильтр увеличивал эффективную длительность выходного импульса  $F_{\xi}(t)$ . Эта длительность близка к  $\vartheta_{\xi} > \vartheta_f$  в случае простых импульсов  $F(t)$ , но уменьшается до  $\tau_{F_K} \ll \vartheta_F < \vartheta_{\xi}$  при сложных импульсах и согласованном с ними фильтре<sup>1)</sup>.

### § 51. Случайное воздействие на безынерционные нелинейные системы

Во многих случаях представляет интерес воздействие на нелинейную систему детерминированного и (или) случайного процесса (детерминированный сигнал плюс шум, случайный сигнал

<sup>1)</sup> В работе [3] вычислены количественные характеристики денормализации для пуассоновского процесса, состоящего из импульсов показанного на рис. 51, а вида. Выяснена зависимость эффекта от степени согласования фильтра и показано, что при точном согласовании денормализация может быть очень сильной. Отношение коэффициентов эксцесса  $\gamma = \lambda_4 / \lambda_2^2$  (§ 10) входного и выходного процессов ( $\gamma_{\xi} / \gamma_f$ ) может достигать в реальных условиях значений  $10^2 - 10^3$ .

плюс шум, только шум), причем сама система состоит не только из собственно нелинейных элементов (детекторы, ограничители), но и из линейных цепей (фильтры, резонансные контуры и т. п.). Такая система описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, которые могут содержать кроме аргумента  $t$  еще и «запаздывающий аргумент»  $t - \theta$  (наличие линий задержки). Одна из возможных задач состоит в том, чтобы при полном задании процесса на входе, т. е. при известных его конечномерных распределениях, получить столь же полное описание выходного процесса. Задача эта очень трудна даже для линейных систем, а для нелинейных сделано совсем немного (см., например, [6, 7]).

Универсальных методов здесь не существует (как, впрочем, и для случая детерминированного воздействия), и в каждой конкретной задаче приходится искать какие-либо приемы, приуроченные либо к специальному виду уравнений, описывающих систему, либо к специальному характеру воздействия (например, марковский процесс, белый шум и т. д.), либо к ограниченной постановке вопроса. Нас могут, скажем, интересовать на выходе не функции распределения, а лишь среднее значение и функция корреляции.

Дело обстоит значительно легче, если речь идет о *безынерционных* нелинейных системах, т. е. просто о нелинейной функциональной связи входного процесса  $\xi(t)$  и выходного процесса  $\eta(t)$ :

$$\eta(t) = F[\xi(t)], \quad (51.1)$$

где функция  $F$  описывает характеристику нелинейного элемента (детектора, ограничителя и т. п.). Цепь может содержать при этом и линейную нагрузку, но чисто активную: наличие реактивных параметров сразу приводит к нелинейному дифференциальному уравнению. В случае безынерционной нелинейности нахождение конечномерных распределений  $\eta(t)$ , если таковые известны для  $\xi(t)$ , не представляет затруднений, но сначала мы коснемся вычисления моментов  $\eta(t)$ .

Для нахождения какого-либо момента  $n$ -го порядка вида

$$\overline{\eta^\alpha(t_1) \eta^\beta(t_2) \dots \eta^\kappa(t_k)}, \quad \alpha + \beta + \dots + \kappa = n, \quad (51.2)$$

на выходе линейной системы надо [поскольку  $\eta(t)$  выражается как линейный оператор от  $\xi(t)$ ] знать только смешанный момент  $\xi(t)$  того же порядка  $n$  вида

$$\overline{\xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_n)}.$$

В случае нелинейной системы, даже столь простой, как (51.1), этого уже недостаточно. Момент вида (51.2) может быть вычислен, только если известна  $k$ -мерная функция распределения



Это выражение и давало бы полный ответ, если бы не одно усложнение, связанное с тем, что характеристики реальных нелинейных устройств зачастую обладают *неоднозначной* обратной функцией  $F^{-1}$ . Рассмотрим поэтому именно такой случай.

На рис. 52 показаны два примера нелинейных характеристик  $y = F(x)$ , первой из которых соответствует однозначная

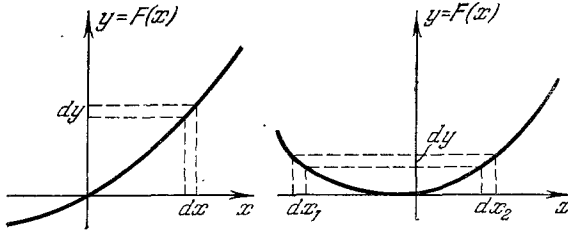


Рис. 52.

обратная функция  $x = F^{-1}(y)$ , а второй — двузначная. В первом случае попадание  $y$  в интервал  $dy$  имеет ту же вероятность, что и попадание  $x$  в интервал  $dx = |F^{-1'}(y)| dy$ , так что

$$\omega_{\eta}^{(1)}(y) dy = \omega_{\xi}^{(1)}[F^{-1}(y)] |F^{-1'}(y)| dy. \tag{51.7}$$

Во втором случае вероятность попадания  $y$  в интервал  $dy$  равна сумме вероятностей двух несовместимых событий — попадания  $x$  либо в  $dx_1 = |F_1^{-1'}(y)| dy$ , либо в  $dx_2 = |F_2^{-1'}(y)| dy$ . Через  $F_1^{-1}$  и  $F_2^{-1}$  мы обозначили при этом две ветви обратной функции  $x = F^{-1}(y)$ . Таким образом, во втором случае

$$\omega_{\eta}^{(1)}(y) dy = \omega_{\xi}^{(1)}[F_1^{-1}(y)] |F_1^{-1'}(y)| dy + \omega_{\xi}^{(1)}[F_2^{-1}(y)] |F_2^{-1'}(y)| dy. \tag{51.8}$$

Вообще, если  $x = F^{-1}(y)$  имеет  $m$  ветвей, то

$$\omega_{\eta}^{(1)}(y) dy = \sum_{\nu=1}^m \omega_{\xi}^{(1)}[F_{\nu}^{-1}(y)] |F_{\nu}^{-1'}(y)| dy. \tag{51.9}$$

Можно прийти к тому же результату и несколько иным, более формальным, но поучительным способом. Располагая  $\omega_{\xi}^{(k)}$  мы можем вычислить  $k$ -мерную характеристическую функцию для выходного процесса:

$$\begin{aligned} \varphi_{\eta}^{(k)}(s_1, \dots, s_k) &= \overline{\exp \{i [s_1 \eta_1 + \dots + s_k \eta_k]\}} = \\ &= \overline{\exp \{i [s_1 F(\xi_1) + \dots + s_k F(\xi_k)]\}} = \\ &= \int \exp \{i [s_1 F(x_1) + \dots + s_k F(x_k)]\} \omega_{\xi}^{(k)}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k. \end{aligned} \tag{51.10}$$

При помощи  $\varphi_{\eta}^{(k)}$  можно легко находить любые моменты вида (51.2) (см. § 9), но, выполнив преобразование Фурье, можно получить и  $\omega_{\eta}^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} \omega_{\eta}^{(k)}(y_1, \dots, y_k) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\eta}^{(k)}(s_1, \dots, s_k) \exp\{-i[s_1 y_1 + \dots + s_k y_k]\} ds_1 \dots ds_k. \end{aligned}$$

Подставив сюда (51.10) и учтя, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is_j [F(x_j) - y_j]} ds_j = 2\pi \delta[F(x_j) - y_j],$$

находим

$$\begin{aligned} \omega_{\eta}^{(k)}(y_1, \dots, y_k) &= \\ &= \int \delta[F(x_1) - y_1] \dots \delta[F(x_k) - y_k] \omega_{\xi}^{(k)}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k. \end{aligned} \quad (51.11)$$

Дельта-функция  $\delta[F(x_j) - y_j]$  дает вклад в интеграл только в тех точках, в которых  $F(x_j) = y_j$ , т. е. в точках  $x_j = x_j^{(\nu)} = F_{\nu}^{-1}(y_j)$ , где  $F_{\nu}^{-1}(y) - \nu$ -я ветвь ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ) функции, обратной  $F(x)$ . В малой окрестности каждой из этих точек (а для дельта-функции достаточно сколь угодно малой окрестности) можно считать, что

$$F(x_j) - y_j \approx F(x_j^{(\nu)}) + F'(x_j^{(\nu)})(x_j - x_j^{(\nu)}) - y_j = F'(x_j^{(\nu)})(x_j - x_j^{(\nu)})$$

и, следовательно, в окрестности  $x_j^{(\nu)}$

$$\begin{aligned} \delta[F(x_j) - y_j] &= \delta[F'(x_j^{(\nu)})(x_j - x_j^{(\nu)})] = \\ &= |F'(x_j^{(\nu)})|^{-1} \delta(x_j - x_j^{(\nu)}) = |F_{\nu}^{-1'}(y_j)| \delta[x_j - F_{\nu}^{-1}(y_j)]. \end{aligned}$$

С учетом же всех точек  $x_j^{(\nu)}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ) имеем

$$\delta[F(x_j) - y_j] = \sum_{\nu=1}^m |F_{\nu}^{-1'}(y_j)| \delta[x_j - F_{\nu}^{-1}(y_j)].$$

Составив произведение

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^k \delta[F(x_j) - y_j] &= \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \dots, \kappa=1}^m |F_{\alpha}^{-1'}(y_1) F_{\beta}^{-1'}(y_2) \dots F_{\kappa}^{-1'}(y_k)| \times \\ &\quad \times \delta[x_1 - F_{\alpha}^{-1}(y_1)] \dots \delta[x_k - F_{\kappa}^{-1}(y_k)] \end{aligned}$$

и подставив его в (51.11), получаем

$$\begin{aligned} \omega_{\eta}^{(k)}(y_1, \dots, y_k) = \\ = \sum_{\alpha, \dots, \kappa=1}^m \omega_{\xi}^{(k)} [F_{\alpha}^{-1}(y_1), F_{\beta}^{-1}(y_2), \dots, F_{\kappa}^{-1}(y_k)] |F_{\alpha}^{-1'}(y_1) \dots F_{\kappa}^{-1'}(y_k)|. \end{aligned} \quad (51.12)$$

В частном случае одномерной функции распределения отсюда следует формула (51.9). При взаимно-однозначном преобразовании формула (51.12) сводится к одночленной формуле (51.6).

Мы видели, что нормальный процесс на входе *линейной* системы дает нормальный же процесс на ее выходе. Более того, при достаточно узкой полосе пропускаемых частот линейная система могла дать на выходе нормальный процесс при негауссовом воздействии. Полученные формулы показывают, что нелинейная система (по крайней мере в рассматриваемом случае безынерционности) радикально меняет распределение и, в частности, не сохраняет нормального распределения, если оно и было у входного процесса.

Рассмотрим несколько простых примеров.

Пусть характеристика  $y = F(x)$  состоит из двух прямолинейных лучей с угловыми коэффициентами  $K$  (при  $x > 0$ ) и  $k$  (при  $x < 0$ ) (рис. 53, а). Если входной процесс гауссов, со стандартом  $\sigma$ , то, как это ясно и без вычислений, распределение на выходе будет составлено из двух гауссовых законов — при  $x > 0$  со стандартом  $K\sigma$ , а при  $x < 0$  — со стандартом  $k\sigma$  (рис. 53, б). При  $k \rightarrow 0$  (переход к так называемому линейному детектору) левая часть  $\omega_{\eta}^{(1)}(y)$  сжимается в дельта-функцию  $1/2\delta(y)$ : при  $k = 0$  любое  $x < 0$  дает на выходе  $y = 0$ .

У квадратичного детектора

$$y = \beta x^2$$

(рис. 54, а) обратная функция двузначна:

$$x = F_{1,2}^{-1}(y) = \pm \sqrt{y/\beta}.$$

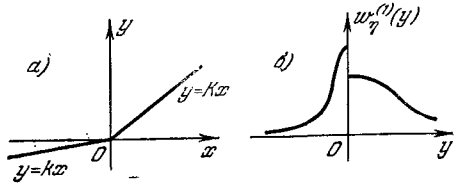


Рис. 53

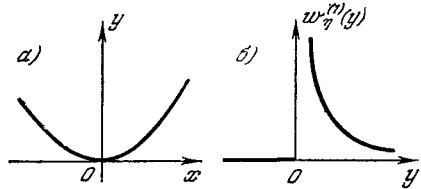


Рис. 54.



По формуле (51.9) получаем

$$\omega_{\eta}^{(1)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\beta y}} \left\{ \omega_{\xi}^{(1)}\left(\sqrt{\frac{y}{\beta}}\right) + \omega_{\xi}^{(1)}\left(-\sqrt{\frac{y}{\beta}}\right) \right\} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Если распределение  $\xi$  нормально, то распределение для  $\eta$  будет

$$\omega_{\eta}^{(1)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta y\sigma}} e^{-y/2\beta\sigma^2}, & y > 0, \\ 0, & y < 0 \end{cases} \quad (51.13)$$

(рис. 54, б), т. е., как и в первом примере, уже не является гауссовым.

Остановимся на способах вычисления среднего значения  $\bar{\eta}$  и момента  $\overline{\eta\eta_{\tau}}$  в некоторых частных случаях. Согласно (44.3) имеем

$$\bar{\eta}(t) = \int F(x) \omega_{\xi}^{(1)}(x, t) dx,$$

$$\overline{\eta\eta_{\tau}} = \int F(x_1) F(x_2) \omega_{\xi}^{(2)}(x_1 t; x_2, t + \tau) dx_1 dx_2.$$

Для вычисления двукратного интеграла, выражающего  $\overline{\eta\eta_{\tau}}$ , применяются различные математические приемы: сведение этого интеграла к контурному, различного рода разложения  $\omega_{\xi}^{(2)}$  в ряд, например разложение по какой-либо системе ортогональных функций  $\varphi_n(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \omega_{\xi}^{(2)}(x_1, t_1; x_2, t_2) &= \\ &= \omega_{\xi}^{(1)}(x_1, t_1) \omega_{\xi}^{(1)}(x_2, t_2) + \sum_{m, a} a_{mn}(t_1, t_2) \varphi_m(x_1, t_1) \varphi_n(x_2, t_2), \end{aligned}$$

и другие способы, использующие те или иные частные особенности задачи.

Пусть, например,  $\xi(t)$  — стационарный гауссов процесс, так что

$$\omega_{\xi}^{(2)}[x_1, x_2, K(\tau)] = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-K^2}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2Kx_1x_2}{2\sigma^2(1-K^2)}\right\}. \quad (51.14)$$

Разложив  $\omega_{\xi}^{(2)}$  по степеням  $K(\tau)$ , нетрудно получить, что

$$\overline{\eta\eta_{\tau}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 K^n(\tau), \quad (51.15)$$

где

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma x) \frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n} dx.$$

Допустим, что  $K(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Тогда из (51.15) получаем

$$\overline{\eta\eta_\tau} \rightarrow \bar{\eta}^2 = C_0^2 \quad (\tau \rightarrow \infty),$$

и, следовательно,

$$\psi_\eta(\tau) = \overline{\eta\eta_\tau} - \bar{\eta}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 K^n(\tau). \quad (51.16)$$

Спектральная плотность  $\eta(t)$  по положительным частотам будет

$$g_{\eta^+}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_\eta(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \int_0^{\infty} K^n(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau. \quad (51.17)$$

Таким образом, форма спектра на выходе определяется как коэффициентом корреляции  $K(\tau)$  входного процесса (т. е. его спектром), так и нелинейной характеристикой  $y = F(x)$ , от вида которой зависят значения коэффициентов  $C_n$ .

Если гауссов процесс на входе имеет узкий спектр и (для простоты) симметричный относительно частоты  $\omega_0$ , то, согласно § 44,

$$K(\tau) = k(\tau) \cos \omega_0\tau, \quad (51.18)$$

где  $k(\tau)$  — медленная функция  $\tau$ . Двумерное распределение (51.14) в этом случае — периодическая функция  $\omega_0\tau$  и может быть разложено в ряд Фурье:

$$\omega_\xi^{(2)}(x_1, x_2, k \cos \omega_0\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n v_n[x_1, x_2, k(\tau)] \cos n\omega_0\tau,$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 2 & \text{при } n>0. \end{cases}$$

Подстановка в формулу для  $\overline{\eta\eta_\tau}$  дает

$$\overline{\eta\eta_\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n B_n(\tau) \cos n\omega_0\tau, \quad (51.19)$$

причем коэффициенты

$$B_n(\tau) = \int F(x_1) F(x_2) v_n(x_1, x_2, k) \, dx_1 \, dx_2$$

— медленные функции  $\tau$ . Спектр  $\eta(t)$  состоит поэтому из узких полос, расположенных на частотах  $n\omega_0$  (рис. 55). Разумеется, если подставить в (51.15) выражение (51.18) для  $K(\tau)$ ,

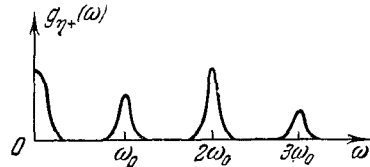


Рис. 55.

выразить степени  $\cos \omega_0 t$  через косинусы кратных дуг и перегруппировать члены, мы приходим к (51.19).

В случае квазимонохроматического входного процесса  $\xi(t) = A(t) \cos \Phi(t)$ , где  $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ , можно вычислить  $\bar{\eta}$  и  $\eta\eta_\tau$  еще и другим способом, а именно пользуясь функциями распределения огибающей  $A$  и фазы  $\varphi$ . Периодическую функцию  $\eta = F(\xi) = F(A \cos \Phi)$  можно разложить в ряд Фурье по  $\Phi$ :

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n F_n(A) \cos n\Phi, \quad (51.20)$$

где

$$F_n(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(A \cos \Phi) \cos n\Phi d\Phi.$$

Поскольку  $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ ,  $n$ -й член ряда (51.20) — это квазимонохроматический процесс, спектр которого лежит в окрестности  $n\omega_0$ . В случае стационарного процесса  $\xi(t)$  совместное распределение  $A$  и  $\varphi$  имеет, как мы знаем (§ 44), вид

$$\omega(A, \varphi) dA d\varphi = \omega_A(A) dA \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Следовательно,

$$\bar{\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \overline{F_n(A) \cos n\Phi} = \overline{F_0(A)} = \int_0^\infty F_0(A) \omega_A(A) dA,$$

и для вычисления среднего значения  $\eta(t)$  надо знать только распределение огибающей  $\omega_A(A)$ . Но для вычисления  $\eta\eta_\tau$  необходимо уже четырехмерное распределение  $A, A_\tau, \varphi$  и  $\varphi_\tau$ . Если  $\xi(t)$  — гауссов процесс, то это распределение (44.23). Все расчеты могут быть доведены при этом до конца.

Существенную пользу при вычислении моментов процесса на выходе безынерционного нелинейного элемента цепи, в особенности в тех случаях, когда процесс на входе не является нормальным, можно извлечь из кумулянтных уравнений, примеры которых были приведены в задачах 15 и 16 гл. II (см. задачи 3 и 4 данной главы).

Результаты, относящиеся к тому или иному частному виду нелинейной характеристики (51.1), можно, конечно, получить из общих формул, но если характеристика простая, то и расчеты проще проводить непосредственно для этой характеристики.

Пусть, например, на квадратичный детектор  $\eta = \beta \xi^2$  воздействует суперпозиция детерминированного сигнала  $s(t)$  и гауссова шума  $n(t)$  с  $\bar{n} = 0$ ,  $n^2 = \sigma^2$  и  $nn_\tau = \sigma^2 K(\tau)$ :

$$\xi(t) = s(t) + n(t),$$

Следовательно,

$$\eta = \beta (n^2 + 2ns + s^2), \quad \bar{\eta} = \beta (\sigma^2 + s^2),$$

$$\eta - \bar{\eta} = \beta (n^2 + 2ns - \sigma^2),$$

так что

$$\begin{aligned} \psi_{\eta}(t, \tau) &= \overline{(\eta - \bar{\eta})(\eta_{\tau} - \bar{\eta}_{\tau})} = \beta^2 \overline{(n^2 + 2ns - \sigma^2)(n_{\tau}^2 + 2n_{\tau}s_{\tau} - \sigma^2)} = \\ &= 2\beta^2\sigma^2 [\sigma^2 K^2(\tau) + 2ss_{\tau}K(\tau)]. \end{aligned} \quad (51.21)$$

Здесь учтено, что у нормальной функции  $n(t)$  нечетные моменты равны нулю, а  $\overline{n^2 n_{\tau}^2} = \sigma^4 (2K^2 + 1)$ . Функция корреляции  $\psi_{\eta}(t, \tau)$  зависит от  $t$  через произведение  $ss_{\tau} = s(t)s(t + \tau)$ . В отсутствие сигнала процесс  $\eta(t)$  на выходе детектора стационарен и функция корреляции равна

$$\psi_{\eta}(\tau) = 2\beta^2\sigma^4 K^2(\tau). \quad (51.22)$$

Это не что иное, как степенное разложение (51.16), содержащее в данном случае только один член (только  $C_2 = \sqrt{2} \beta \sigma^2 \neq 0$ ).

Если шум квазимонохроматичен и имеет место (51.18), то

$$\psi_{\eta}(\tau) = \beta^2 \sigma^4 k^2(\tau) (1 + \cos 2\omega_0 \tau), \quad (51.23)$$

т. е. первоначальный спектр, локализованный в окрестности частоты  $\omega_0$ , дает на выходе квадратичного детектора две полосы — вблизи  $\omega = 0$  и  $\omega = 2\omega_0$  (рис. 56). Медленно меняющаяся часть, примыкающая к  $\omega = 0$ , может быть выделена, как это большей частью и делается, последующим видеофильтром. Вообще, если нелинейный элемент включен между линейными цепями (например, фильтрами) и обратная реакция последующего звена на предыдущее отсутствует, то расчет такой цепи может, очевидно, производиться поэтапно от звена к звену.

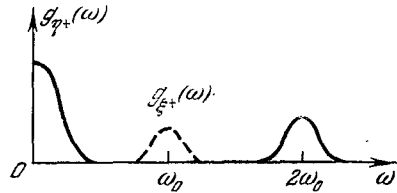


Рис. 56.

Формула (51.23) — это, конечно, разложение Фурье (51.19), в котором отличны от нуля только  $B_0(\tau)$  и  $B_2(\tau)$ .

Согласно (51.21) дисперсия на выходе квадратичного детектора при наличии сигнала есть

$$D[\eta(t)] = \psi_{\eta}(t, 0) = 2\beta^2\sigma^2 [\sigma^2 + 2s^2(t)].$$

Если и сигнал и шум квазимонохроматичны, а процесс на выходе детектора подвергается усреднению по периоду высокой частоты  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  (такого рода операцию производит и видео-

фильтр, срезающий частоты  $\omega \geq \omega_0$ ), то дисперсия будет равна

$$D[\eta(t)]_{T_0} = 2\beta^2\sigma^2[\sigma^2 + 2s^2(t)_{T_0}],$$

где волнистой чертой обозначено указанное временное усреднение. Простейшим условием непосредственного обнаружения сигнала при наличии шума является неравенство  $2s^2(t)_{T_0} > \sigma^2$ , т. е. достаточно большое значение отношения средних мощностей сигнала и шума (обычно говорят короче: отношения «сигнал/шум»).

Разумеется, такого рода критерий обнаружения сигнала в шуме не является ни общим, ни сколько-нибудь универсальным. Общая постановка задачи достаточно сложна, так как должна учитывать особенности сигнала (его импульсный или стационарный характер, его зависимость от различных параметров, которые частично могут быть случайными, частично детерминированными) и должна оценивать как вероятность правильного обнаружения — превышения некоторого порога на выходе приемного устройства при наличии сигнала, так и вероятность ложного обнаружения (как принято говорить в радиолокации — ложной тревоги), т. е. превышения порога в отсутствие сигнала, за счет одного только шума. Относящиеся сюда вопросы составляют в настоящее время большую область применения теории случайных функций и важны не только для радиосвязи и радиолокации, но и вообще для измерений при наличии шумов. Однако в целом эту область можно охарактеризовать как типичную «радиоматематику». Физической проблематики здесь, по сути дела, нет, и мы не будем поэтому углубляться в данный круг задач, которым посвящена обширная специальная литература (укажем на книги [8—11]).

## § 52. Измерение шумовых сигналов. Радиометры<sup>1)</sup>

Применим результаты двух предыдущих параграфов к часто используемой цепи, состоящей из трех звеньев (рис. 57):

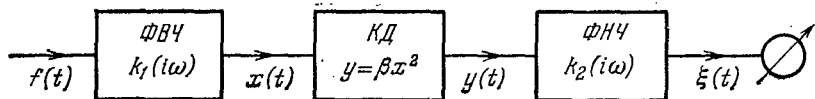


Рис. 57.

полосового фильтра высокой частоты [ФВЧ, функция передачи  $k_1(i\omega)$ ], квадратичного детектора (КД, нелинейная характери-

<sup>1)</sup> Этот параграф написан совместно с Н. Н. Колачевским.

стика  $y = \beta x^2$ ) и фильтра низких частот [ФНЧ, функция передачи  $k_2(i\omega)$ ]. На выходе ФНЧ включен измерительный прибор. В качестве входного сигнала мы возьмем стационарный нормальный процесс  $f(t)$  с нулевым средним значением. Относительно цепи предполагается, что

1) реакция каждого последующего звена на предыдущее отстутствует;

2) фильтры узкополосны, т. е. полоса ФВЧ  $\Delta\omega$ , центрированная около частоты  $\omega_0$ , гораздо меньше как  $\omega_0$ , так и ширины спектра процесса  $f(t)$ , а полоса ФНЧ  $\Delta\Omega$  (по  $\omega > 0$ ) гораздо меньше не только  $\omega_0$ , но и  $\Delta\omega$  (рис. 58).

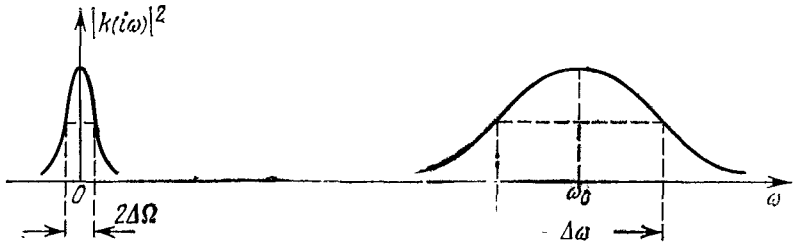


Рис. 58.

Даваемая такой цепью связь между статистическими свойствами входного процесса  $f(t)$  и измеряемого на выходе процесса  $\xi(t)$  рассматривалась в очень многих работах, начиная с классической работы Райса [12]. При предположении 1) изучались задачи различной степени общности: нахождение функций распределения  $\xi(t)$  — как  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , так и  $\omega_n$ ; получение моментов  $\xi(t)$  при наличии на входе не только шума, но и детерминированного или случайного сигнала; исследование этих же вопросов при негауссовом распределении  $f(t)$ , при произвольной нелинейности детектора или же в отсутствие ограничений 2) ширины полос фильтров (см. [11]). Мы ограничимся, однако, простейшей задачей, а именно найдем при указанных выше предположениях выигрыш, даваемый сглаживающим действием ФНЧ. Точнее, мы рассчитаем коэффициент сглаживания флуктуаций  $Q$ , равный отношению относительной флуктуации  $\sigma_y/\bar{y}$  на выходе детектора к относительной флуктуации  $\sigma_\xi/\bar{\xi}$  на выходе ФНЧ:

$$Q = \frac{\sigma_y/\bar{y}}{\sigma_\xi/\bar{\xi}}, \quad (52.1)$$

где, как обычно,  $\sigma_y$  и  $\sigma_\xi$  — стандарты  $y(t)$  и  $\xi(t)$ . Величина  $Q$  характеризует качество рассматриваемой цепи как непосред-

ственного измерителя спектральной плотности входного шума в полосе ФВЧ<sup>1)</sup>.

Так как спектр шума  $f(t)$ , по предположению, широк по сравнению с полосой ФВЧ, спектральную плотность  $x(t)$  можно записать в виде

$$g_x(\omega) = g_f(\omega_0) |k_1(i\omega)|^2. \quad (52.2)$$

Следовательно, функция корреляции  $x(t)$  равна

$$\psi_x(\tau) = g_f(\omega_0) \int_{-\infty}^{+\infty} |k_1(i\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega.$$

а средний квадрат —

$$\bar{x}^2 = \psi_x(0) = g_f(\omega_0) \int_{-\infty}^{+\infty} |k_1(i\omega)|^2 d\omega. \quad (52.3)$$

Процесс  $y(t)$  на выходе детектора имеет среднее значение

$$\bar{y} = \beta \bar{x}^2,$$

а поскольку процесс  $x(t)$  на входе КД тоже нормален, причем  $\bar{x} = 0$ , функция корреляции  $y(t)$ , согласно (51.22), есть

$$\psi_y(\tau) = \overline{y(t+\tau)y(t)} - \bar{y}^2 = 2\beta^2 \psi_x^2(\tau). \quad (52.4)$$

Таким образом,  $\sigma_y^2 = \psi_y(0) = 2\beta^2 \langle x^2 \rangle^2$  и относительная флуктуация на выходе детектора оказывается равной

$$\sigma_y / \bar{y} = \sqrt{2}. \quad (52.5)$$

По теореме о трансформанте Фурье произведения двух функций (§ 42) или в нашем случае — квадрата функции  $\psi_x(\tau)$  из (52.4) вытекает выражение для спектральной плотности  $y(t)$  в виде свертки спектральной плотности  $x(t)$ <sup>2)</sup>:

$$g_y(\omega) = 2\beta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(\omega') g_x(\omega - \omega') d\omega'. \quad (52.6)$$

<sup>1)</sup> Фильтры могут, конечно, содержать и усилители, работающие в линейном режиме. Под «входным шумом» надо в общем случае понимать не только внешний шумовой сигнал, но и некоторый эквивалент внутренних (собственных) шумов аппаратуры (см. ниже).

<sup>2)</sup> В § 42 (сноска на стр. 286) теорема была приведена для свертки двух функций времени  $t$  и, соответственно, произведения их трансформант Фурье, т. е. функций  $\omega$ . Но полная равноправность прямого и обратного преобразований Фурье позволяет «переставить»  $t$  и  $\omega$ , т. е. формулировать аналогичную теорему для свертки двух функций  $\omega$  и, соответственно, произведения их трансформант Фурье — функций  $t$ .

Эта формула описывает, конечно, *весь* спектр  $y(t)$ , как высокочастотный (полоса ширины  $2\Delta\omega$  около  $\omega = \pm 2\omega_0$ ); так и низкочастотный (полоса ширины  $2\Delta\omega$  около  $\omega = 0$ , см. рис. 56). Высокочастотную часть спектра ФНЧ, разумеется, не пропускает.

Располагая  $g_y(\omega)$ , мы можем написать спектральную плотность на выходе ФНЧ:

$$g_{\xi}(\omega) = g_y(\omega) |k_2(i\omega)|^2, \quad (52.7)$$

а тем самым, и выражение для дисперсии  $\xi(t)$ :

$$\sigma_{\xi}^2 = \bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\xi}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g_y(\omega) |k_2(i\omega)|^2 d\omega,$$

или, после подстановки  $g_y(\omega)$  из (52.6), а  $g_x(\omega)$  — из (52.2).

$$\sigma_{\xi}^2 = 2\beta^2 g_f^2(\omega_0) \int_{-\infty}^{+\infty} |k_2(i\omega)|^2 |k_1(i\omega')|^2 |k_1[i(\omega - \omega')]|^2 d\omega d\omega'. \quad (52.8)$$

Что касается среднего значения  $\xi(t)$ , то, учитывая узость полосы ФНЧ  $2\Delta\Omega$  по сравнению с шириной  $2\Delta\omega$  *низкочастотной части*  $g_{yH}(\omega)$  спектра  $g_y(\omega)$  на выходе КД, можно положить

$$\bar{\xi} = k_2(0) \bar{y} = k_2(0) \beta x^2,$$

или, согласно (52.3),

$$\bar{\xi} = \beta g_f(\omega_0) k_2(0) \int_{-\infty}^{+\infty} |k_1(i\omega)|^2 d\omega. \quad (52.9)$$

Заметим, что и в формуле (52.7) можно было бы вместо  $g_y(\omega)$  писать  $g_{yH}(\omega)$ , т. е. отбросить высокочастотную часть  $g_y(\omega)$  ввиду того, что  $|k_2(i\omega)|^2 \neq 0$  лишь в узкой полосе около  $\omega = 0$ .

Подставив (52.5), (52.8) и (52.9) в (52.1), получаем для коэффициента сглаживания выражение

$$Q = \frac{k_2(0) \int_{-\infty}^{+\infty} |k_1(i\omega)|^2 d\omega}{\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |k_2(i\omega)|^2 |k_1(i\omega')|^2 |k_1[i(\omega - \omega')]|^2 d\omega d\omega' \right]^{1/2}}. \quad (52.10)$$

Для того чтобы извлечь из этой довольно сложной формулы простую и наглядную оценку  $Q$ , заменим  $|k_1(i\omega)|^2$  и  $|k_2(i\omega)|^2$  прямоугольниками, как это показано на рис. 59. Тогда

$$k_2(0) = \sqrt{A_2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |k_1(i\omega)|^2 d\omega = 2A_1 \Delta\omega, \quad \text{а двукратный интеграл}$$



в знаменателе (52.10) можно ввиду того, что  $|k_2(i\omega)|^2$  отлична от нуля лишь в узкой окрестности около  $\omega = 0$ , оценить как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |k_2(i\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} |k_1(i\omega')|^4 d\omega' = 2A_2 \Delta\Omega \cdot 2A_1^2 \Delta\omega.$$

В результате

$$Q = \sqrt{\Delta\omega/\Delta\Omega}, \quad (52.11)$$

т. е. сглаживание флуктуаций  $\xi(t)$  около среднего значения (52.9) тем сильнее, чем больше отношение полос ФВЧ и ФНЧ, или, иначе говоря, чем больше время усреднения  $\tau_\xi \sim 1/\Delta\Omega$  по сравнению со временем корреляции  $\tau_x \sim 1/\Delta\omega$  на выходе ФВЧ.

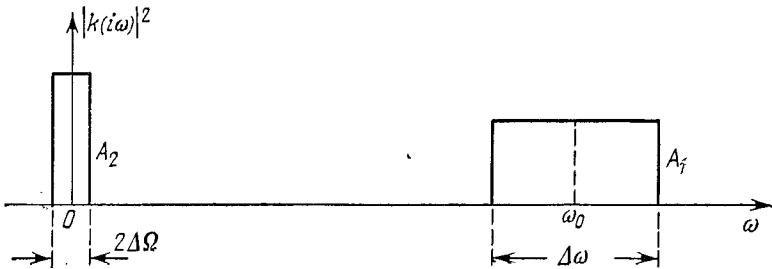


Рис. 59.

Рассматривая описанный *прямой метод* измерения  $g_f(\omega_0)$ , мы не расчленили входной шум на интересующий нас шумовой сигнал и внутренние шумы аппаратуры. Между тем часто бывает так (например, в радиоастрономии), что надо измерить слабый шумовой сигнал на фоне гораздо более интенсивного шума самого устройства (радиометра). Применение прямого метода наталкивается тогда на следующее затруднение. Спектральная плотность  $g_f(\omega)$  состоит из плотности, как говорят, *пересчитанных на вход* собственных шумов  $g_{i_0}(\omega)$  и небольшого добавка  $\Delta g_f(\omega)$ , обусловленного внешним сигналом. Соответственно  $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + \Delta\bar{\xi}$ , где  $\bar{\xi}_0$  и  $\Delta\bar{\xi}$  связаны по формуле (52.9) соответственно с  $g_{i_0}(\omega_0)$  и  $\Delta g_f(\omega_0)$ . То обстоятельство, что интересующее нас отклонение  $\Delta\bar{\xi}$  гораздо меньше  $\bar{\xi}_0$ , легко преодолеть, применив *компенсационный метод*, а именно подав на измерительный прибор встречное постоянное напряжение  $-\bar{\xi}_0$  и взяв этот прибор гораздо более чувствительным. Трудность заключается в том, что этот чувствительный прибор, дающий теперь *большое* отклонение  $\Delta\bar{\xi}$ , будет столь же сильно реагировать и на флуктуации  $\xi(t)$ , обусловленные по-прежнему *полной*

спектральной плотностью  $g_f(\omega_0) = g_{f_0}(\omega_0) + \Delta g_f(\omega_0)$ , т. е. практически — плотностью собственного шума аппаратуры  $g_{f_0}(\omega_0) \gg \Delta g_f(\omega_0)$ .

Пороговой чувствительностью устройства принято считать такую спектральную плотность  $g_{\Pi}(\omega)$  на входе, которая дает отклонение  $\bar{\xi}_{\Pi}$ , равное стандарту флуктуаций  $\xi(t)$ , т. е.  $\bar{\xi}_{\Pi} = \sigma_{\xi}$ . Учитывая, что  $\bar{\xi}_{\Pi}$  выражается через  $g_{\Pi}(\omega_0)$  по формуле (52.9), а  $\sigma_{\xi}$  через  $g_{f_0}(\omega_0)$  — по формуле (52.8), получаем из равенства  $\bar{\xi}_{\Pi} = \sigma_{\xi}$  и с использованием (52.10), что

$$g_{\Pi}(\omega_0) = \frac{\sqrt{2}}{Q} g_{f_0}(\omega_0).$$

Таким образом, коэффициент сглаживания  $Q$  должен быть настолько велик, чтобы обеспечивать для измеряемой плотности  $\Delta g_f(\omega_0)$  превышение порога:

$$\Delta g_f(\omega_0) \geq \frac{\sqrt{2}}{Q} g_{f_0}(\omega_0). \quad (52.12)$$

Если путем снижения уровня собственных шумов (например, охлаждением входного каскада, когда это тепловые шумы) и (или) путем увеличения  $Q$  выполнение условия (52.12) достигнуто, то остается еще одно явление, нарушающее стабильность

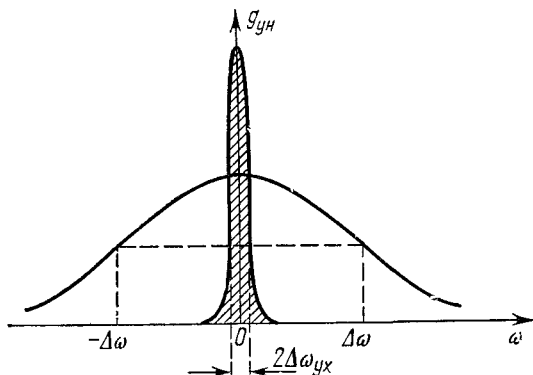


Рис. 60.

