

М.У. САГИТОВ

ЛУННАЯ ГРАВИМЕТРИЯ



М. У. САГИТОВ

ЛУННАЯ ГРАВИМЕТРИЯ



Москва «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
1979

22.654

C13

УДК 523.3

Сагитов М. У. Лунная гравиметрия.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 432 с.

Монография, посвященная исследованиям гравитационного поля Луны, проведенным по наблюдениям движений искусственных спутников Луны и единственным измерениям силы тяжести непосредственно на лунной поверхности. Рассмотрено несколько способов численно-аналитического представления гравитационного поля. Построены поверхности равного потенциала силы тяжести, радиального градиента силы тяжести. Исследована общая геометрическая, динамическая, гравиметрическая и гидростатическая равновесная фигуры Луны. Изучено распределение масс внутри Луны, в том числе масконы.

Монография по этим проблемам является первой в мировой литературе. Она предназначена для астрономов, геофизиков, а также лиц смежных специальностей, занимающихся изучением Луны. Книга может служить пособием для аспирантов и студентов старших курсов астрономических и геофизических специальностей университетов.

Табл. 49, илл. 87, библи. 527.

C $\frac{20604-138}{053(02)-79}$ 194-79. 1705050000

© Главная редакция
физико-математической
литературы издательства
«Наука», 1979

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Гравитационное поле Луны и методы его численно-аналитического представления	9
§ 1. Закон всемирного тяготения и различные гравитационные постоянные	9
§ 2. Понятия об орбитальном движении и вращении Луны	14
§ 3. Потенциал притяжения Луны и потенциал приливцентробежных сил. Сила тяжести	28
§ 4. Величины, с помощью которых характеризуется гравитационное поле Луны	36
§ 5. Некоторые замечания по поводу разложения в ряд по сферическим функциям	42
§ 6. Разложение в ряд по выборочным функциям	48
§ 7. Другие виды численно-аналитического представления гравитационного поля Луны	59
Глава 2. Методы изучения гравитационного поля Луны	70
§ 8. Сравнение методов изучения лунного и земного гравитационных полей	70
§ 9. Элементы орбиты ИСЛ и понятие о возмущениях в движении вследствие неоднородности гравитационного поля Луны	73
§ 10. Методы определения гармонических коэффициентов гравитационного поля из наблюдений ИСЛ	84
§ 11. Оценка величин лучевых ускорений, возникающих из-за вращения Земли и орбитальных движений Луны и ИСЛ	92
§ 12. Изучение гравитационного поля по вариациям лучевой скорости окололунного спутника	104
§ 13. Принципиальные схемы приборов для измерения силы тяжести и требования к лунным гравиметрам	116
§ 14. Измерение силы тяжести непосредственно на лунной поверхности	122

§ 15. Об изучении вторых производных гравитационного потенциала Луны	130
§ 16. О комбинированном методе определения гравитационного поля Луны	137
§ 17. Задачи, решаемые по непосредственным измерениям характеристик гравитационного поля . .	139
§ 18. Результаты определений гармонических коэффициентов гравитационного поля Луны	143
Г л а в а 3. Нормальное и аномальное гравитационное поле Луны	161
§ 19. Структура гравитационного поля и его роль в формировании Луны	161
§ 20. Разложение в ряд по сферическим функциям производных потенциала силы тяжести Луны . . .	164
§ 21. Разложение для силы тяжести	169
§ 22. Селеноид	173
§ 23. Фигура нормальной Луны	180
§ 24. Распределение нормальной силы тяжести . . .	186
§ 25. Поверхности равной силы тяжести и равного ее радиального градиента	192
§ 26. Аномалии гравитационного поля Луны	197
§ 27. Связь между коэффициентами разложения различных характеристик гравитационного поля и фигуры Луны	202
Г л а в а 4. Анализ гравитационного поля Луны	207
§ 28. Статистические характеристики в методах ковариационного анализа гравитационного поля . .	207
§ 29. Порядковые дисперсии и ковариационные функции различных характеристик гравитационного поля и фигуры Луны	215
§ 30. Порядковые дисперсии для горизонтальных составляющих притяжения Луны	221
§ 31. Сравнительный анализ лунного и земного гравитационных полей	225
§ 32. Сравнение видимой и обратной сторон Луны . .	237
§ 33. Рельеф и гравитационное поле Луны	247
Г л а в а 5. Использование гравитационного поля для решения селенодезических задач	261
§ 34. Селеноцентрическая гравитационная постоянная, масса и средняя плотность Луны	261
§ 35. Центр фигуры и центр масс Луны	273

§ 36. Общая геометрическая фигура Луны	280
§ 37. Динамическая фигура Луны	284
§ 38. Гидростатически равновесная фигура Луны . .	300
§ 39. Гравиметрическая фигура и распределение укло- нений отвеса на Луне	308
Г л а в а 6. Внутреннее строение Луны и использование для его изучения гравитационного поля	315
§ 40. Общие замечания	315
§ 41. Плотность грунта Луны	317
§ 42. Параметр плотностной неоднородности	324
§ 43. Плотностная модель Луны	331
§ 44. Изменение силы тяжести, ее радиального градиен- та и давления с глубиной	341
§ 45. Сейсмичность Луны и ее общее внутреннее строе- ние	344
§ 46. Масконы	351
§ 47. Приливные изменения гравитационного поля и его использование для изучения недр Луны . . .	364
§ 48. Происхождение и эволюция Луны	389
Литература	404

ПРЕДИСЛОВИЕ

Гравиметрия (от лат. *gravis* — тяжелый и греч. *μετρέω* — измеряю) — наука о гравитационном поле Земли и планет и об изучении при его помощи их фигуры и внутреннего строения. Гравитационное поле используется также для расчета полета ракет и искусственных спутников и в инерциальной навигации. Раздел гравиметрии, изучающий Луну, называется лунной гравиметрией. Эффективность гравиметрических методов привела к быстрому развитию гравиметрии, что привело, в частности, к формированию лунной гравиметрии.

Гравиметрия, как и другие естественные науки, основывается на измерениях, и ее прогресс тесно связан с повышением точности измерений. В земных условиях ныне сила тяжести измеряется с предельной точностью $\sim 10^{-6}$ см·с⁻², а ее градиенты $\sim 10^{-11}$ см·с⁻²/см. С запуском искусственных спутников возникли качественно новые методы изучения гравитационного поля Земли и планет.

Аномальная часть гравитационного поля стала определяться по наблюдениям возмущений в движениях спутников. Общие принципы измерения величин, характеризующих гравитационное поле, остаются для Луны такими же, как и для Земли, однако имеются существенные специфические различия. Развитые для Земли теория фигуры и теория внутреннего строения не всегда могут быть прямо применены к Луне в силу ряда причин. Так, для Луны часто исходными величинами, характеризующими ее гравитационное поле, являются лучевые компоненты ускорения притяжения, определяемые по доплеровским наблюдениям только для ее видимой стороны.

Сведения о гравитационном поле на обратной стороне Луны пока получаются менее уверенно. Имеются только единичные измерения силы тяжести непосредственно на Луне. Кроме того, гравитационное поле Луны отличается

от земного не только тем, что сила тяжести на ней по абсолютной величине меньше земной в шесть раз, но и по спектру аномалий силы тяжести. Непригодны некоторые разложения в ряды, сделанные для земного гравитационного поля, в силу отсутствия ярко выраженного сжатия у Луны и соответствующей ему доминирующей гармонике гравитационного поля. Тем не менее при всех различиях следует подчеркнуть, что физические и математические основы теории и методов гравиметрии Земли остаются приемлемыми и для лунной гравиметрии.

Гравиметрическое изучение Луны обогащает и земные исследования. Можно назвать результаты, впервые установленные на Луне при помощи гравиметрических методов, а затем уже обнаруженные на Земле.

Создаваемая аппаратура для измерения градиентов гравитационного притяжения на Луне несомненно будет полезной для изучения гравитационного поля Земли. Всем понятно значение изучения Луны для познания природы, происхождения и эволюции Земли.

За более чем десять лет активного гравиметрического изучения Луны накопился большой материал, опубликованный в различных изданиях. Возникла необходимость его некоторого обобщения, что и попытался сделать автор в этой книге. Не все разделы книги написаны с одинаковой детальностью из-за различной степени изученности рассматриваемых вопросов. Некоторую роль в этом сыграли и интересы автора.

Автор снабдил книгу большим числом таблиц, в том числе составленными им сводными таблицами, которые могут помочь читателям в их работе. Иногда по большому числу различных определений некоторых величин выведены их средние значения. Следуя старинной китайской поговорке «Одна картинка заменяет десять тысяч слов», мы поместили в книге довольно большое число рисунков.

При написании книги автор использовал материалы лекций по лунной гравиметрии, которые он в течение нескольких лет читал на астрономическом отделении физического факультета Московского университета.

Отдельные главы рукописи книги были прочитаны проф. В. В. Броваром, проф. Е. И. Поповым и ст. научным сотрудником И. И. Калининским. Они высказали ряд полезных советов, которые были учтены автором.

Неоценимую помощь автору в многочисленных расчетах, построении графиков и оформлении всей рукописи к печати оказала инженер Т. И. Дмитриева. Вычисления на ЭВМ и оформление рукописи производили старшие инженеры Х. Г. Таджидинов и Е. А. Монахов. В подборе литературы по лунной гравиметрии помог доц. А. П. Юзефович. Большую редакторскую работу провела кандидат физико-математических наук Н. А. Чуйкова. Ценными были общие и конкретные замечания рецензента рукописи проф. В. Н. Жаркова. Всем названным лицам автор выражает свою признательность.

Автор будет благодарен за замечания, которые можно направлять по адресу: Москва, 234, Университетский пр., 13, Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга МГУ, отдел гравиметрии.

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЛУНЫ И МЕТОДЫ ЕГО ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ 1. Закон всемирного тяготения и различные гравитационные постоянные

Гравиметрия базируется на законе всемирного тяготения, согласно которому две материальные частицы притягиваются друг к другу с силой F , прямо пропорциональной массам m и m_1 этих частиц и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F = G \frac{mm_1}{r^2}, \quad (1.1)$$

где G — *постоянная тяготения*, или *гравитационная постоянная*. В механике сила определяется по второму закону Ньютона как произведение массы m_1 на ускорение a :

$$F = m_1 a. \quad (1.2)$$

Сила имеет следующую размерность: $[F] = [M][L][T]^{-2}$, где M — масса, L — длина, T — время.

Чтобы сила F в формуле (1.1) имела ту же размерность, что в формуле (1.2), надо положить размерность G равной

$$G = [M]^{-1}[L]^3 [T]^{-2}.$$

Массы m_1 в формулах (1.1) и (1.2) имеют различные свойства. В первой из них она обладает свойством гравитационного взаимодействия, а во второй выполняет функцию меры инерции. Предполагается, что гравитационная масса (в законе тяготения) и инерционная (во втором законе Ньютона) эквивалентны. В этом состоит принцип эквивалентности, который проверялся экспериментально Л. Этвешем, Я. Реннером, В. Дике и В. Б. Брагинским. Последним было показано, что с относительной точностью 10^{-12} этот принцип выполняется. Вопрос соблюдения принципа с более высокой точностью остается пока открытым.

Кратко остановимся на истории открытия закона тяготения [13], которая тесно связана с историей изучения Луны. Закон всемирного тяготения в том виде, как он используется до сих пор, впервые был сформулирован И. Ньютоном (1643—1727) в фундаментальном трактате «Математические начала натуральной философии», вышедшем в свет в 1687 г. Закон изменения притяжения между телами пытались установить ряд ученых и до Ньютона. Но их представления были больше умозрительными, интуитивными, они были неполными и их нельзя было считать законами. Ньютон объединил предположения своих предшественников, четко сформулировал закон и дал его аналитическое описание. Ньютон считал своей заслугой, во-первых, вывод аналитического выражения, описывающего изменение силы тяжести, во-вторых, доказательство тождества силы тяжести на Земле и силы притяжения планет, как и всех тел, друг к другу. По собственному утверждению Ньютона в письмах к Э. Галлею (1656—1742), закон изменения притяжения с расстоянием он установил еще в 1666 г. Отсутствие надежных данных о радиусе Земли и расстоянии до Луны, которые были необходимы наряду с данными о силе тяжести на Земле и о периоде обращения Луны вокруг Земли для числовой проверки закона всемирного тяготения, задержало публикацию закона Ньютона. После того как Ж. Пикар (1620—1682) получил из градусных измерений новые данные о радиусе Земли, Ньютон перевычислил орбиту движения Луны и получил блестящее согласие предвычисленных положений Луны с наблюдениями. Это было уже практическое доказательство нового закона. С его помощью Ньютон объяснял движение планет Солнечной системы, комет, спутников планет, явление морских приливов.

Постоянная тяготения G , входящая в формулу (1.1), используется в различных видах в зависимости от области применения закона всемирного тяготения. При этом выбирается различная система единиц измерения массы, длины и времени, а поэтому получаются различные значения постоянной тяготения. Эти постоянные тяготения имеют каждая свое конкретное название: *кавендишева*, *гауссова*, *зйниттейнова*, *геоцентрическая*, *селеноцентрическая*, *гелиоцентрическая* и др. В табл. 1 приведены

Т а б л и ц а 1

Различные виды гравитационных постоянных, их значения и единицы измерений

Наименование и обозначение	Числовое значение, точность определения	Единицы измерения		
		длины	массы	время
Кавендишева гравитационная постоянная, G	$(6,6742 \pm 0,0008) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$	м	кг	с
Эйнштейнова гравитационная постоянная, $\frac{8\pi G}{c^2}$	$(1,865 \pm 0,001) \cdot 10^{-28} \text{ м}/\text{кг}$	м	кг	—
Гауссова гравитационная постоянная, k	0,01720209895	а.е.	масса Солнца	эфемеридные сутки
Геоцентрическая гравитационная постоянная, GM_{\oplus}	$(398603 \pm 1) \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$	м	масса Земли	с
Селеноцентрическая гравитационная постоянная, GM_{ζ}	$(4902,7 \pm 0,1) \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$	м	масса Луны	с

некоторые гравитационные постоянные, даны их числовые значения, размерности и единицы измерения массы, длины и времени. В основе определения всех гравитационных постоянных лежит закон тяготения Ньютона. Для ряда астрономических задач в качестве определяющего уравнения удобнее использовать формулу третьего закона И. Кеплера (1571—1630), которая в конечном итоге также выводится из закона тяготения Ньютона. Третий закон Кеплера, в частности, используется при выводе селеноцентрической гравитационной постоянной GM_{ζ} по движению околоселеноцентрического спутника. Если он движется под действием только гравитационного поля Луны, которая предполагается однородной и шаровой, то имеет место следующая связь между периодом T обращения спутника вокруг Луны, большой полуосью a орбиты спутника и GM_{ζ} :

$$GM_{\zeta} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}. \quad (1.3)$$

Эта постоянная особенно большое значение приобрела в связи с запуском космических аппаратов к Луне и на Луну. Она используется для расчета траекторий движения ИСЛ, космических аппаратов, направляемых к другим планетам Солнечной системы, при изучении общего распределения плотности внутри Луны, определении ее динамической фигуры и т. д. Аналогично определяется геоцентрическая гравитационная постоянная GM_{\oplus} , которая играет большую роль при изучении движения космических аппаратов и спутников в гравитационном поле Земли. Первоначально гауссова гравитационная постоянная k выводилась при условии, что масса Солнца $M_{\odot} = 1$, большая полуось орбиты Земли при ее движении вокруг Солнца $A_{\odot} = 1$, а период T и отношение $\frac{M_{\oplus} + M_{\zeta}}{M_{\odot}}$ определялись из наблюдений. Но так

как при наблюдениях последние две величины постоянно уточняются, то теперь априорно принято значение k , приведенное в табл. 1. Изменения же T и $\frac{M_{\oplus} + M_{\zeta}}{M_{\odot}}$

компенсируются незначительными изменениями A_{\odot} . Единица расстояния становится производной величиной, соответствующей определенному, заранее фиксированному значению гауссовой гравитационной постоянной k , и называется она астрономической единицей (а.е.). Названное числовое значение k впервые выведено К. Гауссом (1777—1855) в 1809 г. Однако за 120 лет до этой даты с меньшим числом знаков ($k = 0,01720212$) оно было получено еще Ньютоном. Название «гауссова постоянная» — дань уважения Гауссу за его большие заслуги в утверждении закона тяготения в небесной механике, а не за первенство в выводе этой постоянной. Эйнштейнова гравитационная постоянная используется в теоретической физике. Как ни парадоксально, наиболее «земная» гравитационная постоянная, которая выводится в предположении, что масса, длина и время выражаются в принятой метрической системе единиц измерения, известна наиболее грубо. Эту постоянную мы называем кавендишевой гравитационной постоянной G . Определяется она экспериментальным путем: измеряется сила взаимного притяжения пробных масс, расположенных на точно из-

Таблица 2

Определения кавендишевой гравитационной постоянной

Авторы, год публикации, место эксперимента	Метод	Числовое значение G и ее ср. кв. ошибка, в 10^{-11} м ³ /кг. с ²
Хейль П. и Хржановский П., 1942, Вашингтон, США	динамич.	6,673 ± 0,005
Розе Я., Паркер Х., Лоурн К., Кулхан А. и Блэкс И., 1969, Шарлотенвилл, США	ротационный	6,674 ± 0,004
Реннер Я., 1973, Будапешт, Венгрия	динамич.	6,670 ± 0,008
Понтикс К., 1972, Ювилин, Франция	ротационный	6,6714 ± 0,0006
Сагитов М., Милюков В., Монахов Е., Назаренко В., Чеснокова Т., Таджидинов Х., Дмитриева Т., 1977, Москва, СССР	динамич.	6,6745 ± 0,0008

вестном расстоянии (точно определены и массы этих тел) и вычисляется сила взаимного притяжения пробных масс с учетом их формы и расстояния.

Впервые опытным путем постоянную тяготения G определил Г. Кавендиш (1731—1810). Значение опыта Кавендиша не ограничивается получением числового значения этой постоянной. Главное — в опытном подтверждении справедливости закона тяготения Ньютона не только для небесных, но и для небольших земных тел. Это было очень важно, ибо после открытия закона всемирного тяготения предполагалось, что сила взаимного тяготения достигает ощутимых величин только для небесных тел. Что же касается земных тел, то считали, что ввиду их малости взаимное притяжение между ними наблюдать невозможно. Это мнение утвердилось после ошибочного расчета Ньютона. В табл. 2 приведена сводка новейших измерений кавендишевой гравитационной постоянной G . Во всех экспериментах использовались крутильные весы. В динамическом методе сила притяжения между пробными массами измерялась по периоду крутиль-

ных колебаний, а в ротационном для более точного измерения притяжения крутильная система вращалась вокруг оси крутильной нити.

Используя кавендишеву G и селеноцентрическую GM_{ζ} гравитационные постоянные, можно определить массу M_{ζ} и среднюю плотность σ_{ζ} Луны. Об определении GM_{ζ} , M_{ζ} и σ_{ζ} подробнее будет рассказано в § 34.

§ 2. Понятия об орбитальном движении и вращении Луны

Гравитационное поле на Луне зависит от притяжения ее масс и от ее положения относительно небесных тел, в первую очередь относительно Земли, а также от ее вращательного движения. Поэтому нас интересуют два основных движения Луны: орбитальное движение и вращение.

Теория орбитального движения Луны — один из сложнейших разделов небесной механики. Ее разработкой занималось несколько поколений первоклассных математиков XIX—XX вв. Л. Эйлер, внесший большой вклад в теорию движения Луны, писал: «Точное и современное познание движения Луны, на основании которого можно было бы составить астрономические таблицы, точнейшим образом согласующиеся с истиной, сопряжено с такими существенными и величайшими трудностями, что представляется превосходящим силы человеческого ума» [18, с. 1]. Задача определения движения Луны вокруг Земли осложняется тем, что очень велико возмущающее влияние Солнца. Оно, имея большую массу, создает ускорение притяжения, действующее на Луну и Землю, в два раза большее, чем ускорение притяжения Луны Землей. Правда, возмущение Солнца на движение Луны вокруг Земли проявляется как разность ускорений, действующих на Луну и Землю. Но и то оно составляет около 0,5% ускорения Земли на расстоянии Луны. Движение Луны осложняется прямым возмущением планет. Кроме прямого возмущения Солнца, в движении Луны проявляются возмущения Солнца планетами, отличия фигур Луны и Земли от шаровой формы, влияние релятивистских эффектов и пр. Ниже мы попытаемся дать самое общее представление о качественном и количественном характере движения Луны в объеме того, что требуется для оценки

некоторых гравитационных эффектов, возникающих в задачах лунной гравиметрии.

Примем прямоугольную эллиптическую геоцентрическую систему координат XYZ (рис. 1). Уравнения дви-

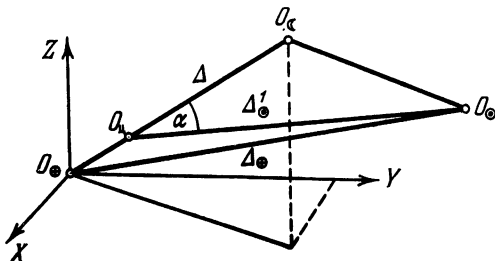


Рис. 1. Расстояния между центрами масс Земли O_{\oplus} , Луны O_{ζ} , Солнца O_{\odot} и центром масс $O_{Ц}$ системы Земля и Луна.

жения Луны по направлению координатных осей можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} + k^2(M_{\oplus} + M_{\zeta}) \frac{X}{\Delta^3} &= \frac{\partial T_{\odot}}{\partial X} + \frac{\partial T_1}{\partial X}, \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + k^2(M_{\oplus} + M_{\zeta}) \frac{Y}{\Delta^3} &= \frac{\partial T_{\odot}}{\partial Y} + \frac{\partial T_1}{\partial Y}, \\ \frac{d^2Z}{dt^2} + k^2(M_{\oplus} + M_{\zeta}) \frac{Z}{\Delta^3} &= \frac{\partial T_{\odot}}{\partial Z} + \frac{\partial T_1}{\partial Z}. \end{aligned} \right\} (1.4)$$

Уравнения составлены в предположении, что Земля и Луна — точечные тела, массы которых соответственно M_{\oplus} , M_{ζ} , Δ — расстояние Луны от Земли. T_{\odot} — возмущающая функция от Солнца, которая учитывает возмущения Луны в предположении, что центр масс системы Земля — Луна $O_{Ц}$ движется вокруг Солнца по эллиптической орбите. T_{\odot} выражается в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра:

$$T_{\odot} = \frac{k^2 M_{\odot}}{\Delta_{\odot}} \left[\left(\frac{\Delta}{\Delta_{\odot}} \right)^2 P_2(\cos \alpha) + \frac{M_{\oplus} - M_{\zeta}}{M_{\oplus} + M_{\zeta}} \left(\frac{\Delta}{\Delta_{\odot}} \right)^3 P_3(\cos \alpha) + \right. \\ \left. + \frac{M_{\oplus}^2 - M_{\oplus} M_{\zeta} + M_{\zeta}^2}{(M_{\oplus} + M_{\zeta})^2} \left(\frac{\Delta}{\Delta_{\odot}} \right)^4 P_4(\cos \alpha) + \dots \right], \quad (1.5)$$

где Δ_{\odot} — расстояние от Земли до Солнца, M_{\odot} — масса точечного Солнца, α — угол с вершиной в точке $O_{ц}$ между направлениями на Луну и Солнце. T_1 — возмущающая функция сложной структуры, призванная учитывать упомянутые выше дополнительные, помимо Солнца, влияния (планет на Луну, планет на Солнце, фигур Земли и Луны и др.).

Сначала рассмотрим движение Луны в предположении, что на нее действует только притяжение Земли. Оба небесных тела рассматриваются в виде точечных масс. Тогда уравнения (1.4) существенно упрощаются. В правой их части возмущающие функции T_{\odot} и T_1 тождественно равны нулю. Движение Луны происходит по эллиптической орбите вокруг центра масс системы Земля — Луна и подчиняется законам Кеплера.

Положение Луны для любого момента времени t можно описывать с помощью эллиптических элементов орбиты. Их всего шесть. Положение плоскости лунной орбиты относительно плоскости эклиптики характеризуется двумя величинами. Первая из них — наклон i плоскости лунной орбиты к эклиптической плоскости (рис. 2). Зна-

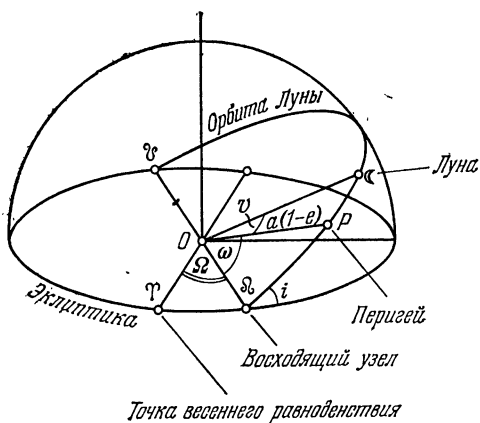


Рис. 2. Элементы орбиты Луны.

чение среднего угла наклона между ними дано в табл. 3. В ней, помимо этого, приведены значения средних наклонов и между другими, часто используемыми плоскостями — плоскостью лунного экватора и плоскостью земного экватора. Второй элемент, характеризующий плос-

Таблица 3

Средние углы наклона между различными плоскостями

Плоскости	Лунного экватора	Лунной орбиты	Земного экватора	Эклиптики
лунного экватора	0°	6°41'	24°59'	1°32'
лунной орбиты	6°41'	0°	18°17'	5°09'
земного экватора	24°59'	18°17'	0°	23°26'
эклиптики	1°32'	5°09'	23°26'	0°

кость орбиты, задает линию пересечения плоскости лунной орбиты с плоскостью эклиптики. Точка на эклиптике, в которой Луна переходит из южной части небосвода в северное, называется *восходящим узлом* и обозначается Ω , а противоположная ей точка ϑ — *нисходящим узлом*. Прямая $\Omega \vartheta$ — линия узлов. Угловое расстояние восходящего узла Ω от точки весеннего равноденствия Υ называется *долготой восходящего узла* Ω и представляет второй элемент в системе элементов орбиты. Ориентировка эллипса орбиты в плоскости орбиты определяется углом ω между линией апсид (линия, соединяющая точки апогея и перигея) и линией узлов $\Omega \vartheta$ и называется *угловым расстоянием перигея от узла*. Сам орбитальный эллипс характеризуется размером большой полуоси a и эксцентриситетом эллипса e . Положение небесного тела на орбите для момента времени t задается средней аномалией

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - t_0) = \frac{2\pi}{T}t - M_0, \quad (1.6)$$

где T — период обращения Луны, $\frac{2\pi}{T} = n$ — среднее движение (средняя угловая скорость), t_0 — момент прохождения Луны через перигея. Кроме того, используются истинная аномалия v и эксцентрическая E . Последняя связана со средней аномалией M уравнением Кеплера

$$M = E - e \sin E, \quad (1.7)$$

а истинная аномалия v выражается через эксцентрическую так:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (1.8)$$

Если ввести сферическую эклиптическую систему координат $(\Delta, B_{\zeta}, L_{\zeta})$ с началом в центре масс Земли O_{\oplus} (рис. 3), то можно установить связь элементов орбиты Луны с ее эклиптическими координатами. Обратившись к рис. 3, нетрудно видеть, что

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(L_{\zeta} - \Omega) &= \cos i \operatorname{tg}(\omega + v), \\ \sin B_{\zeta} &= \sin i \sin(\omega + v). \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Радиус-вектор Δ через элементы орбиты выражается так:

$$\Delta = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}.$$

Из-за эллиптичности орбиты он может изменяться от 356 410 км в перигее до 406 740 км в апогее.

Из равенств (1.9) определим угловые координаты L_{ζ} и B_{ζ} :

$$\left. \begin{aligned} L_{\zeta} &= \Omega + \operatorname{arctg}[(\cos i) \operatorname{tg}(\omega + v)], \\ B_{\zeta} &= \operatorname{arcsin}[(\sin i) \sin(\omega + v)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Ввиду малости $i \sim 5^\circ$ в случае приближенных расчетов последние формулы можно упростить.

Если рассмотреть движение Луны вокруг центра масс системы Земля — Луна с учетом главного возмущения — от Солнца, то координаты Луны оказываются существенно возмущенными. Так, эклиптическая долгота Луны может отличаться от невозмущенной на $\sim 8^\circ$. Поэтому при построении теории движения Луны в качестве основной проблемы ставится

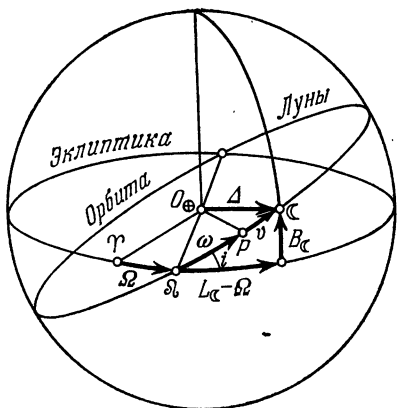


Рис. 3. Эклиптические геоцентрические сферические координаты Луны и их связь с элементами орбиты.

задача движения Луны в гравитационном поле Земли с учетом влияния Солнца. При такой постановке, которая рассматривается как первое приближение, предполагается, что все три небесных тела: Луна, Земля,

Солнце — точки. Центр масс системы Земля — Луна движется вокруг Солнца по эллиптической орбите. Тогда дифференциальные уравнения движения Луны получаются из (1.4), если положить в них возмущающую функцию T_1 равной нулю и подставить вместо T_{\odot} ее выражение (1.5). Решение такой системы уравнений становится математически трудной задачей. Дальнейшим приближением описания движения Луны является учет влияния планет на Луну и на Солнце, учет фигуры Земли и Луны и пр., т. е. в уравнениях (1.4) сохраняется возмущающая функция T_1 . Более полувека назад Браун, на основании теории движения Луны, построенной Хиллом, развил свою теорию. Она доведена до большого совершенства, с ее помощью вычисляются эфемериды Луны в функции времени t . Для расчетов эфемерид Луны построены простые по структуре формулы. Так, сферические эклиптические геоцентрические координаты Луны представлены Е. Брауном [20] в виде

$$\left. \begin{aligned} L_{\zeta} &= \bar{\lambda} + \sum_j a_j \sin \psi_j, \\ B_{\zeta} &= \sum_j b_j \sin \psi_j, \\ \Delta &= \frac{a_{\oplus}}{\sum_j c_j \sin \psi_j}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Здесь $\bar{\lambda}$ — средняя долгота Луны, $\psi_j = k_1 l + k_2 l' + k_3 D + k_4 F$ — комбинация углов l , l' , D , F . Они зависят от элементов орбиты Луны и времени t . Коэффициенты k_1 , k_2 , k_3 , k_4 принимают в различных комбинациях значения 0 , ± 1 , ± 2 , ... Индекс j означает одну из комбинаций коэффициентов k_1 , k_2 , k_3 , k_4 . Коэффициенты a_j , b_j , c_j при тригонометрических функциях в (1.11) являются сложными рядами по степеням отношений средних движений Солнца и Луны, больших полуосей их орбит, эксцентриситетов их орбит, наклонности плоскости лунной орбиты к эклиптике. Коэффициенты a_j , b_j , c_j выражаются в угловой мере.

Если ограничиться только линейной зависимостью l , l' , D , F от времени t , то имеем

$$l = 296^{\circ}6'25'',31 + 17\,179\,167'',085\,94t,$$

$$l' = 358^{\circ}28'33'',60 + 1\,295\,977'',415\,16t,$$

$$D = 350^{\circ}44'23'',67 + 16\,029\,616'',645,69t,$$

$$F = 11^{\circ}15'11'',92 + 17\,395\,266'',093\,19t,$$

где t выражается в юлианских годах, отсчитываемых от эпохи 1900,0.

Гармоники в (1.11), представляющие периодические и вековые изменения L_{ζ} , B_{ζ} , Δ , возникают вследствие возмущающих движений и называются неравенствами. Чтобы угловые координаты L_{ζ} и B_{ζ} представлялись с точностью до сотых долей угловой секунды, а параллакс $\sin \pi_{\zeta}$ с точностью до $0'',001$, необходимо в выражениях (1.11) для долготы L_{ζ} сохранить около 500 членов, в широте B_{ζ} около 400, а в Δ около 100. Однако эти оценки формальные. В таблицах 4, 5, 6 для примера выписаны некоторые наибольшие по амплитуде неравенства. В первых колонках таблиц даны номера членов из таблиц

Таблица 4

Структура ψ_i и значения амплитуд a_i в разложении для эклиптической геоцентрической долготы L_{ζ}

№№ в таблице Брауна	В обозначениях Делоне				В обозначениях Гайна				a_i , в сек. дуги
	l	l'	D	F	g	g'	ω	ω'	
71)	l	0	0	0	g	0	0	0	22 639,5
8 ²⁾	$-l$	0	$2D$	0	g	$-2g'$	2ω	$-2\omega'$	4 586,4
3 ³⁾	0	0	$2D$	0	$2g$	$-2g'$	2ω	$-2\omega'$	2 369,9
25 ⁴⁾	$2l$	0	0	0	$2g$	0	0	0	769,0
15 ⁵⁾	0	$-l'$	0	0		$-g'$	0	0	668,1
51	0	0	0	$2F$	$2g$	0	2ω	0	-411,6
26	$-2l$	0	$2D$	0		$-2g'$	2ω	$-2\omega'$	211,7
33	$-l$	$-l'$	$2D$	0	g	$-3g'$	2ω	$-2\omega'$	206,0
6	l	0	$2D$	0	$3g$	$-2g'$	2ω	$-2\omega'$	192,0
16	0	$-l'$	$2D$	0	$2g$	$-3g'$	2ω	$-2\omega'$	165,1
39	l	$-l'$	0	0	g	$-g'$	0	0	147,7
21	0	0	D	0	g	$-g'$	ω	$-\omega'$	-125,2
32	$-l$	$-l'$	0	0	$-g$	$-g'$	0	0	109,7

1) Уравнение центра.

2) Эвекции.

3) Вариация.

4) Уравнение центра.

5) Годичное неравенство.

Таблица 5

Структура ψ_i и значения амплитуды b_i в разложении для эллиптической геоцентрической широты B_{ζ}

В обозначениях Делоне				В обозначениях Гайна				b_i , в сек. дуги
0	0	0	F	g	0	ω	0	18 461,5
-l	0	0	F	$2g$	0	ω	0	1 010,2
-l	0	0	F	0	0	ω	0	-999,7
0	0	$2D$	$-l'$	g	$-2g'$	ω	$-2\omega'$	623,7
-l	0	$2D$	F	$2g$	$-2g'$	3ω	$-2\omega'$	199,5
0	0	$2D$	$-F$	0	$-2g'$	ω	$-2\omega'$	166,6
0	0	$2D$	F	$3g$	$-2g'$	3ω	$-2\omega'$	117,3

Таблица 6

Структура ψ_i и значения амплитуд c_i в разложении для

$$\sin \pi_{\zeta} = \frac{a_{\oplus}}{\sum_i c_i \cos \psi_i}$$

№№ в таблице Брауна	В обозначениях Делоне				В обозначениях Гайна				c_i , в сек. дуги
611	const				const				3422,700
615	l	0	0	0	g	0	0	0	186,540
616	-l	0	$2D$	0	g	$-2g'$	2ω	$-2\omega'$	34,312
610	0	0	$2D$	0	$2g$	$-2g'$	2ω	$-2\omega'$	28,233
630	$2l$	0	0	0	$2g$	0	0	0	10,166
614	l	0	$2D$	0	$3g$	$-2g'$	2ω	$-2\omega'$	3,086
623	0	$-l'$	$2D$	0	$2g$	$-3g'$	2ω	$-2\omega'$	1,918
638	-l	$-l'$	$2D$	0	g	$-3g'$	2ω	$-2\omega'$	1,444
643	l	$-l'$	0	0	g	$-g'$	0	0	1,153

Брауна, затем — аргументы в обозначениях Делоне, составляющие угол ψ_j , далее — амплитуды a_j , b_j , c_j соответственно. Аргументы могут быть выражены через средние аномалии Луны и Солнца g и g' соответственно, угловые расстояния перицентров Луны и Солнца от восходящего узла на лунной орбите, обозначенные соответственно через ω и ω' :

$$F = \omega + g, \quad D = \omega + g - \omega' - g', \quad l = g, \quad l' = g'.$$

Приведем также связь этих аргументов со средними долготами Луны и Солнца, обозначаемыми соответственно $\bar{\lambda}$ и h , со средними долготами лунного перицентра p и солнечного перицентра p_s и со средней долготой восходящего узла Луны Ω :

$$F = \bar{\lambda} - \Omega, \quad D = \bar{\lambda} - h, \quad l = \bar{\lambda} - p, \quad l' = h - p_s.$$

Во времена Брауна не была еще изучена неравномерность вращения Земли, поэтому в координаты Луны, а точнее, в среднюю долготу $\bar{\lambda}$, вводилась эмпирическая поправка $\Delta\bar{\lambda} = -8'',72 - 0,2674t$, необходимость которой отпала с началом использования эфемеридного времени.

Следует обратить внимание на некоторые основные неравенства в долготе Луны. Напишем с помощью табл. 4 уравнения неравенств, используя переменные $\bar{\lambda}$, h , p , p_s и Ω . Уравнения

$$\Delta L_1 = 22639'',5 \sin (\bar{\lambda} - \Omega),$$

$$\Delta L_{II} = 769'',0 \sin 2 (\bar{\lambda} - \Omega)$$

называются уравнениями центра и выражают неравномерность движения Луны из-за отличия ее эллиптической орбиты от круговой. Обычно их не относят к собственно «неравенствам». Основными неравенствами считаются: вариация, эвекция и годичное неравенство.

Вариация представляется выражением

$$\Delta L_B = 2369'',9 \sin 2 (\bar{\lambda} - h).$$

Период изменения этого неравенства равен половине синодического месяца, что равно $\sim 14,765$ суток.

Эвекция представляется слагаемым

$$\Delta L_3 = 4586'',4 \sin 2 (h - p).$$

Период неравенства равен 31,807 суток.

Годичное неравенство равно

$$\Delta L_{Г.н.} = 668'',1 \sin (h - p_s).$$

Из-за всевозможных возмущений будут изменяться и элементы орбиты Луны. На основное кеплеровское движение Луны накладываются сложные периодические движения различного периода, а в некоторых элементах

орбиты Луны наблюдаются заметные вековые изменения. Так, если время отсчитывать в эфемеридных сутках, начиная с эпохи 1900, янв. 0, 12^h эфемеридного времени, то средняя долгота Луны равна

$$\bar{\lambda} = 270^{\circ}434\ 164 + 13^{\circ},176\ 396\ 526\ 9d - \\ - 0^{\circ},001\ 133T^2 + 0^{\circ},000\ 001\ 9T^3.$$

Средняя долгота перицентра

$$\bar{p} = 334^{\circ},329\ 55 + 0^{\circ},111\ 404\ 080\ 3d - \\ - 0^{\circ},010325T^2 - 0^{\circ},000\ 012T^3,$$

средняя долгота узла

$$\bar{\Omega} = 259^{\circ},183\ 275 - 0^{\circ},052\ 953\ 222\ 2d + \\ + 0^{\circ},002\ 078T^2 + 0^{\circ},000\ 002T^3,$$

где d — сутки, T — юлианские столетия. Из формулы для \bar{p} следует, что перицентр, двигаясь в плоскости лунной орбиты в направлении узла Ω (о чем говорит знак плюс у второго слагаемого), совершает полный оборот за 8,8503 г. Линия узлов Ω ϑ движется в плоскости эклиптики в обратном направлении (знак минус у второго слагаемого в выражении для $\bar{\Omega}$) по отношению в движении перигея и совершает полный оборот за 18,5995 г. Это движение называют *регрессией линии узлов*. При этом плоскость лунной орбиты поворачивается вокруг перпендикулярной к плоскости эклиптики оси. Из других неравенств упомянем периодические изменения наклона i с периодом 18,5995 лет в пределах $4^{\circ}59'$ — $5^{\circ}17'$ и эксцентриситета e с периодом 8,8503 года, в пределах 0,045—0,065. В силу относительности движения можно рассматривать движение Земли относительно Луны. На небесной сфере проекция Луны с Земли будет на диаметрально противоположной стороне проекции Земли с Луны. Поэтому угловые координаты, заданные в геоцентрической системе координат, в селеноцентрической будут иметь противоположные знаки.

Ввиду того, что положение орбиты Луны и ее вид постоянно изменяются, устанавливаются различные периоды обращения Луны вокруг Земли. Эти периоды именуются лунными месяцами (табл. 7). Приведенная в таблице продолжительность месяцев — средняя, выведенная примерно за 30 000 оборотов Луны вокруг Земли, которые были совершены со времени древних наблюде-

Т а б л и ц а 7

Лунные месяцы и их продолжительность

Название месяца	Продолжительность в средних сутках
Звездный (сидерический)	27,321 660 9
Тропический	27,321 581 6
Драконический	27,212 217 8
Синодический	29,530 588 1
Аномалистический	27,554 550 9

ний (в основном полных солнечных затмений) до наших дней. *Звездным месяцем* называется промежуток времени между двумя последовательными прохожденьями Луны через плоскость одного и того же меридиана. *Тропическим* месяцем называется промежуток времени между двумя последовательными прохожденьями ее через среднюю точку весеннего равноденствия. *Драконический* месяц — промежуток времени между двумя последовательными прохожденьями через восходящий узел на эклиптике. *Синодический* месяц — период обращения относительно Солнца, который равен интервалу времени, в течение которого разность долгот Луны и Солнца изменяется на 360° . *Аномалистический* месяц — промежуток времени между двумя последовательными прохожденьями Луны через перигей своей орбиты.

Хотя вращение Луны вокруг собственной оси достаточно равномерное, земному наблюдателю кажется, что она покачивается относительно своего среднего положения. Это явление получило название *либрации* (лат. *libra* — весы, качели). Различают либрации двух видов: *оптическую* (геометрическая) и *физическую*. Последняя из них происходит на самом деле, по величине она очень мала. Оптическая либрация чисто кажущаяся. Возникает она вследствие того, что движение Луны по орбите вокруг Земли неравномерно; плоскости лунной орбиты и лунного экватора не совпадают с эклиптикой и земной наблюдатель находится в различных точках поверхности Земли. Различают три вида оптической либрации:

1. *Либрация по долготе*. Поясним ее с помощью рис. 4. Пусть *З* — Земля в фокусе лунной ор-

биты. Рассмотрим четыре положения Луны, которые обозначены буквами L_1, L_2, L_3 и L_4 . В первом положении L_1 Луна находится в перигентре. Зафиксируем в теле Луны направление радиуса L_1A_1 . Через четверть месяца (аномалистического) Луна вследствие равномерного

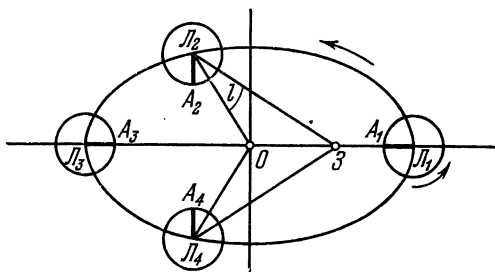


Рис. 4. Оптическая либрация Луны по долготе.

вращения вокруг собственной оси повернется на 90° . Фиксированный радиус L_1A_1 теперь будет иметь направление L_2A_2 . За это же время Луна, двигаясь по орбите в области перигея (согласно первому закону Кеплера) с большей угловой скоростью, переместится в точку L_2 так, что угол ZOL_2 будет больше 90° . У земного наблюдателя, находящегося в Z , создается впечатление, что Луна повернулась вокруг своей оси на угол ZL_2O . За счет этого он увидит край ее обратной стороны, который был невидим в положении L_1 . Когда Луна в своем орбитальном движении через половину месяца окажется в положении L_3 — апогее, фиксированный радиус L_3A_3 будет направлен на точку Z . В области апогея Луна движется медленнее, поэтому за следующую четверть периода она сделает поворот относительно точки O на угол меньше 90° , а во вращательном движении вокруг собственной оси на угол, равный 90° . Теперь земному наблюдателю в Z покажется, что Луна повернулась в другую сторону, и он увидит часть другого края обратной стороны Луны. Углы ZL_2O и ZL_4O , которые обозначены l , называются углами либрации по долготу. Величину угла l можно вычислить согласно формуле

$$\operatorname{tg}(l + \bar{\lambda} - \Omega) = \frac{\sin(L_\zeta - \Omega) \cos(I + i)}{\cos(L_\zeta - \Omega)},$$

где I — наклон лунного экватора к эклиптике. Угол либрации по долготе изменяется с амплитудой $\pm 4^{\circ},8 - 8^{\circ},1$ в зависимости от элементов орбиты Луны.

2. **Либрация по широте.** Как известно, плоскость лунной орбиты наклонена к лунному экватору на 6° . Поскольку направление оси вращения вокруг собственной оси Луны остается в пространстве неизменным, земному наблюдателю в Z при движении Луны вокруг Земли кажется, что Луна поворачивается в широтном направлении, показывая то северный, то южный край ее обратной стороны. Изменение угла в широтной либрации происходит по закону

$$\operatorname{tg} b = \sin (l + \bar{\lambda} - \Omega) \operatorname{tg} (i + I).$$

Амплитуда изменения широтной либрации около $\pm 6^{\circ}$.

Описанные долготная и широтная либрации являются геоцентрическими.

3. **Параллактическая (суточная) либрация** возникает вследствие того, что земной наблюдатель из-за суточного вращения Земли занимает различное положение относительно Луны. Поэтому он может обозревать больше, чем полусферу Луны. Ему же кажется, что Луна поворачивается с суточным периодом относительно своего равновесного положения. Величина параллактической либрации достигает $\pm 1^{\circ}$. Таким образом, либрации позволяют земному наблюдателю увидеть краевые области обратной стороны Луны, так что видимыми становятся в общей сложности 60% всей поверхности Луны.

Еще в конце XVII в. французский ученый Доминик Кассини на основании наблюдений установил три основных закона, описывающих вращение Луны в первом приближении:

1. Луна вращается равномерно вокруг собственной оси, которая остается неизменной в теле Луны. Время одного оборота вокруг собственной оси равно времени обращения вокруг Земли.

2. Лунный экватор наклонен к эклиптике на постоянный угол, равный $1^{\circ}31'$.

3. Восходящий узел лунного экватора на эклиптике всегда совпадает с нисходящим узлом лунной орбиты на

эклиптике. Это означает, что оси лунной орбиты, эклиптики и фигуры Луны находятся в одной плоскости.

Интересно отметить, что ранее И. Кеплер установил три закона движения планет, И. Ньютон открыл три закона механики движения тел и Д. Кассини сформулировал три закона вращения Луны. Сам факт подчинения вращательных движений Луны перечисленным простым законам говорит об устойчивости этих движений и представляет большой космогонический интерес. Теоретический анализ вращательного движения, предпринятый Лагранжем и Лапласом, показал, что законы Кассини есть результат возмущающего влияния Земли на Луну, имеющую форму, отличную от шара. Вращение Луны может быть описано тремя углами Эйлера θ , ψ , φ , соответственно называемыми углами нутации, прецессии и собственного вращения. Для законов Кассини должно быть

$$\theta = I, \quad \psi = \Omega, \quad \varphi = 180^\circ + \bar{\lambda} - \psi = 180^\circ + \bar{\lambda} - \Omega.$$

В силу возмущений Земли к I , Ω , λ должны быть добавлены возмущающие члены ρ , σ , τ соответственно, т. е.

$$\theta = I + \rho, \quad \psi = \Omega + \sigma, \quad \varphi = 180^\circ + (\bar{\lambda} + \tau) - \Omega,$$

где ρ — физическая либрация в наклоне, σ — физическая либрация в узле, τ — физическая либрация в долготе. Приводим выражения для физических либраций при значении параметра физической либрации $f = 0,75$ [10]:

для наклона I

$$\rho = -107'' \cos g + 36'' \cos (g + 2\omega) - 11'' \cos (2g + 2\omega), \quad (1.12)$$

для долготы узла Ω

$$\sigma = \frac{1}{I} (-109'' \sin g + 36'' \cos (g + 2\omega) - 11'' \cos (2g + 2\omega)). \quad (1.13)$$

Физическая либрация в долготе τ выражается следующим образом:

$$\tau = 52'' \sin (208^\circ + 0^\circ 33' 18'' t) + \sum H_i \sin \varphi_i(t), \quad (1.14)$$

где t — в сутках.

Она состоит из свободной и вынужденной либраций. Период свободной либрации зависит от массы и динамического сжатия. Вынужденная часть либрации по долготе

представлена в виде суммы тригонометрических членов, амплитуда которых зависит от элементов орбиты, а аргументами являются функции времени t .

Таким образом, ρ , σ , τ являются периодическими функциями времени t , с различными частотами и амплитудами, которые зависят от *постоянной физической либрации*

$$f = \frac{B}{A} \frac{C - B}{C - A},$$

где A , B , C — *главные моменты инерции* Луны.

Другим важным параметром физической либрации является *наклонность* I . В работе [15] физическая либрация Луны рассматривается не в эйлеровых углах, а в углах относительно трех прямых ортогональных координатных осей, в так называемых «самолетных» углах.

Показав общую картину физической либрации и орбитального движения Луны и связанной с ним оптической либрации, поставим вопрос, как они проявляются в гравитационном поле Луны. Они создают периодические изменения гравитационного поля Луны. Изменение силы тяжести на лунной поверхности, проявляющееся в виде ее центробежной компоненты, за счет физической либрации пренебрежимо мало. Из-за орбитального движения Луны в ускорениях, выводимых по доплеровским наблюдениям ИСЛ с Земли, содержится компонента за счет изменения Δ , B_{ζ} , L_{ζ} . По направлению Δ компонента в наблюдениях ускорения достигает десятков *мГал.* (§ 11). Но благодаря низким частотам периодических изменений компонент этих ускорений они легко исключаются из наблюдаемых ускорений.

В изучении вращательных движений Луны ныне достигнут большой прогресс [21], [22], [26], [37] благодаря использованию методов лазерной локации уголкового отражателя на Луне и применению методов радиоинтерферометрии (§ 36).

§ 3. Потенциал притяжения Луны и потенциал приливоцентробежных сил. Сила тяжести

Пусть S — поверхность Луны, Ω — ее объем (рис. 5). Выберем прямоугольную систему координат X , Y , Z , связанную с телом Луны. Начало координат O совмес-

тим с ее центром масс. Ось Z направим вдоль оси вращения Луны, оси X и Y — в экваториальной плоскости Луны так, что первая из них проходит в плоскости нулевого меридиана. Точка \mathcal{P} , в которой рассматривается гравитационное поле, имеет координаты (x, y, z) , а (ξ, η, ζ) — координаты элемента массы dm в текущей точке M тела Луны. Полагаем, что в точке

\mathcal{P} расположена единичная масса; тогда действующая на нее сила численно равна ускорению. На эту массу действуют несколько ускорений различного происхождения: ускорение притяжения G_1 массы Луны, ускорение притяжения G_2 Земли и других небесных тел и центробежное ускорение G_3 . Под силой тяжести или, точнее, под *ускорением силы тяжести* \bar{G} понимается результирующая всех действующих ускорений.

Ускорения являются векторными величинами, т. е. помимо численной величины они имеют определенные направления в пространстве. Чтобы найти результирующую, необходимо произвести векторное сложение названных ускорений:

$$\bar{G} = \bar{G}_1 + \bar{G}_2 + \bar{G}_3.$$

Очевидно, что величину ускорения силы тяжести и ее направление l можно получить, если заданы ее компоненты G_x, G_y, G_z по координатным осям X, Y, Z :

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2},$$

$$\cos(\hat{X}l) = \frac{G_x}{G}, \quad \cos(\hat{Y}l) = \frac{G_y}{G}, \quad \cos(\hat{Z}l) = \frac{G_z}{G}.$$

Наибольшим среди названных ускорений G_1, G_2, G_3 является ускорение притяжения Луны G_1 . Поэтому начнем с рассмотрения этого ускорения, создаваемого элементарной массой dm Луны, которое обозначим g_1 ,

$$g_1(x, y, z) = G \frac{dm}{r^2},$$

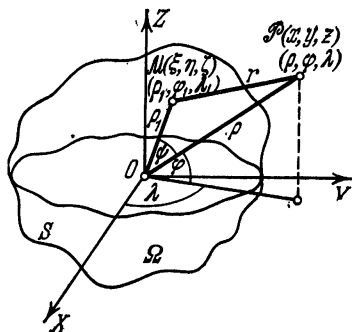


Рис. 5. Координаты, углы, расстояния, используемые для вывода потенциала притяжения Луны.

где $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$ — расстояние между точкой $\mathcal{P}(x, y, z)$ и элементарной массой dm (ξ, η, ζ) тела Луны, G — постоянная тяготения.

Составляющие ускорения \mathbf{g}_1 по координатным осям X, Y, Z можно представить в виде

$$(g_1)_x = g_1 \frac{x - \xi}{r} = g_1 \frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Gdm}{r} \right),$$

$$(g_1)_y = g_1 \frac{y - \eta}{r} = g_1 \frac{\partial r}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Gdm}{r} \right),$$

$$(g_1)_z = g_1 \frac{z - \zeta}{r} = g_1 \frac{\partial r}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Gdm}{r} \right).$$

Таким образом, составляющие ускорения $(g_1)_x, (g_1)_y, (g_1)_z$ получаются как производные по соответствующим координатам от одной и той же функции

$$v(x, y, z) = G \frac{dm}{r},$$

называемой потенциалом притяжения, которая, в отличие от векторной величины \mathbf{g}_1 , является величиной скалярной.

Для всей Луны потенциал ускорения притяжения выражается тройным интегралом по ее объему Ω :

$$V(x, y, z) = G \iiint_{\Omega} \frac{dm}{r}, \quad (1.15)$$

где $dm = \sigma d\Omega$, $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ — объемная плотность, $d\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ — элемент объема.

Введем сферическую систему координат с прежним началом (см. рис. 5), где ρ, φ, λ — соответственно полярное расстояние, широта и долгота точки \mathcal{P} , в которой рассматривается потенциал ускорения притяжения Луны; $\rho_1, \varphi_1, \lambda_1$ — координаты текущей точки \mathcal{M} тела Луны. Расстояние между точками \mathcal{P} и \mathcal{M} равно

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos \psi},$$

где ψ — угол между направлениями радиусов-векторов ρ и ρ_1 . Величину $1/r$ в подынтегральном выражении (1.15)

разложим в ряд по полиномам Лежандра:

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_1^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi) \quad \text{при } \rho > \rho_1, \quad (1.16)$$

где $\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi_1 + \cos \varphi \cos \varphi_1 \cos (\lambda - \lambda_1)$, $P_n(\cos \psi)$ — полином Лежандра n -го порядка. Используя теорему сложения полиномов Лежандра, можно полином с аргументом $\cos \psi$ выразить через функции от φ_1 , λ_1 , φ , λ :

$$P_n(\cos \psi) = P_{n0}(\sin \varphi) P_{n0}(\sin \varphi_1) + \\ + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (\cos m\lambda \cos m\lambda_1 + \sin m\lambda \sin m\lambda_1) \times \\ \times P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi_1), \quad (1.17)$$

где $P_{nm}(\sin \varphi)$, $P_{nm}(\sin \varphi_1)$ — присоединенные функции Лежандра. Подставляя разложение для $1/r$ (1.16) в (1.15) и имея в виду при этом (1.17), потенциал притяжения V можно записать в виде

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = \\ = \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (1.18)$$

где R — средний радиус Луны. Коэффициенты C_{nm} и S_{nm} называются *гармоническими коэффициентами*. Иногда их называют *стоксовыми постоянными*. Они не связаны с координатами точек наблюдения, а зависят только от распределения плотности $\sigma(\rho_1, \varphi_1, \lambda_1)$ внутри Луны и ее фигуры Ω :

$$\left. \begin{aligned} C_{n0} &= \frac{1}{M_{\zeta} R^n} \iiint_{\Omega} \sigma \rho_1^n P_{n0}(\sin \varphi_1) d\Omega, \\ C_{nm} &= \frac{2(n-m)!}{(n+m)! M_{\zeta} R^n} \iiint_{\Omega} \sigma \rho_1^n P_{nm}(\sin \varphi_1) \cos m\lambda_1 d\Omega, \\ S_{nm} &= \frac{2(n-m)!}{(n+m)! M_{\zeta} R^n} \iiint_{\Omega} \sigma \rho_1^n P_{nm}(\sin \varphi_1) \sin m\lambda_1 d\Omega, \end{aligned} \right\} (1.19)$$

где $d\Omega = \rho_1 \cos^2 \varphi_1 d\varphi_1 d\lambda_1 d\rho_1$ — элемент объема в сферических координатах.

Теперь рассмотрим на Луне потенциал притяжения от небесных тел, а также *потенциал центробежных ускорений*, обусловленных орбитальным движением и вращением Луны. Во вращении Луны вокруг своей оси и ее обращении вокруг Земли существует замечательная особенность, сформулированная в I законе Кассини. Она состоит в том, что периоды обоих вращений одинаковы. Каждый элемент массы Луны, совершая свое движение по орбите вокруг центра масс Земля — Луна, испытывает действие двух ускорений. С одной стороны, элемент массы стремится удалиться под действием центробежного ускорения g_3 , а с другой — удерживается ускорением g_2 притяжения Земли. Только в центре масс Луны центробежное ускорение равно ускорению притяжения с противоположным знаком, т. е. суммарное их ускорение равно нулю. Во всех других точках Луны такого равенства нет, ненулевая разность этих ускорений создает приливообразующий эффект. Луна, будучи телом, не обладающим свойством абсолютно твердого тела, частично деформируется,

что проявляется в виде приливов в твердой Луне (§ 47).

Приливное влияние Солнца на Луну на два порядка меньше, чем влияние Земли, а влияние других планет и того меньше. Поэтому будем рассматривать только влияние Земли. Найдем аналитическое выражение, описывающее приливоцентробежные ускорения на Луне. Воспользуемся селеноцентрической экваториальной сферической системой координат (рис. 6). Пусть $\mathcal{P}(\rho, \varphi, \lambda)$ — точка, в которой рассматривается

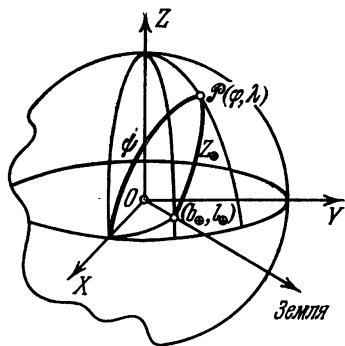


Рис. 6. К выводу на Луне приливно-центробежного потенциала от Земли.

изменение приливно-центробежного и центробежного потенциалов. Координаты Земли обозначим $(\Delta, b_{\oplus}, l_{\oplus})$. Ввиду большой удаленности Земли, влиянием неоднородностей ее внутреннего строения и неправильностью ее фигуры можно пренебречь. Приняв Землю за точечное тело с массой M_{\oplus} , выражение для потенциала притяжения \bar{W}_{\oplus} в точке \mathcal{P}

можно записать так:

$$\bar{W}_{\oplus}(\mathcal{P}) = \frac{GM_{\oplus}}{\Delta},$$

где $\bar{\Delta} = \sqrt{\Delta^2 + \rho^2 - 2\rho\Delta \cos Z_{\oplus}}$ — расстояние центра масс Земли от точки \mathcal{P} , Δ — расстояние между центрами масс Луны и Земли, Z_{\oplus} — угол с вершиной в начале координат между направлениями на точку \mathcal{P} и на Землю. Этот угол равен зенитному расстоянию Z_{\oplus} Земли в точке наблюдения на Луне. Разложим $\bar{W}_{\oplus}(\mathcal{P})$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$\bar{W}_{\oplus}(\mathcal{P}) = \frac{GM_{\oplus}}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^n P_n(\cos Z_{\oplus}). \quad (1.20)$$

Потенциал притяжения в центре масс Луны равен

$$\bar{W}_{\oplus}(0) = \frac{GM_{\oplus}}{\Delta}. \quad (1.21)$$

Разность потенциалов (1.20) и (1.21) создает приливообразующий потенциал на Луне от Земли. Член со сферической функцией $P_1(\cos Z_{\oplus})$ исключается. Ограничившись второй гармоникой разложения в (1.20) ввиду малости последующих членов из-за быстрого убывания отношения $\left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^n$, получим

$$W_{\oplus}(\mathcal{P}) = \bar{W}_{\oplus}(\mathcal{P}) - W_{\oplus}(0) = \frac{GM_{\oplus}\rho^2}{\Delta^3} P_2(\cos Z_{\oplus}). \quad (1.22)$$

Выразим угол Z_{\oplus} через ψ — угол между направлениями на точку \mathcal{P} и на среднее положение Земли, которое совпадает с направлением оси X . Известно, что угловые координаты Земли (b_{\oplus} , l_{\oplus}) для лунного наблюдателя изменяются в пределах $\sim 6^{\circ}$. Нетрудно найти

$$\cos^2 Z_{\oplus} = \cos^2 \psi + F(\psi, \varphi, \lambda, b_{\oplus}, l_{\oplus}),$$

где

$$F(\psi, \varphi, \lambda, b_{\oplus}, l_{\oplus}) \approx \\ \approx 2 \cos \varphi [\cos \varphi \sin \lambda \sin l_{\oplus} + \cos \lambda \sin \varphi \sin b_{\oplus}]$$

— функция, зависящая от времени из-за изменения координат Земли (Δ , b_{\oplus} , l_{\oplus}). Используя последнее выраже-

ние, формулу (1.22) перепишем в виде

$$W_{\oplus}(\mathcal{P}) = \frac{GM_{\oplus}\rho^2}{\Delta^3} \left[P_{20}(\cos \psi) + \frac{3}{2} F(\psi, \varphi, \lambda, b_{\oplus}, l_{\oplus}) \right]. \quad (1.23)$$

Воспользовавшись теоремой сложения для $P_{20}(\cos \psi)$ и имея в виду, что $\cos \psi = \cos \varphi \cos \lambda$, напомним окончательное выражение для земного приливного потенциала на Луне:

$$W_{\oplus}(\mathcal{P}) = \frac{GM_{\oplus}\rho^2}{4\Delta^3} \left[-2P_{20}(\sin \varphi) + P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda + \right. \\ \left. + 6F(\psi, \varphi, \lambda, b_{\oplus}, l_{\oplus}) \right]. \quad (1.24)$$

Таким образом, приливной потенциал на Луне состоит из двух частей. Первая, постоянная часть, не зависит от времени, вторая — изменяется со временем. Обе они зависят от координат (φ, λ) точки наблюдения приливных эффектов.

Потенциал центробежного ускорения, обусловленный вращением Луны, существенно меньше земного из-за малой угловой скорости вращения Луны $\omega = 0,26616995 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Величина ω соответствует сидерическому месяцу. Центробежный потенциал Q в точке \mathcal{P} равен

$$Q(\mathcal{P}) = \frac{\omega^2 \rho^2 \cos^2 \varphi}{2} = \frac{\omega^2 \rho^2}{3} [1 - P_{20}(\sin \varphi)].$$

Известно, что согласно третьему закону Кеплера

$$\omega^2 = \frac{GM_{\oplus}}{\Delta^3}.$$

Воспользовавшись этим выражением для ω^2 , получим следующую формулу для центробежного потенциала:

$$Q(\mathcal{P}) = \frac{GM_{\oplus}\rho^2}{3\Delta^3} [1 - P_{20}(\sin \varphi)]. \quad (1.25)$$

Суммируя (1.24), в котором отброшена переменная во времени часть потенциала, и (1.25), получим выражение для приливоцентробежного потенциала на Луне

$$U(\mathcal{P}) = \frac{GM_{\oplus}\rho^2}{6\Delta^3} \left[2 - 5P_{20}(\sin \varphi) + \frac{3}{2} P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda \right]. \quad (1.26)$$

Таким образом, приливоцентробежный потенциал U об-

разован как сумма центробежного Q и приливного W_{\oplus} потенциалов. Он зависит от геоцентрической гравитационной постоянной GM_{\oplus} , координат точек Луны (ρ , φ , λ) и расстояния Δ между Землей и Луной. Как очевидно из уравнения (1.26), потенциал U не зависит от внутреннего строения Луны, поэтому его определение, казалось бы, лишено той трудности, связанной с плохим знанием распределения плотности и фигуры Луны, что было присуще потенциалу притяжения Луны (1.18). Однако это не совсем так. Под действием приливоцентробежного потенциала Луна деформируется, происходит перераспределение ее масс и изменяются координаты точки наблюдения. Возникает неопределенность в знании «жесткости» или податливости Луны к деформациям (§ 47).

В начале параграфа мы говорили, что ускорение G силы тяжести есть векторная сумма всех действующих в данной точке ускорений. Потенциал W ускорения силы тяжести также равен сумме потенциала ускорения V притяжения масс Луны и потенциала U приливоцентробежного ускорения:

$$\begin{aligned} W(\mathcal{P}) &= V(\rho, \varphi, \lambda) + U(\rho, \varphi, \lambda) = \\ &= \frac{GM_{\oplus}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \\ &+ \frac{GM_{\oplus}}{6} \frac{\rho^2}{\Delta^3} \left[2 - 5P_{20}(\sin \varphi) + \frac{3}{2} P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda \right]. \quad (1.27) \end{aligned}$$

Полную величину ускорения силы тяжести $G(\rho, \varphi, \lambda)$ найдем, если продифференцируем последнее выражение по трем ортогональным координатным осям (ρ , φ , λ), сложим их квадраты и извлечем квадратный корень:

$$G(\rho, \varphi, \lambda) = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2}. \quad (1.28)$$

Очевидно, что в основном G определяется величиной $\frac{\partial W}{\partial \rho}$.

Рассматривая потенциал $W(x, y, z)$ как некоторую функцию координат x, y, z и приравняв ее некоторой константе, получим неявное уравнение поверхности

$$W(x, y, z) = \text{const}. \quad (1.29)$$

Оно обладает важными для гравиметрии свойствами. Это уравнение эквипотенциальных или уровенных поверхностей. Изменяя const , получим семейство уровенных поверхностей. Поскольку компонента ускорения силы тяжести по направлению l равна

$$G_l = \frac{\partial W}{\partial l} = G \cos(\widehat{Gl}),$$

то приращение потенциала при перемещении на элементарное расстояние dl может быть определена по формуле

$$dW = G \cdot dl.$$

Если направление G совпадает с направлением l , то $\cos(\widehat{Gl}) = 1$ и приращение dW наибольшее. Равенство $\cos(\widehat{Gl}) = 0$ означает, что приращение потенциала не происходит при движении вдоль уровенной поверхности. Подчеркнем, что равенство потенциалов на уровенной поверхности совсем не означает равенства силы тяжести на этой поверхности. Также, если бы мы построили поверхность равной силы тяжести, потенциал в точках такой поверхности был бы разным.

§ 4. Величины, с помощью которых характеризуется гравитационное поле Луны

Наряду с принятыми для Земли характеристиками гравитационного поля: гравитационным потенциалом, составляющими ускорения по различным координатным осям, градиентами этих составляющих ускорений, для Луны рассматриваются еще лучевые ускорения. Лучевое ускорение — это компонента ускорения по направлению «ИСЛ — станция доплеровских наблюдений на Земле». С достаточным приближением ее можно отождествлять с ускорением по направлению Земля — Луна. Только в центральных областях Луны лучевые ускорения совпадают с радиальными к Луне ускорениями. Потенциал W является величиной скалярной, т. е. его величина зависит только от координат точки наблюдения и не зависит от направления. Ускорение же, равно как и его градиенты, — вектор; помимо модуля, он имеет определенное направление. Поскольку Луна имеет форму, близкую к шару, и распределение плотности в ней в общем концент-

рическое, основная составляющая ускорения имеет радиальное направление, так же как и наибольшие градиенты. Составляющие же, ортогональные к радиальному направлению, имеют относительно меньшие величины. Наличие последних обусловлено небольшим отличием Луны от шаровой формы и плотностными неоднородностями внутри Луны. Разумеется, оба эти обстоятельства создают вариации также радиального ускорения и его градиентов. Выражение для ускорения силы тяжести G приведено выше (1.28). Составляющая ускорения, ортогональная к радиальному $\frac{\partial W}{\partial \rho}$, т. е. касательная к сферической поверхности Луны, выражается так:

$$G_l = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2},$$

где $G_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \varphi}$ — широтная и $G_\lambda = \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial W}{\partial \lambda}$ — долготная компоненты ускорений. Ввиду малости G_l по сравнению с $\frac{\partial W}{\partial \rho}$ во многих задачах можно радиальный градиент силы тяжести $\frac{\partial G}{\partial \rho}$ считать равным $\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2}$. Лучевое ускорение Γ в прямоугольной системе координат, выбранной так, что ось X , с началом в центре Луны, направлена на Землю, равно

$$\Gamma = \frac{\partial W}{\partial X}.$$

Важной характеристикой гравитационного поля являются отклонения отвеса. Составляющие отклонения отвеса по направлению меридиана равны

$$\xi = 206265 \frac{\frac{1}{R} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)}{G} \quad (\text{в сек. дуги}),$$

а по направлению параллели

$$\eta = 206265 \frac{\frac{1}{R} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)}{G \cos \varphi} \quad (\text{в сек. дуги}).$$

Полное отклонение отвеса

$$l = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Не все из названных характеристик измеряются непосредственно, но все они могут быть вычислены, если задано распределение одной из них на некоторой замкнутой поверхности, охватывающей Луну. Для таких вычислений применяются методы решения краевых задач теории потенциала. Задача ставится так: всюду на известной замкнутой поверхности S задан гравитационный потенциал $W(r, \varphi, \lambda)|_S = f(r, \varphi, \lambda)$, создаваемый массами, произвольно распределенными внутри S . Требуется определить потенциал или его производные в точках внешнего, по отношению к S , пространства. Простое аналитическое решение этой задачи имеется только для эллипсоида, сферы

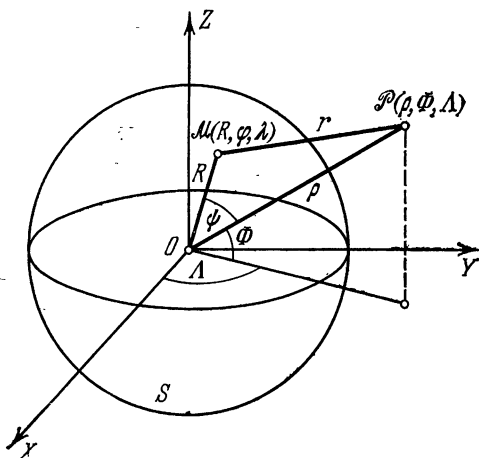


Рис. 7. Угловые координаты и расстояния, от которых зависит выражение интеграла Пуассона для сферы.

и плоскости. Если по заданной на сфере потенциальной функции определяется в точках пространства эта же функция (задача Дирихле), то решение выражается интегралом Пуассона (рис. 7)

$$W(\rho, \Phi, \Lambda) = \frac{\rho^2 - R^2}{4\pi R} \iint_S \frac{W(R, \varphi, \lambda)}{r^3} dS. \quad (1.30)$$

Применительно к Луне, принимаемой за сферу S радиуса R , здесь применяются следующие обозначения: ρ, Φ, Λ — сферические координаты точки \mathcal{P} , в которой определяется потенциал, $W(\rho, \Phi, \Lambda)$; $W(R, \varphi, \lambda)$ — потен-

циал, заданный в текущих точках M (R, φ, λ) поверхности сферы, $r = \sqrt{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \psi}$ — расстояние между точками \mathcal{P} и текущей точкой M . Производную потенциала любого порядка по направлению координатных осей X, Y, Z в точке \mathcal{P} (ρ, Φ, Λ) можно получить, если продифференцировать обе части последнего равенства по этим направлениям:

$$\frac{\partial^{m+n+l} W}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l} = \iint_S W(R, \varphi, \lambda) K(R, \varphi, \lambda, \rho, \Phi, \Lambda) dS, \quad (1.31)$$

где $K = \left[\frac{\partial^{m+n+l}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{4\pi R r^3} \right) \right]_{\substack{x=\rho \cos \Phi \cos \Lambda \\ y=\rho \cos \Phi \sin \Lambda \\ z=\rho \sin \Phi}}$

— ядро преобразования,

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ r &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} = \\ &= \sqrt{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \psi}, \\ \cos \psi &= \cos \varphi \cos \Phi + \sin \varphi \sin \Phi \cos(\lambda - \Lambda). \end{aligned}$$

Если же мы желаем определить составляющую притяжения $\frac{\partial W}{\partial \rho}$ по радиальному направлению ρ , то ядро преобразования равно

$$K_\rho = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{4\pi R r^3} \right) = \frac{-\rho^2 (R \cos \psi + \rho) + R^2 (5\rho - 3R \cos \psi)}{4\pi R r^5}.$$

В случае определения составляющих, касательных к сферической поверхности S : широтной G_Φ и долготной G_Λ , ядра имеют вид соответственно

$$\begin{aligned} K_\Phi &= \frac{\partial}{R \partial \Phi} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{4\pi R r^3} \right) = \frac{3(\rho^2 - R^2) \rho}{4\pi R r^5} \frac{\partial \cos \psi}{\partial \Phi}, \\ K_\Lambda &= \frac{1}{R \cos \Phi} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{4\pi R r^3} \right) = \frac{3(\rho^2 - R^2) \rho}{4\pi R r^5 \cos \Phi} \frac{\partial \cos \psi}{\partial \Lambda}. \end{aligned}$$

Наконец приведем еще выражение ядра преобразования для вычисления второй радиальной производной потенциала $\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2}$:

$$\begin{aligned} K_{\rho\rho} &= \frac{R^2 (5R^2 - 23\rho^2 + 28R\rho \cos \psi - 15R^2 \cos^2 \psi - \rho^2 \cos^2 \psi)}{4\pi R r^7} + \\ &+ \frac{2\rho^3 (\rho + 2R \cos \psi)}{4\pi R r^7}. \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление той или иной производной гравитационного потенциала Луны сводится к интегрированию заданного потенциала $W(R, \varphi, \lambda)$ по поверхности сферы с соответствующим ядром.

На рис. 8 представлено гравитационное поле Луны для одного из участков ее видимой стороны, ограниченной долготами $\lambda = +27^\circ$ и $\lambda = -22^\circ$ и широтами $\varphi = 2^\circ$ и $\varphi = 9^\circ$. Для этой области по доплеровским наблюдениям ИСЛ, запущенного с «Аполлона-16», были выведены лучевые ускорения Γ (рис. 8, а), которые для этой области практически совпадают с вертикальной компонентой силы тяжести W_z (сечения даны через 10 мГал). Поле относилось к высотам движения космического аппарата 13—20 км. Оно аппроксимировалось [24] полем 28 больших точечных масс под лунной поверхностью и помещенных в узлах сетки через каждые 15 км малых точечных масс. Наблюдаемое поле W_z аппроксимируется с помощью поля этих масс со средней квадратической ошибкой $\mp 0,6$ мГал. На последующих рисунках изображены карты изолиний, рассчитанные по точечным массам, для W_z на трех высотах: $H = 15, 30, 60$ км (рис. 8, б, в, г) с сечением через 10 мГал, для вертикального градиента W_{zz} на этих же высотах (рис. 8, д, е, ж) с сечением через 5Е для высот 15 и 30 км и через 2Е для высоты 60 км, для производной $\frac{1}{2}(W_{zz} - W_{xx})$ на $H = 30$ км с сечением через 2Е (рис. 8, з) и для лучевой скорости v на $H = 30$ км с сечением через 10 мм/с (рис. 8, и). Из приведенных карт видно, что различные производные гравитационного потенциала с разной степенью детальности способны характеризовать гравитационное поле на одной и той же высоте. Детальность убывает для всех производных с высотой, причем быстрее для вторых производных потенциала, нежели для W_z .

В таблице 8 приведены некоторые из названных характеристик, дана их размерность, полная величина, возможная региональная аномалия на поверхности Луны. В этой же таблице в отдельном столбце для сравнения приведены соответствующие величины для Земли. Обращает на себя внимание существенно бóльшая аномальность гравитационного поля Луны по сравнению с земным.

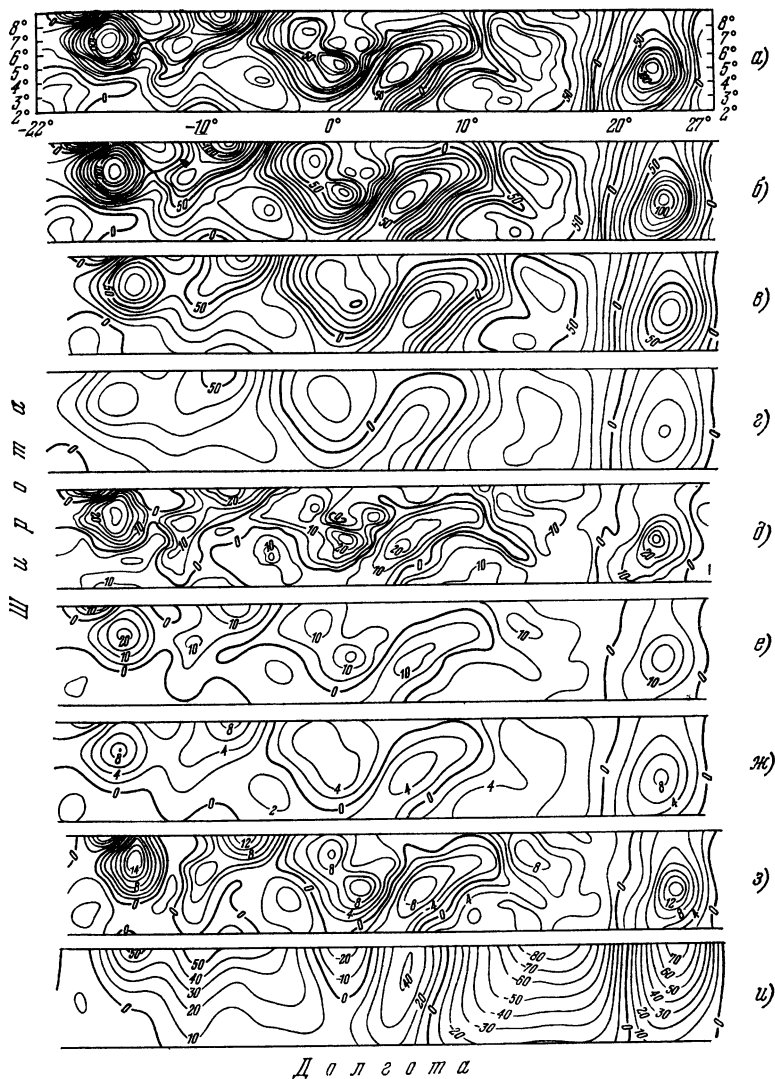


Рис. 8. Карты изолиний — величин, характеризующих гравитационное поле Луны, для области на видимой стороне Луны.

Таблица 8

Сравнение некоторых характеристик гравитационного поля Луны и Земли, $[L]$ — длина, $[T]$ — время

Наименование характеристик, размерность	Единица измерения, ее название и обозначение	Их величина и возможная аномалия на поверхности (в скобках)	
		Луна	Земля
Потенциал ускорения силы тяжести W , $[L]^2[T]^{-2}$	$10^7 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-2}$	2824 (± 12)	62637 (± 70)
Ускорение силы тяжести g , $[L][T]^{-2}$	$10^{-3} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} = 1 \text{ миллигал}$ (мГал)	162 700 (± 500)	980 600 (± 300)
Радиальный градиент ускорения силы тяжести $\frac{\partial g}{\partial \rho}$, $[T]^{-2}$	$10^{-9} \text{ с}^{-2} = 1 \text{ ЭТВеш}$ (Е)	1870 (± 500)	3036 (± 100)
Составляющая притяжения, касательная к поверхности W_x , W_y , $[L][T]^{-2}$	$10^{-3} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} = 1 \text{ миллигал}$ (мГал)	(± 600)	(± 300)
Составляющие уклонения отвеса ξ , η	угловые секунды	± 500	± 60

В заключение упомянем об одном интересном обстоятельстве. Если бы в одной-единственной точке пространства были определены все производные гравитационного потенциала, то в принципе этого было бы достаточно, чтобы определить гравитационное поле во всем пространстве. Необходимо только условие, чтобы это пространство не содержало масс, создавших поле. Однако измерение уж третьих производных потенциала встречает непреодолимые технические трудности с точки зрения необходимой точности изготовления узлов такого прибора и создания стабильных условий измерений.

§ 5. Некоторые замечания по поводу разложения в ряд по сферическим функциям

Плотностная неоднородность недр и неправильность внешней фигуры приводят к тому, что Луна имеет сложное гравитационное поле. Но его все же можно описать аналитическим выражением. Это было показано в § 3,

где было выведено разложение (1.18), представляющее гравитационное поле Луны в точках лунной поверхности и ее внешнего пространства. В принципе разложение (1.18) совершенно точно описывает гравитационное поле Луны, зависящее от всех мельчайших неправильностей ее фигуры и внутреннего строения. Оно представляет собой сложное неправильно изменяющееся поле в виде суммы простых знакопеременных функций

$$C_{nm}P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda \text{ и } S_{nm}P_{nm}(\sin \varphi) \sin m\lambda,$$

$m = 0, 1 \dots n, n = 0, 1, 2, \dots$, которые называют гармониками разложения. Амплитуда этих гармоник C_{nm}

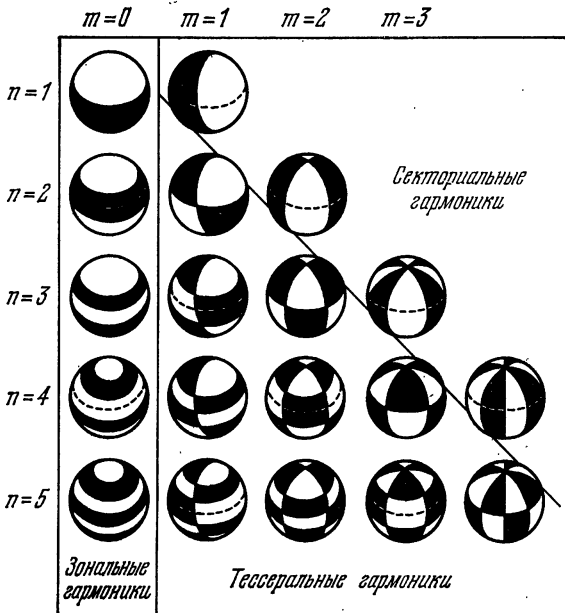


Рис. 9. Области положительных и отрицательных значений для различных поверхностных сферических функций

$$P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda, \quad P_{nm}(\sin \varphi) \sin m\lambda.$$

и S_{nm} . Более мелкие детали неоднородности поля учитываются более высокими гармониками разложения, т. е. членами с большими номерами индексов m и n (рис. 9). Чисто широтные изменения гравитационного поля Луны описываются членами, для которых индекс $m = 0$. По-

линомы $P_{n0}(\sin \varphi)$ - обращаются в нуль на системе n параллелей Луны, делящих ее поверхность на зоны, в которых функция $P_{n0}(\sin \varphi)$ принимает положительные и отрицательные значения. Эти функции называются *зональными* сферическими функциями. Они описывают составляющие поля, симметричные относительно оси вращения Луны. Если индексы n четны, то добавляется еще симметрия относительно экваториальной плоскости, при нечетных индексах n компоненты описывают экваториальную асимметрию. Если индексы $m=n$, то $P_{nm}(\sin \varphi) \cos n\lambda$, $P_{nm}(\sin \varphi) \sin n\lambda$ называются *секториальными* сферическими функциями. Эти функции обращаются в нуль на n меридианах, принимая попеременно положительные и отрицательные значения в сферических секторах, ограниченных этими меридианами. Сферические функции с $P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda$, $P_{nm}(\sin \varphi) \sin m\lambda$, для которых $0 < m < n$, называются *тессеральными*. Они принимают попеременно положительные и отрицательные значения в сферических четырехугольниках (а в околополюсных областях в сферических треугольниках), ограниченных системой параллелей и меридианов. Сферические функции обладают важным свойством ортогональности на сфере, которое описывается следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda) (P_{ks}(\sin \varphi) \sin s\lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda &= 0, \\ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda) (P_{ks}(\sin \varphi) \cos s\lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda &= \\ &= \frac{2(n+m)! \delta_{nk} \delta_{ms}}{(2n+1)(n-m)!}, \\ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (P_{nm}(\sin \varphi) \sin m\lambda) (P_{ks}(\sin \varphi) \sin s\lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda &= \\ &= \frac{2(n+m)! \delta_{nk} \delta_{ms}}{(2n+1)(n-m)!}, \end{aligned} \right\} (1.32)$$

где символы Кронекера

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq k, \\ 1, & \text{если } n = k, \end{cases} \quad \delta_{ms} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq s, \\ 1, & \text{если } m = s. \end{cases}$$

При анализе и использовании гравитационного поля Луны, представленного в виде разложения в ряд по сферическим функциям, иногда удобнее иметь нормированные сферические функции и нормированные гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} . Нормировочные коэффициенты N_{nm} определяются из условия

$$[N_{nm}]^2 \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[P_{nm}(\sin \varphi) \frac{\cos m\lambda}{\sin m\lambda} \right]^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda = 1. \quad (1.33)$$

Легко можно убедиться, что

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\lambda d\lambda = 2\pi, \quad m = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\lambda d\lambda = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\lambda d\lambda = \pi, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [P_{nm}(\sin \varphi)]^2 \cos \varphi d\varphi = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}.$$

Используя эти равенства, на основании (1.33) получим

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{(2 - \delta_m)(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}}, \quad (1.34)$$

где

$$\delta_m = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq 0, \\ 1 & \text{при } m = 0. \end{cases}$$

Таким образом, нормированные коэффициенты \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} в разложении

$$W(\rho, \varphi, \lambda) = \quad (1.35)$$

$$= \frac{GM_\zeta}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi),$$

связаны с ненормированными так:

$$\bar{C}_{nm} = \frac{C_{nm}}{N_{nm}}, \quad \bar{S}_{nm} = \frac{S_{nm}}{N_{nm}},$$

и одновременно нормированные присоединенные функции Лежандра с ненормированными:

$$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi) = P_{nm}(\sin \varphi) N_{nm}.$$

В качестве примера в табл. 9 приведены значения коэффициентов N_{nm}^{-1} для первых пяти гармоник.

Таблица 9

Значения нормирующих множителей N_{nm}^{-1}

$n \backslash m$	0	1	2
0	1,000 00		
1	0,577 35	0,577 350	
2	0,447 214	0,774 597	1,549 193
3	0,377 964	0,925 820	2,927 700
4	0,333 333	1,054 093	4,472 136
5	0,301 511	1,167 748	6,179 144
...			
$n \backslash m$	3	4	5
0			
1			
2			
3	7,171 372		
4	16,733 201	47,328 638	
5	30,271 499	128,431 092	406,134 77
...			

Если бы мы знали фигуру Луны Ω и распределение плотности σ , то могли бы по формулам (1.19) подсчитать гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} , а с помощью равенства (1.18) можно было бы однозначно определить потенциал притяжения в любой точке внешнего пространства. Однако отсутствие надежных данных об объеме Ω и плотности σ делает такой путь вычисления потенциала W невозможным. В этом случае поступают иначе. Ограничиваются в разложении (1.18) конечным числом членов разложения и рассматривают его как аппроксимирующий многочлен с неопределенными коэффициентами C_{nm} и

S_{nm} . Число этих коэффициентов равно $(n + 1)^2$, где n — порядок усеченного разложения. Необходимо знать по крайней мере значения функции W в $(n + 1)^2$ различных точках лунной поверхности или окололунного пространства вместе с координатами точек. Однако для надежности определения C_{nm} и S_{nm} число наблюдений должно быть во много раз больше. Тогда, решая систему $(n + 1)^2$ уравнений, можно определить $(n + 1)^2$ неизвестных C_{nm} и S_{nm} . В этом состоит лишь идея определения гармонических коэффициентов разложения. На самом деле для Луны потенциал измеряется опосредствованно. Наблюдаются возмущения в элементах орбиты ИСЛ, возникающие из-за неоднородности гравитационного поля Луны, а по ним определяются гармоники разложения потенциала W . Об определении гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} по наблюдениям ИСЛ подробнее будет рассказано в следующей главе. Коэффициенты C_{nm} и S_{nm} могут быть определены по гравиметрическим измерениям по всей поверхности планеты, как было на Земле. При этом определяются коэффициенты аппроксимирующего многочлена не для потенциала W , а для силы тяжести G . Коэффициенты разложения для G связаны с соответствующими коэффициентами аналогичного разложения для W простыми соотношениями (§ 24). Существует много схем вычисления гармонических коэффициентов разложения в ряд по сферическим функциям, изложенных в учебниках и монографиях [3], [6], [7] и др. Чаще всего берется схема, в которой используется свойство ортогональности сферических функций на сфере. Эта схема позволяет определять гармонические коэффициенты A_{nm} и B_{nm} разложения силы тяжести $G(\varphi, \lambda)$, заданной по всей поверхности Земли, независимо друг от друга, на основе соотношений

$$A_{nm} = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_S G(\varphi_1, \lambda_1) P_{nm}(\sin \varphi_1) \cos m\lambda_1 dS,$$

$$B_{nm} = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_S G(\varphi_1, \lambda_1) P_{nm}(\sin \varphi_1) \sin m\lambda_1 dS.$$

Определение коэффициентов разложения в ряд по сферическим функциям до появления ЭВМ являлось трудной проблемой. В свое время в связи с разложением магнит-

ного поля Земли в ряд по сферическим функциям до 4-го порядка, когда возникла необходимость вычислить 25 коэффициентов, Гаусс писал, что «как ни однообразно такое вычисление..., оно оттолкнуло бы, вероятно, и самого смелого вычислителя». Известно, что А. Прей [33] более полувека назад на осуществление разложения рельефа Земли в ряд сферических функций затратил 13 лет работы.

Разложение в ряд по сферическим функциям имеет то достоинство, что оно простое, его численно-аналитическое выражение позволяет использовать его в различных аналитических преобразованиях. Однако оно имеет большой недостаток, который состоит в медленной сходимости ряда в силу небольшого убывания коэффициентов разложения, особенно при изучении гравитационного поля на поверхности Луны или в ее ближайшей окрестности. Кроме того, разложение в ряд сферических функций представляет данное гравитационное поле в среднем по всей Луне. Поэтому, если на фоне в целом спокойного гравитационного поля имеется одна локальная гравитационная аномалия большой амплитуды, то для ее отражения в разложении по сферическим функциям необходимо большое число гармоник. Например, если протяженность этой локальной аномалии 1° , то необходимо иметь по крайней мере разложение 180-го порядка, что означает необходимость определять $(n + 1)^2 = 32\,761$ коэффициент разложения. Этого можно избежать, используя некоторые другие виды разложений.

§ 6. Разложение в ряд по выборочным функциям

В последние годы разработан новый вид разложения на сфере, лишенный некоторых недостатков и обладающий рядом важных свойств, присущих разложению по сферическим функциям. Это разложение по так называемым *выборочным функциям*. Каждая из выборочных функций имеет резко выраженный максимум в одной точке на сфере и, колеблясь около нуля, принимая то положительные, то отрицательные значения, убывает по мере удаления от точки максимума. Максимумы этих функций располагаются в точках, которые называются *выборочными*.

Последние равномерно распределены по поверхности сферы (и на прямой в случае одномерной задачи). Именно свойство наличия максимума функции позволяет при аппроксимации наблюдаемого поля потенциальных функций ограничиваться меньшим числом членов ряда в разложении по выборочным функциям, чем в разложении по сферическим функциям. Так же, как и для сферических функций, возможно использовать разложение по выборочным функциям различных порядков: чем выше порядок, тем большая детальность аппроксимации возможна. Выборочные функции обладают очень важным свойством ортогональности в области задания (на сфере, прямой). Коэффициенты разложения наблюдаемого гравитационного поля по выборочным функциям являются точными значениями этого поля в выборочных точках. Наконец, любое другое представление (например через интерполяционные полиномы Лагранжа) хотя и может давать однозначное соответствие исходному полю по выбранной системе точек, однако оно не обладает теми замечательными свойствами, которые присущи сферическим функциям. Между сферическими и выборочными функциями имеется однозначная линейная связь. Поэтому поскольку первые являются решением уравнения Лапласа, то и выборочные функции будут удовлетворять этому уравнению и будут являться гармоническими функциями. При решении как задач теории фигуры планеты, так и других задач, связанных с трансформацией исходного гравитационного поля, свойство гармоничности используемых функций весьма важно. Именно в силу этого свойства рассматриваемых функций возможно применение определенного математического аппарата.

Впервые выборочные функции были использованы в теории информации. Это были одномерные выборочные функции. С их помощью представлялась периодическая функция $F(\lambda)$ с периодом 2π , заданная в $2n + 1 = N$ выборочных точках интервала $[0, 2\pi]$,

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{2n} F(\lambda_k) q_{Nk}(\lambda). \quad (1.36)$$

Здесь $q_{Nk}(\lambda)$ — выборочные функции, которые можно

представить в виде [11]

$$q_{Nk}(\lambda) = \frac{1}{2n+1} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^n \cos j(\lambda - \lambda_k) \right] =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \left[\frac{2n+1}{2} (\lambda - \lambda_k) \right]}{\sin \frac{\lambda - \lambda_k}{2}}, \quad (1.37)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$, а $F(\lambda_k)$ — значения функции $F(\lambda)$ в выборочных точках, в интервале изменения аргумента λ , равном $[0, 2\pi]$. Выбираются $2n + 1$ выборочных точек, распределенных вдоль λ по закону

$$\lambda_k = \frac{2\pi k}{2n+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n. \quad (1.38)$$

Из равенства (1.37) видно, что выборочная функция $q_{Nk}(\lambda)$ представляет собой разложение Фурье, усеченное n -й гармоникой. Изменение одномерной выборочной функции $q_{N0}(\lambda)$ показано на рис. 10. Изменение индекса N выбо-

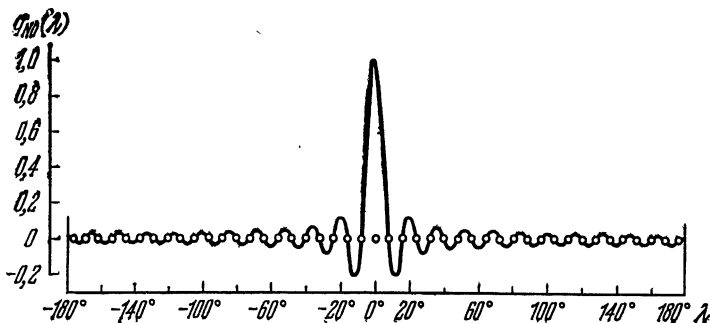


Рис. 10. Изменение одномерной выборочной функции $q_{N0}(\lambda)$ в зависимости от λ ($n = 22$).

рочной функции $q_{Nk}(\lambda)$ приводит к изменению ее вида. При большем номере N возможна большая детальность представления исходной функции. Индекс k задает смещение выборочной функции одного и того же вида вдоль оси λ на величину λ_k . Выборочная функция $q_{Nk}(\lambda)$ обладает рядом важных свойств,

1. Значения выборочных функций в выборочных точках λ_k равны

$$q_{Ni}(\lambda_k) = \delta_{ik}, \quad (1.39)$$

где символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{когда } i = k, \\ 0, & \text{когда } i \neq k. \end{cases}$$

2. Выборочные функции являются ортогональными по системе выборочных точек

$$\sum_{k=0}^{2n} q_{Ni}(\lambda_k) q_{Nj}(\lambda_k) = \delta_{ij}. \quad (1.40)$$

3. Выборочные функции нормированы по системе выборочных точек λ_k и по системе выборочных функций в выборочных точках:

$$\sum_{k=0}^{2n} q_{Ni}(\lambda_k) = \sum_{i=0}^{2n} q_{Ni}(\lambda_k) = 1. \quad (1.41)$$

В соответствии с (1.36) имеем

$$\left. \begin{aligned} \cos m\lambda &= \sum_{k=0}^{2n} (\cos m\lambda_k) q_{Nk}(\lambda), \\ \sin m\lambda &= \sum_{k=0}^{2n} (\sin m\lambda_k) q_{Nk}(\lambda), \\ m &= 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

Поскольку в советской литературе нет сколько-нибудь подробного изложения метода разложения функций на сфере по выборочным функциям, мы кратко остановимся на их описании. При своем изложении мы будем следовать в основном Джакалия и Лундквисту [25]. Известны также и другие работы, посвященные этим функциям [34], [11] и др. Выборочные функции на сфере строятся по аналогии с описанной одномерной выборочной функцией q_{Nk} . Но в основе их вместо тригонометрических функций используются нормированные поверхностные сферические функции. Сначала на основе этих функций строятся некоторые вспомогательные функции S_j . Число этих функций равно числу $N = (n + 1)^2$, где n — порядок

сферических функций, используемых для построения вспомогательных функций. Числу N равно также и число выборочных точек, которые распределены на сфере. Выборочная точка характеризуется двумя координатами (φ_i, λ_j) . Однако в дальнейших выводах удобно использовать одноиндексное обозначение как выборочных точек, так и вспомогательных функций S_j и выборочных функций. Координаты упорядоченной системы выборочных точек будем обозначать \mathcal{P}_k , где $k = 1, 2, \dots, N$. Система вспомогательных функций должна обладать свойством ортогональности по системе выборочных точек, т. е.

$$[S_j, S_i] = \sum_{k=1}^N S_j(\mathcal{P}_k) S_i(\mathcal{P}_k) = \delta_{ij}. \quad (1.43)$$

$[S_j, S_i]$ — краткое обозначение суммирования произведений функций S_j по системе выборочных точек. Выборочные функции $W_{Np}(\mathcal{P})$ определяются для точек сферы, координаты которых (\mathcal{P}) , как линейная комбинация вспомогательных функций S_i ,

$$W_{Np}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^N \beta_p^i S_i(\mathcal{P}). \quad (1.44)$$

Первый из индексов выборочной функции N показывает число исходных сферических функций порядка n , на основе которых построена данная выборочная функция $W_{Np}(\mathcal{P})$. В определенном смысле N задает как бы порядок выборочных функций. При большем N возможна большая детальность поля. Индекс p показывает, относительно какой выборочной точки \mathcal{P}_k рассматривается данная выборочная функция $W_{Np}(\mathcal{P}_k)$. Выборочная функция должна удовлетворять условию

$$W_{Np}(\mathcal{P}_k) = \delta_{pk}. \quad (1.45)$$

Иными словами, значение выборочной функции в выборочных точках \mathcal{P}_k равно единице или нулю в зависимости от соотношения индексов p и k . Выборочные функции W_{Np} обладают рядом свойств, аналогичных свойствам функций q_{Nk} .

1. Ортогональность по системе выборочных точек:

$$\sum_{k=1}^N W_{Ni}(\mathcal{P}_k) W_{Nj}(\mathcal{P}_k) = \delta_{ij}. \quad (1.46)$$

2. Нормированность по системе выборочных точек и по системе выборочных функций в выборочных точках:

$$\sum_{k=1}^N W_{Np}(\mathcal{P}_k) = \sum_{p=1}^N W_{Np}(\mathcal{P}_k) = 1. \quad (1.47)$$

3. Нормированность по всей области определения:

$$\sum_{k=1}^N W_{Nk}(\mathcal{P}) = 1. \quad (1.48)$$

Разложение любой квадратично интегрируемой функции $F(\mathcal{P})$, заданной на сфере, координаты точек которой \mathcal{P} , представляется в виде ряда по выборочным функциям $W_{Np}(\mathcal{P})$ следующим образом:

$$F(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^N F(\mathcal{P}_k) W_{Nk}(\mathcal{P}), \quad (1.49)$$

где $F(\mathcal{P}_k)$ — значения функции $F(\mathcal{P})$ в выборочных точках \mathcal{P}_k , k — порядковый номер выборочной точки.

Построение выборочных функций для сферы начнем с того, что вместо двухиндексных обозначений сферических функций перейдем к одноиндексному следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_1 &= \bar{P}_{00}(\zeta), & \bar{X}_2 &= \bar{P}_{10}(\zeta), & \bar{X}_3 &= \bar{P}_{11}(\zeta) \sin \lambda, \\ \bar{X}_4 &= \bar{P}_{11}(\zeta) \cos \lambda, & \bar{X}_5 &= \bar{P}_{20}(\zeta), & \bar{X}_6 &= \bar{P}_{21}(\zeta) \sin \lambda, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

где $\zeta = \sin \varphi$.

Рассматривается нормированная система функций $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N$. По определению, сферические функции являются ортогональными функциями на сфере. Ставится задача: на основе этой системы построить новую систему из N вспомогательных функций $S_1(\mathcal{P}), S_2(\mathcal{P}), \dots, S_N(\mathcal{P})$, обладающих свойством (1.43) ортогональности в ряде выборочных точек $\mathcal{P}_k, k = 1, 2, \dots, N$.

Для построения системы вспомогательных функций S_j применяется известный процесс ортогонализации Грама — Шмидта. В результате его применения получается следующая система рекуррентных соотношений для определения вспомогательных функций S_j :

$$\begin{aligned} S_1(\zeta, \lambda) &= \alpha_1^1 \bar{X}_1(\zeta, \lambda), \\ S_2(\zeta, \lambda) &= \alpha_2^2 \bar{X}_2(\zeta, \lambda) + \alpha_2^1 S_1(\zeta, \lambda), \end{aligned}$$

Таким образом, имеются все формулы, по которым можно построить систему вспомогательных функций $S_p(\mathcal{P})$. Это прежде всего формула (1.51). Необходимые для вычисления $S_p(\mathcal{P})$ коэффициенты α_p^i определяются по соотношению (1.54), а α_p^j — по (1.53). Формулы (1.51), (1.53), (1.54) показывают, что вычисление вспомогательных функций $S_p(\mathcal{P})$ должно проводиться последовательно, сначала S_1 , затем S_2 и т. д. Для их вычисления необходимо знать координаты \mathcal{P} выборочных точек, так как для нахождения α_p^i и α_p^j согласно формулам (1.53) и (1.54) необходимо вычислять $[\bar{X}_p, \bar{X}_p]$ и $[\bar{X}_p, S_i]$, т. е. проводить суммирование по системе выборочных точек.

Получив систему вспомогательных функций $S_p(\mathcal{P})$, можно приступить к построению выборочных функций $W_{Np}(\mathcal{P})$, как линейных комбинаций функций $S_p(\mathcal{P})$ (1.44). При этом выборочные функции $W_{Np}(\mathcal{P})$ в выборочных точках \mathcal{P}_k ($k = 1, 2, \dots, N$) должны подчиняться условию (1.45). Для того чтобы определить коэффициенты β_p^i в (1.44), умножим обе части этого равенства на $S_j(\mathcal{P})$ и просуммируем по системе выборочных точек \mathcal{P}_k :

$$\sum_{k=1}^N S_j(\mathcal{P}_k) W_{Np}(\mathcal{P}_k) = \sum_{k=1}^N S_j(\mathcal{P}_k) \sum_{i=1}^N \beta_p^i S_i(\mathcal{P}_k).$$

Правая часть последнего равенства в силу ортогональности вспомогательных функций $S_j(\mathcal{P})$ по системе выборочных точек равна β_p^i , а левая — $S_j(\mathcal{P}_p)$. Отсюда следует, что

$$\beta_p^i = S_i(\mathcal{P}_p).$$

Подставив найденное выражение β_p^i в уравнение (1.44), получим

$$W_{Np}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^N S_i(\mathcal{P}_p) S_i(\mathcal{P}). \quad (1.56)$$

Таким образом, выборочная функция W_{Np} есть линейная комбинация вспомогательных функций S_i , коэффициентами которой являются значения вспомогательных функций в выборочных точках \mathcal{P}_p . Верно также и обратное соотношение

$$S_p(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^N S_p(\mathcal{P}_k) W_{Nk}(\mathcal{P}). \quad (1.57)$$

Перепишем разложение (1.56) в двухиндексном обозначении поверхностных сферических функций

$$W_{Np}(\zeta, \lambda) = \sum_{n_1=0}^n \sum_{m=0}^{n_1} [(A_{n_1 m}^{Np})_1 X_{n_1 m}(\zeta, \lambda) + (A_{n_1 m}^{Np})_2 Y_{n_1 m}(\zeta, \lambda)],$$

где

$$X_{n_1 m} = P_{n_1 m}(\zeta) \cos m\lambda,$$

$$Y_{n_1 m} = P_{n_1 m}(\zeta) \sin m\lambda.$$

Тогда имеет место формула, аналогичная (1.57), но относящаяся не к вспомогательным функциям S_j , а к поверхностным сферическим \bar{X}_{nm} :

$$\bar{X}_{nm}(\zeta, \lambda) = \sum_{k=1}^N \bar{X}_{nm}(\mathcal{P}_k) W_{Nk}(\zeta, \lambda),$$

$$\bar{Y}_{nm}(\zeta, \lambda) = \sum_{k=1}^N \bar{Y}_{nm}(\mathcal{P}_k) W_{Nk}(\zeta, \lambda).$$

Иными словами, нормированная сферическая функция равна сумме по системе выборочных точек \mathcal{P}_k произведений значений соответствующей сферической функции в выборочной точке на выборочную функцию W_{Nk} . Теперь поставим задачу выразить выборочные функции непосредственно через нормированные поверхностные сферические функции (1.50). Это сделать возможно, так как вспомогательные функции $S_j(\mathcal{P})$ (1.51) строились как комбинации сферических функций. Запишем выборочную функцию в виде суммы нормированных сферических функций, используя одноиндексное их обозначение:

$$W_{Np}(\zeta, \lambda) = \sum_{i=1}^N \bar{A}_{pi} \bar{X}_i(\zeta, \lambda), \quad (1.58)$$

где \bar{A}_{pi} — неопределенные коэффициенты, которые необходимо выразить через известные коэффициенты. Для изучения структуры A_{pi} воспользуемся рекуррентной формулой (1.51) для вспомогательных функций S_p . Будем последовательно подставлять вместо S_i под знаком суммы в формуле (1.51) ее выражение из той же формулы. В итоге вместо S_i под знаком суммы будем иметь только сферические функции \bar{X}_j . Коэффициентами a_{pj} при этих функциях будут многократные суммы произведений коэффициентов

α_j^i , т. е. вместо (1.51) получим

$$S_p(\zeta, \lambda) = \sum_{j=1}^p a_{pj} \bar{X}_j(\zeta, \lambda). \quad (1.59)$$

После несложных, но громоздких преобразований можно установить, что для коэффициентов a_{pj} существует следующая рекуррентная формула:

$$a_{pj} = a_{pp} \sum_{i=j+1}^p a_{pi} \alpha_i^j, \quad a_{pp} = \alpha_p^p. \quad (1.60)$$

Подставим выражение (1.59) в правую часть формулы (1.56), представляющей выборочную функцию:

$$W_{Np}(\zeta, \lambda) = \sum_{i=1}^N S_i(\mathcal{P}_p) \sum_{j=1}^i a_{ij} \bar{X}_j(\zeta, \lambda).$$

Изменяя в двойной сумме порядок суммирования, будем иметь

$$W_{Np}(\zeta, \lambda) = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=i}^N S_j(\mathcal{P}_p) a_{ji} \right\} \bar{X}_i(\zeta, \lambda). \quad (1.61)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\bar{X}_i(\zeta, \lambda)$ в равенствах (1.61) и (1.58), можно получить выражение для коэффициентов A_{pi} :

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{pi} &= \sum_{j=i}^N S_j(\mathcal{P}_p) a_{ji}, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \\ p &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

Таким образом, имеется набор формул для построения выборочных функций $W_{Np}(\mathcal{P})$ (1.56) и (1.58); в первом случае через систему вспомогательных функций $S_p(\mathcal{P})$, а во втором через систему нормированных поверхностных сферических функций $X_p(\mathcal{P})$. В последнем случае необходимо определить коэффициенты разложения согласно (1.62). Это конкретные числа, зависящие от числа выборочных точек N и в известном смысле от порядка выборочных функций. Для определения A_{pi} надо определить значения вспомогательных функций $S_j(\mathcal{P}_p)$ в выборочных точках по рекуррентному соотношению (1.51). Для вывода a_{ji} в (1.62) также имеются рекуррентная формула (1.60)

и формулы (1.53) и (1.54). Техника разложения в ряд по выборочным функциям сводится к следующему. Строится на сфере система выборочных точек. Коэффициентами разложения при W_{Nk} (1.49) какой-нибудь из потенциальных функций (потенциала, поля силы тяжести, высот селеноида и пр.) являются просто значения этой функции в выборочных точках.

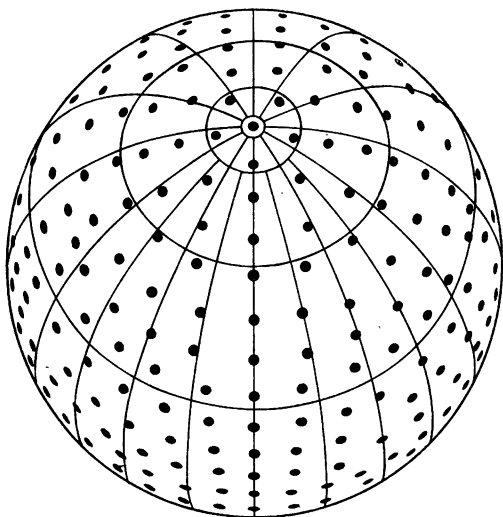


Рис. 11. Распределение выборочных точек на сфере для $n = 22$.

Вернемся к задаче построения системы выборочных точек \mathcal{P}_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Нет строгой математической теории нахождения упорядоченного, экваториально симметричного равномерного распределения точек на сфере. Поэтому выбор делают исходя из условия приближенного равномерного распределения. Широты выборочных точек выбираются так, что

$$\zeta_l = (-1)^l \cos \frac{\pi l}{2n+1}, \quad \text{где } l = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Согласно этой формуле видно, что образуется $n + 1$ параллелей, на которых распределяются выборочные

точки. Долготы этих точек]

$$\lambda_{lj} = \frac{2\pi j}{2l+1} + \left(\left\langle \frac{n+1-l}{2} \right\rangle - 2 \left\langle \frac{n+1-l}{4} \right\rangle \right) \pi. \quad (1.63)$$

Знак $\langle \rangle$ означает целую часть от аргумента. Член в круглой скобке введен для того, чтобы избежать концентрации выборочных точек при $j = 0$ (на нулевом меридиане). Таким образом, на каждой параллели расположено $2n + 1$ выборочных точек, а всего выборочных точек будет $(n + 1)^2$. Для такого расположения доказано, что оно на сфере одинаково плотно при $n \rightarrow \infty$. Это обстоятельство очень важно для доказательства того, что ошибка аппроксимации при представлении выборочными функциями стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. данное разложение сходится в среднем к исходной функции. На рис. 11 представлено для примера распределение выборочных точек для $n = 22$ на сфере.

§ 7. Другие виды численно-аналитического представления гравитационного поля Луны

На карте гравитационного поля Луны обращает на себя внимание наличие отдельных локальных изометрических аномалий. Большие горизонтальные градиенты у этих аномалий свидетельствуют о неглубоком залегании аномалиеобразующих масс. Присутствие таких гравитационных аномалий ухудшает сходимость разложения гравитационного поля Луны в ряд по сферическим функциям и требует использования разложений высоких порядков. Для этого, помимо выборочных функций, могут быть использованы распределения масс в виде простого слоя или точечных масс. Массы простого слоя распределяются по аппроксимирующей Луну поверхности. При этом простой слой, соответствующий данному внутреннему распределению масс, будет единственным. Обратное неверно: одно и то же распределение масс простого слоя может соответствовать различным распределениям объемных масс внутри Луны. Хотя простой слой физически и нереализуем, но его использование как математического понятия удобно при изучении фигуры и внутреннего строения Луны. Простой слой для аппроксимации гравитационного поля

Земли использовался в работах [9], [28] — [30]. Для Луны он применен в исследованиях [4], [5], [31] и др.

Из теории потенциала известно, что если на замкнутой поверхности S_1 распределены массы в виде простого слоя с поверхностной плотностью $\bar{\sigma}_\Pi(\rho_1, \varphi_1, \lambda_1)$, то потенциал притяжения V в точках (ρ, φ, λ) внешнего пространства равен

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = G \iint_{S_1} \frac{\bar{\sigma}_\Pi(\rho_1, \varphi_1, \lambda_1)}{r} dS, \quad (1.64)$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos \psi}$ — расстояние от точки (ρ, φ, λ) до текущей точки $(\rho_1, \varphi_1, \lambda_1)$ поверхности S , ψ — угол между радиусами-векторами ρ и ρ_1 . Интегрирование в формуле (1.64) можно свести к интегрированию по поверхности сферы S радиуса R , вводя вспомогательную функцию χ_Π , связанную с поверхностной плотностью σ_Π соотношением

$$\chi_\Pi(\varphi_1, \lambda_1) = \frac{\bar{\sigma}_\Pi(\rho_1, \varphi_1, \lambda_1)}{\cos(\widehat{n\rho_1})}, \quad (1.65)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S_1 . Потенциал в этом случае преобразуется к виду

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = G \iint_S \frac{\chi_\Pi(\varphi_1, \lambda_1) R^2 \cos \varphi_1 d\lambda_1 d\varphi_1}{r}. \quad (1.66)$$

Замена интегрирования по реальной поверхности S_1 Луны в формуле (1.64) интегрированием по сфере S с прежней поверхностной плотностью $\sigma_\Pi(\rho_1, \varphi_1, \lambda_1)$ вносит относительную ошибку менее 10^{-4} . Поэтому практически вместо реальной поверхности допустимо рассматривать сферу. В дальнейшем будем использовать вместо $\bar{\sigma}_\Pi$ плотность σ_Π , под которой подразумевается поверхностная плотность аномальной части гравитационного поля. Предполагается, что выделена основная, постоянная часть, обусловленная шаровой однородной (или с концентрическим распределением масс) Луной, т. е.

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{\rho} + G \iint_S \frac{\sigma_\Pi(\varphi_1, \lambda_1) dS}{r}, \quad (1.67)$$

где GM_{ζ} — селеноцентрическая гравитационная постоянная, $\sigma_{\Pi} = \bar{\sigma}_{\Pi} - \sigma_{\Pi}^0$, $\sigma_{\Pi}^0 = \frac{M_{\zeta}}{4\pi R^2}$ — поверхностная плотность для однородной Луны.

Распределение поверхностной плотности $\sigma_{\Pi}(\varphi_1, \lambda_1)$ на поверхности сферической Луны, представленное в виде разложения по сферическим функциям, может быть найдено, если имеется разложение потенциала притяжения $V(\rho, \varphi, \lambda)$ (1.18) и заданы коэффициенты этого разложения C_{nm} и S_{nm} :

$$\sigma_{\Pi}(\varphi_1, \lambda_1) = \sigma R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos m\lambda_1 + \beta_{nm} \sin m\lambda_1) P_{nm}(\sin \varphi_1), \quad (1.68)$$

где σ — объемная плотность и

$$\alpha_{nm} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{M_{\zeta}}{\sigma R^3} C_{nm}, \quad \beta_{nm} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{M_{\zeta}}{\sigma R^3} S_{nm}. \quad (1.69)$$

Практически возникает следующая задача. В точках окололунного пространства из доплеровских наблюдений известны значения лучевого ускорения $\Gamma(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{\partial V(\rho, \varphi, \lambda)}{\partial X}$; требуется определить распределение масс простого слоя σ_{Π} , распределенных на аппроксимирующей Луну поверхности. Задача сводится к решению интегрального уравнения вида (рис. 12)

$$\Gamma(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM_{\zeta} R \cos \varphi \cos \lambda}{\rho^3} + G \iint_S \frac{\sigma_{\Pi}(\varphi_1, \lambda_1) R (\cos \varphi \cos \lambda - \cos \varphi_1 \cos \lambda_1) dS}{r^3}. \quad (1.70)$$

Искомая неизвестная — поверхностная плотность $\sigma_{\Pi}(\varphi_1, \lambda_1)$ находится под знаком интеграла. Для практического решения уравнения (1.70) поверхность сферы S разбивается на N равноплощадных элементарных площадок ΔS_i , а интеграл представляется в виде суммы

$$\Gamma(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM_{\zeta} R \cos \varphi \cos \lambda}{\rho^3} = G \sum_{i=1}^N (\sigma_{\Pi})_i p_i, \quad (1.71)$$

где $(\sigma_{\Pi})_i$ — средние значения поверхностной плотности на элементарной площадке ΔS_i , а

$$p_i = \iint_{\Delta S_i} \frac{R (\cos \varphi \cos \lambda - \cos \varphi_1 \cos \lambda_1) dS}{r^3}$$

— весовая функция, которая зависит от положения площадок ΔS_i относительно точек наблюдения (ρ, φ, λ) . Ее

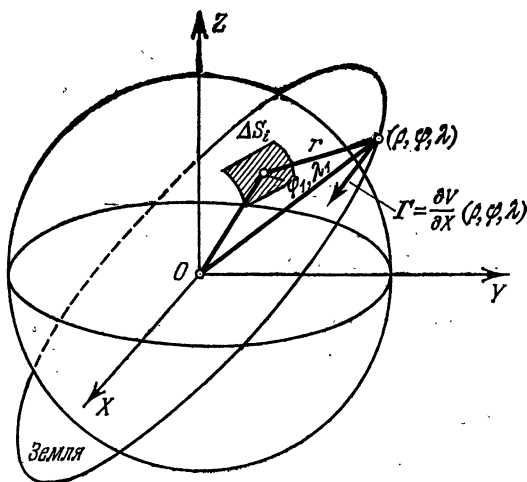


Рис. 12. К выводу выражения лучевого ускорения Γ через поверхностную плотность, распределенную на сфере.

числовые значения могут быть заранее вычислены. Известной величиной является также $GM (R\rho^{-3} \cos \varphi \cos \lambda)$. Получается система алгебраических уравнений для определения неизвестных $(\sigma_{\Pi})_i$. Число условных уравнений определяется числом независимых определений Γ . Разумеется, что оно должно быть равно, а лучше — превышать число неизвестных. На первый взгляд кажется, что для того, чтобы ошибки за счет осреднения поверхностной плотности $(\sigma_{\Pi})_i$ по элементарным площадкам меньше сказывались на представлении внешнего гравитационного поля Луны, необходимо размеры их выбирать как можно меньше. Увеличение числа неизвестных $(\sigma_{\Pi})_i$ при одном и том же числе исходных значений Γ , измеренных с ошиб-

ками, может привести к тому, что неизвестные будут определяться с большими ошибками. Существует оптимальный размер элементарных площадок, а следовательно, и число неизвестных, которое зависит от имеющихся в нашем распоряжении числа независимых измерений Γ и точности этих измерений. Трудности решения системы алгебраических уравнений, получающейся в этой задаче, проистекают от самого характера исходного уравнения (1.67). Это — интегральное уравнение Фредгольма. Известно, что задача решения интегрального уравнения подобного типа относится к классу некорректных задач. Небольшие вариации функции в левой части уравнения (1.67) приводят к большим ошибкам искомой функции. Методы решения некорректных задач были разработаны А. Н. Тихоновым и нашли применения в самых различных областях знания [14]. Для получения устойчивого решения применяются различные способы регуляризации, разработанные в прикладной математике.

Обнаружение на Луне масконов — концентраций масс на небольших глубинах, создающих большие гравитационные аномалии, побудило исследователей представлять их гравитационное поле полем точечных масс. Потом возникла идея представлять все аномалии гравитационного поля Луны полем совокупности точечных масс. Величина массы, которая распределена на элементарной площадке ΔS_i в виде простого слоя с поверхностной плотностью $(\bar{\sigma}_n)_i$, равна

$$m_i = (\bar{\sigma}_n)_i \Delta S_i. \quad (1.72)$$

Теперь будем предполагать, что масса простого слоя на элементарной площадке ΔS_i сконцентрирована в ее центре в виде точечной массы m_i . В этом случае уравнение (1.70) преобразуется к виду

$$\Gamma(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM_{\zeta} R \cos \varphi \cos \lambda}{\rho^3} + G \sum_{i=1}^N \frac{m_i R (\cos \varphi \cos \lambda - \cos \varphi_i \cos \lambda_i)}{r_i^3}, \quad (1.73)$$

где r_i — расстояние от точки (ρ, φ, λ) до центра элементарной площадки ΔS_i . Задача вычисления точечных масс m_i , расположенных на сферической поверхности Луны,

становится аналогичной задаче определения поверхностной плотности $(\bar{\sigma}_n)_i$.

В работах [35], [38] определено 580 точечных масс, расположенных на поверхности видимой стороны Луны в области, ограниченной по широте $\varphi = \pm 60^\circ$. Поверхность Луны принималась за сферу радиуса $R = 1738$ км. По широте угловое расстояние между искомыми точечными массами было 5° , а по долготе 5° на экваторе и возросло до $8^\circ,5$ по мере удаления от экватора в направлении полюсов. В качестве исходных данных использовалось 11 000 доплеровских наблюдений «Лунар Орбитера -1—5» и «Аполлона-8 и -12». В результате оказалось, что величины точечных масс изменяются в пределах от $9 \cdot 10^{-9} M_\zeta$ до $5 \cdot 10^{-6} M_\zeta$.

Более естественно было бы располагать аппроксимирующие гравитационное поле точечные массы не по заранее заданной сетке, а учитывая особенности гравитационного поля, определять наряду с величиной аномальной массы m_i ее координаты. Каждая точка будет характеризоваться четырьмя неизвестными параметрами: величиной массы m_i , двумя ее плановыми координатами (φ_i, λ_i) и глубиной h_i . Выше мы уже говорили о некорректности задачи определения точечных масс. Она еще более усугубится, если считать неизвестными все четыре параметра. Целесообразнее определять плановое положение каждой аномальной точечной массы по имеющейся гравиметрической карте Луны, а в качестве неизвестных в системе уравнений полагать только величины масс m_i и их глубины h_i . Число неизвестных в системе уравнений будет меньше, а следовательно, можно надеяться на получение более устойчивого решения.

Метод локального подбора точечных масс был применен в [2], [12]. Выводились все четыре параметра $(m_i, \varphi_i, \lambda_i, h_i)$ для каждой точечной массы по соответствующей локальной аномалии лучевого ускорения. Поле лучевых ускорений, которое использовалось в работе, было получено по доплеровским наблюдениям «Лунар Орбитера-5». Для всей видимой стороны Луны были определены 83 точечные массы. Глубины их, отсчитываемые от сферы радиуса 1738 км, изменялись от нескольких км до 100 км, а величины масс m_i находились в пределах $(0,05 \div 2,5) \cdot 10^{-5} M_\zeta$. На рис. 13 изображены графики изменения лу-

чевых ускорений в точках трассы «Аполлона-15», полученные по его доплеровским наблюдениям, путем расчета с помощью упомянутых 580 точечных масс, в основном равномерно распределенных на поверхности сферы и с помощью только что описанных 83 точечных масс, распределенных нерегулярно и с изменяющимися глубинами [17].

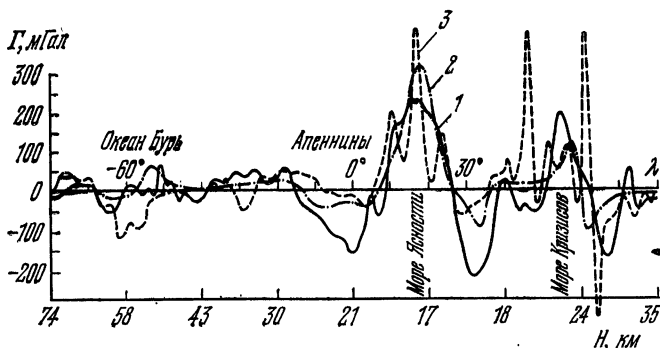


Рис. 13. Лучевые ускорения Γ : 1 — измеренные по наблюдениям «Аполлона-15», 2 — вычисленные по совокупности 83 точечных масс, 3 — вычисленные по совокупности 580 точечных масс. На нижней горизонтальной оси указаны высоты H «Аполлона-15» над сферической лунной поверхностью.

Сравнение интересно тем, что полет «Аполлона-15» проходил на высотах 16—70 км, а распределение точечных масс определялось по «Лунар Орбитеру-5», высота полета которого была более 100 км. Анализ графиков показывает, что поле точечных масс плохо отражает высокочастотную часть гравитационного поля из-за недостаточной плотности их распределения. Лучшее представление внешнего гравитационного поля Луны получается с использованием 83 точечных масс, расположенных в соответствии с аномалиями гравитационного поля и переменных по глубине, нежели с помощью 580 точечных масс, расположенных на поверхности сферы и не связанных с особенностями действительного гравитационного поля. Выгода первого из этих вариантов в том, что она ближе отражает физическую реальность в распределении аномальных масс в недрах Луны. Поле 117 точечных масс, расположенных на глубине 50 км от сферической лунной

поверхности, представлялось гравитационное поле, полученное из доплеровских наблюдений ИСЛ, запущенных с «Аполлонов-15 и -16», и «Лунар Орбитер-5» М. Анандой [19]. Точки располагались в узлах сетки, образованной параллелями, следующими через 9—12°, и меридианами через 20°. Рассматривался пояс вдоль экватора Луны от +30 до -30°. На рис. 14 изображены графики изменения ускорений силы тяжести, рассчитанные по модели

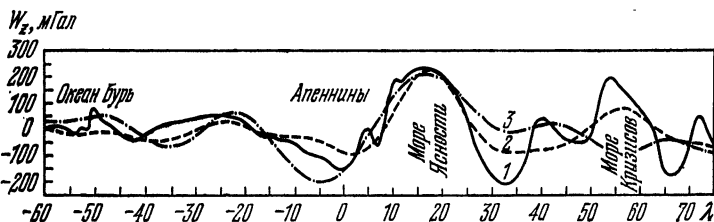


Рис. 14. Сравнение аномалий силы тяжести, полученных: 1 — по наблюдениям «Аполлона-15», 2 — вычисленных по совокупности 117 точечных масс, расположенных на глубине 50 км от сферической лунной поверхности, 3 — вычисленных по модели гравитационного поля Луны в виде разложения по сферическим функциям до 16 порядка.

117 точечных масс [19], по разложению гравитационного поля, построенного А. Феррари [23], и по наблюдениям «Аполлона-15». При общем согласии кривых наблюдается еще большее различие при $\lambda = -5^\circ, 33^\circ, 55^\circ$. По-видимому, для численно-аналитического представления гравитационного поля наиболее целесообразно сочетать нерегулярно расположенные точечные массы и размещенные по заранее намеченной сетке. Нечто подобное было сделано Р. Форвардом [24]. Еще раз обратим внимание на рис. 8, а) и б). На первом из них даны изолинии лучевых ускорений, полученные из наблюдений, на втором — поле ускорений силы тяжести, рассчитанное по полю точечных масс. 28 больших точечных масс подбирались по гравитационным аномалиям. Эти массы располагались на глубине. Кроме того, искали точечные массы в узлах сети на сферической лунной поверхности. Наблюдается хорошее согласие изолиний, представляющих гравитационное поле на обеих этих картах.

Остановимся еще на представлении внешнего гравитационного поля с помощью поверхностной плотности, распределенной на круговых дисках одинакового радиуса. Авторы [38], используя те же исходные гравиметрические данные, которые были применены для определения распределения 580 точечных масс, сделали попытку определить материальные диски. Применение дисков взамен материальных точек диктовалось тем, что многие наблюдающиеся аномалии гравитационного поля лучше соответствуют не компактным массам, а протяженным, распределенным в горизонтальном направлении. Предполагалось, что диски имеют радиус, равный 5° , что соответствовало ~ 150 км, а центры их совмещались с центрами точечных масс. Сравнение полей, представленных совокупностью точечных масс и материальных дисков, показало, что более точным является представление с помощью материальных дисков.

Напомним, что выводимые из наблюдений окололунных космических аппаратов лучевые ускорения относятся к точкам их орбиты, которые, как известно, отстоят на различных высотах от лунной поверхности. Представление поля лучевых ускорений полем масс простого слоя, точечных масс, масс дисков и пр., является необходимым для построения полей ускорения силы тяжести и других характеристик гравитационного поля, отнесенных к единой высоте. Иными словами, описанные численно-аналитические представления используются для редукции и трансформаций гравитационных полей Луны.

Гравитационное поле точечных масс может быть представлено в виде разложения в ряд по сферическим функциям. Запишем потенциал точечной массы в точке (ρ, φ, λ)

$$v_i(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{Gm_i}{\sqrt{\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos \psi_i}},$$

где ψ_i — угол между радиусами-векторами ρ и ρ_i . Его же можно записать в виде следующего разложения в ряд по сферическим функциям:

$$v_i(\rho, \varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{\rho}\right)^{n+1} (a_{nm}^{(i)} \cos m\lambda + b_{nm}^{(i)} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (1.74)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{nm}^{(i)} \\ b_{nm}^{(i)} \end{aligned} \right\} = G m_i \rho_i^n \delta_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi_i) \begin{matrix} \cos m\lambda_i \\ \sin m\lambda_i \end{matrix}, \quad \left. \begin{aligned} \delta_m = \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.75)$$

Суммарный потенциал совокупности точечных масс равен

$$\sum_{i=1}^N v_i = G \sum_{i=1}^N m_i (\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos \psi)^{-1/2}.$$

Теперь, если этот суммарный гравитационный потенциал вычесть из общего гравитационного потенциала Луны, то таким образом мы уберем из него наиболее аномальную часть поля, которая плохо аппроксимируется разложением в ряд по сферическим функциям

$$\begin{aligned} \bar{V}(\rho, \varphi, \lambda) = V(\rho, \varphi, \lambda) - \\ - G \sum_{i=1}^N m_i (\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos \psi_i)^{-1/2} + \frac{G}{\rho} \sum_{i=1}^N m_i. \end{aligned}$$

В правой части последнего равенства добавлен член, который учитывает потенциал точечных масс, отнесенных к центру масс Луны. Таким образом, общая масса Луны остается неизменной. Остаточное поле, будучи более плавным, может лучше аппроксимироваться разложением в ряд по сферическим функциям:

$$\begin{aligned} \bar{V}(\rho, \varphi, \lambda) = \\ = \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \end{aligned} \quad (1.76)$$

где C_{nm} и S_{nm} — гармонические коэффициенты, определяемые по распределению поля $\bar{V}(\rho, \varphi, \lambda)$.

Разложению в ряд по сферическим функциям для общего гравитационного потенциала Луны можно, имея

в виду (1.74), окончательно придать следующий вид:

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \left[\left(C_{nm} + \sum_{i=1}^N \frac{a_{nm}^i}{GM_{\zeta} R^n} \right) \cos m\lambda + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(S_{nm} + \sum_{i=1}^N \frac{b_{nm}^i}{GM_{\zeta} R^n} \right) \sin m\lambda \right] P_{nm}(\sin \varphi) - \frac{G}{\rho} \sum_{i=1}^N m_i \right\}. \quad (1.77)$$

Разложение (1.76) и определение коэффициентов C_{nm} и S_{nm} должно быть осуществлено в планетарном масштабе. Коэффициенты a_{nm}^i и b_{nm}^i могут быть рассчитаны по формуле (1.75) до высоких порядков, если определены m_i и координаты $\varphi_i, \lambda_i, h_i$.

Часто в гравиметрии применяется метод графического изображения. Величины, характеризующие гравитационное поле, отнесенные к какой-либо единой поверхности (эллипсоиду, сфере, плоскости), изображаются графически. Координаты точек с равными значениями аномалий гравитационного поля соединяются изолиниями с учетом их алгебраического знака. Так строятся карты изолиний аномалий потенциала силы тяжести, высот селеноида и пр. Хотя сила тяжести или градиенты являются векторными величинами, они тоже изображаются изолиниями. О том, что они векторы, напоминает само название изображаемой величины. Иногда гравитационное поле изображают в виде схемы с осредненными значениями гравитационных аномалий по равновеликим по площади участкам, средние значения приписываются центральной точке названной площадки.

МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЛУНЫ

§ 8. Сравнение методов изучения лунного и земного гравитационных полей

Изучение гравитационного поля Луны началось с запуска искусственных спутников Луны. Обращает на себя внимание различие исторической последовательности применения методов определения гравитационного поля Земли и Луны. Для Земли спутниковые методы начали использоваться тогда, когда ее гравитационное поле в общем было уже изучено гравиметрическим методом с помощью гравиметров и маятниковых приборов. Эти сведения о поле использовались для расчетов орбит первых ИСЗ. В расчетах учитывались возмущения в движениях ИСЗ из-за аномальности гравитационного поля, обусловленной неоднородностью внутреннего строения и формы Земли. Вскоре после запуска первых ИСЗ стала решаться обратная задача: по измерениям возмущений орбит ИСЗ определяться аномальное гравитационное поле Земли. Это составило содержание нового раздела геодезии, называемого *динамической космической геодезией*. Каждый из методов, спутниковый и гравиметрический, имел свои преимущества и недостатки. Первый из них позволяет более надежно определять гармоники гравитационного поля низких порядков, а второй — высокие гармоники. Применяется на практике метод совместного использования обоих этих способов с привлечением астрономических и других геодезических данных. Для Луны же изучение ее гравитационного поля началось сразу со спутниковых методов. При этом не рассматриваются оценки параметров гравитационного поля, сделанные на основании определений комбинаций моментов инерции Луны второго порядка по астрономическим наблюдениям движений перицентра и узла лунной орбиты и физической либрации Луны. В 1966 г. Э. А. Аким впервые опубликовал [2] значения коэффициентов разложения гравитационного

поля Луны в ряд по сферическим функциям, определенные им по наблюдениям ИСЛ «Луна-10». Детали гравитационного поля Луны в дальнейшем уточнялись по наблюдениям ряда американских ИСЛ: «Лунар Орбитер-1—5», «Эксплорер-35, -49», «Аполлон-14 — 17», ИСЛ запущенных с «Аполлонов-15, -16», и советских ИСЛ «Луна-12, -14, -19, -22».

Определения силы тяжести непосредственно на лунной поверхности только начинаются. Известно пока только четыре измерения силы тяжести с помощью гравиметрических приборов, установленных на аппаратах, совершавших мягкую посадку на Луну («Аполлонов-11, -12, -14, -17»). Измерения силы тяжести вдоль профиля на лунной поверхности были произведены со специальным гравиметром, установленным на американском луноходе, который был доставлен на Луну космическим кораблем «Аполлон-17». Хотя, по-видимому, основную роль при изучении общего гравитационного поля Луны будет играть ИСЛ, нельзя недооценивать роль непосредственных измерений силы тяжести с помощью луноходов и аппаратов, совершающих мягкую посадку на лунную поверхность. Следует отметить ряд преимуществ спутниковых методов изучения гравитационного поля Луны по сравнению с Землей.

1. С одной и той же земной наблюдательностью станции можно видеть движение ИСЛ от его восхода до захода. Чтобы наблюдать ИСЛ с Земли непрерывно, достаточно иметь две наблюдательные станции, расположенные на долготах, различающихся на 180° .

2. Из-за того, что Луна вращается медленнее Земли, за время одного оборота ИСЛ повернется всего на $\sim 2^\circ$. Гравитационное влияние на ИСЛ меньше осредняется. Чтобы это преимущество реализовалось, необходимо иметь длинные ряды наблюдений, по крайней мере в течение месяца.

3. Земная атмосфера, будучи плотной и переменной во времени, создает существенное возмущение в движениях ИСЗ. На Луне атмосфера практически отсутствует, поэтому в движениях ИСЛ нет возмущений, обусловленных атмосферой.

4. Из-за отсутствия атмосферы на Луне возможно движение очень близких к лунной поверхности ИСЛ. Пери-

центры некоторых космических аппаратов «Аполлон», по которым исследовалось гравитационное поле, отстояли от лунной поверхности на расстояние 15—20 км. Ближайшие ИСЗ движутся на расстоянии от земной поверхности порядка 200 км. Низкие искусственные спутники больше подвержены влиянию аномалий гравитационного поля.

5. Отношение аномалий гравитационного поля к полной величине для Луны больше, чем соответствующее отношение для Земли, поэтому ИСЛ подвержены большему относительному возмущающему влиянию, чем ИСЗ.

Разумеется, имеется ряд обстоятельств, делающих более трудным изучение гравитационного поля Луны. Это прежде всего большая сложность запуска ИСЛ и гораздо большая их стоимость по сравнению с ИСЗ. Что касается технических сторон, то следует отметить особенности наблюдений ИСЛ и ИСЗ. Отсутствуют наблюдения ИСЛ, когда он пролетает над обратной стороной, что осложняет эффективность вывода гравитационного поля Луны. Этот недостаток присущ современным методам наблюдений ИСЛ. Применение одновременно двух спутников позволит в будущем осуществить ретрансляцию сигналов от ИСЛ, пролетающего вне зоны прямой видимости с Земли, и таким образом получить более точные данные о гравитационном поле обратной стороны Луны.

Ошибки в определении гравитационного поля Луны возникают из-за неточности знания положения ИСЛ относительно Луны и последующих редуций измеренных характеристик гравитационного поля. Существенны ошибки за счет математической обработки результатов доплеровских наблюдений, сводящиеся к операциям фильтрации и пересчета изменений доплеровской частоты в характеристики гравитационного поля. Кроме того, неизбежны всевозможные инструментальные ошибки, ошибки за счет рефракции радиоволн в земной ионосфере, неточности знания положения ИСЛ относительно станции наблюдения на Земле. Последнее возникает из-за недостатка точности знания эфемерид Луны и положения на Земле станции наблюдения. Некоторые из названных ошибок носят систематический характер. Они могут быть исключены изучением источников ошибок по наблюдениям не ИСЛ, а других небесных объектов.

Перспективно использовать для изучения по крайней мере высокочастотной части гравитационного поля градиентометры, установленные на ИСЛ. Работы по созданию таких приборов интенсивно ведутся в США. Помимо большой разрешающей способности градиентометры имеют ряд достоинств для изучения гравитационного поля обратной стороны Луны. Так как они в определенном смысле автономны и могут быть вне зоны прямой видимости ИСЛ с Земли, то ими можно проводить измерения градиентов ускорений над обратной стороной Луны.

§ 9. Элементы орбиты ИСЛ и понятие о возмущениях в движении вследствие неоднородности гравитационного поля Луны

Пусть в точке O расположен центр масс Луны, S — околорунный спутник (рис. 15). Начало прямоугольной (X, Y, Z) и сферической (ρ, Φ, Λ) систем взято в центре масс Луны, Υ — точка весеннего равноденствия. Эква-

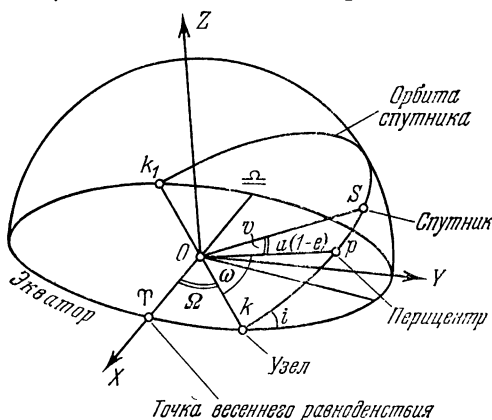


Рис. 15. Элементы орбиты ИСЛ.

ториальная плоскость Луны совмещена с плоскостью XOY . Плоскость орбиты спутника пересекается с экваториальной плоскостью по линии kk_1 -линии узлов. Известно, что положение спутника в пространстве в любой момент времени характеризуется его радиусом-вектором (X, Y, Z) и вектором скорости $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$. Вместо этих

шести параметров можно использовать шесть элементов кеплеровского эллипса, один из фокусов которого совмещен с началом координат. Об элементах орбиты Луны при ее движении вокруг Земли рассказывалось в § 2. Поскольку положение ИСЛ при его орбитальном движении характеризуется аналогичными элементами, ограничимся их перечислением, обратив внимание на некоторые особенности. Элементы орбиты изображены на рис. 15: Ω — долгота восходящего узла, i — наклонность плоскости орбиты ИСЛ к экваториальной плоскости Луны, a — большая полуось орбиты, $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ — ее эксцентриситет, ω — угловое расстояние перицентра от узла, M — средняя аномалия. Вместо M удобно в ряде случаев применять v — истинную аномалию, E — эксцентрическую аномалию. Связь между различными аномалиями дается формулами (1.6), (1.7), (1.8). В дальнейшем будем использовать аргумент склонения $u = \omega + v$.

Истинная v и эксцентрическая E аномалии необходимы для определения расстояния ρ спутника S от начала координат, совмещенного с одним из фокусов эллиптической орбиты:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} = a(1 - e \cos E). \quad (2.1)$$

Иногда используется долгота перицентра

$$p = \Omega + \omega.$$

Этот угол состоит из углов Ω и ω , измеряемых в различных плоскостях.

Дифференциальные уравнения движения ИСЛ в неоднородном гравитационном поле Луны в прямоугольной системе координат (X, Y, Z) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{GM_{\zeta}}{\rho^3} X &= \frac{\partial T}{\partial X}, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{GM_{\zeta}}{\rho^3} Y &= \frac{\partial T}{\partial Y}, \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{GM_{\zeta}}{\rho^3} Z &= \frac{\partial T}{\partial Z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где GM_{ζ} — селеноцентрическая гравитационная постоянная, равная $(4902,71 \pm 0,07) \cdot 10^9 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$, T — возмущаю-

ций, или пертурбационный, потенциал Луны, обусловленный отличием истинного потенциала от потенциала точечной массы. Эти же уравнения, записанные в селеноцентрической сферической системе координат, преобразуются так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 - \rho \left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)^2 \cos^2 \Phi + \frac{GM_{\zeta}}{\rho^2} &= \frac{\partial T}{\partial \rho}, \\ \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\Phi}{dt}\right) + \rho^2 \left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)^2 \sin \Phi \cos \Phi &= \frac{\partial T}{\partial \Phi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\Lambda}{dt} \cos^2 \Phi\right) &= \frac{\partial T}{\partial \Lambda}. \end{aligned} \right\} (2.3)$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho(a, e, i, \omega, \Omega, M), \\ \Phi &= \Phi(a, e, i, \omega, \Omega, M), \\ \Lambda &= \Lambda(a, e, i, \omega, \Omega, M). \end{aligned} \right\} (2.4)$$

Возмущающий потенциал Луны T удобно использовать представленным в виде разложения в ряд по сферическим функциям:

$$T = \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\Lambda + S_{nm} \sin m\Lambda) P_{nm}(\sin \Phi) \right]. (2.5)$$

Здесь R — средний радиус сферической Луны. Разложение начинается с $n = 2$, потому что возмущающий потенциал не содержит нулевой гармоники, соответствующей потенциалу точечной Луны; гармоники первого порядка отсутствуют из-за того, что начало выбранной системы координат предполагается совмещенным с центром масс Луны.

Поскольку согласно (2.5) возмущающая функция T зависит от ρ , Φ , Λ , то, учитывая (2.4), T можно выразить через элементы орбиты. В. Каула [15] представляет T в точках орбиты ИСЛ в виде

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n GM_{\zeta} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} p(i, e) S_{nmpq}(\omega, \Omega, \theta),$$

где

$$p(i, e) = \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) G_{npq}(e), \quad F_{nmp} \text{ и } G_{npq}$$

в свою очередь являются функциями соответственно наклонности i и эксцентриситета e , а

$$S_{nmpq} = \begin{bmatrix} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{bmatrix} \begin{matrix} n-m \text{ четно} \\ n-m \text{ нечетно} \end{matrix} \cos [(n-2p)\omega + m(\Omega - \theta)] + \\ + \begin{bmatrix} S_{nm} \\ C_{nm} \end{bmatrix} \begin{matrix} n-m \text{ четно} \\ n-m \text{ нечетно} \end{matrix} \sin [(n-2p)\omega + m(\Omega - \theta)],$$

и θ — угол смещения между осями инерциальной системы координат и осью, связанной с телом Луны при выборе селенографической системы координат.

Если $T = 0$, что означает отсутствие возмущений в движении ИСЛ, то окололунный спутник движется под действием гравитационного поля только точечной Луны. Тогда движение ИСЛ происходило бы по эллиптической орбите и подчинялось законам Кеплера. Наличие возмущений T усложняет пространственное движение ИСЛ. Элементы орбиты ИСЛ изменяются с течением времени или, как говорят, испытывают возмущения (возмущения элементов орбиты). Величина и характер этих возмущений зависят от постоянных C_{nm} и S_{nm} , характеризующих неоднородность гравитационного поля Луны. По наблюдениям вычисляются возмущения в элементах орбиты ИСЛ, а по ним числовые значения гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} . Ниже приведем общую схему вывода формул, связывающих возмущения элементов с C_{nm} и S_{nm} . Для этого от системы дифференциальных уравнений (2.3) переходим к системе 6 дифференциальных уравнений первого порядка, которые в матричной форме имеют вид (2.6) [9]. Это так называемые *уравнения Лагранжа*. С их помощью можно возмущение для любого элемента $\left(\frac{da}{dt}, \frac{d\epsilon}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d\Omega}{dt}, \frac{dM_0}{dt}\right)$ выразить через производные от возмущающей функции T по элементам $\left(\frac{dT}{da}, \frac{dT}{de}, \frac{dT}{di}, \frac{dT}{d\omega}, \frac{dT}{d\Omega}, \frac{dT}{dM_0}\right)$ и сами элементы $(a, e, i, \omega, \Omega, M_0)$.

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{GM} \sqrt{a(1-e^2)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{GM} \sqrt{a(1-e^2)}} & 0 & \frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{GM} \sqrt{a(1-e^2)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{GM} \sqrt{a(1-e^2)}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{GM} \sqrt{ae}} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{GM}} \\
 0 & 0 & -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{GM} \sqrt{ae}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1-e^2}{\sqrt{GM} \sqrt{ae}} \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{GM}} & -\frac{1-e^2}{\sqrt{GM} \sqrt{ae}} & 0 & 0
 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c}
 \frac{\partial T}{\partial \Omega} \\
 \frac{\partial T}{\partial i} \\
 \frac{\partial T}{\partial \omega} \\
 \frac{\partial T}{\partial a} \\
 \frac{\partial T}{\partial e} \\
 \frac{\partial T}{\partial M_0}
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c}
 \frac{d\Omega}{dt} \\
 \frac{di}{dt} \\
 \frac{d\omega}{dt} \\
 \frac{da}{dt} \\
 \frac{de}{dt} \\
 \frac{dM_0}{dt}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

(2.6)

$$\text{Например, } \frac{d\Omega}{dt} = 0 \cdot \frac{dT}{d\Omega} + \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{GM} \sqrt{a(1-e^2)}} \cdot \frac{dT}{di} + 0 \cdot \frac{dT}{d\omega} + 0 \cdot \frac{dT}{da} + 0 \cdot \frac{dT}{de} + 0 \cdot \frac{dT}{dM} .$$

Далее рассмотрим более подробно только возмущения для долготы восходящего узла Ω и углового расстояния перицентра ω . Из уравнений (2.6) можно получить

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{GM_{\zeta}} \sqrt{a(1-e^2)}} \frac{dT}{di}, \quad (2.7)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{GM_{\zeta}} \sqrt{a(1-e^2)}} \frac{dT}{di} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{GM_{\zeta}} \sqrt{ae}} \frac{dT}{de}. \quad (2.8)$$

Теперь перейдем от аргумента времени t к аргументу v — истинной аномалии, используя для этого равенство

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho^2} \sqrt{GM_{\zeta}} \sqrt{a(1-e^2)}.$$

Уравнения (2.7) и (2.8) переписутся так:

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{\rho^2 \operatorname{cosec} i}{GM_{\zeta} a (1-e^2)} \frac{dT}{di}, \quad (2.9)$$

$$\frac{d\omega}{dv} = -\frac{\rho^2 \operatorname{ctg} i}{GM_{\zeta} a (1-e^2)} \frac{dT}{di} + \frac{\rho^2}{GM_{\zeta} ae} \frac{dT}{de}. \quad (2.10)$$

Теперь необходимо производные $\frac{dT}{di}$, $\frac{dT}{de}$ выразить через гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} . Найдем производные от T по i и e , используя при этом следующие соотношения, легко выводимые, если обратиться к рис. 15:

$$\begin{aligned} \sin \Phi &= \sin(\omega + v) \sin i, \\ \sin(\Omega - S - \Lambda) &= -\frac{\sin(\omega + v) \cos i}{\cos \Phi}, \\ \cos(\Omega - S - \Lambda) &= \frac{\cos(\omega + v)}{\cos \Phi}. \end{aligned}$$

Кроме того, используем формулу (2.1), связывающую ρ с элементами орбиты. Получим

$$\begin{aligned} \frac{dT}{di} &= -\frac{\partial T}{\partial \Phi} \sin(\Omega - S - \Lambda) + \\ &+ \frac{\partial T}{\partial \Lambda} \sin(\Omega - S - \Lambda) \cos(\Omega - S - \Lambda) \operatorname{tg} i, \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{de} &= -\frac{\partial T}{\partial \rho} a \cos v + \\ &+ \frac{\partial T}{\partial \Phi} \sin i \cos(\Omega - S - \Lambda) \sin v \left(\frac{a}{\rho} + \frac{1}{1-e^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial T}{\partial \Lambda} \frac{\cos i \sin v}{\cos^2 \Phi} \left(\frac{a}{\rho} + \frac{1}{1-e^2} \right). \quad (2.12) \end{aligned}$$

Далее простым дифференцированием разложения (2.5) по ρ , Φ , Λ найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = -\frac{GM_{\zeta}}{\rho^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1) \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\Lambda + S_{nm} \sin m\Lambda) P_{nm}(\sin \Phi) \right], \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \Phi} = \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\Lambda + S_{nm} \sin m\Lambda) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial P_{nm}(\sin \Phi)}{\partial \Phi} \right] \quad (2.14)$$

или, в преобразованном виде

$$\frac{\partial T}{\partial \Phi} = \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{R}{\rho}\right)^n C_{n0} P_{n1}(\sin \Phi) - \right. \\ \left. - \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\Lambda + S_{nm} \sin m\Lambda) \times \right. \\ \left. \times (m \operatorname{tg} \Phi P_{nm}(\sin \Phi) - \mu P_{n, m+1}(\sin \Phi)) \right], \quad (2.15)$$

где

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{при } m \leq n-1, \\ 0 & \text{при } m = n, \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \Lambda} = \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n m (-C_{nm} \sin m\Lambda + S_{nm} \cos m\Lambda) \times \right. \\ \left. \times P_{nm}(\sin \Phi) \right]. \quad (2.16)$$

На основании формулы (2.1) имеем

$$\frac{1}{\rho^n} = [a(1-e^2)]^{-n} \left[1 + \binom{n}{1} e \cos v + \right. \\ \left. + \binom{n}{2} e^2 \cos^2 v + \dots + e^n \cos^n v \right]. \quad (2.17)$$

Производя последовательные преобразования с использованием выражений (2.11) — (2.13), (2.15) — (2.17), на основании (2.9) и (2.10), получим окончательные выражения для $\frac{d\Omega}{dv}$ и $\frac{d\omega}{dv}$. Получаются громоздкие выражения, аргументами которых будут искомые гармонические коэф-

эффициенты, элементы орбиты и средний радиус Луны R :

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{d\Omega}{dv} (C_{nm}, S_{nm}, R, \text{элементы орбиты}),$$

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{d\omega}{dv} (C_{nm}, S_{nm}, R, \text{элементы орбиты}).$$

Так, при определении зональных гармоник, положив $m = 0$, для $\frac{d\Omega}{dv}$ будем иметь [9]

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dv}\right)_{m=0} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{a(1-e^2)} \frac{\sin(\omega+v)}{\cos \Phi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n-1}} C_{n0} P_{n1}(\sin \Phi) = \\ &= \frac{3 \cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 C_{20} \sin^2(\omega+v)(1+e \cos v) + \\ &+ \frac{3}{2} \frac{\operatorname{ctg} i}{(1-e^2)^3} \left(\frac{R}{a}\right)^3 C_{30} [5 \sin^3(\omega+v) \sin^2 i - \sin(\omega+v)] \times \\ &\times (1+2e \cos v + e^2 \cos^2 v) + \frac{5}{2} \frac{\cos i}{(1-e^2)^4} \left(\frac{R}{a}\right)^4 \times \\ &\times C_{40} [7 \sin^4(\omega+v) \sin^2 i - 3 \sin^2(\omega+v)] \times \\ &\times (1+3e \cos v + 3e^2 \cos^2 v + e^3 \cos^3 v) + \dots \quad (2.18) \end{aligned}$$

Возмущения в элементах носят вековой и периодический характер. Периодические возмущения бывают долго- и короткопериодическими. В частности, если рассматривать $\frac{d\Omega}{dv}$, то короткопериодические возмущения возникают за счет изменения v , т. е. с периодом, близким к периоду обращения ИСЛ вокруг Луны. Для их исключения достаточно провести осреднение по v :

$$\overline{\frac{d\Omega}{dv}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{dv} dv.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \left(\overline{\frac{d\Omega}{dv}}\right)_{m=0} &= \frac{3}{2} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 C_{20} - \\ &- \frac{3}{2} \frac{\operatorname{ctg} i}{(1-e^2)^3} \left(\frac{R}{a}\right)^3 C_{30} e \left(1 - \frac{15}{4} \sin^2 i\right) \sin \omega - \\ &- \frac{15}{4} \frac{\cos i}{(1-e^2)^4} \left(\frac{R}{a}\right)^4 C_{40} \left[\left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 i\right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} e^2 \left(1 - \frac{7}{3} \sin^2 i\right) \cos 2\omega\right] + \dots \quad (2.19) \end{aligned}$$

Для того чтобы исключить и долгопериодические возму-

щения, необходимо осреднение провести еще по ω :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{d\Omega}}{dv}\right)_{m=0}^{\text{нек}} &= \cos i \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 C_{20} - \right. \\ &- \frac{15}{4} \frac{1}{(1-e^2)^4} \left(\frac{R}{a}\right)^4 C_{40} \left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 i\right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) + \\ &+ \frac{105}{6} \frac{1}{(1-e^2)^6} \left(\frac{R}{a}\right)^6 C_{60} \left(1 - \frac{9}{2} \sin^2 i + \frac{33}{8} \sin^4 i\right) \times \\ &\quad \left. \times \left(1 + 5e^2 + \frac{15}{8} e^4\right) + \dots \right\}. \quad (2.20) \end{aligned}$$

В заключение приведем небольшую сводку вековых изменений в других элементах в зависимости от гармонического коэффициента C_{20} :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\overline{da}}{dv}\right) &= \left(\frac{\overline{de}}{dt}\right) = \left(\frac{\overline{di}}{dt}\right) = 0, \\ \left(\frac{\overline{d\Omega}}{dv}\right) &= \frac{3}{2} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 C_{20}, \\ \left(\frac{\overline{d\omega}}{dv}\right) &= \frac{3}{4} \frac{1-5\cos^2 i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 C_{20}. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Нечетные зональные гармоники, так же как и тессеральные гармоники гравитационного поля, не создают вековых возмущений. От нечетных зональных гармоник возникают долгопериодические изменения элементов орбиты. Так, от C_{30} они зависят следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\overline{da}}{dv}\right) &= 0, \\ \left(\frac{\overline{de}}{dv}\right) &= \frac{3 \cos \omega \sin i}{2(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^3 \left(\frac{5}{4} \sin^2 i - 1\right) C_{30}, \\ \left(\frac{\overline{di}}{dv}\right) &= \frac{3 e \cos \omega}{2(1-e^2)^3} \left(\frac{R}{a}\right)^3 \operatorname{ctg} i \left(\frac{15}{4} \sin^2 i - 1\right) C_{30}, \\ \left(\frac{\overline{d\Omega}}{dv}\right) &= \frac{3 e \sin \omega}{2(1-e^2)^3} \left(\frac{R}{a}\right)^3 \operatorname{ctg} i \left(\frac{15}{4} \sin^2 i - 1\right) C_{30}, \\ \left(\frac{\overline{d\omega}}{dv}\right) &= \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

$$= \frac{3 \sin \omega}{2(1-e^2)^3} \left(\frac{R}{a}\right)^3 \left(\frac{1+4e^2}{e} \sin i - e \operatorname{ctg} i\right) \left(\frac{15}{4} \sin^2 i - 1\right) C_{30}.$$

Очевидно, лучше всего было бы определять гармонические коэффициенты гравитационного поля Луны по вековым возмущениям в элементах околорунного спутника. Наибольшие вековые изменения происходят в долготе восходящего узла Ω и в расстоянии перицентра от узла ω .

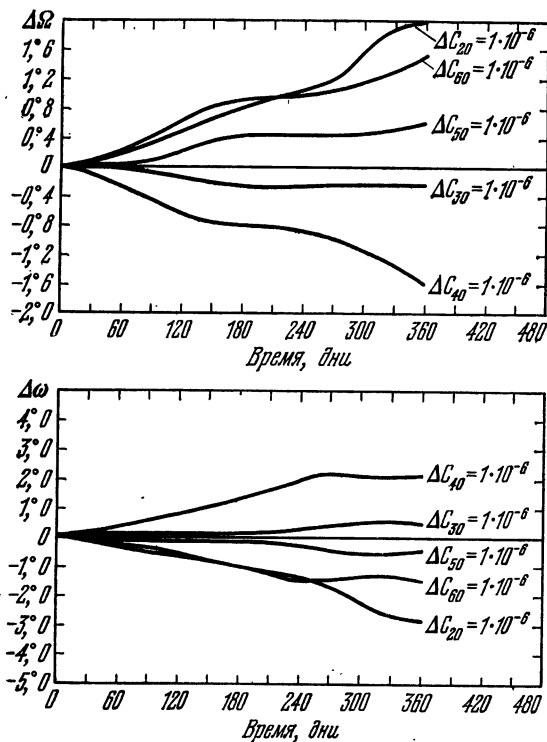


Рис. 16. Изменение $\Delta\Omega$ и $\Delta\omega$ в зависимости от первых зональных гармонических коэффициентов.

Для примера на графиках (рис. 16) изображены возможные относительные изменения $\Delta\Omega$ и $\Delta\omega$ в зависимости от коэффициентов C_{20} , C_{30} , C_{40} , C_{50} , C_{60} , т. е. первых зональных гармоник. Относительность состоит в том, что приведенные изменения $\Delta\Omega$ и $\Delta\omega$ соответствуют не действительным коэффициентам C_{20} , C_{30} , ..., а одинаковому для всех условному коэффициенту, равному $1 \cdot 10^{-6}$. Чтобы

получить полную величину изменения Ω или ω , необходимо $\Delta\Omega$ и $\Delta\omega$ умножить на отношение числового значения конкретного коэффициента к $1 \cdot 10^{-6}$. Как видно из графиков, помимо векового изменения $\Delta\Omega$ и $\Delta\omega$, наблюдается их долгопериодическое возмущение. На двух других

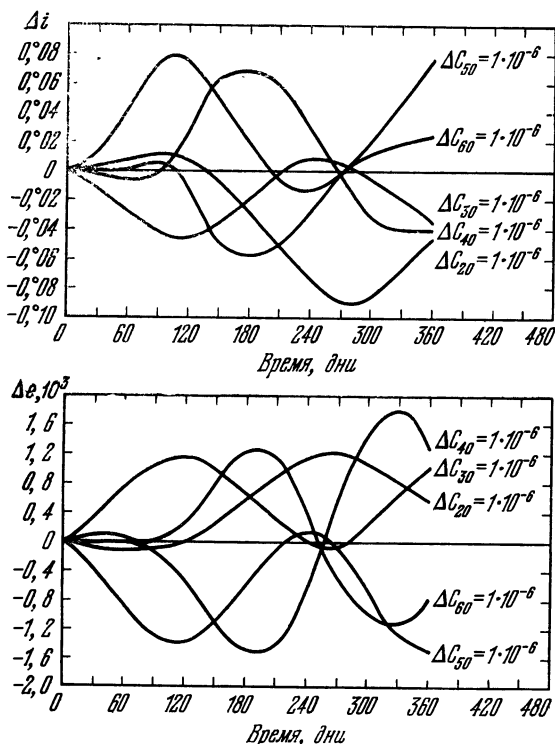


Рис. 17. Изменение Δi и Δe в зависимости от первых зональных гармонических коэффициентов.

графиках (рис. 17) представлены изменения Δi и Δe в зависимости от тех же гармоник. В этом случае преобладают долгопериодические возмущения элементов i и e . Напомним, что для «Луны-10» за 46 оборотов спутника произошли изменения $\Delta\Omega$ на $-7^\circ, 7'$, а $\Delta\omega$ на $11^\circ, 8'$.

Следует заметить, что теория движения ИСЛ, равно как и обратная ей задача — определение гравитационного поля

по возмущениям в движении ИСЛ, в основном те же, что и для Земли. Поэтому назовем некоторые отечественные книги, систематически излагавшие прямую и обратную задачи применительно к ИСЗ: [5], [9], [13], [15], [27] и др. В статьях [11], [29], [43], [58], [60], [61], [68], [83], [84], [99] и др. разработана теория движения ИСЛ и определения гравитационного поля Луны.

§ 10. Методы определения гармонических коэффициентов гравитационного поля из наблюдений ИСЛ

Задача определения гравитационного поля Луны — обратная задаче изучения движения ИСЛ в ее гравитационном поле. По наблюдениям определяются возмущения в движении ИСЛ под действием аномального гравитационного поля. Предполагается, что в уравнениях (2.18), (2.19) — (2.22) из наблюдений известна их левая часть и определены также приближенные значения элементов орбиты ИСЛ, которые используются для вычисления коэффициентов при искомым неизвестных C_{nm} и S_{nm} в правой части названных уравнений. Такой метод определения коэффициентов C_{nm} и S_{nm} можно условно назвать аналитическим, так как он основывается на аналитическом решении исходных дифференциальных уравнений движения ИСЛ. На основании аналитического метода было получено несколько различных вариантов решения, отличающихся различием используемого исходного наблюдательного материала, а также способов его обработки. Способы обработки различаются тем, как комбинируются наблюдения ИСЛ, полученные в течение всего доступного интервала наблюдений. Различают метод длинных и коротких орбитальных дуг. В первом из них выбираются наблюдения на дуге протяженностью во много десятков или сотен оборотов ИСЛ. Эти длинные дуги разбиваются на ряд коротких дуг протяженностью в несколько оборотов ИСЛ. По коротким дугам определяют средние значения элементов орбиты ИСЛ и относят их к определенным моментам времени. Далее рассматриваются долгопериодические и вековые изменения элементов орбиты, на основании которых выводятся гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} . Так делалось в работах [2], [4], [30], [31], [43], [45], [46], [65], [66], [68]. Гармонические коэффициенты

также определялись из обработки наблюдений ИСЛ на коротких дугах. Примером таких выводов являются гармонические коэффициенты, приведенные в [51]. Опыт показал, что из-за недостаточного разнообразия параметров орбит ИСЛ гармонические коэффициенты, определяемые по наблюдениям методом длинных дуг, оказывались сильно коррелированными. Так, в работе [67] было показано, что при выводе гармонических коэффициентов до четвертого порядка коэффициенты корреляции между C_{20} и C_{40} , C_{20} и C_{60} , C_{21} и C_{61} , C_{30} и C_{50} , S_{32} и C_{42} , C_{32} и S_{42} , S_{33} и C_{43} , C_{40} и C_{60} , C_{50} и C_{70} были более чем 0,8. Поэтому в более поздних исследованиях применялись приемы обработки наблюдательных данных, которые обеспечивали меньшую взаимную корреляцию между искомыми гармоническими коэффициентами (см. § 18).

Остановимся несколько подробнее на методике обработки наблюдательных данных при использовании для определения гармонических коэффициентов аналитического решения уравнений движений ИСЛ на примере работ А. Феррари [43], [45], [46]. По доплеровским наблюдениям околосолнечного спутника сначала выводятся кеплеровские элементы $(a, e, i, \omega, \Omega)$ для каждой орбиты. Каждый элемент с помощью сплайнов аппроксимируется функцией времени. Путем ее дифференцирования вычисляются долгопериодические изменения элементов орбиты во времени $(\dot{e}, \dot{i}, \dot{\omega}, \dot{\Omega})$. Большая полуось a от гравитационного поля не испытывает возмущений, поэтому $\dot{a} = 0$. Далее, на основе уравнений Лагранжа по долгопериодическим возмущениям вычисляются гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} . В более компактной форме уравнения для возмущений элементов орбиты можно записать в векторной форме так:

$$\dot{\mathcal{E}} = F(\mathcal{E})P, \quad (2.23)$$

где \mathcal{E} — вектор средних элементов $(a, i, e, \Omega, \omega, M)$, $F(\mathcal{E})$ — матрица, составленная из частных производных от возмущений элементов по гармоническим коэффициентам:

$$F(\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{i}}{\partial C_{20}} \cdots \frac{\partial \dot{i}}{\partial C_{nm}} & \frac{\partial \dot{i}}{\partial S_{21}} \cdots \frac{\partial \dot{i}}{\partial S_{nm}} \\ \vdots & \\ \frac{\partial \dot{M}}{\partial C_{20}} \cdots \frac{\partial \dot{M}}{\partial C_{nm}} & \frac{\partial \dot{M}}{\partial S_{21}} \cdots \frac{\partial \dot{M}}{\partial S_{nm}} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Размерность матрицы $[5 \times (n + 1)^2 - 4]$. \mathbf{P} — вектор искомых гармонических коэффициентов C_{nm} , S_{nm} разложения гравитационного поля Луны в ряд по сферическим функциям. Его матрица имеет размерность $[(n + 1)^2 - 4] \times 1$ и имеет вид

$$\mathbf{P} = [C_{20}, C_{21}, C_{22}, \dots, C_{nm}, S_{21}, S_{22}, \dots, S_{nm}].$$

В среднеквадратическом приближении алгоритм решения уравнения (2.23) записывается в следующем виде [39]:

$$\dot{\mathbf{P}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{K}^{-1})^{-1} (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{P}^* + \mathbf{F}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{\Theta}),$$

где \mathbf{W} — матрица весов для долгопериодических изменений элементов, размерность которой (5×5) . Она предполагается диагональной, т. е. пренебрегается ковариацией между производными различных элементов:

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} \sigma_i^2 & & & & 0 \\ & \sigma_e^2 & & & \\ & & \sigma_{\dot{\Omega}}^2 & & \\ & & & \sigma_{\dot{\omega}}^2 & \\ 0 & & & & \sigma_{\dot{M}}^2 \end{vmatrix}. \quad (2.25)$$

Дисперсии $\sigma_{\dot{\Theta}}^2$ можно вычислить, используя их приближенную связь с ошибками элементов $\delta \mathbf{\Theta}$

$$\sigma_{\dot{\Theta}} = \frac{\delta \mathbf{\Theta}}{T}, \quad (2.26)$$

где T — сутки.

Упомянутая выше величина \mathbf{K} — это ковариационная матрица для искомых гармонических коэффициентов. Для низких гармоник ее элементы определяются по априорно приближенно известному вектору \mathbf{P}^* , а для более высоких — по эмпирически установленному закону убывания порядковых дисперсий с номером n (4.47). Матрица \mathbf{K} тоже предполагается диагональной:

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} \sigma_{C_{20}}^2 & & & & 0 \\ & \sigma_{C_{21}}^2 & & & \\ & & \sigma_{S_{21}}^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_{C_{nm}}^2 \\ 0 & & & & & \sigma_{S_{nm}}^2 \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$

Используя эту методику, Феррари [45] по наблюдениям ИСЛ, запущенных с «Аполлонов-15 и -16», и «Лунар Орбитер-5» получил гармонические коэффициенты порядка (16, 16).

Помимо определения гармонических коэффициентов, основанного на аналитическом решении уравнений движения ИСЛ в неоднородном гравитационном поле Луны, применялся метод, использующий численное интегрирование этих уравнений. В векторной форме дифференциальные уравнения движения ИСЛ можно записать так:

$$\ddot{\Delta} = GM_{\zeta} \nabla \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{T}{GM_{\zeta}} \right),$$

где Δ — радиус-вектор, проведенный из центра масс Луны до ИСЛ, ∇ — оператор Гамильтона, T — возмущающая функция, которая в случае разложения по сферическим функциям имеет вид (2.5). Но она может быть представлена и иначе, в частности, используется представление в виде гравитационного потенциала совокупности точечных масс

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{Gm_i}{r_i},$$

где m_i — аномальные массы в недрах Луны, r_i — расстояние их до ИСЛ. На практике реализуется дифференциальный метод определения гармонических коэффициентов или точечных масс. Для этого принимается некоторая исходная модель гравитационного поля Луны, характеризующаяся постоянными C_{nm} и S_{nm} (или параметрами точечных масс) в нулевом приближении. С помощью этой модели поля рассчитывается промежуточная орбита ИСЛ. Наблюдаемая орбита сравнивается с промежуточной. Предполагается, что разность возникает от неточности принятой модели гравитационного поля Луны. Определяются дифференциальные поправки к постоянным гравитационного поля исходной модели. Такой метод является в определенном смысле более прямым, чем аналитический метод, описанный выше. В аналитическом методе сначала определяются возмущения в элементах орбиты, а по ним выводятся постоянные гравитационного поля. Из наблюдений же получают координаты и скорости ИСЛ, поэтому

постоянные оказываются связанными с ними лишь через возмущения в элементах. Расхождение промежуточной и наблюдаемой орбит ИСЛ происходит как следствие несоответствия исходной модели гравитационного поля реальному полю. При этом модель должна хорошо представлять гравитационное поле как для видимой, так и для обратной сторон Луны. Поэтому постоянные гравитационного поля Луны, определенные описанным методом согласования, подбора, по идее должны соответствовать ее обеим сторонам. Возможны, конечно, ошибки, обусловленные тем, что все определения постоянных гравитационного поля производятся на основании наблюдений, относящихся только к видимой стороне, т. е. наблюдения не равнопредставительны. Метод численного подбора постоянных C_{nm} и S_{nm} модели гравитационного поля Луны применялся в ряде работ, в частности, в [71], [72].