показаний выходного измерительного прибора, — *уходы усиления* (так называемый «дрейф нуля»). В основном они обусловлены входным усилителем (мы включаем его в состав ФВЧ) и *медленны*, т. е. их спектр сосредоточен в очень узкой полосе  $2\Delta\omega_{yx}$  около  $\omega = 0$ . Низкочастотная часть  $g_{yH}(\omega)$  спектра после детектора имеет поэтому вид, показанный на рис. 60, где спектр уходов усиления заштрихован. ФНЧ пропускает эти колебания

усиления, и стрелка измерительного прибора «блуждает», что равносильно уменьшению коэффициента сглаживания  $Q$ .

От влияния уходов усиления избавляет модуляционный метод измерения. Схема модуляционного радиометра изображена

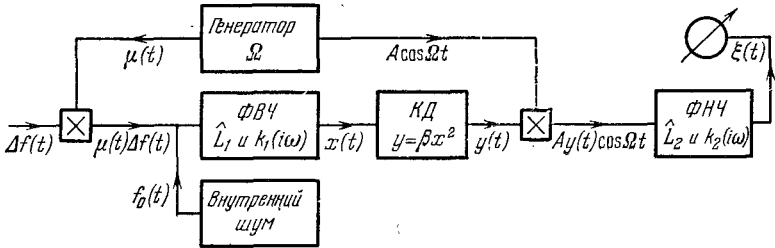


Рис. 61.

на рис. 61. Генератор ( $\Omega$ ) используется для того, чтобы промодулировать периодической функцией  $\mu(t)$  с периодом  $2\pi/\Omega$  измеряемый сигнал, так что на вход ФВЧ поступает процесс

$$f(t) = f_0(t) + \mu(t) \Delta f(t),$$

где  $f_0(t)$  — внутренний шум. Функцию  $\mu(t)$  проще всего сформировать такой, чтобы в течение одного полупериода она была равна 1, а в течение другого — нулю. Тогда

$$\mu^2(t) = \mu(t) = \sum_k a_k \cos k\Omega t.$$

Кроме того, процесс  $y(t)$  на выходе детектора умножается на основную гармонику генератора и на ФНЧ поступает процесс  $Ay(t) \cos \Omega t$ . Через  $L_1$  и  $L_2$  на рис. 61 обозначены линейные дифференциальные операторы, описывающие соответственно действия ФВЧ и ФНЧ и дающие в спектральном представлении функции передачи  $k_1(i\omega)$  и  $k_2(i\omega)$ . Убедимся в том, что такое устройство действительно устраняет влияние уходов усиления.

На выходе ФВЧ мы получаем

$$x(t) = \hat{L}_1 \{f_0(t) + \mu(t) \Delta f(t)\} \approx \hat{L}_1 \{f_0\} + \mu(t) \hat{L}_1 \{\Delta f\}.$$

Период  $2\pi/\Omega$  функции  $\mu(t)$  весьма велик по сравнению со временем корреляции  $\tau_x$ , в силу чего мы вынесли  $\mu(t)$  из-под оператора  $\hat{L}_1$ , ограничившись квазистатическим откликом на  $\mu(t)$ . На выходе детектора получается процесс

$$y(t) = \beta x^2(t) = \beta (\hat{L}_1 \{f_0\})^2 + \mu(t) [\hat{L}_1 \{\Delta f\}]^2 + 2\mu(t) \hat{L}_1 \{f_0\} \hat{L}_1 \{\Delta f\}.$$

При усреднении удвоенное произведение обращается в нуль, так как  $f_0(t)$  и  $\Delta f$  независимы, а их средние значения равны

нулю. Следовательно,

$$\bar{y}(t) = \beta \overline{x^2(t)} = \bar{y}_0 + \mu(t) \Delta \bar{y}, \quad (52.13)$$

где

$$\bar{y}_0 = \beta \langle [\hat{L}_1 \{f_0\}]^2 \rangle, \quad \Delta \bar{y} = \beta \langle [\hat{L}_1 \{\Delta f\}]^2 \rangle.$$

Что касается флуктуаций  $y(t)$ , то, предполагая по-прежнему, что сигнал  $\Delta f$  слаб, можно считать, что эти флуктуации  $\tilde{y} = y(t) - \bar{y}(t)$  обусловлены только собственными шумами и, тем самым, для  $\psi_y(\tau)$ ,  $\sigma_y^2$  и  $g_y(\omega)$  справедливы прежние формулы, в которые входят только спектральные плотности внутреннего шума и уходов усиления.

На выходе ФНЧ мы получаем процесс

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \hat{L}_2 \{Ay(t) \cos \Omega t\} = \\ &= A \hat{L}_2 \{\bar{y}(t) \cos \Omega t\} + A \hat{L}_2 \{\tilde{y}(t) \cos \Omega t\}. \end{aligned} \quad (52.14)$$

Первый член правой части представляет собой сигнал  $\bar{\xi}(t)$ :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(t) &= A [\bar{y}_0 \cos \Omega t + \mu(t) \Delta \bar{y} \cos \Omega t] = \\ &= A \left[ \bar{y}_0 \cos \Omega t + \frac{\Delta \bar{y}}{2} \sum_k a_k \cos(k\Omega \pm \Omega)t \right] = \\ &= A \left\{ \bar{y}_0 \cos \Omega t + \frac{\Delta \bar{y}}{2} [2a_0 \cos \Omega t + a_1 (1 + \cos 2\Omega t) + \right. \\ &\quad \left. + a_2 (\cos \Omega t + \cos 3\Omega t) + \dots] \right\}. \end{aligned}$$

Низкочастотный фильтр, полоса которого  $2\Delta\Omega$  меньше основной частоты модуляции ( $2\Delta\Omega < \Omega$ ), вырежет из этого разложения Фурье только постоянную составляющую, т. е. член

$$\bar{\xi} = \frac{Aa_1}{2} \Delta \bar{y},$$

или, если воспользоваться (52.9),

$$\bar{\xi} = \frac{\beta A a_1}{2} \Delta g_f(\omega_0) k_2(0) \int_{-\infty}^{+\infty} |k_1(i\omega)|^2 d\omega. \quad (52.15)$$

Таким образом, модуляционный радиометр откликается в среднем только на модулированную часть входного шума, т. е. на интересующий нас сигнал  $\Delta f(t)$ .

Второй член формулы (52.14) описывает флуктуации  $\xi(t)$  около среднего значения (52.15). Для расчета  $\sigma_{\xi}^2$  надо найти спектр процесса  $\tilde{y}(t) \cos \Omega t$ . Мы не будем проводить вычисления, а ограничимся качественной картиной, вполне разъясняющей суть дела.

Очевидно, на входе ФНЧ существенна только низкочастотная часть флуктуаций  $y(t)$  (рис. 60). Умножение этой низкочастотной части  $\tilde{y}_n(t)$  на  $\cos \Omega t$  означает расщепление спектра на две компоненты, раздвинутые на  $\pm\Omega$  от  $\omega = 0$  (рис. 62). Но

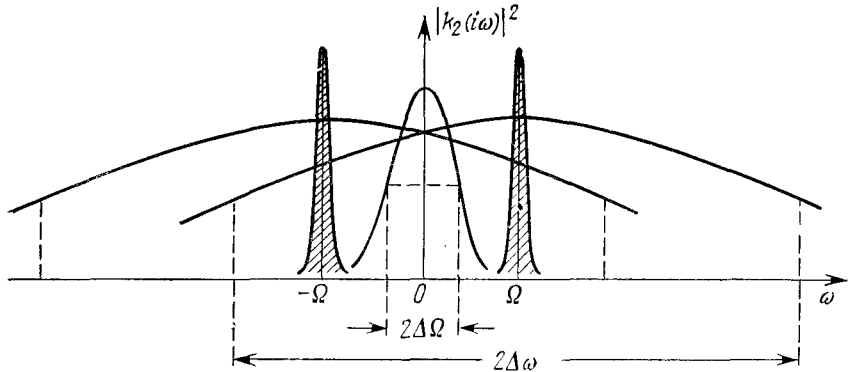


Рис. 62.

частота модуляции  $\Omega$ , малая по сравнению с полосой ФВЧ  $2\Delta\omega$ , велика по сравнению как с полосой ФНЧ  $2\Delta\Omega$ , так и подавно с шириной  $2\Delta\omega_{ух}$  спектра уходов усиления (на рис. 62 этот спектр опять заштрихован). Поэтому для собственных шумов модуляция практически ничего не меняет в полосе ФНЧ, в то

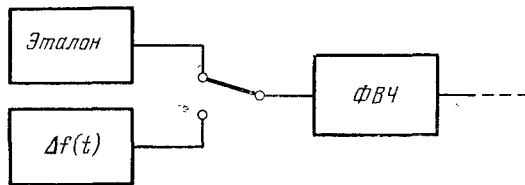


Рис. 63.

время как спектр уходов усиления, поскольку  $\Omega > 2\Delta\Omega$  и  $\Omega \gg \gg 2\Delta\omega_{ух}$ , оказывается выведенным за пределы полосы ФНЧ. Это означает, что уходы усиления не сказываются на флуктуациях  $\xi(t)$  и последние определяются только собственными шумами  $g_{fn}(\omega_0)$ .

Нетрудно убедиться, что коэффициент сглаживания  $Q$  остается таким же, как в отсутствие модуляции и уходов усиления, т. е. выражается формулой (52.11), но преимущество модуляционного метода в том и состоит, что уходы усиления не вызывают уменьшения этого значения  $Q$ .

Дальнейшее усовершенствование — *нулевой модуляционный метод* измерения, при котором вход радиометра периодически (с периодом  $2\pi/\Omega$ ) переключается при помощи генератора ( $\Omega$ ) с источника измеряемого шума  $\Delta f(t)$  на шумовой эталон и обратно (рис. 63). Если спектральные плотности обоих источников одинаковы в полосе ФВЧ, то модуляции нет и стрелка измерительного прибора стоит на нуле. Это позволяет уменьшить чисто инструментальную ошибку, воспользовавшись более чувствительным прибором.

### § 53. Корреляционная теория флуктуаций в томсоновском генераторе

Метод И. Л. Берштейна, позволивший измерить естественную немонахроматичность автогенератора, существенным образом использует медленность (длительную корреляцию) технических уходов частоты. Если интерпретировать эти медленные случайные изменения как результат некоторого воздействия на автогенератор, воздействия, имеющего большое время корреляции (по сравнению не только с периодом, но даже с временем установления амплитуды), то, как мы знаем, случайный процесс в системе не будет марковским, т. е. его нельзя рассмотреть при помощи уравнения Эйнштейна — Фоккера, как это было сделано в § 28 и обосновано в § 36. С другой стороны, при достаточно большой амплитуде автоколебаний флуктуации хорошо описываются *линеаризованными* уравнениями движения (§ 29), что позволяет эффективно использовать другой аппарат, не требующий марковости процесса, а именно стохастические дифференциальные уравнения и корреляционную теорию [3]. Мы и обратимся теперь к этому подходу.

Начнем с той же постановки задачи, что и в § 28. Исходным является уравнение (28.5) для томсоновской автоколебательной системы с одной степенью свободы:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \mu F(t'), \quad (53.1)$$

где  $t' = \omega_0 t$ . Напомним, что если флуктуационная «сила»  $\mu F(t')$  описывает воздействие дробового тока  $I_{др}(t)$  и теплового шума в колебательном контуре [случайная э. д. с.  $e(t)$ ], то, согласно (28.2),

$$\mu F(t') = \frac{1}{I_0} \left[ I_{др}(t) + \frac{\dot{e}(t)}{L\omega_0^2} \right]. \quad (53.2)$$

В первом приближении метода медленных возмущений мы получили в § 28 уравнения Ван-дер-Поля (28.7) для амплитуды и фазы колебания  $x(t) = r(\theta) \cos[t' + \varphi(\theta)]$ , зависящих от

«медленного времени»  $\theta = \mu t'$ :

$$r' = R(r) - \frac{1}{2} F_{\perp}(\theta), \quad r\varphi' = \Phi(r) - \frac{1}{2} F_{\parallel}(\theta), \quad (53.3)$$

где функции  $R(r)$  и  $\Phi(r)$  определены равенствами (28.8). При выводе (53.3) стационарная сила  $F(t')$  была заменена стационарной же модулированной силой (28.6):

$$\tilde{F}(t') = F_{\parallel}(\theta) \cos[t' + \varphi(\theta)] + F_{\perp}(\theta) \sin[t' + \varphi(\theta)], \quad (53.4)$$

спектр которой ограничен полосой  $\mu\Omega$  около собственной частоты контура 1, причем эта узкая полоса ( $\mu\Omega \ll 1$ ) все же значительно шире спектральной линии автогенератора. Это означает, что  $\Omega$  значительно превосходит не только ширину  $2D$  линии, обусловленной диффузией фазы, но и ширину  $2\rho$  «пьеделстала», связанного с флуктуациями амплитуды:

$$\Omega \gg \rho \gg D,$$

где  $\rho$  и  $D$  — безразмерные инкремент и коэффициент диффузии по медленному времени  $\theta$  (§§ 29, 42). В пределах полосы  $\mu\Omega$  спектральная плотность эффективной силы  $\tilde{F}(t')$  постоянна и такая же, как у  $F(t')$  на частоте 1.

Обозначим спектральную плотность  $F(t')$  по безразмерной частоте  $\alpha = \omega/\omega_0$  через  $g(\alpha)$ :

$$\langle F(t'_1) F(t'_2) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha) e^{i\alpha(t'_1 - t'_2)} d\alpha.$$

Пусть  $g(\pm 1) = C/2\pi$ . Если бы спектральная плотность имела это значение на всей оси  $\alpha$ , то  $F(t')$  была бы белым шумом с функцией корреляции

$$\langle F(t'_1) F(t'_2) \rangle = C\delta(t'_1 - t'_2). \quad (53.5)$$

Именно так обстоит дело и для дробового тока, относительно которого мы допустили, что он не зависит от состояния системы (т. е. от  $\bar{I}_a$  или же от  $v_c$ ), и для теплового шума (§ 54).

Напомним, что при дельта-коррелированной «силе»  $F(t')$  флуктуации  $x$  и  $\dot{x}$  образуют диффузионный марковский процесс, так что все результаты корреляционной теории должны в этом случае совпадать с соответствующими результатами, полученными для линеаризованной задачи при помощи уравнения Эйнштейна — Фоккера (§ 29).

Для дальнейшего нам понадобятся функции корреляции амплитуд  $F_{\parallel}(\theta)$  и  $F_{\perp}(\theta)$ , входящих в формулу для эффективной силы (53.4). Для их нахождения удобно заменить  $\tilde{F}(t')$  аналитическим сигналом (§ 38):

$$\mathcal{F}(t') = [F_{\parallel}(\theta) - iF_{\perp}(\theta)] e^{i(t' + \varphi(\theta))}, \quad \tilde{F}(t') = \text{Re } \mathcal{F}(t'), \quad (53.6)$$

и получить функции корреляции этого сигнала. Так как спектр  $\mathcal{F}(t')$  отличен от нуля только в полосе  $(1 - \mu\Omega/2, 1 + \mu\Omega/2)$  положительных частот  $\alpha$  и спектральная плотность в этой полосе равна  $4g(1) = 2C/\pi$ , имеем для «первой» функции корреляции

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(t'_1) \mathcal{F}^*(t'_2) \rangle &= \frac{2C}{\pi} \int_{1-\mu\Omega/2}^{1+\mu\Omega/2} e^{i\alpha(t'_1-t'_2)} d\alpha = \\ &= 4\mu C \frac{\sin \frac{\Omega}{2} (\theta_1 - \theta_2)}{\pi (\theta_1 - \theta_2)} e^{i(t'_1-t'_2)}. \end{aligned}$$

Что касается «второй» функции корреляции, то ввиду стационарности  $\mathcal{F}(t')$  она равна нулю:

$$\langle \mathcal{F}(t'_1) \mathcal{F}(t'_2) \rangle = 0.$$

Подставив в обе функции корреляции выражение (53.6) для  $\mathcal{F}(t')$ , получаем

$$\begin{aligned} \langle [F_{\parallel 1} F_{\parallel 2} + F_{\perp 1} F_{\perp 2} + i(F_{\parallel 1} F_{\perp 2} - F_{\perp 1} F_{\parallel 2})] e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \rangle &= \\ &= 4\mu C \frac{\sin \frac{\Omega}{2} (\theta_1 - \theta_2)}{\pi (\theta_1 - \theta_2)}, \end{aligned} \quad (53.7)$$

$$\langle [F_{\parallel 1} F_{\parallel 2} - F_{\perp 1} F_{\perp 2} - i(F_{\parallel 1} F_{\perp 2} + F_{\perp 1} F_{\parallel 2})] e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \rangle = 0.$$

Значения функций  $F_{\parallel}$ ,  $F_{\perp}$  и  $\varphi$  от аргументов  $\theta_1 = \mu t'_1$  и  $\theta_2 = \mu t'_2$  отмечены здесь для краткости просто индексами 1 и 2.

Вообще говоря, случайная фаза  $\varphi$  не независима от  $F_{\parallel}$  и  $F_{\perp}$ , но из вида уравнений (53.7) ясно, что время корреляции  $F_{\parallel}$  и  $F_{\perp}$  должно быть того же порядка  $1/\Omega$ , что и у правой части, тогда как характерное для  $\varphi$  время диффузии имеет порядок  $1/D$ , т. е. несравненно больше, чем  $1/\Omega$ . Можно допустить поэтому, что на интересующих нас интервалах времени  $\theta_1 - \theta_2 \sim 1/\Omega$  фаза  $\varphi$  имеет какое-то *постоянное* значение, *независимое* от очень быстро меняющихся  $F_{\parallel}$  и  $F_{\perp}$ . Тогда для интервалов  $\theta$  указанного порядка величины мы полагаем  $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = 1$ , а  $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{2i\varphi_1} \approx \text{const}$  и этот постоянный множитель во втором уравнении (53.7) сокращаем. В результате получаем

$$\begin{aligned} \overline{F_{\parallel 1} F_{\parallel 2}} + \overline{F_{\perp 1} F_{\perp 2}} + i(\overline{F_{\parallel 1} F_{\perp 2}} - \overline{F_{\perp 1} F_{\parallel 2}}) &= 4\mu C \frac{\sin \frac{\Omega}{2} (\theta_1 - \theta_2)}{\pi (\theta_1 - \theta_2)}, \\ \overline{F_{\parallel 1} F_{\parallel 2}} - \overline{F_{\perp 1} F_{\perp 2}} - i(\overline{F_{\parallel 1} F_{\perp 2}} + \overline{F_{\perp 1} F_{\parallel 2}}) &= 0, \end{aligned}$$



откуда тотчас же следует, что

$$\overline{F_{\parallel}(\theta_1) F_{\parallel}(\theta_2)} = \overline{F_{\perp}(\theta_1) F_{\perp}(\theta_2)} = 2\mu C \frac{\sin \frac{\Omega}{2} (\theta_1 - \theta_2)}{\pi (\theta_1 - \theta_2)}, \quad (53.8)$$

$$\overline{F_{\parallel}(\theta_1) F_{\perp}(\theta_2)} = 0.$$

Очень сильное неравенство  $\Omega \gg D$  позволяет сделать здесь формальный переход к  $\Omega \rightarrow \infty$ , т. е. замену

$$\frac{\sin \frac{\Omega}{2} (\theta_1 - \theta_2)}{\pi (\theta_1 - \theta_2)} \rightarrow \delta (\theta_1 - \theta_2),$$

и тогда <sup>1)</sup>

$$\overline{F_{\parallel}(\theta_1) F_{\parallel}(\theta_2)} = \overline{F_{\perp}(\theta_1) F_{\perp}(\theta_2)} = 2\mu C \delta (\theta_1 - \theta_2), \quad (53.9)$$

$$\overline{F_{\parallel}(\theta_1) F_{\perp}(\theta_2)} = 0.$$

Заметим, что в случае (53.5), т. е. при дельта-коррелированной силе  $F(t')$ , этот результат получился бы сразу.

Однако уравнение (53.1), в котором  $\tilde{F}(t')$  заменено на  $\bar{F}(t')$ , имеет более широкую область применения, чем первоначальная задача о действии на генератор дробового и теплового шума, когда «силу»  $F(t')$  можно считать дельта-коррелированной. Действительно, при установившемся режиме, когда в нулевом приближении  $r = r_0 = \text{const}$ , можно записать  $\tilde{F}(t')$  в виде

$$\tilde{F}(t') = \frac{1}{r_0} \left[ F_{\parallel}(\theta) x - F_{\perp}(\theta) \cdot \frac{dx}{dt'} \right].$$

Нетрудно понять, что зависимость от  $\theta$  коэффициента при  $x$ , т. е. функция  $F_{\parallel}(\theta)$ , выражает модуляцию частоты контура, в то время как  $F_{\perp}(\theta)$  — коэффициент при  $dx/dt'$  — дает модуляцию инкремента генератора. Таким образом, амплитуды  $F_{\parallel}$  и  $F_{\perp}$  могут в указанном приближении описать и *технические уходы*, обусловленные случайными изменениями параметров. Если эти изменения стационарны, то функции корреляции  $F_{\parallel \text{техн}}$  и  $F_{\perp \text{техн}}$  будут зависеть только от сдвига  $\theta_1 - \theta_2$ , но при этом  $\tilde{F}(t')$ , вообще говоря, не будет стационарной. Медленность технических уходов означает, что  $F_{\parallel \text{техн}}$  и  $F_{\perp \text{техн}}$  обладают очень большими временами корреляции. Случай же (53.9) можно истолковать с этой точки зрения как очень быструю (дельта-коррелированную) модуляцию параметров генератора.

<sup>1)</sup> Мы опирались на качественные соображения, но если «сила»  $F(t')$  представляет собой нормальный процесс, то при помощи формулы Фурутуцу — Новикова [14] можно доказать асимптотическую (при  $D/\Omega \rightarrow 0$ ) правильность результатов (53.9). Это доказательство является, по сути дела, обоснованием перехода к приближению диффузионного марковского процесса в данной задаче.

Для эффективного использования методов корреляционной теории необходимо линеаризовать уравнения (53.3) в окрестности невозмущенного динамического режима. Линеаризация возможна, если генератор достаточно сильно возбужден (§ 29), т. е. она предполагает, что сами  $F_{\parallel}$  и  $F_{\perp}$  малы. Тогда, обозначая через  $r_0$  и  $\varphi_0$  решения уравнений (53.3) при  $F_{\parallel} = F_{\perp} = 0$ , а через  $\rho$  и  $\chi$  — малые отклонения, обусловленные именно случайными силами, имеем

$$r'_0 = R(r_0), \quad r_0 \varphi'_0 = \Phi(r_0), \quad (53.10)$$

а в первом порядке относительно  $\rho$  и  $\chi$

$$\rho' + p\rho = -\frac{1}{2} F_{\perp}(\theta), \quad \chi' + q\rho = -\frac{1}{2r_0} F_{\parallel}(\theta), \quad (53.11)$$

где

$$p = -\frac{\partial R(r_0)}{\partial r_0}, \quad q = -\frac{\partial}{\partial r_0} \left[ \frac{\Phi(r_0)}{r_0} \right]. \quad (53.12)$$

Заметим, что в частном случае генератора (28.4)

$$R(r_0) = \frac{r_0}{2} (p - r_0^2), \quad \Phi(r_0) = 0, \quad (53.13)$$

так что  $q = 0$ , а  $p$  — значение инкремента на предельном цикле.

При установившемся автоколебательном режиме, который только и будет нас интересовать,  $r'_0 = 0$  и первое уравнение (53.10) принимает вид

$$R(r_0) = 0,$$

т. е. определяет постоянные (не зависящие от  $\theta$ ) значения радиусов предельных циклов в нулевом приближении. Если на цикле  $\Phi(r_0) \neq 0$ , то из второго уравнения (53.10) находим

$$\varphi_0 = \Delta\theta + \gamma,$$

где  $\gamma$  — произвольная постоянная, а величина

$$\Delta = \varphi'_0 = -\Phi(r_0)/r_0$$

дает в первом порядке поправку к частоте автоколебаний. В интересующем нас конкретном случае (53.13)  $r_0 = \sqrt{p}$  и  $\Delta = 0$ .

Уравнения (53.11) и есть стохастические уравнения, описывающие флуктуации амплитуды и фазы в окрестности предельного цикла. Для  $\rho$  мы имеем уравнение релаксационного типа (на устойчивом цикле  $p > 0$ ). Наличие квазиупругой силы  $-\rho r$  обуславливает установление стационарного режима, существование установившегося конечного значения  $\overline{\rho^2}$  (причем, по предположению,  $\sqrt{\overline{\rho^2}} \ll r_0$ ).

Для вычисления функции корреляции  $\rho$  в установившемся режиме можно взять решение первого уравнения (53.11) с отодвинутым в  $\theta = -\infty$  нулевым начальным условием:

$$\rho(\theta) = -\frac{e^{-\rho\theta}}{2} \int_{-\infty}^{\theta} e^{\rho\theta'} F_{\perp}(\theta') d\theta'. \quad (53.14)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_{\rho}(\theta - \theta') &= \overline{\rho(\theta)\rho(\theta')} = \\ &= \frac{1}{4} e^{-\rho(\theta+\theta')} \int_{-\infty}^{\theta} e^{\rho\theta} d\theta \int_{-\infty}^{\theta'} e^{\rho\theta'} \overline{F_{\perp}(\theta)F_{\perp}(\theta')} d\theta'. \end{aligned} \quad (53.15)$$

Для флуктуаций фазы, вследствие автономности рассматриваемой системы, установившегося режима не существует. Учитывая это, мы возьмем решение второго уравнения (53.11), соответствующее начальному условию  $\chi = 0$  при  $\theta = 0$ :

$$\chi(\theta) = -q \int_0^{\theta} \rho(\theta) d\theta - \frac{1}{2r_0} \int_0^{\theta} F_{\parallel}(\theta) d\theta. \quad (53.16)$$

Наибольший интерес представляет средний квадрат  $\chi$ . Если  $\rho(\theta)$  и  $F_{\parallel}(\theta)$  не коррелированы между собой<sup>1)</sup>, то

$$\overline{\chi^2(\theta)} = q^2 \int_0^{\theta} d\theta \int_0^{\theta} \psi_{\rho}(\theta - \theta') d\theta' + \frac{1}{4r_0^2} \int_0^{\theta} d\theta \int_0^{\theta} \overline{F_{\parallel}(\theta)F_{\parallel}(\theta')} d\theta'. \quad (53.17)$$

Если в формулу (53.15) подставить функцию корреляции (53.9) для  $F_{\perp}(\theta)$ , соответствующую дельта-коррелированному случайному воздействию  $F(t')$  на генератор, то получим

$$\psi_{\rho}(\theta - \theta') = \frac{\mu C}{4\rho} e^{-\rho|\theta - \theta'|}, \quad (53.18)$$

откуда, в частности,

$$\overline{\rho^2} = \psi_{\rho}(0) = \mu C / 4\rho. \quad (53.19)$$

Заметим, что коэффициент при дельта-функции в функциях корреляции случайных сил  $F_{\perp}(\theta)/2$  и  $F_{\parallel}(\theta)/2$ , входящих в ланжевенские уравнения (53.11), согласно (53.9) равен  $\mu C/2$ .

<sup>1)</sup> Это будет, очевидно, в отсутствие корреляции между  $F_{\parallel}$  и  $F_{\perp}$ , как, например, в случаях (53.8) и (53.9), т. е. при стационарных воздействиях на автогенератор. В общем случае  $F_{\parallel}$  и  $F_{\perp}$  могут быть и коррелированы, но это не препятствует расчету функций корреляции и средних квадратов  $\rho(\theta)$  и  $\chi(\theta)$ .

В соответствии с общей теоремой (36.16) эта величина должна совпадать с коэффициентом  $B$  в уравнении Эйнштейна — Фоккера (29.2):

$$B = \mu C / 2. \quad (53.20)$$

Простое сопоставление (29.16) и (53.18) приводит именно к этому равенству.

Вычисляя по формуле (53.17) средний квадрат флуктуационного набега фазы, мы предположим, что флуктуации амплитуды уже установились, т. е. возьмем для  $\rho$  функцию корреляции (53.18). Для  $F_{\parallel}(\theta)$  функция корреляции по-прежнему берется в виде (53.9). Результат вычисления:

$$\overline{\chi^2(\theta)} = \frac{\mu C}{2} \left\{ \frac{q^2}{\rho^3} (\rho\theta + e^{-\rho\theta} - 1) + \frac{\theta}{r_0^2} \right\}. \quad (53.21)$$

Первый член обусловлен флуктуациями амплитуды, а второй — непосредственным действием «толчков» или, что то же, дельта-коррелированной модуляцией частоты. Второй член с самого начала растет по диффузионному закону, первый же подчиняется этому закону только при  $\rho\theta \gg 1$ , и тогда

$$\overline{\chi^2(\theta)} \approx \frac{\mu C}{2} \left( \frac{q^2}{\rho^2} + \frac{1}{r_0^2} \right) \theta.$$

Если  $\rho\theta \ll 1$ , то

$$\overline{\chi^2(\theta)} \approx \frac{\mu C}{2} \left( \frac{q^2\theta^2}{2\rho} + \frac{\theta}{r_0^2} \right).$$

Разумеется, в изохронном генераторе (53.13), у которого амплитудные отклонения не влияют на частоту ( $q = 0$ ), первый член формулы (53.21) отсутствует и диффузионный закон справедлив при всех  $\theta$ :

$$\overline{\chi^2(\theta)} = \frac{\mu C}{2r_0^2} \theta = \frac{\mu C}{2\rho} \theta = 2D\theta. \quad (53.22)$$

В силу (53.20) это совпадает с (29.20).

До сих пор, говоря о дельта-коррелированной случайной «силе»  $F(t')$ , мы не расчленили ее в соответствии с (53.2) на дробовой и тепловой шумы. Произведем теперь это разбиение, с тем чтобы сопоставить удельные веса обоих видов шума.

Так как оба случайных воздействия независимы, имеем

$$\langle F(t_1) F(t_2) \rangle = \frac{1}{I_0^2 \omega^2} \left[ \overline{I_{др}(t_1) I_{др}(t_2)} + \frac{\overline{\dot{e}(t_1) \dot{e}(t_2)}}{L^2 \omega_0^4} \right]. \quad (53.23)$$

Согласно (43.2)

$$\overline{I_{др}(t_1) I_{др}(t_2)} = e \bar{I}_a \delta(t_1 - t_2),$$

где  $e$  — заряд электрона, а  $\bar{I}_a$  — средний анодный ток лампы. Если перейти к безразмерному времени  $t' = \omega_0 t$ , то

$$\overline{I_{др}(t_1) I_{др}(t_2)} = e \bar{I}_a \omega_0 \delta(t'_1 - t'_2). \quad (53.24)$$

Что касается тепловой флуктуационной э. д. с.  $e(t)$ , то для нее справедлива формула (35.13):

$$\overline{e(t_1) e(t_2)} = 2kTR\delta(t_1 - t_2) = 2kTR\omega_0\delta(t'_1 - t'_2), \quad (53.25)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана и  $T$  — абсолютная температура сопротивления  $R$ . Но в (53.23) входит функция корреляции не  $e(t)$ , а  $de(t)/dt = \omega_0 de(t')/dt'$ , т. е.

$$\overline{\dot{e}(t_1) \dot{e}(t_2)} = \omega_0^2 \frac{de(t'_1)}{dt'_1} \frac{de(t'_2)}{dt'_2}. \quad (53.26)$$

Найдем эту величину в нулевом приближении относительно малого параметра  $\mu$ .

Вводя вместо  $F(t')$  эффективную модулированную силу  $\bar{F}(t')$ , мы должны, конечно, произвести такую же замену и для  $e(t')$ . Затем мы представляем  $\bar{e}(t')$  в виде аналитического сигнала:

$$\mathcal{E}(t') = \mathcal{E}_0(\theta) e^{i(t' + \Phi(\theta))}.$$

В нулевом приближении относительно  $\mu$   $d\mathcal{E}(t')/dt' = i\mathcal{E}(t')$ , так что

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}(t'_1)}{dt'_1} \frac{d\mathcal{E}^*(t'_2)}{dt'_2} \right\rangle = \langle \mathcal{E}(t'_1) \mathcal{E}^*(t'_2) \rangle.$$

Отсюда и из (53.25), (53.26), следует, что

$$\overline{\dot{e}(t_1) \dot{e}(t_2)} = \omega_0^2 \overline{e(t'_1) e(t'_2)} = 2kTR\omega_0^3 \delta(t'_1 - t'_2). \quad (53.27)$$

Подставив (53.24) и (53.27) в (53.23), получаем окончательно

$$\overline{F(t'_1) F(t'_2)} = (C + C_1) \delta(t'_1 - t'_2), \quad (53.28)$$

где

$$C = \frac{e \bar{I}_a \omega_0}{I_0^2 \mu^2}, \quad C_1 = \frac{2kTR}{L^2 \omega_0^2 \mu^2}. \quad (53.29)$$

Ясно, что во все билинейные величины, характеризующие корреляцию и интенсивность флуктуаций, постоянные  $C$  и  $C_1$  войдут аддитивно. Так, например, для средних квадратов флуктуаций амплитуды и фазы в изохронном автогенераторе мы получим теперь выражения

$$\overline{\rho^2} = \frac{\mu}{4p} (C + C_1), \quad \overline{\chi^2} = \frac{\mu}{2p} (C + C_1) \theta.$$

Следовательно, отношение интенсивностей дробового и теплового шумов есть

$$\frac{C}{C_1} = \frac{e}{2kT} \frac{L^2 \omega_0^2 \bar{I}_a}{R} = \frac{eU_C}{2kT}, \quad (53.30)$$

где  $U_C$  — амплитуда напряжения на конденсаторе контура, равная амплитуде колебательного тока

$$I_{\text{ампл}} = \frac{L\omega_0}{R} \bar{I}_a,$$

деленной на  $\omega_0 C = 1/\omega_0 L$ . Согласно (53.30) отношение интенсивностей дробового и теплового шумов равно отношению работы переноса электрона через конденсатор (в момент максимума напряжения) к удвоенной энергии теплового шума в контуре. При  $T = 300^\circ\text{K}$  имеем

$$C/C_1 = 17U_C$$

( $U_C$  выражено в вольтах). Таким образом, если при комнатной температуре амплитуда напряжения на контуре нашей модели генератора превосходит  $1/17$  в, то влияние дробового шума больше, чем теплового. Следует, однако, иметь в виду, что этот результат относится к рассмотренной конкретной схеме генератора, когда контур находится в анодной цепи и, по предположению, отсутствует сеточный ток. С учетом сеточного тока и для других схем генератора положение может быть существенно иным [15].

Перейдем в формулах для средних квадратов  $\rho$  и  $\chi$  к первоначальным (размерным) параметрам. Поскольку  $x = I/I_0$ , а  $r = r_0 + \rho$ , флуктуация амплитуды тока в контуре равна  $\Delta I = I_0 \rho$ . Учитывая только дробовой шум и пользуясь выражениями  $\mu = \omega_0 MS$ ,  $\mu\rho = \omega_0 (MS - RC)$  (§ 28), получаем, согласно (53.19),

$$\overline{(\Delta I)^2} = I_0^2 \overline{\rho^2} = I_0^2 \frac{\mu C}{4\rho} = \frac{\bar{I}_a e}{4(MS - RC)}.$$

При помощи этого выражения легко переписать через размерные величины и средний квадрат флуктуационного набегу фазы (53.22):

$$\overline{\chi^2} = \frac{\mu C}{2\rho} \theta = 2 \frac{\overline{(\Delta I)^2}}{I_0^2} \mu \omega_0 t = \frac{\bar{I}_a e \omega_0^4 M^3 S}{8V^2 (MS - RC)} t.$$

При приближении к порогу самовозбуждения ( $MS - RC \rightarrow 0$ ), т. е. к границе устойчивости автоколебательного режима, «прочность» предельного цикла стремится к нулю. При этом происходит неограниченное нарастание интенсивности флуктуаций амплитуды и коэффициента диффузии фазы. Конечно, в

действительности рост флуктуаций будет ограничен, но он настолько велик, что нарушаются предпосылки линеаризации уравнений (53.3). Поэтому вопрос о флуктуациях при такой близости к границе самовозбуждения, когда случайные отбросы с предельного цикла одного порядка с его радиусом, уже не может быть рассмотрен в пределах корреляционной теории<sup>1)</sup>. Если случайные силы дельта-коррелированы, то в таких случаях можно вновь обратиться к уравнению Эйнштейна — Фоккера (см. [16]), и тогда рассмотрение перехода через границу самовозбуждения не вызывает никаких затруднений (§ 28).

Но в своей области применимости метод стохастических дифференциальных уравнений и корреляционной теории обладает определенными преимуществами. Во-первых, он значительно упрощает всю статистическую схему, что позволило рассмотреть задачи более сложные, чем флуктуации в автономном генераторе с одной степенью свободы. Например, были рассмотрены флуктуации в генераторе, синхронизированном внешней гармонической э. д. с.<sup>2)</sup>; в генераторе, стабилизированном по частоте посредством связи с высокочастотным контуром (кварцем), т. е. в системе с двумя степенями свободы [13, 19]; в томсоновском генераторе со многими степенями свободы [20]; в генераторе с сеточным током и постоянным или автоматическим смещением [15] и др. Подробное изложение разнообразных задач, касающихся флуктуаций в автоколебательных системах, и соответствующая библиография содержатся в книге [21].

Во-вторых, рассматриваемый метод дает возможность охватить *не марковские* флуктуации, обусловленные случайными воздействиями с длительной корреляцией, и в том числе технические уходы в автогенераторе. К этому мы теперь и перейдем.

Как уже было отмечено, «силу»  $F_{\parallel}(\theta)$  во втором уравнении (53.11) можно понимать и как результат флуктуаций параметров, определяющих частоту. В сущности, правую часть второго уравнения (53.11) целесообразно обозначить через  $\alpha(\theta)$ , описывая этой случайной функцией флуктуации безразмерной частоты автоколебаний, чем бы они ни были обусловлены. Можно поэтому включить в  $\alpha(\theta)$  и член  $-qr(\theta)$ , перенесенный из левой части уравнения и выражающий флуктуации частоты, вызванные в неизохронной системе флуктуациями амплитуды. Тогда уравнение примет вид

$$\chi'(\theta) = \alpha(\theta) = \alpha_e(\theta) + \alpha_T(\theta),$$

где  $\alpha_e(\theta)$  — естественные флуктуации частоты, обусловленные дробовым током и тепловым шумом, а  $\alpha_T(\theta)$  — технические уходы

<sup>1)</sup> Это относится вообще ко всем случаям близости к точкам бифуркации любого стационарного режима, около которого исследуются флуктуации.