Необходимо подчеркнуть, что аналитические методы крайне необходимы для качественного анализа поведения решений уравнений движения ИСЛ в неоднородном гравитационном поле Луны. Они необходимы для выбора оптимальных решений и оптимизации постановки наблюдений ИСЛ и пр.

Очевидно, что для надежного определения постоянных гравитационного поля необходимы достаточно длительные наблюдения ИСЛ (недели, месяцы). Кроме того, желательно большее разнообразие ИСЛ с различными элементами орбиты (наклонность, эксцентриситет, большая полуось). В табл. 10, а также в табл. 14 и 16 приведены элементы орбиты ИСЛ, по которым определялись постоянные C_{nm} и S_{nm} гравитационного поля Луны. С помощью букв (а и б) различают орбиты одного и того же ИСЛ, элементы орбиты которого оказались различными в результате предпринятого включения двигателей. Теоретический анализ показал, что оптимальными орбитами ИСЛ для изучения гравитационного поля являются орбиты с минимальными большими полуосями a и большими наклонностями i . В этом смысле элементы орбит ИСЛ «Лунар Орбитер -1, -2, -3» являются не оптимальными из-за малой наклонности их орбит, а «Лунар Орбитер-4а» имеет большой размер a . Последнее обстоятельство становится выгодным, когда ставится задача вывода только гармоник низкого порядка. При этом уменьшается

Т а б л и ц а 10

Основные характеристики некоторых ИСЛ, использовавшихся для определения гравитационного поля Луны: a — большая полуось, e — эксцентриситет, i — наклонность орбиты к лунному экватору, T — период

Наименование спутников	a , км	e	i	T , минуты	Дата запуска	Длины дуг, использованные для анализа, дни	Число наблюдений
«Луна-10»	2420	0,138	72°	178	31 марта 1966	56	
«Лунар Орбитер-1»	2670	0,327	12	206	14 авг. 1966	9, 7	2076
«Лунар Орбитер-2»	2702	0,341	18	210	10 нояб. 1966	8, 5	2662
«Лунар Орбитер-3а»	2688	0,332	21	208	8 февр. 1967	15, 9	2502
«Лунар Орбитер-4б»	3751	0,516	84	344	5 июня 1967	8, 6	3739
«Лунар Орбитер-3б»	1968	0,062	21	130	3 авг. 1967	17, 1	3322
«Лунар Орбитер-4а»	6150	0,654	85	721	8 мая 1967		
«Лунар Орбитер-5»	2832	0,317	85	225	5 авг. 1967	19, 9	5847
«Эксплорер-35»	5980	0,576	169	690	7 дек. 1967	2138	133
«Эксплорер-49»	2803	0,002	62	220		831	64

возмущающее действие высокочастотных компонент гравитационного поля.

Для определения гравитационного поля Луны необходимо, чтобы на окололунный спутник не действовали никакие иные ускорения, кроме гравитационных, обусловленных неоднородностью внутреннего строения и неправильностью фигуры Луны. ИСЛ не должен совершать маневров, осуществляемых работой двигателей. Но поскольку обычно ИСЛ имеют целью решать широкий круг задач, помимо изучения гравитационного поля (фотографирование, изучение радиационного излучения, метеоритной обстановки и пр. в окололунном пространстве), он вынужден совершать маневры. Поэтому время его существования, пригодного для гравитационных целей, оказывается ограниченным. Так, если говорить о движениях всех пяти ИСЛ «Лунар Орбитер», то за все время их активного существования (45 спутнико-месяцев) для обработки удалось выбрать 24 отдельные орбиты, продолжительностью от 3 до 20 дней, пригодные для гравитационных определений.

Наибольшее возмущение на движение ИСЛ оказывает световое давление Солнца. Величину силы светового давления можно подсчитать по формуле

$$F = \frac{CS_0(1+k)}{c} \cos \alpha,$$

где $S_0 = 1,39 \cdot 10^{-6}$ эрг/см²·с — солнечная постоянная, характеризующая мощность солнечной радиации на единицу площади в единицу времени, C — площадь поперечного сечения спутника, c — скорость света, k — коэффициент отражения, $0 < k < 1$, α — угол падения солнечного луча на поверхность спутника. Для уменьшения этого возмущения выгодно использовать спутники, для которых отношение площади поперечного сечения C к массе спутника мало. Световое давление, например, на ИСЛ «Лунар Орбитер-1» вызывало ускорение, равное $1,2 \cdot 10^{-5}$ см/с².

Точный учет возмущений от светового давления осложняется тем, что при движении спутника вокруг Луны возмущающая функция светового давления изменяется скачком при заходе и выходе спутника из тени. Кроме того, возмущения в движении ИСЛ возникают за

счет приливного действия Земли, Солнца и планет Солнечной системы. Возмущающая функция от Земли с достаточным приближением может быть записана в виде

$$T_{\oplus} = GM_{\oplus} \frac{\rho^2}{\Delta^3} P_{20}(\cos \psi).$$

Здесь GM_{\oplus} — геоцентрическая гравитационная постоянная, Δ — расстояние от Земли до Луны. ψ — угол между радиусом-вектором Δ и радиусом-вектором ρ из центра Луны до ИСЛ. Возмущающий потенциал T_{\oplus} состоит из постоянной части и переменной во времени. Аналогичная формула имеет место и для учета возмущений от Солнца, но оно значительно меньше. Возмущения от Земли, Солнца и планет носят вековой и долгопериодический характер. Так, на высоте 2000 км возмущение от Земли примерно равно возмущению, обусловленному сжатием Луны.

Влияние Солнца составляет $0,5 \cdot 10^{-2}$ от возмущений Земли, а для планет и того меньше. В отличие от Земли, на Луне отсутствует атмосфера, поэтому при изучении движения ИСЛ отпадает необходимость учета сопротивления атмосферы, которое является одним из главных возмущений для ИСЗ. За счет релятивистских эффектов возникает вековое движение перигея

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3(GM_{\odot})^{3/2}}{c^2 a^{5/2} (1 - e^2)}.$$

Возможны также воздействия электромагнитного происхождения, так как ИСЛ движется в ионизированной среде и в поле излучения Солнца. Все эти эффекты действуют, увеличивая силу торможения. Кроме того, под действием притяжения Земли и Солнца происходит приливное перераспределение масс в теле Луны, что тоже должно привести к возмущениям в движении ИСЛ. Однако влияния электромагнитного происхождения, приливного перераспределения масс малы и при современной точности наблюдений ИСЛ не учитываются. Что же касается учета возмущений от светового давления, приливного действия Земли и Солнца, то необходимо найти производные по соответствующим координатам от возмущающего потенциала этих эффектов и дополнить правые части равенств (2.2), (2.3).

§ 11. Оценки величин лучевых ускорений, возникающих из-за вращения Земли и орбитальных движений Луны и ИСЛ

Для изучения гравитационного поля Луны с конца шестидесятых годов начал применяться новый спутниковый метод [77], который не использовался ранее при изучении гравитационного поля Земли. В этом методе ИСЛ рассматривается как пробное тело, которое под действием неоднородного гравитационного поля Луны в своем движении по орбите изменяет направление и величину скорости. Наблюдения за изменением скорости ИСЛ производят с земных наблюдательных станций, используя метод Доплера. Таким образом удастся наблюдать только одну компоненту скорости, а именно проекцию на направление «ИСЛ — станция наблюдения на Земле», которую называют лучевой скоростью. Для определения по методу Доплера лучевой скорости ИСЛ относительно станции наблюдения на Земле на борту ИСЛ устанавливается высокостабильный генератор, излучающий радиоволны стандартной частоты. Эти сигналы регистрируются на ряде наблюдательных станций на Земле. Известно, что если излучатель радиоволн или станция наблюдения движутся относительно друг друга, то из-за доплеровского эффекта будет наблюдаться частота радиоволн, отличная от той, что излучает передатчик с ИСЛ. Разность частот, излученных f_0 и наблюдаемых f , равна $\Delta f = f_0 - f = \pm f V_\delta / V_p$, где V_δ — компонента относительной скорости вдоль направления ИСЛ — станция наблюдения на Земле, V_p — скорость распространения радиоволн. Знак «+» означает сближение ИСЛ и станции, знак «—» — взаимное удаление. Практически из доплеровских измерений определяется средняя за время τ лучевая скорость

$$\bar{V}_\delta = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau V_\delta(t) dt = \frac{k}{\tau} \int_0^\tau \Delta f dt,$$

где $k = V_p / f_0$ — коэффициент перевода осредненной разности частот Δf в скорость.

Нетрудно представить, что изменение лучевой скорости V_δ зависит от ряда причин: станция наблюдения вращается вокруг оси суточного вращения Земли; по сложной орбите движется центр масс Луны вокруг центра масс

системы Земля — Луна; ИСЛ движется по кеплеровской орбите вокруг точечной Луны; неоднородность гравитационного поля Луны искажает кеплеровскую орбиту. На ИСЛ также действуют возмущения Солнца, планет, световое давление и пр. Под действием перечисленных факторов зависимость наблюдаемой лучевой скорости от времени t

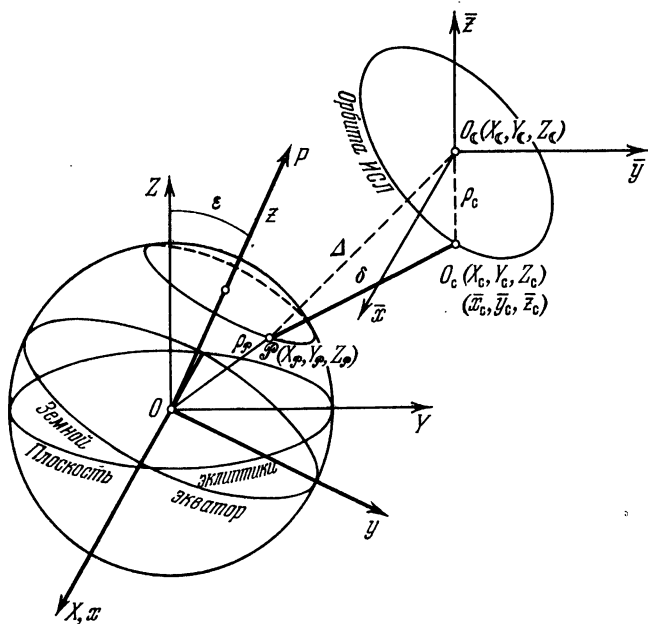


Рис. 18. Системы координат станции P доплеровских наблюдений на Земле, центра масс Луны O_c центра ИСЛ O_c и расстояния между ними.

очень сложна. Постараемся последовательно рассмотреть компоненты лучевой скорости и оценить вклад в наблюдаемую лучевую скорость V_d каждой из компонент. Для определения аномального гравитационного поля Луны необходимо исключить компоненты скоростей, обусловленные всеми этими причинами, за исключением только той компоненты, которая вызвана неоднородностью гравитационного поля Луны. Ниже попытаемся аналитически описать изменения лучевой скорости и лучевого ускорения, обусловленные: 1) суточным вращением Земли,

2) движением Луны по орбите, 3) орбитальным движением ИСЛ в центральном гравитационном поле Луны.

Введем геоцентрическую эллиптическую прямоугольную систему координат (X, Y, Z) (рис. 18). Эту систему координат примем за основную. Наряду с ней будем использовать ряд других вспомогательных систем координат. Обозначим координаты станции \mathcal{P} доплеровских наблюдений на Земле в основной системе через $X_{\mathcal{P}}, Y_{\mathcal{P}}, Z_{\mathcal{P}}$, координаты центра масс Луны O_{ζ} ($X_{\zeta}, Y_{\zeta}, Z_{\zeta}$), центр ИСЛ — O_c (X_c, Y_c, Z_c). Геоцентрическую экваториальную систему координат обозначим (x, y, z) . Ее начало совпадает с началом основной системы (X, Y, Z) . Сначала рассмотрим, как изменяются координаты $(X_{\mathcal{P}}, Y_{\mathcal{P}}, Z_{\mathcal{P}})$ станции в зависимости от суточного вращения Земли. Для этого выразим геоцентрические экваториальные прямоугольные координаты станции \mathcal{P} ($X_{\mathcal{P}}, Y_{\mathcal{P}}, Z_{\mathcal{P}}$) через геоцентрические экваториальные сферические координаты $(\rho_{\mathcal{P}}, \varphi, \lambda)$, причем $\lambda = \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0)$:

$$\left. \begin{aligned} x_{\mathcal{P}} &= \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \cos \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0), \\ y_{\mathcal{P}} &= \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0), \\ z_{\mathcal{P}} &= \rho_{\mathcal{P}} \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

где $\rho_{\mathcal{P}}$ — расстояние станции \mathcal{P} от центра масс Земли, φ, λ — ее геоцентрические широта и долгота, T — период суточного вращения Земли, \bar{t}_0 — момент времени, когда точка \mathcal{P} проходит через плоскость Oxz . Но нам необходимо выразить в функции времени координаты $(X_{\mathcal{P}}, Y_{\mathcal{P}}, Z_{\mathcal{P}})$ станции доплеровских наблюдений \mathcal{P} , записанные в основной прямоугольной системе координат (X, Y, Z) . Для этого производится правый поворот экваториальной прямоугольной системы координат x, y, z на угол наклона ε плоскости земного экватора к эклиптике вокруг оси $X \equiv x$. Имея в виду равенства (2.28), а также матрицу поворота систем координат, получим

$$\begin{bmatrix} X_{\mathcal{P}} \\ Y_{\mathcal{P}} \\ Z_{\mathcal{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \cos \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0) \\ \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0) \\ \rho_{\mathcal{P}} \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Из этого равенства следует:

$$\left. \begin{aligned} X_{\mathcal{P}} &= \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \cos \frac{2\pi}{T} (t - \bar{t}_0), \\ Y_{\mathcal{P}} &= \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{T} (t - \bar{t}_0) \cos \varepsilon + \rho_{\mathcal{P}} \sin \varphi \sin \varepsilon, \\ Z_{\mathcal{P}} &= \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{T} (t - \bar{t}_0) \sin \varepsilon + \rho_{\mathcal{P}} \sin \varphi \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} (2.30)$$

Последние формулы показывают, как изменяются координаты станции наблюдения \mathcal{P} в основной прямоугольной системе координат (X, Y, Z) в зависимости от времени t .

Теперь опишем изменение во времени положения центра масс Луны. Выше уже говорилось о сложности истинного движения Луны по орбите даже в рамках основной проблемы движения Луны, т. е. с учетом в ее движении только возмущения от Солнца, и в предположении, что все три тела (Луна, Земля, Солнце) — точки, а центр масс системы Земля — Луна движется вокруг Солнца по кеплеровской орбите.

Воспользуемся формулами Брауна (§ 2), представляющими на основе теории движения Луны эллиптические геоцентрические сферические координаты центра масс Луны $(\Delta, B_{\zeta}, L_{\zeta})$ в виде сумм (1.14). Используя эти формулы, прямоугольные координаты центра масс Луны можно выразить в функции времени t так:

$$\left. \begin{aligned} X_{\zeta} &= \Delta \cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta} = \\ &= \frac{a_{\oplus} \cos \left(\sum_j b_j \sin \psi_j(t) \right) \cos \left(\lambda + \sum_j a_j \sin \psi_j(t) \right)}{\sum_j c_j \cos \psi_j(t)}, \\ Y_{\zeta} &= \Delta \cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta} = \\ &= \frac{a_{\oplus} \cos \left(\sum_j b_j \sin \psi_j(t) \right) \sin \left(\lambda + \sum_j a_j \sin \psi_j(t) \right)}{\sum_j c_j \cos \psi_j(t)}, \\ Z_{\zeta} &= \Delta \sin B_{\zeta} = \frac{a_{\oplus} \sin \left(\sum_j b_j \sin \psi_j(t) \right)}{\sum_j c_j \cos \psi_j(t)}, \end{aligned} \right\} (2.31)$$

где a_{\oplus} — экваториальный радиус Земли, а коэффициенты a_j , b_j , c_j — известные постоянные, ψ_j — известные функции времени t . Они даются в таблицах движения Луны, о которых шла речь в § 2. Формулы (2.31) учитывают неравенства в движении Луны.

Наконец рассмотрим изменение в течение времени t координат ИСЛ в его невозмущенном движении. Прямоугольные координаты ИСЛ в основной системе координат X , Y , Z представим в виде суммы соответствующих координат центра масс Луны (X_{ζ} , Y_{ζ} , Z_{ζ}) и относительных координат ИСЛ (\bar{x}_c , \bar{y}_c , \bar{z}_c). Система относительных координат \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} имеет начало O_{ζ} в центре масс Луны, т. е. она селеноцентрическая, ее оси параллельны соответствующим осям основной системы X , Y , Z . Тогда координаты спутника в основной системе равны

$$\left. \begin{aligned} X_c &= X_{\zeta} + \bar{x}_c, \\ Y_c &= Y_{\zeta} + \bar{y}_c, \\ Z_c &= Z_{\zeta} + \bar{z}_c. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Координаты \bar{x}_c , \bar{y}_c , \bar{z}_c выразим через эклиптические селеноцентрические сферические координаты ρ_c , b_c , l_c

$$\bar{x}_c = \rho_c \cos b_c \cos l_c, \quad \bar{y}_c = \rho_c \cos b_c \sin l_c, \quad \bar{z}_c = \rho_c \sin b_c. \quad (2.33)$$

Пусть Ω — долгота восходящего узла ИСЛ, отсчитываемая от направления на точку весеннего равноденствия до направления линии пересечения плоскости орбиты ИСЛ с эклиптической плоскостью, ω — угловое расстояние перицентра от узла, i — наклонность плоскости орбиты ИСЛ к плоскости эклиптики, a — большая полуось, e — эксцентриситет орбиты ИСЛ, v — истинная аномалия. Эклиптические широта b_c и долгота l_c связаны с Ω , i , ω , v формулами (1.10):

$$\left. \begin{aligned} l_c &= \Omega + \arctg [\cos i \operatorname{tg} (\omega + v)], \\ b_c &= \arcsin [\sin i \sin (\omega + v)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Известно, что радиус-вектор ρ_c через элементы орбиты выражается следующим образом:

$$\rho_c = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}. \quad (2.35)$$

Подставляя выражения (2.34) и (2.35) в уравнение (2.33), имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_c &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \left[\frac{\pi}{2} - \sin i \sin(\omega+v) \right] \cos \left[\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \arctg(\cos i \operatorname{tg}(\omega+v)) \right], \\ \bar{y}_c &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \left[\frac{\pi}{2} - \sin i \sin(\omega+v) \right] \sin \left[\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \arctg(\cos i \operatorname{tg}(\omega+v)) \right], \\ \bar{z}_c &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \sin i \sin(\omega+v). \end{aligned} \right\} (2.36)$$

Таким образом, селеноцентрические прямоугольные координаты $(\bar{x}_c, \bar{y}_c, \bar{z}_c)$ выражены через элементы орбиты ИСЛ. Если считать, что ИСЛ движется в центральном гравитационном поле и отсутствуют возмущения, то он будет двигаться по кеплеровской орбите. Со временем t будет изменяться только истинная аномалия v , а остальные элементы орбиты постоянны.

Расстояние между станцией доплеровских наблюдений на Земле и наблюдаемым ИСЛ обозначим

$$\delta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

где ξ, η, ζ — проекции этого расстояния на координатные оси основной системы координат X, Y, Z . Выражения для ξ, η, ζ найдем, используя (2.30) — (2.33):

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= -\rho_{\mathcal{S}} \cos \varphi \cos \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0) + \Delta \cos B_{\zeta}(t) \cos L_{\zeta}(t) + \\ &\quad + \rho_c \cos b_c(t) \cos l_c(t), \\ \eta(t) &= -\rho_{\mathcal{S}} \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0) \cos \varepsilon - \rho_{\mathcal{S}} \sin \varphi \sin \varepsilon + \\ &\quad + \Delta \cos B_{\zeta}(t) \sin L_{\zeta}(t) + \rho_c \cos b_c(t) \sin l_c(t), \\ \zeta(t) &= \rho_{\mathcal{S}} \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0) \sin \varepsilon - \rho_{\mathcal{S}} \sin \varphi \cos \varepsilon + \\ &\quad + \Delta \sin B_{\zeta}(t) + \rho_c \sin b_c(t). \end{aligned} \right\} (2.37)$$

Подставив последние выражения для ξ, η, ζ в формулу для δ , получим

$$\delta^2 = \Delta^2 + \rho_c^2 + \rho_{\mathcal{S}}^2 + 2\Delta\rho_c [\cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta} \cos b_c \cos l_c + \cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta} \cos b_c \sin l_c + \sin B_{\zeta} \sin l_c] -$$

$$\begin{aligned}
& - 2\Delta\rho_{\mathcal{P}} \sin \varphi [\cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta} \sin \varepsilon + \sin B_{\zeta} \cos \varepsilon] - \\
& \quad - 2\rho_{c0}\rho_{\mathcal{P}} \sin \varphi [\cos b_c \sin l_c \sin \varepsilon + \sin b_c \cos \varepsilon] - \\
& - 2\rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \cos \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0) [\Delta \cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta} + \rho_c \cos b_c \cos l_c] - \\
& - 2\rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0) [\Delta (\cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta} \cos \varepsilon + \sin B_{\zeta} \sin \varepsilon) + \\
& \quad + \rho_c (\cos b_c \sin l_c \cos \varepsilon + \sin b_c \sin \varepsilon)].
\end{aligned}$$

Таким образом, расстояние δ является функцией времени t через посредство тригонометрических функций с аргументами $\frac{2\pi}{T}(t - t_0)$, $B_{\zeta}(t)$, $L_{\zeta}(t)$, $b_c(t)$, $l_c(t)$ и расстояний $\Delta(t)$ и $\rho_c(t)$. Направляющие косинусы для δ равны

$$\cos(X\hat{\delta}) = \frac{\xi}{\delta}, \quad \cos(Y\hat{\delta}) = \frac{\eta}{\delta}, \quad \cos(Z\hat{\delta}) = \frac{\zeta}{\delta}. \quad (2.38)$$

Нас интересует компонента ускорения станции доплеровских наблюдений относительно ИСЛ, спроектированная на направления δ , т. е. лучевое ускорение \mathbf{g}_{δ} . По доплеровским наблюдениям измеряется лучевая скорость V_{δ} , а ускорение \mathbf{g}_{δ} вычисляется дифференцированием V_{δ} . Поэтому рассмотрим также выражения для лучевых скоростей. Очевидно наблюдаемая лучевая скорость V_{δ} , а следовательно, и лучевое ускорение \mathbf{g}_{δ} складываются из компонент, обусловленных названными выше тремя движениями, и компонент, обусловленных возмущением от аномальности фигуры и внутреннего строения Луны. Рассмотрим отдельно компоненты скоростей и ускорений для каждого из этих видов движения. Компоненты скорости от суточного вращения станции доплеровских наблюдений по каждой из координатных осей основной системы координат X , Y , Z равны:

$$\left. \begin{aligned}
(V_{\mathcal{P}})_x &= -\frac{2\pi}{T} \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0), \\
(V_{\mathcal{P}})_y &= -\frac{2\pi}{T} \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \cos \varepsilon \cos \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0), \\
(V_{\mathcal{P}})_z &= -\frac{2\pi}{T} \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \sin \varepsilon \cos \frac{2\pi}{T}(t - \bar{t}_0)
\end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

и компоненты ускорения

$$\left. \begin{aligned} (g_{\mathcal{P}})_x &= - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \cos \frac{2\pi}{T} (t - \bar{t}_0), \\ (g_{\mathcal{P}})_y &= \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \cos \varepsilon \sin \frac{2\pi}{T} (t - \bar{t}_0), \\ (g_{\mathcal{P}})_z &= \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \sin \varepsilon \sin \frac{2\pi}{T} (t - \bar{t}_0). \end{aligned} \right\} (2.40)$$

Выражение для лучевой скорости $(V_{\mathcal{P}})_{\delta}$ получим, используя (2.39) и (2.38):

$$(V_{\mathcal{P}})_{\delta} = (V_{\mathcal{P}})_x \frac{\xi}{\delta} + (V_{\mathcal{P}})_y \frac{\eta}{\delta} + (V_{\mathcal{P}})_z \frac{\zeta}{\delta}, \quad (2.41)$$

а для лучевого ускорения с помощью (2.37), (2.38), (2.40) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{P}} &= (g_{\mathcal{P}})_x \frac{\xi}{\delta} + (g_{\mathcal{P}})_y \frac{\eta}{\delta} + (g_{\mathcal{P}})_z \frac{\zeta}{\delta} = \\ &= \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi \frac{1}{\delta} \left\{ \rho_{\mathcal{P}} \cos \varphi - [\Delta \cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta} + \right. \\ &+ \rho_c \cos b_c \cos l] \cos \frac{2\pi}{T} (t - \bar{t}_0) - \left[\cos \varepsilon (\Delta \cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta} + \right. \\ &+ \rho_c \cos b_c \sin l_c) - \sin \varepsilon (\Delta \sin B_{\zeta} + \rho_c \sin b_c) \sin \frac{2\pi}{T} (t - \bar{t}_0) \left. \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Движение Луны по орбите. Воспользовавшись выражениями (2.31), найдем составляющие скорости по координатным осям основной системы координат X, Y, Z для центра масс Луны:

$$\left. \begin{aligned} (V_{\zeta})_x &= \dot{\Delta} \cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta} - \dot{B}_{\zeta} \Delta \sin B_{\zeta} \cos L_{\zeta} - \\ &\quad - \dot{L}_{\zeta} \Delta \cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta}, \\ (V_{\zeta})_y &= \dot{\Delta} \cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta} - \dot{B}_{\zeta} \Delta \sin B_{\zeta} \sin L_{\zeta} + \\ &\quad + \dot{L}_{\zeta} \Delta \cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta}, \\ (V_{\zeta})_z &= \dot{\Delta} \sin B_{\zeta} + \dot{B}_{\zeta} \Delta \cos B_{\zeta}. \end{aligned} \right\} (2.43)$$

Для компонент ускорения имеем

$$\left. \begin{aligned}
 (g_{\zeta})_x &= \ddot{\Delta} \cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta} - \ddot{B}_{\zeta} \Delta \sin B_{\zeta} \cos L_{\zeta} - \\
 &\quad - \ddot{L}_{\zeta} \Delta \cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta} - \dot{B}_{\zeta}^2 \Delta \cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta} - \\
 &\quad - \dot{L}_{\zeta}^2 \Delta \cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta} - 2\dot{\Delta} \dot{B}_{\zeta} \sin B_{\zeta} \cos L_{\zeta} - \\
 &\quad - 2\dot{\Delta} \dot{L}_{\zeta} \cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta} + 2\dot{B}_{\zeta} \dot{L}_{\zeta} \Delta \sin B_{\zeta} \sin L_{\zeta}, \\
 (g_{\zeta})_y &= \ddot{\Delta} \cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta} - \ddot{B}_{\zeta} \Delta \sin B_{\zeta} \sin L_{\zeta} + \\
 &\quad + \dot{L}_{\zeta} \dot{\Delta} \cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta} - \dot{B}_{\zeta}^2 \Delta \cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta} - \\
 &\quad - \dot{L}_{\zeta}^2 \Delta \cos B_{\zeta} \sin L_{\zeta} - 2\dot{\Delta} \dot{B}_{\zeta} \sin B_{\zeta} \sin L_{\zeta} + \\
 &\quad + 2\dot{\Delta} \dot{L}_{\zeta} \cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta} - 2\dot{B}_{\zeta} \dot{L}_{\zeta} \Delta \sin B_{\zeta} \cos L_{\zeta}, \\
 (g_{\zeta})_z &= \ddot{\Delta} \sin B_{\zeta} + \ddot{B}_{\zeta} \Delta \cos B_{\zeta} + 2\dot{\Delta} \dot{B}_{\zeta} \cos B_{\zeta} - \\
 &\quad - \dot{B}_{\zeta}^2 \Delta \sin B_{\zeta}.
 \end{aligned} \right\} (2.44)$$

Лучевая скорость $(V_{\zeta})_{\delta}$ и лучевое ускорение Γ_{ζ} от движения центра масс Луны по орбите равны соответственно

$$(V_{\zeta})_{\delta} = (V_{\zeta})_x \frac{\xi}{\delta} + (V_{\zeta})_y \frac{\eta}{\delta} + (V_{\zeta})_z \frac{\zeta}{\delta}, \quad (2.45)$$

$$\Gamma_{\zeta} = (g_{\zeta})_x \frac{\xi}{\delta} + (g_{\zeta})_y \frac{\eta}{\delta} + (g_{\zeta})_z \frac{\zeta}{\delta}. \quad (2.46)$$

В равенства (2.43) и (2.44), а следовательно, в (2.45) и (2.46) входят первые и вторые производные от координат Δ , B_{ζ} , L_{ζ} . Их выражения найдем, обратившись к (1.11):

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\Delta} &= \frac{\Delta^2}{a_{\oplus}} \sum_j c_j \dot{\psi}_j \sin \psi_j, \\
 \dot{L}_{\zeta} &= \dot{\lambda} + \sum_j a_j \dot{\psi}_j \cos \psi_j, \\
 \dot{B}_{\zeta} &= \sum_j b_j \dot{\psi}_j \cos \psi_j,
 \end{aligned} \right\} (2.47)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{\Delta} &= \frac{2\Delta^3}{a_{\oplus}^2} \left(\sum_j c_j \dot{\psi}_j \sin \psi_j \right)^2 + \\
 &\quad + \frac{\Delta^2}{a_{\oplus}} \left[\sum_j c_j \dot{\psi}_j^2 \cos \psi_j + \sum_j c_j \ddot{\psi}_j \sin \psi_j \right],
 \end{aligned} \right\} (2.48)$$

$$\ddot{B}_{\zeta} = \sum_j b_j \ddot{\psi}_j \cos \psi_j - \sum_j b_j \dot{\psi}_j^2 \sin \psi_j,$$

$$\ddot{L}_{\zeta} = \ddot{\lambda} + \sum_j a_j \ddot{\psi}_j \cos \psi_j - \sum_j a_j \dot{\psi}_j^2 \sin \psi_j.$$

Коэффициенты в (2.47) и (2.48) a_j , b_j , c_j — известные постоянные, ψ_j — известные функции времени t . Они даются в таблицах движения Луны.

Движение ИСЛ по эллиптической орбите. На основании (2.33) напишем компоненты по координатным осям для скорости; они аналогичны (2.43):

$$\left. \begin{aligned} (V_c)_x &= \dot{\rho}_c \cos b_c \cos l_c - \dot{b}_c \rho_c \sin b_c \cos l_c - \\ &\quad - \dot{l}_c \rho_c \cos b_c \sin l_c, \\ (V_c)_y &= \dot{\rho}_c \cos b_c \sin l_c - \dot{b}_c \rho_c \sin b_c \sin l_c + \\ &\quad + \dot{l}_c \rho_c \cos b_c \cos l_c, \\ (V_c)_z &= \dot{\rho}_c \sin b_c + \dot{b}_c \rho_c \cos b_c. \end{aligned} \right\} (2.49)$$

Для компонент ускорения ИСЛ аналогично (2.44) имеем

$$\left. \begin{aligned} (g_c)_x &= \ddot{\rho}_c \cos b_c \cos l_c - \ddot{b}_c \rho_c \sin b_c \cos l_c - \\ &\quad - \ddot{l}_c \rho_c \cos b_c \sin l_c - \dot{b}_c^2 \rho_c \cos b_c \cos l_c - \\ &\quad - \dot{l}_c^2 \rho_c \cos b_c \cos l_c - 2\dot{\rho}_c \dot{b}_c \sin b_c \cos l_c - \\ &\quad - 2\dot{\rho}_c \dot{l}_c \cos b_c \sin l_c + 2\dot{b}_c \dot{l}_c \rho_c \sin b_c \sin l_c, \\ (g_c)_y &= \ddot{\rho}_c \cos b_c \sin l_c - \ddot{b}_c \rho_c \sin b_c \sin l_c + \\ &\quad + \ddot{l}_c \rho_c \cos b_c \cos l_c - \dot{b}_c^2 \rho_c \cos b_c \sin l_c - \\ &\quad - \dot{l}_c^2 \rho_c \cos b_c \sin l_c - 2\dot{\rho}_c \dot{b}_c \sin b_c \sin l_c + \\ &\quad + 2\dot{\rho}_c \dot{l}_c \cos b_c \cos l_c - 2\dot{b}_c \dot{l}_c \rho_c \sin b_c \cos l_c, \\ (g_c)_z &= \ddot{\rho}_c \sin b_c + \ddot{b}_c \rho_c \cos b_c + \\ &\quad + 2\dot{\rho}_c \dot{b}_c \cos b_c - \dot{b}_c^2 \rho_c \sin b_c. \end{aligned} \right\} (2.50)$$

Имея в виду (2.34) и (2.35), которые устанавливают связь между селеноцентрическими эллиптическими координатами (ρ_c , b_c , l_c) и элементами орбиты ИСЛ, найдем необходимые в последних равенствах производные

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_c &= \frac{a(1-e^2)e \sin v}{(1+e \cos v)^2} \dot{v}, \\ \dot{l}_c &= \frac{\cos i}{\cos^2(\omega+v) + \sin^2(\omega+v) \cos^2 i} \dot{v}, \\ \dot{b}_c &= \frac{\sin i \cos(\omega+v)}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2(\omega+v)}} \dot{v}, \end{aligned} \right\} (2.51)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{\rho}_c &= \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos v)^2} \left[\ddot{v} \sin v + \frac{\cos v + 2e - e \cos^2 v}{1+e\cos v} \dot{v}^2 \right], \\
 \ddot{i}_c &= \frac{\cos i}{\cos^2(\omega+v) + \sin^2(\omega+v)\cos^2 i} \left[\ddot{v} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sin^2 i \sin 2(\omega+v)}{\cos^2(\omega+v) + \sin^2(\omega+v)\cos^2 i} \dot{v}^2 \right], \\
 \ddot{\delta}_c &= \frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2(\omega+v)}} \left[\ddot{v} \cos(\omega+v) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\cos^2 i \sin(\omega+v)}{1 - \sin^2 i \sin^2(\omega+v)} \dot{v}^2 \right].
 \end{aligned} \right\} (2.52)$$

Лучевая скорость $(V_c)_\delta$ и лучевое ускорение Γ_c , обусловленные движением ИСЛ в центральном поле тяготения Луны без возмущений, равны

$$(V_c)_\delta = (V_c)_x \frac{\xi}{\delta} + (V_c)_y \frac{\eta}{\delta} + (V_c)_z \frac{\zeta}{\delta}, \quad (2.53)$$

$$\Gamma_c = (g_c)_x \frac{\xi}{\delta} + (g_c)_y \frac{\eta}{\delta} + (g_c)_z \frac{\zeta}{\delta}. \quad (2.54)$$

Изменения рассмотренных компонент лучевых ускорений в течение времени изображены на рис. 19. Ускорения, связанные с вращением Земли $\Gamma_{\text{з}}$ и орбитальным движением ИСЛ в центральном поле тяготения Луны Γ_c , показаны на рис. 19, а. Амплитуды их достигают соответственно 3 и 150 Гал. Как видно из рисунка, характер изменения лучевых ускорений Γ_c существенно зависит от эксцентриситета e и наклонности i орбиты ИСЛ. Изменение же Γ_c за счет орбитального движения Луны медленно варьирует; амплитуда его достигает десятков мГал.

Возмущенное движение ИСЛ. Оно возникает за счет гравитационного влияния плотностных неоднородностей в недрах Луны и неправильности ее фигуры. На него действует также световое давление, гравитационное возмущение от Солнца и больших планет, сжатия Земли, приливных эффектов самой Луны и пр. Эти последние влияния малы, их можно рассчитать теоретически и учесть. А после исключения описанных в настоящем параграфе эффектов, вызванных вращением Земли, движением ИСЛ в центральном поле тяготения и движением Луны по орбите, окончательно останутся искомые лучевые ускорения, обусловленные аномальностью внутреннего строения и фигуры Луны. Это аномальное поле и представляет основной интерес при гравиметрическом изучении Луны.

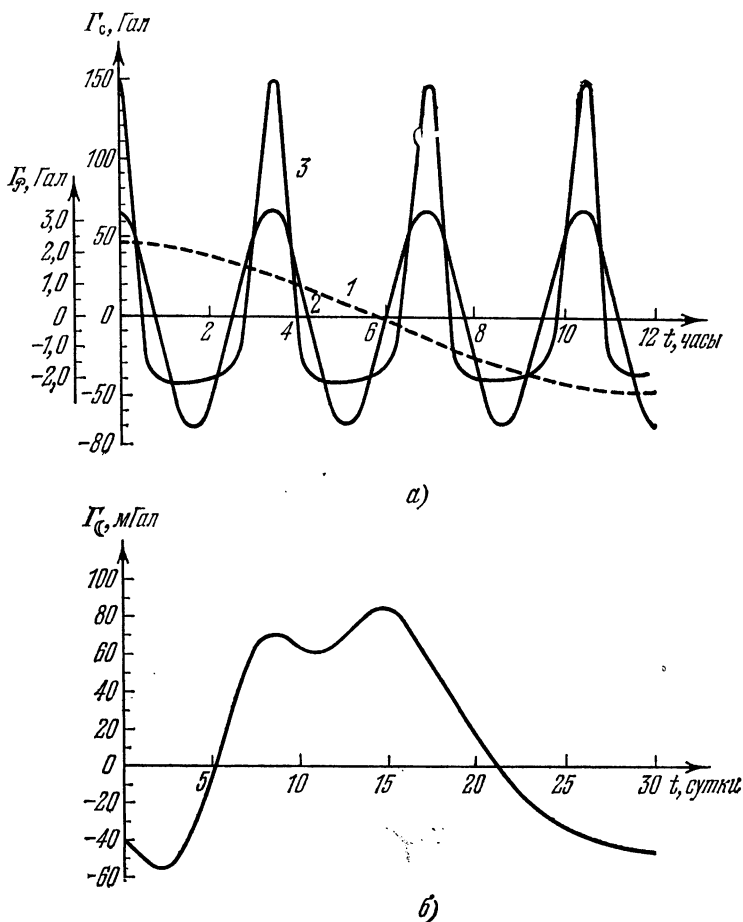


Рис. 19. а) Изменение с течением времени t лучевых ускорений: 1 — Γ , обусловленное вращением Земли, 2 — Γ_{ζ} , обусловленное движением ИСЛ в центральном поле тяготения Луны, с параметрами орбиты $a = 2700$ км, $i = 0,209$ рад, $e = 0$; 3 — то же Γ_{ζ} с $a = 2700$ км, $i = 0,209$ рад, $e = 0,327$. б) Изменение в течение времени t лучевого ускорения Γ_{ζ} обусловленного движением Луны по орбите.

§ 12. Изучение гравитационного поля по вариациям лучевой скорости окололунного спутника

Использование ИСЛ в новом амплуа, как пробного тела в аномальном гравитационном поле Луны, позволило с большой детальностью получить представление о гра-



Рис. 20. Карта лучевых ускорений Γ для видимой стороны Луны, полученная Мюллером и Сьегреном. По ней впервые были открыты масконы.

витационном поле видимой стороны. На рис. 20 представлена схема изолиний лучевых ускорений для видимой стороны, полученная впервые Мюллером и Сьегреном [77] по доплеровским наблюдениям ИСЛ «Лунар Орбитер-5».

На основании именно этой карты впервые были открыты интереснейшие образования на Луне — *масконы*. Измерение лучевой скорости ИСЛ производилось по изменению относительно стандартной частоты (2300 МГц) радиоволн, излучаемых со спутника. Изменению частоты на 1 Гц соответствует изменение лучевой скорости на 65 мм/с. Точность определения изменения частоты была 0,02 Гц, т. е. 1,3 мм/с. Можно восхищаться совершенству современной техники. На расстоянии 380 000 км изменение скорости объекта измеряется с точностью до долей см/с, а ускорение — с точностью в несколько тысячных долей см/с²! При построении упомянутой карты лучевых ускорений применялось осреднение по одноминутным интервалам времени. Высота ИСЛ была более 100 км. Карта ограничена $\pm 60^\circ$ по широте и $\pm 60^\circ$ по долготе. Чтобы получить аномалии силы тяжести, т. е. радиальные к Луне ускорения, необходимо помимо лучевой компоненты ускорения знать еще две пространственные компоненты, которые не измеряются. Для центральных областей Луны они пренебрежимо малы и становятся существенными к периферии. Поэтому можно лучевые ускорения отождествлять с аномалиями силы тяжести только в центральной области.

С помощью указанного метода прямых определений аномалий лучевых ускорений ИСЛ, двигавшихся на небольших высотах над лунной поверхностью, удалось получить для отдельных участков видимой стороны Луны гравиметрические карты большой детальности. Использовались доплеровские наблюдения командного и служебного модуля (КСМ) «Аполлонов-14, -15, -16, -17» ([80], [87], [88], [92], [93]) и ИСЛ, запущенных с «Аполлонов-15 и -16» [91]. Перицентры их орбит отстояли от лунной поверхности на высотах порядка первых десятков км, а КСМ «Аполлона-15» на 12 км над центром Моря Ясности. Схема изменения средних высот изображена на рис. 21. Удалось использовать примерно по десять оборотов для каждого КСМ «Аполлон». За счет небольшого изменения орбит спутников были получены лучевые ускорения в полосе шириной ~ 10 —70 км, имеющей долготное простираение.

На рис. 22 представлены изолинии через 10 мГал, построенные по наблюдениям КСМ «Аполлона-17» [93]. Они

начинаются в области кратера Гримальди ($\lambda = -68^\circ$), проходят через Океан Бурь, где аномалии, изменив знак при $\lambda = -44^\circ$, достигают $+53$ мГал. Далее профиль пролегает через окраину кратера Коперник ($\lambda = -20^\circ$), через Залив Зноя ($\lambda = -10^\circ$), над горной областью Апеннин аномалии понижаются до $-100 - 120$ мГал ($\lambda = 4^\circ$). Вплоть до $\lambda = +10^\circ$ в горной области аномалии лучевых

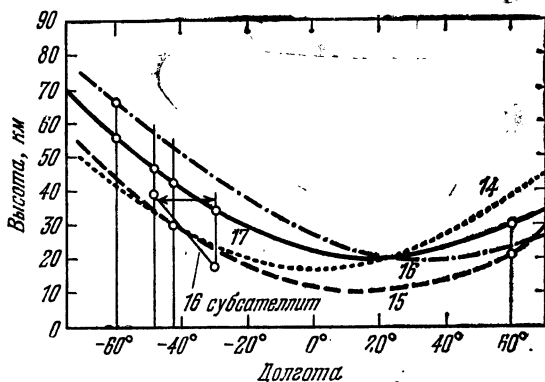


Рис. 21. Средние высоты над сферической лунной поверхностью точек орбиты КСМ «Аполлон». Вертикальные линии и точки показывают, где пересекалась орбита КСМ «Аполлона-17» с орбитами других КСМ «Аполлонов» и с орбитой ИСЛ, запущенного с «Аполлона-16».

ускорений остаются отрицательными. На окраине Моря Ясности ($\lambda = +16^\circ$) аномалии возрастают до $+246$ мГал. При $\lambda = 26^\circ$ положительные аномалии сменяются снова отрицательными и в районе кратера Литтров ($\lambda = +30^\circ$) они уже достигают -150 мГал. В районе Моря Кризисов ($\lambda = +54^\circ$) аномалия равна $+194$ мГал и вновь убывает до -150 мГал при $\lambda = +66^\circ$. Обращает на себя внимание корреляция гравитационного поля с отдельными деталями рельефа и связанными с ними тектоническими структурами. Хорошо оконтуриваются отдельные кратеры. Наблюдается большая горизонтальная протяженность лучевых ускорений одного знака в горных районах ($\lambda = -64^\circ$, $\lambda = -6^\circ$, $\lambda = +10^\circ$, $\lambda = +50^\circ$, $\lambda = +70^\circ$).

Асимметрия гравитационного поля на окраине Моря Кризисов и большие градиенты ускорений при $\lambda = 63^\circ$, по-видимому, свидетельствуют о сложной структуре ниж-

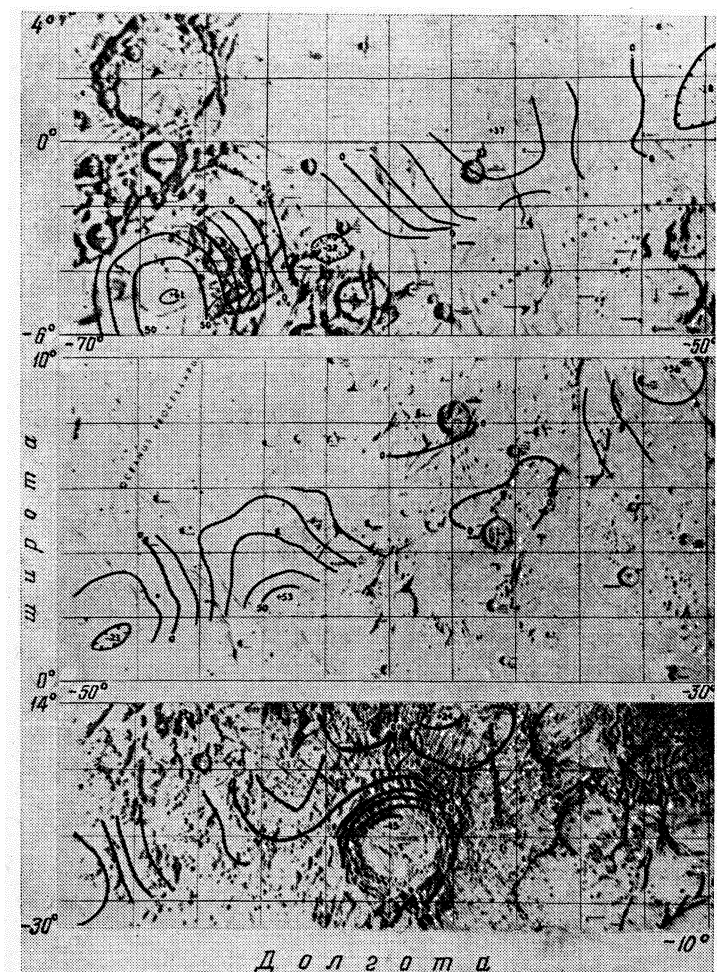


Рис. 22а. Изолинии лучевых ускорений Γ , построенные по наблюдениям КСМ «Аполлон-17».

него ложа этого бассейна. Профиль КСМ «Аполлона-16» [92] пролегал через Океан Бурь, который не создавал больших аномалий лучевого ускорения, а затем через кратер Флемстид, горы Рифей, кратер Фра Мауро, Море

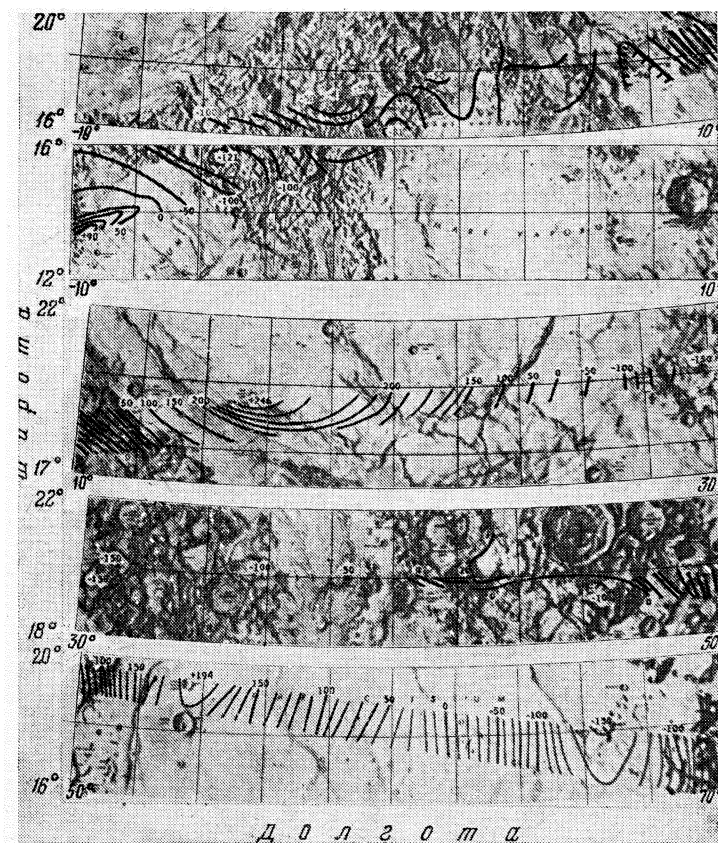


Рис. 226. Изолинии лучевых ускорений Γ , построенные по наблюдениям КСМ «Аполлон-17».

Облаков, кратер Птолемей, высокогорную область, Море Изобилия. Маршрут «Аполлона-15» [88] проходил через западный край Океана Бурь, где аномалии достигли -65 мГал, Горы Марий Хилс ($+65$ мГал), Море Дождей ($+54-61$ мГал), далее наблюдалось уменьшение аномалий до -150 мГал перед тем как достичь значения $+235$ мГал в Море Ясности, затем аномалии вновь уменьшались до -225 мГал при $\lambda = 32^\circ$. В Море Кризисов аномалии вновь достигают $+200$ мГал.

По доплеровским наблюдениям ИСЛ, запущенных с «Аполлонов-15 и -16», на низких высотах были вычислены аномалии лучевых ускорений и построены гравиметрические карты для ряда областей экваториальной зоны на видимой стороне Луны в пределах $\lambda = \pm 70^\circ$ [91]. Достаточно высокая точность измерений позволила провести на картах изолинии через 10 мГал. Карты показывают, что лунные образования вулканического типа проявляются в изолиниях лучевых ускорений. Резкие гравитационные аномалии согласуются с большими незаполненными кратерами. Необычайное образование, — Море Восточное, — отличается от подобных ему масконов на видимой стороне. В центральной части оно имеет положительную аномалию, окруженную кольцом отрицательных аномалий. Своеобразие Моря Восточного могло быть объяснено тем, что это образование находится в высокогорной области вдали от морских образований видимой стороны Луны, а может быть, причиной является и то, что в этой части Луны более тонкая кора.

На основании детальных съемок стало возможным провести более тщательную интерпретацию гравитационного поля над отдельными масконами. Получены были принципиально новые представления об этих интересных образованиях на Луне. Они не залегают на глубинах порядка 50 км в виде компактных масс, как думали раньше, интерпретируя первые гравиметрические карты, а представляют собой поверхностные образования типа материальных дисков. Будучи изостатически нескомпенсированными, избыточные массы порядка 800 кг/см^2 [80] создают напряжение в верхних слоях лунной коры. Имелась возможность контролировать точность определения аномалий лучевых ускорений во время пересечения маршрутов полета различных «Аполлонов». В табл. 11 дана сводка различия ускорений между различными КСМ «Аполлон». В первых двух строках и девятой для «Аполлонов-16—17», в строках 4—8 для «Аполлонов-14 — -16», а в третьей — для КСМ «Аполлона-17» и ИСЛ, запущенного с «Аполлона-16». Разности такого же порядка получают на Земле при морских гравиметрических измерениях силы тяжести.

Конечно, более желательно иметь карты аномалий силы тяжести, а не лучевых ускорений. Они более удобны

Т а б л и ц а 11

Сравнение значений лучевых ускорений Γ , определенных в одних и тех же местах над лунной поверхностью по наблюдениям различных «Аполлонов»

λ	Значения Γ в мГал, определенные по различным «Аполлонам»					
	14, КСМ	15, КСМ	16, КСМ	17, КСМ	16, субсателлит	Разность Δ , мГал
-60°			0	0		0
-43°			30	30		0
-42°				53	55	2
+7°	90		66			24
+12°	50		40			-10
+16°	-40		-34			-6
+20°	60		66			-6
+24°	80		107			-27
+60°			66	57		9

для интерпретаций. Относительно полученных аномалий лучевых ускорений следует сказать следующее. Во-первых, это только проекции ускорений силы тяжести в точках наблюдения на луч зрения земного наблюдателя. Во-вторых, аномалии лучевых ускорений относятся к точкам, которые имеют различные высоты, соответствующие высоте полета космического аппарата. В-третьих, фактические экстремальные значения лучевых ускорений оказываются заниженными на 20—30% за счет применяемой к наблюдаемым доплеровским скоростям вычислительной операции аппроксимации и весового осреднения [53].

В § 7 уже говорилось о методах трансформации наблюдаемых лучевых ускорений $\Gamma = \frac{\partial V}{\partial x}$ (x — направление Луна — Земля) в распределение масс простого слоя на некоторой аппроксимирующей Луну поверхности. Имея распределение простого слоя, на основании (1.67) можно определить потенциал притяжения V в любой точке внешнего пространства, а следовательно, и любые его производные. Применение трансформации поля Γ с помощью простого слоя имеет ряд достоинств, которые состоят в том, что при этом учитывается несферичность Луны и произвольность расположения точек, в которых измерены

производные Γ . Это особенно важно, так как, например, ИСЛ, по наблюдениям которого построена гравиметрическая карта (см. рис. 20), в экваториальной зоне отстоял от лунной поверхности почти на 100 км, а на параллелях $\pm 60^\circ$ это расстояние увеличивалось до 300 км [77].

Если бы имелась совокупность лучевых ускорений Γ для всех точек некоторой замкнутой поверхности, то в принципе возможно, решая краевую задачу теории потенциала, определить потенциал притяжения и любую его производную. Об этом шла речь в § 4 в общей постановке. Ниже рассмотрим два способа аналитического решения краевой задачи в предположении, что граничной поверхностью является сфера, а в (1.31) принято $m = 1$, $l = n = 0$. Выводы даны в соответствии с работой Х. Моритца [73]. Эта же задача независимо была решена В. В. Броваром [37]. Напишем интеграл Пуассона, дающий решение задачи Дирихле для сферы, применительно к лучевому ускорению:

$$\Gamma(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} \Gamma(\xi, \eta, \zeta) dS, \quad (2.55)$$

где x, y, z — координаты точки, в которых измерены значения Γ ; ξ, η, ζ — текущие координаты поверхности S , принимаемой за сферу,

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & R &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \\ r &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}. \end{aligned}$$

Предполагаем, что функция Γ удовлетворяет условию

$$\iint_S \Gamma(\xi, \eta, \zeta) dS = 0, \quad (2.56)$$

которое означает, что эта функция содержит только знакопеременные компоненты. Умножив обе части равенства (2.56) на $(4\pi R\rho)^{-1}$, используем его для построения, на основе формулы (2.55), следующего выражения:

$$\Gamma(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^3} - \frac{1}{\rho} \right) \Gamma(\xi, \eta, \zeta) dS. \quad (2.57)$$

Умножим обе части последнего равенства на dx , проинтегрируем их по x в пределах от ∞ до x . Таким образом, найдем выражение потенциала V в точке (x, y, z)

$$\begin{aligned} V(x, y, z) - V(\infty, y, z) &= \int_{\infty}^x \Gamma(x, y, z) dx = \\ &= \frac{1}{4\pi R} \iint_S \left[\int_{\infty}^x \left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^3} - \frac{1}{\rho} \right) dx \right] \Gamma(\xi, \eta, \zeta) dS. \end{aligned}$$

В силу свойства регулярности потенциала

$$V(\infty, y, z) = 0.$$

Обозначив

$$\int_0^x \left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^3} - \frac{1}{\rho} \right) dx = K(x - \xi, y - \eta, z - \zeta), \quad (2.58)$$

где K — ядро преобразования, уравнение, выражающее гравитационный потенциал V через заданные значения Γ на поверхности S , запишем в виде

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \Gamma(\xi, \eta, \zeta) K(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) dS. \quad (2.59)$$

Теперь остается только определить аналитический вид функции K . Проинтегрировав (2.58), получим

$$\begin{aligned} K(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) &= \\ &= -\frac{2\eta(y - \eta) + 2\zeta(z - \zeta)}{r(r + x - \xi)} - \frac{2\xi}{r} + \ln \frac{r + x - \xi}{\rho + x} \end{aligned} \quad (2.60)$$

для $x \geq 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$, т. е. для точек вне и на сфере S радиуса R ,

$$\begin{aligned} K(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) &= \\ &= \frac{2\eta(y - \eta) + 2\zeta(z - \zeta)}{r(r - x + \xi)} - \frac{2\xi}{r} - \ln \frac{r - x + \xi}{\rho - x} \end{aligned} \quad (2.61)$$

для $x < 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$.

В справедливости формул (2.60) и (2.61) легко убедиться простым дифференцированием. Таким образом, интеграл (2.59) позволяет по заданному распределению лучевых ускорений $\Gamma(S)$ на поверхности сферы S рассчи-

тывать потенциал $V(x, y, z)$ в точках внешнего к ней пространства.

Наконец рассмотрим еще один способ определения гравитационного потенциала Луны по заданному распределению лучевого ускорения [73], [37]. В этом способе используется разложение гравитационного поля Луны в ряд по сферическим функциям. Воспользуемся выражением гравитационного потенциала Луны в виде

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{\rho}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (1.18)$$

где (ρ, φ, λ) — сферические координаты, точки, в которой рассматривается потенциал, R — средний радиус сферы, которая принята за поверхность относимости.

Из представлений Максвелла известны следующие соотношения между сферическими функциями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda}{\rho^{n+1}} \right) &= \\ &= -(n-m+1) \frac{P_{n+1,m}(\sin \varphi) \cos m\lambda}{\rho^{n+2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P_{nm}(\sin \varphi) \sin m\lambda}{\rho^{n+1}} \right) &= \\ &= -(n-m+1) \frac{P_{n+1,m}(\sin \varphi) \sin m\lambda}{\rho^{n+2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

Продифференцируем обе части равенства (1.18) по x и, используя последние соотношения, получим

$$\Gamma(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{GM_{\zeta}}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} P_{n+1,m}(\sin \varphi) (n-m+1) \times \\ \times (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda).$$

Сделаем замену n на $n-1$:

$$\Gamma(\rho, \varphi, \lambda) = -\frac{GM_{\zeta}}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} P_{n,m}(\sin \varphi) (n-m) \times \\ \times (C_{n-1,m} \cos m\lambda + S_{n-1,m} \sin m\lambda). \quad (2.63)$$

С другой стороны, представим лучевые ускорения Γ , полученные из наблюдений в точках (ρ, φ, λ) окололунного пространства, в виде следующего разложения в ряд по сферическим функциям:

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho, \varphi, \lambda) = \\ = - \frac{GM_{\zeta}}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) \times \\ \times P_{nm}(\sin \varphi). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Приравняем соответствующие коэффициенты при одинаковых сферических функциях в разложениях (2.63), (2.64). Заменяя $n - 1$ на n , получим искомые коэффициенты C_{nm} и S_{nm} , выраженные через коэффициенты разложения Γ , выведенного из доплеровских наблюдений лучевых ускорений,

$$\left. \begin{aligned} C_{nm} &= -(n - m + 1)^{-1} a_{n+1, m}, \\ S_{nm} &= -(n - m + 1) b_{n+1, m}. \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

С помощью этих коэффициентов разложение (1.18) позволяет описать гравитационный потенциал в различных точках окололунного пространства.

Реализация описанных двух способов трансформации наблюдаемого поля лучевых ускорений Γ в потенциал притяжения V практически встречает затруднение. Оно возникает из-за того, что нет значений Γ на всей замкнутой поверхности S , кроме того, поверхность S заметно отличается от сферы из-за эллиптичности орбит ИСЛ. Отсутствие наблюдений лучевых ускорений Γ , когда ИСЛ находится над обратной стороной Луны, существенно ухудшает вывод ее общего гравитационного поля. В этой связи в работах [7], [8] рассмотрена следующая задача. Задана замкнутая поверхность S , охватывающая всю Луну и удовлетворяющая условиям Ляпунова. В точках части поверхности S , обращенной к Земле, которую обозначим S_1 , предполагаются заданными лучевые ускорения $\Gamma(x, y, z)$, т. е. задано следующее граничное условие:

$$\Gamma(x, y, z)|_{S_1} = f_1(x, y, z). \quad (2.66)$$

На остальной части поверхности S_2 предполагается заданной какая-нибудь другая характеристика гравитационно-

го поля. Ее роль могут играть приращения потенциала вдоль поверхности или касательные к поверхности S_2 производные гравитационного потенциала. Ориентируясь на проекты будущих запусков ИСЛ, когда помимо основного выводятся на высокую орбиту вспомогательные ретрансляционные спутники, можно предположить, что на поверхности S_2 будут определены производные гравитационного потенциала Луны по двум ортогональным касательным к ней направлениям p и q . Граничное условие для них запишем в виде

$$\frac{dV(x, y, z)}{dp} \Big|_{S_2} = f_2(x, y, z), \quad \frac{dV(x, y, z)}{dq} \Big|_{S_2} = f_3(x, y, z). \quad (2.67)$$

На основании граничных условий (2.67) можно определить потенциал $V(x, y, z)$ в точках поверхности S_2 с точностью до постоянной C :

$$V(x, y, z) \Big|_{S_2} = f_4(x, y, z) + C.$$

Описанная внешняя смешанная краевая задача при граничных условиях (2.66) и (2.67) имеет единственное решение, если известна масса Луны, направление x нигде не совпадает с направлением касательной к S_2 , а на границе смыкания поверхностей S_1 и S_2 выполняются условия согласования граничных условий. Лучевые ускорения $\Gamma(x, y, z)$ в точках выбранной сферы S_0 по заданным лучевым ускорениям $\Gamma_i(x, y, z)$ на поверхности S_1 в N точках (x_i, y_i, z_i) внешнего пространства и по касательным производным $(\frac{dV}{dp}, \frac{dV}{dq})$ на S_2 определяются путем минимизации функционала

$$\begin{aligned} F[\Gamma(x, y, z)] = & \\ & = \iint_{S_1} \left[f_1 - \iint_{S_0} \Gamma(x, y, z) K(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) dS_0 \right]^2 + \\ & + \sum_{i=1}^N \left[\Gamma_i - \iint_{S_0} \Gamma(x_1, y_1, z_1) K(x_1 - x_i, y_1 - y_i, z_1 - z_i) dS_0 \right]^2 + \\ & + \iint_{S_2} \left[f_2 - \frac{1}{\bar{r}_1 - \bar{r}_2} \iint_{S_0} (K_1 - K_2) \Gamma(x_1, y_1, z_1) dS_0 \right]^2 dS_2, \quad (2.68) \end{aligned}$$

где $K(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z)$ — ядро интеграла Пуассона (2.55), а K_1 и K_2 — ядра в формулах Моритца — Бровара, которые имеют вид (2.60). Минимизация функционала (2.68) производится на множестве, в котором искомая функция Γ принадлежит гильбертову пространству L_2 и ограничено по норме. Кроме того, Γ удовлетворяют ограничивающему условию вида ортогональности их к известным на S_0 комбинациям сферических гармоник Y_n . Математически эти условия для искомой функции можно записать так:

$$\Phi \equiv \left\{ \Gamma \in L_2(S_0), \|\Gamma\| = \left[\iint_{S_0} \Gamma^2 dS_0 \right]^{1/2} \leq C, \iint_{S_0} \Gamma Y_n dS_0 = 0 \right\}.$$

Константа C зависит от известных коэффициентов разложения гравитационного потенциала Луны. Сужение класса искомых функций увеличивает устойчивость искомого решения. Рассматриваемая смешанная краевая задача принадлежит к числу некорректных задач. Минимизация функционала $F(\Gamma)$ (2.68) осуществляется применением метода штрафных функций в сочетании с методом условных градиентов.

§ 13. Принципиальные схемы приборов для измерения силы тяжести и требования к лунным гравиметрам

Действие силы тяжести на Луне, как и на Земле, проявляется во многих явлениях. Ускорение свободного падения тел, частота колебаний маятников, деформации пружин и крутильных нитей с укрепленными на них пробными массами и пр. зависят от величины силы тяжести. Из количественных измерений этих проявлений действия силы тяжести можно определить саму силу тяжести. Приборы для измерения силы тяжести можно разделить на две большие группы: 1) *статические* и 2) *динамические* [10]. В приборах, реализующих динамический способ, измеряется время, которое так или иначе связано с силой тяжести (время свободного падения пробного тела с определенной высоты, период колебаний и др.). Начнем описание со статических методов измерения силы тяжести.

Статические способы. В этих способах определяется величина уравновешивающей силы, равной по величине силе тяжести. Роль такой силы сравнения (эталонной силы) может выполнять упругая сила деформированной пружины, крутильной упругой нити, сжатого газа, сила магнитного или электростатического поля, центробежная сила и пр. Эта эталонная сила должна быть стабильной во времени, не изменяться от влияния температуры, давления и других факторов. При изучении гравитационного поля Земли наибольшее распространение получили *гравиметры*, в которых в качестве источника эталонной силы используются упругие элементы, реализуемые в виде всевозможных пружин и упругих крутильных нитей. Конструктивно такие гравиметры можно разбить на две группы, отличающиеся характером перемещений пробной массы под действием силы тяжести: а) поступательное, б) вращательное. Их принципиальные схемы изображены на рис. 23, а и б соответственно. Уравнения равновесия

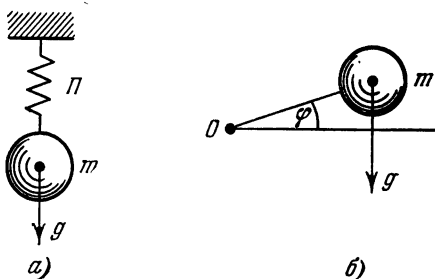


Рис. 23. Принципиальные схемы гравиметров с перемещением пробной массы m под действием силы тяжести g : а) поступательным, б) вращательным. Π — пружина, O — ось горизонтальной крутильной нити.

для гравиметров с поступательным и вращательным перемещением пробной массы можно записать в виде

$$mg + \mathfrak{M}(x) = 0, \quad mglK(\varphi) + \mathfrak{M}(\varphi) = 0. \quad (2.69)$$

Здесь g — сила тяжести, l — расстояние от центра тяжести пробной массы m до оси вращения, x — величина линейного перемещения, φ — угол поворота пробной массы, $\mathfrak{M}(x)$ — эталонная сила, $\mathfrak{M}(\varphi)$ — эталонный момент силы, $mglK(\varphi)$ — момент силы тяжести. $K(\varphi)$,

$\mathfrak{M}(\varphi)$, $\mathfrak{M}(x)$ — нелинейные функции от φ и x , конкретный аналитический вид которых зависит от конструкций гравиметров. Из уравнений (2.69) можно вывести выражения для чувствительности гравиметров, т. е. зависимость поступательного или углового перемещения от ускорения силы тяжести:

$$\frac{dx}{dg} = -\frac{m}{\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}}, \quad \frac{d\varphi}{dg} = -\frac{mlK(\varphi)}{mgl \frac{\partial K}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \varphi}}. \quad (2.70)$$

Сделаем некоторые оценки для линейных систем гравиметров, т. е. таких, в которых уравновешивающая сила $\mathfrak{M}(x)$ и момент сил $\mathfrak{M}(\varphi)$ линейны относительно x и φ ,

$$\mathfrak{M}(x) = \tau_1(x - x_0), \quad \mathfrak{M}(\varphi) = \tau_2(\varphi - \varphi_0), \quad (2.71)$$

где τ_1 , τ_2 — постоянные упругих элементов («жесткость»), x_0 , φ_0 — начальные отклонения, соответствующие деформации упругих элементов при $g = 0$. В случае схемы рис. 23, б $K(\varphi) = \cos \varphi$. Используя (2.71) вместо (2.70), получим следующие простые выражения для чувствительности гравиметров:

$$\frac{dx}{dg} = -\frac{m}{\tau_1}, \quad \frac{d\varphi}{dg} = \frac{ml \cos \varphi}{mgl \sin \varphi - \tau_2}. \quad (2.72)$$

Первое уравнение показывает, что чувствительность зависит от жесткости τ . Из второго уравнения следует, что чувствительность зависит не просто от массы m , а от произведения ее на плечо l . Увеличить чувствительность гравиметров вращательного вида (см. рис. 23, б) согласно (2.72) можно, добываясь того, чтобы момент силы тяжести mgl уравновешивался упругой силой крутильной нити, закрученной на один или несколько оборотов, так что $\varphi \approx 2\pi n$.

Для оценки чувствительности гравиметров полезны соотношения, показывающие зависимость чувствительности от периода собственных колебаний пробной массы в гравиметре:

$$\left(\frac{dx}{dg}\right)_0 = -\frac{T^2}{4\pi^2}, \quad \left(\frac{d\varphi}{dg}\right)_0 = -\frac{T^2}{4\pi^2} \frac{mlK(0)}{I}.$$

Иными словами, чувствительность в статических гравиметрах пропорциональна квадрату периода T собственных колебаний пробной массы.

Динамический способ. Классическим прибором для измерения силы тяжести g , основанным на динамическом принципе, является *маятниковый прибор*. В нем основным элементом является маятник, совершающий свободные колебания. Известно, что

$$g = \frac{4\pi^2 I}{MlT^2},$$

где I — момент инерции маятника относительно оси качания, M , l , T — соответственно масса, приведенная длина, период собственных колебаний маятника. Практически маятниковые приборы используются для относительных измерений силы тяжести, т. е. для определения разности силы тяжести между пунктами измерений и исходного пункта, на котором сила тяжести g_0 предполагается известной. Тогда задача измерения силы тяжести на пункте сводится к измерению только одной величины — изменения периода собственных колебаний маятника — относительно исходного пункта. При этом предполагается, что масса M , момент инерции I и приведенная длина l маятника остаются неизменными. Если периоды собственных колебаний на измеряемом и исходном пунктах соответственно T и T_0 , то сила тяжести g на измеряемом пункте равна

$$g = g_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2.$$

При маятниковых измерениях силы тяжести в измеренные периоды вводятся всевозможные поправки, учитывающие затухание свободных колебаний, различие амплитуд колебаний, изменение температуры маятника и ее градиента во времени, плотности воздуха, сокачание штатива и пр. При необходимости измерить силу тяжести на Луне с точностью ± 1 мГал надо период четвертьсекундного маятника определить с точностью $\pm 8 \cdot 10^{-7}$ с [17].

В настоящее время стали использоваться так называемые струнные гравиметры. Принцип устройства этих гравиметров очень прост. Верхний конец упругой струны скреплен с корпусом, а к нижнему подвешена пробная масса. Величиной, зависящей от силы тяжести, является частота f собственных поперечных колебаний струны вследствие ее зависимости от натяжения под действием

силы тяжести:

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Mg}{Lm}}, \quad (2.73)$$

где M , m — массы пробного тела и струны соответственно, L — длина струны. Идея использования для определения силы тяжести вибрирующей струны, нагруженной пробной массой, была предложена еще в 1935 г. [18]. Однако первый гравиметр, построенный на этом принципе, был описан лишь в 1949 г. [55]. Далее были предложены различные конструкции этих гравиметров как в СССР, так и за рубежом. Они применялись для измерений силы тяжести на морских судах, в том числе и на подводных лодках, на дне мелководных бассейнов, в буровых скважинах. Затем струнные гравиметры стали использоваться в качестве акселерометров для регистрации ускорений в системах инерциальной навигации.

К динамическим гравиметрам следует отнести гравиметры, основанные на использовании астатического гироскопа. По величине прецессии такого гироскопа, которая зависит от момента силы тяжести, может измеряться сила тяжести.

Измерение *абсолютной силы тяжести* на Земле — одна из труднейших задач современной науки. Очевидно, что ее определение на Луне — задача еще более сложная. Определение абсолютной силы тяжести — пример того, как трудно провести абсолютные измерения даже сравнительно простой физической величины, имеющей размерность только длины и времени. Наиболее точным и перспективным для определения абсолютной силы тяжести ныне считается метод свободного падения. Сила тяжести g определяется по измерению времени свободного падения пробного тела в точно известном интервале высот. На Земле достигнута точность почти 1 мкГал. На Луне подобных измерений еще не было, но лунные условия весьма благоприятны для абсолютных определений силы тяжести на ней. Этому способствует прежде всего естественный высокий вакуум. Далее, меньшее значение силы тяжести на Луне, чем на Земле, приводит к более медленному падению пробного тела и облегчает измерения. Конечно, метрологические измерения в космических условиях без непосредственного участия человека — задача необычайно трудная.

При создании гравиметров, предназначенных для измерения силы тяжести на Луне, к ним предъявляется ряд специальных требований:

1. Прежде всего необходима компенсация большой разности силы тяжести Земля — Луна, достигающая 820 Гал. Компенсация может быть, в принципе, реализована различными способами в зависимости от конструкции гравиметра (натяжением специальной компенсационной пружины, изменением компенсационного емкостного напряжения, снятием дополнительной компенсационной массы, изменением наклона прибора и пр.).

2. Измерительная система автоматизированного лунного гравиметра должна обеспечить вывод информации в цифровом виде, как наиболее удобном и защищенном от помех при трансляции на Землю.

3. Лунный гравиметр должен быть хорошо термостатирован так, чтобы обеспечить внутри стабильность температуры $0^{\circ},001-0^{\circ},01$. В лунных условиях задача термостатирования сильно усложняется, так как внешняя температура изменяется в пределах от -100° до $+120^{\circ}$ С.

4. В приборах, рассчитанных на работу без космонавтов, должна быть достаточно сложная автоматическая система дистанционного управления. Необходимо предусмотреть автоматическую нивелировку прибора, дезарретирование его чувствительной системы, включение системы измерений гравиметра, проведение измерений силы тяжести, переработку результатов этих измерений в код, удобный для трансляции на Землю, и транслирование кода. Затем прибор должен быть арретирован и быть готов для транспортировки на новый пункт. В гравиметрах необходимо обеспечить точность нивелирования в несколько угловых минут. Это может делаться путем принудительного приведения прибора в нужное состояние по датчику отвеса, построенного по принципу свободного маятника или уровня.

Системы регистрации и процедура передачи данных могут быть упрощены, если измерение проводит космонавт. Лунные гравиметры должны выдерживать ударные перегрузки и действие значительных инерциальных ускорений, возникающих из-за вибрации работающих двигателей ракетносителя.

5. Не простая задача — эталонирование лунных гравиметров, т. е. установление соответствия между силой тяжести и показаниями гравиметра. В естественных земных условиях гравиметры могут быть эталонированы только в диапазоне 5,3 Гал (разность между полюсом и экватором) вблизи значения 980 Гал; использование калиброванного таким образом гравиметра на Луне требует надежного экстраполирования данных в область значений $g \approx 162$ Гал. Для некоторых типов приборов возможно проведение дополнительной калибровки методом переворачивания, о чем будет рассказано в следующем параграфе при описании одной конкретной конструкции струнного гравиметра.

6. На лунные гравиметры накладываются ограничения в весе, габаритах и в потребляемой энергии.

Из общего анализа различных конструкций гравиметров нельзя однозначно установить наилучший принцип гравиметра для лунных измерений силы тяжести. Выбор гравиметра зависит, в частности, от тех задач, которые ставятся перед гравиметрической съемкой, т. е. от того, нужны ли абсолютные значения силы тяжести или относительные, решается ли глобальная задача или детально изучается гравитационное поле в ограниченной области, изучается ли пространственное распределение гравитационного поля или его временные вариации на одном пункте.

§ 14. Измерение силы тяжести непосредственно на лунной поверхности

Спутниковые методы, как бы точны они ни были, не в состоянии заменить непосредственных измерений силы тяжести на Луне с помощью маятниковых приборов и гравиметров. По спутниковым наблюдениям определяется аномальная часть гравитационного поля, усредненная для определенных участков. Линейные размеры этих участков — сотни, в самом лучшем случае многие десятки км. Достаточно напомнить, что ИСЛ пролетает над лунной поверхностью за каждую секунду времени около двух километров. Точнее можно измерить ускорение, действующее на пробное тело (в данном случае ИСЛ), если это ускорение действует на тело достаточно длительное

время, поэтому выгоднее медленные движения ИСЛ и, конечно, на малых высотах. Более мелкие детали гравитационного поля, обусловленные плотностными неоднородностями верхних слоев недр Луны и деталями ее поверхности, могут быть обнаружены с помощью гравиметрической аппаратуры, устанавливаемой непосредственно на лунной поверхности.

На рис. 24 помечены места «мягких» посадок космических аппаратов СССР и США на Луну, на которых в принципе возможны были бы гравиметрические определения. Однако пока на Луне произведено всего лишь четыре непосредственных измерения силы тяжести, осуществленные с помощью космических аппаратов «Аполлон-11, -12, -14 и -17» [81], [82], [96], [97]. Точность определения силы тяжести на «Аполлоне-11», по свидетельству автора работы [81], ± 13 мГал, точность определения на «Аполлонах-12, 14», по-видимому, такая же, так как применялась аналогичная аппаратура. Это были модернизированные трехкомпонентные акселерометры (PIPA — pulsed integrating pendulous accelerometer), которые ранее использовались при морских и воздушных определениях силы тяжести в движении [36]. Акселерометры устанавливались в лунном модуле, который совершал «мягкую» посадку на поверхность Луны. Если \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} — показания акселерометров по трем ортогональным направлениям, то сила тяжести равна $g = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$.

Измерения абсолютной силы тяжести во время посадки «Аполлона-17» производились космонавтами с помощью гравиметра¹ TG (Travers Gravimeter), созданного специально для лунных измерений силы тяжести в Мас-сачусетском технологическом институте в США. Точность абсолютного определения силы тяжести оценивается авторами [96] величиной ± 5 мГал. Это измерение можно считать первым достаточно точным измерением разности силы тяжести между Землей и Луной. В табл. 12 приведены результаты непосредственных определений силы тяжести на Луне с помощью названных приборов. Помимо наблюдаемых значений силы тяжести g_n в таблице даны соответствующие им нормальные значения силы тяжести γ . Последние вычислялись в предположении, что Луна — однородный шар. Вращением Луны пренебрегалось, а ее селеноцентрическая гравитационная посто-



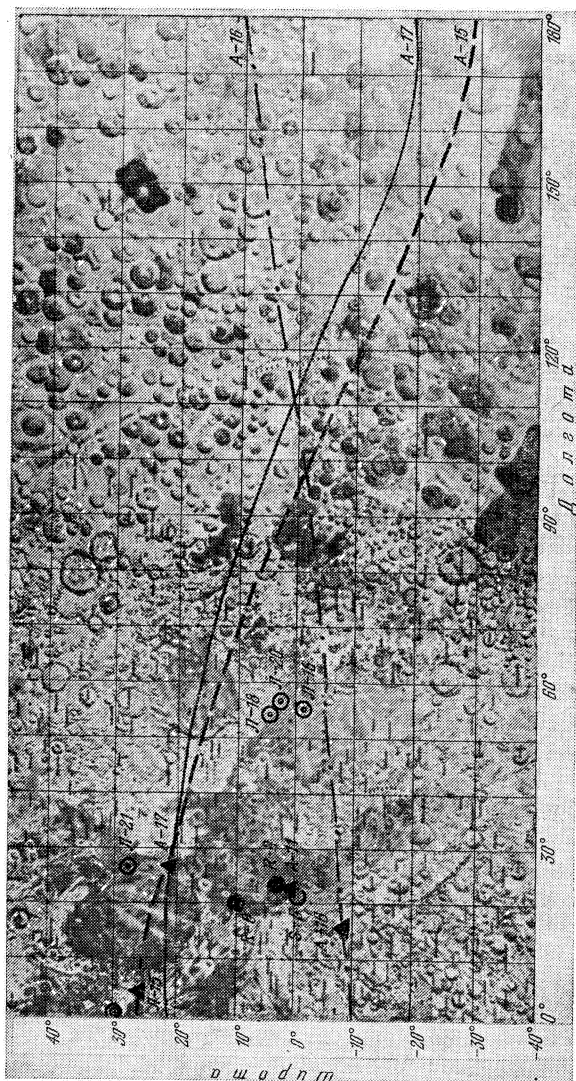


Рис. 24. Схема мест посадок на Луну различных космических аппаратов. Буквами обозначены: *L* — аппараты серии «Луна», *S* — «Сервейор», *Lx* — «Луноходы», *A* — «Аполлон», *R* — «Рейнджер». Показаны профили, вдоль которых осуществлена лазерная локация с КСМ «Аполлон-15, -16, -17».

Таблица 12

Сводка результатов непосредственных измерений силы тяжести на Луне

Космический корабль	Координаты мест посадок		Высоты мест посадок над сферой радиуса $R=1736,00$ км	Наблюдаемое значение силы тяжести, g_H , мГал
	φ	λ		
«Аполлон-11»	$0^{\circ}40'N$	$23^{\circ}29'E$	-0,53	$162\ 852 \pm 13^*$
«Аполлон-12»	$3^{\circ}12'S$	$23^{\circ}24'W$	0	162 674
«Аполлон-14»	$3^{\circ}40'S$	$17^{\circ}28'W$	0,39	162 653
«Аполлон-17»	$20^{\circ}13'N$	$30^{\circ}42'E$	1,19	$162\ 695 \pm 5$

*) В первоначальной работе [81] автор приводил значение $g_H=162821,7$ мГал.

янная предполагалась равной

$$GM_{\zeta} = 4902,71 \text{ км}^3/\text{с}^2.$$

Первый гравиметрический профиль, протяженностью около 20 км, был получен на Луне с помощью упомянутого гравиметра TG, который был установлен на луноходе. Схема его общего устройства изображена на рис. 25 [97]. По принципу TG устроен и струнный гравиметр, в котором сила тяжести измеряется по изменению собственной частоты поперечных колебаний струны под действием силы тяжести. Основным чувствительным элементом гравиметра служит струнный акселерометр (VSA — vibrating string accelerometer). Он состоит (рис. 26) из двух пробных масс, подвешенных на упругих струнах из бериллиевой бронзы. Между собой пробные массы соединены мягкой пружиной, а с корпусом — растяжками, исключаяющими поперечные степени свободы движения пробной массы. Струны помещены между полюсами постоянных магнитов и при подаче на них переменного напряжения струны начинают совершать поперечные колебания. Частота, как уже было сказано, зависит от ускорения g , действующего на пробные массы M , и от натяжения струны F_0 , обусловленного действием промежуточной пружины. Для струнного акселерометра с натягивающей пружиной частота f поперечных колебаний, в отличие от (2.73), описывается формулой

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F_0 + Mg}{Lm}}.$$

Из-за технологических трудностей невозможно сделать в верхнем и нижнем акселерометрах L , M , m точно одинаковыми, поэтому разность частот $f_1 - f_2$ этих акселеро-

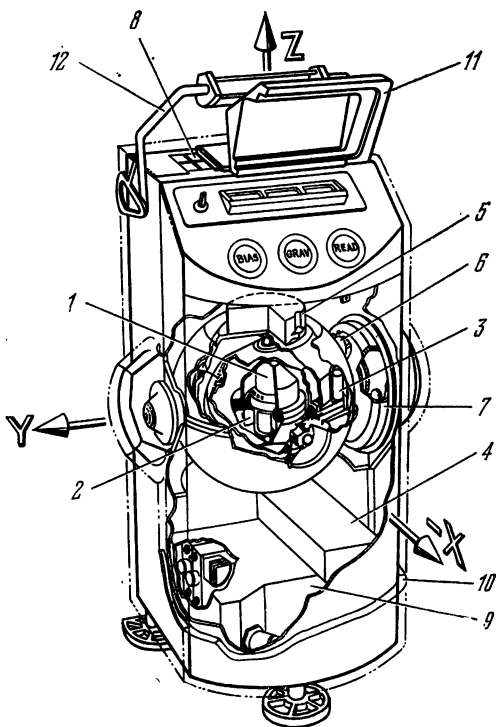


Рис. 25. Схематический разрез гравиметра ТГ: 1 — струнный акселерометр, 2 — усилитель сигналов струнного датчика, 3 — маятниковый датчик вертикали, 4 — блок частоты фазовой автоподстройки, 5 — электронные узлы, 6 — шаговый двигатель, 7 — редуктор, 8 — радиатор, 9 — батарейный отсек, 10 — теплоизолирующая оболочка, 11 — крышка панели индикатора и органов управления, 12 — ручка для переноски.

метров оказывается зависящей и от четных степеней g :

$$F = f_1 - f_2 = k_0 + k_1g + k_2g^2 + \dots \quad (2.74)$$

Вообще F — нелинейная функция g . Если бы L , M , m были одинаковыми, то были бы равны все члены с четными степенями g . На каждом пункте измерялась частота

F , а разность силы тяжести на этих пунктах определялась по разности соответствующих значений F . Предполагается, что в уравнении (2.74) коэффициенты k_0 , k_1 , k_2 известны. Нелинейные члены относительно g необходимы при определении только больших разностей силы тяжести, например, в случае Земля — Луна.

Конструкция гравиметров предусматривала возможность периодической проверки на Луне значений коэффициента k_0 . Для этого чувствительная система гравиметра может переворачиваться на 180° . Для перевернутой системы сохраняется соотношение (2.74) с заменой g на $-g$.

$$F_{\Pi} = k_0 - k_1g + k_2g^2. \quad (2.75)$$

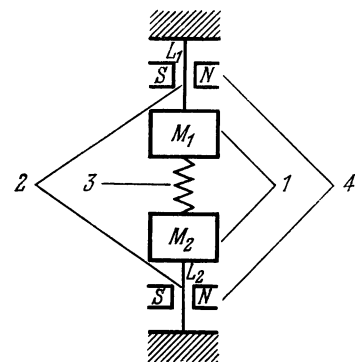


Рис. 26. Схема чувствительного элемента струнного акселерометра: 1 — пробная масса, 2 — струна, 3 — пружина, 4 — электромагниты.

Имея на одном и том же пункте измерение F и F_{Π} с помощью уравнений (2.74) и (2.75), можно определить коэффициент k_0 . Такие измерения делались на всех пунктах измерения по трассе движения лунохода. Это служило дополнительным контролем смещения нуля-пункта. Измерение частоты в гравиметре производилось автоматически путем сравнения со стандартной частотой 100 кГц кварцевого генератора, смонтированного в гравиметре. Результаты измерений силы тяжести выводились на цифровой дисплей и предавались космонавтом в виде импульсного кода. Струнный акселерометр помещался в кардановом подвесе, который обеспечивал поворот акселерометра в пределах 30° . Поворот производился с помощью шагового мотора, связанного с датчиком отвеса. В качестве датчика использовался маятник с двумя степенями свободы. Он выдавал непрерывный сигнал положения относительно вертикали. Более быстрое нивелирование производилось до наклонов прибора, равных $\pm 32'$, а более медленное внутри зоны $\pm 32'$. Один шаг шагового двигателя соответствовал наклону прибора $\pm 1'$. Итоговая

точность нивелирования прибора оценивается в $\pm 7'$. Прибор имел двухступенчатый термостат, работавший на режиме 50°C . Внешний термостат работал в релейном режиме, а внутренний был непрерывного действия. Температура внутри поддерживалась с точностью $\pm 0,005^\circ \text{C}$. Были приняты дополнительные меры термоизоляции (многослойные термоизоляционные покрытия, золочение поверхности и пр.). Общая емкость батареи всего питания гравиметра была $300 \text{ Вт}\cdot\text{ч}$ в течение 15 дней. Для уменьшения влияния вибрации, ударов и перегрузок как во время полета к Луне, так и при посадке, использовались специальные амортизаторы. Диапазон измерения силы тяжести 170 Гал . Гравиметр имел габаритные размеры $48 \times 26 \times 23 \text{ см}$. Общая его масса около 15 кг . На рис. 27 изображен профиль аномалий силы тяжести в

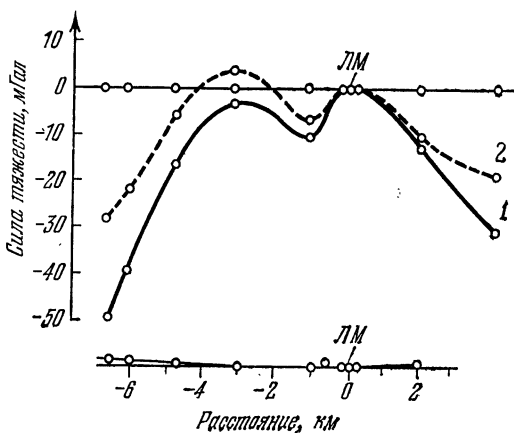


Рис. 27. Профиль аномалий силы тяжести поперек долины Тавр—Литтров, полученный с помощью гравиметра ТГ. 1 — измеренные значения силы тяжести относительно места посадки лунного модуля ЛМ, 2 — аномалии в свободном воздухе.

редукции «в свободном воздухе» в долине Тавр — Литтров на юго-восточной окраине Моря Дождей, полученный [96] с помощью гравиметра ТГ. Точность измерений равна $\pm 2 \text{ мГал}$.

Интересно рассмотреть возможность применения автономных капсул с гравиметрической аппаратурой, совершающих перескоки (перелеты) на Луне. В каждой новой

точке производятся относительные измерения силы тяжести, а относительные плановые и высотные координаты капсулы могут определяться с высокой точностью, если регистрировать ускорения во время перелета с помощью трехкомпонентного акселерометра. Этот вариант изучения гравитационного поля кажется энергетически более выгодным, чем с помощью луноходов. Оценим возможную точность определения координат (x, y, z) точки наблюдения относительно исходной. Если используются акселерометры, точность регистрации ускорения у которых $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0,01 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$, то точность определения координат приращений координат $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ относительно исходных равна

$$\Delta x = \frac{\varepsilon_x \cdot t^2}{2}, \quad \Delta y = \frac{\varepsilon_y \cdot t^2}{2}, \quad \Delta z = \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}.$$

Пусть для перелета на расстояние 5 км требуется 10 с. Это означает, что акселерометр, регистрируя ускорение с названной точностью, позволит определить координаты новой точки относительно исходной с точностью $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \pm 0,5 \text{ см}$.

В настоящем параграфе речь шла об измерениях силы тяжести. Еще больший интерес представляют измерения градиентов силы тяжести на лунной поверхности, но они еще не производились.

§ 15. Об изучении вторых производных гравитационного потенциала Луны

Выше уже говорилось, что гравитационное поле Луны может характеризоваться различными потенциальными функциями, в том числе *вторыми производными гравитационного потенциала*. Последние можно рассматривать как градиенты соответствующих компонент ускорений. Поэтому, чтобы их измерить, необходимо иметь пространственно разнесенные пробные массы. Градиенты ускорений определяются по разности действующих на них ускорений. Градиенты ускорений составляют тензор третьего порядка:

$$G_T = \begin{vmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{vmatrix}.$$

Он симметричен, так что $W_{xy} = W_{yx}$, $W_{xz} = W_{zx}$, $W_{yz} = W_{zy}$. Диагональные компоненты вне масс удовлетворяют уравнению Лапласа

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 0.$$

Таким образом, независимы лишь пять компонент тензора. Вторые производные гравитационного потенциала являются чувствительными к близлежащим аномальным массам, поэтому целесообразно их использовать для изучения этих масс. Чем выше порядок производных, тем большей разрешающей способностью они обладают в том смысле, что их поле более рельефно отражает аномальные массы.

На рис. 28 представлено поле аномалий силы тяжести W_z , вертикального градиента аномалий силы тяжести W_{zz}

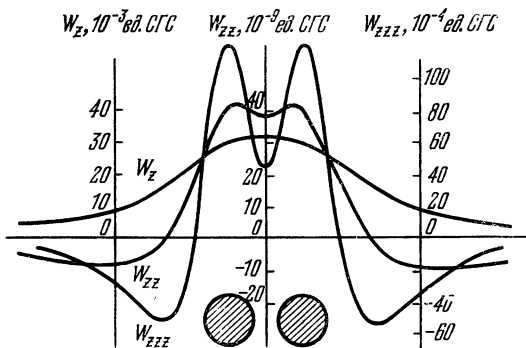


Рис. 28. Разрешающая способность различных производных гравитационного потенциала: W_z — аномалий силы тяжести, W_{zz} — вертикального градиента силы тяжести, W_{zzz} — второго вертикального градиента силы тяжести.

и второго вертикального градиента аномалий силы тяжести W_{zzz} над моделями аномальных тел в виде двух круговых цилиндров. В поле W_z явно не проявляется наличие двух источников гравитационных аномалий, они видны в поле W_{zz} и более рельефно в W_{zzz} . В этом примере не учитывалась относительная точность определения производных. Вопрос этот существен, так как относительная точность экспериментального определения тем ниже, чем выше порядок производной. Высшие производ-

ные более выгодно использовать только для качественного выделения расположения аномальных масс. При количественной же интерпретации поле высших производных, полученное путем пересчета исходного поля, например, W_z , такого преимущества не имеет. Количество общей информации об аномальных массах в исходном и пересчитанном полях остается неизменным (даже происходит потеря информации в пересчитанном поле за счет пересчета). Другое дело, если поле высших производных получено из непосредственных измерений с такой же относительной точностью, что и поле W_z . В этом случае, несомненно, преимущество остается за полем вторых производных. Для изучения вторых производных гравитационного потенциала используются *гравитационные вариометры*. Они были изобретены в самом конце прошлого столетия известным венгерским ученым Л. Этвешем. Существует большое число различных конструкций вариометров (*градиентометров*). В принципе градиентометр должен иметь разнесенные в пространстве пробные массы, на которые действуют ускорения, различающиеся для этих точек пространства. Возможны два варианта реализации. В одном из них действие ускорений на каждую из пробных масс измеряется высокоточными акселерометрами, а затем определяется отношение разности соответствующих ускорений к расстоянию между пробными массами. В другом варианте измерения градиента производятся на основе измерения вращательного момента сил, создаваемого действующими на пробные массы ускорениями. В этом случае пробные массы соединены жесткой связью (коромыслом). Вращательный момент измеряется путем сравнения с эталонной упругой силой. Чаще всего в качестве последней используется сила закрученной упругой нити, на которой укреплено коромысло с пробными массами. Гравитационные градиентометры широко применялись в геофизике.

В середине шестидесятых годов начались исследования возможностей использования для изучения гравитационного поля Земли и Луны гравитационных градиентометров, установленных на борту космических аппаратов. Для Луны ставится задача изучения деталей ее гравитационного поля с помощью полярного спутника с высотой полета ~ 30 км. Обсуждается также проблема изме-

рения масс небольших астероидов с помощью градиентометров. Использование градиентометров для изучения гравитационного поля Луны имеет ряд преимуществ перед доплеровским методом определения лучевых ускорений. Имеется возможность получать непрерывную информацию о гравитационном поле в процессе полета ИСЛ, в том числе и тогда, когда ИСЛ находится над обратной стороной Луны, когда невозможны его прямые доплеровские наблюдения.

Для измерений градиентов ускорений на борту космических аппаратов обсуждаются два основных варианта гравитационного градиентометра. В первом предполагается использовать высокочувствительные миниатюрные электростатические акселерометры (MESA — miniature electrostatic accelerometer) [69]. Они обладают чувствительностью на уровне $10^{-12} g$. Четыре таких акселерометра размещаются равномерно по периметру диска, который вращается с частотой Ω вокруг оси z . Тогда из комбинации ускорений, действующих на эти акселерометры, можно получить компоненты тензора градиентов ускорений W_{xx} , W_{yy} , W_{xy} . Анализ источников ошибок (магнитных, температурных, вариация солнечного давления, вариация скорости вращения и др.) показал, что с этим типом градиентометров достижима точность 0,01 Е.

Другим, более перспективным типом градиентометра для космического применения является ротационный резонансный градиентометр, который разрабатывается в ряде исследовательских лабораторий США, в частности, в лаборатории Хьюгеса Форвардом и Беллом [25], [32], [33], [47], [48], [50]. Преимущество этого градиентометра базируется на высокой стабильности измерения частоты, возможности исключения дрейфа в упругих элементах градиентометра, возможности накопления полезного сигнала заранее известной частоты и др. Градиентометр имеет крутильную систему, которая состоит из коромысла с пробными массами на концах. Она вращается вокруг оси крутильной нити с угловой частотой Ω , равной половине частоты собственных колебаний крутильной системы. Возникают возмущения в крутильных колебаниях на частоте 2Ω , зависящие от градиентов ускорений. В приборе используются две идентичные крутильные системы, расположенные под углом 90° друг к другу. Дифференциаль-

ные уравнения движений этих двух систем можно записать так [41]:

$$\left. \begin{aligned} I\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}\beta_1 + k_s\theta_1 + k_c(\theta_1 - \theta_2) = \\ = I \left\{ \frac{1}{2} (W_{yy} - W_{xx}) \sin 2\Omega t + W_{xy} \cos 2\Omega t \right\}, \\ I\ddot{\theta}_2 + \beta\theta_2 + k_s\theta_2 + k_c(\theta_2 - \theta_1) = \\ = -I \left\{ \frac{1}{2} (W_{yy} - W_{xx}) \sin 2\Omega t + W_{xy} \cos 2\Omega t \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

где $I = 2mr^2$ — момент инерции крутильной системы относительно оси крутильной нити, m — пробная масса, r — расстояние этой массы от оси, k_s — упругая постоянная нити («жесткость»), k_c — упругая постоянная связи двух систем, β — постоянная затухания. Компоненты момента сил, действующих на пробные массы в правых частях уравнений (2.76), показаны из рис. 29. На нем крутильная система изображена так, что ось крутильной нити

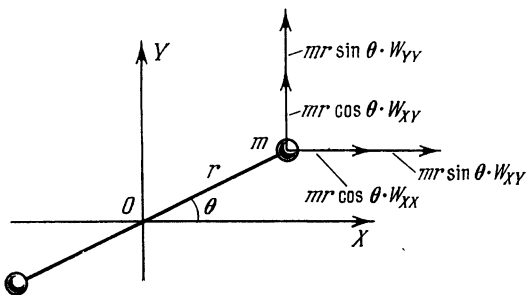


Рис. 29. Моменты гравитационных сил, действующие относительно оси крутильной нити на пробные массы m градиентометра.

перпендикулярна к плоскости рисунка. Откликом градиентометра является относительное движение крутильной системы $\theta_1 - \theta_2$, для которого справедливо следующее дифференциальное уравнение, полученное как разность уравнений (2.76):

$$\begin{aligned} I(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \beta(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + (k_s + 2k_c)(\theta_1 - \theta_2) = \\ = I \{ (W_{xx} - W_{yy}) \sin 2\Omega t + 2W_{xy} \cos 2\Omega t \}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Пусть $Z(t)$ — функция отклика колебательной системы, собственное движение которой описывается однород-

ным уравнением вида (2.77). Квадрат амплитуды колебаний на резонансной частоте $f_p = \frac{2\Omega}{2\pi}$ равен

$$A^2 = I^2 \{(W_{xx} - W_{yy})^2 + 4W_{xy}^2\} |Z(f_p)|^2. \quad (2.78)$$

Эта величина рассматривается как полезный сигнал. Предполагается, что шум имеет непрерывный спектр. Его спектральную плотность запишем так:

$$4\beta kT |Z(f_p)|^2, \quad (2.79)$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура по Кельвину. Отношение шум/полезный сигнал можно уменьшить, увеличивая время осреднения $t_{\text{оср}}$. Используя (2.78) и (2.79), можно оценить теоретический предел разрешения [полезного сигнала, который ограничен броуновскими шумами:

$$\left. \begin{array}{l} \delta(W_{xx} - W_{yy})_{\min} \\ \delta(2W_{xy})_{\min} \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{2\beta kT}{t_{\text{оср}}}}, \quad (2.80)$$

или, вводя добротность Q крутильных систем, которая равна

$$Q = \frac{2\pi I}{\beta t_s},$$

где t_s — время релаксации, I — момент инерции, вместо (2.80) для теоретического предела чувствительности градиентометра будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} \delta(W_{xx} - W_{yy})_{\min} \\ \delta(2W_{xy})_{\min} \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{\pi kT}{t_{\text{оср}} t_s Q I}}.$$

Таким образом, чувствительность прибора можно повысить, увеличивая время осреднения $t_{\text{оср}}$, увеличивая время релаксации t_s , повышая добротность Q , увеличивая I и понижая абсолютную температуру T . Однако увеличение $t_{\text{оср}}$ ограничено тем, что при этом увеличивается путь пролета ИСЛ над лунной поверхностью ($V = 1,7$ км/с). Измеренные градиенты будут соответствовать пройденному пути, т. е. будут сильно осреднены. Допустимо время осреднения $t_{\text{оср}} = 5-10$ с, что соответствует длине 10—20 км. Понижение температуры сопряжено с применением криогенной техники, которая достаточно громозд-

ка. Имеются ограничения и в габаритах, с чем связано увеличение момента инерции I крутильной системы. Приняв для примера $t_{\text{оср}} = 10$ с, $t_s = 0,5$ с, $Q = 1000$, $I = 10^5 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $T = 300$ К, согласно (2.80) получаем предельную чувствительность градиентометра равной $0,025 \text{ Е}$. Это теоретически достижимый предел для его реализации. Нужны высокие технические требования при создании градиентометров.

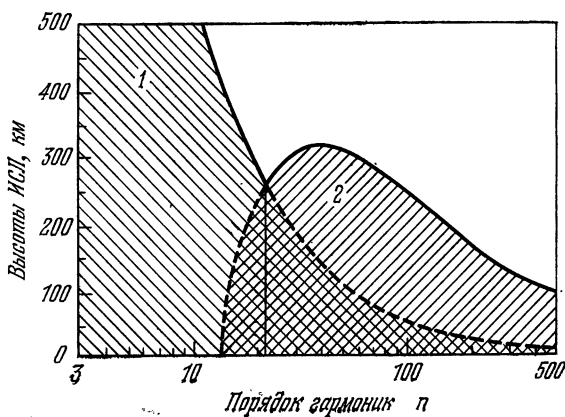


Рис. 30. Области оптимальных определений гравитационного поля по доплеровским наблюдениям ИСЛ и с помощью установленных на ИСЛ градиентометров в зависимости от высоты над лунной поверхностью и порядка n гармоник изучаемого гравитационного поля. 1 — доплеровские наблюдения с точностью $0,005 \text{ см/с}$, 2 — градиентометрические наблюдения с точностью $0,01 \text{ Е}$.

Ротационные резонансные градиентометры Форварда испытаны в лабораторных условиях. С помощью больших притягивающих пробных масс, которые передвигались на определенном расстоянии и с определенной скоростью, имитировалось поле градиентов ускорений Луны. Опыты показали, что при 10-секундном осреднении возможно измерять градиенты с точностью 1 Е . По мнению Форварда [25], используя ротационные резонансные градиентометры на ИСЗ, движущихся на низких полярных орбитах над Землей, возможно достигнуть точности $0,01 \text{ Е}$ при 30-секундном осреднении. Эти измерения эквивалентны изучению глобального гравитационного поля с точ-

ностью 1 мГал и детальности, соответствующей его разложению до 75 порядка. Что касается Луны, то расчеты для нее ведут, ориентируясь на измерения вторых производных гравитационного потенциала с точностью 1 Е при 10-секундном осреднении. Сравнение такой градиентометрической съемки с изучением гравитационного поля по доплеровским наблюдениям, имеющим точность $1 \text{ мм} \cdot \text{с}^{-1}$ при 10-секундном осреднении, показывает превосходство измерения градиентов для изучения общего гравитационного поля Луны.

На рис. 30 изображены области оптимальных чувствительностей для двух возможных методов изучения Луны: определения лучевых ускорений по доплеровским наблюдениям и измерения вторых производных гравитационного потенциала с ИСЛ, в зависимости от высоты измерений и порядка n изучаемых гармоник гравитационного поля.

Хотя в принципе возможны конструкции гравитационных вариометров для измерения третьих производных гравитационного потенциала, их реализация встречает непреодолимые технические трудности. Они связаны с высокой точностью изготовления деталей его узлов и стабильности условий измерения.

§ 16. О комбинированном методе определения гравитационного поля Луны

В настоящее время изучение фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля производится путем совместного использования спутниковых и наземных (гравиметрических и астрономо-геодезических) наблюдений. Гармоники гравитационного поля низкого порядка более надежно определяются по спутниковым данным, а высокочастотные — по гравиметрическим наблюдениям. Достаточно сказать, что спутниковые методы позволили определить гармонический коэффициент C_{20} более чем на три порядка точнее, чем это удавалось получить по гравиметрическим измерениям. Дополнительно к названному комплексу методов изучения фигуры Земли сейчас начинают использовать метод спутниковой альтиметрии. С его помощью на океанах, занимающих $4/5$ поверхности Земли, определяется непосредственно поверхность геоида.

Существует несколько различных подходов к совместной обработке имеющихся различных измерений для вывода фигуры и внешнего гравитационного поля Земли [21], [59], [74]. Для Луны сложился свой комплекс методов изучения гравитационного поля. Это вывод гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} на основании определения возмущений в элементах орбит ИСЛ; определение этих коэффициентов путем численного решения уравнений движения ИСЛ методом вариации гармонических коэффициентов, наилучшим образом согласующих наблюдаемые координаты и скорости ИСЛ с рассчитанными по модели гравитационного поля. Эти методы использовались и при изучении гравитационного поля Земли. Но лунное гравитационное поле изучается и специфическими методами использования ИСЛ, не применявшимися на Земле. ИСЛ рассматривается как пробное тело, находящееся в реальном поле ускорения силы тяжести Луны. С Земли по доплеровским наблюдениям измеряется только одна из компонент силы тяжести — лучевое ускорение. Имеются данные о распределении значений лучевых ускорений для отдельных площадей над лунной поверхностью и профили на видимой стороне Луны. Произведены отдельные измерения силы тяжести непосредственно на лунной поверхности. Осуществлена спутниковая альтиметрия физической поверхности Луны. Исследуется проблема измерения вертикального градиента силы тяжести с ИСЛ. При изучении гравитационного поля Луны применяются различные методы математической обработки исходных наблюдательных данных. При переработке одних и тех же исходных наблюдательных данных ИСЛ получались различающиеся результаты.

Таким образом, можно поставить задачу вывода фигуры и гравитационного поля Луны на основании комплекса различных наблюдательных данных и методов их обработки. Из-за разнообразия наблюдательных данных образуется несколько совокупностей исходных данных. Каждую из них можно рассматривать как многомерный вектор, роль компонент которого играют конкретные исходные данные. Пусть k -я совокупность исходных данных представляется вектором $Y_j^{(k)}$, имеющим j -ю мерность, т. е. j компонент. Требуется определить гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} разложения гравитационного

поля Луны в ряд по сферическим функциям порядка n . Искомых компонент будет $i = (n + 1)^2$, а искомый вектор $X_i^{(k)}$ будет i -мерным. Он получается в результате проведения определенной математической операции над вектором $Y_j^{(k)}$, которую можно в общем виде записать в виде [64]

$$X_i^{(k)} = A_{ij}^{(k)} Y_j^{(k)}, \quad (2.81)$$

где $A_{ij}^{(k)}$ — матрица преобразования, соответствующая упомянутой математической операции. Можно представить сложность матрицы преобразования при практической реализации операции (2.81), если проследить, например, как по наблюдениям координат (x, y, z) и скоростей ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) ИСЛ в итоге определяются гармонические коэффициенты C_{20}, C_{22} и C_{30} . Не все из названных выше наблюдательных данных позволяют найти решение X_i . Некоторые из них (например, измерения силы тяжести в отдельных точках Луны) могут использоваться только как дополнительные условия, накладывающие ограничения на решение X_i . Таким образом, существует несколько векторных уравнений вида (2.81), каждое из которых соответствует одному определенному методу вывода гравитационного поля Луны. В каждом из этих методов используется своя совокупность исходных данных $Y_j^{(k)}$ и своя матрица преобразования $A_{ij}^{(k)}$. На основании этих уравнений строится система уравнений с учетом их весов, исходных данных и метода определения параметров, характеризующих гравитационное поле Луны.

§ 17. Задачи, решаемые по непосредственным измерениям характеристик гравитационного поля

Сложное гравитационное поле Луны является отражением плотностной неоднородности внутреннего строения Луны и ее фигуры. Гравитационное поле является всего лишь как бы промежуточной информацией для изучения внутреннего строения и фигуры Луны. Конечная цель более сложна и разнообразна. Если говорить о селенофизических задачах, связанных с внутренним строением и решаемых с помощью гравитационного поля, то в иерархическом порядке можно назвать следующую

щие: 1) определение планетарного изменения плотности пород, слагающих Луну, в радиальном направлении, 2) изучение изменений плотности в тангенциальном направлении, 3) определение массы и средней плотности Луны, 4) установление различия внутреннего строения для видимой и обратной сторон Луны, 5) изучение отличия Луны от гидростатического равновесия и оценка напряжений в теле Луны, 6) заключение об изостатическом состоянии крупных регионов и больших кратеров Луны, 7) определение формы границы между мантией и корой в материковых и морских областях, 8) определение строения коры в областях перехода от материков к морям, 9) изучение детального строения границ лунных кратеров, зон разломов, сбросов и т. д.

Среди селенодезических аспектов использования гравитационного поля имеются такие проблемы: а) определение селеноцентрической гравитационной постоянной, б) уточнение положения центра масс Луны относительно ее геометрического центра, в) определение расстояний отдельных точек физической поверхности относительно центра масс Луны, г) построение по спутниковым данным наилучшей модели гравитационного поля с точки зрения исключения систематических ошибок, которые достигают в различных моделях 100—200 мГал, д) вывод уровенной поверхности Луны, е) определение уклонений отвеса на Луне, ж) уточнение динамической фигуры Луны и параметров физической либрации, з) распределение силы тяжести в точках физической поверхности или нормальной Луны.

Выше речь шла об изучении пространственного изменения гравитационного поля. Но, как известно, в каждой точке Луны ее гравитационное поле изменяется с течением времени. Вековые изменения, несомненно, имеются на Луне, как и на Земле. Они, по-видимому, очень малы. Пока даже на Земле еще нет уверенных их измерений. Периодические же изменения силы тяжести на Луне больше по величине, чем на Земле, но они имеют больший период изменения, поэтому их труднее регистрировать. По временным периодическим вариациям силы тяжести определяются упругие свойства материала, из которого сложена Луна. Кроме всего сказанного, знание гравитационного поля Луны крайне необходимо для расчета

траекторий полета космических аппаратов в окрестности Луны.

Пока были перечислены только задачи, которые решаются с помощью гравитационного поля. С бóльшей подробностью многие из них будут рассмотрены в следующих главах. Уже простой перечень задач показывает их большое разнообразие. Из этого со всей очевидностью следует, что для решения различных задач должна быть своя детальность изучения гравитационного поля, должны использоваться соответствующие характеристики гравитационного поля (потенциал силы тяжести, сила тяжести, горизонтальные компоненты притяжения, градиенты сил притяжения и т. д.), должна быть обеспечена определенная точность знания гравитационного поля. Часть из перечисленных задач решается по данным о гравитационном поле, полученным на основании спутниковых данных, но только часть. Необходимы определения силы тяжести и ее градиентов непосредственно на лунной поверхности. Для этого могут использоваться гравиметрические приборы, установленные на космических аппаратах, совершающих «мягкую» посадку на ее поверхности. Особенно для гравиметрической съемки Луны важны всевозможные луноходы. Гравиметрическая съемка может быть площадной и профильной, а иногда нужны единичные измерения абсолютной силы тяжести.

Для названных в пунктах б) и г) селенодезических задач, а именно уточнение положения центра масс Луны и построение модели гравитационного поля, определенной по спутниковым данным, необходимы абсолютные определения силы тяжести. Необходимо, чтобы пункты абсолютных определений были удалены возможно больше друг от друга. Задача в) об определении расстояний отдельных точек также нуждается в абсолютных измерениях силы тяжести. Точность ± 5 мГал абсолютных измерений вполне обеспечивает в настоящее время и в ближайшем решении названных задач. Даже точность ± 20 мГал позволяет уточнять современные представления о положении центра масс с точностью ± 100 м, снизить систематическую ошибку в моделях гравитационного поля Луны. Для решения подавляющего большинства селенофизических, а также селенодезических задач целесообразно использовать методы относительных измерений силы тяжести,

используя в качестве исходных абсолютные определения силы тяжести на нескольких станциях. Так, для селенофизических задач, перечисленных в пунктах 1)–6) по опыту наземных исследований достаточна точность определений силы тяжести порядка $\pm 1-5$ мГал. Для решения последней из них — детальное строение границ кратеров, разломов и др. — желательна точность порядка долей мГал. Диапазон изменения силы тяжести при относительных измерениях может достигать 500 мГал. В силу неоднозначности решения обратной задачи гравиметрии — определения распределения аномальных масс по известному гравитационному полю — целесообразно гравиметрические методы применять в комплексе с другими геофизическими методами (сейсмическими, электроразведочными и другими). Если для селенофизических задач достаточны гравиметрические съемки в отдельных областях, то большинство селенодезических задач требует знания гравитационного поля по всей Луне. Именно при решении селенодезических задач особенно желательно исключение систематических ошибок в гравитационном поле.

Известно, что регистрация лунно-солнечных приливов представляет на Земле непростую задачу даже при условии, что период приливных изменений порядка суток, а не месяца, как на Луне.

Для изучения солнечно-земных приливных изменений силы тяжести необходимы стационарные гравиметры с диапазоном измерения порядка 3 мГал и очень высокой точностью $\pm 0,001$ мГал (§ 47). Основное требование к приливным гравиметрам состоит в стабильности нуля-пункта их отсчетов. Наблюдения должны продолжаться непрерывно, по крайней мере несколько месяцев.

Конечно, приведенные выше числа сугубо ориентировочные. В действительности может оказаться, что требуются несколько другие точности, но заведомо не отличающиеся более, чем в 2–3 раза. Предсказание — дело рискованное. Степень достоверности предсказаний уменьшается из-за того, что эволюционный ход развития науки и техники сопровождается скачкообразными ее изменениями. Ожидать такие изменения приходится чаще в космических исследованиях, в которых в концентрированном виде присутствуют новейшие достижения науки и техники.

§ 18. Результаты определений гармонических коэффициентов гравитационного поля Луны

За десятилетнюю историю спутниковых методов изучения гравитационного поля Луны накопился огромный наблюдательный материал за движением ИСЛ. Достаточно сказать, что для «Аполлонов-12—17» и ИСЛ, запущенных с «Аполлонов-15 и -16», имеется 500 000 наблюдений, значительная часть которых использовалась для построения моделей гравитационного поля Луны. Сейчас предложено около полутора десятка различных моделей, которые в чем-то согласуются, а в чем-то различаются между собой. Это объяснимо, ибо для построения моделей были использованы ИСЛ, которые имели различные элементы орбиты (a , i , e , ω), применялись различные методы обработки наблюдательных данных.

В настоящем параграфе приведем значения гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} только для двух последних определений. Одно из них опубликовано Э. Л. Акимом и Э. П. Власовой [4]. Гармонические коэффициенты выведены ими по результатам наблюдений за движениями ИСЛ «Луна-10, -12, -14, -19 и -22». Другая модель гравитационного поля построена А. Феррари [45] по наблюдениям ИСЛ, запущенных с субсателлитов «Аполлонов-15 и -16» и ИСЛ «Лунар Орбитер-5». В первом случае использовались ИСЛ, имевшие большое разнообразие элементов орбиты (табл. 13). Так, ИСЛ «Луна-10» имел почти полярную орбиту, «Луна-12 и -22» почти экваториальные, а средние наклоны орбит были у ИСЛ «Луна-14 и -19». Различными были высоты h_p перицентров от лунной поверхности, угловые расстояния ω перицентров от узла и эксцентриситеты e орбит. Использовалась теория, в которой описание движения ИСЛ производилось в элементах орбиты. Изменения элементов орбиты, по которым выводились гармонические коэффициенты, находились по двух-трехсуточным рядам доплеровских наблюдений. Числовые значения гармонических коэффициентов вычислялись путем согласования по способу наименьших квадратов траекторных измерений с изменениями элементов орбит и гармонических коэффициентов. Оптимизировалось число определяемых гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} , чтобы получить возможно меньшую корреля-

Т а б л и ц а 13

Некоторые параметры ИСЛ, использованные Э. Л. Акимом и З. П. Власовой [4] для вывода гармонических коэффициентов Луны. i — наклонность, ω — угловое расстояние перигея от узла, T — период, h_p — высота перигея над лунной поверхностью, e — эксцентриситет

Искусственные спутники Луны	Интервалы измерений	i	ω	T , мин	h_p , км	e
«Луна-10»	3 апр. — 29 мая 1966	72°,0	131°,9	178,1	340	0,138
«Луна-14»	10 апр. — 24 июня 1968	41,7	311,5	159,6	163	0,155
«Луна-19»	6 окт. — 25 нояб. 1971	40,5	90,1	126,0	124	0,004
—	3 апр. — 27 июля 1972	40,2	329,4	130,7	127	0,053
«Луна-22»а	21 июня — 19 окт. 1974	20,2	144,2	131,6	103	0,024
«Луна-22»б	7 янв. — 26 апр. 1975	19,3	122,3	191,7	171	0,249
«Луна-12»	26 окт. 1966 — 12 янв. 1967	18,3	30,0	205,5	104	0,308

цию между этими искомыми коэффициентами. Было построено шесть вариантов модели гравитационного поля Луны. Первая пара вариантов основывалась на наблюдениях ИСЛ «Луна-10, -12, -14, -19, -22». Варианты пары различались порядком рассматривавшихся гармоник. Один вариант содержал C_{nm} и S_{nm} с $n = 2, 3, m = 0, 2, \dots, n$ и C_{n0} с $n = 4, 5, 6, 7$, а другой вариант пары рассчитывался для C_{nm} и S_{nm} с $n = 2, 3, 4, m = 0, 2, \dots, n$ и C_{n0} с $n = 5, 6, 7$. Вторая пара вариантов отличалась от первой тем, что из обработки были исключены наблюдения ИСЛ «Луна-12». Третья пара представляла модель гравитационного поля, в которой в качестве дополнительной информации были привлечены результаты определений C_{20} и C_{22} по американским ИСЛ:

$$C_{20} = (-2,047 \pm 10^{-3}) \cdot 10^{-4},$$

$$C_{22} = (0,225 \pm 2 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-4}.$$

Таблица 14

Значения гармонических коэффициентов гравитационного потенциала Луны, определенные Э. Л. Акимом и З. П. Власовой [4] по наблюдениям движений ИСЛ «Луна-10, -12, -14, -19, -22»

Вариант М-3				Вариант М-4			
n, m	величина C_{nm} , в 10^{-4}	n, m	величина S_{nm} , в 10^{-4}	n, m	величина C_{nm} , в 10^{-4}	n, m	величина S_{nm} , в 10^{-4}
2,0	-2,001			2,0	-2,010		
2,1	0,073	2,1	0,039	2,1	0,002	2,1	0,068
2,2	0,250	2,2	0,072	2,2	0,270	2,2	-0,006
3,0	-0,021			3,0	-0,031		
3,1	-0,276	3,1	0,088	3,1	0,298	3,1	0,070
3,2	0,033	3,2	0,041	3,2	0,029	3,2	0,044
3,3	-0,012	3,3	-0,048	3,3	-0,024	3,3	-0,058
4,0	0,101			4,0	0,084		
				4,1	-0,068	4,1	0,032
				4,2	0,008	4,2	-0,010
				4,3	-0,004	4,3	0,000
				4,4	-0,001	4,4	0,002
				5,0	0,084		
				6,0	0,042		
				7,0	0,334		

В таблице 14 приведены значения гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} , соответствующие второй паре вариантов гравитационного поля Луны. Знак при значениях гармонических коэффициентов с нечетными индексами m изменен на обратный по сравнению с тем, что указано в работе [4], так как авторы применяли формулу нормирования, в которую входит множитель $(-1)^m$. Решение А. Феррари [45] основано на наблюдениях ИСЛ, запущенных с «Аполлонов-15 и -16», и «Лунар Орбитера-5» при их полетах на низких высотах над лунной поверхностью. Сведения о параметрах орбит этих космических аппаратов представлены в табл. 15. В последних двух колонках приведены селеноцентрические широты и долготы, в пределах которых спутники пролетали над лунной поверхностью на высотах, меньших 200 км. Эта область составляла 60% всей лунной поверхности. А. Феррари были определены гармонические коэффициенты порядка (16,16). Решение основывалось на 223 рядах четырех кеплеровских элементов (e, i, Ω, ω). Применялась

Таблица 15

Некоторые параметры ИСЛ, использовавшихся Феррари [45] для вывода гармонических коэффициентов Луны

Космические аппараты	Длина использованных дуг, дни	Наклонность, i	Период T , мин	Эксцентриситет, e	φ_{\max}	λ_{\max}
ИСЛ, запущенный с «Аполлона-15»	222	150°	120	0,02	$\pm 27^\circ$	0—360°
ИСЛ, запущенный с «Аполлона-16»	34	170	120	0,02	$\pm 10^\circ$	0—360°
«Лунар Орбитер-5»	8	85	191	0,28	$\pm 40^\circ$	$\pm 50^\circ$

Таблица 16

Ошибки определения элементов орбит и соответствующие им средние квадратические ошибки определения изменений элементов орбит

Космические аппараты	δ_e	δ_i	$\delta\Omega$	$\delta\omega$
ИСЛ, запущенный с «Аполлона-15»	$0,22 \cdot 10^{-3}$	0°,05	0°,060	1°,50
ИСЛ, запущенный с «Аполлона-16»	$0,14 \cdot 10^{-3}$	0,05	0,060	1,50
«Лунар Орбитер-5»	$0,86 \cdot 10^{-4}$	0,13	0,084	0,20

Космические аппараты	σ_e , с ⁻¹	σ_i , град. с ⁻¹	σ_Ω , град. с ⁻¹	σ_ω , град. с ⁻¹
ИСЛ, запущенный с «Аполлона-15»	$0,25 \cdot 10^{-3}$	$0,10 \cdot 10^{-7}$	$0,13 \cdot 10^{-7}$	0,30
ИСЛ, запущенный с «Аполлона-16»	$0,16 \cdot 10^{-8}$	$0,10 \cdot 10^{-7}$	$0,13 \cdot 10^{-7}$	0,30
«Лунар Орбитер-5»	$0,1 \cdot 10^{-8}$	$0,26 \cdot 10^{-8}$	$0,17 \cdot 10^{-8}$	0,41

методика вывода гармонических коэффициентов по долгопериодическим изменениям средних кеплеровских элементов орбит ИСЛ. Ошибки вычислений были меньше чем ошибки наблюдений ИСЛ. Точность координат ИСЛ характеризуется следующими данными: по радиальному расстоянию $\pm 0,3$ км, вдоль и поперек орбиты $\pm 3,0$ км. Это приводит к ошибкам δe , δi , $\delta\Omega$, $\delta\omega$ в определении средних элементов, которые приведены в табл. 16. Значения

в шестой — девятой колонках вычислены согласно (2.26) на основании величин δe , δi , $\delta \Omega$, $\delta \omega$ соответственно. Они служат исходными данными для построения матрицы весов W (2.25). Ковариационная матрица K (2.27) гармонических коэффициентов низких порядков строилась с использованием нормированных значений гармонических коэффициентов, выведенных как весовые средние из определений [38], [42], [52], [65], [86], и дальнейшим вычислением соответствующих средних квадратических ошибок σ_{nm} .

Для более высоких порядков, вплоть до (16,16), для определения σ_{nm} , необходимых при построении ковариационной матрицы K (2.27), использовалась формула предсказания порядковых дисперсий (4.47). Привлечение данных наблюдений ИСЛ «Лунар Орбитер-5», имевшего почти полярную орбиту, в то время как для ИСЛ, запущенных с «Аполлонов-15, -16», плоскости орбит были близки к экваториальным, а также привлечение априорных статистических характеристик существенно уменьшило корреляцию между определяемыми гармоническими коэффициентами. Они приведены в табл. 17. Значения гармонических коэффициентов, определенные описанным способом А. Феррари [45], даны в табл. 18. Карта ано-

Таблица 17

Средние значения первых нормированных гармонических коэффициентов \bar{c}_{nm} и \bar{S}_{nm} и их средние квадратические ошибки σ_{nm}

n	2		
	0	1	2
\bar{c}_{nm} , в 10^{-4}	-0,90689	0,0465	0,3428
$\pm \sigma_{nm}$, в 10^{-4}	0,0179	0,0232	0,0217
\bar{S}_{nm} , в 10^{-4}		0,0031	-0,0036
$\pm \sigma_{nm}$, в 10^{-4}		0,0387	0,0527

n	3				4
	0	1	2	3	0
\bar{c}_{nm} , в 10^{-4}	0,0255	0,2912	0,1322	0,2101	0,0263
$\pm \sigma_{nm}$, в 10^{-4}	0,0775	0,0324	0,0468	0,0933	0,0143
\bar{S}_{nm} , в 10^{-4}		0,0534	0,0732	-0,0674	
$\pm \sigma_{nm}$, в 10^{-4}		0,0345	0,0819	0,0933	

Таблица 18

Нормированные гармонические коэффициенты \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} гравитационного потенциала, выведенные Феррари (1977). (Во второй, третьей, пятой и шестой колонках число в скобках означает степень 10. Поэтому, например, $-0,9152(-4) = -0,9152 \cdot 10^{-4}$.)

n, m	Величина \bar{C}_{nm}	Ср. кв. ош. \pm	n, m	Величина \bar{S}_{nm}	Ср. кв. ош. \pm
1	2	3	4	5	6
2,0	-0,9152 (-4)	0,17 (-5)			
2,1	0,2045 (-5)	0,18 (-5)	2,1	-0,2268 (-6)	0,23 (-5)
2,2	0,3366 (-4)	0,18 (-5)	2,2	0,3907 (-7)	0,22 (-5)
3,0	-0,4895 (-5)	0,45 (-5)			
3,1	0,2704 (-4)	0,15 (-5)	3,1	0,6001 (-5)	0,17 (-5)
3,2	0,1152 (-4)	0,38 (-5)	3,2	0,1178 (-5)	0,47 (-5)
3,3	0,2498 (-4)	0,71 (-5)	3,3	-0,9023 (-5)	0,68 (-5)
4,0	0,1730 (-5)	0,13 (-5)			
4,1	-0,5102 (-5)	0,18 (-5)	4,1	0,2913 (-5)	0,18 (-5)
4,2	-0,1386 (-4)	0,44 (-5)	4,2	-0,3407 (-5)	0,31 (-5)
4,3	-0,1369 (-5)	0,52 (-5)	4,3	-0,2106 (-4)	0,52 (-5)
4,4	-0,1301 (-4)	0,47 (-5)	4,4	-0,1165 (-5)	0,43 (-5)
5,0	0,4304 (-5)	0,22 (-5)			
5,1	-0,3997 (-5)	0,79 (-6)	5,1	-0,3567 (-5)	0,11 (-5)
5,2	0,4262 (-5)	0,28 (-5)	5,2	0,4297 (-5)	0,24 (-6)
5,3	0,1620 (-4)	0,64 (-5)	5,3	0,6600 (-5)	0,61 (-5)
5,4	0,6357 (-6)	0,61 (-5)	5,4	0,1847 (-4)	0,49 (-5)
5,5	-0,4966 (-5)	0,08 (-5)	5,5	0,1614 (-4)	0,11 (-4)
6,0	-0,1078 (-5)	0,19 (-5)			
6,1	-0,2316 (-5)	0,42 (-5)	6,1	-0,2643 (-5)	0,36 (-5)
6,2	-0,8111 (-5)	0,49 (-5)	6,2	-0,2060 (-5)	0,54 (-5)
6,3	-0,1781 (-5)	0,38 (-5)	6,3	-0,9717 (-5)	0,36 (-5)
6,4	-0,8395 (-5)	0,63 (-5)	6,4	-0,1766 (-5)	0,64 (-5)
6,5	-0,4116 (-6)	0,64 (-5)	6,5	-0,9674 (-5)	0,64 (-5)
6,6	0,3075 (-4)	0,56 (-5)	6,6	-0,2751 (-4)	0,56 (-5)
7,0	0,1296 (-4)	0,47 (-5)			
7,1	0,8998 (-6)	0,30 (-5)	7,1	0,1333 (-5)	0,30 (-5)
7,2	-0,9118 (-6)	0,43 (-5)	7,2	0,8713 (-5)	0,48 (-5)
7,3	0,7443 (-5)	0,58 (-5)	7,3	0,1187 (-5)	0,55 (-5)
7,4	0,2928 (-5)	0,38 (-5)	7,4	-0,1637 (-4)	0,38 (-5)
7,5	-0,2101 (-4)	0,57 (-5)	7,5	0,9221 (-5)	0,57 (-5)
7,6	-0,4417 (-5)	0,64 (-5)	7,6	-0,9088 (-5)	0,64 (-5)
7,7	-0,1800 (-4)	0,67 (-5)	7,7	0,1122 (-4)	0,67 (-5)
8,0	0,3195 (-6)	0,24 (-5)			
8,1	-0,4210 (-5)	0,43 (-5)	8,1	-0,3351 (-6)	0,43 (-5)
8,2	0,3700 (-5)	0,41 (-5)	8,2	-0,8506 (-6)	0,41 (-5)
8,3	0,3611 (-6)	0,52 (-5)	8,3	-0,1010 (-5)	0,52 (-5)
8,4	0,4569 (-5)	0,50 (-5)	8,4	-0,6683 (-6)	0,50 (-5)

Продолжение табл. 18

n, m	Величина \bar{C}_{nm}	Ср. кв. ош. \pm	n, m	Величина \bar{S}_{nm}	Ср. кв. ош. \pm
1	2	3	4	5	6
8,5	-0,2334 (-5)	0,46 (-5)	8,5	0,1277 (-4)	0,46 (-5)
8,6	-0,9039 (-5)	0,57 (-5)	8,6	0,2720 (-5)	0,57 (-5)
8,7	-0,6703 (-5)	0,57 (-5)	8,7	0,5571 (-5)	0,57 (-5)
8,8	0,6898 (-5)	0,54 (-5)	8,8	-0,4387 (-5)	0,54 (-5)
9,0	-0,1605 (-5)	0,39 (-5)			
9,1	-0,3359 (-5)	0,37 (-5)	9,1	0,9713 (-6)	0,37 (-5)
9,2	-0,6145 (-6)	0,38 (-5)	9,2	-0,1000 (-6)	0,38 (-5)
9,3	-0,2687 (-5)	0,38 (-5)	9,3	-0,1142 (-5)	0,38 (-5)
9,4	-0,7523 (-6)	0,42 (-5)	9,4	-0,8946 (-5)	0,40 (-5)
9,5	0,1486 (-5)	0,35 (-5)	9,5	0,5221 (-6)	0,42 (-5)
9,6	-0,4547 (-5)	0,40 (-5)	9,6	-0,2269 (-5)	0,40 (-5)
9,7	-0,5037 (-5)	0,47 (-5)	9,7	0,7297 (-5)	0,47 (-5)
9,8	0,7048 (-6)	0,45 (-5)	9,8	-0,4837 (-5)	0,45 (-5)
9,9	-0,2661 (-5)	0,45 (-5)	9,9	0,2137 (-5)	0,45 (-5)
10,0	-0,9245 (-6)	0,24 (-5)			
10,1	0,1961 (-6)	0,32 (-5)	10,1	-0,1968 (-5)	0,32 (-5)
10,2	0,1047 (-5)	0,36 (-5)	10,2	-0,1596 (-5)	0,36 (-5)
10,3	-0,1426 (-6)	0,33 (-5)	10,3	0,2173 (-5)	0,33 (-5)
10,4	-0,8694 (-6)	0,36 (-5)	10,4	-0,4171 (-6)	0,36 (-5)
10,5	0,4883 (-6)	0,32 (-5)	10,5	-0,1756 (-5)	0,32 (-5)
10,6	-0,1506 (-5)	0,29 (-5)	10,6	0,1858 (-6)	0,29 (-5)
10,7	-0,3030 (-5)	0,39 (-5)	10,7	-0,3299 (-5)	0,39 (-5)
10,8	-0,4078 (-5)	0,45 (-5)	10,8	0,2038 (-5)	0,45 (-5)
10,9	-0,2413 (-5)	0,41 (-5)	10,9	0,1534 (-5)	0,41 (-5)
10,10	0,1791 (-5)	0,38 (-5)	10,10	-0,1842 (-5)	0,38 (-5)
11,0	-0,2796 (-5)	0,23 (-5)			
11,1	0,1064 (-6)	0,24 (-5)	11,1	0,3761 (-6)	0,24 (-5)
11,2	0,2688 (-6)	0,27 (-5)	11,2	-0,3607 (-5)	0,27 (-5)
11,3	0,3479 (-6)	0,28 (-5)	11,3	-0,1023 (-5)	0,28 (-5)
11,4	-0,1402 (-5)	0,24 (-5)	11,4	0,1045 (-4)	0,24 (-5)
11,5	0,7019 (-5)	0,28 (-5)	11,5	0,1360 (-5)	0,28 (-5)
11,6	0,2172 (-6)	0,26 (-5)	11,6	-0,3421 (-5)	0,26 (-5)
11,7	-0,5407 (-5)	0,24 (-5)	11,7	0,2007 (-6)	0,24 (-5)
11,8	-0,1197 (-4)	0,30 (-5)	11,8	-0,3904 (-5)	0,30 (-5)
11,9	-0,5224 (-5)	0,33 (-5)	11,9	0,8270 (-6)	0,33 (-5)
11,10	-0,2306 (-5)	0,30 (-5)	11,10	0,1039 (-5)	0,30 (-5)
11,11	0,2900 (-6)	0,30 (-5)	11,11	-0,4017 (-6)	0,30 (-5)
12,0	-0,6622 (-6)	0,20 (-5)			
12,1	0,1463 (-5)	0,23 (-5)	12,1	0,1429 (-5)	0,23 (-5)
12,2	-0,2421 (-5)	0,22 (-5)	12,2	0,1261 (-5)	0,22 (-5)
12,3	-0,2683 (-6)	0,24 (-5)	12,3	-0,1639 (-5)	0,24 (-5)
12,4	0,5470 (-6)	0,23 (-5)	12,4	0,1185 (-5)	0,23 (-5)
12,5	-0,5737 (-6)	0,25 (-5)	12,5	-0,4353 (-5)	0,25 (-5)

Продолжение табл. 18

n, m	Величина \bar{C}_{nm}	Ср. кв. оц. \pm	n, m	Величина \bar{S}_{nm}	Ср. кв. оц. \pm
1	2	3	4	5	6
12,6	0,1280 (-7)	0,25 (-5)	12,6	-0,3152 (-6)	0,25 (-5)
12,7	-0,1215 (-5)	0,24 (-5)	12,7	-0,6949 (-6)	0,24 (-5)
12,8	-0,3964 (-5)	0,26 (-5)	12,8	0,5741 (-6)	0,26 (-5)
12,9	-0,1390 (-5)	0,28 (-5)	12,9	-0,4305 (-5)	0,28 (-5)
12,10	-0,3693 (-5)	0,29 (-5)	12,10	0,5032 (-6)	0,29 (-5)
12,11	-0,1683 (-5)	0,25 (-5)	12,11	0,3804 (-5)	0,25 (-5)
12,12	-0,3868 (-6)	0,24 (-5)	12,12	-0,2265 (-6)	0,24 (-5)
13,0	0,7476 (-6)	0,17 (-5)			
13,1	0,1550 (-5)	0,19 (-5)	13,1	-0,7814 (-6)	0,19 (-5)
13,2	-0,1160 (-5)	0,19 (-5)	13,2	0,1273 (-5)	0,19 (-5)
13,3	0,1758 (-5)	0,21 (-5)	13,3	0,3245 (-6)	0,21 (-5)
13,4	0,1555 (-5)	0,20 (-5)	13,4	-0,1658 (-5)	0,20 (-5)
13,5	-0,5209 (-5)	0,19 (-5)	13,5	-0,3914 (-6)	0,19 (-5)
13,6	-0,7329 (-6)	0,20 (-5)	13,6	-0,5286 (-6)	0,20 (-5)
13,7	-0,1590 (-5)	0,20 (-5)	13,7	-0,6324 (-6)	0,20 (-5)
13,8	0,3563 (-5)	0,20 (-5)	13,8	-0,3276 (-5)	0,20 (-5)
13,9	-0,1426 (-6)	0,21 (-5)	13,9	0,2678 (-5)	0,21 (-5)
13,10	0,1578 (-6)	0,24 (-5)	13,10	0,3672 (-6)	0,24 (-5)
13,11	-0,1662 (-5)	0,24 (-5)	13,11	0,7579 (-7)	0,24 (-5)
13,12	-0,1829 (-5)	0,22 (-5)	13,12	0,2649 (-5)	0,22 (-5)
13,13	-0,9275 (-6)	0,21 (-5)	13,13	-0,2696 (-6)	0,21 (-5)
14,0	0,9850 (-6)	0,14 (-5)			
14,1	-0,3596 (-7)	0,16 (-5)	14,1	-0,1285 (-5)	0,16 (-5)
14,2	0,6272 (-6)	0,17 (-5)	14,2	0,1511 (-7)	0,17 (-5)
14,3	0,5898 (-6)	0,16 (-5)	14,3	0,6559 (-6)	0,16 (-5)
14,4	-0,1391 (-5)	0,17 (-5)	14,4	-0,1038 (-5)	0,17 (-5)
14,5	-0,1185 (-5)	0,16 (-5)	14,5	0,1421 (-5)	0,16 (-5)
14,6	-0,1979 (-5)	0,17 (-5)	14,6	0,1770 (-5)	0,17 (-5)
14,7	-0,1188 (-5)	0,16 (-5)	14,7	-0,1933 (-6)	0,17 (-5)
14,8	-0,5298 (-6)	0,17 (-5)	14,8	-0,5065 (-7)	0,17 (-5)
14,9	-0,7168 (-6)	0,18 (-5)	14,9	-0,1334 (-5)	0,18 (-5)
14,10	0,2871 (-6)	0,20 (-5)	14,10	0,7932 (-6)	0,20 (-5)
14,11	-0,9822 (-6)	0,21 (-5)	14,11	0,5046 (-6)	0,21 (-5)
14,12	-0,1354 (-5)	0,21 (-5)	14,12	-0,4180 (-6)	0,21 (-5)
14,13	-0,2790 (-6)	0,19 (-5)	14,13	0,1018 (-5)	0,19 (-5)
14,14	-0,7199 (-6)	0,18 (-5)	14,14	-0,3891 (-6)	0,18 (-5)
15,0	0,3168 (-5)	0,13 (-5)			
15,1	-0,2372 (-5)	0,14 (-5)	15,1	-0,1679 (-6)	0,14 (-5)
15,2	0,2495 (-5)	0,12 (-5)	15,2	0,3720 (-5)	0,12 (-5)
15,3	-0,1117 (-5)	0,10 (-5)	15,3	0,2482 (-5)	0,10 (-5)
15,4	0,3173 (-6)	0,10 (-5)	15,4	-0,1056 (-4)	0,10 (-5)
15,5	-0,5592 (-5)	0,11 (-5)	15,5	0,7779 (-7)	0,11 (-5)
15,6	-0,1346 (-5)	0,10 (-5)	15,6	0,1439 (-5)	0,10 (-5)

Окончание табл. 18

n, m	Величина \bar{C}_{nm}	Ср. кв. ош. \pm	n, m	Величина \bar{S}_{nm}	Ср. кв. ош. \pm
1	2	3	4	5	6
15,7	0,4990 (-5)	0,09 (-5)	15,7	0,3453 (-5)	0,09 (-5)
15,8	0,5828 (-5)	0,11 (-5)	15,8	0,1981 (-5)	0,11 (-5)
15,9	-0,1664 (-5)	0,10 (-5)	15,9	-0,1686 (-5)	0,10 (-5)
15,10	-0,3781 (-5)	0,11 (-5)	15,10	-0,3358 (-5)	0,11 (-5)
15,11	-0,1625 (-5)	0,16 (-5)	15,11	-0,1011 (-6)	0,16 (-5)
15,12	-0,5286 (-6)	0,19 (-5)	15,12	0,3851 (-6)	0,19 (-5)
15,13	-0,4436 (-6)	0,19 (-5)	15,13	-0,2841 (-6)	0,19 (-5)
15,14	0,1952 (-5)	0,16 (-5)	15,14	-0,7273 (-6)	0,16 (-5)
15,15	0,4112 (-6)	0,15 (-5)	15,15	0,2390 (-6)	0,15 (-5)
16,0	-0,9511 (-6)	0,12 (-5)			
16,1	-0,2164 (-5)	0,10 (-5)	16,1	0,4593 (-6)	0,10 (-5)
16,2	0,1983 (-5)	0,11 (-5)	16,2	-0,1005 (-5)	0,11 (-5)
16,3	-0,6699 (-6)	0,10 (-5)	16,3	-0,3774 (-6)	0,10 (-5)
16,4	0,1850 (-5)	0,10 (-5)	16,4	0,8894 (-6)	0,10 (-5)
16,5	0,1955 (-5)	0,11 (-5)	16,5	0,4295 (-5)	0,11 (-5)
16,6	0,1030 (-5)	0,10 (-5)	16,6	-0,1809 (-5)	0,10 (-5)
16,7	0,3221 (-6)	0,11 (-5)	16,7	-0,1255 (-5)	0,11 (-5)
16,8	0,1392 (-5)	0,11 (-5)	16,8	0,4603 (-6)	0,11 (-5)
16,9	-0,1153 (-5)	0,10 (-5)	16,9	-0,7452 (-6)	0,10 (-5)
16,10	-0,1978 (-5)	0,11 (-5)	16,10	-0,7724 (-6)	0,11 (-5)
16,11	-0,3739 (-6)	0,13 (-5)	16,11	-0,2279 (-6)	0,13 (-5)
16,12	-0,4232 (-6)	0,14 (-5)	16,12	-0,1443 (-6)	0,14 (-5)
16,13	-0,1244 (-6)	0,14 (-5)	16,13	-0,3182 (-7)	0,14 (-5)
16,14	0,2679 (-6)	0,13 (-5)	16,14	0,3065 (-6)	0,13 (-5)
16,15	0,2690 (-5)	0,11 (-5)	16,15	-0,7942 (-6)	0,11 (-5)
16,16	0,1154 (-5)	0,08 (-5)	16,16	0,1419 (-5)	0,08 (-5)

малый силы тяжести для высоты 100 км, соответствующая этому разложению, дана на рис. 31. Ниже в этом параграфе мы кратко остановимся на других моделях гравитационного поля Луны. Укажем, на основании каких наблюдений они выводились, какая применялась методика обработки наблюдений, отметим особенности моделей, не приводя числовых значений гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} . Описываются эти модели гравитационного поля Луны в исторической последовательности.

Самое первое определение гармонических коэффициентов гравитационного поля Луны по наблюдениям ИСЛ было произведено Э. Л. Акимом [2], [3]. Определение основывалось на наблюдениях ИСЛ «Луна-10». Использо-

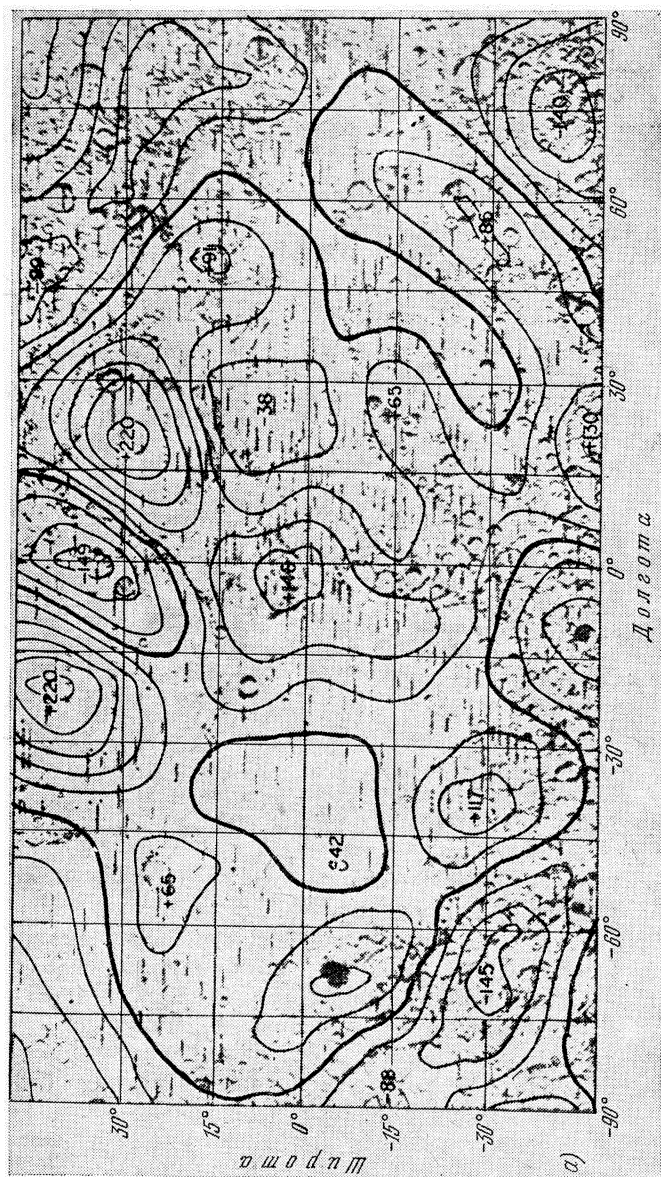


Рис. 31а. Карта аномалий силы тяжести на высоте 100 км, построенная Феррари (1977). Видимая сторона Луны. Сечения изолиний через 40 мГал.

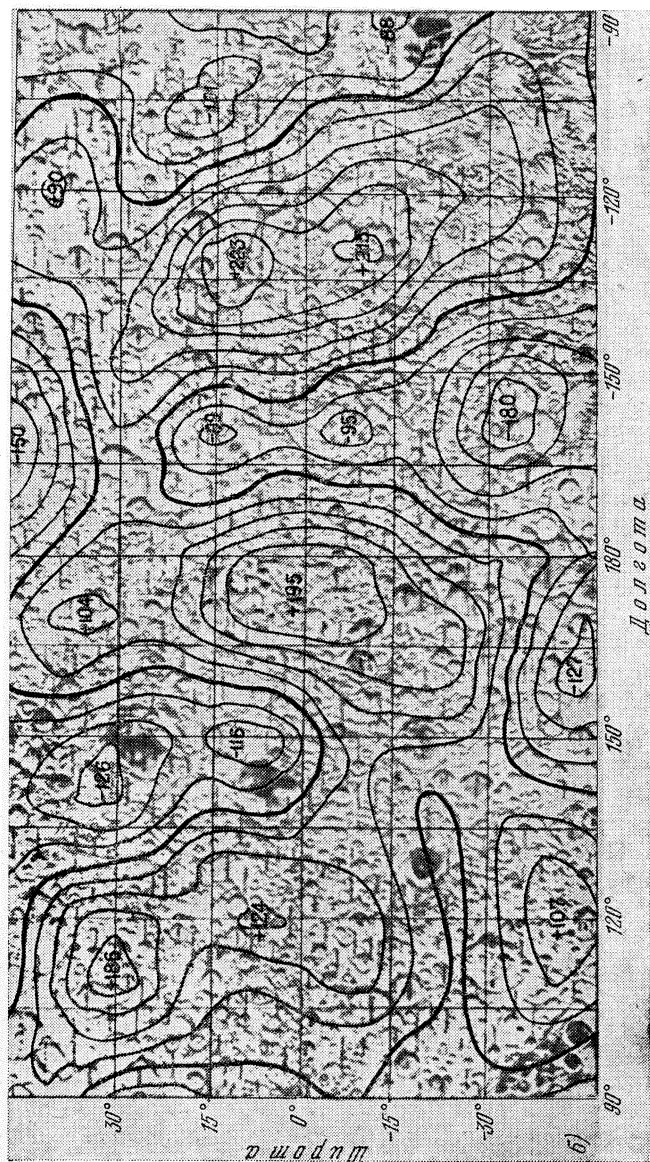


Рис. 316. Карта аномалий силы тяжести на высоте 100 км, построенная Феррари (1977).
Обратная сторона Луны. Сечения изолиний через 40 мГал.

лись наблюдения за весь период его активного существования (3 апреля—30 мая 1966 г.). Применялся метод совместного определения постоянных C_{nm} и S_{nm} и элементов орбиты. Для этих первых определений по единственному спутнику довольно большим оказался коэффициент корреляции постоянных C_{20} и C_{40} , а именно $-0,99$, для других постоянных он не превосходит $-0,4$. Через два года после выхода в свет работ Э. Л. Акима были опубликованы результаты определений гармонических коэффициентов порядка (5,5) Р. Толсоном и И. Гапцинским [98] по наблюдениям ИСЛ «Лунар Орбитер-1, -3, -4». Использовался метод, в котором коэффициенты выводятся путем наилучшего согласования наблюдений с расчетными координатами и скоростями движения ИСЛ, методом варьирования параметров C_{nm} и S_{nm} . Для этого составлялись вариационные уравнения движения, которые решались численно методом Кунелла. В результате получилась заметная корреляция между гармоническими коэффициентами. Так, между C_{20} и C_{40} коэффициент корреляции был равен $0,87$, между S_{31} и S_{51} — $0,90$, между C_{30} и C_{50} — $0,93$. Лорелл [68] выводил гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} порядка (5,2) на основании аналитического решения уравнений движения ИСЛ. Коэффициенты определялись по возмущениям в элементах орбит ИСЛ. Лорелл использовал для вычисления гармонических коэффициентов наблюдения пяти ИСЛ, «Лунар Орбитер-1, -2, -3, -4, -5» по дугам орбиты продолжительностью от 1,6 до 126 дней. Было опробовано семь различных вариантов модели гравитационного поля Луны, в которых варьировался объем используемой наблюдательной информации, изменялось число определяемых коэффициентов. Лорелл заключает, что на результаты сильно влияют неучтенные гармоники высокого порядка. Так, учет гармоник до 15 порядка улучшил бы совпадение рассчитанного поля с наблюдениями на 90%.

А. Лиу и П. Лайнг [65] провели переработку имеющихся наблюдений тех же пяти ИСЛ «Лунар Орбитер». Средние элементы орбиты a , e , i , Ω определялись за аномалистический период. Учитывались возмущения от Земли и Солнца. При вычислении возмущений от Земли принимались во внимание третьи и четвертые степени отношения селеноцентрического расстояния ИСЛ к рас-

стоянию между Луной и Землей. Учитывалось влияние солнечного радиационного давления. В результате были определены коэффициенты разложения гравитационного поля Луны порядка (15,8). Была осуществлена проверка полученных данных путем вычисления орбиты ИСЛ «Лунар Орбитер-3» протяженностью в 14 оборотов спутника. Наблюдательные данные по этим оборотам не включались в вычисления гармонических коэффициентов. Сравнение теоретически рассчитанной орбиты с наблюдаемой свидетельствовало об отсутствии заметного векового хода в разностях орбит. Авторы считали, что из имеющихся наблюдений ИСЛ «Лунар Орбитер» извлечена вся информация для определения гравитационного поля и построенная ими модель гравитационного поля является наилучшей.

В. Мичелом и др. в работе [71] было применено интегрирование уравнений движения непосредственно в прямоугольной системе координат. Вывод гармонических коэффициентов основывался на доплеровских наблюдениях всех пяти ИСЛ «Лунар Орбитер». Использовались короткие дуги, продолжительностью не более пяти суток, симметричные относительно перицентра. В обработке было использовано 12 600 доплеровских наблюдений. Использование метода коротких дуг для обработки наблюдений пяти спутников, имеющих наклонности от 12 до 85°, позволило получить менее коррелированные значения коэффициентов разложения в ряд сферических функций до 12 порядка включительно.

К переобработке тех же исходных наблюдательных данных вернулись авторы работы [72]. Они увеличили число использовавшихся исходных доплеровских наблюдений до 20 000, применили тот же метод обработки и получили гармонические коэффициенты порядка (13, 13).

Доплеровские наблюдения ИСЛ «Лунар Орбитер-1, -2, -3, -5» по новой методике обрабатывались А. Феррари [42]. При выводе гармонических коэффициентов А. Феррари считал известными заранее из наблюдений физической либрации Луны коэффициенты $C_{20} = -2,0560 \cdot 10^{-4}$ и $C_{22} = 0,2258 \cdot 10^{-4}$. Этим уменьшалась корреляция между гармоническими коэффициентами. Поскольку выше назывались коэффициенты корреляции только между отдельными гармоническими коэффициентами, определенные

некоторыми авторами, для примера приведем полную корреляционную матрицу для всех гармонических коэффициентов, определенных Феррари (табл. 19). В его методике долгопериодические изменения элементов кеплеровской орбиты и гармонические коэффициенты гравитационного поля получаются независимыми. Результаты проверялись на орбитах космических аппаратов «Аполлон-11, -12, -14, -15». Модель гравитационного поля А. Феррари со сферическими гармониками четвертого порядка лучше предсказывала орбиты «Аполлонов», чем модель А. Лиу и П. Лайнга с большим числом гармоник. Проверка также показала, что лучшее согласие предсказываемой орбиты ИСЛ с фактической наблюдается в том случае, когда элементы ее (особенно i) близки к соответствующим элементам ИСЛ, по которым определялись гармонические коэффициенты гравитационного поля, использовавшиеся для предсказания. Так, модели гравитационного поля, построенные на основе наблюдений ИСЛ «Лунар Орбитер», наклона орбиты которых i (12° , 21° , 85°) плохо предсказывали координаты ИСЛ «Эксплорер-49», орбита которого наклонена на 61° . Это, с другой стороны, говорит о том, что для вывода гармонических коэффициентов немаловажную роль могут играть наблюдения ИСЛ «Эксплорер-49».

В работе В. Сьегрена [86] опубликованы значения гармонических коэффициентов до третьего порядка включительно, определенные по 2,5-суточным доплеровским наблюдениям ИСЛ «Лунар Орбитер-4». Орбита ИСЛ имела наклонность $i = 85^\circ$ и высоты 2700—6000 км. Вследствие последнего обстоятельства было ослаблено влияние на движение ИСЛ гармоник гравитационного поля более высоких порядков. Поэтому, по мнению В. Каулы [63], эти гармонические коэффициенты являются одними из надежнейших. На основе анализа долгопериодических и вековых изменений кеплеровских элементов орбиты космического аппарата «Эксплорер-49» в работе [38] построена модель лунного гравитационного поля в виде разложения порядка (3,3). Использовались наблюдения ИСЛ длительностью 170 дней. Гармонические коэффициенты гравитационного поля Луны по наблюдениям «Эксплорер-35 и -49» выводились в [52]. Затем коэффициенты были переопределены с использованием большого числа наб-

людений: 831 день для «Эксплорера-49» и 2138 дней для «Эксплорера-35» [34].

Гравитационное поле Луны из комбинации гравитационных полей, полученных различными методами, вывел В. Конлейн [64]. Он исходил из того, что имеются:

1) Полученные А. Лиу и П. Лайнгом [65] значения гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} порядка (8,8), которые были выведены из анализа орбит ИСЛ, имевших наклонность $i = 12^\circ, 16^\circ, 17^\circ, 18^\circ, 21^\circ$ и 85° .

2) Выведенные Блакшиером и др. [35] значения гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} порядка (13,13). Наклонности использовавшихся ИСЛ $i = 12^\circ, 18^\circ, 21^\circ, 84^\circ, 85^\circ$.

3) Полученные П. Мюллером и В. Сьегреном [77] гравитационные аномалии для видимой стороны Луны на высоте 100 км по наблюдениям ИСЛ «Лунар Орбитер».

4) Гравитационные аномалии, определенные по наблюдениям космического аппарата «Аполлон-14», орбита которого имела перигентр на высоте 16 км от лунной поверхности. Эти данные относились к области Луны, ограниченной долготами от -70° до $+70^\circ$ [87]. Сначала Конлейн из комбинации разложения А. Лиу и П. Лайнга с разложением В. Блакшиера и др. нашел среднее поле силы тяжести на поверхности Луны. Веса каждого из разложений были одинаковыми. Путем гармонического анализа были определены гармонические коэффициенты, соответствующие среднему полю силы тяжести. Далее с помощью коэффициентов этого разложения рассчитывалось гравитационное поле в области, в которой заданы данные П. Мюллера и В. Сьегрена. Выводились средние коэффициенты для гармоник (4,1) — (8,8), соответствующих полю Мюллера и Сьегрена и рассчитанному полю. Аналогичным же образом осреднялись коэффициенты по области задания данных, определенных по наблюдениям «Аполлона-14», для более высоких гармоник (6,1) — (8,8). В итоге оказалось, что низкие гармоники в основном определялись данными, в которых учтены возмущения ИСЛ от всей Луны. При выводе более высокочастотных гармоник использовались более высокоточные измерения параметров гравитационного поля для отдельных районов Луны.

Путем комбинации гравитационных данных была построена модель поля Луны Л. Вонгом и др. [100]. Для этого поле 580 точечных масс, упоминавшихся в § 7, представлялось в виде разложения по сферическим функциям. Гармонические коэффициенты этого ряда суммировались с соответствующими коэффициентами разложения А. Лиу и П. Лайнга [65]. По наблюдениям ИСЛ, запущенных с «Аполлонов-15 и -16», и ИСЛ «Лунар Орбитер-5» нашел распределение 117 точечных масс М. Ананда [30]. Подбор масс производился по выведенным из доплеровских наблюдений долгопериодическим изменениям элементов орбит ИСЛ. Метод определения изменений элементов и исходные наблюдательные данные были те же, что использовал Феррари [45]. Точечные массы предполагались расположенными по заранее намеченной сетке в широтной экваториальной полосе $\pm 30^\circ$. Они следовали примерно через каждые 20° по долготе и через $9-12^\circ$ по широте. Глубина всех точечных масс предполагалась постоянной и равнялась 50 км. Определялась только величина массы. Гравитационное поле полученных точечных масс было представлено в виде разложения в ряд по сферическим функциям. Оказалось, что гармонические коэффициенты низких гармоник находятся в хорошем согласии с коэффициентами В. Сьегрена [86] и А. Феррари [45]. По совокупности точечных масс построена карта аномалий силы тяжести на высоте 100 км для видимой и обратной сторон Луны. При построении карты аномалий учтена компонента поля, соответствующая второй зональной гармонике с $C_{20} = -2,04 \cdot 10^{-4}$. Она согласуется с картой гравитационного поля, построенной А. Феррари (см. рис. 31).

В заключение параграфа подчеркнем, что гравитационное поле Луны в целом, т. е. поле ее видимой и обратной сторон, лучше представляется моделями гравитационного поля, построенными на основании аналитического метода, описанного в § 9. В этом методе гармонические коэффициенты разложения гравитационного поля по сферическим функциям или параметры, характеризующие распределение точечных масс, определяются по возмущениям в элементах орбит ИСЛ. Отсутствие наблюдений ИСЛ над обратной стороной хотя и влияет на результаты определений параметров гравитационного поля, но в меньшей степени. Таким методом были построены

ны модели гравитационного поля Луны Э. Л. Акимом (1966), и И. Лореллом (1970), А. Лиу и П. Лайнгом (1971), В. Сьегреном (1971), В. Брайном (1974), А. Феррари (1975), М. Анандой (1977), А. Феррари (1977), Э. Л. Акимом и З. П. Власовой (1977). Разумеется, лучшими из них являются модели, в которых использованы более точные наблюдения ИСЛ и оптимальные методы обработки наблюдений. Методы же прямых наблюдений, в которых подбираются параметры гравитационного поля, наилучшим образом удовлетворяющие наблюдаемым координатам и скоростям ИСЛ, дают хорошие представления гравитационного поля в локальных областях Луны, над которыми происходили полеты ИСЛ.

НОРМАЛЬНОЕ И АНОМАЛЬНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЛУНЫ

§ 19. Структура гравитационного поля и его роль в формировании Луны

Гравитационное поле Луны имеет сложное распределение в пространстве. Оно отражает неправильности внутреннего строения Луны и ее внешней фигуры. Однако если взглянуть на гравитационное поле Луны в общем, то нельзя не обратить внимание на его центральную симметрию относительно центра масс Луны. Симметрия выполняется с высокой точностью. Действительно, изменения потенциала силы тяжести на лунной поверхности не превосходят 0,02% от его среднего значения $\bar{W} = 282 \cdot 10^{10} \text{ см}^2/\text{с}^2$, а вариации ускорения силы тяжести — 0,3% от среднего значения ускорения силы тяжести, равного $162 \text{ см}/\text{с}^2$. Чтобы нагляднее продемонстрировать идеальность гравитационного поля Луны, обратимся к простой аналогии. Возьмем сферу радиуса 1000 мм. Вариации потенциала силы тяжести на Луне будем представлять в виде изменения высот точек относительно сферы. Так, оказывается, максимальному изменению аномалий потенциала силы тяжести на Луне соответствует изменение высот на взятой сфере, не превосходящее 0,2 мм. Это ли не совершенное создание природы при условии тех невообразимо бурных процессов, которые происходили во время образования Солнечной системы и, в частности, Луны! Такая идеальность гравитационного поля Луны могла возникнуть в процессе ее длительной эволюции.

Несомненно, меньшая абсолютная величина силы тяжести на Луне по сравнению с земной не могла не сказаться на преуменьшении роли силы тяжести по сравнению с другими силами, обусловленными температурными, барическими и др. факторами. Может быть, поэтому Луна более далека по сравнению с Землей от состояния гидростатического равновесия, изостатической компенсации,

в ее теле сохраняются большие напряжения и она имеет большую аномальность гравитационного поля. То, что сила тяжести на Луне меньше, чем на Земле, определяет и многие другие процессы и явления. Известно, что в основном сила тяжести определяет наличие атмосферы планет, так как главным образом она препятствует рассеиванию газовых молекул. Для длительного их удержания у поверхности планет необходимо чтобы параболическая скорость

$$v = (2gR)^{1/2},$$

где g — сила тяжести, R — радиус Луны, значительно превосходила среднюю квадратическую скорость движения молекул газа. Из-за того, что на Луне сила тяжести g небольшая, мала и параболическая скорость: $v = 2,38 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$. В конечном итоге это привело к тому, что лунная атмосфера рассеялась. Малая абсолютная величина g частично является причиной резких очертаний рельефа Луны. Сила тяжести Луны не может преодолеть молекулярного сцепления вещества пород, которые в условиях Земли, где сила тяжести в шесть раз более лунной, приводила бы к обвалам. То же можно сказать и о возможности более крутых склонов скоплений из сыпучих материалов на Луне по сравнению с Землей. Меньшая величина силы тяжести Луны проявилась и опосредствованно, в частности, на формировании ее внешней поверхности. Уже упомянутое рассеивание атмосферы привело к тому, что на Луне в меньшей мере происходили эрозионные процессы, что приводило к лучшей сохранности образований на поверхности. Отсутствие атмосферы, с другой стороны, позволило проникать метеоритным телам до ее поверхности, удары которых по-своему формировали внешнюю поверхность Луны.

Если рассматривать гравитационное поле на сферической поверхности Луны, то можно видеть, что его неоднородность (аномальность) наложена на постоянный фон гравитационного поля достаточно высокого уровня. При этом видно, что неоднородность имеет различную протяженность. Уже давно, используя наблюдения Луны, ее аппроксимируют трехосным эллипсоидом. Полуоси эллипсоидальной Луны различаются на величину не более одного километра. Это различие создают наиболее протя-

женные неправильности в ее гравитационном поле. Образования типа «морских» и «континентальных» областей не могут не найти отражения в гравитационном поле и образуют в нем неправильности следующих порядков. Далее идут масконы и другие подобного размера тектонические образования. При всей неправильности изменения аномальной части гравитационного поля для нее могут быть установлены некоторые статистические характеристики и закономерности их поведения.

Прогресс многих наук состоит во все большем и большем изучении деталей явлений и процессов. Именно появившиеся возможности изучения тонких деталей гравитационного поля расширили круг задач, решаемых гравитационным методом. Они частично были перечислены в §17, где они были разделены на селенофизические и селенодезические.

Для решения различных задач удобно гравитационное поле Луны представлять состоящим из двух частей: нормального и аномального. Первая из них соответствует некоторой простой модели Луны, которая близка к реальной Луне. Эта модель представляет фигуру, внутреннее строение и гравитационное поле Луны без деталей, в общем виде. Нормальное гравитационное поле — простое по закону изменения, оно зависит от координат точек наблюдения и нескольких постоянных. Аномальное гравитационное поле, как очевидно из сказанного выше, имеет неправильное строение. Аномальное поле представляет собой отличие реального гравитационного поля от принятого нормального. Разделение гравитационного поля на нормальное и аномальное условно и зависит от принятого принципа построения нормального поля, о чем несколько подробнее пойдет речь в этой главе. Соотношение между аномальной и нормальной частями гравитационного поля существенно зависит от того, какие характеристики поля рассматриваются (потенциал силы тяжести, сила тяжести, градиенты силы тяжести, третьи производные потенциала и пр.). Нормальная часть потенциала силы тяжести во многие тысячи раз больше соответствующей аномальной части, а нормальный вертикальный градиент силы тяжести лишь в несколько десятков раз больше аномалий этого градиента. Если рассматривать третьи производные потенциа-

ла силы тяжести Луны, то нормальная часть их существенно меньше, чем их аномалии. Будет различным и спектральный состав различных производных потенциала силы тяжести Луны. В этой главе мы рассматриваем выражения для различных производных потенциала силы тяжести Луны, используя при этом представления в виде разложения в ряд по сферическим функциям. В настоящее время гравитационное поле Луны изучено с детальностью, описываемой сферическими функциями не более 16—20 порядка, если не считать отдельных протяженных, но узких по ширине площадей, определенных по наблюдениям космических аппаратов «Аполлон-14, -15, -16, -17» и ИСЛ, запущенных с «Аполлонов-15 и -16», на высотах в несколько десятков километров над лунной поверхностью.

§ 20. Разложение в ряд по сферическим функциям производных потенциала силы тяжести Луны

В качестве исходного разложения используем выражение для потенциала силы тяжести Луны (1.27), который складывается из потенциала притяжения масс Луны и постоянной части приливоцентробежного потенциала, возникающего вследствие вращательных движений Луны и гравитационного приливного эффекта от Земли:

$$\begin{aligned}
 W(\rho, \varphi, \lambda) = & \\
 = \frac{GM_{\ominus}}{\rho} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + \right. & \\
 \left. + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right\} + & \\
 + \frac{GM_{\oplus}}{\Delta^3} \rho^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{5}{6} P_{20}(\sin \varphi) + \frac{1}{4} \cos 2\lambda P_{22}(\sin \varphi) \right]. & \\
 & (1.27)
 \end{aligned}$$

Приливоцентробежный потенциал представлен членом с квадратной скобкой. Будем рассматривать производные потенциала силы тяжести Луны в точках (ρ, φ, λ) ее внешнего пространства. Для определения радиальной

производной продифференцируем (1.27) по ρ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\rho, \varphi, \lambda)}{\partial \rho} = & -\frac{GM_{\zeta}}{\rho^2} \left\{ 1 + \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ & \left. + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right\} + \frac{GM_{\oplus}}{\Delta^3} \rho \left[\frac{2}{3} - \frac{5}{3} P_{20}(\sin \varphi) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda \right]. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Эта производная имеет размерность ускорения. Она является основной составляющей ускорения силы тяжести. Найдём две другие ортогональные к оси ρ составляющие ускорения. Одна из компонент направлена по касательной к параллели:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\rho, \varphi, \lambda)}{\rho \cos \varphi \partial \lambda} = & \\ = & \frac{GM_{\zeta}}{\rho^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (K_{nm}^{(\lambda)} \cos m\lambda + \\ & + M_{nm}^{(\lambda)} \sin m\lambda) \frac{P_{nm}(\sin \varphi)}{\cos \varphi}, \quad (3.2) \end{aligned}$$

где

$$M_{22}^{(\lambda)} = -2C_{22} - \frac{\mu^{-1}}{2} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^3 \left(\frac{\rho}{R}\right)^2, \quad \mu^{-1} = \frac{M_{\oplus}}{M_{\zeta}}.$$

Остальные гармонические коэффициенты этой производной

$$K_{nm}^{(\lambda)} = mS_{nm}, \quad M_{nm}^{(\lambda)} = -mC_{nm}.$$

Другая компонента направлена по касательной к меридиану:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\rho, \varphi, \lambda)}{\rho \partial \varphi} = & \frac{GM_{\zeta}}{\rho^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \times \\ & \times [-m \operatorname{tg} \varphi P_{nm}(\sin \varphi) + KP_{n, m+1}(\sin \varphi)] - \\ & - \frac{GM_{\oplus}}{2} \frac{\rho}{\Delta^3} \left[\frac{5}{3} P_{21}(\sin \varphi) + \operatorname{tg} \varphi P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda \right]. \quad (3.3) \end{aligned}$$

При выводе выражения (3.3) использована известная рекуррентная формула

$$\frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} = -m \operatorname{tg} \varphi P_{nm}(\sin \varphi) + KP_{n, m+1}(\sin \varphi),$$

где

$$K = \begin{cases} 1 & \text{при } m \leq n-1, \\ 0 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Полную горизонтальную составляющую ускорения $\frac{\partial W}{\partial l}$ получим, если найдем

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2}.$$

Она также имеет размерность ускорения. Для однородной шаровой Луны $\frac{\partial W}{\partial l}$, равно как $\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \varphi}$ и $\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial W}{\partial \lambda}$, равны нулю.

Далее перейдем к рассмотрению более высоких производных потенциала W . Вторая радиальная производная выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} = & \frac{2GM_{\zeta}}{\rho^3} \left\{ 1 + \frac{\mu^{-1}}{3} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^3 + \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (K_{nm}^{(\rho\rho)} \cos m\lambda + M_{nm}^{(\rho\rho)} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \right. \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$K_{20}^{(\rho\rho)} = 6C_{20} - \frac{5}{6} \mu^{-1} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^3 \left(\frac{\rho}{R}\right)^2,$$

$$K_{22}^{(\rho\rho)} = 6C_{22} + \frac{1}{4} \mu^{-1} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^3 \left(\frac{\rho}{R}\right)^2;$$

остальные гармонические коэффициенты

$$K_{nm}^{(\rho\rho)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} C_{nm}, \quad M_{nm}^{(\rho\rho)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} S_{nm}. \quad (3.5)$$

Найдем среднее значение второй радиальной производной на сфере S радиуса ρ

$$\frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \rho^2} = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_S \frac{\partial^2 W(S)}{\partial \rho^2} dS = \frac{2GM_{\zeta}}{\rho^3} \left[1 + \frac{\mu^{-1}}{3} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^3 \right]. \quad (3.6)$$

Полученную величину $\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2}$ можно рассматривать как нормальный второй радиальный градиент потенциала силы тяжести, соответствующий Луне шарообразной, с однородным или концентрическим распределением плотности. Второе слагаемое в квадратной скобке обусловлено приливным эффектом и равно $2,5 \cdot 10^{-6}$. В зависимости от удаленности от центра Луны изменяется и величина $\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2}$.