<sup>2)</sup> Кроме статьи [13], задача изучалась тем же методом в работах [17, 18].

ды, связанные со случайными вариациями параметров схемы. Член  $-qr$  несмотря на то, что первоисточником флуктуаций амплитуды  $\rho$  предполагаются дельта-коррелированные естественные шумы, следует отнести все же к  $\alpha_T(\tau)$ , поскольку  $\rho$  обладает относительно большим временем корреляции (порядка  $1/\rho$  по  $\theta$ ). Для простоты мы ограничимся далее случаем изохронного генератора, у которого  $q = 0$ .

Очевидно,  $\alpha_e(\theta)$  и  $\alpha_T(\theta)$  статистически независимы. Предполагая, что эти случайные девиации частоты стационарны, мы можем при вычислении среднего квадрата набега фазы  $\chi(\theta) - \chi(0)$  за время  $\theta$ , не уменьшая общности, считать  $\chi(0) = 0$ . Тогда

$$\chi(\theta) = \int_0^\theta [\alpha_e(\theta) + \alpha_T(\theta)] d\theta,$$

откуда, в силу некоррелированности  $\alpha_e(\tau)$  и  $\alpha_T(\tau)$ .

$$\overline{\chi^2(\theta)} = \int_0^\theta \int_0^\theta [\overline{\alpha_e(\theta) \alpha_e(\theta')} + \overline{\alpha_T(\theta) \alpha_T(\theta')}] d\theta d\theta'. \quad (53.31)$$

Учитывая, что время корреляции  $\theta_e$  естественных флуктуаций частоты гораздо меньше периода колебаний (по «медленному времени» это означает, что  $\theta_e \ll 2\pi\mu$ ), мы примем, как и ранее, что  $\alpha_e(\theta)$  — дельта-коррелированная функция:

$$\overline{\alpha_e(\theta) \alpha_e(\theta')} = 2D_e \delta(\theta - \theta'). \quad (53.32)$$

Напротив, время корреляции технических уходов  $\theta_T$  очень велико даже по сравнению со временем установления амплитуды ( $\theta_T \gg 1/\rho \gg 2\pi\mu$ ). Для последующих оценок достаточно взять какую-либо «модель» функции корреляции  $\alpha_T(\tau)$ , например экспоненциальную:

$$\overline{\alpha_T(\theta) \alpha_T(\theta')} = \frac{D_T}{\theta_T} e^{-|\theta - \theta'|/\theta_T}, \quad D_T/\theta_T = \overline{\alpha_T^2}. \quad (53.33)$$

Подстановка в (53.31) функций корреляции такого вида [уже использованных выше при вычислении (53.21)] дает

$$\overline{\chi^2(\theta)} = \overline{\chi_e^2(\theta)} + \overline{\chi_T^2(\theta)} = 2D_e \tau + 2D_T [\theta - \theta_T (1 - e^{-\theta/\theta_T})]. \quad (53.34)$$

Все сказанное ранее в отношении формулы (53.21) можно перенести на выражение (53.34), с тем лишь отличием, что время установления диффузионного закона нарастания для  $\overline{\chi_T^2(\theta)}$ , равное теперь  $\theta_T$ , гораздо больше, чем время  $1/\rho$  в (53.21).



Для интервалов времени  $\theta \ll \theta_T$  суммарный среднеквадратичный набег равен

$$\overline{\chi^2}(\theta) = 2D_e\theta + \frac{D_T}{\theta_T} \theta^2, \quad (53.35)$$

а для  $\theta \gg \theta_T$  получается диффузионный закон

$$\overline{\chi^2}(\theta) = 2(D_e + D_T)\theta, \quad (53.36)$$

причем коэффициент «технической диффузии»  $2D_T$  на много порядков (в тысячи раз и более) превышает коэффициент естественной диффузии  $2D_e$  (§ 29).

На рис. 64 показан ход обеих слагаемых функции (53.34), но без соблюдения реального соотношения  $D_e$  и  $D_T$ . При больших  $\theta$

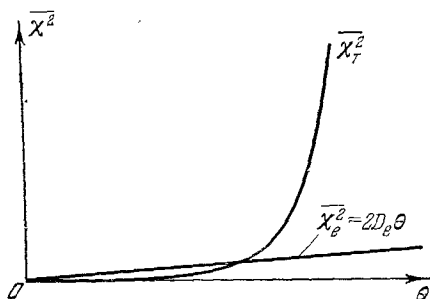


Рис. 64.

технический набег растет гораздо быстрее естественного, но при достаточно малых  $\theta$  рост  $\overline{\chi_T^2}$  квадратичен, т. е. всегда можно выбрать столь малые  $\theta$ , что  $\overline{\chi_e^2}$  будет гораздо больше  $\overline{\chi_T^2}$ . Следовательно, если как-либо измерять  $\chi^2$  именно за такие малые промежутки времени, то фактически это будет измерением величины  $\overline{\chi_e^2} = 2D_e\theta$ ,

а тем самым — измерением естественной ширины спектральной линии генератора. В этом и состоит основная идея метода И. Л. Берштейна.

Насколько малыми должны быть временные сдвиги  $\theta$ ? Оценка может быть сделана исходя из формулы (53.35), где надо потребовать

$$2D_e\theta \gg \frac{D_T}{\theta_T} \theta^2 = \overline{\alpha_T^2} \theta^2,$$

откуда

$$\theta \ll \frac{2D_e\theta_T}{D_T} = \frac{2D_e}{\alpha_T^2}. \quad (53.37)$$

Таким образом,  $\theta$  должно быть много меньше не просто самого времени корреляции технических уходов  $\theta_T$ , а весьма малой доли  $2D_e/D_T$  от  $\theta_T$ . Если, например  $2D_e/D_T \sim 10^{-5}$ , а  $\tau_T = \theta_T/\mu\omega_0 \sim 10$  сек (через  $\tau_T$  обозначено размерное время корреляции), то сдвиг должен быть гораздо меньше  $10^{-4}$  сек.

В измерениях Берштейна к детектору подводилась разность напряжений  $\Delta v = v(t) - v(t - \tau)$ , одно из которых снималось с исследуемого генератора непосредственно через виток связи,

а другое — через коаксиальный фидер длиной 500 м (рис. 65), который создавал задержку примерно на 3 мксек. Флуктуации амплитуды разностного напряжения  $\Delta v$  на входе детектора обусловлены в первую очередь флуктуациями разности фаз  $\Delta\chi = \chi(t) - \chi(t - \tau)$  между обоими напряжениями и вследствие малости  $\Delta\chi$  просто пропорциональны  $\Delta\chi$ . Измерив при помощи усилителя и квадратичного выходного прибора величину  $(\Delta v)^2$ , найдем тем самым  $(\Delta\chi)^2$ , т. е., в силу выполнения условия (53.37), найдем величину  $2D_e\theta = 2\mathcal{D}_e\tau$  ( $\mathcal{D}_e = \mu\omega_0 D_e$  и

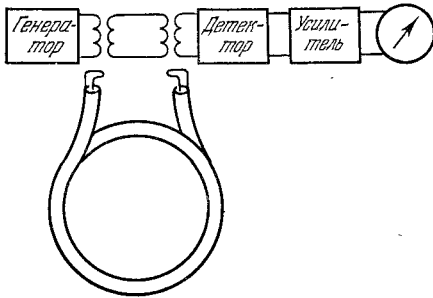


Рис. 65.

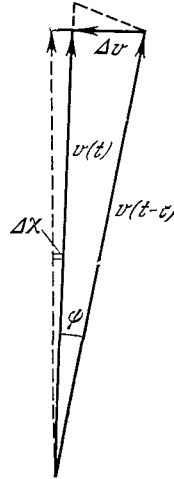


Рис. 66.

$\tau = \theta/\mu\omega_0$  — размерные коэффициент диффузии и длительность задержки). Именно возможность большого усиления позволила измерить нарушение когерентности  $\sqrt{(\Delta\chi)^2} \sim 1''$ , которое было обусловлено геометрической разностью хода всего в 500 м и составляло лишь  $10^{-12}$  от длины когерентного цуга.

Векторная диаграмма на рис. 66 поясняет еще одну существенную особенность описанного метода — возможность так подобрать средние амплитуды напряжений и аппаратный сдвиг фаз  $\psi$  между ними, чтобы амплитуда разностного напряжения  $\Delta v$  сильно зависела от флуктуаций разности фаз  $\Delta\chi$ , но очень мало менялась из-за амплитудных флуктуаций  $v(t)$ .

Следует заметить, что мы привели не действительную схему опыта, а лишь пояснили его принцип, следуя при этом Г. С. Горелику [22]. Фактически измерялась не величина  $(\Delta\chi)^2$ , а спектр  $\Delta\chi$ . Как уже было указано в § 45, исследование спектра  $g_x(\omega)$  колебания  $x(t) = r_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$  на крыльях линии, т. е. на достаточно больших удалениях  $|\omega - \omega_0|$  от максимума  $g_x(\omega)$ , позволяет получить высокочастотный участок спектра флуктуаций частоты  $\Omega(t) = \dot{\varphi}(t)$  (мы возвращаемся здесь к размерным величинам).

В автогенераторе, в соответствии с разбиением  $\Omega(t)$  на два некоррелированных слагаемых — технические уходы и естественные флуктуации, — имеем

$$g_{\Omega}(\omega) = g_{\Omega}^t(\omega) + g_{\Omega}^e(\omega),$$

причем спектр  $g_{\Omega}^t(\omega)$  высокий и узкий [сильные и медленные изменения  $\Omega_T(t)$ ], а  $g_{\Omega}^e(\omega)$  — низкий и широкий [малые и быстрые

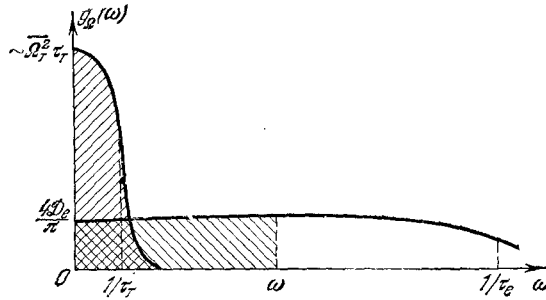


Рис. 67.

флуктуации  $\Omega_e(t)$ ], как это схематически показано на рис. 67. Соответственно разбивается и среднеквадратичный набег фазы.

$$\overline{(\Delta\chi)^2} = \overline{(\Delta\chi)_T^2} + \overline{(\Delta\chi)_e^2}.$$

Но для спектра автоколебаний генератора, т. е. для  $g_x(\omega)$ , такой аддитивности нет вследствие сложной нелинейной связи между  $g_x(\omega)$  и  $g_{\Omega}(\omega)$ . Формула (45.24) показывает, однако, что измерение  $g_x(\omega)$  на крыльях линии позволяет, в принципе, восстановить ход  $g_{\Omega}(\omega)$  на высоких частотах, т. е. там, где технические уходы практически не влияют и  $g_{\Omega}(\omega) \approx g_{\Omega}^e(\omega)$ . Насколько далеко надо отойти для этого от  $\omega_0$ , т. е. насколько большим должен быть аргумент функции  $g_{\Omega}(\omega)$ ? Речь идет здесь о *спектральной* формулировке условия (53.37), позволяющего обнаружить естественные флуктуации, несмотря на наличие технических уходов. Через размерные величины, поскольку  $\theta = \mu\omega_0\tau$ ,  $\Omega(t) = d\varphi/dt = \mu\omega_0 d\varphi/d\theta = \mu\omega_0\alpha(\theta)$  и  $D_e = \mathcal{D}/\mu\omega_0$ , это условие запишется в виде

$$\tau \ll 2\mathcal{D}_e/\overline{\Omega_T^2}. \quad (53.38)$$

При первом взгляде на рис. 67 может показаться, что надо потребовать  $\omega \gg 1/\tau_T$ . Но нам нужны, очевидно, такие  $\omega$ , при которых  $g_{\Omega}^t(\omega)$  мало не по сравнению со своим наибольшим значением в нуле, а по сравнению с уровнем  $g_{\Omega}^e(\omega)$ . Это будет

выполнено, если в интервале  $(0, \omega)$  интегральная интенсивность естественных флуктуаций

$$\int_0^{\omega} g_{\Omega}^e(\omega) d\omega \approx \frac{4\mathcal{D}_e}{\pi} \omega$$

значительно превышает интегральную интенсивность технических уходов

$$\int_0^{\omega} g_{\Omega}^r(\omega) d\omega \approx \int_0^{\infty} g_{\Omega}^r(\omega) d\omega = \overline{\Omega_r^2}.$$

Мы приходим, таким образом, к условию

$$\frac{4\mathcal{D}_e}{\pi} \omega \gg \overline{\Omega_r^2},$$

которое совпадает с (53.38), если положить  $\omega = \pi/2\tau$ .

Для непосредственного измерения крыльев линии надо, чтобы  $g_x(\omega)$  на расстройках  $|\omega - \omega_0|$ , удовлетворяющих условию (53.38), превышало уровень собственного шума аппаратуры. Метод И. Л. Берштейна достигает цели в тех случаях, когда флуктуационный дрейф фазы не чрезмерно мал, — в обычных ламповых генераторах, а также в клистронных. Для молекулярного генератора интенсивность естественных флуктуаций частоты столь мала, что их измерение требует привлечения других приемов, как, например, сравнение двух независимых генераторов.

Остановимся в заключение на следующем любопытном вопросе. Томсоновский автогенератор дает квазимонохроматическое колебание — спектральную линию малой ширины. В зарубежной литературе первоначально имела место ошибочная трактовка воздействия флуктуаций на автогенератор как на очень селективный фильтр. Спектр автоколебаний изображался в виде суперпозиции дискретной линии и узкого (отфильтрованного) шумового фона. Это неверно, так как генератор — нелинейная система с обратной связью, в силу чего действующие в нем источники шума дают не наложение шума на автоколебания, а хаотическую модуляцию последних, т. е. уширение линии.

Допустим теперь, что мы построили весьма селективный фильтр, у которого квадрат модуля функции передачи  $|k(i\omega)|^2$  в точности воспроизводит форму спектральной линии автогенератора. Таким образом, если подвести к этому фильтру шум с ровным спектром (ровным хотя бы в некоторой полосе, превышающей с известным запасом полосу пропускания фильтра), то на выходе получится колебание, спектр которого (а значит, и функция корреляции) такой же, как у автогенератора. Можно ли различить при этих условиях, где мы имеем дело с отфильтро-

ваным шумом, а где — с автоколебаниями, исследуя только сами колебания и не имея доступа к их источникам?

Естественно обратиться к функциям распределения обоих процессов. И тот, и другой — стационарные квазимонохроматические процессы, и, следовательно, совместное распределение амплитуды и фазы у обоих имеет вид (44.31). Таким образом, фазы обоих колебаний распределены равномерно в интервале  $(0, 2\pi)$  и единственная возможность обнаружить различие — это сравнить распределения огибающей  $w_r(r)dr$ .

На выходе весьма узкополосного фильтра колебание будет гауссовым процессом, так что амплитуда  $r$  будет распределена по релеевскому закону (рис. 68, а). В генераторе же, даже при

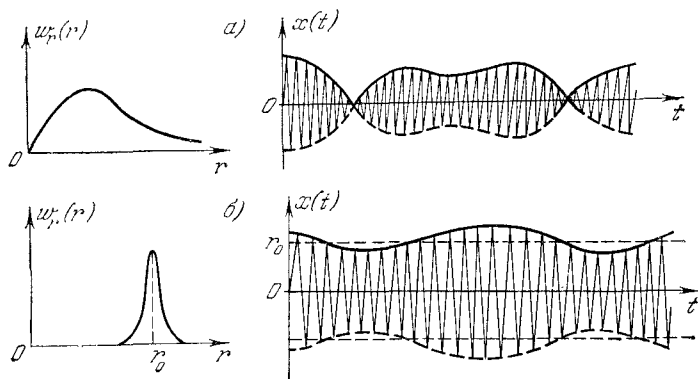


Рис. 68.

очень малом переходе через границу самовозбуждения, распределение  $r$ , как мы видели (§ 29), будет гауссовым, центрированным около значения  $\bar{r} = r_0$ , т. е. около радиуса динамического предельного цикла (рис. 68, б). Это различие имеет, очевидно, весьма общий характер и позволяет в тех случаях, когда источник колебаний недоступен, судить о том, к какому типу они ближе — к автоколебаниям или к фильтрованному шуму.

#### § 54. Тепловой шум в квазистационарных цепях. Флуктуационно-диссипационная теорема

Флуктуации электрических и магнитных величин, обусловленные тепловым движением микрочастиц в телах, открывают обширное и интересное поле для применения статистических методов в электродинамике. Эта область охватывает и те случайные электромагнитные поля, которые создаются микрочастицами при их тепловом движении, в том числе волновые поля, которые по-

сят название теплового излучения. Мы рассмотрим такие поля в части II этой книги, а здесь ограничимся частным случаем *квазистационарных* электрических цепей, для которых излучение, как правило, не представляет интереса, а основным вопросом являются флуктуации *интегральных* электрических величин (зарядов, токов, напряжений), описывающих состояние цепи.

Хотя существование электрических флуктуаций теплового происхождения было теоретически очевидным уже с первых шагов развития теории брауновского движения, экспериментальное их обнаружение стало возможным лишь в результате усовершенствования радиотехнических устройств и в первую очередь усилительной техники. В 1927 г. Джонсон [23], работая в диапазоне низких (акустических) частот, обнаружил, что на выходе усилителя, ко входу которого подключено сопротивление, наблюдается добавочный «шум» — хаотическое напряжение, интенсивность которого (средний квадрат) растет линейно с увеличением сопротивления  $R$  на входе и с повышением его температуры  $T$ . Именно такая зависимость интенсивности тепловых флуктуаций от  $R$  и  $T$  вытекала из их рассмотрения как брауновского движения (де Гааз-Лоренц, 1913 г.), но для полной теории явления нужен был учет полосы пропускания усилителя, т. е. надо было знать *спектральное распределение* интенсивности флуктуаций. Именно такая теория была одновременно с наблюдениями Джонсона развита Найквистом [24].

Представление о локализованной в цепи случайной электродвижущей силе  $e(t)$ , вызывающей в этой цепи флуктуации токов и напряжений, было введено по аналогии с ланжевендовской случайной силой, вызывающей брауновское движение частицы. Найквист дал спектральную (т. е., как мы скажем теперь, корреляционную) теорию этой э. д. с., которая при постоянстве всех макроскопических условий представляет собой, очевидно, стационарный случайный процесс. Поскольку  $\overline{e(t)} = 0$ , основной характеристикой этого процесса является его спектральная плотность  $g^{(e)}(\omega)$ , которая должна быть такой, чтобы приводить к правильному описанию наблюдаемых электрических флуктуаций в любой цепи. Но сложную разветвленную цепь всегда можно разбить на двухполюсники и с каждым из них связать свой источник флуктуационной э. д. с. Вопрос сводится, таким образом, к отысканию спектральной плотности  $g^{(e)}(\omega)$  случайной э. д. с., локализованной в любом двухполюснике. Единственной электродинамической характеристикой двухполюсника служит его импеданс  $Z(i\omega)$ , так что речь идет об установлении связи между  $g^{(e)}(\omega)$  и  $Z(i\omega)$ . Эту связь и дает полученная Найквистом фундаментальная формула, носящая его имя. Дальнейшее развитие теории тепловых флуктуаций привело к появлению множества разнообразных выводов этой формулы и к далеко

идущим обобщениям, из которых она вытекает как простейший частный случай. Но первоначальный ее вывод, данный самим Найквистом, остается классическим по своей ясности и изяществу.

Очевидно, искомая связь между  $g^{(e)}(\omega)$  и  $Z(i\omega)$  настолько универсальна, что выбор конкретной модели для ее нахождения не должен играть роли. Найквист рассматривает идеальную двухпроводную линию с волновым сопротивлением  $\sqrt{L/C}$  ( $L$  и  $C$  — погонные индуктивность и емкость), к концам которой подключены согласованные на частоте  $\omega$  омические сопротивления  $R = \sqrt{L/C}$  (рис. 69), имеющие одну и ту же температуру  $T$  (равновесное состояние).

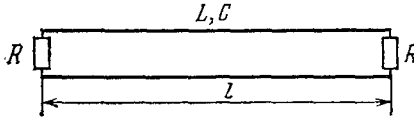


Рис. 69.

Флуктуации в идеальных проводниках, из которых сделана линия, не требуют для своего поддержания внутренних сторонних источников, но в сопротивлении  $R$  надо включить «генераторы» случайных э. д. с.  $e_1(t)$  и  $e_2(t)$ . Таким образом, обмен энергией между сопротивлениями происходит посредством волн, возбуждаемых в линии каждым из этих «генераторов» и не испытывающих отражения ввиду согласования линии с нагрузками в рассматриваемом спектральном интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ .

Если в некоторый момент времени закоротить оба конца линии идеальными проводящими переключками, то в ней будут «пойманы» бегущие встречные волны со всевозможными частотами  $\omega$ . Систему стоячих волн с частотами, лежащими в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ , можно рассматривать как суперпозицию тех собственных колебаний выделенного отрезка линии  $l$ , частоты которых заключены в этом интервале. Собственные частоты эквидистантны и выражаются формулой  $\omega_m = m\pi v/l$ , где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  и  $v$  — фазовая скорость распространения волн в линии. Интервал между собственными частотами равен  $\Delta\omega_m = \pi v/l$  и, следовательно, в интересующем нас интервале положительных частот  $d\omega$  уместается число

$$dN = \frac{d\omega}{\Delta\omega_m} = \frac{l d\omega}{\pi v}$$

собственных колебаний (степеней свободы). По теореме о равномерном распределении на каждую степень свободы приходится при термодинамическом равновесии энергия  $kT$  ( $k$  — постоянная Больцмана), так что энергия «пойманных» волн в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$  есть

$$dU = kT dN = kT \frac{l d\omega}{\pi v}. \quad (54.1)$$

При включенных нагрузках  $R$  отражение отсутствует, и поэтому полученное выражение равно энергии, посылаемой в линию обоими сопротивлениями за время пробега волн на расстояние  $l$ , т. е. за время  $\tau = l/v$ . Отсюда следует, что каждое из сопротивлений посылает в интервал положительных частот  $d\omega$  за единицу времени энергию

$$p(\omega) d\omega = \frac{dU}{2\tau} = \frac{kT}{2\pi} d\omega. \quad (54.2)$$

По поводу этого результата необходимо сделать ряд замечаний.

Во-первых, пропорциональность  $dN$  интервалу  $d\omega$  имеет место лишь тогда, когда число собственных колебаний  $dN$  в интервале  $d\omega$  достаточно велико ( $dN \gg 1$ ). Если выразить  $\omega$  через длину волны в линии  $\lambda = 2\pi v/\omega$ , то указанное условие запишется в виде

$$\frac{d\lambda}{\lambda} \gg \frac{\lambda}{2l}.$$

С другой стороны, немонахроматичность  $d\lambda$  должна быть и не чрезмерно большой, с тем чтобы частотно-зависимые величины [например,  $R(\omega)$ ] мало менялись на протяжении интервала  $d\omega$ . Во всяком случае необходимо  $d\omega \ll \omega$ , или, если записать это через  $\lambda$ ,

$$1 \gg \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Из обоих условий для  $d\lambda/\lambda$  вытекает, что

$$l \gg \lambda,$$

т. е. результат (54.2) является в этом смысле *асимптотическим*.

Во-вторых, формула (54.2) выведена для частного вида линии (идеальной двухпроводной линии) и при подсчете  $dN$  были учтены только так называемые главные волны (поперечно-электрические и поперечно-магнитные одновременно), у которых нет дисперсии скорости  $v$ . Можно, однако, доказать ([25], § 17), что (54.2) остается в силе для линии (одномерного канала) произвольного типа и для любых волн, возможных в такой линии, а не только для главных, которые в общем случае могут и не существовать (например, в волноводе). При этом надо учесть дисперсию  $v = v(\omega)$  и соответственно различие между фазовой и групповой скоростями (при наличии дисперсии время пробега  $\tau$  определяется групповой скоростью).

Третье замечание касается того, что теорема о равномерном распределении ограничила нас некантовой областью  $\hbar\omega \ll kT$ , что для интересующего нас квазистационарного диапазона вполне естественно. Если, однако, не связывать себя достаточно низкими



частотами, то надо применять теорему о распределении энергии в ее квантовой форме. Тогда вместо  $kT$  (в 54.1) и (54.2) вошла бы средняя энергия квантового осциллятора

$$\Theta(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{\hbar\omega}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT}. \quad (54.3)$$

Вернемся к выводу формулы Найквиста.

Пусть теперь одинаковые сопротивления  $R$  замкнуты друг на друга через чисто реактивный фильтр  $X$ , пропускающий только полосу положительных частот  $(\omega, \omega + d\omega)$ , внутри которой он совершенно «прозрачен» (рис. 70). Такой фильтр, работающий

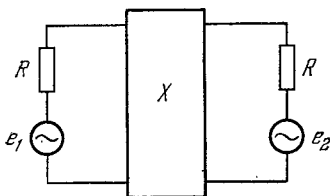


Рис. 70.

либо как короткое замыкание, либо как разрыв цепи, не вносит собственных шумов. Поэтому ток в цепи на частоте  $\omega$ , т. е. спектральная амплитудная плотность  $\tilde{I}(\omega)$ , выражается через аналогичные амплитудные плотности  $\tilde{e}_1(\omega)$  и  $\tilde{e}_2(\omega)$  формулой

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{\tilde{e}_1(\omega) + \tilde{e}_2(\omega)}{2R(\omega)}. \quad (54.4)$$

Для рассматриваемых стационарных процессов

$$\langle \tilde{I}(\omega) \tilde{I}^*(\omega') \rangle = g^{(I)}(\omega) \delta(\omega - \omega')$$

и аналогично для  $\tilde{e}_1(\omega)$  и  $\tilde{e}_2(\omega)$ , причем  $g_1^{(e)}(\omega) = g_2^{(e)}(\omega) \equiv g_e(\omega)/2$ , где для упрощения записи мы обозначали спектральную плотность по *положительным* частотам через  $g_e(\omega)$  вместо  $g^{(e)+}(\omega)$ . Между собой  $\tilde{e}_1(\omega)$  и  $\tilde{e}_2(\omega)$  не коррелированы. Это последнее допущение естественно, если учесть, что истинным источником каждой из этих э. д. с. является тепловое движение микрочастиц в соответствующем сопротивлении. Далее мы дадим, однако, более общее обоснование.

Перемножая выражения (54.4) для  $\tilde{I}(\omega)$  и  $\tilde{I}^*(\omega')$ , усредняя и учитывая отсутствие корреляции между  $\tilde{e}_1(\omega)$  и  $\tilde{e}_2(\omega)$ , получаем после отбрасывания в обеих частях равенства множителя  $\delta(\omega - \omega')$ , что

$$R(\omega) g^{(I)}(\omega) = \frac{g_1^{(e)}(\omega) + g_2^{(e)}(\omega)}{4R(\omega)}. \quad (54.5)$$

Разумеется, это равенство, записанное для спектральных плотностей по частотам  $\omega$ , лежащим в интервале  $(-\infty, \infty)$ , справедливо и для спектральных плотностей по положительным частотам  $g_I(\omega) = 2g^{(I)}(\omega)$  и т. д. Согласно (54.5) в первое сопротивление поступает из второго (в интервале  $d\omega$  *положительных*

частот) мощность

$$2 \cdot \frac{g_2^{(e)}(\omega)}{4R(\omega)} d\omega = \frac{g_e(\omega)}{4R(\omega)} d\omega$$

и такая же мощность поступает из первого сопротивления во второе. Эта мощность должна быть, в соответствии с (54.2), равна  $\frac{kT}{2\pi} d\omega$ , откуда и следует формула Найквиста для спектральной плотности (по положительным  $\omega$ ) случайной тепловой э. д. с.  $e(t)$ :

$$g_e(\omega) = \frac{2}{\pi} kTR(\omega) = \frac{2}{\pi} kT \operatorname{Re} Z(i\omega). \quad (54.6)$$

Из (54.6) видно, что системы, не обладающие активным сопротивлением, не содержат и источника теплового шума. С такого рода связью тепловых флуктуаций с диссипацией энергии в системе мы уже встречались, рассматривая брауновское движение (§ 35). Допущение, что чисто реактивные системы не шумят, уже было использовано в предыдущих рассуждениях. Другим предположением была взаимная некоррелированность э. д. с. в разных двухполюсниках. Это свойство можно вывести из общего и очевидного требования, чтобы последовательное и параллельное соединение двух двухполюсников ( $Z_1, e_1$  и  $Z_2, e_2$ ) были эквивалентны одному двухполюснику с импедансом  $Z$ , равным соответственно либо  $Z_1 + Z_2$ , либо  $\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$ , и с э. д. с.  $e$ , равной либо  $e_1 + e_2$ , либо  $\frac{Z_2 e_1 + Z_1 e_2}{Z_1 + Z_2}$  (рис. 71), причем для  $e$  и  $Z$  опять должна быть справедлива формула Найквиста.

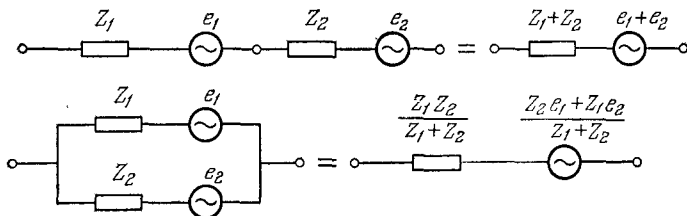


Рис. 71.

Использование (при составлении для рассматриваемой цепи уравнений Кирхгофа) локальных э. д. с.  $e$ , не коррелированных между собой, удобно еще и тем, что позволяет легко учесть возможное различие температур отдельных двухполюсников (см. задачи 7 и 8).

Согласно (54.6) спектральная плотность э. д. с. Найквиста растет с увеличением сопротивления и при  $R \rightarrow \infty$  (разрыв

цепи) тоже обращается в бесконечность. Этот кажущийся парадокс возникает лишь в результате забвения того обстоятельства, что формула (54.6) применима только к достаточно хорошим проводникам — таким, *внутри* которых можно при данной частоте  $\omega$  пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости. Если это условие не выполнено, то наряду с проводимостью  $\sigma$  надо учитывать и диэлектрическую проницаемость проводника  $\epsilon$ . Например, для отрезка провода (рис. 72), вводя кроме его сопротивления  $R = l/\sigma S$  еще внутреннюю емкость между его торцами  $C = \epsilon S/4\pi l$  ( $S$  — площадь поперечного сечения), мы получим, как это будет показано в части II, следующее выражение для спектральной плотности тепловой э. д. с.:

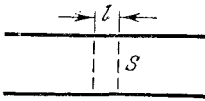


Рис. 72.

$$g_e(\omega) = \frac{2}{\pi} kT \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2}. \quad (54.7)$$

Отсюда видно, что  $g_e(\omega)$  обращается в нуль как при  $R = 0$  (идеальный проводник), так и при  $R = \infty$  (идеальный диэлектрик) и что обычная формула (54.6) пригодна лишь при  $\omega^2 C^2 R^2 \ll 1$ .

Рассмотрим в качестве примера тепловой шум в колебательном контуре. Для спектральных амплитуд тока и э. д. с. [ $I = \tilde{I}(\omega)$  и  $\tilde{e} = \tilde{e}(\omega)$ ] имеем

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{e}}{Z(i\omega)} = \frac{\tilde{e}}{R + i(\omega L - 1/\omega C)}.$$

Спектральная плотность тока по положительным частотам есть

$$g_I(\omega) = \frac{g_e(\omega)}{|Z|^2} = \frac{2}{\pi} kTR \frac{1}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

Найдем среднюю полную магнитную энергию шума в контуре

$$\overline{U_m} = \frac{L}{2} \overline{I^2} = \frac{L}{2} \int_0^{\infty} g_I(\omega) d\omega = \frac{kTRL}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

Из-за скин-эффекта  $R$  и  $L$  зависят при достаточно высоких частотах от  $\omega$  (в медном проводе диаметром 1 мм эта зависимость заметна, начиная уже с  $\omega \sim 10^5$ ). Мы примем, что собственная частота контура лежит значительно ниже таких частот и что можно поэтому с достаточной точностью считать параметры контура не зависящими от  $\omega$ .

Вводя в качестве переменной интегрирования  $x = \omega \sqrt{LC}$  и обозначая величину, обратную добротности, через  $\gamma$  ( $\gamma = 1/Q =$

$= R/\sqrt{L/C}$ ), приводим выражение для  $\bar{U}_m$  к виду

$$\bar{U}_m = \frac{\gamma kT}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\gamma^2 x^2 + (x^2 - 1)^2}.$$

Замыкая путь интегрирования в верхней полуплоскости и взяв вычеты в полюсах  $x_{1,2} = i\gamma/2 \pm \sqrt{1 - \gamma^2/4}$ , получаем

$$\bar{U}_m = kT/2,$$

как это и должно быть в силу теоремы о равномерном распределении и соотношения  $\bar{U}_m = \bar{E}/2$ , где  $\bar{E}$  — полная средняя энергия линейного осциллятора.

Аналогичным образом для средней полной электрической энергии контура, зависящей от спектральной интенсивности заряда на конденсаторе  $g_q(\omega) = g_I(\omega)/\omega^2$ , получаем

$$\begin{aligned} \bar{U}_e &= \frac{\bar{q}^2}{2C} = \frac{1}{2C} \int_0^{\infty} g_I(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2} = \\ &= \frac{\gamma kT}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\gamma^2 x^2 + (x^2 - 1)^2} = \frac{kT}{2}. \end{aligned}$$

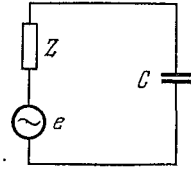


Рис. 73.

Если емкость  $C$  присоединена к произвольному двухполюснику (рис. 73) с импедансом

$$Z(i\omega) = R(\omega) + iX(\omega),$$

то средняя электрическая энергия конденсатора, конечно, уже не будет равна  $kT/2$ : энергия  $kT$  приходится на степень свободы (на каждое нормальное колебание рассматриваемой системы), а не на емкость и индуктивность. Для спектральной интенсивности тока в цепи  $Z$  и  $C$ , согласно закону Ома и формуле Найквиста, имеем

$$g_I(\omega) = \frac{2}{\pi} kT \frac{\operatorname{Re} Z}{|Z + 1/i\omega C|^2} = \frac{2}{\pi} kT \frac{R(\omega)}{R^2(\omega) + [X(\omega) - 1/(\omega C)]^2}.$$

Снова учитывая, что  $g_q(\omega) = g_I(\omega)/\omega^2$ , получаем для  $\bar{U}_e$  выражение

$$\bar{U}_e = \frac{CkT}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\omega) d\omega}{\omega^2 C^2 R^2(\omega) + [\omega CX(\omega) - 1]^2},$$

где ввиду четности функции  $R(\omega)$  интегрирование распространено на всю вещественную ось  $\omega$ . Если

$$Z = \frac{R}{1 + i\omega cR},$$

т. е. двухполюсник состоит из параллельно соединенных емкости  $c$  и сопротивления  $R$ , то средняя энергия  $\bar{U}_e = kT/2$  будет на суммарной емкости  $C + c$ , а на конденсатор  $C$  придется только доля  $C/(C + c)$  от  $kT/2$ .

В радиотехнике и радиофизике широко принято выражать интенсивность шумов самого разного происхождения (шумов в лампах и полупроводниковых приборах, космического радиоизлучения и т. д.) через так называемую *эквивалентную шумовую температуру*. Пусть некоторый источник (двухполюсник) отдает согласованной с ним нагрузке в полосе (положительных) частот  $\Delta\omega$  мощность

$$P = \int_{\omega}^{\omega + \Delta\omega} p(\omega) d\omega = \bar{p}(\omega) \Delta\omega,$$

где, очевидно,  $\bar{p}(\omega)$  — средняя плотность мощности в рассматриваемой полосе. В соответствии с (54.2) активное сопротивление, находящееся при температуре  $T_s$  и согласованное с этой же нагрузкой, создает в ней тепловой шум мощности  $kT_s\Delta\omega/2\pi$ . Если подобрать  $T_s$  так, чтобы мощности были равны:

$$\frac{kT_s}{2\pi} \Delta\omega = P = \bar{p}(\omega) \Delta\omega,$$

то  $T_s$  называется *эквивалентной* (шумовой) температурой источника. Часто бывает удобно относить  $T_s$  к «комнатной» температуре  $T_0 = 290^\circ\text{K}$ , т. е. вводить *относительную* эквивалентную температуру источника

$$n_T(\omega) = \frac{T_s}{T_0} = \frac{2\pi\bar{p}(\omega)}{kT_0}.$$

Основываясь на формуле Найквиста (54.6), пользуются и понятием *эквивалентного шумового сопротивления*. Рассмотрим его на примере дробового тока лампы ( $I_a = I_a + I_{др}$ ), спектральная плотность которого (по  $\omega > 0$ ) равна  $g_{др}(\omega) = e\bar{I}_a/\pi$ .

Допустим, что лампа не шумит, но к ее сетке подключено активное сопротивление  $R_s(\omega)$  — источник найквистовской э. д. с.  $e(t)$ . Спектральная плотность этой э. д. с. при комнатной температуре  $T_0$  равна

$$g_e(\omega) = \frac{2}{\pi} kT_0 R_s(\omega);$$

в анодном токе э. д. с.  $e(t)$  вызовет тепловой шум со спектральной плотностью  $g_I(\omega) = S^2 g_e(\omega) = \frac{2}{\pi} kT_0 S^2 R_s(\omega)$ , где  $S$  — крутизна анодной характеристики лампы. Если  $R_s(\omega)$  подобрано так, что  $g_I(\omega) = g_{др}(\omega)$ , т. е.

$$R_s(\omega) = \frac{e\bar{I}_a}{2kT_0 S^2},$$

то это и будет эквивалентное шумовое сопротивление дробового тока лампы. В данном примере оба шума белые, в силу чего  $R_s(\omega)$  не зависит от частоты.

В общем случае линейной цепи с  $n$  степенями свободы состояние системы описывается  $2n$  переменными — либо, как это принято в электро- и радиотехнике,  $n$  токами и  $n$  напряжениями, либо, если исходить из уравнений Лагранжа — Максвелла,  $n$  зарядами (обобщенными координатами)  $q_j$  и  $n$  токами (обобщенными скоростями)  $\dot{q}_j = I_j$ . Линейные дифференциальные уравнения для  $q_j(t)$  дают для спектральных амплитуд токов  $I_j$  и э. д. с.  $\tilde{\mathcal{E}}_j$  обобщенные уравнения Кирхгофа:

$$\tilde{I}_j = \sum_k Y_{jk}(i\omega) \tilde{\mathcal{E}}_k, \quad \tilde{\mathcal{E}}_j = \sum_k Z_{jk}(i\omega) \tilde{I}_k. \quad (54.8)$$

Здесь  $\mathbf{Y} = \{Y_{jk}\}$  и  $\mathbf{Z} = \{Z_{jk}\}$  — взаимно обратные матрицы адмиттанса и импеданса [ $\mathbf{YZ} = \mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E} = \{\delta_{jk}\}$  — единичная матрица].

Э. д. с.  $\tilde{\mathcal{E}}_j(\omega)$  в законах Кирхгофа (54.8) — это уже не локальные э. д. с., включенные в определенные двухполюсники, на которые можно разложить нашу сложную разветвленную цепь, а спектральные амплитуды тех *обобщенных* «сил»  $\mathcal{E}_j(t)$ , которые соответствуют в смысле уравнений Лагранжа обобщенным «координатам»  $q_j(t) = \int I_j(t) dt$ . Другими словами, работа, совершаемая в единицу времени всеми э. д. с.  $\mathcal{E}_j(t)$  над системой (т. е. поглощаемая системой мгновенная мощность), равна

$$Q(t) = \sum_j \mathcal{E}_j(t) \dot{q}_j(t) = \sum_j \mathcal{E}_j(t) I_j(t).$$

Если  $\mathcal{E}_j(t)$  — тепловые флуктуационные э. д. с., являющиеся при постоянной температуре  $T$  стационарными и стационарно связанными случайными процессами с  $\overline{\mathcal{E}_j(t)} = 0$ , то в пределах корреляционной теории их статистические свойства описываются корреляционной матрицей  $\langle \mathcal{E}_j(t) \mathcal{E}_k(t') \rangle$  или же соответствующей матрицей спектральных плотностей  $g_{jk}^{(\mathcal{E})}(\omega)$ :

$$\langle \tilde{\mathcal{E}}_j(\omega) \tilde{\mathcal{E}}_k^*(\omega') \rangle = g_{jk}^{(\mathcal{E})}(\omega) \delta(\omega - \omega').$$

Обобщение формулы Найквиста (54.6) на этот случай системы со многими степенями свободы дает связь матрицы  $g_{jk}^{(\mathcal{E})}(\omega)$  с матрицей импеданса  $Z_{jk}(i\omega)$  нашей разветвленной цепи. А именно, если вся цепь находится при одной и той же температуре  $T$  (равновесное состояние), формула Найквиста в сочетании с уравнениями Кирхгофа (54.8) и теоремой Тевенина дает следующее выражение для спектральных плотностей по  $\omega > 0$  (см. [26]):

$$g_{jk}^{(\mathcal{E})}(\omega) = \frac{kT}{\pi} (Z_{jk} + Z_{kj}^*). \quad (54.9)$$

Разумеется, для неразветвленной цепи ( $j = k = 1$ ,  $Z_{11} \equiv Z$ ) отсюда следует формула Найквиста (54.6).

Заметим, что обобщение (54.9) формулы Найквиста на разветвленные цепи справедливо и тогда, когда цепь не удовлетворяет принципу взаимности. Если же он выполнен, то матрицы  $Z$  и  $Y$  симметричны, и тогда

$$g_{\mathcal{E}jk}(\omega) = \frac{kT}{\pi} (Z_{jk} + Z_{jk}^*) = \frac{2}{\pi} kT \operatorname{Re} Z_{jk}. \quad (54.10)$$

С помощью (54.9) нетрудно получить выражение и для элементов матрицы спектральных плотностей токов:

$$\langle \tilde{I}_j(\omega) \tilde{I}_k^*(\omega') \rangle = g_{jk}^{(I)}(\omega) \delta(\omega - \omega').$$

Согласно первому уравнению (54.8)

$$\langle \tilde{I}_j(\omega) \tilde{I}_k^*(\omega') \rangle = \sum_{l, m} Y_{jl}(i\omega) Y_{km}^*(i\omega') \langle \tilde{\mathcal{E}}_l(\omega) \tilde{\mathcal{E}}_m^*(\omega') \rangle,$$

или, если подставить сюда корреляционные функции, сократить на  $\delta(\omega - \omega')$  и перейти к плотностям по  $\omega > 0$ ,

$$g_{Ijk}(\omega) = \sum_{l, m} Y_{jl}(i\omega) Y_{km}^*(i\omega) g_{\mathcal{E}lm}(\omega).$$

Внося сюда (54.9), находим

$$g_{Ijk}(\omega) = \frac{kT}{\pi} \sum_{l, m} Y_{jl} Y_{km}^* (Z_{lm} + Z_{ml}^*).$$

Но  $\sum_l Y_{jl} Z_{lm} = \delta_{jm}$  и  $\sum_m Y_{km}^* Z_{ml}^* = \delta_{kl}$ , так что в результате

$$g_{Ijk}(\omega) = \frac{kT}{\pi} (Y_{jk} + Y_{kl}^*). \quad (54.11)$$

В отличие от тепловых э. д. с.  $e_l(t)$  (локализованных в отдельных двуполосниках), которыми можно пользоваться в тех случаях, когда известна вся структура цепи, а не только ее матрица импеданса, э. д. с.  $\mathcal{E}_j$ , входящие в (54.8), вообще говоря, взаимно коррелированы. Это получается потому, что обобщенные э. д. с.  $\mathcal{E}_j$  линейно выражаются через локальные и не коррелированные между собой э. д. с.  $e_l$  и, следовательно, разные  $\mathcal{E}_j$  могут содержать одни и те же  $e_l$  (см. задачу 6). Когда использование  $e_l$  доступно (структура цепи известна), оно удобно не только ввиду их взаимной некоррелированности, но еще и потому, что позволяет легко учесть возможное различие температур отдельных двуполосников. Некоторые примеры таких неравновесных условий рассмотрены в задачах 7 и 8.

Формулы (54.9) и (54.11) являются частным случаем гораздо более общей теоремы, доказанной Калленом с соавторами

в 1951 г. [27—29]. Это так называемая *флуктуационно-диссипационная теорема* (коротко — ФДТ), содержание которой заключается в следующем.

Пусть состояние некоторой системы с  $n$  степенями свободы и с постоянными (не зависящими от времени) параметрами описывается  $n$  обобщенными координатами  $q_j(t)$ . Система находится в термостате с температурой  $T$  и в ней происходят тепловые флуктуации, т. е.  $q_j(t)$  представляют собой случайные процессы. Обозначим для краткости через  $x_j(t) = \langle q_j(t) \rangle$  средние по ансамблю, т. е. макроскопические, значения координат.

Пусть, далее, существуют обобщенные силы  $F_j(t)$ , сопряженные с  $x_j(t)$  в том смысле, что средняя мгновенная мощность, отдаваемая этими *детерминированными* силами системе, равна

$$Q(t) = \dot{x}_j(t) F_j(t). \quad (54.12)$$

Здесь (как и в дальнейшем) по дважды встречающемуся индексу производится суммирование от 1 до  $n$ . Подчеркнем, что  $x_j(t)$  в (54.12) — это средние значения, вычисляемые *при наличии сил*  $F_j(t)$ , т. е. по *неравновесному* ансамблю.

Средний отклик  $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  рассматриваемой, вообще говоря, *нелинейной* системы на силы  $F(t) = \{F_1(t), \dots, F_n(t)\}$  описывается некоторыми нелинейными функционалами от  $F(t)$ :

$$x_j(t) = \hat{\Phi}_j \{F(t)\}. \quad (54.13)$$

Не нарушая общности, можно предположить, что в отсутствие сил  $F_j(t)$ , т. е. при термодинамически равновесном состоянии, средний отклик равен нулю:

$$x_j(t) |_{F=0} = \hat{\Phi}_j(0) = 0. \quad (54.14)$$

Разложим функционалы  $\hat{\Phi}_j$  в функциональные ряды по силам  $F(t)$ . В соответствии с (54.14) эти ряды будут начинаться с членов, линейных относительно сил  $F(t)$ , т. е. описывающих отклик некоторой линейной динамической системы с постоянными параметрами (гармонической системы):

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_{jk}(t-\tau) F_k(\tau) d\tau + \dots, \quad (54.15)$$

где  $a_{jk}(t-\tau)$  — импульсный отклик (в момент времени  $t$ )  $j$ -й координаты на дельта-импульс (в момент времени  $\tau$ )  $k$ -й силы. Если  $\tilde{x}_j(\omega)$ ,  $\tilde{F}_k(\omega)$  и  $\alpha_{jk}(\omega) \equiv \tilde{a}_{jk}(\omega)$  — спектральные амплитуды входящих в (54.15) функций времени  $x_j(t)$ ,  $F_k(t)$  и  $a_{jk}(t)$ , то в спектральном представлении соотношение (54.15)



запишется в виде

$$\tilde{x}_j(\omega) = \alpha_{jk}(\omega) \tilde{F}_k(\omega), \quad \text{или} \quad \tilde{F}_j(\omega) = \alpha_{jk}^{-1}(\omega) \tilde{x}_k(\omega). \quad (54.16)$$

Матрица  $\alpha = \{\alpha_{jk}(\omega)\}$  называется *матрицей обобщенной восприимчивости* системы, а  $\alpha^{-1}$  — обратная матрица. Обобщенная восприимчивость  $\alpha$  характеризует, согласно ее определению, средний (макроскопический) *линеаризованный* отклик динамической системы, т. е. отклик на столь слабые детерминированные воздействия  $F_k(t)$ , при которых можно ограничиться линейными членами рядов (54.15).

Обратимся теперь ко *вторым* моментам флуктуирующих координат  $q_j(t)$ . В отсутствие детерминированных сил  $F_j(t)$  флуктуации  $q_j(t)$  происходят около состояния термодинамического равновесия и являются *стационарными* случайными процессами. Можно поэтому ввести обычным образом матрицу спектральной плотности  $g_{jk}^{(q)}(\omega)$  этих флуктуаций (по частотам  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ ):

$$\langle \tilde{q}_j(\omega) \tilde{q}_k^*(\omega') \rangle = g_{jk}^{(q)}(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (54.17)$$

где усреднение производится уже по *равновесному* ансамблю, т. е. в отсутствие детерминированных сил  $F_j(t)$ .

ФДТ утверждает, что *матрица спектральной плотности тепловых флуктуаций около состояния термодинамического равновесия* при температуре  $T$  выражается через *антиэрмитову часть обобщенной восприимчивости нашей линеаризованной* (в указанном смысле) *динамической системы* следующим образом:

$$g_{jk}^{(q)}(\omega) = \frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} [\alpha_{jk}(\omega) - \alpha_{kj}^*(\omega)], \quad (54.18)$$

где  $\Theta(\omega, T)$  — средняя энергия осциллятора (54.3). Этот очень общий и фундаментальный результат охватывает любые частоты  $\omega$ , включая квантовую область  $\hbar|\omega| \gtrsim kT$ , и применим к макроскопическим системам любой физической природы.

Следует специально подчеркнуть, что квантовомеханическое доказательство теоремы (54.18) *не предполагает малости флуктуационных отклонений*  $q_j^1$ ). Вполне точно вычисляются: 1) спектральная плотность  $g_{jk}^{(q)}(\omega)$  и 2) матрица восприимчивости  $\alpha_{jk}(\omega)$ , как она определена выше. Сопоставление обоих выражений показывает, что для *равновесных* флуктуаций справедливо равенство (54.18). Таким образом, динамика системы при сильных внешних воздействиях, когда уже нельзя ограничиваться выражениями (54.16), т. е. членами, линейными относительно детерминированных воздействий  $F_k(t)$ , просто не имеет отношения к флуктуациям около состояния термодинамического

<sup>1)</sup> См. [30], §§ 87, 88 или [31], §§ 126, 127.

равновесия. Этот принципиально важный момент, выясненный Бернардом и Калленом [32] и независимо Ф. В. Бункиным [33], означает, что вопрос о каких-либо поправках к ФДТ, обусловленных нелинейностью динамических уравнений макроскопической системы, попросту отпадает. Отпадают, в частности, и различные парадоксы, вроде того, что детектор, включенный в пассивную цепь, находящуюся в термостате, будет выпрямлять тепловые флуктуации, т. е. давать постоянный ток, и, таким образом, позволит получать работу из термодинамически равновесной системы.

Сказанное, разумеется, не означает, что восприимчивость  $\alpha$  не зависит от нелинейности *стохастических* уравнений рассматриваемой системы. Уравнения для *случайных* координат  $q_j(t)$  в общем случае имеют вид

$$\hat{L}_j \{q(t)\} = F_j(t) + f_j(t), \quad (54.19)$$

где  $L_j$  — нелинейные операторы,  $F_j(t)$  — детерминированные силы, а  $f_j(t)$  — случайные силы, введенные наравне с  $F_j(t)$  и описывающие воздействие термостата на систему ( $\langle f_j(t) \rangle = 0$ ). Нахождение  $\alpha$  представляет собой в общем случае сложную задачу. Надо решить уравнения (54.19), т. е. найти

$$q_j(t) = \hat{L}_j^{-1} \{F(t) + f(t)\},$$

затем надо усреднить это решение по неравновесному ансамблю, что даст средний отклик (54.13):

$$x_j(t) = \langle q_j(t) \rangle = \langle \hat{L}_j^{-1} \{F(t) + f(t)\} \rangle \equiv \hat{\Phi}_j \{F(t)\},$$

и, наконец, надо выделить ту часть  $x_j(t)$ , которая линейна по  $F(t)$ . В том случае, когда заданы *макроскопические* уравнения, т. е. уравнения для  $x_j(t)$ , нахождение  $\alpha$  сводится просто к *линеаризации* этих уравнений.

Если нелинейные члены в (54.19) малы, то решение можно искать методом возмущений. Задача становится, однако, совсем простой, когда стохастические уравнения линейны [ $L_j$  в (54.19) — линейные операторы]. Тогда уравнения для спектральных амплитуд  $\tilde{q}_k(\omega)$  будут вида

$$C_{jk}(\omega) \tilde{q}_k(\omega) = \tilde{F}_j(\omega) + \tilde{f}_j(\omega), \quad (54.20)$$

а их усреднение даст уравнения (54.16):

$$C_{jk}(\omega) x_k(\omega) = \tilde{F}_j(\omega),$$

т. е.  $\alpha_{jk}^{-1}(\omega) = C_{jk}(\omega)$  и  $\alpha_{jk}(\omega) = C_{jk}^{-1}(\omega)$ . Таким образом, в этом частном, но важном случае коэффициенты в стохастических и макроскопических уравнениях одни и те же.

Именно так обстоит дело и в случае линейных электрических цепей, описываемых зарядами  $q_j(t)$  [ $\tilde{q}_j(\omega) = \tilde{I}_j(\omega)/i\omega$ ]. Если  $\tilde{F}_j(\omega) = \mathcal{E}_j(\omega)$  — спектральные амплитуды сопряженных э. д. с., то, согласно законам Кирхгофа (54.8),  $\alpha_{jk}(\omega) = Y_{jk}(\omega)/i\omega$ , где  $Y = \{Y_{jk}\}$  — матрица адмитанса цепи. Общая формула (54.18), если перейти к спектральным плотностям по частотам  $\omega > 0$  и ограничиться некантовой областью  $\hbar|\omega| \ll kT$  (когда  $\Theta(\omega, T) = kT$ ), приводит к формуле (54.11).

В состоянии равновесия [ $F_j(\omega) = 0$ ] стохастические уравнения (54.20) принимают вид

$$\alpha_{jk}^{-1}(\omega) \tilde{q}_k(\omega) = \tilde{f}_j(\omega). \quad (54.21)$$

Отсюда нетрудно получить другую часто используемую форму ФДТ, а именно выражение для матрицы спектральной плотности  $g_{jk}^{(f)}(\omega)$  случайных ланжевеновских сил  $f_j(t)$ :

$$\langle \tilde{f}_j(\omega) \tilde{f}_k^*(\omega') \rangle = g_{jk}^{(f)}(\omega) \delta(\omega - \omega').$$

Действительно, из (54.21) и (54.17) имеем

$$g_{jk}^{(f)}(\omega) = \alpha_{jm}^{-1}(\omega) \alpha_{kn}^{-1*}(\omega) g_{mn}^{(q)}(\omega).$$

Подставив сюда (54.18), находим

$$g_{jk}^{(f)}(\omega) = \frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} \alpha_{jm}^{-1} \alpha_{kn}^{-1*} (\alpha_{mn} - \alpha_{nm}^*).$$

Но, поскольку  $\alpha_{jm}^{-1} \alpha_{mn} = \delta_{jn}$  и  $\alpha_{kn}^{-1*} \alpha_{nm}^* = \delta_{km}$ , получаем отсюда

$$g_{jk}^{(f)}(\omega) = \frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} [\alpha_{kj}^{-1*}(\omega) - \alpha_{jk}^{-1}(\omega)], \quad (54.22)$$

что является обобщением электродинамической формулы (54.10).

## § 55. Эффект мерцания

В числе флуктуационных шумов, с которыми приходится сталкиваться в радиоустройствах, несколько особое место занимает эффект мерцания (иначе — фликкер-эффект), о котором уже упоминалось в §§ 11 и 28. В электронных лампах этот вид шума (открытый Джонсоном в 1925 г.) связан с *медленными* локальными флуктуациями эмиссионной способности катода, так что соответствующая спектральная плотность, добавляющаяся к ровному спектру дробового шума, сосредоточена в области низких частот (рис. 74). Особенность эффекта состоит в том, что нарастание спектральной плотности при понижении

частоты не обнаруживает тенденции к остановке или замедлению. Как показывает опыт, в широком интервале частот  $g_+(\omega)$  удовлетворительно описывается формулой

$$g_+(\omega) = K \frac{\bar{I}^m}{\omega^n}, \quad (55.1)$$

где  $\bar{I}$  — среднее значение тока эмиссии, а числа  $K$ ,  $m$  и  $n$  зависят от свойств лампы (типа лампы, материала катода, обработки его поверхности, степени откачки и т. п.) и режима ее работы. Большею частью  $m$  близко к 2, а  $n$  — к 1, но может меняться от 0,6 до 2. Спектр эффекта мерцания в электронных лампах лежит ниже 5—10 кГц и нарастает до самых низких частот, на которых еще удается его измерить (до  $10^{-1}$  гц и ниже).

Шум со спектром такого же вида наблюдается не только в электронных лампах, но и в ряде других проводников: в гранулированных сопротивлениях (в интервале частот от долей герца до нескольких мегагерц), в контактах, в полупроводниковых приборах — германиевых и кремниевых детекторах, фотосопротивлениях, контактных фотоэлементах, термисторах и т. п. (так называемый *избыточный шум* полупроводников), в газоразрядных приборах и в электролитах (элементах и аккумуляторах). Таким образом, во многих совершенно различных проводниках обнаруживается наличие низкочастотного шума, спектральная плотность которого в широком диапазоне пропорциональна  $\omega^{-n}$ , где  $0,6 < n < 2$ , а токовая зависимость следует закону  $\bar{I}^m$ , где  $m > 1$  и чаще всего (в частности, в непроволочных сопротивлениях с линейной вольтамперной характеристикой) близко к 2. Последнее обстоятельство довольно правдоподобно объясняется флуктуациями сопротивления.

Действительно, если вольтамперная характеристика есть  $v = RI + \alpha I^2 + \dots$ , то при постоянной э. д. с.  $\mathcal{E}$  флуктуации параметров  $R$ ,  $\alpha$ , ... вызовут флуктуации тока  $\Delta I = I - \bar{I}$ , причем

$$\mathcal{E} = R\bar{I} + \alpha\bar{I}^2 + \dots = (R + \Delta R)(\bar{I} + \Delta I) + (\alpha + \Delta\alpha)(\bar{I} + \Delta I)^2 + \dots$$

Отсюда

$$\Delta I = -\bar{I} \frac{\Delta R + \bar{I} \Delta\alpha + \dots}{R + 2\alpha\bar{I} + \dots},$$

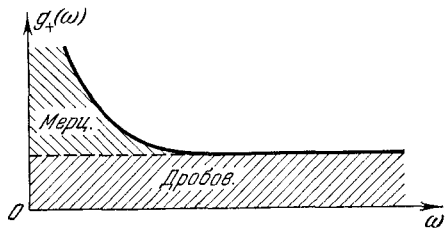


Рис. 74.

т. е.

$$\overline{(\Delta I)^2} = \bar{I}^2 \frac{\overline{(\Delta R)^2} + 2\overline{\Delta R \cdot \Delta \alpha} \cdot \bar{I} + \dots}{R^2 + 2R\alpha\bar{I} + \dots}.$$

Следовательно, при линейной характеристике имеем  $\overline{(\Delta I)^2} \sim \bar{I}^2$ , а отклонения от этого закона обусловлены отступлением характеристики от линейности.

Основным вопросом в отношении эмпирической формулы (55.1) является частотный ход спектральной плотности. Если фликкер-шум — *стационарный* процесс, то для конечности интеграла

$$\overline{(\Delta I)^2} = \int_0^{\infty} g_+(\omega) d\omega \quad (55.2)$$

необходимо, чтобы  $n$  было при  $\omega \rightarrow \infty$  больше 1 (что, по-видимому, всегда выполняется), а при  $\omega \rightarrow 0$  меньше 1.

Как это ясно из формулы

$$g_+(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

поведение  $g_+(\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$  зависит от быстроты убывания  $\psi(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Чем медленнее это убывание, тем круче растет  $g_+(\omega)$  в нуле. Пусть, например, функция корреляции  $|\psi(\tau)| < M$  при  $\tau < \tau_0$ , а начиная с  $\tau = \tau_0$ , убывает по закону  $A\tau^{-\nu}$  ( $\nu > 0$ ). Тогда

$$g_+(\omega) = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\tau_0} \psi(\tau) \cos \omega \tau d\tau + A \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\cos \omega \tau}{\tau^{\nu}} d\tau \right\}.$$

Первый член при всех  $\omega$  не превосходит по абсолютной величине значения  $\frac{2}{\pi} M\tau_0$ , а второй конечен при  $\omega \rightarrow 0$ , если  $\nu > 1$ , возрастает как  $\ln \omega \tau_0$  при  $\nu = 1$  и как  $\omega^{\nu-1}$  при  $\nu < 1$ .

При увеличении длительности измерений спектра фликкер-шума, т. е. при измерении спектральной плотности на все более низких частотах, область, в которой ожидалось замедление роста  $g_+(\omega)$  по сравнению с  $1/\omega$ , отодвигалась все ниже и ниже — вплоть до  $10^{-5}$  гц, что соответствует времени корреляции порядка 5 часов. Если функция корреляции фликкер-шума и обладает набором различных масштабов (связанных, например, с различными временами пребывания примесных атомов на поверхности катода или же с различными временами жизни носителей тока в полупроводниках), то наличие столь длительных времен трудно объяснить какими-либо разумными физическими причинами.

С другой стороны, соблюдение постоянства *всех* условий, от которых зависит стационарность наблюдаемого эффекта, затруднено тем сильнее, чем дольше продолжается измерение. Не говоря уже о внешних факторах (стабильность источников питания, колебания температуры элементов цепи), в игру вступают в случае электронной лампы такие явления, как дрейф эмиссии катода (частоты  $10^{-2}$ — $10^{-4}$  гц) и старение лампы (менее  $10^{-4}$  гц). Иными словами, вполне возможно, что наблюдаемые флуктуации *не стационарны* (так что требование интегрируемости  $g_+(\omega)$  отпадает), но изменение их статистических характеристик со временем происходит весьма медленно.

Этот вопрос выходит за рамки обсуждаемого явления. Речь идет о том, имеет ли смысл различать медленные флуктуации стационарной случайной функции и медленный же временной ход моментов нестационарной функции, если в нашем распоряжении имеются только реализации ограниченной длительности. Пусть, например, стационарная функция  $\xi(t)$  обладает двумя отчетливо выраженными масштабами изменения —  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2 \gg \vartheta_1$  (рис. 75, на котором масштаб  $\vartheta_2$  не указан, так как он далеко

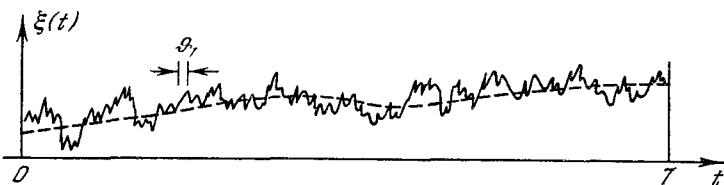


Рис. 75.

выходит за пределы чертежа). Опыт, в котором производится усреднение быстрых ( $\sim \vartheta_1$ ) флуктуаций, но длительность которого  $T \ll \vartheta_2$ , ничего не может сказать о стационарности или нестационарности медленного изменения  $\xi(t)$ . Располагая результатами только таких экспериментов, можно считать, что  $\xi(t)$  обладает временем корреляции  $\vartheta_1$  и не является стационарной, т. е. среднее значение  $\bar{\xi}(t)$  зависит от  $t$ , но за времена порядка  $\vartheta_1$  меняется мало. Такая интерпретация возможна наряду с исходной, когда функция  $\xi(t)$  считается стационарной, но обладающей, помимо  $\vartheta_1$ , временем (или временами) корреляции  $\vartheta_2 \gg T$ .

Коль скоро конечная длительность измерения допускает подобную неоднозначность трактовки, естественно возникает мысль о таком подходе, который не предрешал бы вопроса о стационарности или нестационарности  $\xi(t)$ , а просто исключал бы из рассмотрения те ее изменения, которые слишком медленны для экспериментов данной продолжительности. К этой

постановке вопроса мы обратимся в следующем параграфе, а сейчас рассмотрим на частном примере импульсного процесса переход от стационарности к нестационарности при замедлении спада импульсов, т. е. при замедлении убывания функции корреляции с ростом  $\tau$ .

Рассматривая в § 8 пуассоновский процесс вида

$$\xi(t) = \sum_{\nu} a_{\nu} F(t - t_{\nu}), \quad (55.3)$$

мы предполагали, что интервал  $(-T/2, T/2)$  усреднения по  $t_{\nu}$  очень велик по сравнению с длительностью импульса. Это позволяло пренебречь краевыми эффектами — срезанием части импульсов концами интервала, — так как относительная доля «испорченных» импульсов могла быть сделана при  $T \rightarrow \infty$  сколь угодно малой. Если, однако, импульс  $F(\theta)$  спадает при  $\theta \rightarrow \infty$  недостаточно быстро, то замена конечного интервала  $T$  интегрирования по  $t_{\nu}$  на бесконечный может оказаться недопустимой.

Сделаем для простоты следующие допущения. Пусть импульсы в (55.3) полубесконечны ( $F(\theta) = 0$  при  $\theta < 0$ ). Выберем, кроме того, в качестве области изменения  $t_{\nu}$  интервал  $(0, T)$ , а не  $(-T/2, T/2)$ , с тем чтобы начальная точка интервала не смещалась при изменении  $T$ . Тогда вычисленная в § 10 характеристическая функция импульсного пуассоновского процесса (в которой еще не сделан переход к  $T = \infty$ ) запишется в виде

$$\varphi_{\xi}(u, t) = \exp \left\{ n_1 \int \omega_a(a) da \int_{t-T}^t [e^{iuaF(\theta)} - 1] d\theta \right\}$$

и  $m$ -й кумулянт будет равен

$$\lambda_m(t) = n_1 \bar{a}^m \int_{t-T}^t F^m(\theta) d\theta.$$

При  $T \rightarrow \infty$  и любом конечном  $t$  можно (начиная с  $T > t$ ) заменить нижний предел нулем. Если  $\bar{a} = 0$ , то первым отличным от нуля кумулянтom будет дисперсия

$$\lambda_2(t) = D[\xi(t)] = n_1 \bar{a}^2 \int_0^t F^2(\theta) d\theta.$$

Поскольку  $D[\xi]$  зависит от  $t$ , процесс (55.3) не стационарен. Но при достаточно быстром убывании  $F(\theta)$  с ростом  $\theta$  дисперсия будет приближаться к постоянному значению, т. е. для достаточно больших  $t$  процесс (55.3) будет приближенно стационарным.

Пусть, например, на отрезке  $(0, \theta_0)$  функция  $F(\theta)$  ограничена,  $|F(\theta)| < M$ , а при  $\theta > \theta_0$  убывает как  $A\theta^{-\nu}$  ( $\nu \geq 0$ ). Тогда для  $t > \theta_0$  имеем

$$D[\xi(t)] = \begin{cases} a_1 + b_1 (t/\theta_0)^{1-2\nu} & \text{при } \nu \neq 1/2, \\ a_2 + b_2 \ln(t/\theta_0) & \text{при } \nu = 1/2. \end{cases}$$

Таким образом, с ростом  $t$  при  $\nu > 1/2$  достигается стационарность, а при  $\nu \leq 1/2$  дисперсия неограниченно растет. Случай  $\nu = 1/2$  отвечает очень медленному (логарифмическому) нарастанию  $D[\xi]$ , а случай  $\nu = 0$  (неубывающие импульсы) приводит к диффузионному закону.

**§ 56. Случайные функции со стационарными приращениями.  
Структурная функция**

Если при изучении какого-либо случайного процесса мы не уверены заранее в его стационарности (например, как на рис. 75, конечная продолжительность опыта не позволяет судить о том, какой характер имеет наблюдаемый медленный ход «локального» среднего значения), то это еще не всегда означает необходимость использования теории нестационарных процессов самого общего вида. Существует большой класс нестационарных процессов, охватывающий стационарные процессы в качестве частного случая и вместе с тем еще настолько специальный, что соответствующая теория может быть продвинута гораздо дальше, чем это можно сделать в самом общем случае. Достаточно указать, забегая вперед, что для класса процессов, о которых идет речь и которые называются *случайными процессами (функциями) со стационарными приращениями* (СПСП), сохраняется локализация по частоте для моментов второго порядка, т. е. сохраняется понятие спектральной интенсивности. Класс случайных функций со стационарными приращениями и адекватные методы их описания были указаны А. Н. Колмогоровым в 1940 г.<sup>1)</sup>

Составим для нестационарного процесса  $\xi(t)$  приращение на интервале времени  $(t, t + T)$  произвольной, но фиксированной длительности  $T$ :

$$\eta_T(t) = \xi(t + T) - \xi(t). \tag{56.1}$$

Очевидно, медленные изменения  $\xi(t)$  будут мало сказываться на значениях  $\eta_T(t)$ , и тем меньше, чем они медленнее. Если  $\xi(t)$  содержит постоянную составляющую, то она вообще выпадает из  $\eta_T(t)$ . В результате подавления компонент с очень

<sup>1)</sup> См. [34, 35]. Из дальнейших исследований по теории СПСП следует в первую очередь указать на работу [36].



большими периодами может оказаться, что *приращение*  $\xi(t)$ , т. е.  $\eta_T(t)$ , *стационарно*. В этом случае процесс  $\xi(t)$  называется случайным процессом со стационарными *первыми* приращениями.

В соответствии с определением должно быть

$$\overline{\eta_T(t)} = \overline{\xi(t+T)} - \overline{\xi(t)} = \text{const},$$

откуда следует, что среднее значение  $\xi(t)$  может быть лишь линейной функцией  $t$ :

$$\overline{\xi(t)} = at + b. \quad (56.2)$$

Это, конечно расширяет наши возможности по сравнению со стационарным процессом, для которого должно быть  $a = 0$ , т. е.  $\overline{\xi(t)} = b = \text{const}$ . Нетрудно сообразить, что для процесса  $\xi(t)$  со стационарными *вторыми* приращениями, т. е. стационарной разностью  $\eta_T(t+T_1) - \eta_T(t)$ , среднее значение будет полиномом не выше второй степени:

$$\overline{\xi(t)} = at^2 + bt + c,$$

и т. д. Мы ограничимся процессами со стационарными *первыми* приращениями и поэтому опустим в дальнейшем слово «первыми», говоря просто о СПСП.

Средним значением вида (56.2) обладает, например, процесс

$$\xi(t) = at + \zeta(t), \quad (56.3)$$

где  $a$  — случайная величина с  $\bar{a} = a$ , а  $\zeta(t)$  — стационарный процесс с  $\overline{\zeta(t)} = b$ . Но стационарность  $\eta_T(t)$  означает также, что смешанный момент  $B_{\eta_T} = \eta_T(t+\tau)\eta_T^*(t)$  является функцией только от  $\tau$ . Составив для (56.3) разность  $\eta_T(t) = aT + \zeta(t+T) - \zeta(t)$ , нетрудно подсчитать, что

$$B_{\eta_T}(\tau) = |\alpha|^2 T^2 + [\overline{\alpha \zeta^*(t-T)} - \overline{\alpha \zeta^*(t)}] + \text{к. с.} |T + \\ + 2B_{\zeta}(\tau) - B_{\zeta}(\tau+T) - B_{\zeta}(\tau-T)$$

(к. с. — комплексно-сопряженная величина). Отсюда видно, что при некоррелированных  $\alpha$  и  $\zeta^*(t)$ , когда  $\overline{\alpha \zeta^*(t)} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\zeta^*(t)} = ab^*$ , второй член исчезает и условие независимости  $B_{\eta_T}$  от  $t$  будет выполнено.

Для простоты мы ограничимся далее вещественными случайными процессами. Рассмотрим *флуктуацию* СПСП  $\xi(t)$ , т. е. величину

$$\tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \overline{\xi(t)} = \xi(t) - at - b, \quad (56.4)$$

и введем так называемую *структурную функцию*  $\xi(t)$ , определенную как средний квадрат *приращения* флуктуации  $\tilde{\xi}(t)$  на интервале  $(t_1, t_2)$ :

$$D_{\xi}(t_1, t_2) = \langle [\tilde{\xi}(t_2) - \tilde{\xi}(t_1)]^2 \rangle = \langle [\xi(t_2) - \xi(t_1) - a(t_2 - t_1)]^2 \rangle. \quad (56.5)$$

Для СПСП, если говорить о моментах второго порядка, структурная функция служит столь же основной характеристикой, как функция корреляции для стационарных процессов. Очевидно,  $D_{\xi}$  является мерой интенсивности тех флуктуаций  $\xi(t)$ , периоды которых не очень близки к  $(t_2 - t_1)/n$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , а также не чрезмерно велики по сравнению с  $t_2 - t_1$ : очень медленных вариаций  $\xi(t)$  функция  $D_{\xi}$  «не чувствует».

При помощи тождества

$$(a - b)(c - d) = \frac{1}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 - (a - c)^2 - (b - d)^2]$$

нетрудно установить, что функция корреляции стационарного приращения (56.1) может быть выражена через структурную функцию самого СПСП  $\xi(t)$ :

$$\begin{aligned} \Psi_{\eta}(t_2 - t_1) &= \langle [\eta_T(t_1) - \overline{\eta_T(t_1)}] [\eta_T(t_2) - \overline{\eta_T(t_2)}] \rangle = \\ &= \langle [\tilde{\xi}(t_1 + T) - \tilde{\xi}(t_1)] [\tilde{\xi}(t_2 + T) - \tilde{\xi}(t_2)] \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle [\tilde{\xi}(t_1 + T) - \tilde{\xi}(t_2)]^2 \rangle + \langle [\tilde{\xi}(t_1) - \tilde{\xi}(t_2 + T)]^2 \rangle - \\ &\quad - \langle [\tilde{\xi}(t_1 + T) - \tilde{\xi}(t_2 + T)]^2 \rangle - \langle [\tilde{\xi}(t_1) - \tilde{\xi}(t_2)]^2 \rangle \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ D_{\xi}(t_2, t_1 + T) + D_{\xi}(t_2 + T, t_1) - \\ &\quad - D_{\xi}(t_2 + T, t_1 + T) - D_{\xi}(t_2, t_1) \}. \end{aligned} \quad (56.6)$$

Отсюда видно, что правая часть будет зависеть только от  $t_2 - t_1$  при условии однородности структурной функции:

$$D_{\xi}(t_1, t_2) = D_{\xi}(t_2 - t_1). \quad (56.7)$$

В этом случае, обозначая  $t_2 - t_1 = \tau$ , получаем из (56.6)

$$\Psi_{\eta}(\tau) = \frac{1}{2} [D_{\xi}(\tau - T) + D_{\xi}(\tau + T) - 2D_{\xi}(\tau)]. \quad (56.8)$$

Разумеется, структурную функцию можно составить и тогда, когда процесс  $\xi(t)$  стационарен. Так как при этом  $\overline{\xi(t)} = b = \text{const}$  и  $a = 0$ , то из (56.5) с учетом (56.7) получаем

$$D_{\xi}(\tau) = 2[B_{\xi}(0) - B_{\xi}(\tau)] = 2[\psi_{\xi}(0) - \psi_{\xi}(\tau)], \quad (56.9)$$

где, как обычно,

$$\psi_{\xi}(\tau) = \langle \xi(t + \tau) \xi(t) \rangle - \langle \xi(t) \rangle^2 = B_{\xi}(\tau) - b^2.$$

Если для  $\xi(t)$  выполнено достаточное условие эргодичности, а именно  $\psi_{\xi}(\infty) = 0$ , то

$$D_{\xi}(\infty) = 2\psi_{\xi}(0) = 2\langle \xi^2(t) \rangle - b^2$$

и (56.9) можно переписать в виде

$$\psi_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2} [D_{\xi}(\infty) - D_{\xi}(\tau)]. \quad (56.10)$$

Таким образом, для стационарного эргодического процесса можно пользоваться как функцией корреляции, так и структурной функцией, причем последняя обладает тем преимуществом, что ее область применимости шире: она пригодна для описания свойств не только стационарных процессов, но и СПСП. Кроме того, на  $D_{\xi}(\tau)$  не влияют возможные погрешности в определении  $\xi(t)$ . Если оказывается, что  $D_{\xi}(\infty) = 2\overline{\xi^2(t)}$  существует, то по (56.10) тотчас же вычисляется  $\psi_{\xi}(\tau)$ .

Перейдем теперь к спектральным разложениям СПСП и их структурных функций.