В табл. 20 приведены значения $\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2}$, рассчитанные без учета приливоцентробежного эффекта. Селеноцентрическая гравитационная постоянная принята равной $GM_{\zeta} = 4902,7 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$.

Таблица 20

Значения второго и третьего радиальных градиентов потенциала притяжения Луны на различных расстояниях ρ от ее центра

ρ , км	1736	1737	1738	2000	5000	10 000
$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2}$, 10^{-9} с^{-2}	-1874,2	-1870,9	-1867,7	-1225,6	-78,3	-9,8
$\frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \rho^3}$, $10^{-16} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	323,9	323,1	322,4	183,8	4,7	0,29

Приведем выражения еще для двух производных второго порядка:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 W(\rho, \varphi, \lambda)}{\partial \rho \partial \varphi} = \\ & = -\frac{GM_{\zeta}}{\rho^3} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (K_{nm}^{(\rho, \varphi)} \cos m\lambda + M_{nm}^{(\rho, \varphi)} \sin m\lambda) \times \right. \\ & \quad \times (-m \operatorname{tg} \varphi P_{nm}(\sin \varphi) + KP_{n, m+1}(\sin \varphi)) - \\ & \quad \left. - \mu^{-1} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^3 \left[\frac{5}{3} P_{21}(\sin \varphi) + \operatorname{tg} \varphi P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda \right] \right\}, \quad (3.7) \end{aligned}$$

где

$$K_{nm}^{(\rho, \varphi)} = (n+1)C_{nm}, \quad M_{nm}^{(\rho, \varphi)} = (n+1)S_{nm}. \quad (3.8)$$

Эта производная показывает, как изменяется сила тяжести при перемещении по касательной к меридиану. Изменение по касательной к параллели характеризуется следующей производной второго порядка от потенциала силы тяжести:

$$\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial^2 W(\rho, \varphi, \lambda)}{\partial \rho \partial \lambda} = \frac{GM_{\zeta}}{\rho^3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \times \\ \times \sum_{m=0}^n (K_{nm}^{(\rho, \lambda)} \cos m\lambda + M_{nm}^{(\rho, \lambda)} \sin m\lambda) \frac{P_{nm}(\sin \varphi)}{\cos \varphi}, \quad (3.9)$$

где

$$M_{22}^{(\rho, \lambda)} = 6C_{22} - \mu^{-1} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^3 \left(\frac{R}{\rho}\right)^2;$$

остальные гармонические коэффициенты имеют такой вид:

$$K_{nm}^{(\rho, \lambda)} = -(n+1)mS_{nm}, \quad M_{nm}^{(\rho, \lambda)} = (n+1)mC_{nm}.$$

Наконец рассмотрим третью радиальную производную от потенциала силы тяжести Луны:

$$\frac{\partial^3 W(\rho, \varphi, \lambda)}{\partial \rho^3} = -\frac{6GM_{\zeta}}{\rho^4} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \times \right. \\ \left. \times \sum_{m=0}^n (K_{nm}^{(\rho, \rho, \rho)} \cos m\lambda + M_{nm}^{(\rho, \rho, \rho)} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right\}, \quad (3.10)$$

где

$$K_{nm}^{(\rho, \rho, \rho)} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} C_{nm},$$

$$M_{nm}^{(\rho, \rho, \rho)} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} S_{nm}.$$

Значения производной $\frac{\partial^3 W}{\partial \rho^3} = -\frac{6GM_{\zeta}}{\rho^4}$, соответствующие однородной шаровой Луне на разных расстояниях от ее центра, представлены в табл. 20. Размерность этой производной $\text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$. Пока нет приборов для непосредственных ее измерений, но она может быть вычислена по заданному полю потенциала или силы тяжести.

Как видно из выражений коэффициентов $K_{nm}^{(\rho, \rho)}$ и $M_{nm}^{(\rho, \rho)}$ в разложении для второй радиальной производной потенциала $\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2}$, они содержат множитель $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, а коэффициенты $K_{nm}^{(\rho, \rho, \rho)}$ и $M_{nm}^{(\rho, \rho, \rho)}$ для $\frac{\partial^3 W}{\partial \rho^3}$ — множитель $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$. Это означает, что можно ожидать больших значений высокочастотных составляющих вторых и особенно третьих производных потенциала силы тяжести Луны. Детальные наблюдения распределения гравитационного поля на Луне подтверждают это предположение. Приведенные на рис. 22 аномалии силы тяжести соответствуют горизонтальным градиентам силы тяжести, достигающим многих сотен этвеш. Такого же порядка могут быть аномалии второй радиальной производной потенциала силы тяжести. Приведенные выше выражения (1.27), (3.1)—(3.4), (3.7), (3.9), (3.10) для производных позволяют определять их значения в произвольных точках внешнего пространства Луны. Для того чтобы определить их в точках конкретной поверхности (физической поверхности Луны, селеноиде, эллипсоиде и др.), необходимо решить эти уравнения с уравнением для радиуса-вектора ρ (φ, λ), описывающим соответствующую поверхность. Решить — значит, исключить из уравнений для производных радиус-вектор ρ . Тогда формулы для производных будут функциями только двух угловых переменных φ и λ и дадут распределение этих производных на соответствующих поверхностях.

§ 21. Разложение для силы тяжести

Теперь несколько подробнее остановимся на выводе формулы для определения силы тяжести $g(\rho, \varphi, \lambda)$. Очевидно, в произвольной точке внешнего пространства (ρ, φ, λ) ее можно определить как корень квадратный из суммы квадратов компонент по трем ортогональным координатным осям ρ, φ, λ . [Выражения для этих компонент были получены в предыдущем параграфе (3.1)—(3.3)]:

$$g(\rho, \varphi, \lambda) = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2} = \\ = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2}. \quad (3.11)$$

Поскольку $\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2$ существенно больше двух других слагаемых в подкоренном выражении (3.11), последнее можно представить в виде

$$g(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{\partial W}{\partial \rho} \left[1 + \frac{\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2}{2 \left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2} \right]. \quad (3.12)$$

Это выражение представляет собой первые два члена разложения правой части равенства (3.11) по степеням отношения названных слагаемых к квадрату радиальной производной $\frac{\partial W}{\partial \rho}$. Используя (3.2) и (3.3), напомним выражения для квадратов компонент $\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \varphi}$, $\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial W}{\partial \lambda}$. Из квадратичных членов в разложениях будем удерживать только те, величина которых больше чем $1 \cdot 10^{-9}$. Таковыми будут члены с коэффициентами

$$\bar{C}_{20}^2, \bar{C}_{22}^2, \bar{C}_{20}\bar{C}_{22}, \bar{C}_{20}\bar{C}_{31}, \bar{C}_{20}\kappa, \quad (3.13)$$

где $\kappa = 2\mu^{-1} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^3 \approx 15 \cdot 10^{-6}$.

Разложение силы тяжести в ряд мы произведем аналогично тому, как это делал для Земли М. Бурша [5]. Отличие нашего разложения состоит в том, что мы сохраняли существенные для Луны члены (3.13). Итак, ограничившись в разложениях для квадратов $\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \varphi}$

и $\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial W}{\partial \lambda}$ только членами (3.13), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 &= \left(\frac{GM_{\zeta}}{\rho^2}\right)^2 \left\{ \left(\frac{R}{\rho}\right)^4 [C_{20}^2 P_{21}^2 + 4C_{22} \cos^2 2\lambda \operatorname{tg}^2 \varphi P_{22}^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4C_{20}C_{22} \cos 2\lambda \operatorname{tg} \varphi P_{21}P_{22}] + \right. \\ &\quad \left. + 2\left(\frac{R}{\rho}\right)^5 [C_{20}C_{31} \cos \lambda (-\operatorname{tg} \varphi P_{21}P_{31} + P_{21}P_{32})] \right\}, \\ \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 &= \left(\frac{GM_{\zeta}}{\rho^2}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{R}{\rho}\right)^4 [4C_{22}^2 \sin^2 2\lambda P_{22}^2]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь и в дальнейшем для краткости мы не пишем аргумент $\sin \varphi$ функций Лежандра $P_{nm}(\sin \varphi)$. Подставляя

равенства (3.14) в (3.12) и проделав простые преобразования, будем иметь

$$g(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{\partial W}{\partial \rho} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\rho} \right)^4 [C_{20}^2 P_{21}^2 + 4C_{22}^2 \cos^2 2\lambda \operatorname{tg}^2 \varphi P_{22}^2 - 4C_{20}C_{22} \cos 2\lambda \operatorname{tg} \varphi P_{21}P_{22} + 4C_{22}^2 \sin^2 2\lambda \frac{1}{\cos^2 \varphi} P_{22}^2] + \left(\frac{R}{\rho} \right)^5 [C_{20}C_{31} \cos \lambda (-\operatorname{tg} \varphi P_{21}P_{31} + P_{21}P_{32})] \right\}. \quad (3.15)$$

Для того чтобы избавиться от квадратов и произведений присоединенных функций Лежандра, выведем следующие вспомогательные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} P_{21}^2 &= \frac{6}{5} + \frac{6}{7} P_{20} - \frac{72}{35} P_{40} = \frac{3}{7} P_{22} + \frac{6}{35} P_{42}, \\ \frac{P_{22}^2}{\cos^2 \varphi} &= 3P_{22} = 6 - 6P_{20}, \\ \operatorname{tg}^2 \varphi P_{22}^2 &= -\frac{3}{35} P_{44} + 3P_{22} = \\ &= -\frac{72}{35} P_{40} + \frac{6}{7} P_{20} + \frac{6}{5}, \\ \operatorname{tg} \varphi P_{21}P_{22} &= \frac{6}{35} P_{42} + \frac{3}{7} P_{22}, \\ \operatorname{tg} \varphi P_{21}P_{31} &= \frac{4}{7} P_{51} + \frac{7}{5} P_{31} + \frac{36}{35} P_{11}, \\ P_{21}P_{32} &= -\frac{8}{7} P_{51} + 2P_{31} + \frac{36}{7} P_{11}, \\ \cos^2 2\lambda &= \frac{1}{2} + \frac{\cos 4\lambda}{2}, \\ \sin^2 2\lambda &= \frac{1}{2} - \frac{\cos 4\lambda}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Используя эти соотношения, уравнение (3.15) можно преобразовать к виду

$$g(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{\partial W}{\partial \rho} \left\{ 1 + \left(\frac{R}{\rho} \right)^4 \left[\frac{3}{5} (C_{20}^2 + 12C_{22}^2) + \frac{3}{7} (C_{20}^2 - 12C_{22}^2) P_{20} - \frac{36}{35} (C_{20}^2 + 2C_{22}^2) P_{40} - \frac{6}{7} C_{20}C_{22} P_{22} \cos 2\lambda - \frac{12}{35} C_{20}C_{22} P_{42} \cos 2\lambda - \frac{3}{35} C_{22}^2 P_{44} \cos 4\lambda \right] + \left(\frac{R}{\rho} \right)^5 \left[\frac{3}{35} C_{20}C_{31} (48P_{11} + 7P_{31} - 20P_{51}) \cos \lambda \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Подставим вместо $\frac{\partial W}{\partial \rho}$ в уравнении (3.17) его выражение (3.1). Прделав преобразования, получим окончательное выражение для распределения силы тяжести g в произвольных точках (ρ, φ, λ) поверхности Луны:

$$g(\rho, \varphi, \lambda) =$$

$$= g_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (g_{nm} \cos m\lambda + h_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right\},$$

где

(3.18)

$$g_0 = - \frac{GM}{\rho^2} \left[1 - \frac{2}{3} \mu^{-1} \left(\frac{\rho}{\Delta} \right)^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{5} \left(\frac{R}{\rho} \right)^4 (C_{20}^2 + 12C_{22}^2), \right.$$

$$g_{10} = h_{10} = h_{11} = 0,$$

$$g_{11} = \frac{144}{35} \left(\frac{R}{\rho} \right)^4 C_{20} C_{31},$$

$$g_{20} = 3C_{20} + \frac{5}{3} \mu^{-1} \left(\frac{\rho}{\Delta} \right)^3 + \frac{3}{7} \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 (C_{20}^2 - 12C_{22}^2),$$

$$g_{22} = 3C_{22} - \frac{\mu^{-1}}{2} \left(\frac{\rho}{\Delta} \right)^3 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 - \frac{6}{7} \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 C_{20} C_{22},$$

$$g_{31} = 4C_{31} + \frac{3}{5} C_{20} C_{31} \left(\frac{R}{\rho} \right)^2,$$

$$g_{40} = 5C_{40} - \frac{36}{35} (C_{20}^2 + 2C_{22}^2),$$

$$g_{42} = 5C_{42} - \frac{12}{35} C_{20} C_{22},$$

$$g_{44} = 5C_{44} - \frac{3}{35} C_{22}^2,$$

$$g_{51} = 6C_{51} - \frac{12}{7} C_{20} C_{31}.$$
(3.19)

Остальные гармонические коэффициенты имеют вид

$$\left. \begin{aligned} g_{nm} &= (n+1) C_{nm}, \\ h_{nm} &= (n+1) S_{nm}. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Таким образом, коэффициенты (3.19) и (3.20) разложения силы тяжести g выражаются через гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} , являющиеся коэффициентами разложения в ряд по сферическим функциям гравитационного потенциала Луны.

§ 22. Селеноид

Прежде всего надо определить, что́ понимается под фигурой Луны. Различают несколько фигур, каждая из которых характеризует вполне определенные свойства Луны: геометрическая, динамическая, гидростатическая, равного гравитационного потенциала, равной силы тяжести и прочее. Под *геометрической фигурой* подразумевается фигура физической поверхности Луны. Все другие фигуры определяются некоторыми воображаемыми поверхностями. Под *динамической фигурой* понимается эллипсоид, обладающий определенными динамическими свойствами, проявляющимися при движении Луны. *Гидростатическая фигура* Луны характеризуется поверхностью равного давления. Используется также фигура, в точках поверхности которой равные значения потенциала силы тяжести, — *уровенная поверхность*. Большую роль в изучении Луны могут играть *поверхности равной силы тяжести, равного радиального градиента силы тяжести* и пр. В зависимости от решаемой задачи каждая из фигур рассматривается во всех деталях или рассматривается некоторая сглаженная поверхность, только в общих чертах представляющая истинную фигуру, но зато простая по форме (сфера, эллипсоид, сфероид) и поэтому удобная при использовании. Динамическая фигура всегда эллипсоид — эллипсоид инерции Луны. В дальнейшем мы рассмотрим все названные фигуры Луны. Сейчас же остановимся на *уровенной поверхности*, уравнение которой получим, приравняв выражение для потенциала силы тяжести (1.27) некоторой константе W_0 и рассмотрев полученное таким образом выражение как уравнение замкнутой поверхности. Это будет уравнение трех переменных ρ, Φ, λ . Изменяя W_0 , получим совокупность *уровенных поверхностей*. Для Земли одну из *уровенных поверхностей*, которая совпадает со средней поверхностью морей и океанов, называют *геоидом*. По аналогии для Луны рассматривается *селеноид*. Отсутствие на Луне водной поверхности не усложняет решение проблемы определения селеноида. Поскольку селеноид — *условная поверхность*, за таковую можно принять одну из *уровенных поверхностей*, достаточно близкую к средней физической поверхности Луны. Чтобы зафиксировать эту поверх-

ность, рассматривается уровенная поверхность, проходящая через определенную точку Луны. Например, можно селеноид «привязать» к точке, где из непосредственных измерений известна сила тяжести. Если GM_{ζ} — известная величина, а g_0 — измеренное значение силы тяжести на поверхности Луны, то константу W_0 приближенно можно найти так:

$$W_0 = \frac{GM_{\zeta}}{R_0} = \sqrt{GM_{\zeta} g_0}.$$

Если имеется несколько измерений силы тяжести g_i , то по этим измерениям лучше вывести среднее значение константы W_0 . Итак, согласно сказанному, уравнение уровенной поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \times \right. \\ \left. \times P_{nm}(\sin \varphi) + \frac{\mu^{-1}}{2} \left(\frac{\rho}{\Delta} \right)^3 \left[\frac{2}{3} - \frac{5}{3} P_{20}(\sin \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \cos 2\lambda P_{22}(\sin \varphi) \right] \right\} = W_0. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Описание поверхности с помощью уравнения (3.21) неудобно, поэтому необходимо его преобразовать к виду, в котором радиус-вектор точек поверхности был бы функцией угловых координат φ, λ , т. е.

$$\rho = \rho(\varphi, \lambda).$$

Точно разрешить уравнение (3.21) относительно ρ трудно, так как ρ входит в виде различных степеней ее обратной величины. Применяется метод последовательных приближений. Удерживая в разложении члены с квадратами и произведениями, указанными в (3.13), получим

$$\begin{aligned} \rho(\varphi, \lambda) = R_0 \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{R_0} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ \left. + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{\mu^{-1}}{2} \left(\frac{R_0}{\Delta} \right)^3 \left[\frac{2}{3} - \frac{5}{3} P_{20}(\sin \varphi) + \frac{1}{2} \cos 2\lambda P_{22}(\sin \varphi) \right] \times \right. \\ \left. \times \left(1 + C_{20} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 P_{20}(\sin \varphi) \right) - 2 \left(\frac{R}{R_0} \right)^4 [C_{20}^2 P_{20}^2(\sin \varphi) + \right. \end{aligned}$$

$$+ 2C_{20}C_{22} \cos 2\lambda P_{20}(\sin \varphi) P_{22}(\sin \varphi) + C_{22}^2 \cos^2 2\lambda P_{22}(\sin \varphi) - \\ - 5 \left(\frac{R}{R_0} \right)^5 C_{20}C_{31} \cos \lambda P_{20}(\sin \varphi) P_{31}(\sin \varphi) \} . \quad (3.22)$$

Введем размерный фактор R_0 [17], [19], который определяется из соотношения

$$R_0 = \sqrt{\frac{GM_{\zeta}}{g_0}} . \quad (3.23)$$

В принципе определение размерного фактора R_0 возможно без GM_{ζ} , а из измерений других параметров гравитационного поля Луны. Например, измерив силу тяжести g и радиальный градиент $\frac{\partial g}{\partial \rho}$, можно найти

$$R_0 = 2g : \frac{\partial g}{\partial \rho} .$$

Однако недостаточная точность измерения $\frac{\partial g}{\partial \rho}$ и особенно его большая аномальность делают этот путь практически нецелесообразным.

Используя вспомогательные соотношения (3.16), а также соотношения

$$\left. \begin{aligned} P_{20}^2 &= \frac{18}{35} P_{40} + \frac{2}{7} P_{20} + \frac{1}{5} , \\ P_{22}^2 &= \frac{3}{35} P_{44} = \frac{72}{35} P_{40} - \frac{48}{7} P_{20} + \frac{24}{5} , \\ P_{20}P_{22} &= \frac{3}{35} P_{42} - \frac{2}{7} P_{22} , \\ P_{20}P_{31} &= \frac{2}{7} P_{51} + \frac{1}{5} P_{31} + \frac{18}{35} P_{11} , \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

и сгруппировав члены с одинаковыми порядками сферических функций, напишем выражение для радиуса-вектора ρ у ровенной поверхности в следующем виде:

$$\rho(\varphi, \lambda) = R_0 \left\{ A_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ \left. + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right\} , \quad (3.25)$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} связаны с гармоническими коэффициентами C_{nm} и S_{nm} и величиной μ следующим

образом:

$$\left. \begin{aligned}
 A_{00} &= 1 - \frac{\mu^{-1}}{3} \left(\frac{R}{\Delta}\right)^3 - \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \left[\frac{2}{5} C_{20}^2 + \frac{2^4}{5} C_{22}^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 \mu^{-1} C_{20} \right], \\
 A_{10} &= B_{11} = 0, \\
 A_{11} &= -\frac{18}{7} \left(\frac{R}{R_0}\right)^5 C_{20} C_{31}, \\
 A_{20} &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 C_{20} - \frac{5}{6} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 \mu^{-1} + \\
 &+ \frac{4}{7} \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \left[-C_{20}^2 + 12C_{22}^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 \mu^{-1} C_{20} \right], \\
 A_{22} &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 C_{22} + \frac{1}{4} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 \mu^{-1} + \\
 &+ \frac{1}{14} \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \left[16C_{20} C_{22} - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 \mu^{-1} C_{20} \right], \\
 A_{31} &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 C_{31} - \left(\frac{R}{R_0}\right)^5 C_{20} C_{31}, \\
 A_{40} &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \left[C_{40} - \frac{36}{35} (C_{20}^2 + 2C_{22}^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{7} \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 \mu^{-1} C_{20} \right], \\
 A_{42} &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \left[C_{42} - \frac{12}{35} C_{20} C_{22} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{140} \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 \mu^{-1} C_{20} \right], \\
 A_{44} &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \left[C_{44} - \frac{3}{35} C_{22}^2 \right], \\
 A_{51} &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^5 \left[C_{51} - \frac{10}{7} C_{20} C_{31} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Для всех остальных коэффициентов, которые входят в разложение (3.25), справедливы следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned}
 A_{nm} &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^n C_{nm}, \\
 B_{nm} &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^n S_{nm}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Таким образом, уравнение (3.25) представляет радиус-вектор поверхности селеноида в виде разложения в ряд по сферическим функциям. Переменными координатами являются φ и λ . Коэффициенты этого разложения зависят

от гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} гравитационного потенциала Луны, от величины μ^{-1} — отношения массы Земли к массе Луны, и от принятой константы W_0 потенциала силы тяжести.

Следует обратить внимание на следующие детали разложения (3.25). Средний радиус селеноида, как показывает разложение (3.25), вместо R_0 становится равным $R^* = R_0 A_{00}$. Приняв отношение $\frac{R}{R_0} = 1$, $\mu^{-1} = 81,30$, $R_0 = 1738$ км, $\Delta = 384\,400$ км, с помощью формулы (3.26) найдем приращение среднего радиуса $\Delta R = R^* - R = 435$ см. Появившийся в разложении (3.25) член с коэффициентом A_{11} свидетельствует о смещении центра объема селеноида по оси X относительно прежнего начала координат, которое было совмещено с центром масс Луны. Оценка величины этого смещения показала, что оно порядка 1 см, т. е. пренебрежимо мало. Впрочем, небольшими являются в коэффициентах A_{nm} и B_{nm} (3.26) нелинейные поправки к гармоническим коэффициентам C_{nm} и S_{nm} . Приведенные выше формулы рассчитаны для оценок и практического использования при более точных исходных данных в будущем.

Поскольку селеноид — пространственная фигура, его представляют в виде карты высот его поверхности относительно поверхности относимости сферы, эллипсоида, сфероида. На рис. 32 изображены изолинии высот селеноида для видимой и обратной стороны, построенного на основании результатов А. Феррари [23] относительно сферы радиуса $R = 1738$ км. Выбор поверхности относимости не может изменить существенно картину изменения высот селеноида. Можно видеть, что высота поверхности селеноида изменяется в пределах ± 500 м. Для сравнения напомним, что изменение высот геоида над трехосным эллипсоидом (рис. 33) не превышает ± 100 м [24]. Геоид — относительно более правильная фигура, чем селеноид. Это становится тем более заметным, если изменения высот геоида и селеноида отнести к их радиусам. При измерениях на Земле геоид необходим, потому что высоты физической поверхности получаются из нивелировок относительно геоида (уровня моря). Геоид необходим как промежуточная поверхность, относительно которой измеряются высоты земной поверхности. Иначе определяются высоты

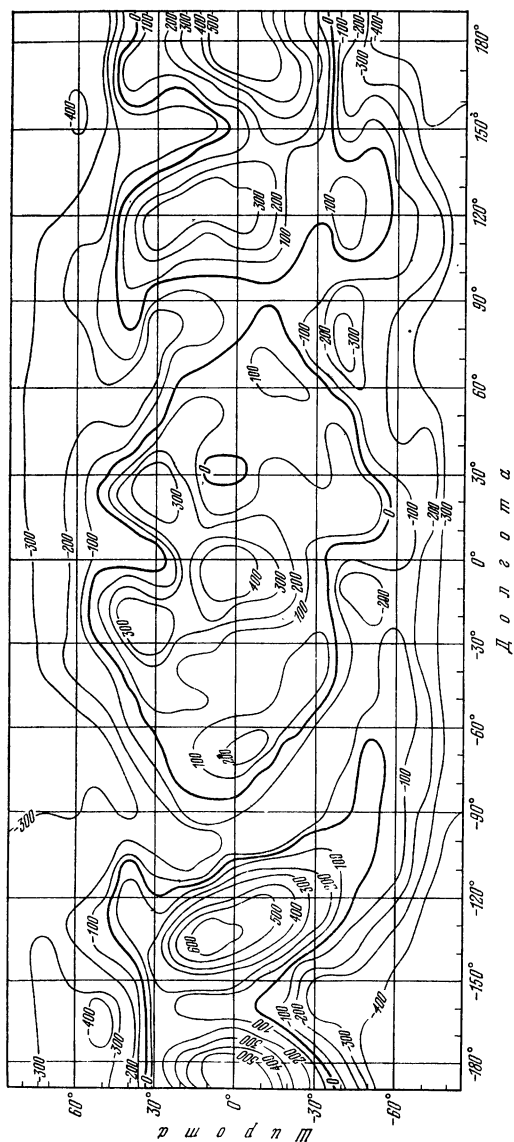
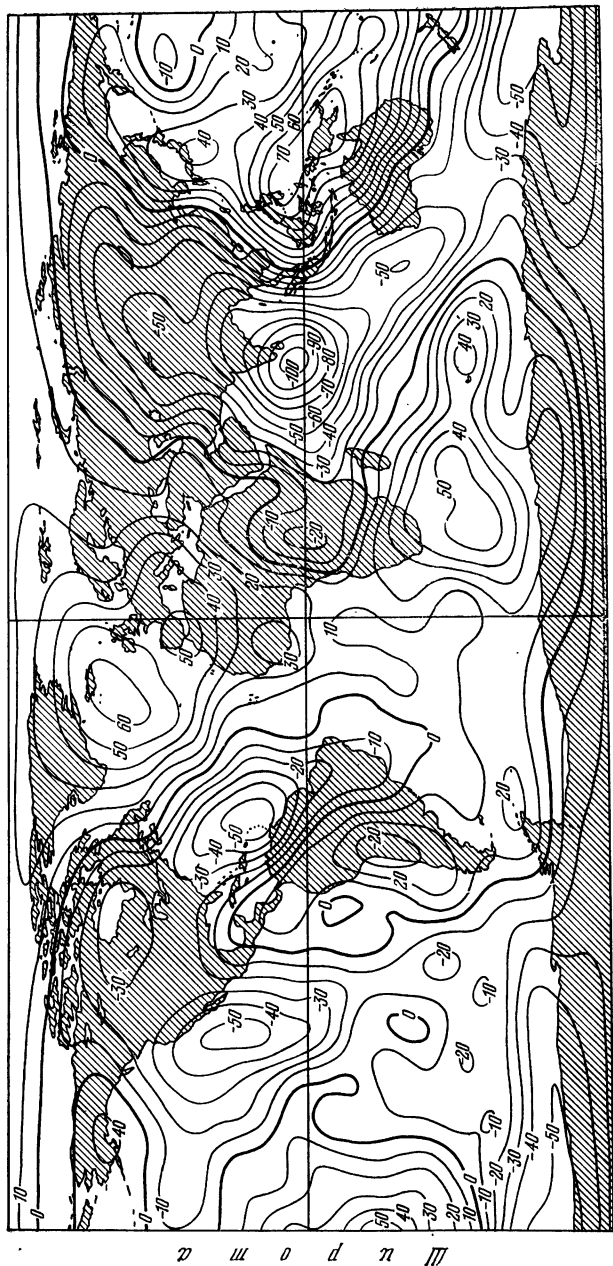


Рис. 32. Высоты селеноида над сферой радиуса $R = 1738$ км, построенного с использованием гармонических коэффициентов Феррари (1977). Сечение изолиний через 100 м.



Д о л г о т а

Рис. 33. Высоты геоида относительно эллипсоида вращения с полярным сжатием 1 : 298,256 (Стандартная Земля III). Сечение изолиний через 10 м.

Ш о т л а н д

точек лунной поверхности. Они измеряются внешним наблюдателем, в конечном итоге как геометрические расстояния точек физической поверхности Луны от некоторого геометрического центра. Поэтому нет необходимости использовать селеноид при изучении геометрической фигуры Луны. Конечно, когда лунные вездеходы начнут определять превышение точек физической поверхности Луны путем нивелировок, возникнет необходимость приведения высот к селеноиду.

§ 23. Фигура нормальной Луны

При решении многих задач вместо селеноида, который имеет довольно сложное строение, удобно рассматривать более простую уровенную поверхность. Ей будет соответствовать и более простое внешнее гравитационное поле, представляющее реальное гравитационное поле без деталей, описывающее лишь его основные особенности. В качестве такой простой поверхности могут применяться сфера, сфероид, эллипсоид вращения, трехосный эллипсоид и др. При этом предполагается, что плотность пород внутри Луны распределена тоже по некоторому простому закону, угловая скорость вращения реальной Луны и модели Луны совпадают. Равными полагаются также их массы, а также параметры, характеризующие постоянную часть приливного гравитационного влияния Земли. Модель Луны, удовлетворяющую всем этим условиям, называют *нормальной Луной*, а ее гравитационное поле — *нормальным гравитационным полем*. Часть гравитационного поля, обусловленная всеми остальными неправильностями внутреннего строения и фигуры Луны, называется *аномальным гравитационным полем*. Она меньшая по величине и имеет сложное, неправильное распределение.

При построении *фигуры нормальной Луны* и ее нормального поля существуют два подхода. В первом из них рассматривается разложение реального потенциала силы тяжести Луны в ряд по сферическим функциям (1.27). В этом разложении удерживается несколько главных членов. Полученное таким образом гравитационное поле рассматривается как нормальное. Если усеченное выражение для потенциала приравнять константе, то получим

уравнение поверхности фигуры нормальной Луны. Какие члены разложения (1.27) считать главными? Это трудный вопрос, так как для Луны в разложении ее потенциала (1.27) нет одного-двух доминирующих членов. Если принять несколько основных членов, то фигура нормальной Луны усложнится. Из наблюдений известно, что наибольшие гравитационные аномалии на Луне описываются гармониками с $P_{20}(\sin \varphi)$, $\cos 2\lambda P_{22}(\sin \varphi)$, $\cos \lambda P_{31}(\sin \varphi)$. Поэтому за поверхность нормальной Луны можно было бы принять уроченный сфероид, описываемый уравнением, содержащим эти гармоники:

$$\begin{aligned} \overline{W}(\rho, \varphi, \lambda) = & \\ = \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \left\{ 1 + \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 [(C_{20}P_{20}(\sin \varphi) + C_{22} \cos 2\lambda P_{22}(\sin \varphi)] + \right. & \\ + \left. \left(\frac{R}{\rho}\right)^3 C_{31} \cos \lambda P_{31}(\sin \varphi) + \frac{\mu^{-1}}{2} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^3 \left[\frac{2}{3} - \frac{5}{3} P_{20}(\sin \varphi) + \right. \right. & \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \cos 2\lambda P_{22}(\sin \varphi) \right] \right\}. \quad (3.28) \end{aligned}$$

В этом уравнении, кроме членов, обусловленных притяжением массы Луны, оставлены члены, представляющие постоянную часть приливоцентрического потенциала. Правую часть уравнения (3.28) приравняем константе, равной $\frac{GM_{\zeta}}{R_0}$, задавая одновременно этим размерный фактор рассматриваемой фигуры Луны. Выражение для радиуса-вектора поверхности нормальной Луны выводится аналогично равенству (3.25). Если иметь в виду, что

$$A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda = D_{nm} \cos m(\lambda - \lambda_{nm}), \quad (3.29)$$

то уравнение для радиуса-вектора ρ_H поверхности нормальной Луны, соответствующей потенциалу (3.28) с учетом членов порядка малости (3.13), получится в виде

$$\rho_H(\varphi, \lambda) = R_0^* \left\{ 1 + \sum'_{n=2}^5 \sum'_{m=0}^n D_{nm} \cos m(\lambda - \lambda_{nm}) P_{nm}(\sin \varphi) \right\}. \quad (3.30)$$

Штрихи при знаках суммы означают, что при суммировании пропускаются члены с D_{21} , D_{32} , D_{33} , D_{43} , D_{50} , D_{52} , D_{53} , D_{54} , D_{55} . Коэффициенты D_{nm} и сдвиг долготы λ_{nm}

связаны с прежними коэффициентами A_{nm} и B_{nm} :

$$D_{nm} = \sqrt{A_{nm}^2 + B_{nm}^2}, \quad \lambda_{nm} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{B_{nm}}{A_{nm}}. \quad (3.31)$$

Поверхность, описываемая уравнением (3.30), является сфероидом. Уравнение содержит зональные, тессеральные и секториальные сферические функции, т. е. учитывается больше чем простая «трехосность» нормальной Луны. Полярное сжатие описывается членами с D_{20} и D_{40} . Основное значение имеет гармоника с D_{20} , она почти на два порядка больше, чем гармоника с D_{40} . Чисто долготные изменения радиуса-вектора поверхности сфероида описываются членами с D_{22} и D_{44} . Помимо этих двух последних гармоник, осевая асимметрия поверхности создается гармониками с D_{31} , D_{41} и D_{51} , т. е. гармониками с ненулевыми вторыми индексами. Среди них доминирует член с D_{31} . В уравнении (3.28) содержались гармоники с P_{20} , $P_{22} \cos 2\lambda$, $P_{22} \sin 2\lambda$, $P_{31} \sin \lambda$, а в уравнении для радиуса-вектора (3.30), выведенного с точностью до членов (3.13), появились более высокие гармоники P_{40} , P_{42} , P_{44} , P_{31} . Если в уравнении (3.30) отбросить эти гармоники, то гравитационный потенциал на этой упрощенной поверхности уже не будет удовлетворять условию его постоянства (3.28).

Другой подход ([12], [22] и др.) в построении фигуры нормальной Луны состоит в следующем: заранее задается фигура — например, эллипсоид вращения или трехосный эллипсоид. Эллипсоид предполагается уровненным, т. е. потенциал силы тяжести на его поверхности постоянен. При этом полагается, что масса, угловая скорость вращения, приливное действие Земли реальной и модели Луны равны. Параметры эллипсоида, представляющего нормальную Луну, определяются из условия [18]:

$$\iint_S [\rho(\varphi, \lambda) - \rho_e(\varphi, \lambda)]^2 dS = \min, \quad (3.32)$$

где ρ и ρ_e — радиусы-векторы поверхностей соответственно селеноида и нормального эллипсоида. В случае эллипсоида вращения имеется два параметра: большая полуось a и полярное сжатие $\alpha = \frac{a-c}{a}$; четыре параметра определяют фигуру трехосного эллипсоида: большая по-

луось a , полярное сжатие α , экваториальное сжатие $\alpha_1 = \frac{a-b}{a}$, долгота направления большой полуоси λ_0 . Напишем уравнение трехосного эллипсоида в прямоугольной системе координат

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\alpha_1)^2} + \frac{z^2}{a^2(1-\alpha)^2} = 1. \quad (3.33)$$

Координаты x, y, z выразим через сферические ρ, φ, λ :

$$x = \rho_e \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0),$$

$$y = \rho_e \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0),$$

$$z = \rho_e \sin \varphi.$$

Подставим эти координаты в уравнение (3.33) и разложим в ряд по степеням α и α_1 . Удержав в разложении члены порядка α^2, α_1^2 и $\alpha\alpha_1$, получим

$$\begin{aligned} \rho_e(\varphi, \lambda) = a(1-\alpha)(1-\alpha_1) & \left[1 + \frac{1}{2}\alpha(2-\alpha)\cos^2\varphi + \right. \\ & + \frac{1}{2}\alpha_1(2-\alpha_1)\sin^2\varphi + \\ & + \frac{1}{2}\alpha_1(2-\alpha_1)(1-\alpha)^2\cos^2\varphi\cos^2(\lambda-\lambda_0) + \\ & + \frac{3}{2}\alpha^2\cos^4\varphi + \frac{3}{2}\alpha_1^2\sin^4\varphi + \frac{3}{2}\alpha_1^2\cos^4\varphi\cos^4(\lambda-\lambda_0) + \\ & + 3\alpha\alpha_1\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 3\alpha\alpha_1\cos^4\varphi\cos^2(\lambda-\lambda_0) + \\ & \left. + 3\alpha_1^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos^2(\lambda-\lambda_0) \right]. \quad (3.34) \end{aligned}$$

Используя равенства

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(\lambda - \lambda_0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(\lambda - \lambda_0), \\ \cos^4(\lambda - \lambda_0) &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2(\lambda - \lambda_0) + \\ & \quad + \frac{1}{8}\cos 4(\lambda - \lambda_0), \\ \cos^2\varphi &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}P_{20} = \frac{1}{3}P_{22}, \\ \sin^2\varphi &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_{20}, \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \cos^4 \varphi &= \frac{8}{15} - \frac{16}{21} P_{20} + \frac{8}{35} P_{40} = \\
 &= \frac{2}{7} P_{22} - \frac{2}{105} P_{42} = \frac{1}{105} P_{44}, \\
 \sin^4 \varphi &= \frac{1}{5} + \frac{4}{7} P_{20} + \frac{8}{35} P_{40}, \\
 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi &= \frac{2}{15} + \frac{2}{21} P_{20} - \frac{8}{35} P_{40} = \\
 &= \frac{1}{21} P_{22} + \frac{2}{105} P_{42},
 \end{aligned} \right\} (3.35)$$

уравнение (3.34), которое задает радиус-вектор поверхности трехосного эллипсоида, приведем к виду

$$\begin{aligned}
 \rho_e(\varphi, \lambda) &= a_{00} + a_{20} P_{20} + (a_{22} \cos 2\lambda + b_{22} \sin 2\lambda) P_{22} + \\
 &+ a_{40} P_{40} + (a_{42} \cos 2\lambda + b_{42} \sin 2\lambda) P_{42} + \\
 &+ (a_{44} \cos 4\lambda + b_{44} \sin 4\lambda) P_{44}, \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 a_{00} &= a \left[1 - \frac{1}{3} \alpha - \frac{1}{3} \alpha_1 - \frac{1}{5} \alpha^2 - \frac{1}{5} \alpha_1^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4}{5} \alpha \alpha_1 \right], \\
 a_{20} &= a \left[-\frac{2}{3} \alpha + \frac{\alpha_1}{3} - \frac{1}{7} \alpha^2 + \frac{1}{14} \alpha_1^2 + \frac{1}{7} \alpha \alpha_1 \right], \\
 a_{40} &= a \left[\frac{15}{35} \alpha^2 + \frac{9}{70} \alpha_1^2 - \frac{12}{35} \alpha_1 \alpha \right], \\
 \left. \begin{aligned}
 a_{22} \\
 b_{22}
 \end{aligned} \right\} &= a \left[\frac{1}{6} \alpha_1 + \frac{1}{28} \alpha_1^2 - \frac{1}{14} \alpha \alpha_1 \right] \begin{cases} \cos 2\lambda_{22} \\ \sin 2\lambda_{22} \end{cases}, \\
 \left. \begin{aligned}
 a_{42} \\
 b_{42}
 \end{aligned} \right\} &= a \left[\frac{1}{70} \alpha_1^2 - \frac{1}{35} \alpha \alpha_1 \right] \begin{cases} \cos 2\lambda_{42} \\ \sin 2\lambda_{42} \end{cases}, \\
 \left. \begin{aligned}
 a_{44} \\
 b_{44}
 \end{aligned} \right\} &= a \left[\frac{1}{560} \alpha_1^2 \right] \begin{cases} \cos 4\lambda_{22} \\ \sin 4\lambda_{22} \end{cases}.
 \end{aligned} \right\} (3.37)$$

Напишем уравнение, представляющее разность радиус-векторов селеноида (3.25) и эллипсоида (3.36), представляющего поверхность нормальной Луны, в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \rho(\varphi, \lambda) - \rho_e(\varphi, \lambda) &= R_0^* - a_{00} + R_0^* A_{11} \cos \lambda P_{21}(\sin \varphi) + \\
 &+ \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n [(R_0^* A_{nm} - a_{nm}) \cos m\lambda + \\
 &+ (R_0^* B_{nm} - b_{nm}) \sin m\lambda] P_{nm}(\sin \varphi). \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

Радиус-вектор $\rho_e(\varphi, \lambda)$ (3.36), соответствующий трехосному эллипсоиду, посредством коэффициентов a_{nm} и b_{nm} зависит от нескольких параметров, а именно: большой полуоси a , полярного сжатия α , экваториального сжатия α_1 и долготы λ_0 направления большой полуоси. Путем вариации этих параметров подбирается трехосный эллипсоид, наилучшим образом аппроксимирующий селеноид. Последний, как известно из предыдущего пара-

Таблица 21

Предельные значения некоторых характеристик гравитационного поля Луны, вычисленные относительно различных поверхностей относимости [6]

Аномалии силы тяжести Δg , мГал	Возмущающий потенциал T , $10^6 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-2}$	Компоненты укло- нений отвеса, сек. дуги	
		ξ	η
относительно сферы			
от -240	-10 796	-259	-186
до +135	+8665	+221	+263
относительно эллипсоида вращения			
от -240	-9755	-213	-186
до +163	+6438	+188	+263
относительно трехосного эллипсоида			
от -246	-10 734	-201	-235
до +137	+5383	+200	+251

графа, выводится из наблюдаемого гравитационного поля Луны. Поэтому коэффициенты $R_0^* A_{nm}$ и $R_0^* B_{nm}$ в уравнении (3.38), соответствующие селеноиду, считаются известными. Искомыми неизвестными являются четыре параметра трехосного эллипсоида a , α , α_1 , λ_0 . Для того чтобы определить параметры эллипсоида вращения, полагаем $\alpha_1 = \lambda_0 = 0$. В случае выбора сферической поверхности в качестве поверхности нормальной Луны искомым остается только один параметр: радиус $R = a$. В табл. 21 приведены предельные значения возмущающего потенциала T , аномалий силы тяжести Δg и компоненты уклонений отвеса ξ и η относительно трех поверхностей, пред-

ставляющих поверхность нормальной Луны: сферы, эллипсоида вращения, трехосного эллипсоида. Как очевидно из таблицы, нет существенной разницы в том, какая поверхность принята за поверхность нормальной Луны.

§ 24. Распределение нормальной силы тяжести

Так же как и фигура нормальной Луны, ее нормальное гравитационное поле имеет простое строение. Оно изменяется в функции координат рассматриваемой точки (ρ, φ, λ) . Нормальную силу тяжести будем обозначать $\gamma(\rho, \varphi, \lambda)$. В соответствии с двумя принципиально разными подходами к построению поверхности нормальной Луны возможны два способа задания поля нормальной силы тяжести γ . При первом подходе нормальная сила тяжести определяется по формулам, аналогичным (3.14) и (3.18). Только вместо исходного потенциала силы тяжести (1.27) используется «укороченный» потенциал \bar{W} . В качестве него примем гравитационный потенциал, содержащий помимо основной нулевой гармоники $\frac{GM}{\rho}$ гармоники с $P_{20}(\sin \varphi)$, $P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda$, $P_{22}(\sin \varphi) \sin 2\lambda$, $P_{31}(\sin \varphi) \cos \lambda$, $P_{31}(\sin \varphi) \sin \lambda$.

Ускорение нормальной силы тяжести γ определим аналогично тому, как определялась сила тяжести $g(\rho, \varphi, \lambda)$ в § 21, но сохраняя только названные выше гармоники:

$$\gamma(\rho, \varphi, \lambda) = g_0 \left[1 + \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 g_{20} P_{20} + \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 (g_{22} \cos 2\lambda + h_{22} \sin 2\lambda) P_{22} + \left(\frac{R}{\rho}\right)^3 (g_{31} \cos \lambda + h_{31} \sin \lambda) P_{31} \right]. \quad (3.39)$$

Коэффициенты $g_0, g_{20}, g_{22}, h_{22}, g_{31}, h_{31}$ выражаются равенствами (3.19). Часть их является функциями ρ . Уравнение (3.39) для нормальной силы тяжести написано для произвольных точек пространства, координаты которых ρ, φ, λ .

Примем за поверхность нормальной Луны поверхность сфероида вращения

$$\rho(\varphi, \lambda) = R_0 [1 + C_{20} P_{20}(\sin \varphi)]. \quad (3.40)$$

С помощью этого уравнения исключим ρ из уравнения (3.39), имея при этом в виду, что от ρ зависят также ко-

эффиценты (3.19). Проведя преобразования и принимая $R = R_0$, получим следующее выражение для нормальной силы тяжести в точках поверхности нормальной Луны (3.40):

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi, \lambda) = \gamma_0 [& 1 + \gamma_{11} P_{11}(\sin \varphi) + \gamma_{20} P_{20}(\sin \varphi) + \\ & + (\gamma_{22}^{(1)} \cos 2\lambda + \gamma_{22}^{(2)} \sin 2\lambda) P_{22}(\sin \varphi) + \\ & + (\gamma_{31}^{(1)} \cos \lambda + \gamma_{31}^{(2)} \sin \lambda) P_{31}(\sin \varphi) + \gamma_{42}^{(1)} \cos 2\lambda P_{42}(\sin \varphi) + \\ & + \gamma_{40}^{(1)} P_{40}(\sin \varphi) + \gamma_{51}^{(1)} \cos \lambda P_{51}(\sin \varphi)], \end{aligned} \quad (3.41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= -\frac{GM}{R_0^2} \left[\left(1 - \frac{2}{3} \mu^{-1}\right) \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{5} (6C_{22}^2 - C_{20}^2) + \frac{1}{3} \mu^{-1} C_{20} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 \right], \\ \gamma_{20}^{(1)} &= C_{20} + \frac{5}{3} \mu^{-1} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 - \frac{32}{21} \mu^{-1} C_{20} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 - \\ &\quad - \frac{3}{7} (5C_{20}^2 + 12C_{22}^2), \\ \gamma_{22}^{(1)} &= 3C_{22} - \frac{1}{2} \mu^{-1} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 + \frac{1}{7} \mu^{-1} C_{20} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3 + \\ &\quad + \frac{18}{7} C_{20} C_{22}, \\ \gamma_{22}^{(2)} &= 3S_{22}, \\ \gamma_{31}^{(1)} &= 4C_{31} - \frac{17}{5} C_{20} C_{31}, \\ \gamma_{31}^{(2)} &= 4S_{31}, \\ \gamma_{11}^{(1)} &= -\frac{72}{7} C_{20} C_{31}, \\ \gamma_{40}^{(1)} &= -\frac{162}{35} C_{20}^2 + \frac{6}{7} \mu^{-1} C_{20} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3, \\ \gamma_{42}^{(1)} &= -\frac{36}{35} C_{20} C_{22} - \frac{3}{70} \mu^{-1} C_{20} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3, \\ \gamma_{51}^{(1)} &= -\frac{40}{7} C_{20} C_{31}. \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Нормальная сила тяжести γ в точках поверхности нормальной Луны (3.40) уже зависит только от широты φ и долготы λ . Основное значение в распределении силы тяжести имеют гармоники, которые содержались в исходном уравнении (3.28). Дополнительные гармоники $P_{11} \cos \lambda$,

$P_{42} \cos 2\lambda$, $P_{51} \cos \lambda$, а также небольшие поправки к коэффициентам основных гармоник появились за счет удерживания в разложениях квадратических членов (3.13). Амплитуда изменения силы тяжести за этот счет не превышает 0,01 мГал. Размерный фактор R_0 , вычисленный по измеренным значениям силы тяжести на Луне (см. табл. 12), оказывается непредставительным для всей Луны. Значение R_0 получается заниженным потому, что измерения силы тяжести производились на поверхности только видимой стороны Луны, которая ближе к ее центру масс, чем поверхность обратной стороны. Нами при построении нормального гравитационного поля в формулах (3.42) размерный фактор R_0 принимался равным 1738,0 км. Используя два варианта гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} (см. табл. 14, 18) и приняв названное значение R_0 , $\frac{R_0}{\Delta} = 4,57 \cdot 10^{-3}$, $\mu = 81,3$, мы вычислили коэффициенты $\gamma_{nm}^{(1)}$ и $\gamma_{nm}^{(2)}$ (3.42). Они приведены в табл. 22. Соглас-

Таблица 22

Значения коэффициентов в формуле (3.41) нормальной силы тяжести

Числа в скобках второй и третьей колонок означают степень 10. Поэтому, например, 0,616 (-7) = 0,616 · 10⁻⁷

$\gamma_{nm}^{(1)}, \gamma_{nm}^{(2)}$	Величины коэффициентов, соответствующие гармоническим коэффициентам	
	Э. Л. Акима и З. П. Власовой (1977, вариант 4)	Феррари (1977)
$\gamma_{11}^{(1)}$	0,616 (-7)	0,615 (-7)
$\gamma_{21}^{(1)}$	-0,1886 (-3)	-0,1923 (-3)
$\gamma_{22}^{(1)}$	0,772 (-4)	0,621 (-4)
$\gamma_{22}^{(2)}$	-0,180 (-5)	0,756 (-7)
$\gamma_{31}^{(1)}$	0,1192 (-3)	0,1168 (-3)
$\gamma_{31}^{(2)}$	0,280 (-4)	0,259 (-4)
$\gamma_{40}^{(1)}$	0,418 (-4)	0,192 (-4)
$\gamma_{42}^{(1)}$	0,565 (-8)	0,457 (-8)
$\gamma_{51}^{(1)}$	0,342 (-7)	0,341 (-7)

но формуле (3.41) нормальная сила тяжести изменяется по широте φ и долготе λ . При этом учитывается отличие нормальной Луны от осесимметричной фигуры, асимметрия относительно экваториальной плоскости. В табл. 23 приведены значения нормальной силы тяжести $\gamma(\varphi, \lambda)$ для ряда точек поверхности симметричной нормальной Луны, имеющей фигуру сфероида вращения.

Таблица 23

Значения нормальной силы тяжести $\gamma(\varphi, \lambda)$ в ряде точек поверхности нормальной Луны в мГал. Используются гармонические коэффициенты Э. Л. Акима и З. П. Власовой (1977, вариант 4)

φ	λ					
	0°	60°	120°	180°	240°	300°
-90°	162 282					
-60°	162 335	162 310	162 271	162 256	162 254	162 294
-30°	162 342	162 298	162 292	162 330	162 289	162 296
0	162 332	162 384	162 314	162 390	162 325	162 297
+30°	162 342	162 298	162 292	162 330	162 289	162 296
+60°	162 336	162 310	162 271	162 256	162 254	162 294
+90°	162 282					

В нашей с Н. П. Грушинским работе, опубликованной в 1962 г. [8], задолго до спутниковых определений гравитационного поля Луны, была выведена формула распределения нормальной силы тяжести (при этом использовались известные разности моментов инерции Луны, выведенные ранее по ее астрономическим наблюдениям)

$$\gamma(\varphi, \lambda) = \gamma_e \{1 - 0,00037 \sin^2 \varphi + 0,00008 \cos^2 \varphi \cos 2\lambda\}. \quad (3.43)$$

На основании именно этой формулы была впервые установлена интересная закономерность: уменьшение силы тяжести от экватора к полюсу, несмотря на то, что Луна, как и Земля, имеет полярное сжатие. Как известно, сила тяжести на Земле, наоборот, увеличивается от экватора к полюсу. Нормальная сила тяжести от экватора к полюсу на Луне уменьшается на ~ 60 мГал, диапазон ее изменения по долготе вдоль экватора составляет ~ 25 мГал.

Если в формуле нормальной силы тяжести (3.41) оставить только члены с $\gamma_{20}^{(1)}$ и $\gamma_{22}^{(1)}$ и использовать числовые

значения гармонических коэффициентов Э. Л. Акима и З. П. Власовой (см. табл. 14, вариант М-4), то получим

$$\gamma(\varphi, \lambda) = 162306 \{1 - 0,000283 \sin^2 \varphi + 0,000077 \cos^2 \varphi \cos 2\lambda\} \text{ мГал.} \quad (3.44)$$

Используя гармонические коэффициенты Феррари (см. табл. 18), будем иметь

$$\gamma(\varphi, \lambda) = 162306 \{1 - 0,000288 \sin^2 \varphi + 0,000061 \cos^2 \varphi \cos 2\lambda\} \text{ мГал.} \quad (3.45)$$

При выводе (3.44) и (3.45) в формулах (3.42) принималось $R_0 = 1738,0$ км, $\Delta = 384\,400$ км, $GM_{\zeta} = 4902,71 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$, $\mu^{-1} = 81,30$.

Налицо хорошее согласие формул (3.44), (3.45) с (3.43) в описании широтного и долготного изменений силы тяжести. Подтверждается выглядевшее в 1962 г. парадоксальным фактом уменьшение силы тяжести от экватора к полюсу.

При другом подходе к построению нормального гравитационного поля выводятся формулы, описывающие распределение гравитационного поля тела заранее выбранной фигуры. Обычно за таковую принимают эллипсоид вращения или трехосный эллипсоид. При этом предполагается, что эллипсоид является уровенным, т. е. потенциал силы тяжести в точках его поверхности постоянен. Формула распределения силы тяжести на поверхности трехосного уровенного эллипсоида впервые была выведена итальянским геодезистом Минео. Ее вывод, основанный на использовании функций Морера, приводит в своей работе М. Капуто [22]. Она имеет следующий вид:

$$\gamma(\varphi, \lambda) = \frac{a\gamma_a \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + b\gamma_b \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + c\gamma_c \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + b^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + c^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (3.44)$$

где a, b, c — полуоси эллипсоида, $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ — значения нормальной силы тяжести на концах полуосей. Известная формула Сомильяни для уровенного эллипсоида вращения является частным случаем формулы Минео. В упомянутой работе [22] формула (3.44) рассматривается в связи с гравитационным полем Луны. Используя малость следующих величин: $\alpha = \frac{a-c}{a}$ — полярного, $\alpha_1 = \frac{a-b}{a}$ —

экваториального сжатий эллипсоида, $\beta = \frac{\gamma_c - \gamma_a}{\gamma_a}$,

$\beta_1 = \frac{\gamma_a - \gamma_b}{\gamma_a}$ — отношений разностей силы тяжести на кон-

цах полуосей эллипсоида к силе тяжести γ_a , выражение (3.44) можно представить в виде ряда по степеням этих малых величин. В разложении для Луны необходимо удерживать члены с α_1 и β_1 в такой же степени, что α и β . Ограничившись вторыми степенями α , β , α_1 , β_1 , получим следующую формулу для распределения нормальной силы тяжести γ на поверхности уровненного трехосного эллипсоида:

$$\gamma(\varphi, \lambda) = \bar{\gamma}_0 [1 + \gamma_{20} P_{20}(\sin \varphi) + \gamma_{40} P_{40}(\sin \varphi) + \gamma_{22} P_{22}(\sin \varphi) \cos \lambda + \gamma_{42} P_{42}(\sin \varphi) \cos 2\lambda + \gamma_{44} P_{44}(\sin \varphi) \cos 4\lambda], \quad (3.45)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}_0 &= \gamma_e \left[1 + \frac{1}{3} \beta + \frac{1}{3} \beta_1 + \frac{1}{15} (-2\alpha\beta - 2\alpha_1\beta_1 - \alpha^2 - \alpha_1^2 + \alpha\alpha_1 + \alpha_1\beta + \beta_1\alpha) \right], \\ \gamma_{20} &= \left[\frac{2}{3} \beta - \frac{1}{3} \beta_1 + \frac{1}{21} (\alpha_1^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \alpha_1\beta_1 + \alpha\alpha_1 + \alpha_1\beta + \beta_1\alpha) \right], \\ \gamma_{40} &= \frac{8}{35} \left[\alpha\beta + \frac{3}{8} \alpha_1\beta_1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{16} \alpha_1^2 - \frac{1}{2} (\alpha_1\alpha + \alpha_1\beta + \beta_1\alpha) \right], \\ \gamma_{22} &= \frac{1}{6} \left[-\beta_1 + \frac{1}{14} \alpha_1^2 + \frac{1}{7} (\alpha_1\beta_1 - \alpha\alpha_1 - \alpha_1\beta - \beta_1\alpha) \right], \\ \gamma_{42} &= \frac{1}{105} \left[\frac{1}{2} \alpha_1^2 + \alpha_1\beta_1 - \alpha\alpha_1 - \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \right], \\ \gamma_{44} &= \frac{1}{840} \left[\frac{1}{2} \alpha_1^2 + \alpha_1\beta_1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Имеющиеся в [11] аналогичные соотношения, построенные для Земли, являются частным случаем (3.46).

Чтобы различать два описанных подхода к построению нормального гравитационного поля планеты, можно было бы первый из них называть «гельмертовским», а второй — «клеровским». Именно первым путем известный

немецкий геодезист Гельмерт (1843—1917) на основании еще немногих измерений силы тяжести на Земле впервые построил формулу распределения нормальной силы тяжести, которая не потеряла своего значения и по сей день. Теория построения внешнего гравитационного поля планеты с заранее заданной уровенной поверхностью была развита замечательным французским ученым А. Клеро (1713—1765) в его книге «Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики», вышедшей в 1743 г. и составившей эпоху в теории фигуры планет. В этой работе заложен второй подход к построению нормального гравитационного поля планет.

§ 25. Поверхности равной силы тяжести и равного ее радиального градиента

Аналогично тому, как выводится поверхность равного потенциала силы тяжести — уровенная поверхность, можно определить поверхность равной силы тяжести и поверхность равной радиальной производной силы тяжести — вертикального градиента силы тяжести. Вопрос о построении изосиловых поверхностей в гравиметрии не нов. Интерес к ним впервые проявлен еще в конце тридцатых годов в работе [7]. Однако конкретных их построений ни для Земли, ни тем более для Луны не делалось. Вновь к вопросу об изосиловых поверхностях вернулся М. Бурша. В работе [14] нами были выведены уравнения радиусов-векторов для поверхностей равной силы тяжести, равной радиальной производной силы тяжести, и построены изолинии высот этих поверхностей. При их выводе правые части уравнений (3.18) и (3.4) приравнивались константам. Таким образом, получим уравнения этих поверхностей в неявном виде.

Уравнение поверхности равной силы тяжести имеет вид

$$\frac{GM}{\rho^2} \left[1 - \frac{2}{3} \mu^{-1} \left(\frac{\rho}{\Delta} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{R}{\rho} \right)^4 (3C_{22}^2 + 36C_{12}^2) \right] \times$$

$$\times \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (g_{nm} \cos m\lambda + h_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right] =$$

$$= \text{const}_1. \quad (3.47)$$

Для поверхности равного вертикального градиента силы тяжести имеем

$$\begin{aligned} \frac{GM_{\zeta}}{\rho^3} \left[1 + \frac{\mu^{-1}}{3} \left(\frac{\rho}{\Delta} \right)^3 + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (K_{nm} \cos m\lambda + M_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right] = \\ = \text{const}_2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Сначала в качестве const_1 примем среднее значение силы тяжести \bar{g} из четырех непосредственных определений на Луне (см. табл. 12):

$$\text{const}_1 = \bar{g} = 162\,718 \text{ мГал}. \quad (3.49)$$

Приняв $R_0 = 1738,0$ км, найдем

$$\text{const}_2 = \frac{\bar{g} 2GM_{\zeta}}{R_0^3} = 1868 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-2}. \quad (3.50)$$

При выводе радиусов-векторов этих поверхностей ограничимся только линейными членами относительно коэффициентов разложения g_{nm} , h_{nm} , K_{nm} , M_{nm} и пренебрежем членами, представляющими приливоцентробежный эффект. Из уравнения (3.47) найдем явное уравнение поверхности, в котором радиус-вектор ρ_g поверхности равной силы тяжести выражается через угловые координаты (φ , λ):

$$\begin{aligned} \rho_g(\rho, \varphi, \lambda) = R_0 \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (g_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ \left. + h_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Коэффициенты g_{nm} и h_{nm} выражаются равенствами (3.19), (3.20). На основании равенства (3.48) найдем радиус-вектор $\rho_{g'}$ поверхности постоянного радиального градиента силы тяжести

$$\begin{aligned} \rho_{g'}(\rho, \varphi, \lambda) = R_0 \left[1 + \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (K_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ \left. + M_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

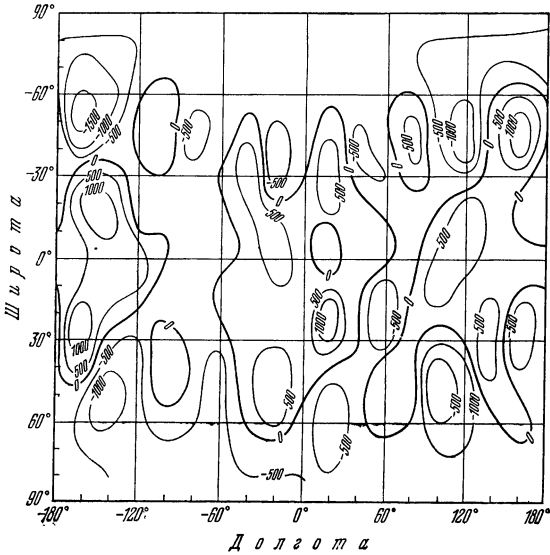


Рис. 34а. Изолинии высот поверхности равной силы тяжести $g_0 = 162\,718$ мГал, относительно сферы радиуса $R_0 = 1738,0$ км, сечение изолиний через 500 м.

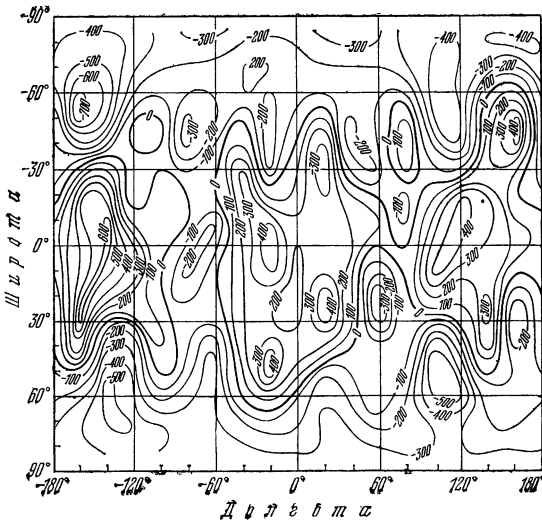


Рис. 34б. То же, что на рис. 34а, $g_1 = 81\,356$ мГал, относительно сферы радиуса $R_1 = 2454,82$ км, сечение изолиний через 100 м.

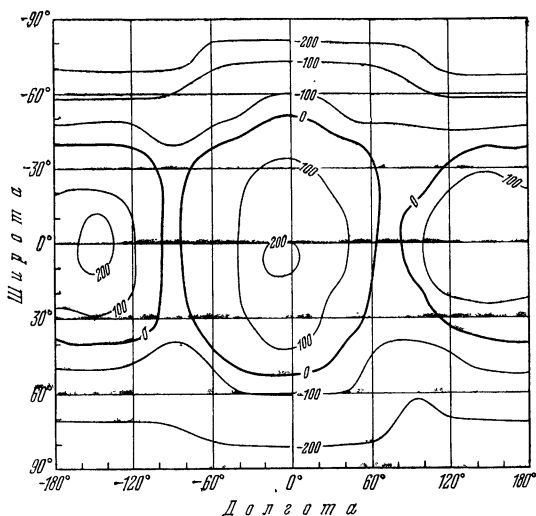


Рис. 34в. То же, что на рис. 34а. $\bar{g}_2 = 20\,340$ мГал, относительно сферы радиуса $R_2 = 4909,7$ км, сечение изолиний через 100 м.

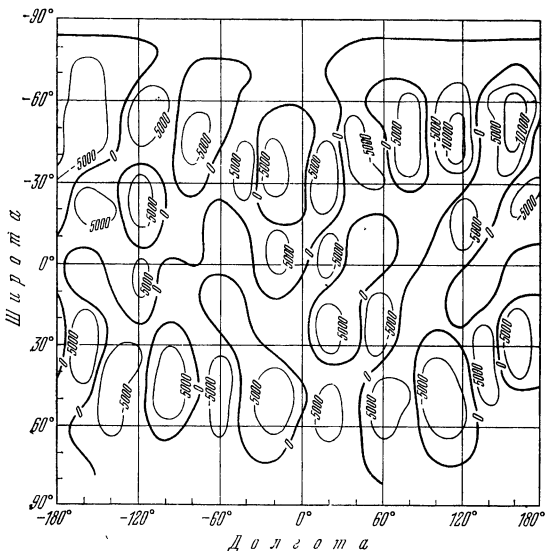


Рис. 35а. Изолинии высот поверхности равных значений радиального градиента силы тяжести $\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2} \right)_0 = 1874,8$ Е, относительно сферы радиуса $R_0 = 1738,0$ км, сечение изолиний через 5000 м.

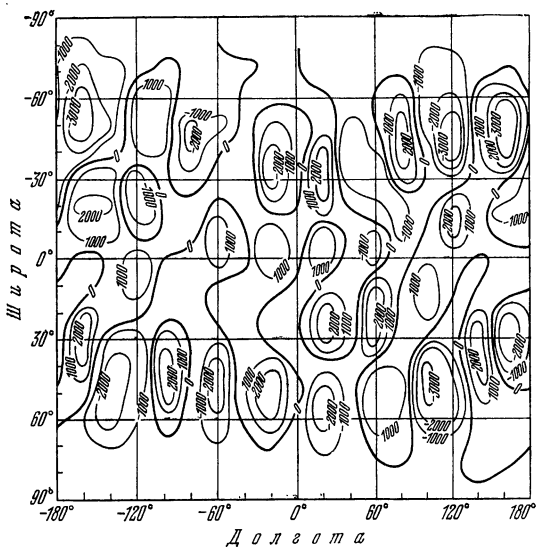


Рис. 35б. То же, что на рис. 35а. $\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2}\right)_1 = 162,8 \text{ Е}$, относительно сферы радиуса $R_1 = 2454,8 \text{ км}$, сечение изолиний через 100 м.

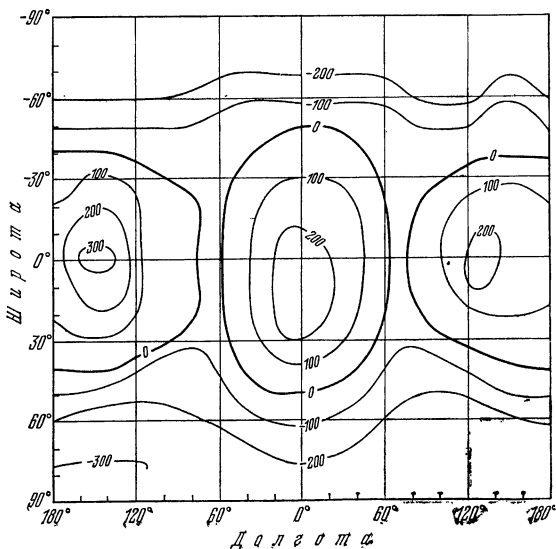


Рис. 35в. То же, что на рис. 35а. $\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2}\right) = 82,8 \text{ Е}$, относительно сферы радиуса $R_2 = 4909,7 \text{ км}$, сечение изолиний через 100 м.

Коэффициенты этого разложения определяются соотношениями (3.5). Положив в (3.51) $\rho = R_0 = 1738,0$ км, построим поверхность равной силы тяжести ($\bar{g}_0 = 162718$ мГал), которая изображена на рис. 34а в виде изолиний высот относительно сферы радиуса $R_0 = 1738,0$ км. Ондюляция высот поверхности равной силы тяжести больше, чем высот селеноида. Высоты достигают 1500 м. Еще больше должны быть ондуляции высот поверхности, равной радиальному градиенту силы тяжести $\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2}$ (рис. 35 а). Далее рассмотрим, как изменится поверхность, на которой сила тяжести равна половине первоначально принятой \bar{g}_0 , а именно $\bar{g}_1 = 81\,356$ мГал. Изолинии высот этой поверхности относительно сферы радиуса $R_1 = 2454,82$ км изображены на рис. 34 б. При $\bar{g}_2 = \frac{1}{8} \bar{g}_0 = 20\,340$ мГал была построена еще одна изосиловая поверхность относительно сферы радиуса $R_2 = 4909,7$ км (рис. 34 в). Аналогично изосиловым поверхностям были построены поверхности равного радиального градиента силы тяжести $\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2}$ для тех же расстояний от центра масс Луны $R_1 = 2454,82$ км и $R_2 = 4909,7$ км. Относительно сферы радиуса R_1 высоты поверхности равного градиента $\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2} = 162,8 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-2}\right)$ изменяются в пределах 3000 м (рис. 35 б), а относительно сферы радиуса R_2 $\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2} = 82,8 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-2}\right)$ уже в пределах 300 м (рис. 35 в). Если вблизи лунной поверхности изменения высот поверхности равного радиального градиента были на порядок больше, чем изменения высот поверхности равной силы тяжести, то на высоте $R_2 = 4909,7$ км они становятся одинаковыми. Это подтверждение того, что аномалии радиального градиента силы тяжести быстро убывают с расстоянием от Луны.

§ 26. Аномалии гравитационного поля Луны

Аномальная часть гравитационного поля образуется после исключения из наблюдаемого реального гравитационного поля Луны его нормальной части. Аномальная

часть обусловлена плотностными неоднородностями недр Луны и неправильностями ее фигуры. Именно, аномальная часть представляет наибольший интерес на современном этапе гравитационного изучения Луны. Естественный ход развития науки состоит в том, что сначала устанавливаются основные общие особенности того или иного явления. По мере совершенствования методики и техники измерений открываются возможности изучения «тонкой» структуры объекта или явления. По аномалиям гравитационного поля определяются особенности внутреннего строения и детали фигуры Луны. Выделение гравитационных аномалий (потенциала, силы тяжести, градиентов силы тяжести и пр.) — достаточно условная операция в том смысле, что величина аномалий зависит от того, как выбрано нормальное поле. То в нормальную часть включены одни гармоники разложения гравитационного поля, то другие, или рассматривается нормальная Луна в виде эллипсоида вращения, трехосного эллипсоида или принята модель шаровой Луны. Все эти обстоятельства учитываются при использовании и интерпретации конкретных гравитационных аномалий. Выше уже неоднократно упоминалось о возмущающем потенциале $T(\rho, \varphi, \lambda)$, который определяется как разность реального потенциала силы тяжести (1.27) и нормального (3.28):

$$T(\rho, \varphi, \lambda) = W(\rho, \varphi, \lambda) - \bar{W}(\rho, \varphi, \lambda). \quad (3.53)$$

В общем виде все аномалии силы тяжести можно записать так:

$$\Delta g(\rho, \varphi, \lambda) = g(\rho, \varphi, \lambda) - \gamma(\rho, \varphi, \lambda) + \delta g(\rho, \varphi, \lambda), \quad (3.54)$$

где γ — нормальная, g — наблюдаемая (измеренная) силы тяжести, δg — редуцированная поправка, от структуры которой зависит характер вычисляемой аномалии Δg . В одних случаях δg учитывает различие влияния рельефа, в других осуществляет приведения наблюдаемой, измеренной или обеих сил тяжести к другой поверхности и т. д. Нормальная сила тяжести $\gamma(\rho, \varphi, \lambda)$ в произвольных точках пространства может вычисляться по формуле (3.39). Если же используется нормальная сила тяжести $\gamma(\varphi, \lambda)$ (3.41), соответствующая поверхности нормальной Луны, то необходимы некоторые дополнительные редукции. Величину $\gamma(\rho, \varphi, \lambda)$ представим в виде разложения

в ряд по степеням высот H над поверхностью нормальной Луны и ограничимся первыми тремя членами разложения:

$$\gamma(\rho, \varphi, \lambda) = \gamma(\varphi, \lambda) + H \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right)_0 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2} \right)_0 + \dots,$$

где $\gamma(\varphi, \lambda)$ — нормальная сила тяжести на поверхности нормальной Луны, $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right)_0 = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \rho^2}$ и $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \rho^3}$ — первый и второй радиальные градиенты нормальной силы тяжести (или *первые и вторые нормальные радиальные градиенты силы тяжести*). Их значения уже приводились в табл. 20. Для поверхности, отстоящей от центра масс на расстояние $R_0 = 1738$ км,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right)_0 &= -0,18677 \text{ мГал/м,} \\ \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2} \right)_0 &= 322,4^{-9} \text{ мГал/м}^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

Для сравнения напомним, что для Земли средний вертикальный градиент силы тяжести равен $-0,3086$ мГал/м. Несмотря на то, что масса Луны в 81,3 раза меньше массы Земли, вертикальный градиент силы тяжести на Луне из-за ее меньшего радиуса меньше земного всего только в полтора раза.

Наиболее широкое применение могут иметь так называемые *аномалии силы тяжести в свободном воздухе*. Они получаются как разность измеренной и нормальной силы тяжести в одной и той же точке

$$\begin{aligned} \Delta g(\rho, \varphi, \lambda) &= g(\rho, \varphi, \lambda) - \gamma(\rho, \varphi, \lambda) = \\ &= g(\rho, \varphi, \lambda) - (\gamma(\rho, \varphi) - 0,1874H + 162 \cdot 10^{-9}H^2), \end{aligned}$$

где H — в метрах, Δg , g , γ — мГал. Эти аномалии силы тяжести мы будем в дальнейшем обозначать

$$\Delta g(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{\partial T(\rho, \varphi, \lambda)}{\partial \rho} = T_\rho(\rho, \varphi, \lambda), \quad (3.56)$$

где T — возмущающий потенциал (3.53).

Смысл вычисления аномалий в свободном воздухе состоит в том, что измеренные значения силы тяжести

оказываются приведенными к одинаковым условиям с точки зрения высот относительно центра масс Луны.

Для изучения распределения аномальных масс в недрах Луны необходимо исключить гравитационное влияние всех масс, за исключением искомым аномальных масс. Прежде всего необходимо учесть влияние неровностей рельефа физической поверхности Луны. Для этого через точку наблюдения мысленно проводится горизонтальная плоскость. Поскольку основное влияние оказывает рельеф в ближайшей окрестности точки наблюдения, вычисляется гравитационное влияние масс, составляющих «избыток» выше и недостаток ниже упомянутой плоскости. В обоих случаях массы приуменьшают наблюдаемую силу тяжести, поэтому поправка за гравитационное влияние рельефа всегда положительна. Таким образом, после введения поправки за рельеф как бы осуществлена «засыпка» недостатка масс между рельефом и плоскостью и «скрытие» масс, выступающих выше плоскости. Теперь в каждой точке наблюдения как бы существует эффект притяжения от бесконечного плоского слоя масс, толщина которого зависит от высоты рельефа в данной точке. Притяжение такого слоя толщины H и плотности σ в точке на расстоянии h от ее верхней грани получим, определив нижеследующий интеграл:

$$\delta g_{\Pi}(0, 0, h) = G\sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{(H + h - z) r \, d\psi \, dr \, dz}{[r^2 + (H + h - z)^2]^{3/2}} = 2\pi G\sigma H. \quad (3.57)$$

Здесь использована цилиндрическая система координат r, ψ, z с началом на нижней грани плоского слоя и осью z , проходящей через точку наблюдения. За нижнюю грань слоя принимают единый уровень, совпадающий с поверхностью нормальной Луны.

Выражение (3.57) показывает интересное свойство притяжения плоского слоя. Оно, оказывается, не зависит от расстояния h точки наблюдения от слоя, а зависит только от толщины слоя H и плотности σ . Подставив в правую часть (3.57) вместо π и G их числовые значения, получим

$$\delta g_{\Pi} = 0,0418\sigma H, \quad (3.58)$$

где σ выражено в г/см^3 , H — в м, δg — в мГал.

Аномалия силы тяжести, в которой помимо поправки в свободном воздухе введена поправка, исключаящая притяжение плоского слоя масс между лунной поверхностью и поверхностью нормальной Луны, называется *аномалией силы тяжести Буге* (аномалией Буге)

$$\Delta g_B(\rho, \varphi, \lambda) = g(\rho, \varphi, \lambda) - \gamma(\varphi, \lambda) - 0,1871H + 0,0418\sigma H. \quad (3.59)$$

Она названа именем французского ученого, применявшего ее в своих гравиметрических исследованиях во время знаменитой экспедиции в Южную Америку в середине XVIII в. По идее аномалии Буге должны отражать распределение только аномальных масс в недрах Луны, так как в них учтено различие высот точек наблюдения, различие влияния рельефа и плоских слоев масс между лунной поверхностью и поверхностью нормальной Луны. В практике гравиметрического изучения фигуры Земли большое применение имеют так называемые смешанные аномалии силы тяжести. Хотя их значение для Луны не столь велико, тем не менее следует о них здесь упомянуть. Отличие их от аномалий в свободном воздухе состоит в том, что измеренное и нормальное значения силы тяжести относятся к различным поверхностям: измеренное — к поверхности селеноида, а нормальное — к поверхности нормальной Луны, что можно представить следующим образом:

$$\Delta g_s(\rho, \varphi, \lambda) = g(\xi, \varphi, \lambda) - \gamma(\varphi, \lambda), \quad (3.60)$$

где ξ — высота селеноида над поверхностью нормальной Луны.

Из аномалий вторых производных гравитационного потенциала наибольший интерес представляют аномалии радиального градиента силы тяжести, которые мы будем определять как разность наблюдаемого и нормального радиальных градиентов силы тяжести

$$T_{\rho\rho} = \frac{\partial g}{\partial \rho} - (1874 - 0,0022H) \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-2}. \quad (3.61)$$

(Второй член в скобках учитывает изменение нормального градиента с высотой H , отсчитываемой от сферы радиуса $R = 1738$ км в километрах.)

Аномалии второго радиального градиента силы тяжести следует определять по формуле

$$T_{\rho\rho\rho} = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} - \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2} \right)_0. \quad (3.62)$$

Ввиду малости $\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2} \right)_0$ (3.55) аномалии $T_{\rho\rho\rho}$ практически равны величине $\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}$. При использовании вторых и третьих производных потенциала более существенное значение приобретает влияние рельефа. Плоскопараллельный однородный слой на них не влияет. На Луне, в отличие от Земли, аномалии вторых производных гравитационного потенциала достигают больших значений. Судя по детальным измерениям лучевых ускорений с КА «Аполлон» и измерению профиля силы тяжести с помощью Лунохода «Аполлона-17», аномалии вторых производных достигают сотен Этвеш (10^{-9} с^{-2}).

§ 27. Связь между коэффициентами разложения различных характеристик гравитационного поля и фигуры Луны

Рассмотрим, как связаны между собой обобщенные сферические функции одного и того же порядка для различных характеристик фигуры и гравитационного поля Луны. Но прежде оценим величину δ различия радиальной производной потенциала силы тяжести $\frac{\partial V}{\partial \rho}$ и силы тяжести g (3.12) в одной и той же точке:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\partial W(\rho, \varphi, \lambda)}{\partial \rho} - g(\rho, \varphi, \lambda) = \\ &= - \frac{\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2}{2 \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)}. \end{aligned}$$

В числителе правой части этого равенства стоят квадраты горизонтальных компонент притяжения, касательных к меридианам и параллелям. Положив, например, каждую из них равной максимально возможной величине 500 мГал, легко подсчитать, что $\delta = 0,25 \text{ мГал}$.

Таким образом, практически все выводы, связанные с величиной $\frac{\partial W}{\partial \rho}$, полностью относятся к силе тяжести g . Используя разложение для потенциала силы тяжести Луны (1.27) и радиальных производных от потенциала силы тяжести (3.1), (3.4) и (3.10), пренебрегая в последних нелинейными членами и приливоцентробежными слагаемыми, составим таблицу множителей (табл. 24), с по-

Т а б л и ц а 24

Множители трансформации для сферических гармоник различных радиальных производных потенциала притяжения

	V_n	$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_n$	$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\right)_n$	$\left(\frac{\partial^3 V}{\partial \rho^3}\right)_n$
V_n	1	$-\frac{\rho}{n+1}$	$\frac{\rho^2}{(n+1)(n+2)}$	$\frac{\rho^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$
$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_n$	$-\frac{n+1}{\rho}$	1	$-\frac{\rho}{n+1}$	$\frac{\rho^2}{(n+2)(n+3)}$
$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\right)_n$	$\frac{(n+1)(n+2)}{\rho^2}$	$-\frac{(n+2)}{\rho}$	1	$-\frac{\rho}{n+3}$
$\left(\frac{\partial^3 V}{\partial \rho^3}\right)_n$	$-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{\rho^3}$	$\frac{(n+2)(n+3)}{\rho^2}$	$-\frac{n+3}{\rho}$	1

мощью которой, имея коэффициенты разложения одной радиальной производной потенциала притяжения Луны, легко определить коэффициенты разложения другой производной. Для этого достаточно гармонические коэффициенты первого разложения умножить на соответствующие множители, которые приведены в таблице. Эти множители мы будем называть *множителями трансформации*. Например, заданы гармонические коэффициенты разложения силы тяжести g_{nm} и h_{nm} . Чтобы по ним определить гармонические коэффициенты K_{nm} и M_{nm} разложения радиального градиента силы тяжести $\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2}$, необходимо соответственно g_{nm} и h_{nm} умножить согласно таблице на множитель трансформации, равный $-\frac{\rho}{n+2}$. Наоборот, если даны значения K_{nm} и M_{nm} , то для определения g_{nm} и h_{nm} первые умножаются на множители трансформации $-\frac{n+2}{\rho}$. Но поскольку множитель транс-

формации для любых радиальных производных потенциала не зависит от m , на множитель трансформации практически умножается вся сумма по m , т. е. обобщенная сферическая функция, представляющая рассматриваемую производную.

Сложнее связаны гармонические коэффициенты разложений, представляющие производные не по радиальному направлению, а по φ или λ с коэффициентами разложения радиальных производных. Сложность возникает из-за того, что множители трансформации становятся зависимыми от индекса m и поэтому необходимо умножить на них каждый гармонический коэффициент под знаком суммы по m . Покажем это на примере разложения для компонент притяжения вдоль касательных к параллели и меридиану. Представляющие их обобщенные сферические функции n -го порядка имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)_n &= \\ &= \frac{GM \zeta}{\rho^2 \cos \varphi} \sum_{m=0}^n (K_{nm}^{(\lambda)} \cos m\lambda + M_{nm}^{(\lambda)} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \\ \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)_n &= \\ &= \frac{GM \zeta}{\rho^2} \sum_{m=0}^n (K_{nm}^{(\varphi)} \cos m\lambda + M_{nm}^{(\varphi)} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi). \end{aligned}$$

Чтобы определить гармонические коэффициенты этих разложений $K_{nm}^{(\lambda)}$, $M_{nm}^{(\lambda)}$, $K_{nm}^{(\varphi)}$, $M_{nm}^{(\varphi)}$, необходимо каждый из гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} разложения потенциала притяжения $W(\rho, \varphi, \lambda)$ умножить соответственно на следующие множители трансформации:

$$\left[-m \operatorname{tg} \varphi + k \frac{P_{n, m+1}(\sin \varphi)}{P_{n, m}(\sin \varphi)} \right], \quad m \left[\frac{-C_{nm} \operatorname{tg} m\lambda + S_{nm}}{C_{nm} + S_{nm} \operatorname{tg} m\lambda} \right],$$

а затем уже просуммировать по m .

Теперь рассмотрим соотношения между некоторыми характеристиками фигуры Луны и аномалиями гравитационного поля. Между возмущающим потенциалом T и высотами ζ селеноида над поверхностью нормальной Луны существует очень простая связь. Она следует из свойства уровенных поверхностей, упомянутого в § 3.