Производная СПСП, согласно определению этого вида случайного процесса, стационарна и, следовательно, может быть представлена интегралом Фурье — Стилтеса:

$$\dot{\xi}(t) = \alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\tilde{C}(\omega), \quad (56.11)$$

где  $\alpha = \overline{\dot{\xi}(t)} = \text{const}$ ,  $\overline{d\tilde{C}(\omega)} = 0$  и

$$\langle d\tilde{C}(\omega) d\tilde{C}^*(\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') d\omega' d\tilde{G}(\omega). \quad (56.12)$$

Интегрируя (56.11) от 0 до  $t$ , получаем

$$\xi(t) = \xi(0) + \alpha t + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega} d\tilde{C}(\omega), \quad (56.13)$$

где  $\xi(0)$  — некоторая случайная величина. Для флуктуации  $\xi(t)$  имеем

$$\tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \overline{\xi(t)} = \xi(0) - \overline{\xi(0)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega} d\tilde{C}(\omega). \quad (56.14)$$

Таким образом, структурная функция  $\xi(t)$ , в соответствии с (56.5) и (56.7), будет равна

$$\begin{aligned} D_{\xi}(\tau) &= \langle [\tilde{\xi}(t + \tau) - \tilde{\xi}(t)]^2 \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{i\omega\tau} - 1) e^{i\omega t} (e^{-i\omega'\tau} - 1) e^{-i\omega't}}{\omega\omega'} \langle d\tilde{C}(\omega) d\tilde{C}^*(\omega') \rangle. \end{aligned}$$

Подставив сюда (56.12), находим

$$D_{\xi}(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega \tau}{\omega^2} d\tilde{G}(\omega).$$

Если бы процесс  $\xi(t)$  был стационарным, то приращение  $dG(\omega) = d\tilde{G}(\omega)/\omega^2$  было бы его спектральной интенсивностью в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ , а его корреляционная функция выражалась бы в виде

$$\psi_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dG(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega\tau dG(\omega). \quad (56.15)$$

Используя спектральную интенсивность  $G(\omega)$ , можно записать спектральное разложение структурной функции СПСП  $\xi(t)$  в следующей окончательной форме:

$$D_{\xi}(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos \omega\tau) dG(\omega). \quad (56.16)$$

Формулы (56.13) и (56.16) и представляют собой то, что следует понимать под спектральным разложением соответственно самого СПСП и его структурной функции. Разумеется, вместо  $dC(\omega)$  можно ввести в формулы (56.13) и (56.14) спектральную амплитуду  $dC(\omega) = d\tilde{C}(\omega)/i\omega$ , обладающую, согласно (56.12), функцией корреляции

$$\langle dC(\omega) dC^*(\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') d\omega' dG(\omega).$$

Смысл  $dG(\omega)$  тот же, что и у стационарных процессов: это спектральная интенсивность в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$ . Точно так же в случае сплошного спектра производная  $g(\omega) = dG(\omega)/d\omega$  имеет для СПСП и для стационарных процессов смысл интенсивности на единичную полосу частот. Это позволяет, пользуясь спектральным описанием, не заботиться заранее о том, стационарен ли рассматриваемый процесс или же является СПСП. Однако ограничения, налагаемые на  $dG(\omega)$ , в этих двух случаях существенно различны: интеграл (56.16) существует при менее жестких условиях, чем интеграл (56.15).

Для сходимости обоих интегралов на бесконечности должно выполняться одно и то же условие:

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \{\omega dG(\omega)\} = 0, \quad (56.17)$$

но для сходимости в нуле интеграла (56.16), представляющего структурную функцию, необходимо выполнение требования

$$\lim_{|\omega| \rightarrow 0} \{\omega^3 dG(\omega)\} = 0, \quad (56.18)$$

тогда как сходимость интеграла (56.15), представляющего корреляционную функцию, требует выполнения более жесткого условия

$$\lim_{|\omega| \rightarrow 0} \{\omega dG(\omega)\} = 0. \quad (56.19)$$

Таким образом, структурная функция допускает в нуле особенность  $dG(\omega) \sim |\omega|^{-\nu}$  с  $\nu < 3$ , а корреляционная функция существует лишь при  $\nu < 1$ , т. е. при конечной полной интенсивности  $G(\infty) = \overline{\xi^2(t)}$ . Если  $1 \leq \nu < 3$ , то  $D_\xi(\tau)$  существует, но при  $|\tau| \rightarrow \infty$  расходится, так что  $\psi_\xi(\tau)$  теряет смысл [см. (56.10)].

Нетрудно тем же путем убедиться, что у процесса со стационарными вторыми приращениями уже допустима в нуле особенность  $dG(\omega)$  с  $\nu < 5$  и, вообще, при стационарных  $n$ -х приращениях допустимо  $\nu < 2n + 1$ . В § 41 было подчеркнуто, что стационарность  $\xi(t)$  в широком смысле включает два требования: во-первых, спектральная «масса»  $\gamma(\omega, \omega')$  должна быть сосредоточена на биссектрисе  $\omega' = \omega$ , и, во-вторых, линейная плотность этой «массы»  $g(\omega)$  должна быть интегрируема по  $\omega$  на всем интервале  $(-\infty, \infty)$ . Именно это последнее условие нарушено у СПСП. Первое же требование, т. е. концентрация спектральной «массы» на прямой  $\omega' = \omega$ , для СПСП выполняется.

Итак, оперируя СПСП, мы охватываем нестационарные процессы  $\xi(t)$ , у которых среднее значение  $\overline{\xi(t)}$  может быть линейной функцией  $t$ , а спектральная интенсивность может быть бесконечно велика из-за быстрого роста  $dG(\omega)$  в области низких частот. Смотря по тому, интегрируема ли особенность  $dG(\omega)$  в нуле или нет, мы можем затем перейти соответственно либо к  $\psi_\xi(\tau)$  по формуле (56.15), либо к  $D_\xi(\tau)$  по формуле (56.16).

Эти замечания полностью применимы и к эффекту мерцания, о котором шла речь в предыдущем параграфе. Для трактовки этого флуктуационного процесса нет никакой необходимости предполагать, что он стационарен, и тем самым налагать излишние и неоправданные ограничения на ход спектральной плотности при малых  $\omega$ . То обстоятельство, что эта плотность растет при уменьшении  $\omega$  во всяком случае медленнее, чем  $1/\omega^3$ , дает возможность рассматривать эффект мерцания как СПСП.

Ясно, далее, что если частота колебания  $\Omega(t)$  является стационарным процессом, то фаза  $\varphi(t)$  этого колебания, т. е. интеграл от  $\Omega(t)$ , будет СПСП. Средний квадрат набега фазы —

величина  $F(\tau) = \langle [\varphi(t + \tau) - \varphi(t)]^2 \rangle$ , введенная в § 45, — представляет собой, очевидно, не что иное, как структурную функцию  $\varphi(t)$ , а формула (45.4) дает спектральное разложение этой структурной функции, причем спектральная плотность СПСП  $\varphi(t)$  есть

$$g_\varphi(\omega) = g_\Omega(\omega)/\omega^2,$$

где  $g_\Omega(\omega)$  — спектральная плотность стационарного процесса  $\Omega(t)$ .

Приведем теперь формулы, позволяющие вычислять спектральную плотность  $g(\omega) = dG(\omega)/d\omega$  (случай сплошного спектра) по известной структурной функции. Дифференцируя (56.16) по  $\tau$ , получаем

$$D'_\xi(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \omega g(\omega) \sin \omega \tau d\omega, \quad D''_\xi(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 g(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Обращение этих интегралов Фурье дает

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^\infty \sin \omega \tau D'_\xi(\tau) d\tau, \quad (56.20)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega^2} \int_0^\infty \cos \omega \tau D''_\xi(\tau) d\tau. \quad (56.21)$$

Формула (56.20) имеет смысл в том случае, если

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} D'_\xi(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 D'_\xi(\tau) = 0, \quad (56.20a)$$

а (56.21) — при выполнении *других* условий:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} D''_\xi(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau D''_\xi(\tau) = 0. \quad (56.21a)$$

Располагая выражением для  $D'_\xi(\tau)$ , можно проверить, какие из приведенных условий удовлетворены, и в зависимости от этого пользоваться для нахождения  $g(\omega)$  формулой (56.20) или (56.21).

Вернемся в заключение к импульсному пуассоновскому процессу

$$\xi(t) = \sum a_\nu F(t - t_\nu)$$

и посмотрим, какие условия должны быть наложены на  $F(t)$ , если мы хотим, чтобы  $\xi(t)$  было СПСП. Пусть  $\xi(t) = 0$ , так что структурная функция  $\xi(t)$  будет

$$D_\xi(t, \tau) = \langle [\xi(t + \tau) - \xi(t)]^2 \rangle.$$

В предположении, что  $F(t) = 0$  при  $t < 0$  или же достаточно быстро убывает при  $t \rightarrow -\infty$ , нетрудно убедиться обычным путем (см. § 10), что

$$D_{\xi}(t, \tau) = n_1 \bar{a}^2 \int_{-\infty}^t [F(\theta + \tau) - F(\theta)]^2 d\theta.$$

Для существования установившегося процесса, т. е. для возможности устремить верхний предел  $t$  в бесконечность, теперь требуется достаточно быстрое убывание не  $F(\theta)$ , а разности  $F(\theta + \tau) - F(\theta)$ . Полагая, как и в § 55, что при  $\theta > \theta_0$  функция  $F(\theta)$  имеет вид  $A\theta^{-\nu}$ , легко убедиться, что для установления необходимо  $\nu > -1/2$ , т. е.  $F(\theta)$  может даже возрасть с ростом  $\theta$ , но медленнее  $\sqrt{\theta}$ . Тогда  $\xi(t)$  становится с ростом  $t$  СПСП и имеет структурную функцию

$$D_{\xi}(\tau) = n_1 \bar{a}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\theta + \tau) - F(\theta)]^2 d\theta.$$

Пусть производная  $\dot{F}(\theta)$  разложима в интеграл Фурье:

$$\dot{F}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) e^{i\omega\theta} d\omega.$$

Тогда

$$F(\theta + \tau) - F(\theta) = \int_0^{\theta+\tau} \dot{F}(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\omega)}{i\omega} (e^{i\omega\tau} - 1) e^{i\omega\theta} d\omega$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\theta + \tau) - F(\theta)]^2 d\theta &= \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\omega) \varphi^*(\omega')}{\omega \omega'} (e^{i\omega\tau} - 1) (e^{-i\omega'\tau} - 1) d\omega d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \omega')\theta} d\theta = \\ &= 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\varphi(\omega)|^2}{\omega^2} (1 - \cos \omega\tau) d\omega. \end{aligned}$$

В результате структурная функция принимает вид

$$D_{\xi}(\tau) = 4\pi n_1 \bar{a}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\varphi(\omega)|^2}{\omega^2} (1 - \cos \omega\tau) d\omega,$$

и сопоставление этой формулы с (56.16) показывает, что

$$g(\omega) = 2\pi n_1 a^2 \frac{|\varphi(\omega)|^2}{\omega^2}$$

есть спектральная плотность СПСП  $\xi(t)$ .

Условие стационарности  $\xi(t)$ , при которой существует функция корреляции  $\psi_\xi(\tau)$ , требует, чтобы  $|\varphi(\omega)|^2/\omega^2$  возрастало при  $\omega \rightarrow 0$  медленнее  $1/\omega$ , т. е.  $|\varphi(\omega)|/\omega$  — медленнее  $1/\sqrt{\omega}$ . Нетрудно сообразить, что это есть условие разложимости в интеграл Фурье самого импульса  $F(\theta)$ , спектральная амплитуда которого равна в этом случае  $f(\omega) = \varphi(\omega)/i\omega$ .

### § 57. Спектры нестационарных процессов. Квазистационарные процессы

Вопросы спектрального анализа нестационарных процессов привлекают внимание уже в течение многих лет. Интерес к ним обусловлен как потребностями измерительной техники, так и тем, что здесь приходится иметь дело с более сложными понятиями, чем в случае стационарных процессов. Это обусловлено, конечно, нелокализацией нестационарных процессов по частоте (§ 40), т. е. наличием корреляции между *разночастотными* гармоническими компонентами  $e^{i\omega t} dC(\omega)$  нестационарного и (по предположению) гармонизируемого процесса  $\zeta(t)$ . Из-за этой корреляции «энергетические» вклады таких компонент неаддитивны и моменты второго порядка не представимы в виде однократных разложений Фурье с какой-то постоянной (не зависящей от времени) спектральной интенсивностью, аналогичной интенсивности  $G(\omega)$  у стационарных процессов. Спектральная «масса» нестационарного процесса *двумерна*, и средние билинейные (в частности, квадратичные) величины могут быть выражены лишь в виде *двукратных* интегралов Фурье — Стилтеса (§ 40).

Хорошо известно, однако, насколько часто возникает стремление (как в науке, так и, в особенности, в инженерной практике) распространить привычные понятия и методы за пределы области их законной применимости. Не удивительно, что и в данном вопросе — о спектральных разложениях билинейных («энергетических») характеристик нестационарных процессов — появились и появляются многочисленные работы, направленные к тому, чтобы построить и для этого случая какой-то эквивалент одномерной и неотрицательной спектральной интенсивности  $G(\omega)$ . Поскольку было сразу же ясно, что в общем случае эта задача не имеет точного решения, усилия были направлены к тому, чтобы решить ее приближенно и установить границы применимости соответствующих приближений. Отсюда и возникли понятия спектра мощности, усредненного по конечному



времени (finite-time averaged spectra), кратковременного (short-time) спектра, «физического» спектра и т. п. Мы коротко затронем эти вопросы в следующем параграфе, а сейчас обратимся к точным (двумерным) спектральным разложениям нестационарных процессов.

Мы предположим, что рассматриваемый, вообще говоря, комплексный процесс  $\zeta(t)$  гармонизируем, и допустим для простоты, что он обладает нулевым средним значением ( $\overline{\zeta(t)} = 0$ ) и чисто сплошным спектром. Таким образом, разложение Фурье имеет вид (40.4):

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} c(\omega) d\omega, \quad (57.1)$$

причем  $\overline{c(\omega)} = 0$ . Смешанный момент  $\zeta(t)$  равен

$$B(t_1, t_2) = \langle \zeta(t_1) \zeta^*(t_2) \rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} d\omega_1 d\omega_2, \quad (57.2)$$

где  $\gamma(\omega_1, \omega_2)$  — двумерная плотность комплексной спектральной «массы» (40.10):

$$d^2\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \gamma(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \langle c(\omega_1) c^*(\omega_2) \rangle d\omega_1 d\omega_2. \quad (57.3)$$

Как мы знаем (§ 40), гармонизируемость  $\zeta(t)$  означает, что интеграл (57.1) существует в среднем квадратичном, для чего необходимо и достаточно, чтобы при всех  $t_1$  и  $t_2$  был конечен интеграл (57.2). В частности, конечен и средний квадрат модуля  $\zeta(t)$ , т. е. мгновенная средняя мощность процесса<sup>1</sup>):

$$\frac{1}{2} B(t, t) = \frac{1}{2} \overline{|\zeta(t)|^2} = \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} d\omega_1 d\omega_2. \quad (57.4)$$

Часто бывает удобно пользоваться вместо  $t_1$  и  $t_2$  переменными

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \quad \tau = t_1 - t_2,$$

так что

$$t_1 = t + \frac{\tau}{2}, \quad t_2 = t - \frac{\tau}{2}, \quad dt_1 dt_2 = -dt d\tau. \quad (57.5)$$

Обозначим смешанный момент, рассматриваемый как функция  $t$  и  $\tau$ , через  $B_2(t, \tau)$ :

$$B\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) = \langle \zeta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \zeta^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \rangle \equiv B_2(t, \tau).$$

<sup>1</sup>) В этом и следующем параграфах мы часто будем для краткости пользоваться в отношении средних билинейных величин энергетической терминологией.

Заметим, что симметрия  $t_1$  и  $t_2$  относительно  $t$  обуславливает эрмитовость  $B_2$  по сдвигу  $\tau$ :

$$B_2(t, \tau) = B_2^*(t, -\tau), \quad (57.6)$$

что означает четность  $B_2$  по  $\tau$  в случае вещественного процесса  $\zeta(t)$ .

Согласно (57.2) и (57.5)

$$B_2(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\omega_1, \omega_2) \exp \left\{ i \left[ (\omega_1 - \omega_2)t + \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\tau \right] \right\} d\omega_1 d\omega_2,$$

откуда ясно, что целесообразно и на плоскости  $(\omega_1, \omega_2)$  перейти к переменным, аналогичным (57.5), а именно:

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad \Omega = \omega_2 - \omega_1,$$

или

$$\omega_1 = \omega - \frac{\Omega}{2}, \quad \omega_2 = \omega + \frac{\Omega}{2}, \quad d\omega_1 d\omega_2 = d\Omega d\omega. \quad (57.7)$$

Обозначим двумерную спектральную плотность, рассматриваемую как функция  $\Omega$  и  $\omega$ , через  $g_2(\Omega, \omega)$ :

$$\gamma\left(\omega - \frac{\Omega}{2}, \omega + \frac{\Omega}{2}\right) = \left\langle c\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right) c^*\left(\omega + \frac{\Omega}{2}\right) \right\rangle \equiv g_2(\Omega, \omega). \quad (57.8)$$

Тогда (57.2) принимает вид

$$B_2(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\Omega, \omega) e^{-i(\Omega t - \omega \tau)} d\Omega d\omega, \quad (57.9a)$$

откуда обратно

$$g_2(\Omega, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_2(t, \tau) e^{i(\Omega t - \omega \tau)} dt d\tau. \quad (57.9b)$$

В силу (57.8) плотность  $g_2$  эрмитова по  $\Omega$ :

$$g_2(\Omega, \omega) = g_2^*(-\Omega, \omega), \quad (57.10)$$

а если процесс  $\zeta(t)$  вещественный, так что  $c(\omega) = c^*(-\omega)$ , то  $g_2$  четна по  $\omega$ :

$$g_2(\Omega, \omega) = g_2(\Omega, -\omega). \quad (57.11)$$

В общем случае комплексная спектральная «масса» распределена по всей плоскости  $(\Omega, \omega)$ , но если  $\zeta(t)$  — нестационарный аналитический сигнал, то, как это ясно из (41.18), его двумерная спектральная плотность отлична от нуля только в первом квадранте плоскости  $(\omega_1, \omega_2)$ .

Все корреляционные свойства процесса  $\zeta(t)$ , конечно, отражены определенным образом и в распределении комплексной спектральной «массы». В общем случае зависимость  $B_2$  от времени  $t$  и сдвига  $\tau$ , конечно, может быть по обоим переменным многомасштабной. Пусть  $t_K$  и  $\tau_K$  — наименьшие характерные масштабы соответственно по  $t$  и  $\tau$ . Двумерная спектральная плотность  $g_2(\Omega, \omega)$  обладает в этом случае двумя наибольшими масштабами — порядка  $1/t_K$  по  $\Omega$  и  $1/\tau_K$  по  $\omega$ , т. е. комплексная спектральная «масса» распределена в области с такими протяженностями по осям  $\Omega$  и  $\omega$ .

Пусть момент  $B_2(t, \tau)$  меняется в функции от  $t$  гораздо более медленно, чем в функции от  $\tau$ . Иначе говоря, характерные времена изменения по  $t$  и  $\tau$  существенно разные: если  $T_K$  — наибольший масштаб по  $\tau$ , то  $t_K \gg T_K$ . Средняя мгновенная мощность, равная  $\frac{1}{2} B_2(t, 0) = \frac{1}{2} \overline{|\zeta(t)|^2}$ , очевидно, тоже должна быть медленной функцией в указанном смысле, т. е. должна мало меняться на интервалах  $t$  порядка  $T_K$ . Пусть для простоты  $\zeta(t) \equiv \xi(t)$  — вещественный процесс. Сказанное означает тогда, что одномерная плотность вероятностей  $\omega_1(t, x)$ , получающаяся из двумерной плотности  $\omega_2(t_1, x_1; t_2, x_2)$  интегрированием по всей области возможных значений либо по  $x_1$ , либо по  $x_2$ , — тоже медленная функция  $t$ . Следовательно, медленной функцией будет и среднее значение

$$\overline{\xi(t)} = \int x \omega_1(t, x) dx.$$

Случайный процесс с такими свойствами, т. е. с моментами  $\overline{\xi(t)}$ ,  $\overline{\xi^2(t)}$ ,  $D[\xi(t)]$  и  $B_2(t, \tau)$ , мало меняющимися по  $t$  на наибольшем характерном временном интервале флуктуаций  $T_K$ , можно назвать *квазистационарным* (в широком смысле)<sup>1)</sup>. Очевидно, флуктуации в какой-либо системе, стационарные при неизменных параметрах и условиях, при достаточно медленном изменении этих параметров и условий во многих случаях ока-

<sup>1)</sup> Такие процессы были введены в работе [37] под названием в широком смысле *локально-стационарных*. Этот термин, однако, не очень удачен, так как он наталкивает на параллель с *локально-однородными* полями (см. часть II). Между тем такие поля представляют собой случайные функции с *однородными приращениями*, т. е. являются пространственным аналогом процессов со *стационарными приращениями* (§ 56).

Кроме того, в [37] понятие локальной стационарности предполагает еще и сепарабельность момента  $B_2$ , т. е. его факторизацию:  $B_2(t, \tau) = b(t)K(\tau)$ , где  $K(\tau)$  — коэффициент корреляции *стационарного* процесса. Таким образом,  $b(t) = B_2(t, 0)$  — это средняя мгновенная мощность. Конечно, такая факторизация вполне возможна, но включать ее в *необходимые* признаки квазистационарности представляется излишним.

жуются квазистационарными. Например, дробовой шум в электронной лампе или полупроводниковом приборе при изменении среднего тока будет квазистационарным, если за наибольшее время корреляции шума  $T_K$  средний ток меняется мало. Аналогично обстоит дело и с тепловым шумом в электрической цепи при медленном изменении ее сопротивления и (или) температуры. Если указанные шумы считаются белыми ( $T_K = 0$ ), то даже не возникает ограничения скорости изменения параметров системы. Однако учет отличного от нуля  $T_K$  необходим для конечности дисперсии процесса, а это последнее условие целесообразно включить в определение квазистационарности — как по аналогии с определением стационарности в широком смысле, так и в качестве условия гармонизируемости процесса. Конечно, при этом нестационарный белый шум [ $B_2(t, \tau) = b(t)\delta(\tau)$ ], строго говоря, исключается из класса в широком смысле квазистационарных процессов, подобно тому как стационарный белый шум [ $b(t) = \text{const}$ ] не относится к процессам, в широком смысле стационарным.

Нетрудно сообразить, как проявляется квазистационарность процесса в двумерном распределении его спектральной «массы». Характерные масштабы спектральной плотности  $g_2(\Omega, \omega)$  — наибольший порядка  $1/t_K$  по  $\Omega$  и наименьший порядка  $1/T_K$  по  $\omega$  — удовлетворяют неравенству  $1/t_K \ll 1/T_K$ . Таким образом, спектральная «масса» сосредоточена в области, сильно вытянутой вдоль биссектрисы  $\Omega = \omega_2 - \omega_1 = 0$  (по меньшей мере на интервал  $\omega$  порядка  $1/T_K$ ) и узкой в направлении оси  $\Omega$  (ширина порядка  $1/t_K$ ). Подчеркнем, что из двух условий стационарности в широком смысле — 1) концентрации спектральной «массы» точно на биссектрисе  $\Omega = 0$  и 2) конечности полного количества этой «массы» — у квазистационарных процессов «немного» нарушено первое условие, тогда как у процессов со стационарными приращениями и у белых шумов — второе.

Очевидно, стационарные процессы представляют собой предельный случай, получающийся при неограниченном возрастании масштаба  $t_K$ . При таком предельном переходе момент  $B_2(t, \tau)$  вообще перестает зависеть от  $t$ , а спектральная «масса» концентрируется на биссектрисе  $\Omega = \omega_2 - \omega_1 = 0$ , так как наибольший масштаб  $1/t_K$  по  $\Omega$  стремится к нулю. В пределе мы получаем  $g_2(\Omega, \omega) = g(\omega)\delta(\Omega)$ , где  $g(\omega) \geq 0$  — вещественная одномерная спектральная плотность стационарного процесса.

В числе операций, производимых над самим нестационарным процессом  $\zeta(t)$  или над его моментами второго порядка, нам понадобится в дальнейшем операция *сглаживания* момента

$B_2(t, \tau)$  или средней мгновенной мощности  $\frac{1}{2} B_2(t, 0)$  по

некоторому временному интервалу  $T$ <sup>1)</sup>. Согласно (57.9а),

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_2(t, \tau) &\equiv \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} B_2(t, \tau) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\Omega, \omega) \frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2} e^{-i(\Omega t - \omega \tau)} d\Omega d\omega \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \langle |\widetilde{\xi}(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\Omega, \omega) \frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2} e^{-i\Omega t} d\Omega d\omega.$$

Главный максимум множителя  $\sin(\Omega T/2)/(\Omega T/2)$ , равный единице на биссектрисе  $\Omega = 0$ , занимает полосу между значениями  $\Omega = \pm 2\pi/T$ . Вне этой полосы спектр  $g_2(\Omega, \omega)$  процесса  $\xi(t)$  практически подавлен. Таким образом, моменты  $B_2(t, \tau)$  и  $\langle |\xi(t)|^2 \rangle$ , сглаженные по достаточно большому интервалу  $T$  (превосходящему наибольшее время корреляции  $T_k$ ), меняются со временем так, как если бы это были моменты квазистационарного процесса с наименьшим масштабом  $1/T$  по  $\Omega$ . Переход к стационарному процессу при  $T \rightarrow \infty$ , разумеется, предполагает либо наличие в  $\xi(t)$  стационарной компоненты, обладающей конечной «массой» на биссектрисе  $\Omega = 0$ , либо замену мгновенной сглаженной мощности энергией, накопленной за время от  $t - T/2$  до  $t + T/2$ .

Рассмотрим теперь второй пример — двумерный спектр вещественного модулированного процесса  $\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ , где  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  — функции, меняющиеся медленно по сравнению с  $\cos \omega_0 t$ . Смешанный момент соответствующего аналитического сигнала

$$\zeta(t) = A(t) e^{i[\omega_0 t + \varphi(t)]} = \mathfrak{A}(t) e^{i\omega_0 t}$$

равен

$$B_2(t, \tau) = \langle \mathfrak{A}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \mathfrak{A}^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \rangle e^{i\omega_0 \tau} = B_{2\mathfrak{A}}(t, \tau) e^{i\omega_0 \tau}.$$

Двумерная спектральная плотность  $g_{2\mathfrak{A}}(\Omega, \omega)$  комплексной амплитуды  $\mathfrak{A}(t)$  локализована в окрестности начала координат плоскости  $(\Omega, \omega)$  в области, линейные размеры которой малы по сравнению с  $\omega_0$  (на рис. 76 эта область показана пунктиром и вертикальной штриховкой). Умножение на  $e^{i\omega_0 \tau}$  смещает центр этой области вдоль оси  $\omega$  в точку  $\omega \approx \omega_0$ .

<sup>1)</sup> Усреднение по временным или частотным интервалам мы будем называть сглаживанием, в отличие от статистического усреднения по ансамблю реализаций.

«Второй» смешанный момент аналитического сигнала (§ 38) равен

$$\tilde{B}_2(t, \tau) = \langle \mathfrak{N}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \mathfrak{N}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \rangle e^{2i\omega_0 t} = \tilde{B}_{2\mathfrak{N}}(t, \tau) e^{2i\omega_0 t}.$$

«Вторая» спектральная плотность  $\tilde{g}_{2\mathfrak{N}}(\Omega, \omega)$  тоже отлична от нуля лишь в малой окрестности начала координат (на рис. 76 эта

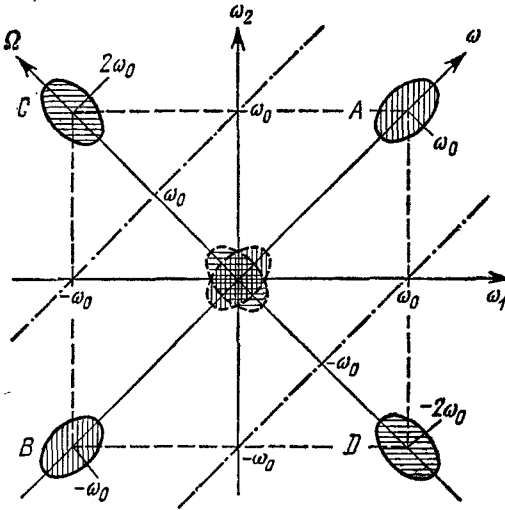


Рис. 76.

область тоже обведена пунктиром и заштрихована горизонтальной штриховкой). Умножение  $\tilde{B}_{2\mathfrak{N}}(t, \tau)$  на  $e^{2i\omega_0 t}$  смещает центр этой области вдоль оси  $\Omega$  в точку  $\Omega = 2\omega_0$ . Но, согласно (38.3), момент  $B_{2\xi}(t, \tau)$  вещественного процесса  $\xi(t) = \text{Re } \zeta(t)$  выражается через «первый» и «второй» моменты  $B_2$  и  $\tilde{B}_2$  аналитического сигнала формулой

$$\begin{aligned} B_{2\xi}(t, \tau) &= \frac{1}{2} \text{Re} \{B_2(t, \tau) + \tilde{B}_2(t, \tau)\} = \\ &= \frac{1}{4} \{B_{2\mathfrak{N}}(t, \tau) e^{i\omega_0 \tau} + \tilde{B}_{2\mathfrak{N}}(t, \tau) e^{i2\omega_0 t} + \text{к. с.}\}. \end{aligned} \quad (57.12)$$

Таким образом, двумерный спектр нестационарного вещественного модулированного процесса  $\xi(t)$  расположен в четырех областях, обозначенных на рис. 76 буквами A, B, C и D. Первый член в (57.12) со своим к.с. (области A и B на рис. 76) дает компоненту, медленно меняющуюся со временем  $t_2$ , а второй

член со своим к.с. (области  $C$  и  $D$  на рис. 76) — компоненту, меняющуюся с частотами, близкими к  $2\omega_0$ .

Если комплексная амплитуда  $\mathfrak{A}(t)$  приближается к стационарному случайному процессу, так что  $B_{2\mathfrak{A}}(t, \tau)$  перестает зависеть от  $t$ , то спектральная плотность  $g_{2\mathfrak{A}}(\Omega, \omega) \rightarrow g_{\mathfrak{A}}(\omega) \delta(\Omega)$ . То же самое происходит и со «второй» спектральной плотностью  $\tilde{g}_2(\Omega, \omega)$ , если она вообще не обращается в нуль<sup>1)</sup>. Таким образом, области  $A$  и  $B$  на рис. 76 стягиваются в отрезки на оси  $\omega$ , а  $C$  и  $D$  — в отрезки, параллельные оси  $\omega$ . Получается модулированный процесс, принадлежащий к так называемым *периодически-нестационарным* (§ 59). Если же при приближении  $\mathfrak{A}(t)$  к стационарности  $\tilde{B}_{2\mathfrak{A}}(t, \tau) \rightarrow 0$ , то в пределе и процесс  $\xi(t)$  становится *стационарным* модулированным процессом.

Сглаживание  $B_{2\xi}(t, \tau)$  по периоду  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  пропускает лишь те участки двумерного спектра, которые находятся внутри полосы ширины  $2\omega_0$  по  $\Omega$  (на рисунке эта полоса ограничена штрих-пунктирными прямыми), т. е. срезает области  $C$  и  $D$ . В результате сглаженный момент  $B_{2\xi}(t, \tau)$  приближенно равен

$$\tilde{B}_{2\xi}(t, \tau) \equiv \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} B_{2\xi}(t, \tau) dt \approx \frac{1}{4} \{B_{2\mathfrak{A}}(t, \tau) e^{i\omega_0\tau} + B_{2\mathfrak{A}}^*(t, \tau) e^{-i\omega_0\tau}\}.$$

Будучи низкочастотной компонентой  $B_{2\xi}(t, \tau)$ , сглаженный момент отвечает некоторому случайному процессу, квазистационарность или стационарность которого полностью определяется наличием этих же свойств у комплексной амплитуды  $\mathfrak{A}(t)$ .

Наряду с двукратными преобразованиями Фурье (57.9) можно рассматривать также величины, связанные однократными преобразованиями. Можно записать (57.9а) в виде

$$B_2(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (57.13a)$$

где

$$g(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B_2(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (57.13b)$$

<sup>1)</sup> Это возможно, так как  $\mathfrak{A}(t)$  — не аналитический сигнал. Например, если случайным процессом является только вещественная амплитуда  $A(t)$ , а фаза фиксирована [ $\varphi(t) = \text{const}$ ], то

$$B_{2\mathfrak{A}}(t, \tau) = B_{2A}(t, \tau), \quad \tilde{B}_{2\mathfrak{A}}(t, \tau) = B_{2A}(t, \tau) e^{2i\varphi_0}.$$

Спектральные плотности  $g_{2\mathfrak{A}}$  и  $\tilde{g}_{2\mathfrak{A}}$  тоже различаются при этом только наличием у второй множителя  $e^{2i\varphi_0}$ .

Таким образом, средняя мгновенная мощность есть

$$\frac{1}{2} B_2(t, 0) = \frac{1}{2} \langle |\zeta(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \omega) d\omega. \quad (57.14)$$

Если  $B_2$  не зависит от  $t$  (процесс  $\xi(t)$  стационарен), то функция  $g(t, \omega)$  переходит в спектральную плотность  $g(\omega)$  стационарного процесса, а (57.13а) превращается в формулу Хинчина. Казалось бы, выражения (57.13а)—(57.14), содержащие  $t$  как параметр, дают основание к тому, чтобы трактовать  $g(t, \omega)$  как «мгновенную» спектральную плотность. Этот термин действительно широко используется, и мы тоже будем его применять, но следует ясно представлять себе, что частотно-временной «гибрид»  $g(t, \omega)$  не может без каких-либо ограничений обладать тем же смыслом, что и одномерная плотность  $g(\omega)$  у стационарных процессов (частотная плотность мощности).

Плотность  $g(t, \omega)$  всегда вещественна. Согласно (57.6)

$$g(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} B_2(t, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Если и сам процесс  $\zeta(t)$  вещественный, то

$$g(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_2(t, \tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (57.15a)$$

т. е.  $g(t, \omega)$  в этом случае еще и четна по  $\omega$  — в соответствии с (57.11). В свою очередь (57.13а) принимает при этом вид

$$B_2(t, \tau) = 2 \int_0^{\infty} g(t, \omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (57.15b)$$

Но, будучи вещественной, мгновенная плотность  $g(t, \omega)$  не обязательно неотрицательна на всей плоскости  $(t, \omega)$ , что исключает ее энергетическое истолкование, несмотря на выражение (57.14) для полной средней мгновенной мощности.

Из (57.9) и (57.13) вытекают следующие связи между мгновенной и двумерной спектральными плотностями:

$$g(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\Omega, \omega) e^{-i\Omega t} d\Omega, \quad (57.16a)$$

$$g_2(\Omega, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \omega) e^{i\Omega t} dt. \quad (57.16b)$$



### § 58. Фильтрация нестационарных процессов. О спектре средней мощности

Обратимся теперь к фильтрации нестационарных процессов. Нас будут интересовать соотношения между вторыми моментами нестационарного вещественного процесса  $f(t)$  на входе гармонического фильтра и процесса  $\xi(t)$  на его выходе. Мы по-прежнему будем считать, что  $\bar{f}(t) = 0$ , а значит, и  $\bar{\xi}(t) = 0$ . Величины, относящиеся ко входу и выходу фильтра, мы будем отмечать соответственно индексами  $f$  и  $\xi$ .

Произвольный линейный фильтр характеризуется, как мы знаем, своим импульсным откликом (функцией Грина)  $H(t, \theta)$ , где  $\theta$  — момент действия дельта-импульса на входе, а  $t \geq \theta$  — момент наблюдения отклика. Для пассивного фильтра должно выполняться при этом *условие причинности*: отклик не может предшествовать воздействию, так что

$$H(t, \theta) = 0 \quad \text{при } t < \theta. \quad (58.1)$$

У гармонических фильтров, т. е. у линейных систем с *постоянными* параметрами, отклик зависит только от *промежутка* времени  $t - \theta$  (§ 50):

$$H(t, \theta) = H(t - \theta),$$

и, следовательно,  $H(t - \theta) = 0$  при  $\theta > t$ . Такая «односторонность» отклика  $H(t - \theta)$  позволяет во всех интегралах по  $\theta$ , содержащих в интегранде  $H(t - \theta)$ , отодвигать верхний предел в  $+\infty$ . Следует, однако, подчеркнуть, что справедливость получаемых ниже интегральных соотношений с бесконечными пределами  $(-\infty, +\infty)$  по времени *не связана с обязательным выполнением условия причинности*. Это и понятно, так как функция  $H(t - \theta)$  может описывать не только отклик пассивного фильтра, но, например, и какое-либо временное «окно», форму которого можно задавать произвольно (см. ниже).

Целесообразно ввести для описания фильтра некоторые функции, по существу ничего не добавляющие к его основной характеристике  $H(t)$ , но позволяющие придать всем соотношениям между входом и выходом фильтра симметричную форму [38]. Составим симметризованное произведение значений отклика фильтра в два момента времени  $t + \tau/2$  и  $t - \tau/2$  <sup>1)</sup>:

$$B_{2H}(t, \tau) = H\left(t + \frac{\tau}{2}\right) H\left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

<sup>1)</sup> Интеграл от  $B_{2H}(\theta, \tau)$  по  $\theta$ :  $\Psi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H\left(\theta + \frac{\tau}{2}\right) H\left(\theta - \frac{\tau}{2}\right) d\theta$ ,

можно условно назвать «корреляционной функцией» импульсного отклика — аналогично тому, как ранее (§ 50) была введена «корреляционная функция» элементарного импульса при рассмотрении импульсных процессов.

При выполнении условия причинности  $B_{2H} \neq 0$  только в области  $t > |\tau|/2$  плоскости  $(t, \tau)$ .