В гравиметрии принято называть *формулой Брунса* соотношение

$$\zeta = \frac{T}{\bar{\gamma}}, \quad (3.63)$$

где $\bar{\gamma}$ — средняя нормальная сила тяжести между поверхностями нормальной Земли и селеноидом. Если из наблюдений определяется не возмущающий потенциал T , а аномалии силы тяжести Δg , то надо иметь уравнения связи между этими характеристиками гравитационного поля. Напишем формулу, которая выражает смешанные аномалии силы тяжести Δg_c (ζ , φ , λ) через возмущающий потенциал T и его производную $\frac{\partial T}{\partial \rho}$, отнесенные к поверхности нормальной Луны:

$$\Delta g_c(\zeta, \varphi, \lambda) = - \left(\frac{2T}{\rho} \right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_0. \quad (3.64)$$

Теперь можно приступить к установлению множителей трансформации между основными сферическими функциями, характеризующими фигуру и гравитационное поле Луны: высоты селеноида ζ (3.63) над поверхностью нормальной Луны, смешанные аномалии силы тяжести Δg_c (3.60), возмущающий потенциал T (3.53), радиальная производная от возмущающего потенциала $\frac{\partial T}{\partial \rho}$ (3.56). Для этого представим названные характеристики в виде разложений по обобщенным сферическим функциям:

$$\Delta g_c = \sum_{n=2}^{\infty} (\Delta g_c)_n, \quad (3.65)$$

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} T_n, \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2} T_n, \quad (3.67)$$

$$\zeta = \sum_{n=2}^{\infty} \zeta_n. \quad (3.68)$$

Т а б л и ц а 25

Множители трансформации для сферических гармоник некоторых аномалий гравитационного поля и фигуры Луны

	T_n	$(\Delta g_c)_n$	$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_n$	ξ_n
T_n	1	$\frac{\rho}{n-1}$	$\frac{\rho}{n+1}$	γ
$(\Delta g_c)_n$	$\frac{n-1}{\rho}$	1	$\frac{n-1}{n+1}$	$\frac{(n-1)\gamma}{\rho}$
$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_n$	$\frac{n+1}{\rho}$	$\frac{n+1}{n-1}$	1	$\frac{(n+1)\gamma}{\rho}$
ξ	$\frac{1}{\gamma}$	$\frac{\rho}{(n-1)\gamma}$	$\frac{\rho}{(n+1)\gamma}$	1

Вводя (3.65)—(3.67) в уравнение (3.64), найдем

$$(\Delta g_c)_n = \frac{n-1}{\rho} T_n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.69)$$

Проще определяются множители трансформации между другими характеристиками, которые можно установить, используя (3.62), (3.65)—(3.71). Приведем сводную таблицу (табл. 25) множителей трансформаций, с помощью которых связаны обобщенные сферические функции аномалий гравитационного поля и фигуры Луны.

АНАЛИЗ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЛУНЫ

§ 28. Статистические характеристики в методах ковариационного анализа гравитационного поля

В последние годы в гравиметрии плодотворное развитие получила идея использования теории случайных функций. В частности, она применяется в методах оптимального разделения гравитационных полей, обусловленных различными аномалиеобразующими массами, для построения методов оптимальной фильтрации ошибок измерений. Перспективность применения статистических методов при решении задач селенодезии и селенофизики вытекает из того, что измерения величин, характеризующих гравитационное поле Луны, производятся в дискретных точках и определяются они с неизбежными ошибками. Использование же гравитационного поля при решении большинства задач селенодезии и селенофизики сводится к его интегрированию в некоторой области с определенным ядром. Областью интегрирования при решении селенодезических задач обычно является вся поверхность Луны. Возникает проблема интерполяции, экстраполяции и предсказания гравитационных аномалий в области, где отсутствуют или недостаточно измерений. Потенциальная функция, соответствующая аномальному гравитационному полю планеты, рассматривается как случайная функция координат, а данная потенциальная функция — как одна из реализаций случайной функции. Реализацией называется конкретное проявление случайной функции. Все реализации обладают одинаковыми статистическими характеристиками. Эти характеристики задают величину статистического отклонения от некоторой средней функции и показывают, как статистически связаны значения потенциальной функции в различных ее точках между собой. В дальнейших исследованиях гравитационного поля будут использоваться две основные статистические ха-

характеристики: дисперсия и ковариационная функция. Предполагается, что аномальное гравитационное поле Луны обладает свойством стационарности в широком смысле. Это предположение означает, что статистические характеристики поля Луны не зависят от координат ее поверхности. Свойство стационарности случайной функции позволяет вычислять статистические характеристики, не располагая совокупностью реализаций, а имея однуединственную реализацию. Так оно и есть в случае гравитационного поля планет, в частности, Луны.

Предположим, что задано поле аномалий силы тяжести $\Delta g(\varphi, \lambda)$ на поверхности сферической Луны (φ — широта, λ — долгота точки, где заданы аномалии). Средняя аномалия силы тяжести на Луне $\Delta \bar{g}$ равна математическому ожиданию от аномалий $\Delta g(\varphi, \lambda)$:

$$\Delta \bar{g} = M \{ \Delta g(\varphi, \lambda) \} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta g(\varphi, \lambda) \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda. \quad (4.1)$$

Здесь интегрирование ведется по сфере единичного радиуса. Случайная функция не содержит постоянной составляющей, поэтому аномалии $\Delta g(\varphi, \lambda)$ должны быть центрированы. Ее математическое ожидание равно нулю:

$$M \{ \Delta g(\varphi, \lambda) \} = 0. \quad (4.2)$$

В разложении гравитационного поля Луны в ряд по сферическим функциям должна быть равна нулю гармоника нулевого порядка.

Если рассмотреть математическое ожидание от квадрата аномалий $\Delta g(\varphi, \lambda)$, удовлетворяющих условию (4.2), то получим дисперсию аномалий силы тяжести:

$$D_{\Delta g} = M \{ [\Delta g(\varphi, \lambda)]^2 \} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [\Delta g(\varphi, \lambda)]^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda. \quad (4.3)$$

Дисперсия характеризует диапазон вариаций значений аномалий силы тяжести, поэтому величину (4.3) еще называют вариацией аномалий силы тяжести. Корень квадратный из дисперсии — среднее квадратическое значение аномалий силы тяжести:

$$M \{ \Delta g \} = \pm \sqrt{D_{\Delta g}}.$$

При использовании гравитационного поля возникает потребность знать, как сильна связь (корреляция) между последовательными значениями гравитационных аномалий. Рассмотрим математическое ожидание произведения аномалий силы тяжести $\Delta g(\mathcal{P})$ и $\Delta g(\mathcal{P}_1)$ для каждой пары точек $\mathcal{P}(\varphi, \lambda)$ и $\mathcal{P}_1(\varphi_1, \lambda_1)$, разделенных полярным расстоянием ψ :

$$M\{\Delta g(\mathcal{P})\Delta g(\mathcal{P}_1)\} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Delta g(\mathcal{P})\Delta g(\mathcal{P}_1) dS, \quad (4.4)$$

где S — поверхность единичной сферы. Полученное среднее произведение аномалий будем называть *ковариацией* аномалий силы тяжести для расстояния ψ . Ковариация характеризует статистическую связь величин, определяющих гравитационное поле в парах точек, разделенных угловым расстоянием ψ . Рассматривая ковариацию как функцию ψ , получим *ковариационную функцию*

$$K_{\Delta g}(\psi) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Delta g(\varphi, \lambda)\Delta g(\varphi, \lambda, \psi) dS, \quad (4.5)$$

где φ, λ — текущие координаты \mathcal{P} ; φ, λ, ψ — координаты точки \mathcal{P}_1 , отстоящей от \mathcal{P} на угловом расстоянии ψ . Обозначение (φ, λ, ψ) эквивалентно обозначению (φ_1, λ_1) . Ковариационная функция показывает, как изменяется с угловым расстоянием ψ корреляция между аномалиями в разных точках.

Для $\psi = 0$ ковариационная функция $K_{\Delta g}(0)$ становится равной дисперсии:

$$D_{\Delta g} = \frac{1}{4\pi} \iint_S [\Delta g(\varphi, \lambda)]^2 dS. \quad (4.6)$$

Для анализа гравитационного поля удобно использовать аппарат статистических и спектральных представлений [54], [56], [57], [61], [67], [70] и др.

Для этого рассмотрим ковариационную функцию для случая, когда гравитационный потенциал (возмущающий потенциал) представлен в виде разложения в ряд по сферическим функциям. Для потенциала без учета малых приливоцентробежных членов имеем

$$T(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM_{\zeta}}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n T_n(\varphi, \lambda),$$

где

$$T_n(\varphi, \lambda) = \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \quad (4.7)$$

— поверхностная сферическая функция порядка n . Случайными функциями являются гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} . Они предполагаются центрированными и между собой не коррелирующими. Ковариационная функция $K_{T_n}(\psi)$ для функции T_n равна

$$\begin{aligned} K_{T_n}(\psi) &= M \{T_n(\varphi, \lambda) T_n(\varphi, \lambda, \psi)\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} T_n(\varphi, \lambda) T_n(\varphi, \lambda, \psi) \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda, \quad (4.8) \end{aligned}$$

где $T_n(\varphi, \lambda)$ — значения сферической функции в текущей точке (φ, λ) поверхности единичной сферы, $T_n(\varphi, \lambda, \psi)$ — то же, но в точке, отстоящей от первой на угловом расстоянии ψ . Ковариационная функция $K_{T_n}(\psi)$ является детерминированной функцией угла ψ . Если бы в подынтегральном выражении равенства (4.8) было произведение сферических функций T_n и T_k различных порядков, то выполнялось бы условие

$$M \{T_n(\varphi, \lambda) T_k(\varphi, \lambda, \psi)\} = 0 \quad \text{при } n \neq k,$$

что означает, что сферические функции различных порядков не коррелируют и статистически независимы.

Если рассмотреть (4.8) при $\psi = 0$, то получим дисперсию гармоник гравитационного потенциала порядка n

$$(D_T)_n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [T_n(\varphi, \lambda)]^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda. \quad (4.9)$$

Вместо $T_n(\varphi, \lambda)$ в последнем равенстве подставим его выражение (4.7):

$$\begin{aligned} (D_T)_n &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ &\quad \left. + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right]^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Используя (1.32) вместо (4.10), получим

$$(D_T)_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{(2-\delta_m)(n-m)!} (C_{nm}^2 + S_{nm}^2).$$

Имея в виду (1.34), выразим дисперсию $(D_T)_n$ сферических гармоник T_n порядка n гравитационного потенциала через нормированные гармонические коэффициенты \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm}

$$(D_T)_n = \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2). \quad (4.11)$$

$(D_T)_n$ называют *порядковой дисперсией* гравитационного потенциала n -го порядка. Величина $(D_T)_n$, рассматриваемая как функция n , характеризует спектр частот рассматриваемого гравитационного поля, т. е. она является некоторым аналогом спектральной плотности, используемой в обычном спектральном анализе. Иногда вместо $(D_T)_n$ применяется следующее соотношение:

$$(\sigma_T)_n = \sqrt{\frac{(D_T)_n}{2n+1}}, \quad (4.12)$$

которое имеет смысл среднего квадратического значения для одной элементарной гармоники порядка n , входящей в состав поверхностной сферической функции $T_n(\varphi, \lambda)$ (4.7).

Функция $T_n(\varphi, \lambda)$ состоит из $(2n+1)$ элементарных сферических функций вида $\cos m\lambda P_{nm}(\sin \varphi)$, $\sin m\lambda P_{nm}(\sin \varphi)$. Если $(D_T)_n$ — порядковая дисперсия гармоник гравитационного потенциала только n -го порядка, то дисперсия, включающая все гармоники аномального гравитационного потенциала Луны, будет равна сумме

$$D_T = \sum_{n=2}^{\infty} (D_T)_n. \quad (4.13)$$

Размерные порядковые дисперсии $(\bar{D}_T)_n$ и размерные дисперсии \bar{D}_T , выраженные в единицах квадрата гравитационного потенциала планеты, получаются умножением соответственно $(D_T)_n$ и D_T на $\left(\frac{GM}{R}\right)^2$:

$$(\bar{D}_T)_n = (D_T) \left(\frac{GM}{R}\right)^2, \quad \bar{D}_T = D_T \left(\frac{GM}{R}\right)^2.$$

Для того чтобы получить выражение ковариационной функции $K_{T_n}(\psi)$, подставим в (4.8) вместо $T_n(\varphi, \lambda)$ и $T_n(\varphi, \lambda, \psi)$ их выражения вида (4.7), предварительно пронормировав коэффициенты C_{nm} и S_{nm} :

$$K_{T_n}(\psi) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \times \right. \\ \times \sqrt{\frac{(2 - \delta_m)(2n + 1)(n - m)!}{(n + m)!}} P_{nm}(\sin \varphi) \left. \right] \times \\ \times \left[\sum_{m_1=0}^n (\bar{C}_{nm_1} \cos m_1\lambda_1 + \bar{S}_{nm_1} \sin m_1\lambda_1) \times \right. \\ \times \left. \sqrt{\frac{(2 - \delta_{m_1})(2n + 1)(n - m_1)!}{(n + m_1)!}} P_{nm_1}(\sin \varphi_1) \right] dS, \quad (4.14)$$

где

$$\delta_m = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq 0 \\ 1 & \text{при } m = 0 \end{cases} \quad - \text{символ Кронекера,}$$

а интегрирование ведется по поверхности единичной сферы.

В результате перемножения функций в квадратных скобках подынтегрального выражения (4.14) получим сумму интегралов. Часть из них равна нулю в силу свойства ортогональности сферических функций. В итоге останется следующее выражение:

$$K_{T_n}(\psi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^n \frac{(2 - \delta_m)(2n + 1)(n - m)!}{(n + m)!} \times \\ \times \iint_S (\bar{C}_{nm}^2 \cos m\lambda \cos m\lambda_1 + \bar{S}_{nm}^2 \sin m\lambda \sin m\lambda_1) \times \\ \times P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi_1) dS. \quad (4.15)$$

Допущение об изотропности поля аномалий потенциала притяжения Луны означает, что ковариационная функция, соответствующая рассматриваемому потенциалу, зависит только от взаимного расстояния ψ между парами точек лунной сферы и не зависит от направления

их взаимного расположения на лунной сфере. Ю. М. Нейман в работе [24] показал, что необходимым и достаточным условием для изотропности поля является равенство между собой дисперсий всех коэффициентов C_{nm} и S_{nm} , входящих в сферическую функцию одного и того же порядка n . Формально это условие записывается так:

$$\bar{C}_{n0} = \bar{C}_{n1} = \dots = \bar{C}_{nm} = \bar{S}_{n1} = \bar{S}_{n2} = \dots = \bar{S}_{nm} = (\sigma_T)_n, \quad (4.16)$$

где $(\sigma_T)_n$ — среднее квадратическое значение (4.12) дисперсии для элементарной сферической функции порядка n . Условие (4.16) показывает, что дисперсия коэффициентов не зависит от индекса m , представляющего степень сферических функций. Если использовать условие (4.16), а также теорему сложения сферических функций, согласно которой

$$\sum_{m=0}^n \frac{(2 - \delta_m)(n - m)!}{(n + m)!} P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi_1) \cos m(\lambda - \lambda_1) = P_n(\cos \psi),$$

где ψ — центральный угол между радиусами-векторами точек лунной сферы, координаты которых (φ, λ) и (φ_1, λ_1) , то выражение (4.15) для ковариационной функции приводится после интегрирования к следующему простому виду:

$$K_{T_n}(\psi) = (2n + 1)(\bar{\sigma}_T)_n^2 P_n(\cos \psi). \quad (4.17)$$

Это выражение представляет ковариационную функцию для элементарной сферической функции n -го порядка возмущающего потенциала T_n Луны. Ковариационную функцию для всего возмущающего потенциала T получим, найдя сумму по всем гармоникам вида

$$K_T(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} (D_T)_n P_n(\cos \psi). \quad (4.18)$$

Таким образом, ковариационная функция $K_T(\psi)$ возмущающего потенциала выражается через его порядковые дисперсии $(D_T)_n$. Наоборот, умножив обе части равенства (4.18) на $P_n(\cos \psi) \sin \psi$ и проинтегрировав в пределах от 0 до π , найдем выражение для порядковых дисперсий $(D_T)_n$ возмущающего потенциала, если из-

вестна его ковариационная функция $K_T(\psi)$

$$(D_T)_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi K_T(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (4.19)$$

Подчеркнем еще раз, что равенства (4.18) и (4.19) получены в предположении, что поле возмущающего потенциала притяжения Луны изотропно. Формулы (4.11), (4.18), (4.19) относятся к случаю, когда порядковые дисперсии и ковариационные функции вычисляются на поверхности лунной сферы радиуса R . В случае необходимости знания этих характеристик на поверхности сферы радиуса $\rho > R$ надо порядковые дисперсии $(D_T)_n$ умножить на $\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2}$. Так, вместо формул (4.18) и (4.19) получим соответственно

$$K_T(\psi, \rho) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} (D_T)_n P_n(\cos \psi), \quad (4.20)$$

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} (D_T)_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi K_T(\psi, \rho) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (4.21)$$

Из того, что $\left(\frac{R}{\rho}\right) < 1$, следует, что роль высокочастотной части гравитационного поля в ковариационной функции $K_T(\psi, \rho)$ и в полной дисперсии D_T уменьшается с высотой.

Если предположить, что пары точек \mathcal{P} и \mathcal{P}_1 относятся к сферам разного радиуса ρ и ρ_1 , то формулы (4.20) и (4.21) несколько изменяются. Расширение на пространство, внешнее по отношению к Луне, не вносит существенного усложнения. Очевидно, ковариационная функция и в этом случае является гармонической функцией по отношению к каждой из пар точек $\mathcal{P}(\rho, \varphi, \lambda)$, $\mathcal{P}_1(\rho_1, \varphi_1, \lambda_1)$, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа по координатам каждой из этих точек. Пусть угловое расстояние между этими точками по-прежнему равно ψ . Пространственная ковариационная функция для возмущающего потенциала в этом случае равна

$$K_T(\psi, \rho, \rho_1) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R^2}{\rho_1 \rho}\right)^{n+1} (D_T)_n P_n(\cos \psi), \quad (4.22)$$

а вместо (4.21) будем иметь

$$\left(\frac{R^2}{\rho_1 \rho}\right)^{n+1} (D_T)_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi K_T(\psi, \rho, \rho_1) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (4.23)$$

Здесь по-прежнему $(D_T)_n$ — порядковая дисперсия потенциала для точек поверхности сферической Луны. Для пространственной ковариационной функции аномалий силы тяжести аналогично найдем

$$K_{\Delta g}(\psi, \rho, \rho_1) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R^2}{\rho_1 \rho}\right)^{n+2} (D_{\Delta g})_n P_n(\cos \psi), \quad (4.24)$$

а для порядковых дисперсий —

$$\left(\frac{R^2}{\rho_1 \rho}\right)^{n+2} (D_{\Delta g})_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi K_{\Delta g}(\psi, \rho, \rho_1) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi, \quad (4.25)$$

где $(D_{\Delta g})_n$ — порядковые дисперсии аномалий силы тяжести на поверхности сферической Луны.

При необходимости знания дисперсий гравитационного потенциала в формулах (4.21) и (4.23) в единицах квадрата гравитационного потенциала надо обе части названных равенств умножить на $\left(\frac{GM}{R}\right)^2$. Аналогично для получения дисперсии в единицах квадрата силы тяжести обе части равенства (4.25) умножаются на $\left(\frac{GM}{R^2}\right)^2$.

В следующем параграфе рассмотрим как, имея дисперсии и ковариационные функции для одних производных гравитационного потенциала, найти их для других производных.

§ 29. Порядковые дисперсии и ковариационные функции различных характеристик гравитационного поля и фигуры Луны

Аналитическая связь между порядковыми дисперсиями D_{T_n} и ковариационной функцией K_{T_n} для возмущающего гравитационного потенциала и соответствующими порядковыми дисперсиями и ковариационными функциями для

других характеристик гравитационного поля и фигуры Луны, в частности, для смешанных аномалий силы тяжести Δg_c , аномального радиального градиента силы тяжести $T_{\rho\rho}$, аномального второго радиального градиента силы тяжести $T_{\rho\rho\rho}$, может быть просто получена, если использовать выведенные нами выше множители трансформаций (см. табл. 24, 25). Для определения размерных порядковых дисперсий перечисленных характеристик по заданным дисперсиям $(D_T)_n$ достаточно последние умножить на квадраты множителей трансформации и на $\left(\frac{GM}{R}\right)^2$:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{D}_{\Delta g_c})_n &= \sum_{m=0}^n \left(\frac{n-1}{R}\right)^2 (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) \left(\frac{GM}{R}\right)^2, \\ (\bar{D}_{T_\rho})_n &= \sum_{m=0}^n \left(\frac{n+1}{R}\right)^2 (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) \left(\frac{GM}{R}\right)^2, \\ (\bar{D}_{T_{\rho\rho}})_n &= \sum_{m=0}^n \left(\frac{(n+1)(n+2)}{R^2}\right)^2 (\bar{C}_{nm}^2 + \\ &\quad + \bar{S}_{nm}^2) \left(\frac{GM}{R}\right)^2, \\ (\bar{D}_{T_{\rho\rho\rho}})_n &= \sum_{m=0}^n \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{R^3}\right)^2 (\bar{C}_{nm}^2 + \\ &\quad + \bar{S}_{nm}^2) \left(\frac{GM}{R}\right)^2. \end{aligned} \right\} (4.26)$$

Используя множители трансформации, можно получить такие же простые соотношения, связывающие порядковые дисперсии характеристик гравитационного поля с заданными порядковыми дисперсиями аномалий силы тяжести $(\bar{D}_{T_\rho})_n$.

Для определения ковариационных функций различных характеристик гравитационного поля обратимся к равенству (4.19). При этом несколько обобщим формулы в том смысле, что они будут справедливы для сферы радиуса $\rho > R$, где R — радиус лунной сферы. Предполагается, что порядковые дисперсии соответствующих характеристик $(D_{\Delta g})_n$, $(D_{T_\rho})_n$, $(D_{T_{\rho\rho}})_n$, $(D_{T_{\rho\rho\rho}})_n$ или порядковые дисперсии $(D_T)_n$ аномального гравитационного потенциала известны на лунной сфере. Для названных характеристик

гравитационного поля мы получили сводку следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 K_{\Delta g_c}(\psi, \rho) &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} \left(\frac{n-1}{\rho}\right)^2 (D_T)_n P_n(\cos \psi) = \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} (D_{\Delta g_c})_n P_n(\cos \psi), \\
 K_T(\psi, \rho) &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} (D_T)_n P_n(\cos \psi), \\
 K_{T_\rho}(\psi, \rho) &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} \left(\frac{n+1}{\rho}\right)^2 (D_T)_n P_n(\cos \psi) = \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} (D_{T_\rho})_n P_n(\cos \psi), \\
 K_{T_{\rho\rho}}(\psi, \rho) &= \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{\rho^2}\right)^2 (D_T)_n P_n(\cos \psi) = \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} (D_{T_{\rho\rho}})_n P_n(\cos \psi), \\
 K_{T_{\rho\rho\rho}}(\psi, \rho) &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{\rho^3}\right)^2 \times \\
 &\times (D_T)_n P_n(\cos \psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} (D_{T_{\rho\rho\rho}})_n P_n(\cos \psi).
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ковариационные функции $K_{\Delta g_c}(\psi)$, $K_T(\psi)$, $K_{T_\rho}(\psi)$, $K_{T_{\rho\rho}}(\psi)$, $K_{T_{\rho\rho\rho}}(\psi)$ на лунной сфере получаются как частные случаи выражений (4.27), если положить в них $\rho = R$.

Выражения (4.26) и (4.27) дополним формулами для размерных порядковых дисперсий высот уровенной поверхности, которые относятся к сфере радиуса ρ

$$(\bar{D}_z)_n = \frac{1}{\gamma^2} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) \left(\frac{GM}{\rho}\right)^2. \tag{4.28}$$

Ковариационная функция для высот этой уровенной поверхности приобретает вид

$$K_{\zeta}(\psi, \rho) = \frac{1}{\gamma^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} (D_T)_n P_n(\cos \psi) = \\ = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2} (D_{\zeta})_n P_n(\cos \psi), \quad (4.29)$$

где $(D_T)_n$ — порядковые дисперсии возмущающего потенциала, $(D_{\zeta})_n$ — порядковые дисперсии высот уровенной поверхности относительно лунной сферы. Если задать порядковые дисперсии $(D_{T\rho})_n$ аномалий силы тяжести $\frac{\partial T}{\partial \rho}$, тогда, используя соответствующий множитель трансформации из табл. 25, вместо формул (4.28) и (4.29) мы получим

$$(\bar{D}_{\zeta})_n = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n} \left(\frac{\rho}{n+1}\right)^2 (D_{T\rho})_n \left(\frac{GM}{\rho}\right)^2, \quad (4.30)$$

$$K_{\zeta}(\psi, \rho) = \frac{1}{\gamma^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n} \left(\frac{\rho}{n+1}\right)^2 (D_{T\rho})_n P_n(\cos \psi). \quad (4.31)$$

Итак, в общем виде, согласно Х. Моритцу [65], [67] любая трансформация, т. е. вывод одной характеристики гравитационного поля или фигуры из другой, представляет собой воздействие на заданную потенциальную функцию f некоторого линейного оператора L . Определяемая характеристика гравитационного поля или фигуры Луны равна

$$F(\mathcal{P}) = L(\mathcal{P}, \mathcal{M})f(\mathcal{M}),$$

где \mathcal{P} — точка, в которой определяется характеристика F , \mathcal{M} — текущая точка, в которой заданы значения потенциальной функции f . Оператор L зависит от координат обеих точек \mathcal{M} и \mathcal{P} . Напишем аналогичное преобразование для другой характеристики Φ , определяемой по тем же исходным данным f , но с другим оператором преобразования N

$$\Phi(Q) = N(Q, K)f(K).$$

Теперь поставим задачу определить ковариацию между различными характеристиками гравитационного поля или фигуры Луны, т. е. между F и Φ ,

$$K_{F\Phi}(\psi) = M \{F(\mathcal{P})\Phi(Q)\} = \\ = L(\mathcal{P}, \mathcal{M})N(Q, K)M \{f(\mathcal{M})f(K)\},$$

где ψ — угловое расстояние между текущими точками \mathcal{M} и K .

Ковариация между двумя различными характеристиками гравитационного поля или фигуры Луны выражается через ковариационную функцию $K_f(\psi)$ исходной характеристики так:

$$K_{F\Phi}(\psi) = L(\mathcal{P}, \mathcal{M})N(Q, K)K_f(\mathcal{M}, K) = \\ = L(\mathcal{P}, \mathcal{M})N(Q, K)K_f(\psi). \quad (4.32)$$

Х. Моритц уравнение (4.32) называет *законом распространения ковариации*.

Рассмотрим теперь ковариационную функцию $K_{\zeta T_{\rho\rho}}(\psi)$ для конкретных характеристик [67], для высот ζ селеноида и вертикального градиента силы тяжести $T_{\rho\rho}$ на поверхности сферической Луны, предполагая, что известна ковариационная функция $K_T(\psi)$ для возмущающего потенциала T . Достаточно даже знать только порядковые дисперсии $(D_T)_n$ для возмущающего потенциала, ибо, используя (4.27), можно определить $K_T(\psi)$. Перепишем формулу Брунса (3.63), выражающую высоты ζ селеноида через возмущающий потенциал T , а также напомним выражение для радиального градиента силы тяжести $T_{\rho\rho}$ также через T :

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}, \quad T_{\rho\rho} = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}. \quad (4.33)$$

Отсюда следует, что роль оператора в первом уравнении (4.33) играет сомножитель при T , равный $\frac{1}{\gamma}$, а во втором — производная $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}$. Далее следует эти операторы распространить на ковариационную функцию $K_T(\psi)$

$$K_{\zeta T_{\rho\rho}}(\psi) = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} K_T(\psi, \rho, \rho_1) \right]_{\rho=R}. \quad (4.34)$$

Подставляя вместо $K_T(\psi, \rho, \rho_1)$ его выражение (4.22) и проведя дифференцирование, получим искомую ковариационную функцию

$$K_{\zeta T \rho \rho}(\psi) = \frac{1}{\gamma R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2)(D_T)_n P_n(\cos \psi). \quad (4.35)$$

Последнее равенство показывает, что ковариацию $K_{\zeta T \rho \rho}(\psi)$ можно вычислить, зная порядковые дисперсии $(D_T)_n$ возмущающего потенциала T для лунной сферы.

В качестве другого примера рассмотрим ковариационную функцию $K_{\Delta g_c, \zeta}(\psi)$ при условии, что известна порядковая дисперсия $(D_T)_n$ возмущающего потенциала T . Уравнения связи между функциями ζ и Δg_c и возмущающим потенциалом T следующие:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}, \quad \Delta g_c = -\frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{2T}{\rho}. \quad (4.36)$$

Роль оператора трансформации для первого уравнения (4.36), как и в предыдущем примере, играет сомножитель $\frac{1}{\gamma}$. Во втором уравнении таким является производная $-\frac{\partial}{\partial \rho}$ в первом слагаемом и сомножитель $-\frac{2}{\rho}$ — во втором. Тогда получим

$$K_{\Delta g_c, \zeta}(\psi) = \left[-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \rho} K_T(\psi, \rho, \rho_1) - \frac{2}{\gamma \rho} K_T(\psi, \rho, \rho_1) \right]_{\rho=\rho_1=R}.$$

Дифференцируя $K_T(\psi, \rho, \rho_1)$ (4.22) и подставляя в последнее равенство, получим выражение для ковариационной функции смешанных аномалий силы тяжести Δg_c и высот селеноида ζ в виде

$$K_{\Delta g_c, \zeta}(\psi) = \frac{1}{R\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(D_T)_n P_n(\cos \psi). \quad (4.37)$$

И в этом случае $K_{\Delta g_c, \zeta}(\psi)$ выражается через порядковые дисперсии $(D_T)_n$ возмущающего потенциала T .

В некоторых случаях удобнее выводить ковариационные функции и выражения для порядковых дисперсий, используя соотношение вида (4.5), где вместо функции Δg должны быть интересующие нас потенциальные функции.

§ 30. Порядковые дисперсии для горизонтальных составляющих притяжения Луны

Рассмотрим порядковые дисперсии для горизонтальных составляющих притяжения по направлениям касательных к меридианам и параллелям. Выражения для горизонтальных составляющих ускорения силы тяжести были выведены в § 20. Горизонтальные составляющие притяжения, которые обозначим через V_φ и V_λ , получим, если в формулах (3.2) и (3.3) пренебрежем приливоцентрическими членами.

Напишем выражения для поверхностных сферических функций n -го порядка для составляющих притяжения V_φ и V_λ :

$$\left. \begin{aligned} (V_\varphi)_n &= \left(\frac{\partial V}{\rho \partial \varphi} \right)_n = \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d \sin \varphi} \cos \varphi, \\ (V_\lambda)_n &= \left(\frac{\partial V}{\rho \cos \varphi \partial \lambda} \right)_n = \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{m=0}^n m (-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda) \frac{P_{nm}(\sin \varphi)}{\cos \varphi}, \end{aligned} \right\} (4.38)$$

где C_{nm} и S_{nm} — гармонические коэффициенты разложения потенциала притяжения Луны.

Определим порядковые дисперсии $(D_{V_\varphi})_n$ и $(D_{V_\lambda})_n$:

$$\left. \begin{aligned} (D_{V_\varphi})_n &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} [(V_\varphi)_n]^2 d\lambda dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ &\quad \left. + S_{nm} \sin m\lambda) \frac{dP_{nm}(t)}{dt} \right]^2 (1 - t^2) d\lambda dt, \end{aligned} \right\} (4.39)$$

$$\begin{aligned}
 (D_{V\lambda})_n &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} [(V\lambda)_n]^2 d\lambda dt = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{m=0}^n m (-C_{nm} \sin m\lambda + \right. \\
 &\quad \left. + S_{nm} \cos m\lambda) P_{nm}(t) \right]^2 \frac{1}{1-t^2} d\lambda dt,
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

где $t = \sin \varphi$.

Рассмотрим интегрирование последних двух равенств отдельно по t и по λ . Интегрирование по λ дает

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \sin m_1 \lambda \cos m \lambda d\lambda &= \int_0^{2\pi} \sin m_1 \lambda \sin m \lambda d\lambda = \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos m_1 \lambda \cos m \lambda d\lambda = 0, \\
 \int_0^{2\pi} \cos^2 m \lambda d\lambda &= \begin{cases} 2\pi & m = 0 \\ \pi & m \neq 0 \end{cases}, \\
 \int_0^{2\pi} \sin^2 m \lambda d\lambda &= \begin{cases} 0 & m = 0, \\ \pi & m \neq 0 \end{cases}, \\
 \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right]^2 d\lambda = \\
 &= \sum_{m=0}^n (C_{nm}^2 + S_{nm}^2) \begin{cases} 2\pi & m = 0 \\ \pi & m \neq 0 \end{cases}, \\
 \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m=0}^n m (-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda) \right]^2 d\lambda = \\
 &= \sum_{m=0}^n m^2 (C_{nm}^2 + S_{nm}^2) \pi.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Используя рекуррентные соотношения между присоединенными функциями Лежандра

$$(1-t^2) \frac{dP_{nm}(t)}{dt} = -ntP_{n+1}(t) + (n+m)P_{n-1,m}(t),$$

$$(2n + 1)tP_{nm}(t) = \\ = (n - m + 1)P_{n+1,m}(t) + (n + m)P_{n-1,m}(t),$$

можно получить следующие два соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{nm}^2(t)}{1-t^2} dt &= \frac{1}{m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \\ \int_{-1}^{+1} \left(\frac{dP_{nm}(t)}{dt} \right)^2 (1-t^2) dt &= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left[\frac{2n(n+1)}{2n+1} - m \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Используя (4.40) и (4.41), получим выражения для порядковых дисперсий горизонтальных компонент притяжения V_φ и V_λ :

$$\left. \begin{aligned} (D_{V_\varphi})_n &= \frac{n(n+1)}{2n+1} C_{n0}^2 + \\ &+ \frac{1}{4(2n+1)} \sum_{m=1}^n \frac{(n+m)!}{(n-m)!} [2n(n+1) - \\ &\quad - (2n+1)m] (C_{nm}^2 + S_{nm}^2), \\ (D_{V_\lambda})_n &= \frac{1}{4} \sum_{m=1}^n m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (C_{nm}^2 + S_{nm}^2). \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Используя нормированные гармонические коэффициенты \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} , можно написать следующие выражения для порядковых дисперсий:

$$\left. \begin{aligned} (D_{V_\varphi})_n &= n(n+1) \bar{C}_{n0}^2 + \\ &+ \sum_{m=1}^n \frac{2n(n+1) - (2n+1)m}{2} (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2), \\ (D_{V_\lambda})_n &= \frac{2n+1}{2} \sum_{m=1}^n m (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2). \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Порядковая дисперсия для полной горизонтальной составляющей притяжения, равной $V_l = \sqrt{V_\varphi^2 + V_\lambda^2}$,

определяется по следующей формуле:

$$(D_{V_i})_n = n(n+1) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2). \quad (4.44)$$

Формулы (4.43) и (4.44) без всяких преобразований пригодны для оценки порядковых дисперсий уклонений отвеса в квадратных радианах. Для перевода в квадраты угловых секунд необходимо умножить обе части (4.43) и (4.44) на $\left(\frac{1}{206\,265}\right)^2$.

Полученная нами формула (4.44) полностью совпадает с аналогичной формулой для оценки дисперсий полного уклонения отвеса, выведенной без аппарата ковариационного анализа совершенно другим методом еще в работе М. С. Молоденского и др. [23].

Очевидно, порядковые дисперсии для горизонтальных компонент притяжения уже не будут инвариантными по отношению к повороту осей координат. Более простыми оказываются формулы для производных $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$. Так, вместо (4.38) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_n &= \\ &= \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d \sin \varphi} \cos \varphi, \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)_n &= \\ &= \sum_{m=0}^n m (-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Порядковые дисперсии для этих производных равны [36]

$$\left. \begin{aligned} (D_{\frac{\partial V}{\partial \varphi}})_n &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{dP_{nm}(t)}{dt} \right]^2 d\lambda dt = \\ &= \sum_{m=0}^n [n(n+1) - m^2] (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2), \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

$$\left. \begin{aligned} (D \frac{\partial V}{\partial \lambda})_n &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{m=0}^n m (-C_{nm} \sin m\lambda + \right. \\ &+ S_{nm} \cos m\lambda) P_{nm}(t) \left. \right]^2 d\lambda dt = \sum_{m=0}^n m^2 (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2). \end{aligned} \right\} (4.46)$$

§ 31. Сравнительный анализ лунного и земного гравитационных полей

Теперь остановимся на общей характеристике гравитационного поля Луны. Для этого обратимся к табл. 26 значений нормированных гармонических коэффициентов разложения потенциала силы тяжести, соответствующих Луне и Земле. Обращают на себя внимание следующие три обстоятельства:

1. Значения безразмерных гармонических коэффициентов, кроме C_{20} для Луны, которые в конечном итоге ха-

Таблица 26

Значения нормированных гармонических коэффициентов разложения гравитационных потенциалов Луны (по Э. Л. Акиму и З. П. Власовой, 1977 г. вариант — 4) и Земли, в 10^{-6}

	\bar{C}_{20}	\bar{C}_{21}	\bar{S}_{21}	\bar{C}_{22}	\bar{S}_{22}	\bar{C}_{30}	\bar{C}_{31}	\bar{S}_{31}
Луна	-89,89	0,155	5,267	41,83	-0,929	-1,172	27,59	6,481
Земля	-487,2	0	0	2,4	-1,4	1,3	2,0	0,3
	\bar{C}_{32}	\bar{S}_{32}	\bar{C}_{33}	\bar{S}_{33}	\bar{C}_{40}	\bar{C}_{41}	\bar{S}_{41}	\bar{C}_{42}
Луна	8,49	12,88	-17,21	-41,59	2,800	-7,168	3,373	3,578
Земля	0,9	-0,6	0,7	1,4	0,5	-0,5	-0,5	0,3
	\bar{S}_{42}	\bar{C}_{43}	\bar{S}_{43}	\bar{C}_{44}	\bar{S}_{44}	\bar{C}_{50}	\bar{C}_{60}	\bar{C}_{70}
Луна	-4,475	-6,693	0	-4,733	9,466	-2,533	1,165	8,624
Земля	0,7	1,0	-0,2	0	0,3	0	0	-0,1

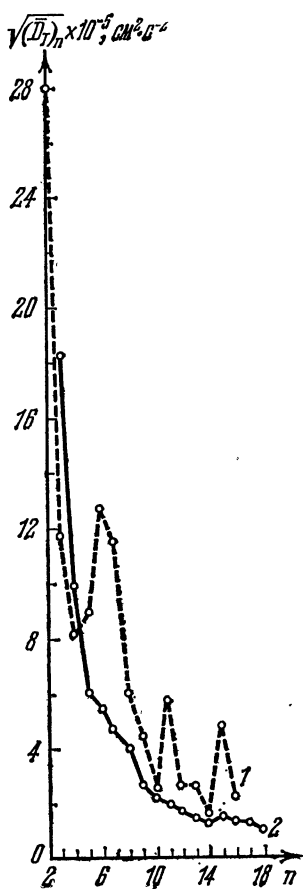


Рис. 36. Изменения средних квадратических значений сферических гармоник гравитационных потенциалов Луны и Земли в зависимости от порядков гармоник n . 1 — Луна, гармонические коэффициенты Феррари (1977). 2 — Земля, гармонические коэффициенты из Стандартной Земли III.

рактически характеризуют относительную неоднородность ее гравитационного поля, почти на порядок больше соответствующих коэффициентов для Земли.

2. Для Луны нет ярко доминирующих над всеми остальными гармоническими коэффициентами. Так, для Земли коэффициент C_{20} на два с половиной порядка больше остальных, в то время как для Луны он только в несколько раз больше других.

3. Значения гармонических коэффициентов для Земли убывают с номером n , для Луны после некоторого убывания обнаруживается их возрастание.

Используя нормированные гармонические коэффициенты \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} гравитационного потенциала Луны и Земли, исследуем порядковые дисперсии и ковариационные функции для различных гравитационных аномалий. На рис. 36 представлены графики изменения размерных средних квадратических значений $\sqrt{(\bar{D}_T)_n}$ сферических гармоник гравитационного потенциала в зависимости от порядка n для Луны и Земли. Как видно из графиков, $\sqrt{(\bar{D}_T)_n}$ монотонно убывает для Земли, а для Луны наблюдается упомянутое выше возрастание гармоник более высокого порядка. Эти аномалии $\sqrt{(\bar{D}_T)_n}$ — следствие наличия в недрах аномальных масс

типа масконов. Они имеют характерные размеры, соответствующие приблизительно таким порядкам, в которых наблюдается аномалия дисперсий.

Интересно рассмотреть, как изменяются с порядком n для Луны и Земли порядковые дисперсии вторых производных потенциала, а конкретно аномалий радиального

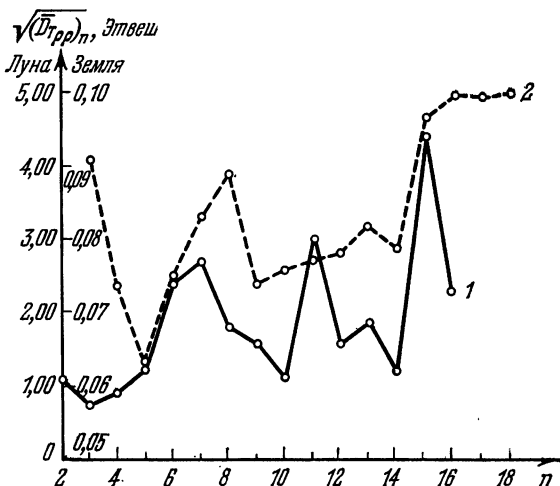


Рис. 37. Изменения средних квадратических значений сферических гармоник радиальных градиентов силы тяжести Земли и Луны в зависимости от порядков гармоник n . 1 — Земля, гармонические коэффициенты из Стандартной Земли III, 2 — Луна, гармонические коэффициенты Феррари (1977).

градиента силы тяжести $T_{\rho\rho}$. На рис. 37 изображены графики изменения размерных средних квадратических значений сферических гармоник $\sqrt{(\overline{D_{T_{\rho\rho}}})_n}$, соответствующих радиальному градиенту силы тяжести в зависимости от порядка n . Одна из кривых соответствует Земле, а другая — Луне.

Сравнивая соответствующие кривые на рис. 36 и 37, можно заключить, что гармоники возмущающего потенциала $(T)_n$ более высоких порядков имеют на Луне большие величины, чем на Земле, и это в еще большей степени относится к гармоникам радиального градиента силы тяжести $(T_{\rho\rho})_n$. Исследуем, как изменяются порядковые

дисперсии возмущающего потенциала T и аномального радиального градиента силы тяжести $T_{\rho\rho}$ Луны по мере удаления от ее поверхности. Для этого были вычислены средние квадратические значения сферических функций n -х порядков для возмущающего потенциала $\sqrt{(\overline{D}_T)_n}$ и для второго радиального градиента потенциала $\sqrt{(\overline{D}_{T_{\rho\rho}})_n}$

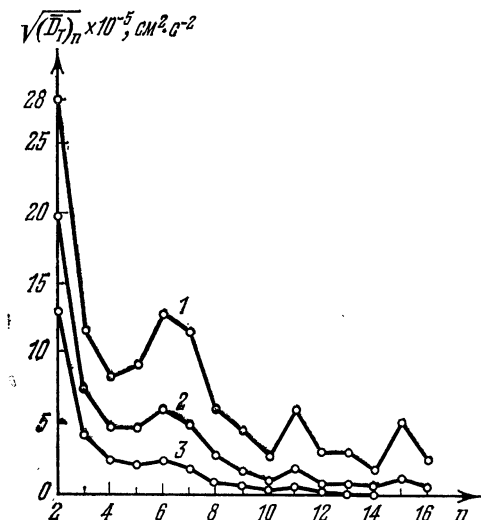


Рис. 38. Изменения средних квадратических значений сферических гармоник гравитационного потенциала Луны в зависимости от порядков гармоник n и высоты над лунной поверхностью. 1 — на высоте 0 км, 2 — на высоте 100 км, 3 — на высоте 500 км.

для различных высот H над лунной поверхностью. Использовались соотношения (4.26), (4.12) при $\rho = R + H$. Результаты расчетов представлены на рис. 38 и 39. На первом рисунке изменение $\sqrt{(\overline{D}_T)_n}$ в зависимости от n дано для $H = 0, 100, 5000$ км, а на втором $\sqrt{(\overline{D}_{T_{\rho\rho}})_n}$ для $H = 0, 100, 500$ км. Графики показывают, как и следовало ожидать, более быстрое убывание с высотой гармоник более высоких порядков. Если $\sqrt{(\overline{D}_T)_n}$ для возмущающего потенциала T на высоте $H = 100$ км уменьшилось по сравнению с поверхностью на $\sim 2\%$, то $\sqrt{(\overline{D}_{T_{\rho\rho}})_n}$ для радиального градиента оно уменьшается на 15% .

Очевидно, что еще более быстро будет убывать с высотой и с порядком n радиальный градиент силы тяжести $\sqrt{(\bar{D}_{T_{pp}})_n}$. Это наглядно видно на рис. 39.

Проанализируем характер изменения порядковых дисперсий $(\bar{D}_{V_{\varphi}})_n$ и $(\bar{D}_{V_{\lambda}})_n$ (4.43), соответствующих широтной

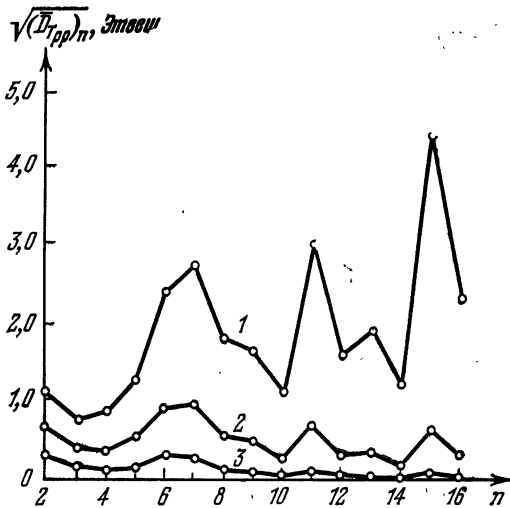


Рис. 39. Изменения средних квадратических значений сферических гармоник радиального градиента силы тяжести в зависимости от порядков гармоник n и высоты над лунной поверхностью. 1 — на высоте 0 км, 2 — на высоте 100 км, 3 — на высоте 500 км.

и долготной компонентам притяжения V_{φ} и V_{λ} для Луны и Земли. Обращает на себя внимание интересная особенность гравитационного поля Луны (рис. 40). Обнаруживается систематическое различие $\sqrt{(\bar{D}_{V_{\varphi}})_n}$ и $\sqrt{(\bar{D}_{V_{\lambda}})_n}$ для всех рассмотренных порядков. Это различие можно интерпретировать как показатель того, что поле Луны более спокойно при ее пересечении вдоль параллелей и более изменчиво вдоль меридианов. Порядковые дисперсии для горизонтальных компонент притяжения Земли тоже показывают аналогичную закономерность (рис. 41). Известно, что вращение Земли, Луны и других планет вокруг своей оси вызывает полярное сжатие этих планет, проявляющееся в гравитационном поле в виде зональных сфе-

рических гармоник. При условии гидростатического равновесия гравитационное поле содержит только четные зональные сферические функции. Возможно, что наблюдающееся в распределении гравитационного поля небольшое преобладание его широтного изменения над долготным

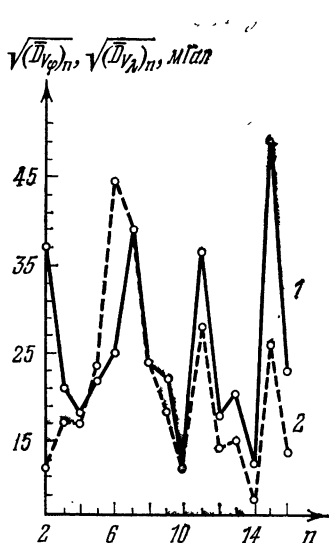


Рис. 40. Изменения средних квадратических значений сферических гармоник составляющих притяжения касательных к Луне в зависимости от порядка гармоник n . 1 — касательные к меридианам, 2 — касательные к параллелям. Использованы гармонические коэффициенты Феррари (1977).

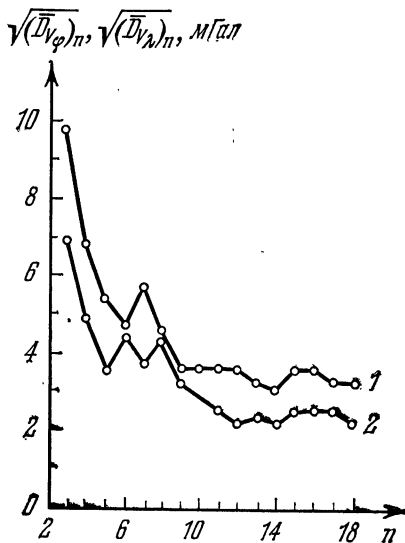


Рис. 41. Изменения средних квадратических значений сферических гармоник составляющих притяжения касательных к Земле в зависимости от порядков гармоник n . 1 — касательные к меридианам, 2 — касательные к параллелям.

есть проявление состояния гидростатической равновесности Луны и Земли.

При анализе общего гравитационного поля иногда необходимо иметь представление о законе изменения порядковых дисперсий при больших значениях порядка n , которые из наблюдений еще не получены. Потребность в

этом возникает при оценке величины высокочастотной части гравитационного поля и его влияния на ковариационную функцию, на определение высот селеноида, вычисления различных производных гравитационного потенциала и т. д. Возможно построение некоторых экстраполяционных формул.

В. Каула [60] предположил, что на Луне, как и на Земле, породы способны выдерживать примерно одинаковые напряжения. Исходя из этого, он нашел, что порядковые дисперсии гравитационного потенциала Луны $(D_{T_{\zeta}})_n$ и Земли $(D_{T_{\oplus}})_n$ связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} (D_{T_{\zeta}})_n &= \\ &= \left(\frac{M_{\oplus}}{M_{\zeta}}\right)^2 \left(\frac{R_{\zeta}}{R_{\oplus}}\right)^4 (D_{T_{\oplus}})_n = \\ &= 35 (D_{T_{\oplus}})_n. \quad (4.47) \end{aligned}$$

Каула предложил рассчитывать порядковые дисперсии для потенциала Луны по соответствующим порядковым дисперсиям Земли, определяемым из гравиметрических и спутниковых наблюдений. На рис. 42 изображены кривые изменения размерных средних квадратических значений сферических гармоник радиальной производной потенциала Луны $\sqrt{(\overline{D}_{T_{\rho}})_n}$, в зависимости от порядка n . Одна из кривых соответствует модели гравитационного поля Луны, построенной по наблюдениям ИСЛ Феррари [46]. Другая кривая рассчитана по теоретическому методу Каулы. Используя порядковые дисперсии $(\overline{D}_{T})_n$

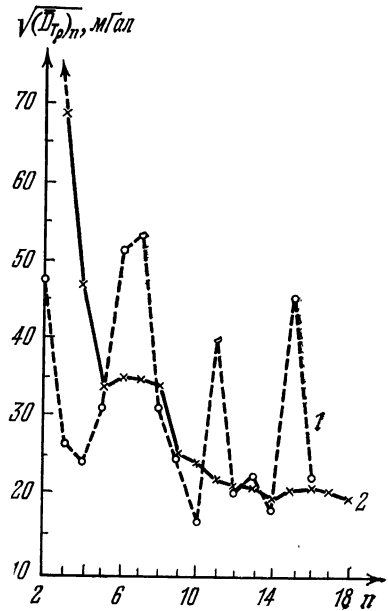


Рис. 42. Изменения средних квадратических значений сферических гармоник радиальной производной потенциала притяжения $\sqrt{(\overline{D}_{T_{\rho}})_n}$ Луны в зависимости от порядка гармоник n . 1 — по гармоническим коэффициентам Феррари (1977). 2 — по теоретической формуле Каулы (4.47.)

возмущающего гравитационного потенциала Земли (Стандартная Земля-III), на основании соотношения (4.47) Феррари подсчитал порядковые дисперсии для потенциала Луны. Затем согласно (4.26) были рассчитаны порядковые дисперсии для радиальной производной потенциала Луны $(\bar{D}_{T\rho})_n$, на основании которых построен второй из названных графиков. Сравнение кривых показывает, что наблюдаемая кривая достаточно хорошо согласуется с теоретической, что подтверждает априорное предположение Каулы (4.47). Из-за вкравшейся в работе [46] неточности в аналогичные кривые нельзя было видеть упомянутого согласия кривых.

Иногда полезно иметь численно-аналитическое описание изменения порядковых дисперсий. В частности, Каула предлагал представлять средние квадратические значения сферических гармоник радиального градиента потенциала Луны в виде

$$\sqrt{(\bar{D}_{T\rho})_n} = 175,43 n^{-1,09} \text{ мГал.} \quad (4.48)$$

Теперь рассмотрим корреляционные функции для различных производных гравитационного потенциала Луны и изучим их изменения, сравнивая в некоторых случаях с аналогичными величинами для Земли. Корреляционную функцию, которая устанавливает статистическую связь в парах точек, разделенных угловым расстоянием ψ , или линейным расстоянием τ для какой-нибудь одной функции, называют *автокорреляционной функцией*. Часто используют нормированную автокорреляционную функцию

$$K^0(\psi) = \frac{K(\psi)}{K(0)}, \quad (4.49)$$

т. е. автокорреляционную функцию, отнесенную к дисперсии. Условно принимается, что радиус корреляции равен угловому расстоянию ψ_0 , при котором $K^0(\psi)$ равна 0,3. Практически при радиусах корреляции, больших ψ_0 , корреляции нет.

На рис. 43 изображены автокорреляционные функции $K_T^0(\psi)$ для возмущающих гравитационных потенциалов Луны и Земли. Намечается одинаковый общий характер изменений функций $K_T^0(\psi)$. Область отрицательных

значений функций $K_T^0(\psi)$ находится в области $45^\circ < \psi < 120^\circ$. Несущественно различаются и минимумы функций. Но, имея в виду различие радиусов Луны и Земли, можно сказать о меньшей автокорреляции по расстоянию поля Земли, чем Луны. С удалением от аномальных масс гравитационное поле все более сглаживается,

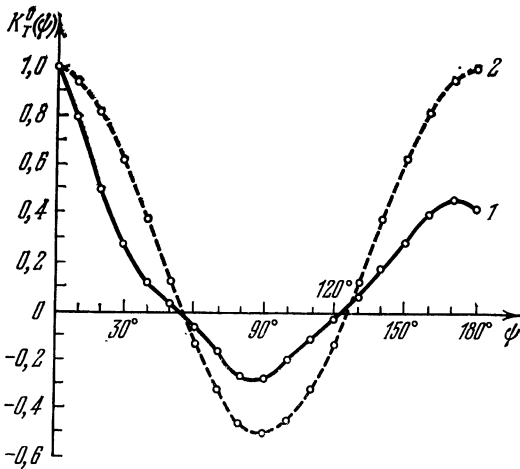


Рис. 43. Нормированные автокорреляционные функции $K_T^0(\psi)$ гравитационных потенциалов Луны и Земли. 1 — Луна, использованы гармонические коэффициенты Феррари (1977), 2 — Земля.

его автокорреляционная функция делается более плавной функцией, потому что с удалением от Луны уменьшается роль более высокочастотных гармоник, составляющих ее гравитационное поле. Последнее обстоятельство проявляется в усугубленном виде для более высоких производных гравитационного потенциала. Чтобы проиллюстрировать количественно это утверждение, были подсчитаны автокорреляционные функции для различных производных возмущающего гравитационного потенциала Луны (возмущающего потенциала T , радиальной составляющей притяжения T_r , радиального градиента силы тяжести T_{rr}) для двух сферических поверхностей с радиусами $R = 1738$ км и $R = 2738$ км. Результаты этих расчетов представлены на графиках рис. 44.

Следует заметить, что для большинства приложений требуется знать ковариационную функцию $K(\psi)$ достаточно грубо. Она используется в вычислениях, результаты которых не столь критичны к точности знания $K(\psi)$. Ковариационная функция, равно как и порядковые дисперсии, определяется более устойчиво, чем сами исходные

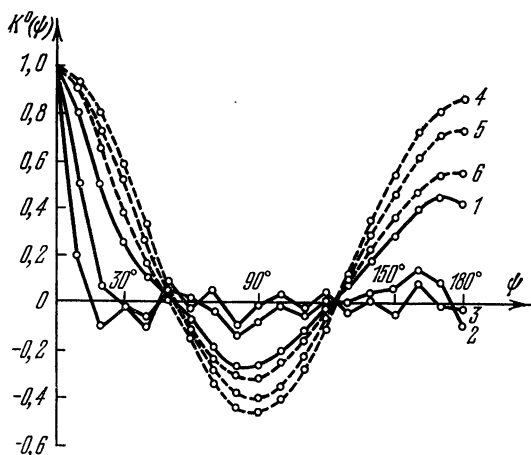


Рис. 44. Нормированные автокорреляционные функции $K^0(\psi)$ на сферической поверхности радиуса $R = 1738,0$ км: 1 — возмущающего потенциала T , 2 — радиальной составляющей притяжения T_ρ , 3 — второго радиального градиента потенциала $T_{\rho\rho}$; на сферической поверхности радиуса $R = 2738,0$ км: 4 — возмущающего потенциала T , 5 — радиальной составляющей притяжения T_ρ , 6 — второго радиального градиента потенциала $T_{\rho\rho}$. Использованы гармонические коэффициенты Феррари (1977).

гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} в различных моделях гравитационного поля Луны. На рис. 45 представлены автокорреляционные функции гравитационного потенциала, вычисленные для моделей гравитационного поля Луны, построенных различными авторами по различным исходным данным. Можно видеть одинаковый общий закон изменения автокорреляционных функций.

Автокорреляционные функции, а также порядковые дисперсии, определенные по имеющимся коэффициентам разложения гравитационного поля в ряд по сферическим функциям, являются сильно сглаженными. Они не учиты-

вают высокочастотной части гравитационного поля, которая, несомненно, имеет особенности, не проявляющиеся на приведенных графиках автокорреляционных функций.

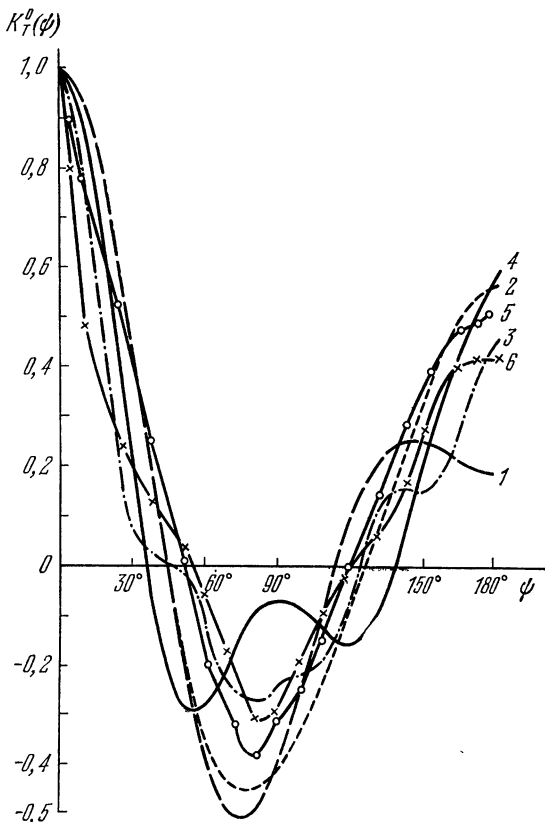


Рис. 45. Нормированные автокорреляционные функции $K^0(\psi)$ гравитационного потенциала моделей Луны, построенных различными авторами: 1 — Акимом (1966), 2 — Лореллом (1970), 3 — Лиу и Лайнгом (1971), 4 — Толсоном и Гапцинским (1968), 5 — Акимом и Власовой (1977), 6 — Феррари (1977).

Для Луны была сделана попытка построения автокорреляционной функции по результатам детальных доплеровских измерений лучевых ускорений «Аполлона-14», где лучевые ускорения относились к небольшим высотам десятки километров) и имели точность 10 мГал. Расчет

автокорреляционной функции $K_{\Gamma}(\tau)$ производился по формуле

$$K_{\Gamma}(\tau) \approx \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \Gamma(x) \Gamma(x + \tau) dx. \quad (4.50)$$

Значения $\Gamma(x)$ в (4.50) предварительно были центра-

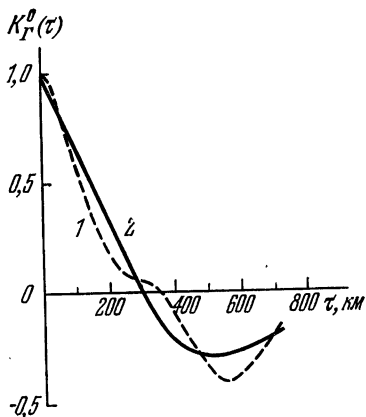


Рис. 46. Нормированные автокорреляционные функции $K_{\Gamma}^0(\tau)$ для лучевых ускорений Γ . 1 — вычисленная по измеренному «Аполлоном-14» профилю ускорений Γ , 2 — аппроксимированная численно-аналитической формулой.

лизованы. Профиль со значениями $\Gamma(x)$ имел длину более 1800 км. Вычисленная нормированная автокорреляционная функция $K_{\Gamma}^0(\tau)$ показана на рис. 46. Приведенная автокорреляционная функция приблизительно равна автокорреляционной функции для аномалий силы тяжести на Луне. Так же как и для порядковых дисперсий, ковариационная функция, полученная эмпирически, аппроксимируется той или иной простой численно-аналитической формулой. Так, в работе [61] для $K_T(\psi, \rho, \rho_1)$ предлагается использовать следующее выражение:

$$K_T(\psi, \rho, \rho_1) = A \left[\left(\frac{\rho \rho_1}{\rho_0^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{\rho \rho_1}{\rho_0^2} \right) \cos \psi - 1 \right]^{-1/2}, \quad (4.51)$$

где A и ρ_0 — параметры, определяемые из аппроксимации эмпирической кривой уравнением (4.51). Это выражение представляет некоторое обобщение для ковариационной функции в том смысле, что оно применимо к случаю, когда ковариация ищется между двумя функциями, заданными на сферах разных радиусов ρ_1 и ρ_2 . Более сложного вида аппроксимирующая функция предлагается в [62]. Для аппроксимации эмпирической кривой автокорреляционной функции $K_{\Gamma}^0(\tau)$, изображенной на рис. 46,

использовалось простое выражение

$$K_{\Gamma}^0(\tau) = e^{-k\tau} \cos \omega\tau, \quad (4.52)$$

где k , ω — параметры, подлежащие определению. Определив по способу наименьших квадратов эти параметры, для эмпирической автокорреляционной функции мы получили следующее численно-аналитическое представление:

$$K_{\Gamma}^0(\tau) = e^{-0,00213\tau} \cos 0,00512\tau, \quad (4.53)$$

где τ — в км. Из этого соотношения следует, что для рассмотренных лунных аномалий $\Gamma(x)$ радиус корреляции равен $\tau_0 = 150$ км. Конечно, автокорреляционная функция, вычисленная по отдельным профилям, не является представительной для всей Луны. Хорошо известно для земного гравитационного поля, как сильно различаются статистические характеристики для областей с различной тектоникой (платформенных, геосинклинальных областей, впадин, горных хребтов и пр.) [27].

§ 32. Сравнение видимой и обратной сторон Луны

Непосредственно с Земли наблюдениям доступно 59% лунной поверхности. Из них постоянно видны 41%; а 18% оказывается видимой за счет либраций Луны, причем под сильным ракурсом. Впервые человек увидел изображение обратной стороны Луны на фотографиях, переданных с ИСЛ Луна-3 в октябре 1959 г. [1].

Обращает на себя внимание преобладание морских образований на видимой стороне. Морские породы отличаются от материковых по составу и физическому состоянию (пористости, размерам частиц и пр.). Это проявляется в наблюдаемом альбедо. Альбедо, или белизна, характеризует, какая часть перпендикулярно падающего на поверхность света отражается от нее в том же направлении. На диаграмме (рис. 47), взятой из работы [32], наглядно видно распределение морских образований на поверхности Луны. По оси абсцисс влево отложено отношение площади, занимаемой морскими структурами на видимой стороне, ко всей площади поверхности Луны, вправо — на обратной стороне. Если на видимой стороне они занимают более чем 30% поверхности, то на обратной — около 2,5%. Такое различие (более чем на порядок) не может

быть случайным. К тому же можно заметить, что морские образования сосредотачиваются больше в экваториальной области, чем возле полюсов.

Установлено различие строения круговых бассейнов на видимой и обратной сторонах Луны. Моря на видимой стороне заполнены базальтовыми излияниями, имеющим

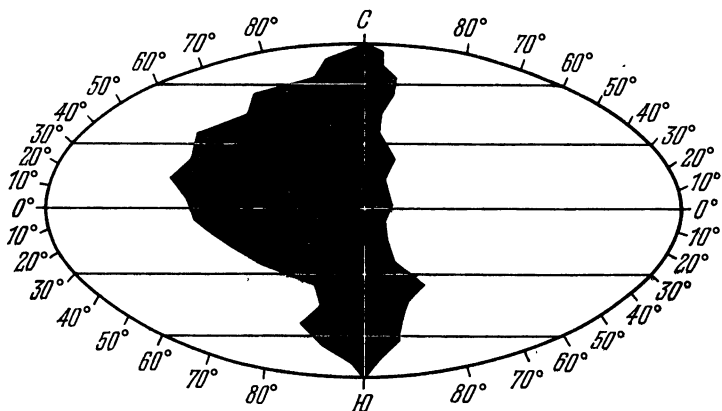


Рис. 47. Диаграмма распределения морских образований на видимой (слева) и обратной (справа) сторонах Луны в зависимости от широты.

большую плотность^х по сравнению с окружающими породами (Море Дождей, Море Ясности, Море Кризисов, Море Нектара, Море Влажности и др.). На обратной стороне имеются круговые бассейны, например: Корольев, Герцшпрунг, Москва, Аполлон и др., которые внешне мореподобны, поэтому в свое время [5] они были названы талассоидами (от греч. *thalassa* — море, *eidosis* — вид). Они имеют вид гигантских впадин круглой или овальной формы, имеющих по периферии кольцевое обрамление сбросового типа. В середине они имеют центральную плиту. Альбедо у талассоидов, как у материков, т. е. выше, чем у морских образований.

Талассоиды — более древние образования, поэтому они сильно разрушены вновь образовавшимися кратерами. Различие строения круговых бассейнов находит отражение и в гравитационном поле, о чем подробнее будет рассказано ниже. В работе [21] было замечено, что одиннадцать

Т а б л и ц а 27

Антиподальные образования на Луне

На видимой стороне	На обратной стороне
I Океан Бурь	1 Циолковский*), 1а Милн, 1в Пастер, 1с Гагарин *), 1d Менделеев
II Море Дождей	2 Море Мечты *), 2в Лейбниц, 2е Карман *)
III Море Ясности, Ша Озеро Сновидений	3 Аполлон *)
IV Море Холода	4 Планк, 4а Пуанкаре *)
V Море Спокойствия	5 Королев
VI Море Изобилия	6 Герцшпрунг *)
VII Море Нектара	7 Мах
VIII Море Кризисов, X Море Краевое, XI Море Смиа	10 Море Восточное *)
XII Море Южное	12 Лоренц
XV Море Влажности	14 Море Москвы *)
В полярных областях	
Байи Поверхность морского типа без названия к северу от Гершеля	Шварцшильд Шредингер *)

*) Образования с дном, частично залитым лавой.

больших кратерных образований (талассоиды, моря и кратеры) обратной стороны, диаметр которых более 300 км, имеют на видимой стороне соответствующие антиподы тоже в виде морей и кратеров. На рис. 48 изображена схема расположения на лунной сфере центров кратеров и морей на видимой и обратной сторонах, которые попарно симметричны относительно центра Луны (табл. 27). Моря Спокойствия, расположенному на видимой стороне, на обратной соответствует талассоид Королева, Моря Изобилия — талассоид Герцшпрунга, Моря Дождей — Море Мечты и т. д. Только кратер Биргоф, находясь в приполярной области обратной стороны (его диаметр равен 342 км), не имеет антипода, а на месте последнего распо-

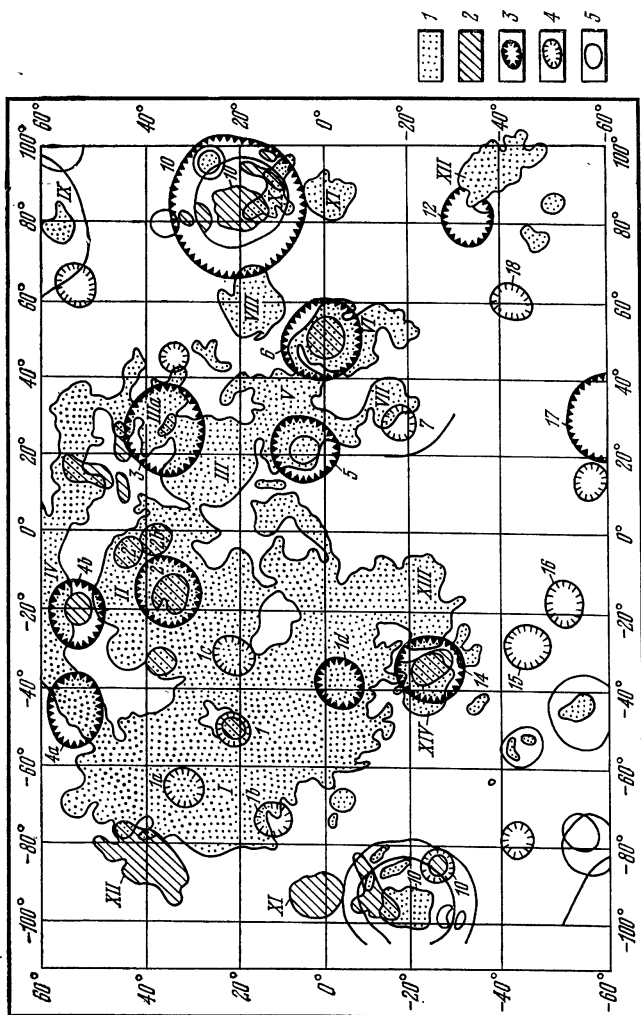


Рис. 48. Схема антиподального распределения образований морского типа: 1 — на видимой, 2 — на обратной сторонах Луны. Талассоиды и кратеры: 3 — на обратной стороне с диаметром $D > 300$ км, 4 — на обратной стороне с диаметром $D < 300$ км, 5 — на видимой стороне.

ложена возвышенная материковая область. Хотя эта особенность распределения кратерных образований не бесспорна, но на нее следует обратить внимание. На рис. 49 показаны профили высот физической поверхности Луны, полученные лазерным альтиметрированием с «Аполлонов-15 и -16» [58], [59], [73], [79]. Профили проходят через

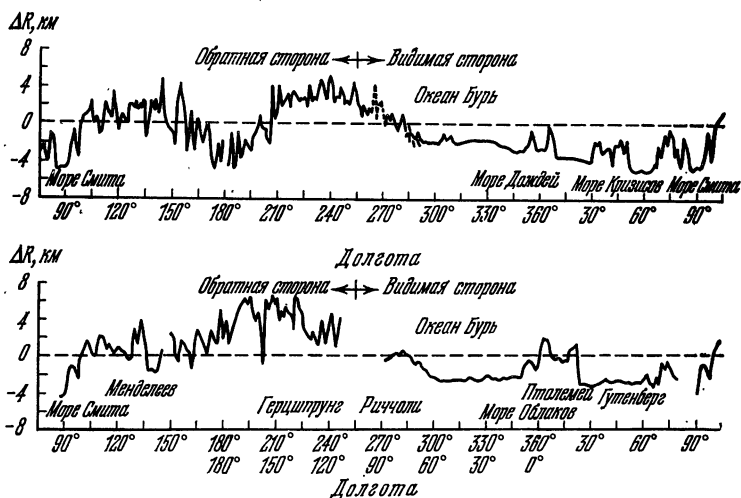


Рис. 49. Изменение высот физической поверхности видимой и обратной сторон Луны, относительно сферической Луны радиуса $R = 1738,0$ км, полученное лазерным альтиметрированием с КСМ «Аполлона-15» (вверху) и «Аполлона-16» (внизу).

видимую и обратную стороны Луны (см. рис. 24). Можно видеть четкое качественное различие высот для разных сторон, более спокойное изменение высот рельефа на видимой и резко пересеченный рельеф на обратной стороне. О рельефе Луны еще пойдет речь в следующем параграфе, где будет дополнительно отмечены его особенности.

Следует указать на существенную асимметрию внутреннего строения Луны. Установлен факт смещения центра масс Луны относительно центра фигуры по направлению к Земле примерно на 2 км и на 1 км вправо для земного наблюдателя. Этот сдвиг может быть объяснен наличием лунного ядра радиуса ~ 700 км, имеющего небольшую избыточную плотность и смещенного относительно центра

фигуры [71]. Более того, Луна имеет различную толщину коры на видимой и обратной сторонах. Ее толщина была установлена (см. § 45) по сейсмическим исследованиям в ряде точек поверхности. С помощью гравитационного поля и данных о рельефе Луны были уточнены детали строения коры на видимой стороне и определена толщина коры на обратной стороне Луны [40]. Схема строения лунной коры показывает, что в отдельных местах видимой стороны она утоньшается до 20 км, а в среднем для видимой стороны равна 60 км. На обратной стороне она достигает толщин более 100 км (рис. 50). Разумеется, различие толщин лунной коры не могло не повлиять на процессы, протекающие на поверхности, такие как образование ударных круговых бассейнов, лавовых излияний, вулканизма и пр.

Говоря о различии сторон Луны, нельзя забывать и о их большом сходстве. Мы здесь на нем не останавливаемся. Укажем только на один частный факт, свидетельствующий о связи видимой и обратной сторон Луны. Еще в начале этого столетия Ф. Франц [47] заметил своеобразие расположения крупнейших морей. Моря Изобилия, Спокойствия, Ясности, Дождей, Океан Бурь, Море Гримальди, Море Кризисов образуют пояс, наклоненный к нынешнему лунному экватору примерно на 35° . В далеком прошлом, возможно, этот пояс был экваториальным. Южным Полюсом для пояса является точка с координатами $\varphi = -50^\circ - 60^\circ$, $\lambda = -20^\circ - 30^\circ$. В полярных областях пояса расположены области с большим числом мелких кратеров и высоким альбедо. Это можно рассматривать как свидетельство того, что здесь не было тех явлений плавления, которые играют большую роль в морских областях. Фотографии обратной стороны Луны позволили проследить продолжение упомянутого пояса на ее обратной стороне. В нем расположены Море Смита, Море Мечты, талассоиды Королев, Герцшпрунг и др.

Теперь рассмотрим гравитационное поле обеих сторон Луны. В гравитационном поле должны проявляться все особенности распределения масс Луны как в ее недрах, так и на поверхности. Для того чтобы определить геометрическую фигуру обратной стороны, надо ее «увидеть». По имеющимся данным в фигуре видимой стороны, геометрическую фигуру обратной стороны никакими методами

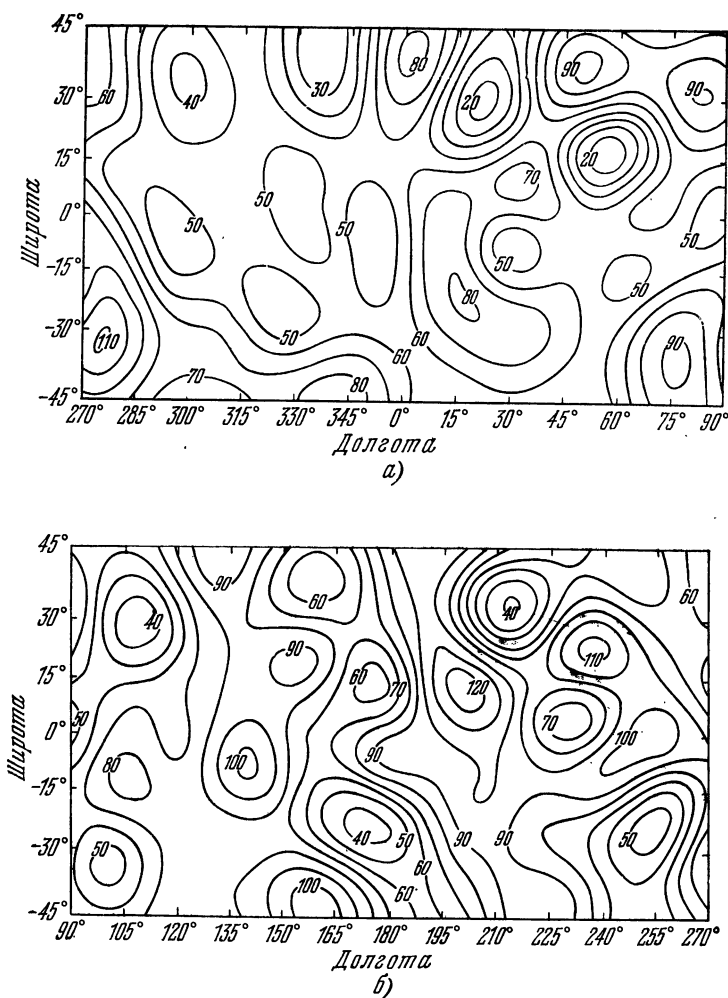


Рис. 50. Толщина лунной коры на а) видимой, б) обратной сторонах Луны. Изолинии проведены через 10 км.

воспроизвести нельзя. Другое дело — гравитационная фигура Луны. Движение ИСЛ над видимой стороной зависит от распределения масс всей Луны, в том числе и на ее обратной стороне. Наблюдая за положением ИСЛ, мы как бы «видим гравитационно» также и ее обратную сторону.

Многие прежние модели гравитационного поля Луны, будучи удовлетворительными для видимой, плохо представляли поле ее обратной стороны. Модель гравитационного поля, наилучшим образом описывающая поле обратной стороны, была построена А. Феррари [46]. Она, как уже говорилось в § 18, была выведена на основании наблюдений ИСЛ, запущенных с «Аполлонов-15 и -16», и «Лунар Орбитер-5». На карте аномалий силы тяжести А. Феррари (см. рис. 31) подтверждаются хорошо известные гравитационные аномалии над круговыми бассейнами — Морем Ясности, Морем Дождей, Морем Кризисов, Морем Нектара, Морем Влажности, Заливом Эноя. Они характеризуются большими положительными аномалиями силы тяжести. Отрицательные аномалии обнаруживаются в Океане Бурь, Море Спокойствия, Море Изобилия, Море Облаков, Море Познанном. Высокогорные области создают положительные гравитационные аномалии. Кстати, обнаруживаются новые гравитационные аномалии на плато Аристарх и на юго-запад от центра Луны (30°S , 60°E) в высокогорной области.

Другой характер имеет гравитационное поле над обратной стороной Луны. Круговые бассейны, такие как Королев, Менделеев, Москва, Аполлон, имеют строго отрицательные аномалии силы тяжести. Другие круговые бассейны (Герцшпрунг, Гагарин, Мечты, Циолковский) характеризуются меньшими, чем в окружающих областях, гравитационными аномалиями. Центральная высокогорная область создает положительные аномалии, простирающиеся на большие площади. Таким образом, различие гравитационного поля под круговыми бассейнами видимой и обратной сторон свидетельствует о глубинном различии их строения. Возможно, большая толщина лунной коры на обратной стороне приводила к тому, что при образовании впадин ударами больших метеоритов и планетезималей не происходило обильного излияния базальтов из недр. Базальтовый покров дна впадин на обратной стороне имеют только Море Москвы, Море Мечты, кратер Циолковский, частично залиты лавой кратеры Герцшпрунг, Гагарин, Аполлон. Возникший дефицит масс во впадинах восполнялся только частично. Не произошла за это время и изостатическая компенсация. Раздробление пород в местах ударов создавало отрицательные гра-

витационные аномалии. Впадины же видимой стороны чаще заполнялись более плотными базальтовыми излияниями, что и обусловило положительные гравитационные аномалии над ними.

Интересно понять, почему возникла асимметрия Луны. А. А. Михайлов, сопоставляя различие видимой и обратной сторон Луны [22], указал на три фактора возможного влияния Земли. Во-первых, во время лунных затмений температура видимой стороны может повышаться за короткое время на 200° С. Однако поверхностный слой Луны, обладающий малой теплопроводностью, не пропускает тепло внутрь Луны. Поэтому этот фактор, по-видимому, не может оказать существенного влияния на возникновение ее асимметрии. Во-вторых, причиной асимметрии могла быть приливная сила от Земли, которая в условиях синхронного вращения Луны вокруг собственной оси и вокруг Земли действует с разными знаками на видимую и обратную стороны. Величина приливной силы пропорциональна третьей степени обратного расстояния между ними (§ 48). Отсюда следует, что в прошлом, когда расстояние между ними было в 4,7 раза меньше, приливная сила была в 100 раз больше современной. Той точки зрения, что причиной асимметрии Луны является приливная сила, придерживается автор работы [48]. Предлагались гипотезы, в которых асимметрия объяснялась как результат накопления жидких базальтов на видимой стороне из-за приливного эффекта. Вследствие потери энергии при приливах замедляется время обращения Луны вокруг Земли и Луна удаляется от Земли. За время $T < 10^8$ лет Луна удалилась на 150—200 тыс. км. По оценке [80] этого недостаточно для дифференциации жидких базальтов. В-третьих, возможной причиной асимметрии Луны, связанной с Землей, могла быть неодинаковая бомбардировка лунной поверхности метеоритами и планетезиμαлями. Эта идея, высказанная А. А. Михайловым, была подробно развита Вудом [80]. Различие их точек зрения состоит в том, что первый рассматривал экранирующую роль Земли, которая мала, а Вуд придавал основное значение фокусирующей роли Земли при бомбардировке Луны метеоритами. По его мнению, бомбардировка сопровождается выбросом вещества с поверхности Луны; при этом происходит перенос материи с одного места на другое. Образуется кора

различной толщины в разных местах Луны. Имеется гипотеза, согласно которой асимметрия возникла вследствие того, что Луна была обращена к Земле одной своей стороной еще на ранних стадиях ее эволюции. Земля тогда имела высокую температуру (несколько тысяч градусов). Обращенная к Земле сторона Луны подвергалась дополнительному обогреву земным теплом. Остывание Луны происходило неравномерно, и из-за этого ядро Луны смещалось по направлению к Земле [71].

Упомянем еще одну гипотезу, которая допускает быстрое остывание недр Луны, связанное с интенсивной кратковременной конвекцией. Известно, что с помощью конвективных потоков можно было бы объяснить различие строения центральной зоны и зоны лимба. В одной из них действуют восходящие потоки, в другой — нисходящие. Однако для Луны имеются трудности в использовании конвективной гипотезы, возникающие из-за допустимой величины вязкости. Из анализа времени релаксации напряжений в районах масконов, где со временем происходила изостатическая компенсация, получается вязкость пород, подстилающих масконы, порядка $\sim 10^{26}$ пуаз. Эта величина больше критической вязкости 10^{24} пуаз, ниже которой возможно образование конвективных ячеек.

Мы согласны с А. А. Михайловым [22], когда он говорит, что асимметрия Луны обусловлена внутренними причинами. Это относится и к Земле. Разве у Земли не является асимметрией наличие Тихого океана, хотя его положение относительно Солнца и Луны меняется. Нам представляется, что образование асимметричного внутреннего строения Луны, сопровождающееся асимметричным распределением радиоактивных элементов и др., могло возникнуть под действием приливных сил. Вообще в природе малые по величине, но длительно действующие (сотни млн. лет) или очень малые резонансные силы способны привести к радикальному изменению первоначального строения и состояния тел Солнечной системы. Луна в своей истории прошла эпоху интенсивной бомбардировки метеоритами и планетезималами (§ 50), на ее поверхности образовывались впадины. Причина различия внешнего и глубинного строения морей, талассоидов, кратеров, образовавшихся из впадин на видимой и обратной сторонах Луны, не в неоднородности бомбардировки. На наш взгляд,

видимая и обратная стороны по-разному реагировали на одинаковую бомбардировку. По-видимому, происходило изменение поверхности и поверхностных недр в силу уже ранее возникшей глобальной асимметрии. На обратной стороне, где более толстая кора, было меньше лавовых излияний, они не были обширными по площади. На видимой стороне полностью заполнялись лавой не только впадины, но ею заливались громадные области, например, Океан Бурь.

§ 33. Рельеф и гравитационное поле Луны

Рельеф Луны имеет сложное строение. Наблюдаются обширные горные области и равнины. Как обычно, рельеф изображается в виде изолиний равных высот сглаженной физической поверхности планеты относительно поверхности относимости. За поверхность относимости проще всего принять сферу. Радиус этой сферы принимается равным среднему радиусу Луны. Для численно-аналитических исследований удобно представлять рельеф в виде разложения по сферическим или выборочным функциям. Радиус-вектор $\rho(\varphi, \lambda)$ сглаженной физической поверхности Луны, записанный в виде разложения по сферическим функциям, равен

$$\begin{aligned} \rho_s(\varphi, \lambda) &= \\ &= R_0 \left[1 + \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right], \end{aligned} \quad (4.54)$$

где N — порядок разложения, зависящий от достоверности и числа исходных значений абсолютных высот лунной поверхности, R_0 — радиус сферы относимости. Коэффициенты a_{nm} и b_{nm} определяются по имеющимся значениям координат точек физической поверхности Луны. Если перейти к высотам h рельефа относительно сферы относимости, то будем иметь

$$\begin{aligned} h(\varphi, \lambda) &= \rho(\varphi, \lambda) - R_0 = \\ &= R_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm} \cos m\lambda + \bar{b}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \end{aligned} \quad (4.55)$$

где \bar{a}_{nm} , \bar{b}_{nm} — нормированные коэффициенты, \bar{P}_{nm} — нор-

мированные функции Лежандра. Значения нормировочных множителей N_{nm} были приведены в табл. 1. При аппроксимации рельефа, равно как и гравитационного поля, разложением в ряд сферических функций вида (4.54) неизбежны ошибки двух видов. Одна из них — за счет конечности ряда, другая — ошибка в коэффициентах разложения. Обозначим через N наивысший порядок удержанных членов разложения. Тогда первая из названных ошибок равна

$$\varepsilon_1 = R_0 \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi).$$

Если погрешности в коэффициентах разложения обозначить Δa_{nm} и Δb_{nm} , то для второй ошибки имеем

$$\varepsilon_2 = R_0 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n (\pm \Delta a_{nm} \cos m\lambda \pm \Delta b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi).$$

Общая дисперсия ε^2 равна сумме дисперсий ε_1^2 и ε_2^2 ,

$$\varepsilon^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} D_n + \sum_{n=0}^N d_n = D - \sum_{n=0}^N (D_n - d_n),$$

где d_n — порядковые дисперсии ошибок определения коэффициентов a_{nm} и b_{nm} , D_n — порядковые дисперсии самих коэффициентов a_{nm} и b_{nm} , D — дисперсия высот рельефа Луны. Последнее равенство показывает, что имеет смысл увеличивать порядок N разложения на каждый новый порядок, если $D_{N+1} - d_{N+1} > 0$, т. е. если $D_{N+1} > d_{N+1}$. Таким образом, оптимальный порядок разложения зависит от соотношения порядковых дисперсий ошибок определения коэффициентов разложения и порядковых дисперсий самих коэффициентов.

Первое разложение рельефа Луны по сферическим функциям до восьмого порядка сделал К. Гудас [11], используя данные об абсолютных высотах топографии на видимой стороне. Полное отсутствие сведений о высотах на обратной стороне Луны потребовало о них определенных допущений. Гудас предположил симметрию рельефа на видимой и обратной сторонах. Поэтому его разложение могло удовлетворительно описывать рельеф видимой стороны и не иметь ничего общего с рельефом обратной сторо-

ны. Оно было еще неудовлетворительным из-за ненадежности исходных высот рельефа. Со времени первого разложения рельефа сведения о рельефе уточнились. Были заново проанализированы имевшиеся селенодезические каталоги абсолютных высот лунной поверхности видимой стороны и выведены сводные каталоги [9], [20] и др. Высоты были приведены к центру масс Луны. Разработаны основы методики создания единых каталогов [8], [20] и др. Обоснованы принципы построения базисных сетей и их относительных деформаций, методик лунной полигонометрии и триангуляции [8], [52], [53], [55], [63]. Основной недостаток имеющейся информации о высотах состоит в ограниченности знания абсолютных высот для обратной стороны. Этот недостаток стал устраняться с применением космических методов. С их помощью были определены селенодезические долготы, широты и абсолютные высоты для ряда фундаментальных базисных точек. В частности, в работе [78] на основании многочисленных фотографических измерений с КСМ «Аполлон-8, -9, -10, -11, -12, -14, -15» были определены 31 базисная точка вдоль экваториальной зоны Луны. Их широты изменяются от -11 до $+26^\circ$. Из них 21 точка находится на видимой стороне, а 10 — на обратной. Ошибка координат оценивается по φ и λ соответственно в 0,7 и 0,6 км, а по абсолютной высоте в 0,4 км. Погрешности вывода координат лимитируются точностью определения положений КСМ «Аполлон», с которых производились фотограмметрические измерения.

Очень интересные данные об абсолютных высотах были получены путем лазерного, альтиметрирования с КСМ «Аполлонов -15, -16 и 17» [58], [59], [75], [79]. Высоты физической поверхности измерены вдоль профилей (рис. 49), охватывающих всю Луну в ее экваториальной зоне. На профилях они даны относительно сферической Луны радиуса 1738,0 км. Центр этой сферы совмещен с центром масс Луны. Лазерное альтиметрирование производилось во время движения КСМ «Аполлон» через каждые 20 секунд, что соответствует 30 км пути. Хотя чувствительность альтиметра была ~ 2 м, пятно лазерного луча на лунной поверхности в сечении было всего ~ 30 м, не имело смысла производить зондирование чаще, т. к. оставалась большая неопределенность координат КСМ «Аполлон». Положение

КСМ «Аполлон» определялось с Земли по доплеровским наблюдениям через каждые 10 секунд. Для промежуточных моментов времени положение ИСЛ на орбите вычислялось на основе определенной модели гравитационного поля Луны. Неопределенность положения КСМ «Аполлон» в направлении альтиметрирования не превосходило по абсолютной величине 0,4 км, а ошибка относительного положения между наблюдениями 0,1 км.

Т а б л и ц а 28

Средние превышения различных образований на Луне относительно сферы радиуса $R = 1738,0$ км

	% поверх- ности	Средние превышения по «Аполлонам», км			Средние весо- вые превыше- ния, км
		15	16	17	
Материки на обратной стороне Луны	57	+1,9	+2,1	+0,9	+1,8
Материки на видимой стороне Луны	23	-1,7	-1,2	-1,3	-1,4
Круговые моря	6	-4,1	-4,1	-3,7	-4,0
Другие моря	14	-2,0	-2,5	-2,1	-2,3

Осуществленное лазерное альтиметрирование позволило, помимо изучения рельефа Луны, решить ряд других задач. Был уточнен центр фигуры Луны относительно ее центра масс (§ 35), общая геометрическая фигура Луны (§ 36). Установлены некоторые общие особенности рельефа Луны. В табл. 28 приведены выведенные из этих наблюдений [58] средние превышения некоторых образований видимой и обратной сторонах Луны. Указанные в таблице превышения относятся к экваториальной зоне и не являются полностью представительными для всей Луны. Профили высот из лазерного альтиметрирования (см. рис. 49) показывают качественное различие изменения рельефа на видимой и обратной сторонах Луны. Поверхность морей имеет гладкое дно, наклоненное с запада на восток на величину порядка $1 : 500 - 1 : 2000$ [58]. Обнаруживается обратная корреляция глубин круговых морей (Море Ясности, Море Кризисов, Море Смита) с их поперечным сечением.

Предшествовавшие лазерной альтиметрии радарные интерферометрические измерения с Земли позволяли измерять высоты только крупных деталей лунной поверхности, и точность их была порядка двухсот метров [81].

Первая информация о высотах рельефа на обратной стороне западного полушария была получена по фотогра-

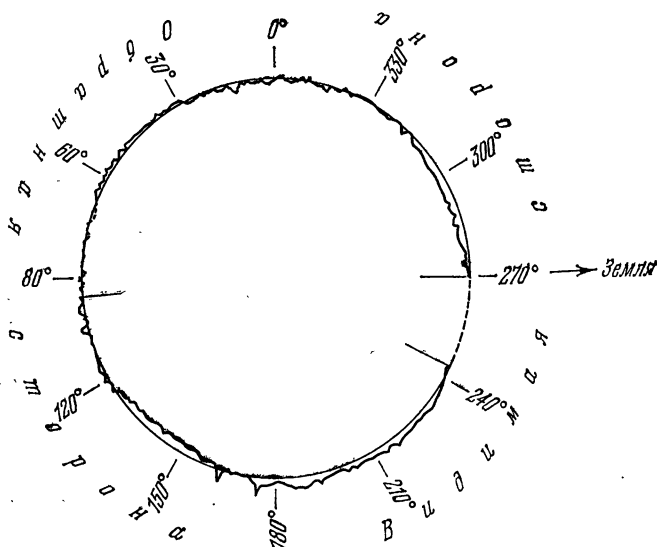


Рис. 51. Высоты физической поверхности Луны в сечении плоскостью, близкой к $\lambda = \pm 180^\circ$, полученные по фотографиям с «Зонда-6». Изменения высот показаны с двадцатикратным увеличением (по Б. Н. Родионову и др. [28]).

фическим снимкам, произведенным автоматической станцией «Зонд-6». Была обнаружена широкая депрессия на юге обратной стороны Луны [28], [15], [29]. Уровень физической поверхности (рис. 51) на обширной площади на $\sim 4,7$ км ниже среднего уровня Луны. Возвышенная область на юге, имеющая относительные превышения $\sim 2,6$ км, имеет продолжение на видимой стороне в Море Южное.

Космическая информация о геометрической фигуре Луны не может заменить той информации, которая накопилась за более чем полувековую историю астрономиче-

ских исследований высот лунной поверхности. Но она остается единственной для обратной стороны Луны. Существенно важно было получить сведения об общей геометрической фигуре видимой и обратной сторон и ее связи с центром масс, что было частично достигнуто лазерным альтиметрированием. На основании фотogramметрических наблюдений, проведенных с КСМ «Аполлон-15, -16, -17», предполагается создать высокоточную лунную базисную сеть, которая занимает 20% лунной поверхности (в том числе обратной) с густотой один пункт на 900 км^2 [55], [63].

Накопившиеся сведения о высотах Луны позволили получить более или менее надежные разложения рельефа в ряд по сферическим функциям. В работе Б. Билса и А. Феррари [40], [41] было использовано 5800 лазерных альтиметрических измерений, 1400 фотографий с КСМ «Аполлон», точность которых $\pm 0,3 \text{ км}$, и 3300 измерений высот по фотографиям, полученным с Земли. Последним приписывается точность порядка $\pm 1,0 \text{ км}$. Наземные измерения были исправлены за смещение центра масс Луны на $1,77 \pm 0,16 \text{ км}$ к 25° S и 191° E . Высоты определялись относительно поверхности сферы радиуса $R = 1737,46 \text{ км}$. Карта высот сглаженного рельефа Луны, построенная на основании разложения упомянутых авторов, охватывает зону, заключенную между 45° северной и южной широты. Высоты изменяются от $5,5 \text{ км}$ до $-2,5 \text{ км}$, т. е. общий диапазон изменений достигает 8 км .

На основе современных данных о высотах рельефа Луны Н. А. Чуйковой [36, 37] было проведено разложение рельефа. Она использовала гипсометрическую карту видимой стороны Луны в области $\pm 70^\circ$ по широте и долготе, построенную на основании каталога Милза, данные о пространственных координатах упомянутой выше 31 базисной точки [78], результаты лазерного альтиметрирования с КСМ «Аполлон-15 и -16» [73], абсолютные высоты 68 точек либрационной зоны обратной стороны западного полушария Луны, определенные с помощью космических аппаратов «Зонд-6» и «Зонд-8» [15], высоты вдоль меридионального профиля на обратной стороне, полученные «Зондом-6» [29], а также каталог высот краевой зоны, составленный в Главной астрономической обсерватории АН УССР. Особенно интересно было привлечение данных «Зонда-6» и «Зонда-8»: они не учитывались в других раз-

ложениях. Именно поэтому на карте осредненного рельефа, построенной в этой работе (рис. 52), области, соответствующие южной части западного полушария, полярным областям и краевой зоне, лучше соответствуют реальности.

В работах [36], [37] помимо разложения по сферическим функциям осуществлено впервые разложение релье-

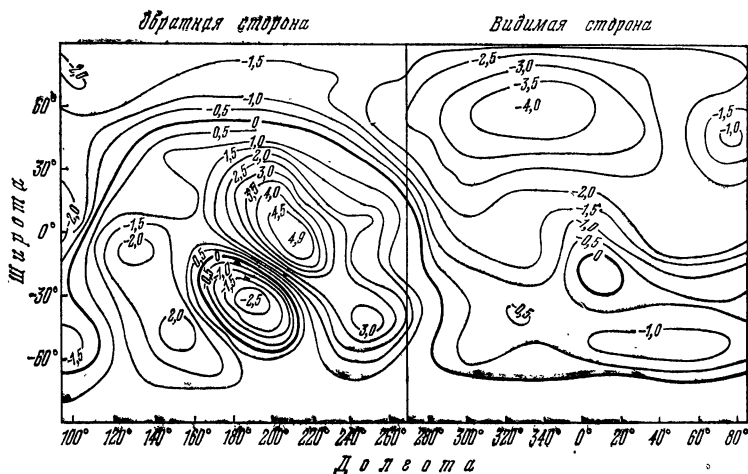


Рис. 52. Схема высот рельефа Луны относительно сферы радиуса $R = 1738,0$ км. Изолинии проведены через $0,5$ км.

фа по выборочным функциям $W(\zeta, \lambda)$ (§ 7):

$$h(\varphi, \lambda) = \sum_{q=1}^N h(\zeta_q, \lambda_q) W_q(\zeta, \lambda), \quad (4.56)$$

где $\zeta = \sin \varphi$, φ_q, λ_q — широта и долгота выборочных точек. Общее число выборочных точек $N = (n + 1)^2$ равно числу выборочных функций $W_q(\zeta, \lambda)$. Коэффициентами разложения $h(\zeta_q, \lambda_q)$ в (4.56) являются просто значения усредненных высот рельефа в выборочных точках (ζ_q, λ_q) . В осуществленном разложении было принято $n = 8$, что соответствует тому, что была выбрана 81 выборочная точка на сферической Луне, а разложение содержало 81 выборочную функцию $W_q(\zeta, \lambda)$ (3.5). Значения коэффициентов разложения $h(\zeta_q, \lambda_q)$, выписанные из работы [37], пред-

ставлены в табл. 29. При разложении по выборочным точкам в областях, где не было данных о высотах, они вычислялись для этих областей на основании разложения по сферическим функциям. Было проведено сравнение двух методов разложения рельефа по сферическим функциям и по выборочным функциям. Предпочтение отдается последнему виду разложения.

Рассмотрим порядковые дисперсии не для самих высот рельефа, а для их горизонтальных градиентов вдоль касательных к меридианам и параллелям. Выражения для этих порядковых дисперсий аналогичны (4.43); применительно к рельефу они запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} (D_{h\varphi})_n &= n(n+1)\bar{a}_{n0}^2 + \sum_{m=1}^n \frac{2n(n+1) - (2n+1)m}{2} \times \\ &\quad \times (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2), \\ (D_{h\lambda})_n &= \frac{2n+1}{2} \sum_{m=0}^n m (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2). \end{aligned} \right\} (4.57)$$

На рис. 53 изображены графики изменения $\sqrt{(D_{h\varphi})_n}$ и $\sqrt{(D_{h\lambda})_n}$, которые рассчитаны на основании коэффициентов разложения рельефа [37]. Как очевидно из графиков, величины $\sqrt{(D_{h\varphi})_n}$ имеют систематически большие значения, чем соответствующие величины $\sqrt{(D_{h\lambda})_n}$. Это свидетельствует о том, что рельеф вдоль меридианов изменяется более резко, чем вдоль параллелей. В § 31 было показано (см. рис. 40), что анизотропия у гравитационного поля больше в направлении меридианов, нежели в направлении параллелей. Это странное распределение рельефа и гравитационного поля требует своей интерпретации.

Рассмотрим автокорреляционные функции для рельефа Луны и Земли (рис. 54). Для Луны она подсчитана на основании разложения рельефа, описанного в [37], а для Земли в [39]. Различие функций не больше, чем для автокорреляционных функций их аномальных гравитационных полей (см. рис. 43).

Рассмотрим, каково аномальное гравитационное поле, создаваемое рельефом Луны. Представим массы, состав-

Т а б л и ц а 29

Координаты выборочных точек (φ_l, λ_{lj}) и коэффициенты $h(\xi_q, \lambda_q)$ разложения рельефа Луны по выборочным функциям $W_q(\xi, \lambda)$

q	φ_l	λ_{lj}	$h(\xi_q, \lambda_q),$ км	q	φ_l	λ_{lj}	$h(\xi_q, \lambda_q),$ км
1	90°	—	-2,9	41	26°28'	-69°	-3,7
2	-79°23'	0°	0,9	42	26°28'	-42°	-3,0
3	-79°23'	120°	1,3	43	26°28'	-14°	-3,2
4	-79°23'	240°	1,4	44	26°28'	14°	-3,1
5	68°50'	-180°	-2,3	45	26°28'	42°	-2,4
6	68°50'	-108°	-3,2	46	26°28'	69°	-1,9
7	68°50'	-36°	-4,0	47	26°28'	97°	-1,2
8	68°50'	36°	-2,7	48	26°28'	125°	0,1
9	68°50'	108°	-2,0	49	26°28'	125°	0,8
10	-58°14'	-180°	2,5	50	-15°52'	-180°	-1,0
11	-58°14'	-129°	2,4	51	-15°52'	-156°	1,4
12	-58°14'	-77°	0,3	52	-15°52'	-132°	3,3
13	-58°14'	-26°	-0,1	53	-15°52'	-108°	1,8
14	-58°14'	26°	-0,8	54	-15°52'	-84°	-1,3
15	-58°14'	77°	-0,2	55	-15°52'	-60°	-1,4
16	-58°14'	77°	1,6	56	-15°52'	-36°	-1,5
17	47°38'	0°	-3,9	57	-15°52'	-12°	-1,0
18	47°38'	40°	-3,3	58	-15°52'	12°	0,4
19	47°38'	80°	-1,5	59	-15°52'	36°	-1,3
20	47°38'	120°	-0,7	60	-15°52'	60°	-1,4
21	47°38'	160°	0,1	61	-15°52'	84°	-0,7
22	47°38'	200°	-0,2	62	-15°52'	108°	1,2
23	47°38'	240°	-1,6	63	-15°52'	132°	2,0
24	47°38'	280°	-3,4	64	-15°52'	156°	1,4
25	47°38'	320°	-4,2	65	5°17'	0°	-1,2
26	-37°03'	0°	-0,3	66	5°17'	21°	-1,8
27	-37°03'	33°	0,2	67	5°17'	42°	-1,9
28	-37°03'	65°	-0,2	68	5°17'	64°	-2,3
29	-37°03'	98°	1,4	69	5°17'	85°	-2,6
30	-37°03'	131°	2,3	70	5°17'	106°	-0,3
31	-37°03'	164°	1,0	71	5°17'	127°	1,6
32	-37°03'	196°	0,0	72	5°17'	148°	1,0
33	-37°03'	229°	3,0	73	5°17'	169°	1,4
34	-37°03'	262°	2,8	74	5°17'	191°	3,9
35	-37°03'	295°	-0,9	75	5°17'	212°	3,2
36	-37°03'	327°	-0,3	76	5°17'	233°	2,6
37	26°28'	-180°	2,1	77	5°17'	254°	1,4
38	26°28'	-152°	2,0	78	5°17'	275°	-0,6
39	26°28'	-125°	0,3	79	5°17'	297°	-2,4
40	26°28'	-97°	-1,7	80	5°17'	318°	-2,1
				81	5°17'	339°	-1,7

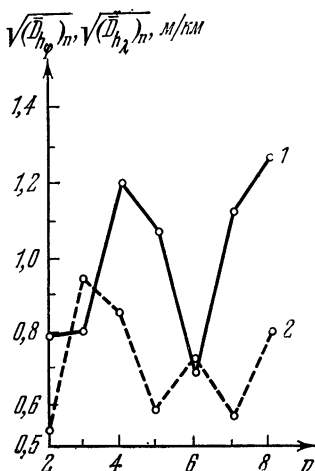


Рис. 53. Изменения средних квадратических значений сферических гармоник $\sqrt{(\overline{D}_{h\lambda})_n}$ и $\sqrt{(\overline{D}_{h\varphi})_n}$ для горизонтальных градиентов от высот рельефа по направлению меридианов и параллелей в зависимости от порядка n . 1 — $\sqrt{(\overline{D}_{h\varphi})_n}$ по меридианам, 2 — $\sqrt{(\overline{D}_{h\lambda})_n}$ — по параллелям.

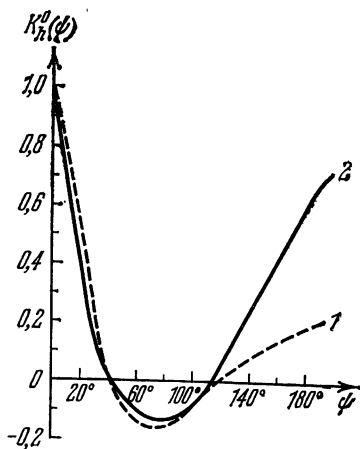


Рис. 54. Нормированные автокорреляционные функции $K_n^0(\psi)$ рельефов 1 — Луны, 2 — Земли.

ляющие видимый рельеф, сконденсированными на поверхность сферы в виде простого слоя с поверхностной плотностью $\sigma_{\Pi}(\varphi, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Pi}(\varphi, \lambda) &= \sigma_0 h(\varphi, \lambda) = \\ &= \sigma_0 R \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \end{aligned} \quad (4.58)$$

где σ_0 — средняя плотность пород, составляющих рельеф. Гравитационный потенциал масс простого слоя равен

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = G \int_S \int \frac{\sigma_{\Pi}(R, \varphi, \lambda) dS}{r},$$

где r — расстояние текущей точки на поверхности сферы от точки (ρ, φ, λ) , в которой рассматривается потенциал. Подставляя в это равенство разложение для $1/r$ (1.16) и разложение для σ_{Π} (4.58), получим

$$\begin{aligned} V(\rho, \varphi, \lambda) &= G\sigma_0 R \int_S \int \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) \times \\ &\quad \times P_{nm}(\sin \varphi) \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^k P_k(\cos \psi) dS. \end{aligned}$$

При этом в (1.16) было принято $\rho_1 = R$. Используя теорему восстановления сферических функций [16], упростим правую часть последнего равенства:

$$\begin{aligned} V(\rho, \varphi, \lambda) &= 4\pi G\sigma_0 R \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \frac{1}{2n+1} \times \\ &\quad \times \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Сравнивая коэффициенты полученного разложения с соответствующими коэффициентами разложения (1.18), найдем

$$\left. \begin{array}{l} C_{nm} \\ S_{nm} \end{array} \right\} = \frac{4\pi\sigma_0 R^3}{(2n+1)M_{\zeta}} \left\{ \begin{array}{l} a_{nm} \\ b_{nm} \end{array} \right\}. \quad (4.60)$$

Таблица 30

Сравнение нормированных гармонических коэффициентов гравитационного потенциала, вычисленных по наблюдаемому рельефу Луны и определенных по наблюдениям ИСЛ, в 10^{-6}

	\bar{C}_{10}	\bar{C}_{11}	\bar{S}_{11}	\bar{C}_{20}	\bar{C}_{21}	\bar{C}_{22}	\bar{S}_{21}	\bar{S}_{22}	\bar{C}_{30}	\bar{C}_{31}	\bar{C}_{32}	\bar{C}_{33}	\bar{S}_{31}	\bar{S}_{32}	\bar{S}_{33}
По рельефу из [36]	-607,6	-603,8	-24,9	-119,3	-78,98	87,23	54,0	67,6	-9,12	-16,5	63,6	102,4	47,1	1,73	-7,35
По рельефу из [41]	-212,3 $\pm 25,8$	-605,8 $\pm 17,5$	-147,5 $\pm 13,6$	-135,9 $\pm 22,1$	-149,8 $\pm 26,5$	11,5 $\pm 5,7$	23,5 $\pm 19,3$	167,0 $\pm 14,6$	62,2 $\pm 20,5$	102,1 $\pm 28,0$	47,2 $\pm 18,1$	250,1 $\pm 11,1$	53,1 $\pm 18,2$	51,9 $\pm 22,7$	28,9 $\pm 11,4$
По ИСЛ из [46]				-91,52 $\pm 1,7$	2,04 $\pm 1,8$	33,66 $\pm 1,8$	-0,23 $\pm 2,3$	0,10 $\pm 2,2$	-4,90 $\pm 4,5$	27,04 $\pm 1,5$	11,52 $\pm 3,8$	24,98 $\pm 7,1$	6,00 $\pm 1,7$	1,18 $\pm 4,7$	-9,02 $\pm 6,8$
По ИСЛ из [2]	-	-	-	-89,9	0,15	44,8	5,27	-0,93	-1,17	27,59	8,49	-17,21	6,48	12,88	-41,59

Вводя вместо массы Луны M_{ζ} ее среднюю плотность σ_{ζ} , получим связь коэффициентов C_{nm} и S_{nm} разложения гравитационного потенциала с соответствующими коэффициентами a_{nm} и b_{nm} разложения рельефа:

$$\left. \begin{matrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{matrix} \right\} = \frac{3}{(2n+1)} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{\zeta}} \right) \left\{ \begin{matrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{matrix} \right. \quad (4.61)$$

Если коэффициенты разложения гравитационного потенциала связаны с коэффициентами рельефа в предположении, что плотность Луны изменяется с глубиной по закону

$$\sigma(\rho) = \sigma_0 + \alpha \rho^p,$$

где α и p — некоторые постоянные, задающие закон изменения плотности, то в этом случае вместо формул (4.61) будем иметь [12], [13]

$$\left. \begin{matrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{matrix} \right\} = \frac{3}{2n+1} \frac{\sigma_0 + \alpha R_0^p}{\sigma_0 + \frac{\alpha R_0^p}{p+3}} \left\{ \begin{matrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{matrix} \right. \quad (4.62)$$

Положив $\alpha = 0$, вместо (4.62) получим (4.60), что соответствует тому, что плотность рельефа постоянна и равна средней плотности Луны.

В таблице 30 приведены значения нормированных гармонических коэффициентов \bar{C}_{nm}^p и \bar{S}_{nm}^p гравитационного потенциала, вычисленных по формуле (4.60) с использованием коэффициентов разложения рельефа Луны, осу-



Рис. 55. Изменения средних квадратических значений сферических гармоник $\sqrt{(\overline{D_T})_n}$ для гравитационного потенциала Луны в зависимости от порядков гармоник n . 1 — вычисленного по рельефу Луны, 2 — определенного по наблюдениям ИСЛ.

ществленного в [36] и [41]. В этой же таблице приведены для сравнения гармонические коэффициенты \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} , выведенные А. Феррари [46] и Э. Л. Акимом и З. П. Власовой [2] по возмущающему движению ИСЛ. Значения \bar{C}_{nm}^p и \bar{S}_{nm}^p , соответствующие рельефу, оказываются несравненно большими. Сравним еще порядковые дисперсии для гравитационного потенциала, вычисленного по рельефу Луны и определенного по наблюдениям возмущенного движения ИСЛ (рис. 55). Первые порядковые дисперсии существенно больше соответствующих порядковых дисперсий, определенных по возмущениям ИСЛ. Это различие убывает с ростом порядка n гармоник. Такую закономерность можно объяснить различной степенью изостатической компенсации масс различного простирания. Массы рельефа небольших областей не в состоянии преодолеть прочность лунной коры и остаются изостатически нескомпенсированными, и это значит, что они создают повышенное гравитационное поле. В областях же, характеризующихся низкими гармониками разложений, происходит изостатическая компенсация почти полностью, т. е. видимому избытку масс рельефа соответствует недостаток на глубине, недостатку — их избыток на глубине. В результате аномальное гравитационное поле близко к нулю, что можно увидеть на графиках рис. 55. Как очевидно из табл. 30, неправильно выводить геометрическую фигуру Луны, исходя из знания коэффициентов разложения гравитационного поля Луны, определенного по возмущению в движениях ИСЛ. Так поступили авторы [7], следуя К. Гудасу [13], [12]. Неучет внутреннего распределения масс не может дать ничего похожего на реальный рельеф Луны.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЕЛЕНОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§ 34. Селеноцентрическая гравитационная постоянная, масса и средняя плотность Луны

Большую роль при расчете движения окололунных космических аппаратов и искусственных спутников Луны играет *селеноцентрическая гравитационная постоянная* GM_{ζ} . Она является одной из фундаментальных постоянных астрономии и астродинамики. По величине GM_{ζ} определяется *масса* M_{ζ} и *средняя плотность* σ_{ζ} Луны, которые, помимо самостоятельного интереса, необходимы для составления вспомогательных условий при нахождении распределения плотности внутри планеты. Несмотря на то, что величина селеноцентрической гравитационной постоянной представляла интерес для небесной механики, относительная точность ее определения до начала космической эры оставалась низкой, всего лишь $\sim 2 \cdot 10^{-3}$. Существенный прогресс в ее измерении возник в результате использования ИСЛ и космических аппаратов.

Сначала напомним идеи применявшихся астрономических методов определения GM_{ζ} . Некоторые из них в модернизированном виде применительно к космическим средствам используются и сегодня. В основе большинства методов измерения GM_{ζ} лежит предположение, что Луна оказывает гравитационное воздействие на вращение Земли или на ее орбитальное движение. В первом случае это проявляется в возникновении прецессии и нутации оси суточного вращения Земли из-за того, что она не обладает центральной симметрией в распределении масс. Теория прецессии и нутации Земли показывает, что их величина существенно зависит от отношения $\mu = M_{\zeta} / M_{\oplus}$, где M_{ζ} — масса Луны, M_{\oplus} — масса Земли. Поскольку геоцентрическая гравитационная постоянная GM_{\oplus} ныне измеряется с относительной точностью порядка $\sim 10^{-6}$, определив μ

из наблюдений прецессии и нутации, можно вычислить селеноцентрическую гравитационную постоянную GM_{ζ} . В дальнейшем мы будем говорить об определении μ или GM_{ζ} в равной мере, ибо по значению одного вычисляется значение другого.

Постоянная годичной лунно-солнечной прецессии Земли равна

$$p = H \cos \varepsilon \left(P + \frac{\mu}{1 + \mu} Q \right), \quad (5.1)$$

а постоянная годичной лунно-солнечной нутации Земли

$$N = H \cos \varepsilon \frac{\mu}{1 + \mu} R, \quad (5.2)$$

где $H = \frac{2C - A - B}{2C}$ — динамическое сжатие Земли, ε — наклон земного экватора к эклиптике, который изменяется во времени вековым образом. Функция P , Q , R имеет вид

$$P = \frac{3}{2} \frac{n^2}{\omega} \frac{(1 - e^2)^{-3/2}}{1 + m_1} T,$$

$$Q = \frac{3}{2} \frac{n'^2}{\omega} T N_1,$$

$$R = - \frac{Q}{N_1 \Omega_1 \sin i''} N_2,$$

где n , n' — средние суточные звездные движения Солнца и Луны соответственно, ω — угловая скорость суточного вращения Земли, T — тропический год в средних сутках, Ω_1 — среднее движение лунного узла за тропический год, e — эксцентриситет лунной орбиты, m_1 — масса системы Земля — Луна, выраженная в массах Солнца M_{\odot} , т. е. $m_1 = \frac{M_{\zeta} + M_{\oplus}}{M_{\odot}}$, N_1 и N_2 — функции, зависящие от элементов лунной орбиты. Они выводятся аналитически в теории движения Луны и считаются известными. В уравнении (5.1) должна быть учтена небольшая релятивистская поправка, приводящая к эффекту, аналогичному прецессии. Из уравнений (5.1) и (5.2) нетрудно получить формулу для определения искомой величины:

$$\mu^{-1} = A \frac{p}{N} + B. \quad (5.3)$$

Коэффициенты A и B в этом уравнении выводятся по значениям P, Q, R , вычисляемым для определенной эпохи по соответствующим значениям их аргументов, указанных выше. Постоянная прецессии p определяется по астрономическим наблюдениям изменения положения звезд, в частности, по меридианным наблюдениям. Постоянная нутации N выводится по наблюдениям колебаний широты Земли с помощью зенит-телескопов или полярных фотографических труб. Нутация измеряется хуже, чем прецессия, поэтому основным источником ошибки определения μ^{-1} является ошибка нутации.

Другой астрономический способ определения GM_{\odot} состоит в использовании наблюдений лунных неравенств в долготе Земли при ее орбитальном движении [13]. Они возникают в результате того, что вокруг Солнца движется центр масс систем Земля — Луна, а Земля, равно как и Луна, в то же время вращается вокруг их общего центра масс. Расстояние центра масс Земли от центра масс системы Земля — Луна есть

$$d = \frac{\mu \Delta}{1 + \mu},$$

где Δ — среднее расстояние между Землей и Луной. Величина $d = 4670$ км. Вследствие вращения системы Земля — Луна вокруг центра масс земному наблюдателю кажется, что имеется неравномерность в изменении долгот Солнца, точнее, он будет наблюдать колебания видимой долготы Солнца с периодом, равным сидерическому месяцу (время полного обращения Земли вокруг центра масс системы Земля — Луна). Если бы измерялась дальность до Солнца, то наблюдалось бы ее изменение с тем же периодом. Величина амплитуды колебаний зависит от соотношения расстояния до Солнца и расстояния d .

Под лунным неравенством понимается коэффициент периодического смещения объекта на расстоянии астрономической единицы от Земли в плоскости лунной орбиты, вызываемого движением Земли относительно центра масс системы Земля — Луна. При этом предполагается, что орбита Земли круговая с радиусом, равным среднему радиусу ее орбиты. Коэффициент лунного неравенства в долготе Солнца равен

$$L = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{\Delta}{\Delta_{\odot}} = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{\pi_{\odot}}{\pi'_{\odot} \sin 1''}, \quad (5.4)$$

где Δ_{\odot} — расстояние между Землей и Солнцем. π_{\odot} и π'_{ζ} — параллаксы Солнца и Луны соответственно. Последнее равенство (5.4) преобразуем к виду

$$\mu^{-1} = \frac{1}{L} \frac{\Delta}{\Delta_{\odot}} - 1. \quad (5.5)$$

Для определения GM_{ζ} из астрономических наблюдений выводятся положения Солнца среди звезд, а по ним лунное неравенство L . При этом предполагается, что расстояния Δ и Δ_{\odot} известны.

Поскольку для малых планет из-за их большей близости к Земле величины лунных неравенств в их движении будут больше, чем для Солнца, они были использованы для определения GM_{ζ} . Для этого наблюдались малая планета Виктория и многократно малая планета Эрот. Можно обойтись без знания расстояний Δ_{\odot} и Δ , если использовать параллактические неравенства Луны, определяемые из астрономических наблюдений. Параллактическими неравенствами называются члены в разложении истинной долготы Луны по тригонометрическим функциям, которые имеют аргументом разность долгот Земли и Солнца ($s - h$) или эти разности с нечетными множителями. Из теории движения Луны выводится коэффициент параллактического неравенства Луны с аргументом ($s - h$), период которого равен 29,5306 суток:

$$\bar{p} = 49853'', 2 \frac{\pi_{\odot}}{\pi'_{\zeta}} \frac{1 - \mu}{1 + \mu}.$$

Решая это уравнение совместно с (5.4), получим

$$\mu^{-1} = 4,13744 \frac{\bar{p}}{L} + 1. \quad (5.6)$$

Точность определения μ^{-1} зависит только от точности измерения \bar{p} и L . Величина L порядка $\sim 6'', 4$, а $\bar{p} \sim 125''$.

Напишем точное выражение III закона Кеплера применительно к движению Луны вокруг Земли:

$$GM_{\oplus} = \frac{4\pi^2 a_{\zeta}^3 (1 - F_{\zeta})}{T^2 (1 + \mu)}, \quad (5.7)$$

где $\frac{4\pi^2}{T^2} = 2,661\,699\,5 \cdot 10^{-12} \text{с}^{-2}$, F_{ζ} — небольшая поправка за счет возмущений, обусловленных сжатием Земли,

влиянием Солнца, планет, положения центра масс и пр. Она вычисляется теоретически. Геоцентрическую гравитационную постоянную GM_{\oplus} считаем известной. Для определения μ^{-1} из (5.7), помимо T , GM_{\oplus} , F_{ζ} , необходимо знать большую полуось лунной орбиты a_{ζ} и радиус Луны. Лазерная локация позволяет определять расстояния с точностью до сантиметров.

Точность определения селеноцентрической гравитационной постоянной GM_{ζ} была существенно повышена с началом использования искусственных спутников Луны, лунных космических аппаратов и автоматических межпланетных станций. Для вывода GM_{ζ} производились точные радиотехнические наблюдения за координатами и скоростями ИСЛ и различных космических аппаратов. По отличию наблюдаемых координат и скоростей от рассчитанных с применением приближенного значения GM_{ζ} она уточняется.

При использовании ИСЛ определение GM_{ζ} основывалось на III законе Кеплера, записанном применительно к движению ИСЛ в поле тяготения Луны в виде

$$GM_{\zeta} = \frac{4\pi^2}{T^2} a^3 (1 - F),$$

где T — период обращения спутника, a — большая полуось его орбиты, F — поправки, учитывающие всевозможные возмущения, в том числе за счет нецентральности поля тяготения Луны. Как известно, гравитационное поле Луны сильно аномально. Влияние аномального гравитационного поля убывает с увеличением расстояния, но при этом возрастает роль возмущений от Земли, Солнца и планет. При определении GM_{ζ} по наблюдениям ИСЛ предполагается, что последний при этом движется без воздействия активных сил и без применения коррекции. Значение GM_{ζ} выводилось многократно различными авторами по наблюдениям ИСЛ «Лунар Орбитер», а также по возможным комбинациям наблюдений этих ИСЛ. Значения GM_{ζ} выводились одновременно с определением значений коэффициентов C_{nm} и S_{nm} разложения гравитационного поля Луны в ряд по сферическим функциям. Пробовали определять GM_{ζ} , удерживая различное число членов разложения. Сводка основных определений селеноцентрической

гравитационной постоянной GM_{ζ} по наблюдениям ИСЛ «Лунар Орбитер» приведены в табл. 31.

Для определения GM_{ζ} использовались также космические аппараты, имеющие сильно вытянутые орбиты при их движении в сфере притяжения Луны. Такими КА были «Рейнджер» и «Сервейор». С Земли, с помощью радиотехнических средств, измерялись координаты и скорости удаления космических аппаратов и сравнивались с расчетными. Расчеты делали, предполагая некоторые приближенные параметры орбит и гравитационного поля, в том числе GM_{ζ} . По рассогласованию наблюдаемых и расчетных координат и скоростей уточнялись первоначально принятые параметры. Сводка определений μ и GM_{ζ} по «Рейнджерам» и «Сервейорам» дана в табл. 31.

Еще один класс космических аппаратов использовался для уточнения GM_{ζ} . Это далекие космические аппараты «Маринер», «Пионер» и «Венера» (табл. 31). При этом использовалась идея одного из описанных выше астрономических методов, а именно наблюдения лунных неравенств. В качестве объекта наблюдений вместо Солнца или малой планеты являлись далекие космические аппараты. Кроме того, измерялись не угловые координаты, а вариации дальности и радиальной компоненты скорости космического аппарата. Из наблюдений выделялась часть вариации, обусловленная движением Земли вокруг центра масс системы Земля — Луна. Для вариаций дальности ρ и радиальной скорости $\dot{\rho}$ имеем

$$\delta\rho = \frac{\mu\Delta}{T(1+\mu)} \cos\beta \sin(\lambda - \lambda_{\zeta}),$$

$$\delta\dot{\rho} = \frac{2\pi\mu\Delta}{T(1+\mu)} \cos\beta \sin(\lambda - \lambda_{\zeta}),$$

где β, λ — геоцентрические координаты космического аппарата, λ_{ζ} — геоцентрическая долгота Луны, T — сидерический месяц. Радиальная скорость $\dot{\rho}$ определяется по доплеровским наблюдениям. Относительно центра масс Земля — Луна она фиксируется с точностью $\pm 3,6$ м/с. Величина μ^{-1} выводится на основании длительных наблюдений (несколько месяцев) так, чтобы охватить несколько периодов T измерения $\delta\rho$ и $\delta\dot{\rho}$. Например, при определении μ^{-1} по наблюдениям космического аппарата Венера в качестве неизвестных, помимо μ^{-1} считались еще девять

Т а б л и ц а 34

Сводка определений селеноцентрической гравитационной постоянной GM_{ζ} и параметра μ^{-1}

Там, где авторы соответствующих работ не назвали значений GM_{ζ} или μ^{-1} , они были подсчитаны нами при $GM_{\oplus} = 398601,2 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$. Вычисленные значения помещены в скобках

Космический аппарат	$\mu^{-1} = \frac{M_{\oplus}}{M_{\zeta}}$	GM_{ζ} , $\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$	GM_{\oplus} , $\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$	Публикация
«Лунар Орбитер-2» «Лунар Орбитер-4» «Лунар Орбитер-1, -3, -4»	84, 3030 (81, 3007) (81, 3034)	4902, 66±0, 19 4902, 796 4902, 64±0, 11		[91] [103] [107]
Комбинация «Лунар Орбитер-1—5»	(81, 3019)	4902, 73±0, 14		[92], [93]
«Рейнджер-6» «Рейнджер-7» «Рейнджер-8» «Рейнджер-9»	(81, 3030) (81, 3050) (81, 3035) (81, 3022)	4902, 66±0, 19 4902, 54±0, 17 4902, 63±0, 12 4902, 71±0, 30		[107], [101], [94] [107], [101], [91] [107], [101], [91] [107], [101], [91]
Комбинация «Рейнджер-6—9»	(81, 3035±0, 0042)	4902, 63±0, 07		[107], [112]
«Сервейор-1» «Сервейор-3» «Сервейор-5» «Сервейор-6» «Сервейор-7»	(81, 3032) (81, 3034) (81, 3035) (81, 3035) (81, 3034) (81, 3034)	4902, 65±0, 24 4902, 64±0, 25 4902, 63±0, 25 4902, 63±0, 24 4902, 64±0, 24 4902, 64±0, 24		[112], [91] [112], [91] [112], [91] [112], [91] [112], [91] [112], [91]

Т а б л и ц а 31 (окончание)

Космический аппарат	$\mu = \frac{M_{\oplus}}{M_{\zeta}}$	$G M_{\zeta}$, км ³ ·с ⁻²	$G M_{\oplus}$, км ³ ·с ⁻²	Публикация
«Пионер-6»	81,3005 ± 0,0007	(4902,81 ± 0,04)	398601,86 ± 0,61	[36], [38]
«Пионер-7»	81,3024 ± 0,0004	4902,72 ± 0,02		[36], [38]
«Пионер-8»	81,3004 ± 0,0001	(4902,82 ± 0,01)		[39]
«Пионер-9»	81,3008 ± 0,0001	(4902,79 ± 0,01)		[39]
Комбинация «Пионер-6, -7»	81,3016 ± 0,0020	4902,75 ± 0,12	398601,44 ± 0,4	[39]
«Маринер-2» (к Венере)	81,3001 ± 0,0013	(4902,84 ± 0,08)		[36], [107]
«Маринер-4» (к Марсу)	81,3015 ± 0,0017	(4902,76 ± 0,10)	398601,74 ± 1,4	[36], [107]
«Маринер-5» (к Венере)	81,3006 ± 0,0008	(4902,77 ± 0,05)	398601,49 ± 0,39	[36], [39]
«Маринер-6» (к Марсу)	81,3011 ± 0,0015	(4902,78 ± 0,09)		[36], [39]
«Маринер-7» (к Марсу)	81,2997 ± 0,0015	(4902,86 ± 0,09)		[36], [39]
«Венера-4»	81,3006	4902,806	398600,89	[2]
«Венера-5»	81,022	4902,702	398600,26	[2]
«Венера-6»	81,033	4902,638	398600,72	[2]
«Венера-7»	81,002	4902,808	398599,45	[2]
Комбинация «Венера-4—7»	81,3005	4902,716 ± 0,10	398600,37	[2]
Комбинация «Маринер-4, -5»	(81,3016 ± 0,002)	4902,75 ± 0,12		[93]
«Пионер-7»				
По радиолокационным и оптическим наблюдениям внутренних планет	81,3024 ± 0,005	(4902,70 ± 0,30)		[40]

параметров траектории, коэффициент, характеризующий световое давление, и геоцентрическая гравитационная постоянная GM_{\oplus} . При этом учитывались возмущения в движении космического аппарата от Луны, Солнца, планет, нецентральности гравитационного поля Земли, светового давления. Астрономическая единица принималась равной 149 597 900 км. Всего было использовано около 7000 наблюдений космических аппаратов «Венера-5, -6, -7», охватывающих три-четыре месяца наблюдений для каждой станции. Эта работа была выполнена Э. Л. Акимом с сотрудниками [2].

По многолетним радарным и оптическим наблюдениям внутренних планет Солнечной системы были получены значения масс планет и отношение μ масс Луны и Земли (см. табл. 31). Идея определения μ в конечном итоге сводится к измерению движения центра масс системы Земля — Луна.

Т а б л и ц а 32

Некоторые определения μ^{-1} по астрономическим наблюдениям

Автор	μ^{-1}	GM_{ζ} , км ³ ·с ⁻²	Автор	μ^{-1}	GM_{ζ} , км ³ ·с ⁻²
Хинкс	81,53	4889	Рабе	81,375	4898
Джеффрис	81,278	4904	Клеменс	81,73	4877

В таблице 32 приведены некоторые значения μ^{-1} , полученные астрономическими методами. Значения GM_{ζ} в ней вычислены при $GM_{\oplus} = 398\,601,2$ км³·с². Первое значение μ^{-1} выведено Хинксом [56] из обработки наблюдений малой планеты Эрот в 1900—1901 гг. Это значение было принято в свое время в известных таблицах Луны Брауна и в системе астрономических постоянных Де-Ситтера. Джеффрис [69] рекомендовал значение μ^{-1} , выведенное им на основе постоянной лунного неравенства L , полученной по наблюдениям малой планеты Эрот в 1930—1931 гг. Спенсером Джонсом. Результат Рабе [96] основан на наблюдениях Эрота 1926 и 1945 гг. Клеменс [51] определял μ^{-1} , используя новое значение постоянной нутации и предполагая известной прецессию. Столь большое различие μ^{-1} объясняется в том числе и тем, что неоправданно

допускалось, что Земля находится в состоянии гидростатического равновесия. Это сказывалось на результатах определения постоянной нутации. Приведенные значения μ^{-1} , определенные астрономическими методами, имеют только исторический интерес и приведены здесь, чтобы проиллюстрировать значение космических методов для определения селеноцентрической гравитационной постоянной GM_{ζ} .

Предполагая, что средние значения GM_{ζ} , определенные по каждому из видов космических аппаратов «Лунар Орбитер», «Рейнджер», «Сервейор», «Пионер», «Маринер», «Венера», равноточны, выведем из них среднее значение GM_{ζ} . За среднее значение, соответствующее наблюдениям ИСЛ «Лунар Орбитер», взято значение, выведенное в [92], [93] по комбинации всех пяти ИСЛ. Среднее же из наблюдений космических аппаратов «Рейнджер» выведено как простое среднее из приведенных в табл. 31 значений GM_{ζ} для этих аппаратов. То же было сделано при определении средних GM_{ζ} , соответствующих данным, полученным с помощью космических аппаратов «Сервейор-1, -3 — 7» и «Маринер-2, -4—7». Среднее значение GM_{ζ} , соответствующее наблюдениям с космических аппаратов «Венера», взято из работы [2], авторы которой вывели среднее из комбинации наблюдений космических аппаратов «Венера-4—7». То же относится к значениям GM_{ζ} , соответствующим наблюдениям с космических аппаратов «Рейнджер» [107], [112].

Сводка средних значений GM_{ζ} представлена в табл. 33 и изображена на рис. 56. Здесь приведено среднее значение GM_{ζ} , определенное по совокупности многолетних локационных и оптических наблюдений внутренних планет Солнечной системы, которое нами рассматривается тоже как равноточное. Ныне точность определений GM_{ζ} уже лимитируется точностью знания геоцентрической гравитационной постоянной GM_{\oplus} , астрономической единицы, расстояния до Луны, скорости распространения электромагнитных волн в межпланетной среде.

Из сравнения данных таблиц 32 и 33 видно, что применение космических аппаратов позволило уточнить значение фундаментальной постоянной GM_{ζ} астрономии и астеродинамики по сравнению со значением, которое давали прежние астрономические методы, на два порядка.

Определим массу M_{ζ} и среднюю плотность Луны σ_{ζ} . Величину M_{ζ} получим как отношение селеноцентрической гравитационной постоянной GM_{ζ} к кавендишевой гравитационной постоянной G . Точность знания массы Луны M_{ζ} зависит только от точности определения G , ибо зна

Таблица 33

Средние значения GM_{ζ} , определенные по наблюдениям различных космических аппаратов, и среднее GM_{ζ}

	«Лунар Орбитер»	«Рейнджер»	«Сервейор»	«Пионер»	«Маринер»	«Венера»	«Радиолокац. и оптич. наблюд.»	Среднее значение и ср. кв. оп.
	4902,							
GM_{ζ} , км ³ ·с ⁻²	73	63	64	78	80	72	70	71±0,02

чение GM_{ζ} известно почти на два порядка точнее, чем G . Принимая значение $GM_{\zeta} = 4902,7 \cdot 10^9 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ (см. табл. 33), а значение кавендишевой постоянной $G = (6,6745 - 0,0008) \cdot 10^{-2} \text{ гс}^2 \cdot \text{м}^{-3}$ (см. табл. 2), получим

$$M_{\zeta} = 7,3454 \cdot 10^{25} \text{ г.} \quad (5.8)$$

Средняя плотность Луны равна

$$\sigma_{\zeta} = \frac{M_{\zeta}}{\Omega},$$

где Ω — объем Луны, который с достаточной точностью можно вычислить как объем трехосного эллипсоида

$$\Omega = \frac{4}{3}\pi abc$$

(a , b , c — полуоси эллипсоида, значения которых равны соответственно 1738,04 км, 1737,68 км и 1736,67 км; см. § 36).

Приняв названные значения полуосей a , b , c и массы M_{ζ} , получим следующую величину средней плотности Луны:

$$\sigma_{\zeta} = 3,3433 \pm 0,0004 \text{ г/см}^3. \quad (5.9)$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что повышение точности определения массы и средней плотности

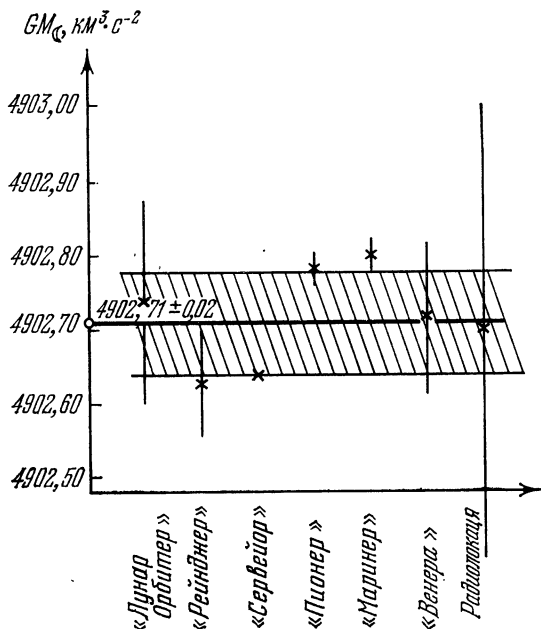


Рис. 56. Средние значения селеноцентрической гравитационной постоянной GM_{ζ} , определенные по наблюдениям космических аппаратов и по радиолокации и оптическим наблюдениям внутренних планет. Вертикальные черточки обозначают удвоенные средние квадратические ошибки определений GM_{ζ} . Ширина заштрихованной полосы обозначает величину шестикратной средней квадратической ошибки определения среднего значения GM_{ζ} .

Луны, равно как и некоторых других планет Солнечной системы, до настоящего времени зависит только от точности фундаментальной постоянной G , определяемой из лабораторных экспериментов на Земле.

§ 35. Центр фигуры и центр масс Луны

При изучении движения Луны по орбите, ее физической либрации, движения космических аппаратов в гравитационном поле Луны, при определении эфемеридного времени и др. необходимо знать положение *центра масс* (центра тяжести) Луны. Известно, что он не совпадает с *центром фигуры* Луны и это различие достигает 1—2 км. Физическая поверхность Луны иногда аппроксимируется простой геометрической фигурой (сферой, эллипсоидом вращения, трехосным эллипсоидом, поверхностью, описываемой суммой нескольких сферических функций). Но отождествление центра реальной фигуры, ограниченной физической поверхностью, с центром аппроксимирующей ее простой геометрической фигуры содержит элементы неопределенности. Подбирается сфера, эллипсоид или другая геометрическая фигура? Наилучшее приближение можно находить из условия, что сумма квадратов разностей радиусов-векторов между искомой поверхностью и физической минимальна, или из условия, что сумма модулей этих разностей минимальна, или из других более сложных условий. Все эти неопределенности исчезнут, если центр фигуры определять как центр масс Луны, однородной по плотности. Тогда координаты центра фигуры O_Φ относительно начала координат O можно вычислить по следующим простым формулам:

$$X_0 = \frac{\iiint_{\Omega} X d\Omega}{\iiint_{\Omega} d\Omega}, \quad Y_0 = \frac{\iiint_{\Omega} Y d\Omega}{\iiint_{\Omega} d\Omega}, \quad Z_0 = \frac{\iiint_{\Omega} Z d\Omega}{\iiint_{\Omega} d\Omega},$$

где $d\Omega$ — элемент объема, а Ω — объем Луны.

Это определение центра фигуры хорошо тем, что оно однородно с определением центра массы Луны, который зависит от реального неоднородного распределения плотности. Одних геометрических данных о Луне для определения положения центра масс недостаточно. Его положение проявляется во внешнем гравитационном поле, от него зависят моменты инерции Луны. Поэтому определить центр масс можно, наблюдая движения ИСЛ в гравитационном поле Луны, свободное падение тел на ее поверх-

ность, изучив некоторые особенности в движении и вращении самой Луны.

Задача ставится так. Известны координаты точек лунной поверхности относительно центра фигуры и центра масс. Необходимо определить взаимное положение этих центров. Абсолютные расстояния R точек лунной поверхности от центра масс определялись по разнообразным измерениям: времени свободного падения на лунную поверхность космических аппаратов «Рейнджер-6—9» [104], соотношения скорость — высота движения ИСЛ «Лунар Орбитер», силы тяжести непосредственно на Луне во время посадок космических кораблей «Аполлон-11, -12, -14, -17» (§ 14). Эти расстояния выводились по доплеровским наблюдениям прилунения космических аппаратов «Сервейор-1, -6», по лазерному зондированию с Земли уголковых отражателей, установленных на Луне, по VLBI-измерениям радиопередатчиков ALSEP. Перечисленные методы определения расстояния R пока реализованы только для видимой стороны Луны. Лишь по немногим фотограмметрическим измерениям и данным лазерного альтиметрирования с «Аполлонов» были получены величины абсолютных радиусов для экваториальной зоны обратной стороны Луны.

Сводки некоторых определений положения центра масс Луны относительно центра геометрической фигуры можно найти в [17], [105]. Авторы первой работы использовали абсолютные радиусы, относящиеся к видимой стороне Луны. В работе [105] приведены результаты 15 различных вариантов обработки результатов определений положения центра масс, в ряде случаев с учетом измерений на обеих сторонах Луны. Использовались наблюдения с помощью космических аппаратов. Положение центра масс Луны выводилось относительно центров аппроксимирующих Луну сферы, эллипсоида. В табл. 34 выписаны только пять вариантов решения. Во втором столбце таблицы показаны методы наблюдений, которые для краткости обозначены: РП — падение «Рейнджер-6—9»; СП — прилунение «Сервейора»; ФОТ — фотограмметрические определения базисных точек на Луне, V/H — скорость — высота «Лунар Орбитера-1», ЛА-15, -16 — лазерная альтиметрия с «Аполлонов-15 и -16». Смещения центра масс относительно центра фигуры обозначены через Δx , Δy , Δz . Положительное значение Δx означает, что центр фигуры находится

сзади центра масс, если смотреть с Земли; Δy положительно, когда центр фигуры влево от центра масс, Δz положительно, когда центр фигуры ниже центра масс. Звездочкой отмечены значения, которые заданы априорно.

Т а б л и ц а 34

Некоторые варианты аппроксимации геометрической поверхности Луны и положения центра масс относительно центра фигуры

Аппроксимируемая поверхность	Метод определения полуосей	Смещение центра масс, км			Размеры полуосей, км		
		Δx	Δy	Δz	a	b	c
Сфера	ЛА-15,16	2,20	1,10	1,0 *	1737,7	1737,7	1737,7
Сфера	ЛА-15,16, РП СП, ФОТ	2,05	0,91	1,0 *	1737,8	1737,8	1737,8
Эллипсоид	ЛА-15,16	2,07	1,11	1,0 *	1737,8	1737,5	1738,0 *
Эллипсоид	ЛА-15,16; РП СП, V/H , ФОТ	1,98	0,75	1,0 *	1738,2	1737,4	1738,0 *
Эллипсоид	ЛА-15,16; РП СП, V/H , ФОТ	2,15	0,77	0,07	1738,6	1737,5	1730,8

*) Заданы априорно.

В некоторых работах был проведен опыт определения центра масс способом, который основан на наилучшем согласовании поверхности селеноида с геометрической фигурой Луны. В результате согласования центр селеноида, принимаемый за центр масс, определяется относительно центра геометрической фигуры. Этот способ не вполне корректен, так как нельзя геометрическую поверхность Луны и эквипотенциальную поверхность (селеноид) рассматривать равноправными. Однако мы допускаем, что такой подход может дать некоторое приближенное взаимное положение названных центров.

Рассмотрим несколько подробнее определение положения центра масс относительно точек на лунной поверхности, в которых были произведены измерения силы тяжести. Таких точек, как известно, было четыре (§ 14). Распределение силы тяжести запишем так:

$$g(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM_{\zeta}}{\rho^2} + \delta g(R, \varphi, \lambda),$$

где

$$\delta g(R, \varphi, \lambda) = \frac{GM_{\zeta}}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_{nm} \cos m\lambda + h_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi).$$

δg представляет собой аномальную часть поля силы тяжести, которая задает отличие реального поля от поля силы тяжести однородной шаровой Луны. Если считать, что $g(\rho, \varphi, \lambda)$ получено из непосредственных измерений силы тяжести на лунной поверхности, то можно определить квадрат расстояния точки наблюдения от центра масс Луны

$$\rho^2 = \frac{GM_{\zeta}}{g(\rho, \varphi, \lambda) - \delta g}. \quad (5.10)$$

Из одного измерения силы тяжести определяется геометрическое место точек, где находится центр масс.

Таким местом точек является сфера, радиус которой равен расстоянию точки наблюдения от центра масс. Для определения центра масс необходимо произвести измерения силы тяжести по крайней мере в трех различных точках поверхности Луны. Пересечение трех сфер определит точку — центр масс. Очевидно, для более точного определения всех трех координат центра масс желательно точки измерения на Луне максимально разносить одну от другой.

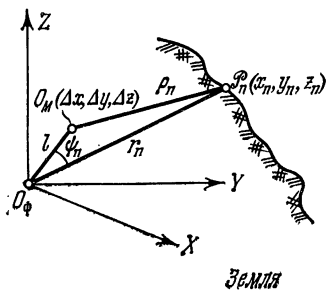


Рис. 57. Центр масс и центр фигуры Луны и параметры, характеризующие их взаимное положение.

Пусть S — физическая поверхность Луны (рис. 57), в точках \mathcal{P}_n которой производятся определения абсолютной силы тяжести g_n . Выбирается система координат с началом O_{ϕ} , совмещенным с центром фигуры Луны. Прямоугольные координаты точек \mathcal{P}_n пусть будут x_n, y_n, z_n , а сферические — $r_n, \varphi_n, \lambda_n$. Пусть ось X направлена на Землю, ось Z — по оси вращения, а ось Y — в восточном направлении. Центр масс Луны O_M смещен относительно O_{ϕ} и имеет координаты $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Расстояние от центра

масс до точки \mathcal{P}_n будем обозначать ρ_n ; тогда можно написать следующее равенство:

$$\rho_n^2 = r_n^2 + l^2 - 2r_n l \cos \psi_n, \quad (5.11)$$

где ψ_n — угол с вершиной в точке O_Φ между направлениями на точку \mathcal{P}_n и центр масс O_M , $l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ — расстояние между O_Φ и O_M

$$\cos \psi_n = \sin \varphi_n \sin \varphi_0 + \cos \varphi_n \cos \varphi_0 \cos (\lambda_n - \lambda_0),$$

(φ_0, λ_0) — угловые координаты направления из начала координат O_Φ на центр масс O_M .

Так как

$$\sin \varphi_0 = \Delta z/l, \quad \cos \varphi_0 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}/l, \quad \lambda_0 = \arctg \frac{\Delta x}{\Delta y}. \quad (5.12)$$

то

$$\begin{aligned} \cos \psi_n = & \frac{\Delta z}{l} \sin \varphi_n + \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{l} \times \\ & \times \cos \varphi_n \left[\cos \lambda_n \cos \left(\arctg \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) + \sin \lambda_n \sin \left(\arctg \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Проделав небольшие преобразования, будем иметь

$$\cos \psi_n = \frac{\Delta x}{l} \cos \varphi_n \sin \lambda_n + \frac{\Delta y}{l} \cos \varphi_n \cos \lambda_n + \frac{\Delta z}{l} \sin \varphi_n. \quad (5.13)$$

Найдем выражение $\cos \psi_n$ из (5.11) и приравняем его правой части (5.13). Вместо ρ_n^2 подставим его выражение из (5.10). В результате получим

$$\begin{aligned} GM \llbracket r_n^{-2} [g_n(\rho_n, \varphi_n, \lambda_n) - \delta g_n]^{-1} = & 1 + \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{r_n^2} - \\ & - 2 \left(\frac{\Delta x \cos \varphi_n \sin \lambda_n + \Delta y \cos \varphi_n \cos \lambda_n + \Delta z \sin \varphi_n}{r_n} \right), \\ & n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

В этом равенстве искомыми неизвестными будут Δx , Δy , Δz . Известными величинами являются r_n , φ_n , λ_n — сферические координаты точки наблюдения \mathcal{P}_n и $g_n(\rho_n, \varphi_n, \lambda_n)$ — величины силы тяжести, полученные из непосредственных измерений силы тяжести в точках \mathcal{P}_n , δg_n — аномалии силы тяжести, которые могут быть определены по известным

угловым координатам φ_n, λ_n точек наблюдения. Учитывая малость отношений $\Delta x/r_n, \Delta y/r_n, \Delta z/r_n$, можно в первом приближении вместо системы квадратических уравнений (5.14) решать систему линеаризированных уравнений. Введя для краткости новые обозначения, уравнения (5.14) перепишем в виде

$$d_n = a_n \Delta x + b_n \Delta y + c_n \Delta z, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.15)$$

где

$$a_n = - \frac{2 \cos \varphi_n \sin \lambda_n}{r_n}, \quad b_n = - \frac{2 \cos \varphi_n \cos \lambda_n}{r_n},$$

$$c_n = - \frac{2 \sin \varphi_n}{r_n},$$

$$d_n = GM \left(r_n^{-2} [g_n(\rho_n, \varphi_n, \lambda_n) - \delta g_n]^{-1} - 1 - \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{r_n^2} \right).$$

Поскольку в выражение d_n входит член $[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] : r_n^2$, то для решения системы уравнений можно применить метод последовательных приближений. Оценим ожидаемую точность определения координат, исходя из следующих предположений. Пусть случайная ошибка учета аномалий силы тяжести δg_n или измерения абсолютной силы тяжести равна ± 16 мГал; тогда расстояние от принятого начала координат до центра масс будет определяться со случайной ошибкой ± 100 м. Увеличение числа независимых измерений силы тяжести будет приводить к уменьшению случайной ошибки определения координат центра масс.

Эффективность метода определения положения центра масс относительно центра фигуры по измерениям силы тяжести на Луне проиллюстрируем следующим образом. Используем измеренные значения силы тяжести g_n (см. табл. 12) и координаты мест посадок «Аполлонов-11, -12, -14, -17» (см. табл. 38). Будем определять положение центра масс O_m относительно начала системы координат, в которой заданы места посадок «Аполлонов». Для этого предварительно редуцируем измеренные значения силы тяжести g_n на уровень, для которого имеется карта аномалий силы тяжести (см. рис. 31), т. е. на 100 км выше лунной поверхности. Редуцированные значения силы тяжести обо-

значим

$$g_{h=100} = g_n + \delta_1 g,$$

где $\delta_1 g$ — поправка за изменение высоты на 100 км. Далее, воспользовавшись гравиметрической картой (см. рис. 31), по координатам точек посадок «Аполлонов» определим аномалии силы тяжести δg . Силы тяжести с учетом этих аномалий обозначим

$$g_{h=100}^0 = g_n + \delta_1 g + \delta g.$$

Значения $g_{h=100}^0$ для четырех пунктов на Луне (табл. 35)

Т а б л и ц а 35

Сила тяжести в местах посадок космических кораблей «Аполлон»: g_n — измеренная; $g_{h=100}$, $g_{h=100}^0$ — редуцированные значения. $R_n = (r_n + 100)$ км — расстояние до уровня редуцирования

Космический корабль	g_n , мГал	R_n , км	$g_{h=100}$, мГал	δg , мГал	$g_{h=100}^0$, мГал
«Аполлон-11»	162852	1835,505	145599	-28	145571
«Аполлон-12»	674	1836,014	436	+50	486
«Аполлон-14»	653	1836,369	426	+70	496
«Аполлон-17»	695	1834,814	422	+40	462

использовали для определения координаты Δx , Δy , Δz . В результате вычислений получилось

$$\Delta x = -300 \text{ м}, \quad \Delta y = -90 \text{ м}, \quad \Delta z = 0. \quad (5.16)$$

Поскольку в качестве исходных координат мест посадок были использованы координаты, уже отнесенные к центру масс, величины Δx , Δy , Δz должны быть равными нулю. Полученные же значения Δx , Δy , Δz (5.16) показывают ошибки метода определения положения центра масс по измерению силы тяжести на Луне. При этом следует отметить неблагоприятность размещения на Луне точек измерения g_n . Широты мест посадок максимально различались всего лишь на 24° . Выше говорилось, что для эффективности метода необходимы измерения в точках, разнесенных по всей Луне. И при этих условиях можно сказать о достаточно высокой точности определения центра масс по измерениям силы тяжести.

§ 36. Общая геометрическая фигура Луны

Несмотря на большую историю изучения геометрической фигуры Луны, она известна недостаточно хорошо. Под геометрической фигурой Луны подразумевается фигура ее физической поверхности. В зависимости от решаемых задач рассматривается общая геометрическая фигура Луны в виде трехосного эллипсоида, эллипсоида вращения, сферы или физическая поверхность с учетом неровностей ее деталей. Представления о геометрической фигуре Луны, сложившиеся на основании наземных астрономических наблюдений видимой стороны, были уточнены после того, как стали применяться космические методы изучения Луны. 4 сентября 1959 г. АМС «Луна-3» совершила облет Луны и сфотографировала ее обратную сторону. Далее серия советских автоматических станций «Луна» и «Зонд» и американских «Рейнджер», «Лунар Орбитер», и «Аполлон» доставили новые сведения о топографии Луны (§ 33). Основной задачей селенодезии является построение селенодезической сети точек лунной поверхности. О таких сетях уже шла речь в § 33. Здесь только добавим к сказанному, что достаточно подробный обзор селенодезических сетей приведен в работе Н. П. Словохотовой [26]. Обзорная сводка в этой работе дает сведения о 16 селенодезических каталогах. В ней указаны авторы каталогов, название публикации, исходный наблюдательный материал, инструмент наблюдений, эпоха, место наблюдения, количество и характер опорных точек, содержание каталога, метод привязки, характер системы, ошибка по оценке авторов каталогов. В сводку не вошли каталоги более поздней публикации.

Будем рассматривать *общую геометрическую фигуру* Луны, аппроксимируемую простой математической поверхностью. При аппроксимации сферой достаточно определить четыре параметра (три координаты центра сферы относительно центра масс и радиус сферы). Очевидно, что координаты центра фигуры относительно центра масс равны по абсолютной величине координатам центра масс относительно центра фигуры, но имеют противоположный знак (§ 35). Необходимо определять радиус, средний для всей Луны, а не только для части сферы, представляющей видимую сторону. В этом отношении неверно иногда

встречающееся в литературе утверждение, что центр фигуры, определенный по большей части видимой стороны, близок к центру фигуры всей Луны. В табл. 36 приведены значения средних радиусов, выведенные по лазерной альтиметрии экваториальной зоны Луны [77]. В этой же таблице приведены определенные по тем же исходным данным положения центра масс относительно центра сферы.

Т а б л и ц а 36

Средний радиус Луны, выведенный по лазерной альтиметрии экваториальной зоны Луны [77]

Космический корабль	Средний радиус, км	Сдвиг центра масс, км	Направление сдвига
«Аполлон-15»	1737,3	2,1	25°Е
«Аполлон-16»	1738,1	2,9	25°Е
«Аполлон-17»	1737,4	2,3	23°Е
Среднее весовое	1737,7	2,55	24°Е

Дальнейшим приближением к общей геометрической фигуре Луны является эллипсоид. Для его определения необходимо знать уже девять параметров: три координаты центра фигуры, три направляющих косинуса, задающих ориентацию эллипсоида, и три полуоси эллипсоида. В случае эллипсоида вращения число неизвестных параметров уменьшается до семи. В табл. 34 уже были приведены параметры эллипсоидов, аппроксимирующих геометрическую фигуру Луны. При этих аппроксимациях априорно предполагалось, что оси эллипсоидов параллельны осям селеноцентрической системы координат, в которой ось X направлена на Землю, а ось Z — вдоль оси вращения. Из-за этого из девяти названных параметров три (направляющие косинусы, задающие ориентацию эллипсоида) являются известными. В работе [43] реальная геометрическая фигура Луны тоже аппроксимировалась эллипсоидом, но в предположении произвольной его ориентации. В качестве исходных данных использовалось 5800 лазерных альтиметрических измерений с помощью «Аполлонов». Точность их была $\sigma_1 = \pm 0,3$ км. Кроме того, было использовано 1400 измерений абсолютных радиусов-век-

торов с началом в центре масс, которые были получены по космическим фотографиям с точностью $\sigma_2 = \pm 0,3$ км. К ним еще было добавлено 3300 измерений радиусов-векторов точек лунной поверхности, полученных по фотографиям с Земли. Точность последних $\sigma_3 = \pm 1,0$ км. В результате был подобран наилучший эллипсоид (табл. 37).

Т а б л и ц а 37

Параметры эллипсоида, аппроксимирующего геометрическую фигуру Луны, по [43]

Оси эллипсоида	Размер полуосей	Ср. кв. ош.	Направление полуосей		Смещение центра масс	Ср. кв. ош.
	километры		φ	λ	километры	
Большая	1738,04	$\pm 0,09$	23°S	20°E	1,57	$\pm 0,08$
Средняя	1737,68	$\pm 0,06$	33°N	94°E	0,30	$\pm 0,04$
Малая	1736,67	$\pm 0,13$	48°N	317°E	0,75	$\pm 0,13$

В четвертой и пятой колонках таблицы 37 показаны направления полуосей эллипсоида. Средний радиус сферической Луны, соответствующий этим же исходным данным, равен $1737,46 \pm 0,04$ км. Аппроксимация эллипсоида с произвольной ориентацией производилась и раньше, но использовались менее точные исходные данные.

Таким образом, геометрическая фигура Луны аппроксимируется трехосным эллипсоидом, ориентация осей которого сильно не согласуется с осями селенодезической системы координат. Малая ось эллипсоида не совпадает с осью вращения, вся геометрическая фигура существенно асимметрична относительно экваториальной плоскости. Как мы увидим ниже, такого большого рассогласования нет для динамической фигуры Луны. Это означает, что массы, составляющие рельеф Луны, имеют компенсационное распределение на глубине, которое в конечном итоге приводит к тому, что оси динамической фигуры близки к осям селенодезических координат.

Конечно, геометрическая фигура, характеризуемая данными, представленными в табл. 37, не является окончательной, хотя формально названная точность определения полуосей эллипсоида высокая. Но это прежде всего оценка по внутренней сходимости и для неполных сведений о вы-

сотах Луны в приполярных областях и на обратной стороне. Возможность получения большого числа вариантов модели геометрической фигуры, согласующихся с наблюдательными данными (см. табл. 34) скорее свидетельствует о неполноте исходных наблюдательных данных. Из-за этого необходимо априорное задание одной полуоси.

В заключение остановимся на новой информации, которая может быть использована для уточнения общей геометрической фигуры Луны. Речь идет об очень точных пространственных координатах нескольких пунктов на Луне, в которых совершали посадку космические корабли «Аполлон» и «Луноходы». На пяти из них были установлены уголкового отражатели («Аполлон-11, -14, -15, «Луноход-1, -2»). На «Луноходах» были установлены уголкового отражатели, разработанные французскими учеными. Лазерная локация с Земли уголкового отражателей позволяет точно измерять расстояние между отражателем и локационной станцией на Земле. Кроме того, во время посадок «Аполлонов-12, -14—17» на Луне были установлены радиопередатчики, работающие на частоте 2,3 ГГц. Они были предназначены для проведения ряда экспериментов ALSEP (Apollo Lunar Surface Experiments Package). Сигналы от этих передатчиков предполагалось наблюдать с Земли при помощи длиннобазисного радиointерферометра VLBI (Very Long Base Interferometry). Комплект такой аппаратуры позволяет измерять относительное положение точек на Луне с точностью 1—3 м, а вращательные движения вокруг центра масс с точностью $\sim 1''$. Лазерная локация и наблюдения VLBI предназначены для проведения широкого круга экспериментов по изучению Луны и экспериментов по гравитации.

Предполагалось проверить соответствие наблюдаемого положения Луны с положением, рассчитанным согласно существующим теориям движения Луны, уточнить селенодезические координаты уголкового отражателей и передатчиков ALSEP, изучить физическую либрацию, уточнить динамические сжатия Луны, определить гармонические коэффициенты разложения гравитационного поля Луны 3-го и 4-го порядков, уточнить отношение μ^{-1} масс Луны и Земли, уточнить отношение массы Солнца к сумме масс Земли и Луны, определить сжатие Солнца. Кроме того, планировалось проверить принцип эквивалентности

для больших масс, проверить теорию гравитации Дике — Бранса, эффекты гравитационных волн, измерить изменение постоянной тяготения G во времени и др. [41]. В результате 97 отдельных наблюдений с помощью передатчиков ALSEP в течение 16 месяцев и 1184 лазерных наблю-

Таблица 38

Точные прямоугольные и сферические координаты мест установок на Луне уголковых отражателей и передатчиков системы ALSEP

	X, км	Y, км	Z, км	R, км	λ , град	φ , град
Уголковые отражатели						
«Аполлон-11»	1592,506	689,537	20,973	1735,505	23,41205	0,69244
«Аполлон-14»	1652,333	-522,205	-109,762	1736,362	-17,53870	-3,62427
ALSEP						
«Аполлон-12»	1590,046	-690,866	-90,558	1736,014	-23,48471	-2,99013
«Аполлон-14»	1652,350	-522,178	-109,748	1736,369	-17,53768	-3,62379
«Аполлон-15»	1554,782	96,992	765,007	1735,509	3,56965	26,15478
«Аполлон-16»	1654,363	458,816	-270,432	1737,453	15,43634	-8,95506
«Аполлон-17»	1399,730	831,357	599,313	1734,814	30,70781	20,21006

дений уголковых отражателей в течение 3,5 лет был сделан ряд интересных выводов. Они относились к движению, вращению и колебаниям Луны, а также к проверке некоторых вопросов теории гравитации. В частности, с высокой точностью были определены [78] прямоугольные и сферические координаты мест установки уголковых отражателей и передатчиков ALSEP относительно центра масс Луны (табл. 38). Ошибка определения координат x не превосходит 30 м, а по каждой из двух других координат y и z — менее 10 м.

§ 37. Динамическая фигура Луны

Известно, что движение Луны в пространстве складывается из поступательного движения ее центра масс и вращения вокруг этого центра. Для описания вращательных движений Луны недостаточно знать массу и положение центра масс — необходимо определять другие ее динамические характеристики: моменты инерции второго поряд-

ка. Их всего девять, но независимых только шесть. В безразмерном виде их можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{M_{\zeta} R^2} \int_{\Omega} \sigma (y^2 + z^2) d\Omega, & B &= \frac{1}{M_{\zeta} R^2} \int_{\Omega} \sigma (x^2 + z^2) d\Omega, \\ C &= \frac{1}{M_{\zeta} R^2} \int_{\Omega} \sigma (x^2 + y^2) d\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{1}{M_{\zeta} R^2} \int_{\Omega} \sigma yz d\Omega, & E &= \frac{1}{M_{\zeta} R^2} \int_{\Omega} \sigma xz d\Omega, \\ F &= \frac{1}{M_{\zeta} R^2} \int_{\Omega} \sigma xy d\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

где σ — плотность, Ω — объем Луны, M_{ζ} — ее масса, R — радиус, A, B, C — осевые моменты инерции, первый относительно оси X , второй — оси Y , третий — оси Z , D, E, F — центробежные моменты инерции, каждый из которых зависит от расстояний от двух плоскостей. Так, D зависит от расстояния y от плоскости OXZ и расстояния z от плоскости OXY ; E — от расстояний x и z и F — от расстояний x и y .

Заметим, что осевые моменты всегда положительны, а центробежные могут принимать любой знак. Из теоретической механики известно, что можно так выбрать направления трех прямоугольных координатных осей X, Y, Z , что центробежные моменты инерции (5.2) будут равны нулю. Осевые моменты A, B, C будут характеризовать эллипсоид инерции. Оси этого эллипсоида называются главными осями инерции. Если начало координат совмещено с центром масс, то эллипсоид инерции называется центральным эллипсоидом инерции, а его оси — центральными осями эллипсоида инерции. Центральный эллипсоид инерции Луны принимается за ее динамическую фигуру. Различие динамических фигур планет состоит только в отличии параметров их центральных эллипсоидов инерции. Вообще, когда речь идет о динамической фигуре планет, обычно не интересуются какой-либо конкретной ее фигурой. Подразумевается какое-то фиктивное тело, обладающее заданными динамическими характеристиками, а именно с определенными осевыми моментами инерции. При

этом может быть, что тела с различными внешними фигурами и внутренними строениями имеют одинаковую динамическую фигуру.

Итак, динамическая фигура в системе координат, начало которой совмещено с центром масс, а оси с центральными осями эллипсоида инерции, характеризуется осевыми моментами инерции A , B , C . В уравнениях движения используются так называемые *динамические сжатия*, которые определяются следующим образом:

$$\alpha = \frac{C-B}{A}, \quad \beta = \frac{C-A}{B}, \quad \gamma = \frac{B-A}{C}. \quad (5.19)$$

Ниже мы рассмотрим, как выражаются A , B , C через *гармонические коэффициенты* C_{nm} и S_{nm} разложения гравитационного поля Луны в ряд по сферическим функциям и как они определяются из наблюдений. Но сначала установим связь гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} со *степенными моментами инерции* J_{pqr} . Общее выражение для безразмерных степенных моментов инерции в прямоугольной системе координат можно записать в виде

$$J_{pqr} = \frac{1}{M \zeta R^{p+q+r}} \int_{\Omega} \sigma x^p y^q z^r d\Omega, \quad p, q, r = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.20)$$

где $p + q + r = n$ — порядок степенного момента.

Для заданного n будет $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ различных комбинаций индексов p , q , r , т. е. возможно такое число различных степенных моментов J_{pqr} . С другой стороны, для n -го порядка будет всего $2n + 1$ различных гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} . Таким образом, число степенных моментов n -го порядка на $\frac{n(n-1)}{2}$ больше, чем гармонических коэффициентов того же порядка. В табл. 39 для иллюстрации приведено число гармонических коэффициентов, степенных моментов и различие их числа в зависимости от порядка n . Как видно из таблицы, это различие растет очень быстро.

Выпишем выражения гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} , записанные в прямоугольной системе координат для $n = 0, 1, 2, 3$ (они будут нами использованы в

дальнейшем):

$$\begin{aligned}
 C_{00} &= \frac{1}{M_{\zeta}} \int_{\Omega} \sigma d\Omega, & C_{10} &= \frac{1}{M_{\zeta} R} \int_{\Omega} \sigma z d\Omega, \\
 C_{11} &= \frac{1}{M_{\zeta} R} \int_{\Omega} \sigma x d\Omega, & S_{11} &= \frac{1}{M_{\zeta} R} \int_{\Omega} \sigma y d\Omega, \\
 C_{20} &= \frac{1}{2M_{\zeta} R^2} \int_{\Omega} \sigma [2z^2 - (x^2 + y^2)] d\Omega, \\
 C_{21} &= \frac{1}{M_{\zeta} R^2} \int_{\Omega} \sigma xz d\Omega, & S_{21} &= \frac{1}{M_{\zeta} R^2} \int_{\Omega} \sigma yz d\Omega, \\
 C_{22} &= \frac{1}{4M_{\zeta} R^2} \int_{\Omega} \sigma (x^2 - y^2) d\Omega, & S_{22} &= \frac{1}{2M_{\zeta} R^2} \int_{\Omega} \sigma xy d\Omega, \\
 C_{30} &= \frac{1}{2M_{\zeta} R^3} \int_{\Omega} \sigma z [2z^2 - 3(x^2 + y^2)] d\Omega, \\
 C_{31} &= \frac{1}{M_{\zeta} R^3} \int_{\Omega} \sigma x \left[z^2 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \right] d\Omega, \\
 S_{31} &= \frac{1}{M_{\zeta} R^3} \int_{\Omega} \sigma y \left[z^2 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \right] d\Omega, \\
 C_{32} &= \frac{1}{4M_{\zeta} R^3} \int_{\Omega} \sigma z (x^2 - y^2) d\Omega, \\
 S_{32} &= \frac{1}{2M_{\zeta} R^3} \int_{\Omega} \sigma xyz d\Omega, \\
 C_{33} &= \frac{1}{24M_{\zeta} R^3} \int_{\Omega} \sigma x (x^2 - 3y^2) d\Omega, \\
 S_{33} &= \frac{1}{24M_{\zeta} R^3} \int_{\Omega} \sigma y (3x^2 - y^2) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Уже эти немногие выражения позволяют представить себе структурную связь гармонических коэффициентов со степенными моментами инерции. Но степенные моменты в общем случае невозможно выразить через гармонические коэффициенты. Только единственный степенной момент нулевого порядка равен гармоническому

Таблица 39

Число гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} , число степенных моментов J_{pqr} и их разность в зависимости от порядка n

Порядок, n	Число гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} , $2n + 1$	Число степенных моментов J_{pqr} , $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	Разность, $\frac{n(n-1)}{2}$
0	1	1	0
1	3	3	0
2	5	6	1
3	7	10	3
4	9	15	6
5	11	21	10
.	.	.	.
.	.	.	.
20	41	231	190
.	.	.	.
.	.	.	.
100	201	5151	4950

коэффициенту нулевого порядка:

$$J_{000} = C_{00} = 1.$$

Степенных моментов первого порядка ($n = 1$) три, такое же число гармонических коэффициентов первого порядка. Они соответственно равны:

$$C_{10} = J_{100}, \quad C_{11} = J_{010}, \quad S_{11} = J_{001}.$$

Гармонические коэффициенты первого порядка характеризуют положения центра масс. Координаты центра масс Δx , Δy , Δz относительно начала координат, в которой определены C_{nm} и S_{nm} , равны

$$\Delta x = RC_{10}, \quad \Delta y = RC_{11}, \quad \Delta z = RS_{11}. \quad (5.22)$$

Гармонических коэффициентов второго порядка всего пять, а степенных моментов шесть. Три степенных момента выражаются непосредственно через гармонические коэффициенты. Это центробежные моменты:

$$J_{110} = 2S_{22}, \quad J_{101} = C_{21}, \quad J_{011} = S_{21}.$$

Остальные два гармонических коэффициента второго порядка C_{20} и C_{22} выражаются только через комбинацию трех степенных моментов J_{200} , J_{020} , J_{002} второго порядка. Обратившись к равенствам (5.20), (5.21), можно получить

$$C_{20} = J_{002} - \frac{1}{2}(J_{200} + J_{020}), \quad C_{22} = \frac{1}{4}(J_{200} - J_{020}). \quad (5.23)$$

Степенные моменты J_{200} , J_{020} , J_{002} можно выразить через C_{20} и C_{22} , если привлечь динамическое сжатие β (из наблюдений более уверенно определяются β и γ и менее уверенно α). Из (5.19), (5.17) и (5.20) имеем

$$\beta = \frac{J_{200} - J_{002}}{J_{200} + J_{002}}. \quad (5.24)$$

На основании (5.23) и (5.24) можно вывести следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} J_{200} &= \frac{1+\beta}{2\beta}(2C_{22} - C_{20}), \\ J_{020} &= \frac{1}{2\beta}[2(1-3\beta)C_{22} - (1+\beta)C_{20}], \\ J_{002} &= \frac{1-\beta}{2\beta}(2C_{22} - C_{20}). \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Семь гармонических коэффициентов третьего порядка можно представить в виде комбинаций из 10 степенных моментов инерции того же порядка:

$$\begin{aligned} C_{30} &= -\frac{3}{2}(J_{201} + J_{021} - 2J_{003}), \\ C_{31} &= -\frac{1}{4}(J_{300} + J_{120} - 4J_{102}), \\ S_{31} &= -\frac{1}{4}(J_{210} + J_{030} + 4J_{012}), \\ C_{32} &= \frac{1}{4}(J_{201} - J_{021}), \quad S_{32} = \frac{1}{2}J_{111}, \\ C_{33} &= \frac{1}{24}(J_{300} - 3J_{120}), \quad S_{33} = \frac{1}{24}(3J_{210} - J_{030}). \end{aligned}$$

С другой стороны, для того чтобы выразить степенные моменты инерции через гармонические коэффициенты, не хватает трех уравнений, которые связывали бы степенные моменты с какими-нибудь тремя дополнительными наблю-

даемыми параметрами, характеризующими динамические свойства Луны. Еще больше не хватает подобных уравнений для степенных моментов более высоких порядков. Используя выражения (5.17) и (5.21), напишем соотношения, связывающие моменты инерции A, B, C Луны с гармоническими коэффициентами C_{20} и C_{22} :

$$\left. \begin{aligned} A + B - 2C &= 2C_{20}, \\ B - A &= 4C_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Выразить же отдельно каждый из моментов A, B, C через два гармонических коэффициента не удастся. Это возможно только для комбинации моментов инерции. Из (5.26) легко получить соотношения

$$\left. \begin{aligned} B - C &= C_{20} + 2C_{22}, \\ C - A &= 2C_{22} - C_{20}, \\ A - B &= -4C_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Моменты инерции Луны первоначально выводились исключительно из наблюдений движений самой Луны: физической либрации, движений перигея и узла лунной орбиты.