Определим для импульсного отклика фильтра мгновенную спектральную плотность  $g_H(t, \omega)$  и двумерную плотность  $g_{2H}(\Omega, \omega)$ , полагая

$$B_{2H}(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_H(t, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (58.2a)$$

$$g_H(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{2H}(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (58.2b)$$

$$B_{2H}(t, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} g_{2H}(\Omega, \omega) e^{-i(\Omega t - \omega\tau)} d\Omega d\omega, \quad (58.3a)$$

$$g_{2H}(\Omega, \omega) = \iint_{-\infty}^{+\infty} B_{2H}(t, \tau) e^{i(\Omega t - \omega\tau)} dt d\tau. \quad (58.3b)$$

Отсюда ясно, что между собой обе спектральные плотности связаны соотношениями

$$g_H(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2H}(\Omega, \omega) e^{-i\Omega t} d\Omega, \quad (58.4a)$$

$$g_{2H}(\Omega, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_H(t, \omega) e^{i\Omega t} dt. \quad (58.4b)$$

Нетрудно выразить  $g_{2H}(\Omega, \omega)$  через функцию передачи фильтра  $k(i\omega)$ , т. е. через трансформанту Фурье от импульсного отклика  $H(t)$ :

$$H(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (58.5a)$$

откуда

$$k(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (58.5b)$$

В соответствии с определением  $B_{2H}(t, \tau)$ , учитывая веществен-

ность  $H(t)$  и пользуясь разложением (58.5а), находим

$$B_{2H}(t, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(i\omega_1) k^*(i\omega_2) \exp \left\{ i \left[ \omega_1 \left( t + \frac{\tau}{2} \right) - \omega_2 \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\} d\omega_1 d\omega_2.$$

Переходя при помощи (57.7) к переменным  $\Omega$  и  $\omega$ , получаем

$$B_{2H}(t, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k \left[ i \left( \omega - \frac{\Omega}{2} \right) \right] k^* \left[ i \left( \omega + \frac{\Omega}{2} \right) \right] e^{-i(\Omega t - \omega \tau)} d\Omega d\omega.$$

Сопоставление этого выражения с (58.3а) показывает, что

$$g_{2H}(\Omega, \omega) = k \left[ i \left( \omega - \frac{\Omega}{2} \right) \right] k^* \left[ i \left( \omega + \frac{\Omega}{2} \right) \right]. \quad (58.6)$$

Если отвлечься от того, что  $\xi(t)$  — случайная функция, а  $H(t)$ , как мы пока считаем, — детерминированная функция, связанная, сверх того, условием причинности (58.1), то все соотношения для обеих функций формально одинаковы. Разложение (57.1) аналогично интегралу (58.5а) для  $H(t)$ , момент  $B_2(t, \tau)$  аналогичен функции  $B_{2H}(t, \tau)$ , а выражение (57.8) для  $g_2(\Omega, \omega)$  — выражению (58.6) для  $g_{2H}(\Omega, \omega)$ . С той же оговоркой разложения (57.9), (57.13) и (57.16) для случайного процесса аналогичны соответственно разложениям (58.3), (58.2) и (58.4) для фильтра. Это и позволяет записать связи между процессами на входе и выходе фильтра в форме, совершенно симметричной относительно характеристик фильтра и входного процесса.

Для получения этих связей можно исходить как из интеграла Дюамеля, так и из соотношения между спектральными амплитудами

$$c_{\xi}(\omega) = k(i\omega) c_f(\omega),$$

которое справедливо для установившегося отклика  $\xi(t)$  независимо от того, стационарен процесс  $f(t)$  или нет (см. задачу 2). Из этого соотношения следует, что

$$\langle c_{\xi}(\omega_1) c_{\xi}^*(\omega_2) \rangle = k(i\omega_1) k^*(i\omega_2) \langle c_f(\omega_1) c_f^*(\omega_2) \rangle.$$

Переходя здесь к переменным  $\Omega$  и  $\omega$ , вводя  $g_{2f}(\Omega, \omega) = \gamma_f(\omega_1, \omega_2)$  и пользуясь (58.6), получаем для двумерной спектральной плотности процесса  $\xi(t)$  на выходе фильтра выражение

$$g_{2\xi}(\Omega, \omega) = g_{2H}(\Omega, \omega) g_{2f}(\Omega, \omega). \quad (58.7)$$

Если процессы  $f(t)$  и  $\xi(t)$  стационарны, так что

$$g_{2\xi}(\Omega, \omega) = g_{\xi}(\omega) \delta(\Omega), \quad g_{2f}(\Omega, \omega) = g_f(\omega) \delta(\Omega),$$

то (58.7) переходит в известное соотношение (50.10) для одномерных спектральных плотностей:

$$g_{\xi}(\omega) = g_{2H}(0, \omega) g_f(\omega), \quad g_{2H}(0, \omega) = |k(i\omega)|^2. \quad (58.8)$$

Согласно (57.166) и (58.46) двумерные плотности  $g_{2\xi}(\Omega, \omega)$ ,  $g_{2f}(\Omega, \omega)$  и  $g_{2H}(\Omega, \omega)$  представляют собой трансформанты Фурье (по  $t$ ) от мгновенных плотностей  $g_{\xi}(t, \omega)$ ,  $g_f(t, \omega)$  и  $g_H(t, \omega)$ . Следовательно, в соответствии с обратной теоремой о спектре свертки (§ 42), имеем для мгновенных плотностей на входе и выходе фильтра связь

$$g_{\xi}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_H(t - \theta, \omega) g_f(\theta, \omega) d\theta. \quad (58.9)$$

В свою очередь мгновенные плотности — это, согласно (57.136) и (58.26), трансформанты Фурье (по  $\tau$ ) от функций  $B_{2\xi}(t, \tau)$ ,  $B_{2f}(t, \tau)$  и  $B_{2H}(t, \tau)$ . Следовательно, по той же теореме

$$B_{2\xi}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{2H}(t - \theta, \tau - \chi) B_{2f}(\theta, \chi) d\theta d\chi. \quad (58.10)$$

Симметрия полученных соотношений (58.7), (58.9) и (58.10) относительно характеристик входного процесса и фильтра позволяет рассматривать  $H(t)$  как *детерминированный процесс на входе*, а  $f(t)$  — как *реализацию случайного импульсного отклика*, т. е. отклика случайной гармонической системы, характеризуемой функциями  $B_{2f}(t, \tau)$ ,  $g_f(t, \omega)$  и  $g_{2f}(\Omega, \omega)$ . Конечно, при такой перемене ролей можно снять условие причинности с  $H(t)$ , но необходимо наложить его на  $f(t)$ .

Посмотрим теперь в качестве примера, что происходит при прохождении нестационарного процесса  $f(t)$  через полосовой фильтр, у которого  $|k(i\omega)|$  отлично от нуля в интервалах ширины  $\Delta\omega$ , симметрично расположенных около частот  $\pm\omega_0$ , ( $\omega_0 > \Delta\omega$ ).

Множитель  $\gamma_H(\omega_1, \omega_2) = k(i\omega_1)k^*(i\omega_2)$  выделяет на плоскости  $(\omega_1, \omega_2)$  четыре области пропускания, обозначенные на рис. 77 буквами  $A, B, C$  и  $D$  и имеющие форму «квадратов» со стороной  $\Delta\omega$ <sup>1)</sup>. Если полоса фильтра достаточно узка ( $\Delta\omega \ll \omega_0$ ), то, как

<sup>1)</sup> Заметим, что наличие резких границ у этих квадратов (т. е. обращение функции передачи фильтра  $k(i\omega)$  в нуль всюду вне полосы пропускания) несовместимо с условием причинности. Часто используемая для оценок прямоугольная полоса  $\Delta\omega$  (см., например, § 52) отвечает отклику

$$H(t - \theta) = \cos \omega_0(t - \theta) \cdot \frac{\sin [\Delta\omega(t - \theta)/2]}{\pi(t - \theta)/2},$$

который отличен от нуля при  $t < \theta$ .

показывает простое сопоставление рис. 77 и 76, на выходе фильтра получится *модулированный* нестационарный процесс.

Если момент  $B_{2f}(t, \tau)$  входного процесса обладает наименьшим масштабом  $t_k$  по  $t$  (т. е. наибольшим масштабом  $\sim 1/t_k$  по  $\Omega$ ), то при условии  $|2\omega_0 - \Delta\omega| > 1/t_k$  спектральная «масса» процесса  $f(t)$  будет практически отсутствовать в квадратах  $C$  и  $D$ , так что отклик  $\xi(t)$  будет определяться «содержимым» только квадратов  $A$  и  $B$ . Для квазистационарного входного процесса  $f(t)$  указанное условие обычно выполнено с избытком, т. е.

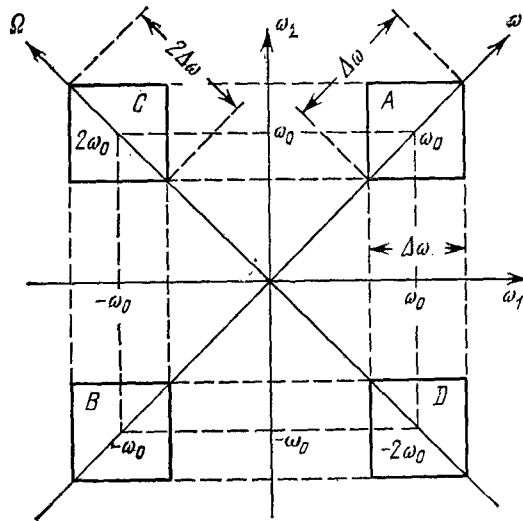


Рис. 77.

справедливо сильное неравенство  $|2\omega_0 - \Delta\omega| \gg 1/t_k$ . Соотношение же между шириной двумерного спектра  $f(t)$  по оси  $\Omega$  и полосой фильтра  $\Delta\omega$  может быть различным. В том случае, когда  $1/t_k \ll \Delta\omega$ , спектральная «масса» сконцентрирована вблизи оси  $\omega$ , т. е. вблизи диагоналей квадратов  $A$  и  $B$ . Фильтр при этом практически не обрезает спектральной «массы» в направлении оси  $\Omega$ , и поэтому интегрирование по площадям квадратов  $A$  и  $B$  можно распространить по  $\Omega$  до  $\pm \infty$ , полагая вместе с тем, что функция передачи равна своему значению на оси  $\omega$ :

$$k \left[ i \left( \omega \pm \frac{\Omega}{2} \right) \right] \approx k(i\omega).$$

Согласно (58.6) и (58.7) мы получаем тогда

$$g_{2\xi}(\Omega, \omega) \approx |k(i\omega)|^2 g_{2f}(\Omega, \omega),$$

откуда, в соответствии с (57.16а),

$$g_{\xi}(t, \omega) \approx |k(i\omega)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2f}(\Omega, \omega) e^{-i\Omega t} d\Omega = |k(i\omega)|^2 g_f(t, \omega). \quad (58.11)$$

Очевидно, (58.11) — это *квазистационарная* версия обычного (стационарного) соотношения (58.8) между спектральными плотностями на входе и выходе фильтра. Из (58.11) и (57.13а) вытекает и *квазистационарная* формула для  $B_{2\xi}(t, \tau)$ :

$$B_{2\xi}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\xi}(t, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |k(i\omega)|^2 g_f(t, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Другими словами, изменения  $g_f(t, \omega)$  со временем в рассматриваемом случае настолько медленны, что фильтр успевают хорошо следовать за ними, как если бы входной процесс  $f(t)$  в каждый момент времени был стационарным — с характеристиками, взятыми в этот же момент. При таких условиях  $g_f(t, \omega)$  действительно играет роль *мгновенной спектральной плотности*.

Остановимся в заключение на упомянутом в § 57 вопросе о меняющемся со временем спектре средней мощности нестационарного процесса. Разные способы построения *неотрицательной* функции  $t$  и  $\omega$ , которую можно было бы истолковать в указанном смысле, основаны на использовании операций фильтрации и сглаживания. Мы приведем здесь решение вопроса, даваемое в работе [38]<sup>1)</sup>.

Назовем «временным окном» вещественную функцию  $\omega(t)$ , положительную в некоторой  $T$ -окрестности момента времени  $t = 0$  и близкую к нулю вне этой окрестности. Произведение  $\omega(t - \theta) \xi(\theta)$  представляет собой «порцию» процесса  $\xi(\theta)$ , выделенную окном в  $T$ -окрестности момента  $\theta = t$ . Средняя мгновенная (по  $\theta$ ) пропускаемая окном мощность равна  $\omega^2(t - \theta) \overline{\xi^2(\theta)}$ , а полная средняя мощность

$$\bar{E}(t; \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2(t - \theta) \overline{\xi^2(\theta)} d\theta. \quad (58.12)$$

Если мы хотим считать  $\bar{E}(t; \omega)$  средней локально-сглаженной<sup>2)</sup> мощностью процесса  $\xi(t)$ , то надо потребовать, чтобы интеграл

<sup>1)</sup> Эта работа содержит наиболее последовательную и детальную дискуссию всей проблемы. Имеются и другие подходы (см., например, [39]), а также исследования аналогичной задачи, но не для случайных, а для детерминированных сигналов (см. [39—42] и приведенную там литературу).

<sup>2)</sup> Свертка тоже представляет собой операцию сглаживания, но с весовой функцией. Если, в частности,  $\omega^2(t)$  — прямоугольная функция, равная  $1/T$  в интервале  $(-T/2, T/2)$  и нулю вне этого интервала, то свертка (58.12) совпадает с простым сглаживанием, т. е. усреднением  $\overline{\xi^2(t)}$  по интервалу  $(t - T/2, t + T/2)$ .

от нее по  $t$  был равен полной средней энергии <sup>1)</sup>, т. е. должно быть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}(t; \omega) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\xi^2(\theta)} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2(t - \theta) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\xi^2(t)} dt.$$

Очевидно, это будет выполнено при следующей нормировке временного окна:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2(t) dt = 1. \quad (58.13)$$

Для произвольной (и в общем случае комплексной) функции  $F(\theta)$  со спектральной амплитудой  $\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta$  справедливо равенство (теорема Парсеваля)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\theta)|^2 d\theta = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{F}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta \right|^2. \quad (58.14)$$

Полагая  $F(\theta) = \omega(t - \theta) \xi(\theta)$ , получаем из статистически усредненного равенства (58.14)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2(t - \theta) \overline{\xi^2(\theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{2\pi} \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t - \theta) \xi(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta \right|^2 \right\rangle. \quad (58.15)$$

Таким образом, средняя локально-сглаженная мощность процесса  $\xi(t)$  представлена в виде интеграла по всем частотам  $\omega$  от вещественной неотрицательной (и, как легко видеть, четной по  $\omega$ ) функции:

$$\begin{aligned} g_{\xi}(t, \omega; \omega) &= \frac{1}{2\pi} \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t - \theta) \xi(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta \right|^2 \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \omega(t - \theta_1) \omega(t - \theta_2) B(\theta_1, \theta_2) e^{-i\omega(\theta_1 - \theta_2)} d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned} \quad (58.16a)$$

(58.16б)

<sup>1)</sup> При условии, что эта полная энергия конечна (что исключено для стационарных процессов).

При нормировке (58.13) полная средняя энергия процесса есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}(t; \omega) dt = \iint_{-\infty}^{+\infty} g_{\xi}(t, \omega; \omega) dt d\omega.$$

В работе [38] функция  $g_{\xi}(t, \omega; \omega)$  названа  $(t, \omega)$ -плотностью физического спектра процесса  $\xi(t)$ .

Выражение (58.16) было выведено как частотное разложение локально-сглаженной средней мощности  $\xi(t)$ . Можно получить и другое выражение для  $g_{\xi}(t, \omega; \omega)$ , исходя из «частотного окна»  $\tilde{w}(\omega)$ , сопряженного по Фурье с  $w(t)$ :

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (58.17)$$

Пользуясь, кроме того, спектральным разложением (57.1) процесса  $\xi(t)$  и теоремой о спектре свертки (применительно к функциям  $w(t)$  и  $\xi(t)e^{-i\omega t}$ ), находим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t - \theta) \xi(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(\omega - \omega_1) c(\omega_1) e^{i\omega_1 t} d\omega_1.$$

Поэтому (58.16) можно записать и через частотное окно:

$$g_{\xi}(t, \omega; \omega) = \frac{1}{2\pi} \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(\omega - \omega_1) c(\omega_1) e^{i\omega_1 t} d\omega_1 \right|^2 \right\rangle = \quad (58.18a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(\omega - \omega_1) \tilde{w}^*(\omega - \omega_2) \gamma(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} d\omega_1 d\omega_2, \quad (58.18b)$$

где  $\gamma(\omega_1, \omega_2) = \langle c(\omega_1) c^*(\omega_2) \rangle$  — по-прежнему двумерная спектральная плотность процесса  $\xi(t)$ .

Интегрируя (58.18b) по времени от  $-\infty$  до  $+\infty$  и учитывая, что интеграл от экспоненты равен  $2\pi\delta(\omega_1 - \omega_2)$ , находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\xi}(t, \omega; \omega) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{w}(\omega - \omega_1)|^2 \overline{|c(\omega_1)|^2} d\omega_1. \quad (58.19)$$

Следовательно,  $(t, \omega)$ -плотность физического спектра  $g_{\xi}(t, \omega; \omega)$  можно толковать и как временное разложение локально-сглаженной средней спектральной плотности  $\overline{|c(\omega_1)|^2}$ . Интегрирование (58.19) по всем  $\omega$  должно давать полную среднюю энергию



процесса  $\xi(t)$ , равную

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\xi^2(t)} dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{|c(\omega_1)|^2} d\omega_1.$$

Отсюда следует, что нормировка частотного «окна» должна быть такой<sup>1)</sup>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{w}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi. \quad (58.20)$$

Сглаживание при помощи временных и частотных «окон» широко применяется при исследованиях нестационарных процессов, например, в акустике — при анализе речи. По понятным причинам в таких измерениях используются окна простой формы, т. е. такие, у которых произведение размытостей  $[T$  у функции  $w(t)$  и  $B$  у ее трансформанты Фурье  $\tilde{w}(\omega)$ ] не сильно превышает свою нижнюю границу:  $TB \gtrsim 2\pi$  (§ 50). Очевидно, этим же соотношением связаны и интервалы сглаживания — по  $t$  в (58.16а) и по  $\omega$  в (58.18а).

Выясним теперь, как связана плотность физического спектра  $g_{\xi}(t, \omega; w)$  со вторыми моментами процесса  $\xi(t)$  — моментом  $B_{2\xi}(t, \tau)$ , двумерной спектральной плотностью  $g_{2\xi}(\Omega, \omega)$  и, что самое интересное, с мгновенной спектральной плотностью  $g_{\xi}(t, \omega)$ . На первые два вопроса отвечают формулы (58.16б) и (58.18б). Если перейти к новым переменным интегрирования, а именно положить  $\theta_1 = \theta + \tau/2$ ,  $\theta_2 = \theta - \tau/2$  в (58.16б) и  $\omega_1 = \omega' - \Omega/2$ ,  $\omega_2 = \omega' + \Omega/2$  в (58.18б), то получим

$$g_{\xi}(t, \omega; w) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} w\left(t - \theta - \frac{\tau}{2}\right) w\left(t - \theta + \frac{\tau}{2}\right) B_{2\xi}(\theta, \tau) e^{-i\omega\tau} d\theta d\tau = \quad (58.21a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}\left(\omega - \omega' + \frac{\Omega}{2}\right) \tilde{w}^*\left(\omega - \omega' - \frac{\Omega}{2}\right) \times \\ \times g_{2\xi}(\Omega, \omega') e^{-i\Omega t} d\Omega d\omega'. \quad (58.21b)$$

Отсюда видно, что для временного окна  $w(t)$  целесообразно ввести функцию

$$B_{2w}(t, \tau) = w\left(t + \frac{\tau}{2}\right) w\left(t - \frac{\tau}{2}\right),$$

<sup>1)</sup> Это тотчас же следует и из (58.13), (58.17).

аналогичную функции  $B_{2H}(t, \tau)$  для фильтра. Напомним, что введение  $B_{2H}(t, \tau)$  и ее трансформант Фурье (58.2)—(58.4) ни в какой мере не было связано с выполнением условия причинности для  $H(t)$ , так что те же формулы справедливы и для  $B_{2w}(t, \tau)$ . В частности [см. (58.2)],

$$B_{2w}(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_w(t, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (58.22a)$$

$$g_w(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{2w}(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (58.22b)$$

Через  $B_{2w}(t, \tau)$  формула (58.21a) записывается в виде

$$g_{\xi}(t, \omega; w) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} B_{2w}(t - \theta, \tau) B_{2\xi}(\theta, \tau) e^{-i\omega\tau} d\theta d\tau. \quad (58.23)$$

Разложения Фурье (58.22a) для  $B_{2w}(t, \tau)$  и (57.13a) для  $B_{2\xi}(t, \tau)$  позволяют с помощью теоремы о спектре произведения двух функций  $\tau$  получить выражение  $g_{\xi}(t, \omega; w)$  через мгновенную спектральную плотность  $g_{\xi}(t, \omega)$  процесса  $\xi(t)$ :

$$g_{\xi}(t, \omega; w) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} g_w(t - \theta, \omega - \omega') g_{\xi}(\theta, \omega') d\theta d\omega'. \quad (58.24)$$

Таким образом,  $(t, \omega)$ -плотность физического спектра нестационарного процесса  $\xi(t)$  (всегда, как мы видели, неотрицательная) представляет собой результат сглаживания его мгновенной спектральной плотности (которая может быть и локально-отрицательной) *как по времени, так и по частоте* — с интервалами сглаживания  $T$  и  $B$ , связанными соотношением размытостей. Весовой функцией при таком двойном сглаживании служит мгновенная спектральная плотность  $g_w(t, \omega)$  временного окна  $w(t)$ , называемая в [38] мгновенной спектрально сглаживающей функцией.

В выражении (58.23) для плотности физического спектра производится сглаживание по времени  $t$ , а по сдвигу  $\tau$  — преобразование Фурье произведения  $B_{2w}$  и  $B_{2\xi}$ . Естественно ожидать (и расчет, аналогичный проделанным выше, это подтверждает), что в выражении  $g_{\xi}(t, \omega; w)$  через двумерные спектральные плотности  $g_{2w}(\Omega, \omega)$  и  $g_{2\xi}(\Omega, \omega)$  будет наоборот: сглаживание по  $\omega$  и преобразование Фурье по  $\Omega$  от произведения  $g_{2w}$  и  $g_{2\xi}$ .

Действительно, указанное выражение таково:

$$g_{\xi}(t, \omega; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\omega}(\Omega, \omega - \omega') g_{2\xi}(\Omega, \omega') e^{-i\Omega t} d\Omega d\omega'. \quad (58.25)$$

Убедимся теперь в том, что для *квазистационарного* процесса, у которого зависимости моментов от времени  $t$  *медленны в масштабе ширины  $T$  временного окна*, мгновенная плотность физического спектра  $g_{\xi}(t, \omega; \omega)$  совпадает с мгновенной плотностью  $g_{\xi}(t, \omega)$ . Это можно установить различными способами, но мы будем исходить из формулы (58.24).

Поскольку  $g_{\xi}(\theta, \omega')$  меняется в функции от  $\theta$  медленно по сравнению с  $g_{\omega}(t - \theta, \omega - \omega')$ , можно принять  $\theta = t$  в  $g_{\xi}$ , и тогда

$$g_{\xi}(t, \omega; \omega) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\xi}(t, \omega') d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\omega}(\chi, \omega - \omega') d\chi. \quad (58.26)$$

Но из формул (58.4а) и (58.6), записанных не для фильтра, а для окна  $\omega(t)$ , имеем

$$g_{\omega}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\omega}\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right) \tilde{\omega}^*\left(\omega + \frac{\Omega}{2}\right) e^{-i\Omega t} d\Omega,$$

а так как интеграл по  $t$  от экспоненты в пределах  $(-\infty, +\infty)$  равен  $2\pi\delta(\Omega)$ , отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\omega}(t, \omega) dt = |\tilde{\omega}(\omega)|^2.$$

Подставив это в (58.26), получаем

$$g_{\xi}(t, \omega; \omega) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\xi}(t, \omega') |\tilde{\omega}(\omega - \omega')|^2 d\omega'.$$

Наибольшую частотную информацию физический спектр содержит при предельно узком частотном окне ( $B \rightarrow 0$  и, соответственно,  $T \rightarrow \infty$ ). В этом случае, в согласии с нормировкой (58.20),  $|\tilde{\omega}(\omega - \omega')|^2 = 2\pi\delta(\omega - \omega')$ , что и приводит к указанному результату:

$$g_{\xi}(t, \omega; \omega) \approx g_{\xi}(t, \omega). \quad (58.27)$$

Заметим, что из (58.27) вытекает, в частности, что мгновенный спектр квазистационарного процесса неотрицателен.

Не имея возможности остановиться здесь на многих других интересных вопросах спектрального анализа нестационарных

процессов [в том числе на том, как приближенно реализуется операция получения  $(t, \omega)$ -плотности физического спектра], мы отсылаем читателя к статье [38]. Подчеркнем только еще раз различие между фильтрацией и действием временного окна, ограничившись при этом формулами для мгновенных спектральных плотностей.

Согласно (58.9) фильтр осуществляет *временное сглаживание* входной мгновенной плотности  $g_f(t, \omega)$  при помощи весовой функции  $g_H(t, \omega)$ , т. е. своей собственной мгновенной спектральной функции. В отличие от этого «выход» окна, т. е. функция  $g_{\xi}(t, \omega; \omega)$ , получается, согласно (58.24), в результате двойного сглаживания мгновенной плотности  $g_{\xi}(t, \omega)$  на «входе» — *и по времени, и по частоте*. Отсюда проистекают отличия и в других формулах, описывающих действие фильтра и временного окна.

### § 59. Периодически-нестационарные процессы

Мы уже упоминали о таких процессах, для которых моменты оказывались периодически зависящими от времени. Так, например, процесс вида

$$\eta(t) = F(t) \xi(t),$$

где  $F(t)$  — периодическая детерминированная функция, а  $\xi(t)$  — стационарный случайный процесс, имеет периодические по  $t$  моменты:

$$\begin{aligned} \overline{\eta(t)} &= F(t) \bar{\xi}, & B_{\eta}(t, \tau) &= F(t) F(t + \tau) B_{\xi}(\tau), \\ \psi_{\eta}(t, \tau) &= F(t) F(t + \tau) \psi_{\xi}(\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, выделяя на выходе смесителя произведение поданных на его вход периодического колебания и стационарного шума, мы получаем периодически-нестационарный процесс.

Другими примерами могут служить магнитные шумы при циклическом перемагничивании ферромагнетика и дробовой ток в электронной лампе, если средний ток меняется периодически, как это, в частности, имеет место в возбужденном автогенераторе (напомним, что дисперсия дробового шума пропорциональна среднему току). Очевидно, в сильно нелинейных автоколебательных системах, у которых предельный цикл не близок к окружности, даже малые флуктуации будут периодически-нестационарны с периодом автоколебаний [43].

Укажем еще на один важный источник таких процессов. Это линейные системы с периодически меняющимися параметрами, к которым относятся и параметрические усилители с периодической накачкой. Если на вход такой системы воздействует гармоническое колебание  $e^{i\omega t}$ , то на выходе получается колебание

$k(t, i\omega)e^{i\omega t}$ , где мгновенная функция передачи  $k(t, i\omega)$  периодически (с периодом изменения параметров) зависит от  $t$ . Стационарный входной процесс

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dC_f(\omega),$$

у которого

$$\overline{dC_f(\omega)} = \bar{f}\delta(\omega) d\omega,$$

$$\overline{dC_f(\omega) dC_f^*(\omega')} = g_f(\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega d\omega',$$

дает, таким образом, на выходе процесс

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, i\omega) e^{i\omega t} dC_f(\omega),$$

у которого среднее значение

$$\overline{\xi(t)} = \bar{f}k(t, 0)$$

и смешанный момент

$$B_{\xi}(t, \tau) = \overline{\xi(t + \tau) \xi^*(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t + \tau, i\omega) k^*(t, i\omega) e^{i\omega\tau} g_f(\omega) d\omega$$

периодически [с периодом изменения  $k(t, i\omega)$ ] зависят от  $t$ .

Мы ограничиваемся в этих примерах моментами первого и второго порядка, т. е. не выходим за рамки корреляционной теории. Для нужд этой теории можно определить периодически-нестационарный (и для простоты — вещественный) процесс как процесс, у которого двумерная функция распределения, зависящая от моментов времени  $t$  и  $t'$ , при любом фиксированном сдвиге  $\tau = t' - t$  представляет собой периодическую функцию  $t$ . Таким образом,

$$\omega_2(x, t; x', t') = \sum_{-\infty}^{+\infty} v_n(x, x', \tau) e^{in\omega_0 t}, \quad (59.1)$$

где

$$v_n(x, x', \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega_2(x, t; x', t + \tau) e^{-in\omega_0 t} d(\omega_0 t). \quad (59.2)$$

Из вещественности  $\omega_2$  следует, что

$$v_n(x, x', \tau) = v_{-n}^*(x, x', \tau). \quad (59.3)$$

Из условия симметрии  $\omega_2$ , поскольку

$$\begin{aligned}\omega_2(x', t'; x, t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} v_n(x', x, -\tau) e^{in\omega_0 t'} = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} v_n(x', x, -\tau) e^{in\omega_0(t+\tau)},\end{aligned}$$

получаем

$$v_n(x, x', \tau) = v_n(x', x, -\tau) e^{in\omega_0 \tau}. \quad (59.4)$$

Из условия согласованности

$$\omega_1(x, t) = \int \omega_2(x, t; x', t') dx'$$

с учетом (59.3) имеем

$$\int v_n(x, x', \tau) dx' = e^{in\omega_0 \tau} \int v_n(x', x, -\tau) dx' \equiv u_n(x), \quad (59.5)$$

так что

$$\omega_1(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n(x) e^{in\omega_0 t}, \quad (59.6)$$

причем, конечно,  $u_n(x) = u_{-n}^*(x)$ . Наконец, из условия нормировки  $\omega_2$  и  $\omega_1$  следует, что

$$\iint v_n(x, x', \tau) dx dx' = \int u_n(x) dx = \delta_{n0}. \quad (59.7)$$

Кроме того,  $\omega_2$  и  $\omega_1$  должны быть при любых значениях аргументов неотрицательны. Отсюда тотчас же вытекает, что вещественные коэффициенты Фурье  $v_0(x, x', \tau)$  и  $u_0(x)$  обладают всеми свойствами двумерной и одномерной функций распределения стационарного процесса. Следовательно, усреднение  $\omega_2$  и  $\omega_1$ , а также любых вычисляемых с их помощью моментов по времени (по периоду  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ) приводит к функциям распределения и моментам стационарного процесса.

Согласно (59.6) и (59.1) имеем следующие выражения для моментов периодически-нестационарного процесса  $\xi(t)$ :

$$\overline{\xi(t)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{in\omega_0 t}, \quad \xi_n = \int x u_n(x) dx, \quad (59.8)$$

$$B(t, \tau) = \overline{\xi(t) \xi(t+\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n(\tau) e^{in\omega_0 t}, \quad (59.9)$$

$$B_n(\tau) = \iint x x' v_n(x, x', \tau) dx dx',$$

$$\begin{aligned}\psi(t, \tau) &= B(t, \tau) - \overline{\xi(t)} \cdot \overline{\xi(t+\tau)} = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ B_n(\tau) - \sum_m \xi_{m-n} \xi_n e^{im\omega_0 \tau} \right] e^{in\omega_0 t}.\end{aligned} \quad (59.10)$$

Заметим, что из (59.4) и (59.9) вытекает соотношение

$$B_n(\tau) e^{-in\omega_0\tau} = B_n(-\tau), \quad (59.11)$$

которое, впрочем, можно вывести и из равенства

$$B(t, -\tau) = B(t - \tau, \tau),$$

являющегося следствием самого определения момента  $B(t, \tau)$ . Из (59.3) и (59.9) или же просто из вещественности  $B(t, \tau)$  имеем также

$$B_n(\tau) = B_{-n}^*(\tau). \quad (59.12)$$

Посмотрим теперь, какими корреляционными свойствами должны обладать спектральные амплитуды в гармоническом разложении

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dC(\omega), \quad (59.13)$$

если  $\xi(t)$  — периодически-нестационарный процесс. Взяв среднее значение  $\xi(t)$  и потребовав, чтобы оно выражалось рядом Фурье (59.8), получаем

$$\overline{dC(\omega)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \xi_n \delta(\omega - n\omega_0) d\omega. \quad (59.14)$$

Составив при помощи (59.13) момент  $B(t, \tau) = \overline{\xi(t + \tau)\xi(t)}$  и потребовав, чтобы он выражался рядом Фурье (59.9), находим

$$\overline{dC(\omega_1) dC^*(\omega_2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_n(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1 + n\omega_0) d\omega_1 d\omega_2, \quad (59.15)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = B_n(\tau). \quad (59.16)$$

Выражение (59.15) означает, что у периодически-нестационарного процесса комплексная «масса»  $\Gamma(\omega_1, \omega_2)$  распределена на плоскости  $(\omega_1, \omega_2)$  на прямых  $\omega_2 = \omega_1 - n\omega_0$  (рис. 78), в отличие от стационарных процессов, у которых эта «масса» сосредоточена только на биссектрисе  $\omega_2 = \omega_1$ . Таким образом, средние билинейные (и, в частности, энергетические) характеристики периодически-нестационарного процесса не локализуемы по частоте, но вклад в спектральный интервал  $(\omega, \omega + d\omega)$  вносят лишь те гармонические колебания из разложения (59.13), частоты которых разнятся на  $n\omega_0$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Из (59.11), (59.12) и (59.16) следует, что спектральные плотности  $g_n(\omega)$  удовлетворяют соотношениям

$$g_n(\omega) = g_n(n\omega_0 - \omega) = g_{-n}^*(-\omega), \tag{59.17}$$

откуда, в частности, вытекает, что

$$g_0(\omega) = g_0(-\omega) = g_0^*(-\omega),$$

т. е.  $g_0(\omega)$  — вещественная четная функция. Нетрудно доказать также, что  $g_0(\omega)$  неотрицательна<sup>1)</sup>. Впрочем, мы уже говорили, что  $B_0(\tau)$  и  $\psi_0(\tau)$  обладают всеми свойствами смешанного момента и функции корреляции стационарного случайного процесса, т. е. этими свойствами обладают сглаженные по периоду

$T_0$  величины  $\overline{\xi(t)} = \xi_0$ ,  
 $\overline{B(t, \tau)} = B_0(\tau)$  и  $\overline{\psi(t, \tau)} = \psi_0(\tau)$ .

Какой смысл имеют эти временные средние? Может показаться, что усредненные по периоду  $T_0$  моменты периодически-нестационарного процесса  $\xi(t)$  равны моментам того стационарного процесса, который получается при усреднении  $\xi(t)$  по периоду, т. е. процесса

$$\eta(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} \xi(\theta) d\theta \equiv \overline{\xi(t)}.$$

Высказанное предположение состоит в том, что

$$\overline{\eta(t)} = \overline{\overline{\xi(t)}} = \overline{\xi(t)} = \xi_0,$$

$$\overline{\eta(t)\eta(t+\tau)} = \overline{\overline{\xi(t)\xi(t+\tau)}} = \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} = B_0(\tau).$$

Первое из этих равенств действительно справедливо. Согласно (59.8) имеем

$$\overline{\eta(t)} = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} \overline{\xi(\theta)} d\theta = \sum_n \xi_n \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} e^{in\omega_0\theta} d\theta = \sum_n \xi_n \delta_{n0} = \xi_0.$$

<sup>1)</sup> См. [44]. В этой же работе рассмотрены некоторые эргодические теоремы для периодически-нестационарных процессов.

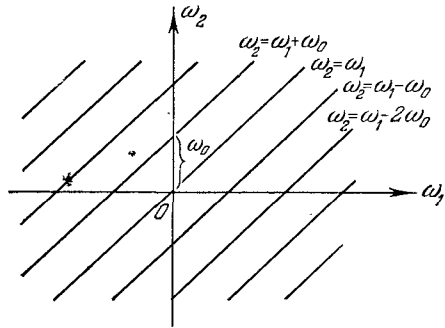


Рис. 78.



Однако второе соотношение не имеет места. В самом деле, пользуясь (59.9), получаем

$$\begin{aligned} \overline{\eta(t)\eta(t+\tau)} &= \frac{1}{T_0^2} \int_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} d\theta \int_{t+\tau-T_0/2}^{t+\tau+T_0/2} d\theta' \overline{\xi(\theta)\xi(\theta')} = \\ &= \sum_n \frac{1}{T_0^2} \int_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} d\theta \int_{t+\tau-T_0/2}^{t+\tau+T_0/2} d\theta' B_n(\theta' - \theta) e^{in\omega_0\theta}. \end{aligned}$$

Поворот осей на плоскости  $(\theta, \theta')$  на  $45^\circ$  позволяет свести двукратный интеграл к однократному, содержащему множитель  $\delta_{n0}$ . В результате, после изменения масштаба в  $\sqrt{2}$  раз, находим

$$\overline{\eta(t)\eta(t+\tau)} = \frac{1}{T_0} \int_{\tau-T_0/2}^{\tau+T_0/2} B_0(u) du \neq B_0(\tau),$$

т. е. смешанный момент усредненного по периоду процесса  $\eta(t) = \overline{\xi(t)}$  не равен усредненному смешанному моменту  $B(t, \tau)$  исходного периодически-нестационарного процесса  $\xi(t)$ . Таким образом, для измерения  $B_0(\tau)$  надо располагать устройством, которое при подаче на вход процесса  $\xi(t)$  сначала образует произведение  $\xi(t)\xi(t+\tau)$  и затем усредняет эту величину по периоду  $T_0$ , а не начинает обработку с усреднения самого процесса  $\xi(t)$ .

Рассмотрим в заключение два примера.

1. Периодическое повторение отрезка стационарного процесса. Пусть из стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  со средним значением  $\bar{\xi}$  и смешанным моментом  $B_{\xi}(\tau)$  выделен отрезок продолжительности  $T$ , который затем

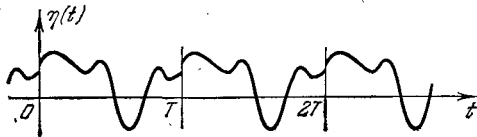


Рис. 79.

периодически повторяется (рис. 79). Мы получаем, очевидно, периодически-нестационарный процесс  $\eta(t)$  с периодом  $T$ . Подсчитаем его среднее значение и момент  $B(t, \tau)$ .

Периодическая функция  $\eta(t)$  может быть разложена в ряд Фурье. Если выбрать масштаб времени так, чтобы период  $T$  был равен  $2\pi$ , то

$$\eta(t) = \sum_n c_n e^{int}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \xi(\theta) e^{in\theta} d\theta,$$

или

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \xi(\theta) d\theta \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{in(t-\theta)} = \int_{-\pi}^{\pi} \xi(\theta) \delta_{\text{пер}}(t-\theta) d\theta, \quad (59.18)$$

где  $\delta_{\text{пер}}(x)$  — периодическая (с периодом  $2\pi$ ) дельта-функция. Конечно, выражение (59.18) можно было написать и сразу. Усредняя его, получаем очевидный результат:

$$\overline{\eta(t)} = \bar{\xi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta_{\text{пер}}(t-\theta) d\theta = \bar{\xi}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} B(t, \tau) &= \overline{\eta(t+\tau) \eta^*(t)} = \\ &= \iint_{-\pi}^{\pi} B_{\xi}(\theta - \theta') \delta_{\text{пер}}(\theta - t - \tau) \times \\ &\quad \times \delta_{\text{пер}}(\theta' - t) d\theta d\theta' = B_{\xi}(\tau), \end{aligned}$$

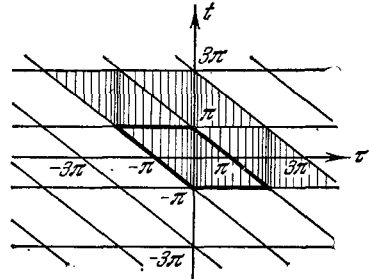


Рис. 80.

причем это справедливо для области  $-\pi < t < \pi$  и  $-(\pi + t) < \tau < \pi - t$ .

Эта «ячейка» периодически повторяется на плоскости  $(t, \tau)$ , т. е. на этой плоскости получается «решетка», изображенная на рис. 80.

Таким образом, если фиксировать  $\tau$ , скажем, в интервале  $0 < \tau < \pi$ , то при изменении  $t$  в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$  момент  $B(t, \tau)$  будет принимать значение  $B_{\xi}(\tau)$  в интервале  $t$  от  $-\pi$  до  $\pi - \tau$  и  $B_{\xi}(2\pi - \tau)$  в интервале от  $\pi - \tau$  до  $\pi$ . Коэффициенты разложения  $B(t, \tau)$  в ряд Фурье (59.9) будут поэтому

$$\begin{aligned} B_n(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ B_{\xi}(\tau) \int_{-\pi}^{\pi-\tau} e^{-int} dt + B_{\xi}(2\pi - \tau) \int_{\pi-\tau}^{\pi} e^{-int} dt \right\} = \\ &= \begin{cases} \left(1 - \frac{\tau}{2\pi}\right) B_{\xi}(\tau) + \frac{\tau}{2\pi} B_{\xi}(2\pi - \tau) & (n=0), \\ \frac{(-1)^n}{2\pi in} (1 - e^{in\tau}) [B_{\xi}(\tau) - B_{\xi}(2\pi - \tau)] & (n \neq 0). \end{cases} \quad (59.19) \end{aligned}$$

Для  $\tau < 0$  выполнено, конечно, свойство (59.11). В рассматриваемом примере сами коэффициенты  $B_n(\tau)$  — периодические (с периодом  $2\pi$ ) функции  $\tau$ .

Возьмем для исходного стационарного процесса  $\xi(t)$  экспоненциальную функцию корреляции  $B_{\xi}(\tau) = \frac{A}{2\theta} e^{-|\tau|/\theta}$ , которая при  $\theta \rightarrow 0$  переходит в  $B_{\xi}(\tau) = A\delta(\tau)$ . Из (59.19) получаем

для  $0 \leq \tau < \pi$

$$B_0(\tau) = \frac{A}{2\vartheta} \left[ \left(1 - \frac{\tau}{2\pi}\right) e^{-\tau/\vartheta} + \frac{\tau}{2\pi} e^{-(2\pi-\tau)/\vartheta} \right],$$

$$B_n(\tau) = \frac{A(-1)^n}{4\pi i n \vartheta} (1 - e^{in\tau}) [e^{-\tau/\vartheta} - e^{-(2\pi-\tau)/\vartheta}].$$

Предельными выражениями при  $\vartheta = 0$  можно, очевидно, пользоваться тогда, когда время корреляции  $\vartheta$  весьма мало по сравнению с периодом повторения  $2\pi$ . В этом случае вторыми членами в квадратных скобках можно пренебречь, а первые члены дают в пределе на рассматриваемом интервале  $(-\pi, \pi)$   $B_n = 0$  (при  $n \neq 0$ ) и  $B_0(\tau) = B_\xi(\tau) = A\delta(\tau)$ . На всей оси  $\tau$  можно записать  $B(t, \tau) = B_0(\tau)$  в виде

$$B(t, \tau) = B_0(\tau) = A\delta_{\text{пер}}(\tau).$$

Таким образом, периодическое повторение отрезка белого шума дает опять белый шум, но с периодической дельта-корреляцией.

Если положить  $A = 2|\xi|^2\vartheta$  [так что  $B_\xi(\tau) = |\xi|^2 e^{-|\tau|/\vartheta}$ ], где  $|\xi|^2$  не зависит от  $\vartheta$ , то при  $\vartheta \rightarrow \infty$  высота скачков  $B(t, \tau)$ , равная  $B_\xi(\tau) - B_\xi(2\pi - \tau)$ , будет уменьшаться. Таким образом, при  $\vartheta \gg 2\pi$  с точностью до  $1/\vartheta$  получаем  $B(t, \tau) = |\xi|^2$ : очень частое (по сравнению со временем корреляции  $\vartheta$ ) повторение отрезка стационарного процесса дает, как и следовало ожидать, не зависящую от  $t$  случайную величину.

2. Квазипериодический импульсный процесс с коррелированными соседними интервалами. Мы имеем в виду специальный случай корреляции между соседними интервалами, а именно тот, когда моменты возникновения импульсов  $t_\nu$  привязаны к строго периодической последовательности  $\bar{t}_\nu = \nu T_0$ . Таким образом,  $t_\nu = \nu T_0 + \varepsilon_\nu$ , причем  $\bar{\varepsilon}_\nu = 0$  и  $\overline{\varepsilon_\nu \varepsilon_\mu} = \varepsilon^2 \delta_{\nu\mu}$ . Отсюда и вытекает первое существенное отличие данной задачи от рассмотренной в § 46 — наличие определенной отрицательной корреляции между смежными интервалами. Действительно,  $\tau_\nu = t_{\nu+1} - t_\nu = T_0 + \varepsilon_{\nu+1} - \varepsilon_\nu$ , а значит,

$$\overline{\tau_\nu \tau_\mu} - T_0^2 = \begin{cases} 2\varepsilon^2 & (\mu = \nu), \\ -\varepsilon^2 & (|\mu - \nu| = 1), \\ 0 & (|\mu - \nu| \geq 2). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что диффузия фазы тем самым исключена: дисперсия суммы  $N$  интервалов  $(t_N - t_0)$  всегда равна сумме дисперсий только двух крайних моментов времени  $t_0$  и  $t_N$ , т. е. составляет  $2\varepsilon^2$ .

Второе отличие от задачи § 46 состоит в том, что теперь процесс периодически-нестационарен. В частности, если взять оди-

наковые импульсы и допустить, что дисперсия разброса  $\varepsilon_\nu$  стремиться к нулю ( $\varepsilon^2 \rightarrow 0$ ), то мы приходим к детерминированному периодическому процессу.

Пусть форма  $\nu$ -го импульса задается, как и в § 42, случайной функцией  $F_\nu(t)$ :

$$\xi(t) = \sum_{\nu} F_{\nu}(t - \nu T_0 - \varepsilon_{\nu}), \quad (59.20)$$

где все  $F_{\nu}(t)$  независимы между собой и распределены одинаково, так что любые средние значения величин, связанных с  $F_{\nu}(t)$ , не зависят от  $\nu$ . Что касается статистической связи между  $\varepsilon_{\mu}$  и  $F_{\nu}(t)$ , то мы допустим, что при  $\nu = \mu$  она возможна.

Вводя

$$\tilde{F}_{\nu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\nu}(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta,$$

получаем для длинного отрезка процесса (59.20) в интервале  $(-T/2, +T/2)$  амплитудную плотность

$$c(\omega) = \sum_{\nu=-N}^N \tilde{F}_{\nu}(\omega) e^{i\omega(T_0\nu + \varepsilon_{\nu})}, \quad (59.21)$$

где  $N = T/2T_0$  — число средних периодов в интервале  $T/2$ .

Посмотрим прежде всего, каково среднее значение  $c(\omega)$ , определяющее среднее значение  $\xi(t)$ :

$$\overline{\xi(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{c(\omega)} e^{i\omega t} d\omega. \quad (59.22)$$

Обозначим

$$\langle \tilde{F}_{\nu}(\omega) e^{i\omega\varepsilon_{\nu}} \rangle = I(\omega). \quad (59.23)$$

Тогда

$$\overline{c(\omega)} = I(\omega) \sum_{\nu=-N}^N e^{i\omega T_0\nu} = I(\omega) \frac{\sin[\omega T_0(N + 1/2)]}{\sin(\omega T_0/2)}. \quad (59.24)$$

Но при  $N \rightarrow \infty$  второй множитель превращается в периодическую дельта-функцию  $\frac{2\pi}{T_0} \sum_n \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_0}\right)$ . Таким образом,

$$\overline{c(\omega)} = I(\omega) \omega_0 \sum_n \delta(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

что дает при подстановке в (59.22)

$$\overline{\xi(t)} = \omega_0 \sum_n I(n\omega_0) e^{in\omega_0 t}. \quad (59.25)$$

Найдем теперь функцию корреляции  $\xi(t)$ . Так как

$$\tilde{\xi}(t) \equiv \xi(t) - \overline{\xi(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} [c(\omega) - \overline{c(\omega)}] e^{i\omega t} d\omega,$$

имеем

$$\begin{aligned} \psi(t + \tau, t) &= \overline{\tilde{\xi}(t + \tau) \tilde{\xi}^*(t)} = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} [\overline{c(\omega_1) c^*(\omega_2)} - \overline{c(\omega_1)} \cdot \overline{c^*(\omega_2)}] e^{i[\omega_1(t+\tau) - \omega_2 t]} d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned} \quad (59.26)$$

Но, согласно (59.21),

$$\overline{c(\omega_1) c^*(\omega_2)} = \sum_{\nu, \mu=-N}^N \overline{\tilde{F}_\nu(\omega_1) \tilde{F}_\mu^*(\omega_2)} e^{i(\omega_1^\nu - \omega_2^\mu) T_0} e^{i(\omega_1^\nu - \omega_2^\mu) T_0}.$$

Выделяя члены с  $\mu = \nu$  и обозначая

$$\overline{\tilde{F}_\nu(\omega_1) \tilde{F}_\nu^*(\omega_2)} e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_0} = K(\omega_1, \omega_2),$$

получаем отсюда

$$\begin{aligned} \overline{c(\omega_1) c^*(\omega_2)} &= K(\omega_1, \omega_2) \sum_{\nu=-N}^N e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_0 \nu} + \\ &+ I(\omega_1) I^*(\omega_2) \sum_{\nu=-N}^N e^{i\omega_1 T_0 \nu} \sum_{\mu=-N}^N e^{-i\omega_2 T_0 \mu}, \end{aligned}$$

причем во втором члене  $\mu \neq \nu$ . Добавляя и вычитая такие же члены с  $\mu = \nu$ , получаем с учетом (59.24)

$$\begin{aligned} \overline{c(\omega_1) c^*(\omega_2)} &= \\ &= [K(\omega_1, \omega_2) - I(\omega_1) I^*(\omega_2)] \sum_{\nu=-N}^N e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_0 \nu} + \overline{c(\omega_1)} \cdot \overline{c^*(\omega_2)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{c(\omega_1) c^*(\omega_2)} - \overline{c(\omega_1)} \cdot \overline{c^*(\omega_2)} &= \\ &= [K(\omega_1, \omega_2) - I(\omega_1) I^*(\omega_2)] \frac{\sin(\omega_1 - \omega_2) T_0 \left(N + \frac{1}{2}\right)}{\sin(\omega_1 - \omega_2) \frac{T_0}{2}}. \end{aligned}$$

При  $N \rightarrow \infty$  это дает

$$\begin{aligned} \overline{c(\omega_1) c^*(\omega_2)} - \overline{c(\omega_1)} \cdot \overline{c^*(\omega_2)} &= \\ &= [K(\omega_1, \omega_2) - I(\omega_1) I^*(\omega_2)] \omega_0 \sum_n \delta(\omega_1 - \omega_2 - n\omega_0), \end{aligned}$$

и в результате подстановки полученного выражения в (59.26) находим

$$\begin{aligned} \psi(t + \tau, t) &= \\ &= \omega_0 \sum_n e^{in\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} [K(\omega_1, \omega_1 - n\omega_0) - I(\omega_1) I^*(\omega_1 - n\omega_0)] e^{i\omega_1 \tau} d\omega_1. \end{aligned} \quad (59.27)$$

Таким образом, как среднее значение (59.25) рассматриваемого процесса, так и его функция корреляции (59.27) являются периодическими (с периодом  $T_0$ ) функциями времени  $t$ .

Для нулевого члена ряда (59.27), равного временному среднему от  $\psi(t + \tau, t)$  по периоду  $T_0$ :

$$\psi_0(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \psi(t + \tau, t) dt, \quad (59.28)$$

спектральная плотность есть

$$g_0(\omega) = \omega_0 [K_0(\omega) - |I(\omega)|^2], \quad (59.29)$$

где

$$K_0(\omega) = K(\omega, \omega) = |\widetilde{F}_v(\omega)|^2.$$

Для среднего по периоду  $T_0$  от смешанного момента

$$B(t + \tau, t) = \overline{\xi(t + \tau) \xi^*(t)} = \psi(t + \tau, t) + \overline{\xi(t + \tau)} \cdot \overline{\xi^*(t)},$$

согласно (59.25) и (59.28), имеем

$$\begin{aligned} B_0(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} B(t + \tau, t) dt = \\ &= \psi_0(\tau) + \omega_0^2 \sum_{m, n} I(m\omega_0) I^*(n\omega_0) e^{im\omega_0 \tau} \delta_{mn} = \\ &= \psi_0(\tau) + \omega_0^2 \sum_n |I(n\omega_0)|^2 e^{in\omega_0 \tau}. \end{aligned}$$

Следовательно, к непрерывной спектральной плотности (59.29) добавляется еще *дискретный* спектр

$$g_{B_0}(\omega) = \omega_0 [K_0(\omega) - |I(\omega)|^2] + \omega_0^2 \sum_n |I(n\omega_0)|^2 \delta(\omega - n\omega_0).$$

Именно этот спектр, соответствующий усредненному по периоду  $T_0$  моменту  $B$  процесса (50.20), и был найден в цитированной ранее работе Форте [45], где рассмотрены также различные частные случаи задания импульсов. Если, например,  $F_v(t)$  и  $\varepsilon_v$

независимы, то из (59.23) получаем

$$I(\omega) = \overline{\tilde{F}_v(\omega)} e^{i\omega \varepsilon_v} = I_0(\omega) \varphi(\omega),$$

где  $\varphi(\omega) = e^{i\omega \varepsilon_v}$  — характеристическая функция смещений  $\varepsilon_v$ . В отсутствие разброса в моментах возникновения импульсов  $\varphi(\omega) = 1$ , и плотность сплошного спектра  $g_0(\omega)$  будет тогда

$$g_0(\omega) = \omega_0 [K_0(\omega) - |I_0(\omega)|^2] = \omega_0 [|\overline{\tilde{F}_v(\omega)}|^2 - |\tilde{F}_v(\omega)|^2].$$

С периодически-нестационарными процессами именно такого типа, как в рассмотренном примере, приходится сталкиваться, в частности, при изучении магнитных шумов в ферромагнетиках, помещенных в периодически меняющееся магнитное поле (шумов циклического перемагничивания) (см. [46], [47], гл. II и [48]).

### Задачи

1. Выразить функцию передачи  $k(i\omega)$  фильтра, согласованного с импульсом  $F(t)$ , через спектральную амплитуду этого импульса  $\tilde{F}(\omega)$  и найти спектральную плотность  $g_g(\omega)$  пуассоновского процесса на выходе согласованного фильтра.

Решение. Имеем

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

причем для вещественной функции  $F(t)$  спектральная амплитуда удовлетворяет условию  $\tilde{F}(-\omega) = \tilde{F}^*(\omega)$ . В соответствии с (50.18) и (50.21) импульсный отклик согласованного фильтра есть

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = F(t_0 - t) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega(t_0 - t)} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}^*(\omega) e^{i\omega(t - t_0)} d\omega, \end{aligned}$$

так что

$$k(i\omega) = 2\pi \tilde{F}^*(\omega) e^{-i\omega t_0}. \quad (1)$$

Следовательно, «функция корреляции»  $H_2(\chi)$  импульсного отклика [см. (50.6) и (50.20)] обладает спектральной амплитудой

$$\frac{1}{2\pi} |k(i\omega)|^2 = 2\pi |\tilde{F}(\omega)|^2. \quad (2)$$

Но по (42.9) такая же спектральная амплитуда и у «функции корреляции» исходного импульса  $F(t)$ :

$$\Psi_F(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) F(t + \tau) dt,$$

откуда следует, что  $H_2(\tau) = \Psi_F(\tau)$ .

Так как спектральная плотность пуассоновского процесса  $f(t) = \sum_{\nu} a_{\nu} F(t - t_{\nu})$  на входе фильтра есть

$$g_f(\omega) = 2\pi n_1 \overline{a^2} |\tilde{F}(\omega)|^2, \tag{3}$$

спектральная плотность на выходе, согласно (50.10) и (3), будет

$$g_{\xi}(\omega) = |k(i\omega)|^2 g_f(\omega) = 8\pi^3 n_1 \overline{a^2} |\tilde{F}(\omega)|^4 \tag{4}$$

[Напомним, что мы положили  $H(t) = F(t_0 - t)$ , не вводя никакого коэффициента пропорциональности]. Результат (4) следует, конечно, и непосредственно из (50.24), если учесть, что спектральная амплитуда импульсов  $F_{\xi}(t - t_{\nu}) = \Psi_F(t - t_0 - t_{\nu})$  на выходе фильтра дается формулой (2), а  $g_{\xi}(\omega)$  пропорционально (с коэффициентом  $2\pi n_1 \overline{a^2}$ ) квадрату модуля спектральной амплитуды импульса.

Очевидно, ширина полосы  $\Delta\omega$  всех функций (2) — (4) порядка  $1/\tau_{FK}$ .

2. Вычислить спектральные плотности (3) и (4) из предыдущей задачи для импульса

$$F(t) = e^{-2t^2/\theta^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}\right)$$

(см. задачу 6 гл. VI).

Решение. Найдем спектральную амплитуду импульса:

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2/\theta^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}\right) e^{-i\omega t} dt = \tilde{F}(\omega, \omega_0, \alpha) + \tilde{F}(\omega, -\omega_0, -\alpha),$$

где

$$\tilde{F}(\omega, \omega_0, \alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2t^2}{\theta^2} + i(\omega_0 - \omega)t + i\frac{\alpha t^2}{2}\right\} dt.$$

Пользуясь формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-ax^2 + i(px^2 + 2qx + r)\} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a^2 + p^2}} \exp\left\{-\frac{aq^2}{a^2 + p^2} + i\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{p}{q} + r - \frac{pq^2}{a^2 + p^2}\right)\right\},$$

получаем

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{\theta}{4\sqrt{2\pi} \sqrt{s}} \{\exp(-A_- + iB_-) + \exp(-A_+ - iB_+)\},$$

где

$$A_{\pm} = \frac{(\omega \pm \omega_0)^2 \theta^2}{8s}, \quad B_{\pm} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha \theta^2}{4} - \frac{\alpha \theta^2}{4} A_{\pm}, \quad s = 1 + \frac{\alpha^2 \theta^4}{16}.$$

Отсюда

$$|\tilde{F}(\omega)|^2 = \frac{\theta^2}{32\pi \sqrt{s}} \left\{ e^{-(\omega - \omega_0)^2 \theta^2 / 4s} + e^{-(\omega + \omega_0)^2 \theta^2 / 4s} + 2e^{-(\omega^2 + \omega_0^2) \theta^2 / 4s} \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{\alpha \theta^2}{4} - \frac{\alpha(\omega^2 + \omega_0^2) \theta^4}{8s}\right) \right\}.$$



Легко видеть, что третий член в фигурных скобках всегда мал по сравнению с единицей, т. е. с максимумами первого и второго членов, которые находятся на  $\omega = \pm\omega_0$  соответственно. Ширина этих максимумов на уровне  $1/e$  составляет

$$\Delta\omega = 4\sqrt{s}/\theta = 8/\tau_{F_K},$$

где  $\tau_{F_K}$  — эффективное «время корреляции» рассматриваемого импульса (см. задачу 6 гл. VI). Если  $\alpha\theta \gg 1/\theta$  (импульсы сложной формы), так что  $s \approx \alpha^2\theta^4/16 \gg 1$ , то  $\Delta\omega \approx \alpha\theta$ , т. е. ширина максимумов  $|\tilde{F}(\omega)|^2$  равна девиации частоты на длительности импульса  $\theta$ . Таким образом, спектральные плотности входного и выходного процессов приблизительно выражаются формулами

$$g_f(\omega) = \frac{n_1 \bar{a}^2 \theta^2}{16\sqrt{s}} \left\{ e^{-4(\omega-\omega_0)^2/(\Delta\omega)^2} + e^{-4(\omega+\omega_0)^2/(\Delta\omega)^2} \right\},$$

$$g_\xi(\omega) = \frac{\pi n_1 \bar{a}^2 \theta^4}{128s} \left\{ e^{-4(\omega-\omega_0)^2/(\Delta\omega)^2} + e^{-4(\omega+\omega_0)^2/(\Delta\omega)^2} \right\}^2.$$

3. Пусть над компонентами  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  двумерного стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  производится безынерционное нелинейное преобразование вида  $y_1(t) = f_1[x_1(t)]$ ,  $y_2(t) = f_2[x_2(t)]$ , дающее стационарный процесс  $\eta(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}$ . Пользуясь формулой (7), приведенной в задаче 15 гл. II, получить соотношение, связывающее моменты  $\alpha_{r+s}^\eta = \langle y_1^r(t) y_2^s(t+\tau) \rangle = \alpha_{r+s}^\eta(0, \dots, 0, \tau, \dots, \tau)$  процесса  $\eta(t)$  с кумулянтами  $\lambda_{p+q}^\xi(0, \dots, 0, \tau, \dots, \tau)$  исходного процесса  $\xi(t)$  [49].

Решение. Полагая в указанной формуле  $x = x_1(t)$ ,  $y = x_2(t+\tau) \equiv x_{2\tau}$ ,  $f(x, y) = f_1^r(x_1) f_2^s(x_{2\tau})$ , получаем

$$\frac{\partial^m \alpha_{r+s}^\eta}{(\partial \lambda_{p+q}^\xi)^m} = \frac{1}{(p!q!)^m} \left\langle \frac{d^{mp} f_1^r(x_1)}{dx_1^{mp}} \frac{d^{mq} f_2^s(x_{2\tau})}{dx_{2\tau}^{mq}} \right\rangle. \quad (1)$$

В частности, если  $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ , то

$$\frac{\partial^m \alpha_{r+s}^\eta}{(\partial \lambda_{p+q}^\xi)^m} = \frac{1}{(p!q!)^m} \left\langle \frac{d^{mp} f_1^r(x)}{dx^{mp}} \frac{d^{mq} f_2^s(x_\tau)}{dx_\tau^{mq}} \right\rangle, \quad (2)$$

где

$$\alpha_{r+s}^\eta = \langle y^r(t) y^s(t+\tau) \rangle.$$

При  $r=s=1$  и  $p=q=1$ , т. е. для смешанного момента второго порядка  $\alpha_{1+1}^\eta = \langle y(t) y(t+\tau) \rangle = B_\eta(\tau)$  процесса  $\eta(t)$  и для функции корреляции  $\lambda_{1+1}^\xi = x x_\tau - \bar{x}^2 \equiv \psi_\xi(\tau)$  исходного процесса  $\xi(t)$ , получаем из (2)

$$\frac{\partial^m B_\eta(\tau)}{[\partial \psi_\xi(\tau)]^m} = \left\langle \frac{d^m f_1(x)}{dx^m} \frac{d^m f_2(x_\tau)}{dx_\tau^m} \right\rangle. \quad (3)$$

Как ясно из вывода, эта формула справедлива при любом распределении  $\{x, x_\tau\}$ , а не только нормальном, при котором она была доказана первоначально [50].

Следует обратить внимание на то, что кумулянтные уравнения, выведенные в задачах 15 и 16 гл. II для случайных величин, остаются в силе и для случайных процессов, так как зависимость моментов и кумулянтов от времени ничего в них не меняет (уравнения не содержат производных по  $t$ ).

4. Найти для процесса  $\eta(t) = \beta \xi^2(t)$  на выходе квадратичного детектора выражение смешанного момента  $B_{\eta}(\tau) = \langle y(t)y(t+\tau) \rangle$  через кумулянты процесса  $\xi(t)$  на входе детектора [49].

Решение. Детектор преобразует величины  $x = x(t)$  и  $x_{\tau} = x(t+\tau)$  одинаковым образом, т. е. в формулах предыдущей задачи

$$f_1(x) = f_2(x) = \beta x^2.$$

Поэтому формула (2) предыдущей задачи принимает при  $r = s = 1$  и  $m = 1$  вид

$$\frac{\partial^2 B_{\eta}(\tau)}{\partial \lambda_{p+q}^{\xi}} = \frac{\beta^2}{p!q!} \left\langle \frac{d^p x^2}{dx^p} \frac{d^q x_{\tau}^2}{dx_{\tau}^q} \right\rangle, \quad (1)$$

откуда ясно, что значения  $p$  и  $q$  не должны превосходить 2.

Так как момент  $B_{\eta} = \langle yy_{\tau} \rangle = \langle x^2 x_{\tau}^2 \rangle$  выражается через кумулянты  $x$  и  $x_{\tau}$  не выше четвертого же порядка ( $1 \leq p + q \leq 4$ ) и, очевидно, симметричен относительно  $x$  и  $x_{\tau}$ , общий его вид таков:

$$B_{\eta}(\tau) = a \lambda_{2+2}^{\xi} + b (\lambda_{1+0}^{\xi} + \lambda_{0+1}^{\xi}) (\lambda_{2+1}^{\xi} + \lambda_{1+2}^{\xi}) + \\ + (\lambda_{1+0}^{\xi} + \lambda_{0+1}^{\xi})^2 [c (\lambda_{2+0}^{\xi} + \lambda_{0+2}^{\xi}) + d \lambda_{1+1}^{\xi}] + e (\lambda_{1+1}^{\xi})^2 + f (\lambda_{2+0}^{\xi} + \lambda_{0+2}^{\xi})^2.$$

Приравнивая выражения для производных  $B_{\eta}(\tau)$  по  $\lambda_{p+q}^{\xi}$ , вытекающие из этого выражения и из формулы (1), получаем

$$\frac{\partial B_{\eta}}{\partial \lambda_{2+2}^{\xi}} = a = \beta^2, \quad \frac{\partial B_{\eta}}{\partial \lambda_{2+1}^{\xi}} = \frac{\partial B_{\eta}}{\partial \lambda_{1+2}^{\xi}} = b (\lambda_{1+0}^{\xi} + \lambda_{0+1}^{\xi}) = 2\beta^2 \bar{x},$$

$$\frac{\partial B_{\eta}}{\partial \lambda_{2+0}^{\xi}} = \frac{\partial B_{\eta}}{\partial \lambda_{0+2}^{\xi}} = c (\lambda_{1+0}^{\xi} + \lambda_{0+1}^{\xi})^2 + 2f (\lambda_{2+0}^{\xi} + \lambda_{0+2}^{\xi}) = \beta^2 \bar{x}^2,$$

$$\frac{\partial B_{\eta}}{\partial \lambda_{1+1}^{\xi}} = d (\lambda_{1+0}^{\xi} + \lambda_{0+1}^{\xi})^2 + 2e \lambda_{1+1}^{\xi} = 4\beta^2 \overline{xx_{\tau}}.$$

Но  $\lambda_{1+0}^{\xi} = \lambda_{0+1}^{\xi} = \bar{x}$ ,  $\lambda_{2+0}^{\xi} = \lambda_{0+2}^{\xi} = \overline{x^2}$ ,  $\lambda_{1+1}^{\xi} = \overline{xx_{\tau}} - \bar{x}^2 = \psi_{\xi}(\tau)$ . С учетом этого получаем  $a = b = d = \beta^2$ ,  $c = 0$ ,  $f = \beta^2/4$ ,  $e = 2\beta^2$ , так что окончательно

$$B_{\eta}(\tau) = \beta^2 [\lambda_{2+2}^{\xi} + 2\bar{x} (\lambda_{2+1}^{\xi} + \lambda_{1+2}^{\xi}) + 4\bar{x}^2 \psi_{\xi}(\tau) + 2\psi_{\xi}^2(\tau) + (\bar{x}^2)^2].$$

Если процесс  $\xi(t)$  на входе детектора гауссов, то  $\lambda_{3}^{\xi} = 0$ ,  $\lambda_{4}^{\xi} = 0$ . Обозначив  $\overline{x^2} = \sigma^2$  и введя коэффициент корреляции  $[\psi_{\xi}(\tau) = \sigma^2 K(\tau)]$ , находим, что

$$B_{\eta}(\tau) = \beta^2 [4\bar{x}^2 \sigma^2 K(\tau) + 2\sigma^4 K^2(\tau) + \sigma^4].$$

Если к тому же  $\bar{x} = 0$ , то мы приходим к формуле (51.22):

$$\psi_{\eta}(\tau) = B_{\eta}(\tau) - \beta^2 \sigma^4 = 2\beta^2 \sigma^4 K^2(\tau).$$

5. Преобразовать формулу Найквиста для случая, когда в двухполоснике помещен генератор не тепловой стороной э. д. с.  $e(t)$ , а *стороннего тока*  $i(t)$ .

Решение. Генератор тока подключен к двухполюснику не последовательно, а параллельно, так что через разомкнутый двухполюсник течет ток  $i(t)$  и соответственно  $\tilde{i}(\omega)Z = \tilde{e}(\omega)$ . Отсюда

$$g^{(i)}(\omega) = g^{(e)}(\omega) / |Z|^2.$$

По формуле Найквиста  $g^{(e)}(\omega) = \frac{2}{\pi} kTR = \frac{2}{\pi} kT \operatorname{Re} Z$ , и, следовательно,

$$g^{(i)}(\omega) = \frac{2}{\pi} kT \operatorname{Re} Y,$$

где  $Y = 1/Z$  — адмитанс двухполюсника.

6. Состояние системы из двух связанных контуров (рис. 81) описывается токами  $I_j(t) = \dot{q}_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ . Установить связь между обобщенными тепловыми э. д. с.  $\mathcal{E}_j$ , сопряженными по Лагранжу с  $q_j$ , и локальными э. д. с.  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e$ , включенными соответственно в ветви с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R$ .

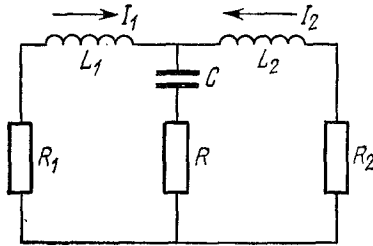


Рис. 81.

Решение. Через спектральные амплитуды токов и э. д. с. равенство напряжений на трех параллельных ветвях цепи записывается при включенных э. д. с.  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e$  в виде

$$\tilde{e}_1 + (i\omega L_1 + R_1) \tilde{I}_1 = -\tilde{e} + \left( \frac{1}{i\omega C} + R \right) (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) = \tilde{e}_2 - (i\omega L_2 + R_2) \tilde{I}_2.$$

Отсюда следуют уравнения Кирхгофа:

$$Z_{11} \tilde{I}_1 + Z_{12} \tilde{I}_2 = \tilde{e} + \tilde{e}_1 = \tilde{\mathcal{E}}_1, \quad Z_{21} \tilde{I}_1 + Z_{22} \tilde{I}_2 = \tilde{e} + \tilde{e}_2 = \tilde{\mathcal{E}}_2,$$

где

$$Z_{jj} = i\omega L_j + R_j + Z \quad (j = 1, 2), \quad Z_{12} = Z_{21} = Z = \frac{1}{i\omega C} + R. \quad (1)$$

Локальные тепловые э. д. с.  $\tilde{e}_1$ ,  $\tilde{e}_2$  и  $\tilde{e}$  взаимно некоррелированы, а их собственные спектральные плотности, согласно формуле Найквиста (54.6), равны

$$g_j^{(e)}(\omega) = \frac{2}{\pi} kTR_j \quad (j = 1, 2), \quad g^{(e)}(\omega) = \frac{2}{\pi} kTR.$$

Следовательно, для спектральных плотностей э. д. с.  $\tilde{\mathcal{E}}_1 = \tilde{e} + \tilde{e}_1$  и  $\tilde{\mathcal{E}}_2 = \tilde{e} + \tilde{e}_2$  получаем

$$g_j^{(\mathcal{E})}(\omega) = g^{(e)}(\omega) + g_j^{(e)}(\omega) = \frac{2}{\pi} kT (R + R_j) \quad (j = 1, 2), \quad (2)$$

$$g_{12}^{(\mathcal{E})}(\omega) = g^{(e)}(\omega) = \frac{2}{\pi} kTR.$$

Таким образом, корреляция между э. д. с.  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  обусловлена тем, что обе содержат локальную э. д. с.  $\tilde{e}$ . Разумеется, выражения (2) тотчас же вытекают и из общей формулы (54.10) и значений (1) для  $Z_{jk}$ .

7. Для рассмотренной в предыдущей задаче цепи (рис. 81) найти спектральные плотности обобщенных э. д. с.  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  в том случае, когда сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R$  находятся при разных температурах — соответственно  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T$ .

Решение. Для локальных э. д. с.  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e$  формула Найквиста теперь дает

$$g_j^{(e)}(\omega) = g^{(e)}(\omega) + g_j^{(e)}(\omega) = \frac{2}{\pi} k (TR + T_j R_j) \quad (j = 1, 2),$$

$$g_{12}^{(e)}(\omega) = g^{(e)}(\omega) = \frac{2}{\pi} k TR.$$

Эти формулы уже нельзя получить из «равновесной теоремы» (54.10).

8. В RC-цепи, изображенной на рис. 82, температуры сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  равны соответственно  $T_1$  и  $T_2$ . Найти спектральную плотность энергии

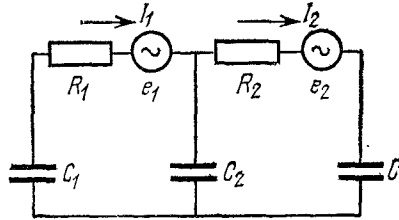


Рис. 82.

в емкостях  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C$ . Найти полные энергии в этих емкостях и показать, что при тепловом равновесии имеет место равномерное распределение энергии по степеням свободы.

Решение. Из уравнений Кирхгофа для данной цепи получаем следующие выражения для спектральных амплитуд токов  $I_1$  и  $I_2$  через спектральные амплитуды э. д. с.  $e_1$  и  $e_2$ :

$$\tilde{I}_1 = \frac{i\omega}{\Delta} [(i\omega R_2 + p_2) \tilde{e}_1 + p_2 \tilde{e}_2], \quad \tilde{I}_2 = \frac{i\omega}{\Delta} [p_2 \tilde{e}_1 + (i\omega R_1 + p_1) \tilde{e}_2], \quad (1)$$

где

$$\Delta = (i\omega R_1 + p_1)(i\omega R_2 + p_2) - p^2 = p_1 p_2 - p^2 - \omega^2 R_1 R_2 + i\omega(R_1 p_2 + R_2 p_1),$$

$$p_1 = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad p_2 = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_2}, \quad p = \frac{1}{C_2}.$$

Из (1) получаем спектральные плотности токов  $I_1$  и  $I_2$  и их разности  $I = I_1 - I_2$ :

$$g_1^{(I)}(\omega) = \frac{\omega^2}{|\Delta|^2} [(\omega^2 R_2^2 + p_2^2) g_1^{(e)}(\omega) + p_2^2 g_2^{(e)}(\omega)],$$

$$g_2^{(I)}(\omega) = \frac{\omega^2}{|\Delta|^2} [p_2^2 g_1^{(e)}(\omega) + (\omega^2 R_1^2 + p_1^2) g_2^{(e)}(\omega)],$$

$$g^{(I)}(\omega) = \frac{\omega^2}{|\Delta|^2} \{[\omega^2 R_2^2 + (p_2 - p)^2] g_1^{(e)}(\omega) + [\omega^2 R_1^2 + (p_1 - p)^2] g_2^{(e)}(\omega)\}.$$

Подставив сюда спектральные плотности э. д. с. (по частотам  $\omega \geq 0$ )

$$g_j^{(e)}(\omega) = \frac{1}{\pi} k T_j R_j \quad (j = 1, 2),$$

находим для спектральных плотностей электрической энергии в емкостях  $C_1, C_2$  и  $C$  выражения

$$U_1(\omega) = \frac{1}{2C_1\omega^2} g_1^{(l)}(\omega) = \frac{k}{2\pi C_1 |\Delta|^2} [(\omega^2 R_2^2 + p_2^2) R_1 T_1 + p^2 R_2 T_2],$$

$$U_2(\omega) = \frac{1}{2C_2\omega^2} g_2^{(l)}(\omega) = \frac{k}{2\pi C_2 |\Delta|^2} \{[\omega^2 R_2^2 + (p_2 - p)^2] R_1 T_1 + [\omega^2 R_1^2 + (p_1 - p)^2] R_2 T_2\},$$

$$U(\omega) = \frac{1}{2C\omega^2} g_2^{(l)}(\omega) = \frac{k}{2\pi C |\Delta|^2} [p^2 R_1 T_1 + (\omega^2 R_1^2 + p_1^2) R_2 T_2].$$

Интегралы вида  $U = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) d\omega$  легко берутся вычетами в соответствующих полюсах (нулях  $\Delta$ ) и равны соответственно

$$U_1 = \frac{A}{C_1} \{[(p_1 p_2 - p^2) R_2 + p_2^2 R_1] T_1 + p^2 R_2 T_2\},$$

$$U_2 = \frac{A}{C_2} \{[(p_1 p_2 - p^2) R_2 + (p_2 - p)^2 R_1] T_1 + [(p_1 p_2 - p^2) R_1 + (p_1 - p)^2 R_2] T_2\}, \quad (2)$$

$$U = \frac{A}{C} \{p^2 R_1 T_1 + [(p_1 p_2 - p^2) R_1 + p_1^2 R_2] T_2\},$$

$$A = k / \{2(p_1 p_2 - p^2)(R_1 p_2 + R_2 p_1)\}.$$

Если сложить все эти выражения, то получается полная электрическая энергия флуктуаций в цепи  $U_\Sigma$ , а именно:

$$U_\Sigma = U_1 + U_2 + U = k(T_1 + T_2)/2.$$

При тепловом равновесии ( $T_1 = T_2 = T$ ) это дает  $U_\Sigma = kT$ , как это и должно быть в рассматриваемой системе с одной степенью свободы. Следует отметить, что при равновесии энергии  $U_1, U_2$  и  $U$  не зависят от сопротивлений:

$$U_1 = \frac{kT p_2}{2C_1(p_1 p_2 - p^2)} = \frac{kT}{2} \frac{C + C_2}{C_1 + C_2 + C},$$

$$U_2 = \frac{kT(p_1 + p_2 - 2p)}{2C_2(p_1 p_2 - p^2)} = \frac{kT}{2} \frac{C + C_1}{C_1 + C_2 + C},$$

$$U = \frac{kT p}{2C(p_1 p_2 - p^2)} = \frac{kT}{2} \frac{C_1 + C_2}{C_1 + C_2 + C}.$$

При  $C_2 \rightarrow \infty$  цепь распадается на две независимые  $RC$ -ячейки с  $U_1 = kT_1/2$  и  $U = kT_2/2$ . Если уничтожить полстепени свободы, полагая, например,  $C_2 = 0$ , то, как следует из формул (2), при этом

$$U_1 = \frac{k(R_1 T_1 + R_2 T_2)}{2(R_1 + R_2)} \frac{C}{C + C_1}, \quad U_2 = 0, \quad U = \frac{k(R_1 T_1 + R_2 T_2)}{2(R_1 + R_2)} \frac{C_1}{C + C_1}.$$

Полная энергия определяется эффективной температурой:

$$U_{\Sigma} = U + U_1 = \frac{kT_e}{2}, \quad T_e = \frac{R_1 T_1 + R_2 T_2}{R_1 + R_2},$$

и делится между последовательно соединенными емкостями  $C$  и  $C_1$  обратно пропорционально их величинам. При тепловом равновесии теперь получается  $U_{\Sigma} = kT/2$ .

9. Рассмотреть условия квазистационарности для нормального процесса с равным нулю средним значением, если дисперсия и коэффициент корреляции зависят от времени по гауссовому закону:

$$\sigma^2(t) = \sigma_0^2 e^{-\alpha t^2/2t_K^2}, \quad K(t_1, t_2) = e^{-[\beta(t_1^2 + t_2^2) - 2\gamma t_1 t_2]},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  положительны и, в соответствии с условием  $|K| \leq 1$ ,  $\beta \geq \gamma$ .

Решение. Согласно (7.13) двумерное распределение есть

$$\begin{aligned} w_2(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2 = \\ = \frac{dx_1 dx_2}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-K^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{1-K^2}} \left[ \left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2K \frac{x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где  $\sigma_{1,2} = \sigma(t_{1,2})$ ,  $K = K(t_1, t_2)$ . Соответственно одномерное распределение есть

$$w_1(t, x) dx = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} e^{-x^2/2\sigma^2(t)}.$$

Смешанный момент второго порядка (т. е. функция корреляции, так как  $\bar{x} = 0$ ) равен

$$B(t_1, t_2) = \sigma(t_1)\sigma(t_2)K(t_1, t_2) = \sigma_0^2 \exp \left[ -\left(\frac{\alpha}{4t_K^2} + \beta\right)(t_1^2 + t_2^2) + 2\gamma t_1 t_2 \right].$$

Подставив сюда  $t_{1,2} = t \pm \tau/2$ , получаем

$$B_2(t, \tau) = \sigma_0^2 \exp \left[ -2t^2 \left(\frac{\alpha}{4t_K^2} + \beta - \gamma\right) - \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\alpha}{4t_K^2} + \beta + \gamma\right) \right].$$

Потребуем, чтобы смешанный момент  $B_2(t, \tau)$  имел вид

$$B_2(t, \tau) = \sigma_0^2 \exp \left( -\frac{t^2}{t_K^2} - \frac{\tau^2}{\tau_K^2} \right). \quad (1)$$

Легко видеть, что это будет при

$$\beta = \frac{1}{\tau_K^2} + \frac{1-\alpha}{4t_K^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\tau_K^2} - \frac{1}{4t_K^2}.$$

При таких значениях  $\beta$  и  $\gamma$  коэффициент корреляции равен

$$K(t, \tau) = \exp \left\{ -\frac{2-\alpha}{2t_K^2} t^2 - \left(\frac{1}{\tau_K^2} - \frac{\alpha}{8t_K^2}\right) \tau^2 \right\}.$$

Условие  $\beta \geq \gamma$  выполнено при  $\alpha \leq 2$ , положительность же  $\beta$  и  $\gamma$  обеспечена при  $t_K \geq \tau_K/2$ . В соответствии с определением квазистационарности будет иметь место при  $t_K \geq \tau_K$ . При этом условии можно приближенно считать

что  $\beta \approx \gamma \approx 1/\tau_k^2$ , и тогда

$$K(t, \tau) \approx \exp\left(-\frac{2-\alpha}{2t_k^2} t^2 - \frac{\tau^2}{\tau_k^2}\right).$$

При  $t_k \rightarrow \infty$  процесс становится стационарным. Вычисленная из (1) по формуле (57.9б) двумерная спектральная плотность есть

$$g_2(\Omega, \omega) = \frac{\sigma_0^2 t_k \tau_k}{4\pi} \exp\left[-\frac{1}{4}(\Omega^2 t_k^2 + \omega^2 \tau_k^2)\right].$$

Таким образом, линии равной плотности — эллипсы с полуосями  $C/t_k$  по  $\Omega$  и  $C/\tau_k$  по  $\omega$ .

10. Пусть нестационарный процесс  $f(t)$  воздействует на негармоническую линейную систему с импульсным откликом  $H(t, \theta)$ . Система предполагается диссипативной (нет параметрического возбуждения). При достаточном удалении момента наблюдения  $t$  от начального момента  $t_0$  отклик системы  $\xi(t)$  будет тогда *установившимся* (не зависящим от начальных условий), так как свободные колебания, которые могут возникнуть в начальный момент, успеют затухнуть.

Исходя из интеграла Дюамеля

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t H(t, \theta) f(\theta) d\theta, \quad (1)$$

выразить установившийся отклик через спектральную амплитудную плотность  $c_f(\omega)$  силы  $f(t)$  и мгновенную функцию передачи системы, которую мы определим из установившегося отклика  $k(t, i\omega)e^{i\omega t}$  на силу  $f(t) = e^{i\omega t}$ , т. е., согласно (1),

$$k(t, i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t, \theta) e^{i\omega(\theta-t)} d\theta. \quad (2)$$

Решение. Подставив разложения Фурье

$$f(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_f(\omega') e^{i\omega'\theta} d\omega', \quad H(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, i\omega) e^{i\omega(t-\theta)} d\omega$$

в интеграл (1) и выполнив интегрирование по  $\theta$ , получаем

$$\xi(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} k(t, i\omega) e^{i\omega t} c_f(\omega') e^{i(\omega'-\omega)(t+t_0)/2} \frac{\sin[(\omega'-\omega)(t-t_0)/2]}{\pi(\omega'-\omega)} d\omega d\omega'.$$

При отодвигании  $t_0$  в  $-\infty$  множитель с синусом переходит в  $\delta(\omega' - \omega)$ , так что для установившегося отклика находим

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, i\omega) c_f(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3)$$

В частном случае гармонической системы формула (2) дает

$$k(t, i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t - \theta) e^{i\omega(\theta - t)} d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\chi) e^{-i\omega\chi} d\chi = k(i\omega), \quad (4)$$

и тогда (3) превращается в интеграл Фурье с амплитудной плотностью

$$c_{\xi}(\omega) = k(i\omega) c_f(\omega)$$

— соотношение, из которого мы исходили в § 58.

11. Пользуясь результатом (3) предыдущей задачи, вычислить спектральную амплитудную плотность  $c_{\xi}(\omega)$  установившегося отклика и его двумерную спектральную плотность  $\gamma(\omega_1, \omega_2) = \langle c_{\xi}(\omega_1) c_{\xi}^*(\omega_2) \rangle$ .

Решение. Для нахождения  $c_{\xi}(\omega)$  достаточно разложить в интеграл Фурье по  $t$  мгновенную функцию передачи:

$$k(t, i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(i\omega_1, i\omega) e^{i\omega_1 t} d\omega_1, \quad (5)$$

откуда

$$k_2(i\omega_1, i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, i\omega) e^{-i\omega_1 t} dt. \quad (6)$$

Заметим, что для гармонической системы в силу (6) и (4)

$$k_2(i\omega_1, i\omega) = k(i\omega) \delta(\omega_1). \quad (7)$$

Подставляя (5) в (3), находим

$$c_{\xi}(\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_2[i(\omega_1 - \omega), i\omega] c_f(\omega) d\omega$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi}(\omega_1, \omega_2) &= \langle c_{\xi}(\omega_1) c_{\xi}^*(\omega_2) \rangle = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} k_2[i(\omega_1 - \omega), i\omega] k_2^*[i(\omega_2 - \omega'), i\omega'] \gamma_f(\omega, \omega') d\omega d\omega'. \end{aligned} \quad (8)$$

Если процесс  $f(t)$  на входе системы стационарен, так что

$$\gamma_f(\omega, \omega') = g_f(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (9)$$

то из (8) следует, что

$$\gamma_{\xi}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_2[i(\omega_1 - \omega), i\omega] k_2^*[i(\omega_2 - \omega), i\omega] g_f(\omega) d\omega. \quad (10)$$

Если система гармоническая, то с учетом (7) получаем из (8)

$$\gamma_{\xi}(\omega_1, \omega_2) = k(i\omega_1) k^*(i\omega_2) \gamma_f(\omega_1, \omega_2). \quad (11)$$



В обоих случаях (10) и (11) установившийся отклик нестационарен, распределение его спектральной «массы» двумерно. Только у гармонической системы при стационарном воздействии установившийся процесс на выходе стационарен: подстановка (7) в (10) или (9) в (11) дает

$$\gamma_{\xi}(\omega_1, \omega_2) = |k(i\omega_1)|^2 g_f(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2).$$

12. Показать, что при прохождении стационарного процесса через систему с медленно меняющимися параметрами на выходе устанавливается квазистационарный процесс.

Решение. У гармонической системы двумерная функция передачи содержит, согласно формуле (7) предыдущей задачи, дельта-функцию. Если же параметры системы не постоянны, но меняются медленно, то  $k_2(i\omega_1, i\omega)$  — острая функция, отличная от нуля только вблизи  $\omega_1 = 0$ . Запишем формулу (10) предыдущей задачи в переменных (57.7):

$$g_{2\xi}(\Omega, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_2 \left[ i \left( \omega - \frac{\Omega}{2} - \omega' \right), i\omega' \right] k_2^* \left[ i \left( \omega + \frac{\Omega}{2} - \omega' \right), i\omega' \right] g_f(\omega') d\omega'.$$

Отсюда ясно, что  $\omega'$  должна быть близка как к  $\omega - \Omega/2$  (иначе  $k_2 = 0$ ), так и к  $\omega + \Omega/2$  (иначе  $k_2^* = 0$ ), что возможно только при достаточной малости  $\Omega$ . Таким образом,  $g_{2\xi}(\Omega, \omega) \neq 0$  в узкой полосе около  $\Omega = 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

К предисловию, введению и главе I

1. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Статистические явления в нелинейной оптике, Изд-во МГУ, 1971.
2. А. М. Яглом, Введение в теорию стационарных случайных функций, УМН 7, вып. 5 (51) (1952).
3. A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, Théorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.
4. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.
5. М. С. Барглетт, Введение в теорию случайных процессов, ИЛ, 1958.
6. Ю. А. Розанов, Стационарные случайные процессы, Физматгиз, 1963.
7. А. А. Свешников, Прикладные методы теории случайных функций, «Наука», 1968.
8. Г. К. Крамер, М. Л. Лидбетгер, Стационарные случайные процессы, «Мир», 1969.
9. С. Карлин, Основы теории случайных процессов, «Мир», 1971.
10. В. Л. Лебедев, Случайные процессы в электрических и механических системах, Гостехиздат, 1958.
11. А. Ван-дер-Зил, Флуктуации в радиотехнике и физике, Госэнергониздат, 1958.
12. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. 2-е, «Сов. радио», 1960.
13. В. Б. Давенпорт, В. Л. Рут, Введение в теорию случайных процессов и шумов, ИЛ, 1960.
14. А. Ван-дер-Зил, Флуктуационные явления в полупроводниках, ИЛ, 1961.
15. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, «Сов. радио», 1961.
16. Л. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, «Сов. радио», т. I — 1961, т. II — 1962.
17. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, «Сов. радио», 1966.
18. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, «Наука», 1968.
19. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, кн. I, изд. 2-е, «Сов. радио», 1974.
20. Я. С. Шифрин, Вопросы статистической теории антенн, «Сов. радио», 1971.
21. М. Кендалл, П. Моран, Геометрические вероятности, «Наука», 1972.
22. А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, «Наука», 1974.

23. Л. И. Мандельштам, Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике, «Наука», 1972.
24. Р. Мизес, Вероятность и статистика, Гостехиздат, 1930.
25. М. А. Леонтович, Введение в термодинамику, Гостехиздат, 1951.
26. Г. С. Горелик, Некоторые применения второго закона термодинамики к электрическим флуктуациям, УФН 44, вып. 1, 33 (1951).
27. R. Clausius, Die mechanische Wärmetheorie, 2. Aufl., B. III, Braunschweig, 1891, S. 204.

## К главе II

1. N. Campbell, The Study of Discontinuous Phenomena, Proc. Camb. Phil. Soc. 15, 117 (1909); Discontinuities in Light Emission, *ibid.* 15, 310 (1909).
2. Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
3. E. N. Gilbert, H. O. Pollak, Amplitude Distribution of Shot Noise, Bell Syst. Techn. Journ. 39, п. 2, 333 (1960).
4. W. Schottky, Small-Shot Effect and Flicker Effect, Phys. Rev. 28, п. 1, 74 (1926).
5. А. Н. Малахов, К вопросу о спектре фликкер-шума, Радиотехника и электроника 4, вып. 1, 54 (1959).
6. C. Domb, Statistics of Correlated Events, Phil. Mag. (7), 41, п. 321, 969 (1950).
7. I. Bar-David, Statistics of Nonstationary Shot Processes and Fluctuations of Detected Signals, Proc. IEEE 56, п. 12, 2167 (1968).
8. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ИЛ, 1947.
9. R. L. Mitchell, Permanence of the Log-Normal Distribution, Journ. Opt. Soc. Am. 58, п. 9, 1267 (1968).
10. D. K. McGraw, J. F. Wagner, Elliptically Symmetric Distributions, IEEE Trans. IT-14, п. 1, 110 (1968).
11. А. Н. Малахов, Уравнения нелинейного преобразования негауссовых случайных величин, процессов и полей, Изв. вузов (радиофизика) 16, вып. 8, 1287 (1973).

## К главе III

1. А. Я. Хинчин, Теория корреляции стационарных стохастических процессов, УМН 5, вып. 5, 42 (1938).
2. Г. К. Крамер, М. Л. Лидбеттер, Стационарные случайные процессы, «Мир», 1969.
3. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.
4. С. М. Рылов, Об относительном времени пребывания нестационарного случайного процесса, Радиотехника и электроника 4, вып. 9, 1415 (1959).
5. А. А. Бобров, И. Н. Вербичкая, Об одном неравенстве для корреляционной функции стационарного в широком смысле случайного процесса и его

применении в эргодической теореме, Научн. ежегодник Одесского ун-та, вып. 2, 79 (1961).

6. А. М. Яглом, Введение в теорию стационарных случайных функций, УМН 7, вып. 5 (51) (1952).

#### К главе IV

1. А. Эйнштейн, М. Смолуховский, Сборник статей «Брауновское движение», ОНТИ, 1936.
2. С. Карлин, Основы теории случайных процессов, «Мир», 1971.
3. А. Н. Колмогоров, Аналитические методы теории вероятностей, УМН 5, вып. 5 (1938).
4. М. С. Барглетт, Введение в теорию случайных процессов, ИЛ, 1958.
5. М. А. Леонтович, Кинетическая теория газов с точки зрения теории случайных процессов, ЖЭТФ 5, вып. 2, 211 (1935).
6. Дж. В. Стретт (Лорд Релей), Теория звука, т. I, изд. 2-е, Гостехиздат, 1955.
7. М. А. Леонтович, Статистическая физика, Гостехиздат, 1944.
8. S. O. Rice, Mathematical Analysis of Random Noise, Bell Syst. Techn. Journ. 23, п. 6, 282 (1944), *ibid.* 24, п. 1, 46 (1945).
9. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. 2-е, «Сов. радио», 1960, гл. 4, § 4.
10. M. Nakagami, The M-Distribution, in «Statistical Methods in Radio Wave Propagation», Pergam. Press, 1960, p. 3.
11. P. Beckmann, Rayleigh Distribution and Its Generalizations, Journ. Res. NBS, sec. D, Radio Science, 68, п. 9, 927 (1964).
12. R. F. Pawula, Generalizations and Extensions of the Fokker — Planck — Kolmogorov Equations, IEEE Trans. IT-13, п. 1, 33 (1967).
13. А. Н. Колмогоров, Zum Umkehrbarkeit der statistischen Naturgeretze, Mat. Ann. 113, 766 (1937).
14. А. М. Яглом, О статистической обратимости брауновского движения, Матем. сб. 24 (66), вып. 3, 457 (1949).
15. Р. Л. Стратонович, Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, Изд-во МГУ, 1966.
16. Г. С. Горелик, К вопросу о технической и естественной ширине линии лампового генератора, ЖЭТФ 20, вып. 4, 351 (1950).
17. Ю. А. Кружков, Об одном частном случае брауновского вращательного движения, ДАН 3, 153 (1934); Брауновское вращательное движение частицы с осью симметрии, ДАН 1, 366 (1935).
18. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, О диффузии лучей в среде со случайными неоднородностями, Изв. вузов (радиофизика) 14, вып. 5, 706 (1971).
19. В. Феллер, К теории стохастических процессов, УМН 5, вып. 5, 57 (1938).
20. W. Feller, On the Integro-Differential Equations of Purely Discontinuous Markoff Processes, Trans. Am. Math. Soc. 48, 488 (1940); Errata, *ibid.* 58, 474 (1945).
21. D. Slepian, First Passage Time for a Particular Gaussian Process, Ann. Math. Statist. 32, n. 2, 610 (1961).

22. А. А. Боровков, О времени первого прохождения для одного класса процессов с независимыми приращениями, Теория вероятностей **10**, вып. 2, 331 (1965).
23. В. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, «Наука», 1970.
24. Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов, А. А. Витт, О статистическом рассмотрении динамических систем, ЖЭТФ **3**, вып. 3, 165 (1933).
25. D. A. Darling, A. J. Siebert, The First Passage Problem for a Continuous Markov Process, Ann. Math. Statist. **24**, n. 4, 624 (1953).
26. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.
27. М. С. Wang, G. E. Uhlenbeck, On the Theory of the Brownian Motion, II, Rev. Mod. Phys. **17**, n. 2—3, 323 (1945).
28. F. T. S. Yu, Markov Photographic Noise, Journ. Opt. Soc. Am. **59**, n. 3, 343 (1969).
29. N. G. van Kampen, I. Oppenheim, Expansion of the Master Equation of One-Dimensional Random Walks with Boundary, Journ. Math. Phys. **13**, n. 26, 842 (1972).

## К главе V

1. P. Langevin, Sur la théorie du mouvement brownien, Comptes Rendus (Paris) **146**, n. 10, 530 (1908).
2. В. В. Владимирский, Я. П. Терлецкий, Гидродинамическая теория поступательного брауновского движения, ЖЭТФ **15**, вып. 6, 258 (1945).
3. К. Ито, Г. Маккин, Диффузионные процессы и их траектории, «Мир», 1968.
4. Ю. А. Розанов, Случайные процессы, «Наука», 1971.
5. Р. Л. Стратонович, Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, Изд-во МГУ, 1966.
6. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, О диффузии лучей в среде со случайными неоднородностями, Изв. вузов (радиофизика) **14**, вып. 5, 706 (1971).
7. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики, УФН **110**, вып. 4, 499 (1973).
8. Е. А. Новиков, Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности, ЖЭТФ **47**, вып. 5 (11), 1919 (1964).
9. В. И. Кляцкин, Динамические системы с негауссовскими дельта-коррелированными флуктуациями параметров, Изв. вузов (радиофизика) **18**, вып. 10, 1454 (1975).
10. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Статистические средние в динамических системах, ТМФ **17**, вып. 2, 273 (1973).
11. D. B. Duncan, Response of Linear Time-Dependent Systems to Random Inputs, Journ. Appl. Phys. **24**, n. 5, 609 (1953).
12. J. N. Pierce, A Markoff Envelope Process, IRE Trans. **IT-4**, n. 4, 163 (1958).
13. C. W. Helstrom, Two Notes on a Markoff Envelope Process, IRE Trans. **IT-5**, n. 3, 139 (1959).

14. *C. T. Isley*, A Note on a Markoff Envelope Process, IRE Trans, IT-5, n. 3, 140, 186 (1959).
15. *Ф. В. Бункин*, О свойствах огибающей стационарного случайного процесса, Радиотехника и электроника 5, вып. 9, 1555 (1960). *В. И. Тихонов*, Марковский характер огибающей квазигармонических флуктуаций, Радиотехника и электроника 6, вып. 7, 1082 (1961). *R. Esposito*, A Generalization of a Markoff Envelope Process, Proc. IEEE 51, n. 12, 1792 (1963).

## К главе VI

1. *D. Gabor*, Theory of Communication, Journ. Inst. Electr. Eng'rs (London), P. III, 93, 429 (1946).
2. *G. S. Agarwal, E. Wolf*, Relation between the Statistical Representations of Real and Associated Complex Fields in Optical Coherence Theory, Journ. Math. Phys. 13, n. 11, 1759 (1972).
3. *J. Toll*, Causality and the Dispersion Relation: Logical Foundations, Phys. Rev. 104, n. 6, 1760 (1956).
4. *А. Я. Хинчин*, Korrelation Theorie des Stationären stochastischen Prozesse, Math. Annalen 109, 604 (1934). (Русск. перев. — см. ссылку [1] к гл. III.)
5. *А. Н. Колмогоров*, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ, т. II, вып. 6, 1941.
6. *S. Bochner*, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.
7. *А. Г. Майер, Е. А. Леонтович*, Об одном неравенстве, связанном с интегралом Фурье, ДАН 4, вып. 7, 353 (1934).
8. *C. Heiden*, Power Spectrum of Stochastic Pulse Sequences, Phys. Rev. 188, n. 1, 319 (1969).
9. *R. Fortet*, Spectre moyen d'une suite d'impulsions en principe périodiques et identiques, mais déplacées et deformées aléatoirement, L'onde électrique 34, n. 329—330, 683 (1954).
10. *I. Korn*, A Simple Derivation of the Autocorrelation of a Random Pulse Train, Proc. IEEE 58, n. 6, 955 (1970).
11. *И. Л. Берштейн*, О флуктуациях вблизи периодического движения автоколебательной системы, ДАН 20, вып. 1, 11 (1938); Флуктуации в автоколебательной системе и определение естественной размытости частоты лампового генератора, ЖТФ 11, вып. 4, 305 (1941).
12. *И. Л. Берштейн*, О флуктуациях в ламповом генераторе, ДАН 68, вып. 3, 469 (1949); Флуктуации амплитуды и фазы лампового генератора, Изв. АН СССР (сер. физ.) 14, вып. 2, 145 (1950).
13. *R. C. Bourret*, Coherence Properties of Blackbody Radiation, Nuovo Cimento 18, n. 2, 347 (1960).
14. *Y. Kano, E. Wolf*, Temporal Coherence of Black Body Radiation, Proc. Phys. Soc. 80, n. 518, 1273 (1962).
15. *Л. И. Мандельштам*, Лекции по теории колебаний, «Наука», 1972.
16. *Л. И. Мандельштам*, Лекции по оптике теории относительности и квантовой механике, «Наука», 1972.

17. С. М. Рытов, О некоторых парадоксах, связанных со спектральными разложениями, УФН 29, вып. 1—2, 147 (1946).
18. J. Dugundji, Envelopes and Pre-Envelopes of Real Waveforms, IRE Trans. IT-4, n. 1, 53 (1958).
19. P. R. Karr, R. Woodriddle, An Inequality Concerning the Envelope of Correlation Function, IRE Trans. IT-5, n. 1, 33 (1959).
20. Б. П. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. 2-е, «Сов. радио», 1960.
21. Ю. Е. Дьяков, Некоторые статистические характеристики огибающей и фазы нестационарного гауссового процесса. Радиотехника и электроника 8, вып. 11, 1812 (1963).
22. A. Blanc-Lapierre, M. Savelli, A. Tortrat, Étude des modèles statistiques suggérés par la considération des effets des atmosphériques sur les amplificateurs, Ann. télécomm. 9, n. 9, 237 (1954).
23. Ф. В. Бункин, Л. И. Гудзенко, Об одномерных распределениях амплитуды и фазы стационарного процесса, Радиотехника и электроника 3, вып. 7, 968 (1958).
24. С. М. Рытов, Связь распределения квазимонохроматического процесса с распределением его огибающей, ЖЭТФ 29, вып. 5 (11), 702 (1955).
25. А. Н. Малахов, О форме спектральной линии генератора при флуктуациях его частоты, ЖЭТФ 30, вып. 5, 384 (1956).
26. М. И. Родак, О рассеянии немонохроматического излучения на блуждающих неоднородностях, Радиотехника и электроника 5, вып. 9, 1370 (1960).
27. В. С. Троицкий, В. В. Хрулев, Измерение спектральной ширины линии клистронного генератора на волне 3,2 см, Радиотехника и электроника 1, вып. 6, 831 (1956).
28. Н. Винер, Нелинейные задачи в теории случайных процессов, ИЛ, 1961.
29. Ю. Э. Аптэк, А. М. Гершт, К вопросу о крыльях спектра квазигармонического сигнала. Изв. вузов (радиофизика) 6, вып. 2, 311 (1963).
30. А. М. Гершт, О спектре квазигармонического сигнала при достаточно общих предположениях относительно закона распределения флуктуаций частоты, Изв. вузов (радиофизика) 7, вып. 4, 701 (1964).
31. Я. И. Хургин, Спектр импульсных случайных процессов с независимыми интервалами и ширина спектральных линий импульсных автоколебаний. Научн. докл. высш. школы (радиотехника и электроника) 1, 96 (1958).
32. В. П. Яковлев, Некоторые асимптотические свойства гауссового случайного процесса, Радиотехника и электроника 5, вып. 10, 1728 (1960).
33. Б. С. Цыбаков, В. П. Яковлев, Ширина спектральных линий мультивибратора, Радиотехника и электроника 4, вып. 3, 543 (1959).
34. С. М. Рытов, К теории флуктуаций в автоколебательных системах с кусочно-линейными характеристиками, Изв. вузов (радиофизика) 2, вып. 1, 50 (1959).
35. С. М. Рытов, О спектре квазипериодического случайного процесса, Изв. вузов (радиофизика) 2, вып. 1, 45 (1959).
36. A. Blanc-Lapierre, P. Dumontet, Sur la notion de cohérence en optique, Comptes Rendues (Paris) 238, n. 9, 1005 (1954).

37. *E. Wolf*, A Macroscopic Theory of Interference and Diffraction of Light from Finite Source, II, Proc. Roy. Soc. (London) **A230**, п. 1181, 246 (1955).
38. *P. H. van Cittert*, Degree of Coherence, *Physica* **24**, п. 6, 505 (1958).
39. *Г. С. Горелик*, Колебания и волны, изд. 2-е, Физматгиз, 1959, гл. 10.
40. *L. Mandel, E. Wolf*, Coherence Properties of Optical Fields, Rev. Mod. Phys. **37**, п. 2, 231 (1965).
41. *Ф. Франсон, С. Сланский*, Когерентность в оптике, «Наука», 1967.
42. *М. Борн, Э. Вольф*, Основы оптики, «Наука», 1970, гл. 7 и 10.
43. *B. J. Thompson, E. Wolf*, Two-Beam Interference with Partially Coherent Light, Journ. Opt. Soc. Am. **47**, п. 10, 895 (1957).
44. *H. Nodtvedt*, The Correlation Function in the Analysis of Directive Wave Propagation, Phil. Mag. **42**, п. 332, 1022 (1951).
45. *Г. С. Горелик*, О возможности малоинерционного фотометрирования и демодуляционного анализа света, ДАН **58**, вып. 1, 45 (1947); О демодуляционном анализе света, УФН **34**, вып. 3, 321 (1948). *С. И. Боровицкий, Г. С. Горелик*, Гетеродинамирование света, УФН **59**, вып. 3, 543 (1956).
46. *R. H. Brown, R. Q. Twiss*, A New Type of Interferometer for Use in Radio Astronomy, Phil. Mag. **45**, п. 366, 663 (1954).
47. *R. H. Brown, R. Q. Twiss*, A Test of a New Type of Stellar Interferometer on Sirius, Nature **178**, п. 4541, 1046 (1956); Interferometer of the Intensity Fluctuations in Light, III, IV, Proc. Roy. Soc. **A248**, п. 1253, 199, 222 (1958).
48. *Р. Х. Браун*, Измерение угловых диаметров звезд, УФН **108**, вып. 3, 529 (1972).
49. *Л. И. Мандельштам*, Полное собрание трудов, Изд-во АН СССР, т. II, 1947, статьи 44, 45, 47 и 48; т. III, 1950, статьи 63 и 66.
50. *С. М. Рылов*, Флуктуации в автоколебательных системах томсоновского типа, I и II, ЖЭТФ **29**, вып. 3 (9), 304 и 315 (1955).
51. *А. Н. Малахов*, Флуктуации в автоколебательных системах, «Наука», 1968.
52. *B. E. A. Saleh*, Average Form of Polarization of Partially Polarized Gaussian Light, Journ. Opt. Soc. Am. **63**, п. 4, 422 (1972).
53. *W. H. Carter, E. Wolf*, Degree of Polarization and Intensity Fluctuations in Thermal Light Beams, Journ. Opt. Soc. Am. **63**, п. 12, 1619 (1973).
54. *W. F. McGee*, Complex Gaussian Noise Moments, IEEE Trans. **IT-17**, п. 2, 149 (1971).
55. *I. S. Reed*, On a Moment Theorem for Complex Gaussian Processes, IRE Trans. **IT-8**, п. 3, 194 (1962).
56. *А. А. Бобров, И. Н. Вербицкая*, Об одном неравенстве для корреляционной функции стационарного в широком смысле случайного процесса и его применении в эргодической теореме, Научн. ежегодник Одесского ун-та, вып. 2, 79 (1961).
57. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4-е, Физматгиз, 1962, стр. 499.
58. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, «Наука», 1969.



## К главе VII

1. A. Papoulis, Narrow-Band Systems and Gaussianity, IEEE Trans. IT-18, п. 1, 20 (1972).
2. Л. П. Зачеицкая, О возможности денормализации случайных процессов некоторыми инерционными линейными системами, Радиотехника и электроника 13, вып. 8, 1452 (1968).
3. Н. П. Боброва, Л. П. Зачеицкая, И. Н. Созинов, О денормализации случайных процессов в дисперсионной линейной системе, Изв. вузов (радиофизика) 14, вып. 1, 103 (1971).
4. Л. П. Зачеицкая, О возможной некорректности замены асимптотически нормальных случайных процессов строго нормальными при инерционном линейном преобразовании, Радиотехника и электроника 16, вып. 4, 627 (1971).
5. Я. Д. Ширман и др., Теоретические основы радиолокации, «Сов. радио», 1970.
6. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, «Сов. радио», 1966, гл. 8.
7. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, «Сов. радио», 1961.
8. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков, Выделение сигналов на фоне случайных помех, «Сов. радио», 1960.
9. С. Е. Фалькович, Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных шумов, «Сов. радио», 1961.
10. П. А. Бакут, И. А. Большаков и др., Вопросы статистической теории радиолокации, «Сов. радио», т. I — 1963, т. II — 1964.
11. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, т. II, «Сов. радио», 1962.
12. S. O. Rice, Mathematical Analysis of Random Noise, Bell Syst. Techn. Journ. 23, п. 6, 282 (1944); 24, п. 1, 46 (1945).
13. С. М. Рылов, Флуктуации в автоколебательных системах томсоновского типа, I и II, ЖЭТФ 29, вып. 3 (9), 304 и 315 (1955).
14. K. Furutsu, On the Statistical Theory of Electromagnetic Waves in a Fluctuating Medium, Journ. Res. NBS D-67, п. 3, 303 (1963). Е. А. Новиков, Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности, ЖЭТФ 47, вып. 5 (11), 1919 (1964).
15. Л. И. Гудзенко, О флуктуациях в ламповом генераторе при наличии сеточного тока, Радиотехника и электроника 1, вып. 9, 1240 (1956).
16. Л. И. Гудзенко, О флуктуациях амплитуды автономного лампового генератора, Радиотехника и электроника 4, вып. 1, 97 (1959).
17. С. Я. Раевский, Р. В. Хохлов, О синхронизации автогенератора синусоидальной силой при наличии флуктуационных помех, Радиотехника и электроника 3, вып. 4, 507 (1958).
18. И. Г. Акоюян, Р. Л. Стратонович, Установление синхронной фазы и амплитуды в синхронизируемом автогенераторе при наличии флуктуационных помех, Научн. докл. высш. школы (сер. физ.-матем.) 1, вып. 1, 162 и 187 (1958).

19. М. Е. Жаботинский, П. Е. Зильберман, О флуктуациях в кварцевом генераторе, ДАН 119, вып. 5, 918 (1958).
20. А. Н. Малахов, Флуктуации амплитуды и частоты и естественная ширина спектральной линии в автоколебательных системах со многими степенями свободы, Изв. вузов (радиофизика) 1, вып. 2, 79 (1958).
21. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, «Наука», 1968.
22. Г. С. Горелик, Нелинейные колебания, интерференция и флуктуации, Изв. АН СССР (сер. физ.) 14, вып. 2, 187 (1950).
23. J. B. Johnson, Thermal Agitation of Electricity in Conductors, Nature 119, n. 2984, 50 (1927); Phys. Rev. 29, n. 2, 367 (1927); *ibid.* 32, n. 6, 97 (1928).
24. H. Nyquist, Thermal Agitation in Conductors, Phys. Rev. 29, n. 4, 614 (1927); *ibid.* 32, n. 6, 110 (1928).
25. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, Изд-во АН СССР, 1953.
26. R. Q. Twiss, Nyquist's and Thevenin's Theorems Generalized for Nonreciprocal Networks, Journ. Appl. Phys. 26, n. 5, 599 (1955).
27. H. B. Callen, T. A. Welton, Irreversibility and Generalized Noise, Phys. Rev. 83, n. 1, 34 (1951) [см. также J. L. Jackson, Phys. Rev. 87, n. 3, 471 (1952)].
28. H. B. Callen, R. F. Green, On a Theorem of Irreversible Thermodynamics, I, II, Phys. Rev. 86, n. 5, 704 (1952); *ibid.* 88, n. 6, 1387 (1952).
29. H. B. Callen, M. L. Barasch, Statistical Mechanics of Irreversibility, Phys. Rev. 88, n. 6, 1382 (1952).
30. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
31. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, изд. 3-е, «Наука», ч. I, 1976.
32. W. Bernard, H. B. Callen, Irreversible Thermodynamics of Nonlinear RC-System, Phys. Rev. 118, n. 6, 1466 (1960).
33. Ф. В. Бункин, О тепловых флуктуациях в нелинейных системах, Радиотехника и электроника 6, вып. 1, 3 (1961).
34. А. Н. Колмогоров, Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений, ДАН 26, 6 (1940).
35. А. Н. Колмогоров, Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве, ДАН 26, 115 (1940).
36. А. М. Яглом, Корреляционная теория процессов со случайными стационарными  $n$ -ми приращениями, Матем. сб. (новая сер.) 37, вып. 1, 141 (1955).
37. R. A. Silverman, Locally Stationary Random Processes, IRE Trans. IT-3, n. 3, 182 (1957).
38. W. D. Mark, Spectral Analysis of the Convolution and Filtering of Non-Stationary Processes, Journ. Sound. a. Vibr. 11, n. 1, 19 (1970).
39. F. Donati, Finite-Time-Averaged Power Spectra, IEEE Trans. IT-17, n. 1, 7 (1971).

40. A. W. Rihaczek, Signal Energy Distribution in Time and Frequency, IEEE Trans. IT-14, n. 3, 369 (1968).
41. A. W. Rihaczek, Finite-Time-Averaged Power Spectra and Signal Energy Distribution in Time and Frequency, IEEE Trans. IT-18, n. 1, 208 (1972).
42. M. H. Ackroyd, Short-Time Spectra and Time-Frequency Energy Distributions, Journ. Ac. Soc. Am. 50, n. 5, p. 1, 1229 (1971).
43. Л. И. Гудзенко, Флуктуации в автоколебательных системах, Канд. дисс. (Физич. институт АН СССР, 1961); Малые флуктуации в существенно нелинейной автоколебательной системе, ДАН 125, вып. 1, 62 (1959).
44. Л. И. Гудзенко, О периодически-нестационарных случайных процессах, Радиотехника и электроника 4, вып. 6, 1062 (1959).
45. R. Fortet, Spectre moyen d'une suite d'impulsions en principe périodiques et identiques, mais déplacées et déformées aléatoirement, L'onde électrique 34, n. 329—330, 683 (1954).
46. Ф. В. Бункин, К теории эффекта Баркгаузена в периодически меняющемся поле, Радиотехника и электроника 4, вып. 11, 1913 (1959).
47. Н. Н. Колачевский, Исследование статистических явлений в процессах циклического перемагничивания ферромагнетиков, Канд. дисс. (Моск. физ.-техн. институт, 1960).
48. Н. Н. Колачевский, Магнитные шумы, «Наука», 1971.
49. А. Н. Малахов, Уравнения нелинейного преобразования негауссовых случайных величин, процессов и полей, Изв. вузов (радиофизика) 16, вып. 8, 1287 (1973).
50. R. A. Price, A Useful Theorem for Non-Linear Devices Having Gaussian Input, IRE Trans. IT-4, n. 1, 69 (1958).