Новая возможность уточнения A, B, C появилась в связи с определением гармонических коэффициентов C_{20} и C_{22} по наблюдениям ИСЛ. Для вывода трех неизвестных A, B, C в принципе имеются два уравнения (5.26), связывающие их с гармоническими коэффициентами C_{20} и C_{22} , и три уравнения (5.19), связывающие A, B, C с динамическими сжатиями α, β, γ . Однако уравнение, включающее α (5.19), практически для выводов A, B, C не используется из-за неуверенного определения α из наблюдений. Из остающихся четырех уравнений три неизвестных A, B, C могут определяться по способу наименьших квадратов. Эти уравнения следующие:

$$\left. \begin{aligned} C_{20} &= \frac{A + B - 2C}{2}, & \beta &= \frac{C - A}{B}, \\ C_{22} &= \frac{B - A}{4}, & \gamma &= \frac{B - A}{C}. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Вычислим заново величины моментов инерции Луны A, B, C . Одновременно используем уравнения (5.28) для уравнивания полученных из наблюдений значений

β , γ , C_{20} и C_{22} . Для этого предварительно вычислим средние значения последних величин по ряду их наблюдений. Значения гармонических коэффициентов C_{20} и C_{22} по наблюдениям ИСЛ определялись полтора десятка раз различными авторами по наблюдениям различных ИСЛ. В табл. 40 приведены основные определения C_{20} и C_{22} .

Таблица 40

Сводка значений гармонических коэффициентов C_{20} и C_{22} , определенных по наблюдениям ИСЛ

Автор, источник, год публикации	Величина C_{20} и ср. кв. ошибка, в 10^{-6}	Величина C_{22} и ср. кв. ошибка, в 10^{-6}
Аким [1], 1966	206±2,2	14±1,2
Толсон, Гапцинский [107], 1968	205,96±14	20,42±2,9
Лорелл, Сьегрен [88], 1968	202,63±1,43	21,91±2,5
Мичел, Блэкшиер, Гапцинский [93], 1970	207,1±3,3 *)	22,42±1,7 *)
Лорелл [87], 1970	195,64±3,3 *)	15,87±1,7 *)
Сьегрен [103], 1971	204,8±3,0	22,1±0,5
Лиу, Лайнг [86], 1971	199,6±2,0	23,59±5,3
Мичел, Блэкшиер [92], 1972	203,8±3,6 *)	24,85±1,7 *)
Феррари [61], 1972	205,60±3,3 *)	22,58±1,7 *)
Бруант, Вильямсон [46], 1974	201,24±0,19	20,2±1,9
Синклер и др. [106], 1976	202,91±1,33	22,4±0,2
Блэкшиер, Гапцинский [44], 1977	202,19±0,91	22,21±1,23
Ананда [35], 1977	210,9±3,97	22,1±0,08
Феррари [62], 1977	204,6±3,8	21,5±1,2
Аким, Власова (вариант 3), [3], 1977	200,1±3,3 *)	25,0±1,7 *)
Весовое среднее	201,41±0,24	22,10±0,16

*) Средние квадратические ошибки приняты априорно.

При их определениях применялись различные методы обработки наблюдений, использовалась различная комбинация исходных наблюдательных данных. Ясно, что все они имеют различную точность, большая их часть взаимно зависима, так как использовались одни и те же наблюдательные данные, в основном данные ИСЛ «Лунар Орбитер». Имеются среди них и полностью независимые друг от друга определения C_{20} и C_{22} . Такими являются значения коэффициентов, выведенные по наблюдениям только ИСЛ «Лунар Орбитер» и только ИСЛ «Луна». Оценить истинную точность

значений C_{20} и C_{22} трудно. Мы решили вывести весовое среднее. В качестве веса принималась величина, обратно пропорциональная дисперсии определения C_{20} и C_{22} . Для приведенных в таблице пар значений гармонических коэффициентов десять авторов указало средние квадратические ошибки своих определений C_{20} и C_{22} . Поэтому предварительно

Т а б л и ц а 41

Сводка некоторых определений динамических сжатий Луны

Автор, публикация, год	Метод	β	γ	α *)
		в 10^{-9}		
Козиел [81], 1967	Гелиометрические наблюдения с 1877 по 1915 г.	629,4 $\pm 0,6$	231,0 $\pm 3,2$	398,4
Бендер и др. [42], 1974	Лазерные наблюдения угловых отражателей	631,1 $\pm 0,4$	226,8 $\pm 1,0$	404,3
Вильямс и др. [114], 1974	»	631,26 $\pm 0,3$	227,37 $\pm 0,6$	403,89
Кинг и др. [78], 1976	Лазерные наблюдения угловых отражателей и наблюдения VLBI	631,27 $\pm 0,03$	227,7 $\pm 0,7$	403,6

*) Определено вычислением по β и γ из условия $\alpha = \beta - \gamma$.

нами по этим десяти определениям были вычислены средние весовые значения C_{20} и C_{22} и их средние квадратические ошибки. Последние оказались равными $\pm 3,3 \cdot 10^{-6}$ для C_{20} и $\pm 1,7 \cdot 10^{-6}$ — для C_{22} . Эти ошибки были приписаны остальным пяти парам значений C_{20} и C_{22} , для которых их авторами не указаны ошибки. Затем по всем 15 парам значений гармонических коэффициентов вновь было проведено вычисление средних весовых значений:

$$\left. \begin{aligned} C_{20} &= -(201,41 \pm 0,24) \cdot 10^{-6}, \\ C_{22} &= (22,10 \pm 0,16) \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Теперь найдем значения динамических сжатий β и γ для Луны. Результаты некоторых их определений из наблюдений приведены в табл. 41. Среди них результаты Козиела [81], полученные на основании почти сорокалет-

них астрономических наблюдений Луны, результаты лазерной локации угловых отражателей [42], [114] и наиболее точные значения β и γ , выведенные Р. Кингом, К. Коунсельменом и И. Шапиро [78] путем совместного использования многолетних лазерных наблюдений и наблюдений передатчиков ALSEP. Используя приведенные в табл. 41 значения β и γ , мы вычислили соответствующие средние весовые значения. За веса приняты величины, обратно пропорциональные квадратам средних квадратических ошибок. Средние весовые значения динамических сжатий получились равными

$$\left. \begin{aligned} \beta &= (631,26 \pm 0,05) \cdot 10^{-6}, \\ \gamma &= (227,45 \pm 0,32) \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Достигнутая высокая точность определения динамических сжатий β и γ по лазерной локации угловых отражателей и наблюдениям с помощью VLBI дают возможность вычислять величину C_{22} , предполагая известной C_{20} :

$$C_{22} = - \frac{C_{20}\gamma(1+\beta)}{4\beta + 2\beta\gamma - 2\gamma}. \quad (5.31)$$

Подставив в (5.31) значения (5.29) и (5.30), найдем

$$C_{22} = 22,15 \cdot 10^{-6}.$$

Поскольку величины C_{20} , C_{22} , β , γ связаны между собой соотношениями (5.28), будет более правильно находить их значения путем взаимного уравнивания с учетом точности определения из наблюдений каждой из них. Поставим задачу определить моменты инерции Луны A , B , C и найти уравненные значения C_{20} , C_{22} , γ , β . Для решения задачи с помощью системы уравнений (5.28) используем найденные нами средневесовые значения C_{20} , C_{22} (5.29) и β , γ (5.30). Результаты этих расчетов представлены в табл. 42. В ней также даны разности δC_{20} , δC_{22} , $\delta\beta$, $\delta\gamma$ между исходными значениями C_{20} , C_{22} , β , γ и уравненными. Приведенные в табл. 42 значения C_{20} , C_{22} , β , γ мы считаем наилучшими и будем их использовать в своих дальнейших выводах и расчетах. Взаимосогласованная система параметров ранее выводилась в [113], но исходная информация была не столь полной, как у нас.

Моменты инерции Луны A , B , C входят в уравнения для неравенств в движении перигея $d\lambda$ и узла $d\Omega$ лунной

Т а б л и ц а 42

Результаты вычисления главных моментов инерции Луны A , B , C и уравненные значения C_{20} , C_{22} , β , γ

C_{20}	δC_{20}	C_{22}	δC_{22}	β	$\delta\beta$	γ	$\delta\gamma$
в 10^{-6}							
-201,40	-0,01	22,10	0,00	631,26	0,00	227,13	0,320

A	B	C
0,388 550 44	0,388 462 08	0,388 707 36

орбиты:

$$\left. \begin{aligned} d\pi &= 20,138 (6,27B - 4,27A - 2C), \\ d\Omega &= -0,334 (C - A). \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Величины $d\pi$ и $d\Omega$ определяются из наблюдений. Г. А. Мещеряков с сотрудниками [22] использовал эти уравнения для вычисления моментов инерции A , B , C , добавляя уравнения (5.32) к системе (5.28). В качестве исходных гармонических коэффициентов они брали коэффициенты, опубликованные в [1], [64], [87], [94], динамические сжатия — из [41], а наблюдения движения перигея $d\pi$ и узла $d\Omega$ — из [58]. Повторное уточнение величин C_{20} , C_{22} , β , γ , $d\Omega$, $d\pi$ путем их взаимного уравнивания было произведено в работе [23]. При этом были использованы другие исходные гармонические коэффициенты C_{20} и C_{22} .

Выше предполагалось, что оси координат, в которой заданы моменты инерции A , B , C , совмещены с ее главными осями инерции. Практически же вывод гармонических коэффициентов из наблюдений ИСЛ производится в некоторой исходной селенографической системе координат, которая может быть смещена относительно центра инерции и повернута относительно главных осей инерции Луны. Тогда будут не равны нулю центробежные моменты инерции D , E , F (5.18). О том, каковы по величине

D , E , F по сравнению с моментами инерции A , B , C (5.17) в системе координат, в которой производились наблюдения ИСЛ и определялись гармонические коэффициенты гравитационного поля, дает представление тензор инерции T_2 Луны. Например, T_2 , соответствующий гармоническим коэффициентам, выведенным Феррари [62], равен

$$T_2 = M_{\zeta} R^2 \begin{pmatrix} A & E & F \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix} = \\ = M_{\zeta} R^2 \begin{pmatrix} 0,398\,320\,8 & -0,000\,000\,34 & 0,000\,005\,37 \\ -0,000\,000\,34 & 0,398\,411\,18 & 0,000\,006\,17 \\ 0,000\,005\,37 & 0,000\,006\,17 & 0,398\,571\,95 \end{pmatrix}.$$

При этом было принято $\beta = 6,294 \cdot 10^{-4}$.

Малость D , E , F свидетельствует о близости исходной селеноцентрической системы координат к системе, связанной с осями инерции Луны. Остановимся на определении углов поворота исходной селенографической системы координат, которую обозначим x_1 , y_1 , z_1 относительно системы координат, оси которой X , Y , Z совмещены с главными осями инерции Луны. Начала этих двух систем координат предполагаются совмещенными. В случае использования углов Эйлера координаты точек x_1 , y_1 , z_1 выражаются через координаты X , Y , Z следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

где

$$a_1 = \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi,$$

$$a_2 = -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi, \quad a_3 = \sin \theta \sin \varphi,$$

$$b_1 = \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi,$$

$$b_2 = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi,$$

$$b_3 = -\sin \theta \cos \varphi,$$

$$c_1 = \sin \theta \sin \psi, \quad c_2 = \sin \theta \cos \psi, \quad c_3 = \cos \theta.$$

Написанная матрица поворота образована как произведение трех матриц последовательных поворотов вокруг трех осей. Используя выражения (5.21) и (5.33), можно соста-

вить систему уравнений, связывающих гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} в исходной селенографической системе координат с C_{nm}^* и S_{nm}^* в системе координат, совмещенной с главными осями инерции Луны:

$$\left. \begin{aligned}
 C_{20} &= C_{20}^* - \frac{3}{2} (C_{20}^* + 2C_{22}^* \cos 2\psi) \sin^2 \theta, \\
 C_{22} &= -\frac{1}{4} (C_{20}^* + 2C_{22}^* \cos 2\psi) \sin^2 \theta \cos 2\varphi - \\
 &\quad - C_{22}^* (-\cos 2\varphi \cos 2\psi + \cos \theta \sin 2\varphi \sin 2\psi), \\
 C_{21} &= \frac{1}{2} (C_{20}^* + 2C_{22}^* \cos 2\psi) \sin 2\theta \sin \varphi + \\
 &\quad + 2C_{22}^* \sin 2\psi \cos \varphi \sin \theta, \\
 S_{21} &= -\frac{1}{2} (C_{20}^* + 2C_{22}^* \cos 2\psi) \sin 2\theta \cos \varphi + \\
 &\quad + 2C_{22}^* \sin 2\psi \sin \varphi \sin \theta, \\
 S_{22} &= -\frac{1}{4} (C_{20}^* + 2C_{22}^* \cos 2\psi) \sin^2 \theta \sin 2\varphi + \\
 &\quad + C_{22}^* (\sin 2\varphi \cos 2\psi + \cos 2\varphi \sin 2\psi \cos \theta).
 \end{aligned} \right\} (5.34)$$

В правых частях последних равенств отсутствуют гармонические коэффициенты S_{21}^* , C_{21}^* и S_{22}^* , которые выражаются через центробежные моменты инерции. В системе координат, совмещенной с главными осями инерции Луны, они равны нулю. Предполагая малость угла θ и проведя некоторые преобразования в равенствах (5.34), можно получить следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned}
 C_{20} &= C_{20}^* - \frac{3}{2} \theta^2 (C_{20}^* + 2C_{22}^* \cos 2\psi), \\
 C_{22} &= C_{22}^* \cos 2(\varphi + \psi) - \frac{\theta^2}{4} [C_{20}^* \cos 2\varphi + \\
 &\quad + 2C_{22}^* \cos 2\varphi \cos 2\psi], \\
 C_{21} &= \theta [C_{20}^* \sin \varphi + 2C_{22}^* \sin(\varphi + 2\psi)], \\
 S_{21} &= -\theta [C_{20}^* \cos \varphi + 2C_{22}^* \cos(\varphi + 2\psi)], \\
 S_{22} &= C_{22}^* \sin 2(\varphi + \psi) - \frac{\theta^2}{4} [C_{20}^* + 2C_{22}^* \cos 2\psi] \sin 2\varphi.
 \end{aligned} \right\} (5.35)$$

Используя условия равенства нулю центробежных моментов инерции, выведем приближенные соотношения для углов θ , φ , ψ :

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{\sqrt{C_{21}^2 + S_{21}^2}}{|C_{20}|}, \\ \varphi &= \arcsin \frac{C_{21} \operatorname{Sgn} C_{20}}{\sqrt{C_{21}^2 + S_{21}^2}} = \arccos \frac{-S_{21} \operatorname{Sgn} C_{20}}{\sqrt{C_{21}^2 + S_{21}^2}}, \\ \psi &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{S_{22}}{\sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}} - \varphi, \end{aligned} \right\} (5.36)$$

где C_{20} , C_{21} , C_{22} , S_{21} , S_{22} — гармонические коэффициенты, полученные из наблюдений в исходной селеноцентрической системе координат. Интересующие нас в конечном итоге гармонические коэффициенты C_{20}^* и C_{22}^* вычисляются на основании формул вида (5.35). Ю. А. Чиканов [31] предложил вместо углов Эйлера использовать самолетные углы α , β , γ . Угол α означает поворот вокруг оси z , β — вокруг оси y , а γ — вокруг оси x . Предполагая углы β и γ малыми для преобразования тройного поворота вокруг осей, имеем

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & \beta \cos \alpha + \gamma \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & \beta \sin \alpha - \gamma \cos \alpha \\ -\beta & \gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

На основе (5.37) углы поворота α , β , γ можно выразить через известные из наблюдений гармонические коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{-2S_{22} - \beta S_{21} + \gamma C_{21}}{2C_{22} + \beta C_{21} + \gamma S_{21}}, \\ \beta &= \frac{-(C_{20} + 2C_{22})C_{21} - 2S_{22}S_{21}}{(C_{20} + 2C_{22})(C_{20} - 2C_{22}) - 4S_{22}^2}, \\ \gamma &= \frac{(C_{20} - 2C_{22})S_{21} + 2S_{22}C_{21}}{(C_{20} + 2C_{22})(C_{20} - 2C_{22}) - 4S_{22}^2}, \end{aligned} \right\} (5.38)$$

а гармонические коэффициенты C_{nm} и S_{nm} в исходной системе координат связаны с гармоническими коэффициентами C_{nm}^* и S_{nm}^* , отнесенными к главным осям инерции

Луны, следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} C_{20} &= C_{20}^* - 2\beta C_{21}^* + 2\gamma S_{21}^*, \\ C_{22} &= \left[C_{22}^* + \frac{1}{2}(\beta C_{21}^* - \gamma S_{21}^*) \right] \cos 2\alpha + \\ &\quad + \left[-S_{22}^* + \frac{1}{2}(\gamma C_{21}^* - \beta S_{21}^*) \right] \sin 2\alpha, \\ C_{30} &= C_{30}^* - 6\beta C_{31}^* + 6\gamma S_{31}^*. \end{aligned} \right\} (5.39)$$

Ошибки вывода по ИСЛ гармонических коэффициентов не позволяют обнаружить величину несовпадения главных осей инерции, т. е. осей динамической фигуры Луны с осями селенодезической системы координат. Это удалось сделать с помощью упоминавшихся в § 36 методов лазерной локации уголковых отражателей на Луне и наблюдений VLBI. Установлено, что оси динамической фигуры Луны смещены на $254''$ к востоку и на $75''$ к югу от среднего направления на Землю [76]. Здесь уместно напомнить, что направления полуосей эллипсоидальной геометрической фигуры не совпадают с осями селенодезической системы координат на десятки градусов (см. табл. 37).

От динамической фигуры Луны зависит характер ее физической либрации. Ниже мы кратко остановимся на определении параметра физической либрации f по величинам, характеризующим динамическую фигуру Луны и ее гравитационное поле.

Известно, что в реальности вращение Луны сложнее того, которое описывается законами Кассини. Разность между реальным вращением и упрощенным, задаваемым законами Кассини, составляет вращательное движение Луны, называемое физической либрацией. Она мала по величине, но очень сложна по закономерности изменения. Обычно ее рассматривают по трем компонентам вращения. Каждая из компонент, угол, представляется суммой периодических членов. В эти разложения входит важный параметр физической либрации f , который зависит от моментов инерции Луны:

$$f = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta - \gamma}{\beta} = \frac{B(C - B)}{A(C - A)}. \quad (5.40)$$

Как показывает построенная нелинейная теория вращения Луны [27], при некоторых конкретных значениях

f , например, равных 0,662, 0,846 и 0,961, мог бы возникнуть резонанс физической либрации Луны. Иными словами, теоретически возможна неустойчивость вращения Луны. В действительности такое явление не наблюдается, что свидетельствует о том, что параметр f отличен от резонансных значений f . Несмотря на более чем вековую практику определений параметра f , он известен с очень низкой точностью. В [14] приведена сводка около 50 определений f уже в этом столетии. Из сводки видно, что значения f изменяются в пределах от 0,5 до 0,9. Уже существует мнение, что вряд ли целесообразны дальнейшие наблюдения с Земли с целью уточнения f . С запуском космических аппаратов, совершающих мягкую посадку на Луну, и окололунных спутников появились три возможности для уточнения параметра физической либрации f . Одна из них может быть осуществлена путем использования наблюдений координат звезд с Луны с помощью автоматических астрометрических лунных станций. Вторая состоит в использовании для изучения тонких нюансов вращения Луны лазерной локации установленных на ней уголкового отражателей. Наконец третья возможность основывается на изучении гравитационного поля Луны по наблюдениям ИСЛ.

Параметр физической либрации f Луны на основании (5.40), (5.19) и (5.27) можно выразить через гармонические коэффициенты C_{20} и C_{22} следующим образом:

$$f = \frac{C_{20} + 2C_{22}}{C_{20} - 2C_{22}}. \quad (5.41)$$

Из названных выше трех возможностей уточнения f благодаря развитию космической техники две реализуются сегодня. Во-первых, потому что уточнены гармонические коэффициенты C_{20} и C_{22} , характеризующие поле Луны. Воспользовавшись уравненными значениями C_{20} и C_{22} (см. табл. 42), согласно (5.41) найдем параметр f . Во-вторых, потому что можно использовать уравненные значения динамических сжатий β и γ (см. табл. 42) для вычисления f по формуле (5.40). Оба вычисленных значения параметра f приведены в табл. 43. Значения f , определенные по двум исходным принципиально разным наблюдениям (гравитационного поля и вращательных движений Луны), хорошо согласуются. Сравнение же этих значений f со значения-

Т а б л и ц а 43

Некоторые определения параметра физической либрации f

Автор, публикация, год	Метод	f	Ср. кв. ошибка
Эккерт [58], 1965	По движениям лунного перигея и узла орбиты	0,638	
Джеффрис [70], 1961	По физической либрации	0,639	$\pm 0,014$
Козиел [81], 1967	По гелиометрическим наблюдениям	0,633	$\pm 0,006$
	По гармоническим коэффициентам C_{20} и C_{22} , определенным по наблюдениям ИСЛ	0,6401	$\pm 0,0019$
	По динамическим сжатиям β и γ , определенным из лазерных наблюдений уголкового отражателя и из измерений с помощью радиопередатчиков ALSEP	0,6402	0,0010

ми, выведенными по астрономическим наблюдениям (в табл. 43 приведены только три из них) показывает существенно большую надежность определений первых из них.

Второй основной параметр физической либрации — наклонение лунного экватора к эклиптике,

$$I = \frac{3i\beta \left(1 + m + \frac{1}{2} m^2 - 2\alpha\right)^{1/2}}{(1+m)(2m+m^2-3\beta)}, \quad (5.42)$$

где i — наклон плоскости орбиты Луны к эклиптике, m — отношение лунного периода к периоду прецессии узла лунной орбиты (0,004 019). Определение I лимитируется в основном данными, не зависящими от гравитационного поля Луны, поэтому нами подробнее не рассматривается.

§ 38. Гидростатически равновесная фигура Луны

Модель гидростатически равновесной фигуры Луны можно построить теоретически. Для ее построения предполагается, что Луна по отношению к длительно действующей

щим постоянным силам ведет себя как жидкое тело. В идеальных жидкостях нет сцепления между частицами, а поэтому в них отсутствуют сдвиговые напряжения, но существует гидростатическое давление. Последнее возникает вследствие того, что на каждую элементарную массу Луны действуют массовые силы, такие как притяжения масс самой Луны, приливное притяжение Земли и Солнца, центробежные силы, возникающие вследствие вращения Луны. В принципе на давление влияют и поверхностные силы, такие как световое давление, удары метеоритов, но практически они пренебрежимо малы. Гидростатическое давление внутри жидкости зависит от координат рассматриваемого элементарного объема, но одинаково в нем по любому направлению. Если потенциал притяжения масс Луны обозначить V , обусловленный вращением потенциал центробежного ускорения U , а потенциал приливного ускорения от Земли через W_{\oplus} и пренебречь потенциалами других ускорений ввиду их малости, то условие равновесия жидкой Луны определяется равенством суммы проекций по трем ортогональным координатным осям всех действующих сил:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W_{\oplus}}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \sigma \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial W_{\oplus}}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \sigma \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W_{\oplus}}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

где P — потенциал гидростатического давления. Умножая эти уравнения соответственно на dx , dy , dz и складывая, получим полный дифференциал

$$dP = \sigma dW, \quad (5.44)$$

где $W = V + U + W_{\oplus}$ — суммарный потенциал всех действующих сил. Если $W = \text{const}$ является уровенной поверхностью, то при перемещении вдоль нее приращение $dW = 0$, а следовательно, согласно (5.44)

$$P = \text{const}.$$

Это означает, что уровенные поверхности $W = \text{const}$ являются одновременно поверхностями равного давления.

Из уравнения (5.44) также следует, что на внешней поверхности гидростатическое давление равно нулю. Дифференцируя обе части уравнений (5.43) по x , y , z , а затем составив комбинацию уравнений, можно получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} : \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} : \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} : \frac{\partial W}{\partial z},$$

из которых следует, что поверхности равной плотности и уровенные поверхности тождественны. Если бы плотность σ изменялась как функция координат произвольным образом, то было бы невозможно уравновесить все силы и в жидкости возникли бы течения. Следует заметить, что, строго говоря, совпадение уровенной поверхности с поверхностями равного давления и равной плотности происходит при условии, что в теле Луны соблюдаются изотермичность и адиабатическое равновесие.

В дальнейшем рассмотрим поверхность гидростатического равновесия Луны, представленную в виде сфероида второго порядка, т. е. сферы, деформированной сферической функцией второго порядка. Радиус-вектор этой поверхности выражается так:

$$r(\varphi, \lambda) = R [1 + \varepsilon S_2(\varphi, \lambda)], \quad (5.45)$$

где R — средний радиус Луны, $S_2(\varphi, \lambda)$ — поверхностная сферическая функция второго порядка, ε — малый множитель. Задача вывода поверхности гидростатического равновесия Луны состоит в определении этого множителя. Для жидкой Луны с однородной плотностью и с внешней поверхностью вида (5.45) потенциал притяжения в точках \mathcal{P} внешнего пространства равен

$$V(\mathcal{P}) = \frac{GM_{\zeta}}{r} \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \varepsilon S_2(\varphi, \lambda) \right], \quad (5.46)$$

Для того чтобы найти потенциал V в точках $\overline{\mathcal{P}}$ поверхности (5.45), необходимо из (5.46) с помощью (5.45) исключить радиус r :

$$V(\overline{\mathcal{P}}) = \frac{GM_{\zeta}}{R} \left[1 - \frac{2}{5} \varepsilon S_2(\varphi, \lambda) \right].$$

Далее напишем потенциал центробежных сил:

$$U(\mathcal{P}) = \frac{1}{3} \omega^2 r^2 [1 - P_{20}(\sin \varphi)].$$

На основании III закона Кеплера можно последнее равенство переписать в виде

$$U(\varphi) = \frac{1}{3} \frac{GM_{\oplus}}{C_1^3} r^2 [1 - P_{20}(\sin \varphi)], \quad (5.47)$$

где ω — угловая скорость вращения Луны и где вместо большой полуоси лунной орбиты взято среднее расстояние C_1 между Землей и Луной. От приливного потенциала, обусловленного Землей (1.26), возьмем только постоянную часть, не зависящую от времени,

$$\bar{W}_{\oplus}(\varphi) = \frac{1}{4} \frac{GM_{\oplus} r^2}{C_1^3} [-2P_{20}(\sin \varphi) + P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda]. \quad (5.48)$$

Найдем суммарный потенциал Луны, сложив (5.46), (5.47) и (5.48); предварительно исключив из них r с помощью (5.45):

$$W = V + U + W_{\oplus} = \frac{GM_{\zeta}}{R} \left(1 - \frac{2}{5} \varepsilon S_2\right) + \frac{GM_{\oplus} R^2}{C_1^3} \left[\frac{1}{3} - \frac{5}{6} P_{20}(\sin \varphi) + \frac{1}{4} P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda \right]. \quad (5.49)$$

Поскольку поверхность гидростатического равновесия совпадает с урванной поверхностью, потенциал W на ней должен быть постоянен. Поэтому в выражении для W (5.49) должны отсутствовать сферические функции. Из этого условия на основании (5.49) имеем

$$\varepsilon S_2 = \frac{5}{2} \frac{M_{\oplus}}{M_{\zeta}} \left(\frac{R}{C_1}\right)^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{5}{6} P_{20}(\sin \varphi) + \frac{1}{4} P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda \right]. \quad (5.50)$$

Подставляя найденное выражение εS_2 в (5.45), получим уравнение, описывающее поверхность фигуры Луны, находящейся в состоянии гидростатического равновесия:

$$r(\varphi, \lambda) = \bar{R} [1 + A_1 P_{20}(\sin \varphi) + A_2 P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda], \quad (5.51)$$

где

$$\bar{R} = R \left[1 + \frac{5}{6} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3 \right], \quad \mu^{-1} = \frac{M_{\oplus}}{M_{\zeta}},$$

$$A_1 = -\frac{25}{12} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3 \left(\frac{R}{\bar{R}} \right), \quad A_2 = \frac{5}{8} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3 \left(\frac{R}{\bar{R}} \right).$$

Поверхность, описываемая равенством (5.51) — сфероид. Подставим в последние формулы числовые значения $R = 1738$ км, $\mu^{-1} = 81,3$, $C_1 = 384\,400$ км. Тогда для радиуса-вектора поверхности сфероида получим следующее выражение:

$$r(\varphi, \lambda) = 1738,0 \left[1 - 1,56 \cdot 10^{-5} P_{20}(\sin \varphi) + 0,47 \cdot 10^{-5} P_{22}(\sin \varphi \cos 2\lambda) \right] \text{ км.}$$

На основании этого выражения найдем отличия трех полуосей полученного сфероида от среднего радиуса \bar{R} . Для экваториальной полуоси, направленной к Земле, имеем

$$r(0, 0) - \bar{R} = \Delta a = \frac{35}{12} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3 \bar{R} = 38,1 \text{ м,}$$

для другой экваториальной полуоси

$$r\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - \bar{R} = \Delta b = -\frac{5}{6} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3 \bar{R} = -10,9 \text{ м,}$$

для полярной полуоси

$$r\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \bar{R} = \Delta c = -\frac{25}{12} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3 \bar{R} = -27,2 \text{ м.}$$

Вращение Луны создавало только полярное сжатие, трехосность возникает за счет приливного действия от Земли. Подсчитаем осевые моменты инерции для полученной гидростатически равновесной Луны:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r(\varphi, \lambda)} \sigma r_1^4 (\cos^2 \varphi_1 \sin^2 \lambda_1 + \sin^2 \varphi_1) \cos \varphi_1 d\lambda_1 d\varphi_1 dr_1, \\ B &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r(\varphi, \lambda)} \sigma r_1^4 (\cos^2 \varphi_1 \cos^2 \lambda_1 + \sin^2 \varphi_1) \cos \varphi_1 d\lambda_1 d\varphi_1 dr_1, \\ C &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r(\varphi, \lambda)} \sigma r_1^4 \cos^3 \varphi_1 d\lambda_1 d\varphi_1 dr_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Плотность σ считается постоянной. После первого инте-

грирования по переменной r_1 подставляем верхний предел $r^5(\varphi, \lambda)$, который равен выражению (5.51) в пятой степени. Разложим его по степеням малого члена $A_1 P_{20} + A_2 P_{22} \cos 2\lambda$ и удержим в разложении только первую степень. В результате простых, но громоздких преобразований получим следующие выражения для осевых моментов инерции:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2\pi\sigma\bar{R}^5}{15} \left[4 - \frac{35}{3} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3 \right], \\ B &= \frac{2\pi\sigma\bar{R}^5}{15} \left[4 + \frac{10}{3} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3 \right], \\ C &= \frac{2\pi\sigma\bar{R}^5}{15} \left[4 + \frac{25}{3} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

Как видно из последних равенств, моменты инерции A, B, C зависят, помимо плотности σ и радиуса \bar{R} , от отношения масс Земли M_\oplus и Луны M_ζ и от отношения $(R/C_1)^3$. В случае однородной шаровой Луны все моменты инерции равны между собой и равны $\frac{2}{5} M_\zeta R^2$.

Вычислим динамические сжатия, которые Луна имела бы, если бы она находилась в состоянии гидростатического равновесия. Используя (5.53) и упомянутые числовые значения для μ^{-1} и $(R/C_1)^2$ с достаточным приближением имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{C - B}{A} = \frac{5}{4} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3, \\ \beta &= \frac{C - A}{B} = 5 \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3, \\ \gamma &= \frac{B - A}{C} = \frac{15}{4} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3. \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

Найдем также для гидростатически равновесной Луны значения безразмерных гармонических коэффициентов C_{20} и C_{22} :

$$C_{20} = \frac{1}{M_\zeta R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\varphi, \lambda)} \sigma r_1^4 P_{20}(\sin \varphi_1) \sin \varphi_1 d\varphi_1 d\lambda_1 dr_1,$$

$$C_{22} = \frac{1}{M_\zeta R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\varphi, \lambda)} \sigma r_1^4 P_{22}(\sin \varphi_1) \cos 2\lambda_1 \sin \varphi_1 d\varphi_1 d\lambda_1 dr_1.$$

Проинтегрировав последние равенства в предположении, что плотность постоянна, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} C_{20} &= -\frac{5}{4} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3, \\ C_{22} &= \frac{3}{4} \mu^{-1} \left(\frac{R}{C_1} \right)^3. \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

Впрочем, выражения для этих гармонических коэффициентов можно получить, используя выведенные выше выражения для моментов инерции A, B, C (5.53) и формулы (5.28).

В таблице 44 приведены числовые значения динамических сжатий α, β, γ , гармонических коэффициентов C_{20} и C_{22} , параметра физической либрации f и параметра плотностной неоднородности

$$g = \frac{3}{2} \frac{C}{M_{\zeta} R^2}$$

Т а б л и ц а 44

Сравнение параметров гидростатически равновесной и реальной Луны

Наименование параметров	Обозначение	Теоретически рассчитанное для гидростатически равновесной Луны	Фактическое из наблюдений	Отношение фактического к теоретическому
Динамические сжатия	α	$94 \cdot 10^{-7}$	$403,81 \cdot 10^{-6} *$	43
	β	$376 \cdot 10^{-7}$	$631,26 \cdot 10^{-6}$	17
	γ	$282 \cdot 10^{-7}$	$227,45 \cdot 10^{-6}$	8
Гармонические коэффициенты	C_{20}	$9,39 \cdot 10^{-6}$	$201,40 \cdot 10^{-6}$	22
	C_{22}	$5,64 \cdot 10^{-6}$	$22,10 \cdot 10^{-6}$	37
Параметр физической либрации	f	0,25	0,6402	2,5
Параметр плотностной неоднородности	g	0,6	0,584	0,97

*) Вычислено по известному соотношению между динамическими сжатиями $\alpha - \beta + \gamma = \alpha \beta \gamma$ по β и γ , полученным из наблюдений.

(§ 42), рассчитанных в предположении, что Луна находится в состоянии гидростатического равновесия. При этом использовались формулы (5.54), (5.55), (5.41). Для сравнения с этими теоретическими рассчитанными величинами приведены соответствующие фактические значения, полученные из наблюдений, прямо или опосредствованно. В последней колонке таблицы даны отношения теоретических значений к фактическим. Анализ отношений показывает существенное отклонение реальной Луны от состояния гидростатического равновесия. Отклонение от гидростатического равновесия для Луны гораздо больше, чем для Земли.

Для объяснения отличия Луны от состояния гидростатического равновесия был предположен ряд механизмов. Еще в 1915 г. Джеффрис [68] предположил, что имеющееся у Луны экваториальное вздутие есть не что иное, как затвердевшее приливное образование, возникшее тогда, когда Луна находилась от Земли на расстоянии в 2,7 раз меньшем, чем сейчас. Однако Джеффрис в монографии [5] отказался от своей первоначальной гипотезы, считая ее ошибочной. Действительно, как с точки зрения этой гипотезы объяснить наличие асимметрии в направлении Земля — Луна, характеризуемой третьей тессеральной гармоникой гравитационного потенциала? То же можно сказать относительно экваториальной асимметрии, описываемой третьей зональной гармоникой. Что касается динамического сжатия β , то оно соответствует положению Луны на расстоянии 140 000 км от Земли или свободному вращению Луны вокруг своей оси с периодом 3,5 суток. Ранкорн и Шрабзал [99] отсутствие гидростатического равновесия объясняют наличием конвективных течений в недрах Луны, которые поддерживают неравновесность. Гипотеза встретила возражения с точки зрения наличия большой вязкости в недрах Луны и быстрого затухания. Следует заметить, что если течения и существуют, то они не захватывают, по-видимому, поверхностных слоев, так как на Луне не обнаруживаются складчатые структуры.

Б. Ю. Левин [15], [85] предположил термический механизм. Он состоит в том, что имеется зависимость температуры недр от широты, что должно привести при образовании лунной коры к ее меньшей толщине в экваториальной зоне, чем на полюсах. Это приводит к изостатической не-

равновесности, проявляющейся в различиях моментов инерции A, B, C . Расчеты, произведенные в работе [25], показали, что достаточно предположить, что плотность твердой оболочки всего на 3% больше плотности коры, а лунная кора на 20—30 км толще на полюсах, чем на экваторе. Это соответствует разности температур на экваторе и полюсах 140°C .

В. Н. Жарков и др. [7] показали, что достаточно небольшая плотностная неоднородность, в основном имеющая широтную зависимость, чтобы объяснить наблюдаемые динамическое сжатие β и постоянную физической либрации f . Так, если изменение плотности происходит во внешнем слое толщиной $0,1 \bar{R}$, то плотность в нем должна по радиальному направлению измениться на $0,015 \text{ г/см}^3$, а по долготному меньше чем на $0,001 \text{ г/см}^3$. Юри [110] считает, что плотностная неоднородность Луны имела с начала ее формирования, когда она образовалась из метеоритного вещества, имеющего разную плотность. Различие моментов инерции — следствие этой случайной плотностной неоднородности. Существующие при этом упругие напряжения, согласно Юри [108], [109] и Макдональду [89], [90], достигают 20 бар, т. е. эти напряжения поддерживают гидростатически неравновесное состояние Луны. Распределены упругие напряжения в наружных твердых слоях [111]. Наличие напряжений в свою очередь свидетельствует об отсутствии больших объемов в верхних слоях недр Луны, которые находятся в расплавленном или полурасплавленном состояниях.

§ 39. Гравиметрическая фигура и распределение уклонений отвеса на Луне

Выше были рассмотрены геометрическая, динамическая, гидростатически-равновесная фигуры Луны. Под гравиметрической фигурой понимается поверхность равного потенциала силы тяжести — селеноид (§ 22). Вообще говоря, гравиметрической фигурой можно считать и поверхность равной силы тяжести или поверхность равного радиального градиента силы тяжести (§ 25). Их поверхности были изображены в виде линий равных высот на рис. 33, 35, 36. Здесь мы рассмотрим спектральный состав высот этих поверхностей. Для этого построим графики из-

менения средних квадратических значений гармоник, представляющих высоты, в зависимости от порядка n . На рис. 58 даны графики для высот поверхности селеноида, поверхности равной силы тяжести и поверхности равного

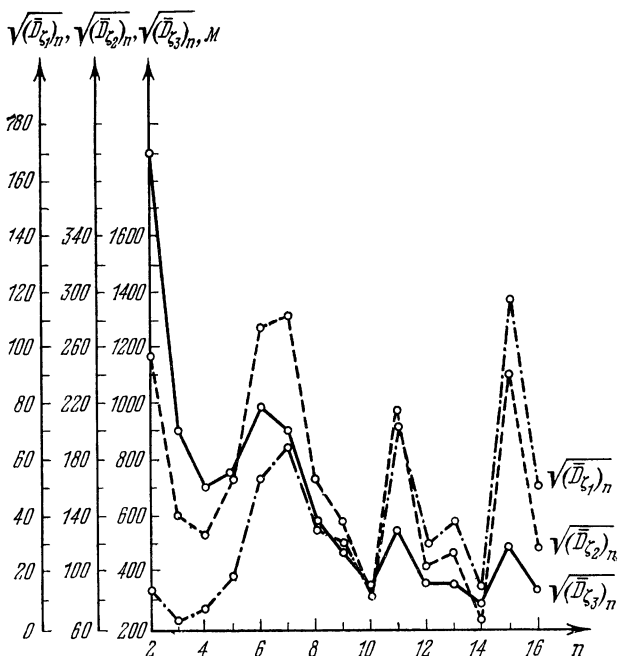


Рис. 58. Изменения средних квадратических значений сферических гармоник $\sqrt{(\overline{D}_\zeta)_n}$ в зависимости от n : 1 — для высот селеноида ζ_1 , 2 — высот поверхности равной силы тяжести ζ_2 , 3 — высот поверхности равного радиального градиента силы тяжести ζ_3 .

радиального градиента силы тяжести. Средние квадратические значения высот возрастают для изоповерхностей, соответствующих более высоким производным. Становится большей ондуляция высот в высокочастотной части, т. е. для больших n .

Теперь рассмотрим *уклонения отвеса* на Луне. Под уклонением отвеса понимается угол в данной точке между направлениями нормали к уровенной поверхности и нормали к поверхности относимости (сфере, эллипсоиду).

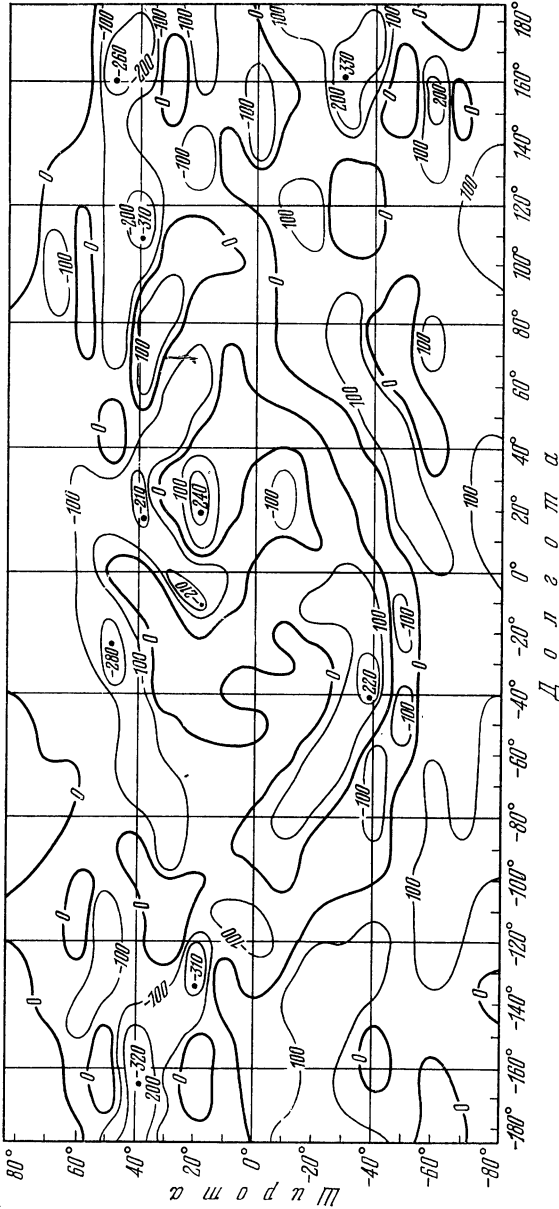


Рис. 59. Карта компонент ξ уклонения отвеса по направлению меридианов. Использованы гармонические коэффициенты Феррари (1977), $R_0 = 1738,0$ км. Изолинии проведены через 100 угловых секунд.

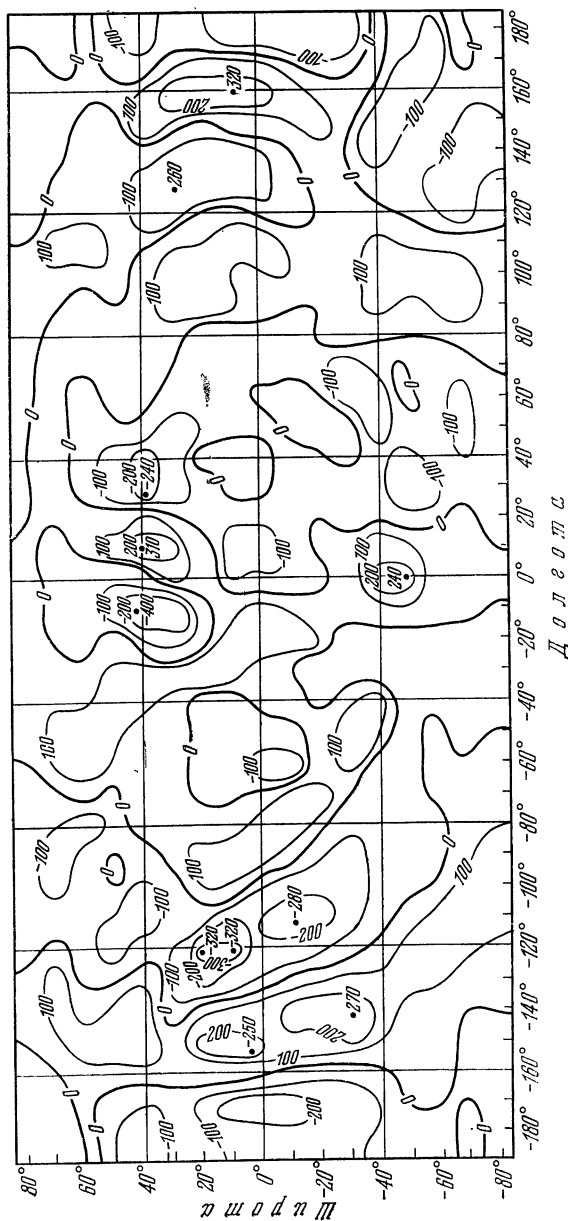


Рис. 60. Карта компонент η уклонений отвеса по направлению параллелей. Использованы гармонические коэффициенты Феррари (1977), $R_0 = 1738,0$ км. Изолинии проведены через 100 угловых секунд.

Полная величина уклонения отвеса для удобства использования раскладывается на две ортогональные компоненты: одна вдоль меридиана, другая по параллели. Компоненты по меридиану ξ и параллели η определяются как отношения соответствующих горизонтальных составляю-

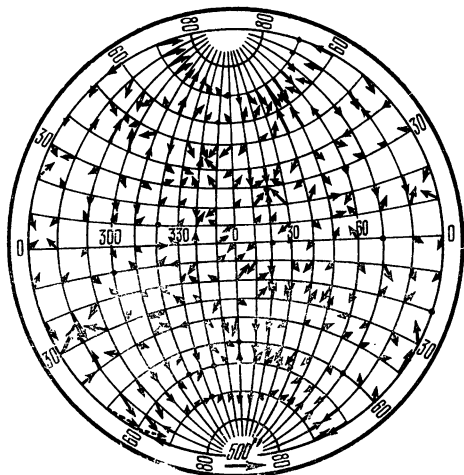


Рис. 61. Векторное изображение распределения полного уклонения отвеса для видимой стороны Луны.

щих притяжения, касательных к меридиану $\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \varphi}$ и параллели $\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial W}{\partial \lambda}$, к средней силе тяжести \bar{g} на Луне:

$$\xi = \frac{206\,265}{\bar{\rho} \bar{g}} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \text{ — угловые секунды,}$$

$$\eta = \frac{206\,265}{\bar{\rho} \bar{g} \cos \varphi} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \text{ — угловые секунды.}$$

Горизонтальные составляющие притяжения представляются в виде разложений по сферическим функциям (3.2) и (3.3). М. Бурша [47] компоненты уклонений отвеса вычисляет как отношение разности высот селеноида к расстоянию между точками, в которых рассматривается разность.

Для Луны планетарное распределение уклонений отвеса строилось и ранее по имевшимся гармоническим коэффициентам C_{nm} и S_{nm} разложений гравитационного поля неоднократно ([32], [47], [48] и др.). Мы решили построить карту уклонений отвеса, используя новейшие определения гармонических коэффициентов (см. табл. 18). Вычисленные компоненты уклонений отвеса ξ и η представлены в виде двух карт (рис. 59, 60). На них изображены кривые равных значений этих компонент. Для изображения полного уклонения отвеса иногда применяют векторное представление.

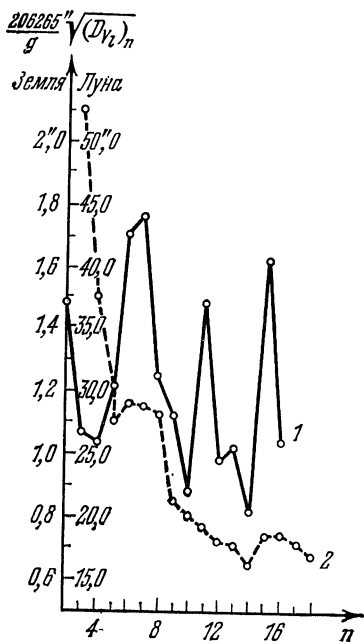


Рис. 62. Изменения квадратичных значений сферических гармоник полного уклонения отвеса $\frac{206265''}{g} \sqrt{(D_{V_1})_n}$ в зависимости от порядка n . 1 — для Луны, 2 — для Земли.

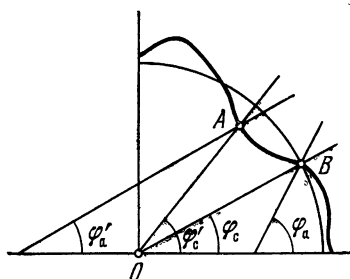


Рис. 63. Астрономические φ_a и φ'_a и селенодезические φ_c и φ'_c широты.

Пример такого представления, заимствованного из работы [47], приведен на рис. 61.

Изменение средних квадратических значений компонент уклонений отвеса ξ и η , с точностью до множителя $1/\bar{g}$ в зависимости от порядка гармоник n , было показано на рис. 40. Этот график был предназначен для того, чтобы проиллюстрировать систематическое различие этих компо-

нент для Луны. Интересно рассмотреть характер изменения среднего квадратического значения полного отклонения отвеса $l = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ в зависимости от порядка гармоник n . Изменение этой величины можно вычислить по формуле (4.44). График изменения $\frac{206\,265''}{g} \sqrt{(D_{V_l})_n}$ в зависимости от n изображен на рис. 62. Как видно из рисунка, величина полного отклонения отвеса для низких гармоник достигает десятков угловых секунд. Гораздо меньше отклонения отвеса для Земли. Подчеркнем, что такие большие отклонения отвеса на Луне наблюдаются для сильно усредненного гравитационного поля, так как использовано его разложение только до 16 порядка. Местные, локальные отклонения отвеса могут быть существенно больше тех, которые показаны на рис. 60, 61. Сошлемся на опыт земных исследований. Известно, что в отдельных районах Земли существуют местные отклонения отвеса, достигающие многих десятков угловых секунд, а в районе впадины Тонго в Тихом океане — 120". В то же время отклонения отвеса, вычисленные на основе разложения по сферическим функциям 16 порядка, дают среднее квадратическое значение, достигающее всего нескольких угловых секунд. Таким образом, отдельные местные отклонения отвеса на два порядка больше тех, которые даются разложениями. Проводя осторожную аналогию, можно думать, что на Луне возможны местные отклонения отвеса, достигающие одного градуса. Такие отклонения отвеса, по-видимому, существенны для лунной картографии, ориентации на Луне, взлета космических кораблей и пр. Наличие больших отклонений отвеса означает, что в принципе возможна такая ситуация (рис. 63), что пункт A , находящийся фактически ближе к полюсу, чем пункт B , будет иметь меньшую астрономическую широту, чем B , из-за наличия в этом месте большого отклонения отвеса.

ВНУТРЕННЕЕ СТРОЕНИЕ ЛУНЫ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ЕГО ИЗУЧЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

§ 40. Общие замечания

Проблема изучения внутреннего строения Луны является одной из фундаментальных. К ее решению необходимо подходить, комбинируя различные методы. Арсенал методов изучения внутреннего строения Луны в основном остается таким же, как и для Земли, но, конечно, со своими особенностями. Ведущую роль, как метод определения общего глубинного строения планеты, играет сейсмология. Гравиметрия может выполнять функцию некоторого интерполяционного метода, с помощью которого результаты сейсмического зондирования, осуществленного в отдельных точках, могут быть распространены на другие области.

По сейсмическим измерениям устанавливаются границы скачкообразного изменения скоростей распространения сейсмических волн в недрах Луны, которые имеют слоистое строение. Слои состоят из пород различного петрографического и химического состава и обладают поэтому различной упругостью и плотностью. Источником возбуждения сейсмических волн является падение метеоритов, ступеней ракет и модулей космических кораблей, а также взрывы зарядов. Сейсмические волны практически проникают на полную глубину Луны только от очень редких событий: падения очень больших метеоритов. Поскольку глубинные слои с различными сейсмическими скоростями имеют различную плотность, изменение границ слоев проявляется в изменении гравитационного поля. Имея опорные глубины границ слоев, определенные по сейсмическим данным, в принципе, с помощью гравитационного поля, можно их интерполировать на другие области Луны. Конечно, практически не все так просто. На наблюдаемое гравитационное поле влияет рельеф Луны, помимо изменения плотности пород между слоями воз-

можно ее вариации внутри слоя. Наличие нескольких границ раздела плотностей существенно осложняет решение задачи.

Гравиметрия выступает как один из разделов *селенофизики* — науки, занимающейся изучением внутреннего строения планеты. Она применяется для исследования общего строения, а также для изучения верхних слоев, смыкаясь с геологией, точнее, с селенологией. Если предметом геологии является изучение строения преимущественно верхних слоев Земли, их состава, закономерности образования изверженных и осадочных пород и связанных с ними полезных ископаемых, а также истории развития Земли, то перед *селенологией* на первом плане пока стоят задачи больше общепознавательные. В конечном итоге они помогают изучать закономерности происхождения и размещения полезных ископаемых на Земле. Очевидна мировоззренческая роль селенологии, которая расширяет наши научные познания об окружающем нас мире. Однако уже сейчас перед селенологией ставятся вопросы, которые возникают в связи со строительством в недалеком будущем жилищ для космонавтов и установкой лунных обсерваторий. Нужен будет строительный материал, обладающий хорошими теплоизоляционными свойствами и прочностью. Необходимо изучить породы, из которых можно было бы извлекать серу для образования льда, воду для обеспечения космонавтов, радиоактивные изотопы как источники энергии.

Гравиметрия может играть существенную роль при тектоническом районировании Луны. Поверхность основных структурных образований Луны на протяжении ее истории подвергалась действию различных экзогенных сил (метеоритов, корпускул, различных лучей и пр.). Оставили свой след и эндогенные процессы, в результате которых происходили лавовые излияния, разогрев, перенос вещества по поверхности Луны. Все эти явления привели к тому, что часть тектонических структур Луны скрыта под слоем лав или грунта. Последние в определенном смысле можно отождествить с осадочными земными породами. Не проследиваясь на внешнем ландшафте Луны, тектонические структуры прошлого должны проявиться в гравитационном поле и этим оказать помощь в правильном тектоническом районировании. Гравиметрия позволяет

изучать конкретные структуры, определять их глубину, положение, а порой и форму аномалиеобразующих геологических тел. Примером эффективности гравиметрического метода для изучения конкретных структур является исследование масконов. Исследование их играет большую роль в познании важного этапа в истории происхождения и эволюции Луны.

Необходимым условием эффективности гравитационного метода для изучения распределения аномальных масс является наличие плотностной дифференциации пород. Плотность горных пород определяется их минералогическим составом, а также наличием пористости. Точное измерение плотности горных пород не менее важно, чем измерение величин, характеризующих гравитационное поле.

В этой главе мы остановимся на описании общего внутреннего строения Луны, строения лунной коры, материковых и морских образований, масконов. В изучении всех этих вопросов существенную роль играло гравитационное поле Луны. С использованием сведений о гравитационном поле Луны изучено распределение плотности от поверхности к центру Луны. Распределение плотности задает изменение давления, силы тяжести и радиального градиента с глубиной. Приливное изменение силы тяжести на Луне зависит от ее внутреннего строения, поэтому эти закономерности являются предметом селенофизики. В завершение главы дан краткий обзор гипотез происхождения Луны и ее эволюции.

§ 41. Плотность грунта Луны

Верхний слой лунной коры, с которым связана инженерно-техническая деятельность человека, называется *грунтом*. Изучение грунта Луны представляет не только научный, но и большой практический интерес. Знание свойств грунта Луны необходимо при расчете его несущей способности для посадки космических аппаратов и кораблей, установки автоматических научных приборов, расчета проходимости транспортных средств, расчета конструкций различных механизмов, предназначенных для работы на Луне и т. д. Изучение верхних слоев Луны играет важное значение для выяснения ее происхождения и развития, ибо их состав, состояние есть следствие длительной истории Луны.

Самый верхний слой Луны образовался в условиях вакуума, достигающего 10^{-10} — 10^{-16} мм рт. ст., перепадов ночных и дневных температур до 200° С, постоянного ультрафиолетового и рентгеновского облучения, непрерывной бомбардировки метеоритами, выделения громадной тепловой энергии при ударах и пр. Вещество на поверхности Луны дробилось, перемешивалось, переплавлялось, спекалось, принимало агрегатное состояние и снова разрушалось. Весь сложный процесс приводил к образованию своеобразного материала, который получил название *реголита*. Определения физико-механических свойств, в том числе плотности, пород верхних частей Луны производились непосредственно на лунной поверхности с помощью автоматической станции «Луна-13», совершившей на нее мягкую посадку. Затем автоматические станции («Луна-16, 20, 24»), снабженные грунтозаборными устройствами, доставили на Землю образцы пород. Свойства лунных пород исследовались также по образцам, собранным американскими космонавтами на лунной поверхности и взятых с некоторой глубины с помощью грунтоносов, забиваемых в грунт космонавтами. Достаточно полный обзор методов и результатов определений физико-механических свойств грунта с помощью космической техники дан в монографии И. И. Черкасова и В. В. Шварева [57].

Плотность определяется прямым и косвенным методами. Прямой состоит в определении массы и объема образца и вычисления их отношения. Во время посадки автоматической станции «Сервейор-7» масса лунного образца определялась с помощью ковша экскаватора, а его объем по телевизионному изображению. Плотности образцов, взятых на Луне с помощью заборных трубок и грунтоносов, относятся к глубине в несколько десятков сантиметров и изменяются в пределах $1,1$ — $1,9$ г/см³. Образцы, собранные космонавтами на лунной поверхности в разных районах, имеют плотность $2,1$ — $3,3$ г/см³. Они соответствуют породам, которые могли быть продуктом выброса из кратеров, т. е. глубинам в сотни метров и даже нескольких километров.

Существует большое число косвенных методов определения плотности. Результаты определений с их помощью представлены в табл. 45 [18]. Идея каждого метода указа-

Т а б л и ц а 45

Результаты определений плотности грунта косвенными методами

Космический аппарат	Метод	Плотность, σ , г/см ³	Глубина h , см	Толщина слоя реголита, м
«Сервейор-1»	Погружение в грунт ноги посадочного устройства. Измерение динамической несущей способности грунта	1,5; 1,7; 0,7	5	1—3
«Сервейор-3»	Измерение образца грунта с помощью ковша экскаватора	1,3; 1,5	2,5	1—4
«Сервейор-5»	Перекачивание камня	1,1	0,1	7
«Сервейор-6»	Воздействие струи газа из сопла двигателя	0,7—1,2		—10
«Сервейор-7»	Посадочный блок	1,4; 1,5	2	8
«Сервейор-7»	Измерение образцов грунта с помощью ковша экскаватора	1,2—1,5	2	0,02—0,1
«Луноход-1»	Измерение несущей способности грунта	1,5—1,7	5—10	
«Аполлон-11» -12, -14, -15»	Погружение в грунт посадочных устройств. Пенетрометр	1,75 (среднее) 1—2		
«Аполлон-11»	Измерение несущей способности грунта	1,5		
«Аполлон-12»	Измерение несущей способности грунта	1,5—2,0		
«Аполлон-11, -12»	Внедрение щупа в грунт	1,71—1,75		
«Аполлон-14»	Измерение высоты стенок траншеи, продавливание грунта колесами тележки	1,8—1,9		8,5
«Аполлон-15»	Пенетрометр, измерение несущей способности грунта	1,97—2,0		

на во второй колонке таблицы. В последующих колонках даны: плотность σ , глубина h , к которой относится названная плотность, толщина слоя реголита в данном месте. Точность определения плотности, названными в таблице методами, невысокая. Из других косвенных методов эффективными оказались радиофизические. Они основыва-

ются на зависимости определяемой из наблюдений диэлектрической проницаемостью пород от их плотности σ [17]. Применяется несколько модификаций радиофизических методов определения плотности пород. Все их можно разделить на две большие группы: радиоастрономические и

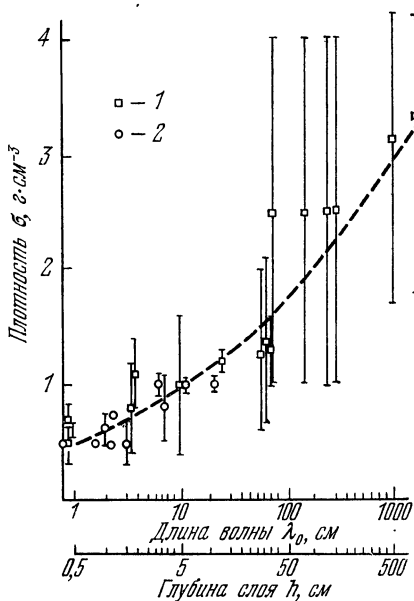


Рис. 64. Результаты определения плотности σ в верхних слоях Луны радиолокационными и радиоастрономическими методами на разных длинах волн. Вертикальная черта обозначает удвоенную среднюю квадратическую ошибку. 1 — радиоастрономические, 2 — радиолокационные методы.

радиолокационные. Различие между ними состоит в том, что при первом из них наблюдается естественное радиоизлучение Луны. При радиолокационных методах Луна облучается радиоволнами определенной длины волны и регистрируются отражаемый и прямой радиосигнал. Радиолокационные методы применялись на автоматических станциях «Луна-9—14, -16—21, -23», «Сервейор-1, -3, 5—7», «Эксплорер-35» и космических кораблях «Аполлон-14—17». С ростом длины волны растет толщина слоя, для кото-

рого может быть измерена плотность. Радиолокация производилась как во время посадок космических аппаратов на Луну, так и при движениях некоторых из них вокруг Луны.

На рис. 64 приведены данные о плотности пород верхних слоев лунной коры, полученные по радиоастрономическим и радиолокационным наблюдениям в различных диапазонах длин волн [18]. Вертикальная черта задает точность определения плотности. Радиоастрономические наблюдения характеризуются меньшей ошибкой. Радиолокационные наблюдения относятся к центру диска Луны, а радиоастрономические осреднены по всему диску. Плотность в правой части графика относится к большим толщам. В табл. 46 даны толщины реголита для различных районов Луны. Приведенные значения толщин выведены как среднее из результатов определений различными методами [18].

Таблица 46

Толщина реголита в разных районах Луны

Районы	Толщина слоя реголита, м
Океан Бурь, морская равнина внутри кратера Флемстид	2,3
Океан Бурь, склон кратера диаметром 200 м	13
Юго-западная часть Моря Спокойствия, верх кратера размером 9×12 м	3,6
Срединный Залив, плоская равнина морского типа	6,8
Горный район поблизости от кратера Тихо, покрытый отложениями выбросов из него	0,09

На основании проведенных активных сейсмических экспериментов, осуществленных экипажами космических кораблей «Аполлон-14, -16, -17», был детально исследован верхний слой лунной коры до глубин в несколько сотен метров. Результаты этих исследований представлены на схеме рис. 65. Разрез *a*) представляет результаты, полученные в [160], [108] для района кратера Фра-Мауро, относящегося к морскому типу. Самый верхний слой представляет слой реголита, толщина которого ~8,5 м. Реголит содержит включения брекчий. Скорость продольных

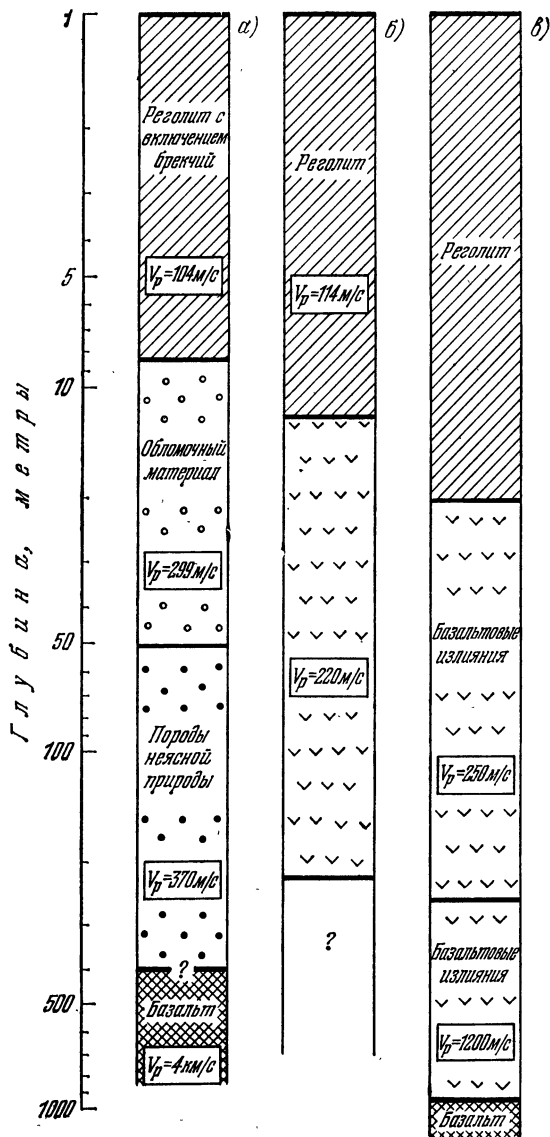


Рис. 65. Глубинное строение верхних слоев Луны, полученное по активным сейсмическим экспериментам: а) район кратера Фра Мауро, б) район кратера Декарт, в) район долины Тавр—Литтров.

волн в нем $V_p = 104$ м/с. Ниже находится слой с $V_p = 299$ м/с, нижняя граница которого определилась неуверенно (19—78 м). Он состоит из обломочного материала, выбитого при ударном образовании Моря Дождей. До глубин 220 м простирается слой со скоростями $V_p = 370$ м/с; состав его пород остался неясным. Ниже — слой со скоростями $V_p = 4$ км/с, соответствующими базальтовому составу. Результаты измерений на месте посадки «Аполлона-16» в материковой части Кратера Декарт изображены на схеме рис. 65, б [108]. Реголитовый слой имеет толщину 12 м. Скорость продольных волн в нем $V_p = 114$ м/с. Подстиляет его слой с $V_p = 250$ м/с. Профиль в) также относится к материковой части Луны, а именно к району Тавр — Литров [109]. Реголит здесь имеет относительно небольшую толщину ~ 20 м. Под ним находится слой со скоростью $V_p = 250$ м/с. На глубине 250 м скорость увеличивается до 1200 м/с. Такая скорость остается до глубин 950 м. Похоже, что оба этих слоя состоят из материала, образовавшегося из базальтового потока. Следующий скачок скорости продольных волн происходит на глубине ~ 950 м. Ниже этой глубины находится среда со скоростью продольных волн $V_p = 4$ км/с.

Подводя итог, можно заключить, что самый верхний слой лунной поверхности покрыт реголитом, толщина которого варьирует от района к району и может достигать 20 метров и более. Толщина реголитового слоя обычно больше на морских образованиях, нежели на материковых. Плотность реголита быстро увеличивается с глубиной, уплотняясь под действием собственного веса. Плотность поверхностного реголита $\sigma = 1,0$ г/см³, уже на глубине первых десятков сантиметров плотность его становится равной $\sigma = 1,5$ г/см³ и на глубинах 10—20 м он уплотнен и имеет максимальную плотность $\sigma = 1,7$ г/см³. Скальные породы, залегающие под поверхностными слоями с низкой плотностью, начинаются с глубин сотен метров — километра. Знание толщины поверхностного слоя низкой плотности существенно при применении гравиметрического метода изучения распределения аномальных масс в недрах Луны.

§ 42. Параметр плотностной неоднородности

Луна, с точки зрения ее внутреннего строения, является более примитивным небесным телом, чем схожие с ней планеты земной группы. Однако и она имеет непростое строение. Внутри Луны существуют большие плотностные неоднородности. Помимо общего планетарного изменения плотности от поверхности к центру, обнаруживается вариация плотности в горизонтальном направлении, которая проявляется в аномалиях гравитационного поля Луны. Наиболее существенные из них — масконы, впервые обнаруженные именно на Луне. Можно объяснить причину существования в ней относительно больших плотностных неоднородностей, чем на Земле. По-видимому, это происходит потому, что на Луне в шесть раз меньшая сила тяжести, чем на Земле, а из этого следует меньшая плотностная дифференциация пород на глубине. Не могло не сказаться и то, что большая часть недр Луны в ходе ее тепловой истории оставалась полурасплавленной или твердой.

Изучение распределения плотности в недрах Луны в общем виде по одним только гравиметрическим данным невозможно. Имеется принципиальная трудность, которая состоит в том, что обратная задача гравиметрии — по заданному внешнему гравитационному полю определить распределение масс, — неоднозначна. Одно и то же гравитационное поле можно воспроизвести сколь угодно разными вариантами распределения масс. Однако существуют некоторые величины, определяемые из наблюдений однозначно и в то же время характеризующие общее распределение плотности планеты. Такими величинами являются гармонические коэффициенты в разложении гравитационного поля в ряд по сферическим функциям, которые представляют собой комбинацию степенных моментов инерции (§ 37). В частности, удобно оказалось характеризовать общее распределение плотности от центра к поверхности с помощью отношения осевого момента инерции второго порядка к общей массе Луны M_L . Рассматривая из трех осевых моментов инерции A' , B' , C' для определенности только наибольший, C' , можно ввести следующий безразмерный параметр, характеризующий плотностную неод-

нородность планеты:

$$g = \frac{3}{2} \frac{C'}{M_{\zeta} R^2}. \quad (6.1)$$

Здесь и ниже, в отличие от § 37, рассматриваются размерные моменты инерции,

$$A' = AM_{\zeta} R^2, \quad B' = BM_{\zeta} R^2, \quad C' = CM_{\zeta} R^2,$$

где M_{ζ} — общая масса Луны, R — ее средний радиус. Если предположить сферическое распределение плотности $\sigma(r)$, то общая масса равна

$$M_{\zeta} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \sigma(\rho_1) \rho_1^2 \cos \varphi_1 d\lambda_1 d\varphi_1 d\rho_1, \quad (6.2)$$

где $\rho_1, \varphi_1, \lambda_1$ — текущие координаты объема планеты. Для момента инерции относительно оси суточного вращения имеем

$$C' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \sigma(\rho_1) \rho_1^4 \cos \varphi_1 d\lambda_1 d\varphi_1 d\rho_1. \quad (6.3)$$

Замена интегрирования по объему Луны интегрированием по объему шара дает пренебрежимо малую ошибку в массе M_{ζ} и моменте инерции C' . Конечно, неоднородность можно было бы характеризовать, используя и другие комбинации моментов инерции, но выбор пал на M_{ζ} и C' из-за того, что они наиболее уверенно определяются по наблюдаемому гравитационному полю и астрономическим наблюдениям. Гармонические коэффициенты C_{20} и C_{22} выражаются через моменты инерции A, B, C (5.28)

$$\left. \begin{aligned} C_{20} &= \left[C' - \frac{1}{2} (A' + B') \right] : M_{\zeta} R^2, \\ C_{22} &= \frac{B' - A'}{4} : M_{\zeta} R^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

По наблюдениям за особенностями вращения Луны выводятся динамические сжатия

$$\alpha = \frac{C' - B'}{A'}, \quad \beta = \frac{C' - A'}{B'}, \quad \gamma = \frac{A' - B'}{C'}. \quad (6.5)$$

Решая совместно уравнения (6.4) и (6.5) и учитывая, что для Луны наиболее уверенно выводится величина сжа-

тия β , найдем

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{M_{\zeta} R^2}{\beta} [-C_{20} + 2(1 - 2\beta) C_{22}], \\ B' &= \frac{M_{\zeta} R^2}{\beta} [-C_{20} + 2C_{22}], \\ C' &= \frac{M_{\zeta} R^2}{\beta} [-(1 + \beta) C_{20} + 2(1 - \beta) C_{22}]. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Подставив последнее выражение C' в (6.4), получим следующую формулу для параметра неоднородности:

$$g = \frac{3}{2\beta} (-C_{20} + 2C_{22}) - \frac{3}{2} (C_{20} + 2C_{22}). \quad (6.7)$$

Второй член в правой части последнего равенства по сравнению с первым составляет величину порядка $6 \cdot 10^{-4}$. Поэтому при современной точности определений C_{20} и C_{22} иногда им пренебрегают. Равенства (6.6) показывают, что различия между A' , B' , C' составляют величины порядка β , поэтому при выводе параметра неоднородности g можно было использовать любой из трех моментов инерции A' , B' , C' .

Рассмотрим случай двухслойной модели Луны, когда плотность вдоль радиуса изменяется скачком. Предположим, что Луна состоит из внешнего сферического слоя и центральной шаровой области. Сферическим слоем может быть лунная кора или вся оболочка в зависимости от постановки задачи. Пусть плотность внешнего сферического слоя σ_1 , а шаровой области σ_2 , радиус шаровой области ρ , а всей Луны R . Тогда нетрудно найти

$$\left\{ \begin{aligned} C' &= \frac{8\pi}{15} [\sigma_1 R^5 + (\sigma_2 - \sigma_1) \rho^5], \end{aligned} \right. \quad (6.8)$$

$$M_{\zeta} = \frac{4\pi}{3} [\sigma_1 R^3 + (\sigma_2 - \sigma_1) \rho^3]. \quad (6.9)$$

Параметр неоднородности в этом случае можно записать так:

$$g = \frac{3}{5} \frac{\eta + (1 - \eta) \xi^5}{\eta + (1 - \eta) \xi^3},$$

где

$$\eta = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad \xi = \frac{\rho}{R}.$$

Легко видеть, что при $\xi < 1$ и $\eta < 1$, т. е. когда $\sigma_2 > \sigma_1$, будем иметь $1 - \eta > 0$. В числителе положительное число $1 - \eta$ умножается на ξ^5 , а в знаменателе это же число умножается на ξ^3 , которое больше ξ^5 . Следовательно, при $\sigma_2 > \sigma_1$ будет $g < 0,6$. Наоборот, если $\sigma_2 < \sigma_1$, то $g > 0,6$. Все эти случаи, а также случаи двухслойной модели представлены на рис. 66. Сосредоточению масс на сферической поверхности, т. е. модели Луны полностью пустой, соответствует $g = 1$. Далее рассмотрим, как изменяется момент инерции C' в зависимости от радиуса ρ сферы, разделяющей Луну на две области с различными плотностями (двухслойная модель). Будем изменять ρ и варьировать σ_1 и σ_2 , наложив на них условие, что общая масса Луны M_ζ остается неизменной. Это условие можно записать в виде

$$M_\zeta = \frac{4\pi}{3} \sigma_\zeta R^3 = \frac{4\pi}{3} [\sigma_1 R^3 + (\sigma_2 - \sigma_1) \rho^3], \quad (6.10)$$

где σ_ζ — средняя плотность Луны.

Для однородной Луны с плотностью σ_ζ момент инерции C'_0 равен

$$C'_0 = \frac{8\pi}{15} \sigma_\zeta R^5. \quad (6.11)$$

На основании (6.8), (6.10) и (6.11) получим для двухслойной Луны изменение момента инерции

$$\Delta C' = C'_0 \frac{\Delta\sigma}{\sigma_\zeta} \left[\left(\frac{\rho}{R} \right)^5 - \left(\frac{\rho}{R} \right)^3 \right], \quad (6.12)$$

где $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$.

На рис. 67 в виде графика показано изменение $\frac{\Delta C'}{M_\zeta R^2}$ в зависимости от нормированного расстояния $\bar{\rho} = \frac{\rho}{R}$ от центра Луны. При расчетах принято $C'_0 = 0,400 M_\zeta R^2$, $\sigma_\zeta = 3,34$ г/см³. Разность плотностей $\Delta\sigma$ играет роль параметра. График показывает, что изменение $\Delta\sigma$ вблизи центра мало влияет на $\Delta C'$. Найдем экстремум функции $\frac{\Delta C'}{M_\zeta R^2}$ по переменной $\bar{\rho}$. Нетрудно понять, что он существует при радиусе граничной сферы $\bar{\rho} = \sqrt{0,6}$. Наличие экстремума функции $\frac{\Delta C'}{M_\zeta R^2}$ означает, что наибольшее изменение при-

Характер распределения плотности	Схема распределения плотности	Величина, g
1. Плотность уменьшается от центра к поверхности		$g < 0,6$
2. Два слоя с постоянными плотностями σ_1 и σ_2 ; $\sigma_1 > \sigma_2$		$g < 0,6$
3. Постоянная во всем объеме плотность		$g = 0,6$
4. Плотность увеличивается от центра к поверхности		$g > 0,6$
5. Два слоя с постоянными плотностями σ_1 и σ_2 ; $\sigma_1 < \sigma_2$		$g > 0,6$
6. Плотность распределена на поверхности сферы		$g = 1,0$

Рис. 66. Различные модели распределения плотности в недрах планет и соответствующие им оценки параметра g плотностной неоднородности.

ращения момента инерции $\frac{\Delta C'}{M_{\zeta} R^2}$ при заданной разности плотностей $\Delta\sigma$ происходит, когда радиус сферы раздела плотностей равен $\sqrt{0,6} R$. Из-за того, что функция $\frac{\Delta C'}{M_{\zeta} R^2}$ является двухзначной функцией $\bar{\rho}$, следует, что одной и

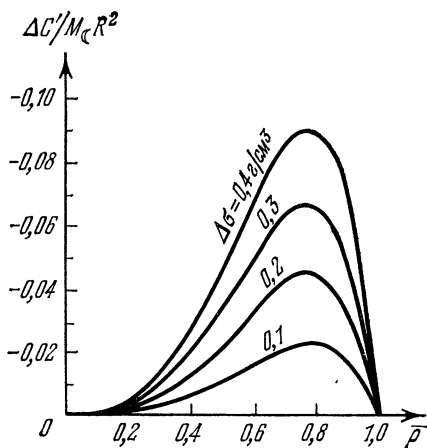


Рис. 67. Изменение приращения $\Delta C'/M_{\zeta} R^2$ при заданной разности плотностей $\Delta\sigma$ слоев в двухслойной модели Луны в зависимости от нормированного радиуса $\bar{\rho} = \rho/R$. $C'_0 = 0,400 M_{\zeta} R^2$, $\sigma_{\zeta} = 3,34$ г/см³.

той же величины $\frac{\Delta C'}{M_{\zeta} R^2}$ при заданном $\Delta\sigma$ можно достичь двойным выбором граничной сферы с радиусом бóльшим или меньшим, чем $\bar{\rho} = \sqrt{0,6}$. При этом не следует забывать, что хотя разность плотностей $\Delta\sigma$ в обоих случаях одинакова, плотность σ_1 в каждом из случаев своя. Она определяется из условия (6.10) и равна

$$\sigma_1 = \sigma_{\zeta} - \left(\frac{\rho}{R}\right)^3 \Delta\sigma,$$

т. е. зависит от радиуса $\bar{\rho}$ граничной сферы.

Особенно большой интерес к проблеме радиального распределения плотности Луны возник после публикации Эккерта [84]. Он провел анализ теории векового движения

узла и перигея лунной орбиты и проделал их перевычисление. Изменение узла $d\Omega_{\zeta}$ согласно Эккерту, связано с параметром неоднородности g следующим соотношением:

$$g = \frac{3}{2} \frac{C'}{M_{\zeta} R^2} = -0,0346 d\Omega_{\zeta},$$

а постоянная физической либрации f — с изменениями узла $d\Omega_{\zeta}$ и перигея $d\pi_{\zeta}$

$$f = \frac{C - B}{C - A} = 0,681 - 0,381 \frac{d\pi_{\zeta}}{d\Omega_{\zeta}},$$

где $d\pi_{\zeta}$ и $d\Omega_{\zeta}$ выражаются в угловых секундах в столетие. Из новых вычислений Эккерт нашел $d\Omega_{\zeta} = 3'',1$, $d\pi_{\zeta} = -27'',9$, откуда он получил $g = 0,965$, $f = 0,638$.

Полученное значение g говорит о том, что плотность Луны должна сильно убывать к центру, т. е. основная масса Луны сосредоточена в поверхностных слоях. Возник парадокс «пустой Луны». Анализируя эти исследования, Джеффрис [96] пришел к выводу, что они ошибочны, указав на возможные ошибки: систематические ошибки в движении узла при наблюдениях или редукциях, ошибки в используемой величине постоянной физической либрации и др. Каула [99] считал, что ошибка содержится в наблюдениях изменения узла $d\Omega_{\zeta}$. Оно определялось по формуле

$$\frac{d\Omega_{\zeta}}{dt} = \frac{L_{1910} - L_{1750}}{1910 - 1750} - \frac{F_{1960} - F_{1840}}{1910 - 1840}, \quad (6.13)$$

где L — долгота Луны, F — аргумент долготы, который равен углу вдоль орбиты от восходящего узла до Луны, 1750, 1840, 1910 — эпохи, к которым относились наблюдения. При этих вычислениях время определялось по вращению Земли. Если же учесть неравномерность суточного вращения Земли при отсчете времени в (6.13), то получится значение $g = 0,615$, которое существенно меньше эккертовского. Хотя сейчас можно считать, что парадокса «пустой Луны» в эккертовском смысле нет, все же некоторая неопределенность в законе радиального распределения плотности остается. Сначала она была обусловлена недостаточной точностью знания динамического сжатия β в (6.7). Величина β выводилась по астрономическим наблюдениям Луны. Как показали последующие измерения ве-

личины по наблюдениям радиосигналов от передатчиков ALSEP и лазерной локации уголкового отражателя, ранее использовавшееся значение β было заниженным [104], а поэтому параметр g завышен. Величина параметра g вычислялась неоднократно ([67], [78], [99] и др.) с использованием различных конкретных значений гармонических коэффициентов C_{20} и C_{22} . После того как точность измерения β и γ повысилась, возникла идея вместо неуверенно определяемого коэффициента C_{22} использовать величину γ и определять параметр g не по (6.7), а по формуле

$$g = \frac{3C_{20}(1 + \beta)}{\gamma - 2\beta - \alpha\beta}. \quad (6.14)$$

На наш взгляд, для вывода величины g по (6.14) лучше использовать значения C_{20} , β , γ , полученные путем уравнения всех наблюдаемых величин C_{20} , C_{22} , β , γ с учетом их весов (§ 37). Приняв выведенные нами уравненные значения C_{20} , β , γ , найдем

$$g = 0,5838 \pm 0,0007. \quad (6.15)$$

Для сравнения напомним, что параметр неоднородности для Земли равен $g = 0,49$, для Марса $g = 0,58$, Юпитера $g = 0,37$. Из названных планет наиболее близок к однородному строению Марс, и более неоднородно распределение плотности Юпитера.

§ 43. Плотностная модель Луны

Определение плотности в недрах планеты является комплексной проблемой в том смысле, что для ее решения используются гравиметрические, астрономические, сейсмические наблюдения. Необходимо знать тепловой режим недр, их химический и минералогический состав, давление, которое испытывает вещество недр на разных глубинах. Различны подходы к определению плотности пород Луны, находящихся на разных глубинах. Плотность самого верхнего слоя — слоя грунта (§ 41) определялась непосредственно на Луне, а также в земных лабораториях по образцам лунных пород. Кроме того, применялся ряд косвенных методов. Скальные породы, подстилающие грунт, также оказались доступными для прямых исследований. Их образцы разбросаны по лунной поверхности,

а местами они обнажены, не имеют грунтового покрова. Что касается пород на больших глубинах, то их плотность может быть определена только косвенными методами и с привлечением комплекса различных наблюдений. В этом комплексе гравиметрические данные являются важными, но их одних недостаточно, ибо в принципе обратная задача гравиметрии в общем случае неоднозначна.

Однако, делая некоторые упрощающие предположения, задачу можно решить и по гравиметрическим данным. Конечно, при этом утрачиваются детали, характеризующие, несомненно, существующие горизонтальные изменения плотности. Но чем-то надо жертвовать, чтобы получить какое-то конкретное решение, пусть и более грубо представляющее реальность. При самом простом решении использовались два ограничивающих распределение плотности условия. Первое: искомое распределение должно быть таким, чтобы общая масса Луны была равна известной величине M_{Σ} . Это условие нами было записано в виде (6.2). Второе ограничивающее условие (6.3) требовало, чтобы осевой момент инерции C в модели распределения плотности был в согласии с величиной, определенной из наблюдений. Точность определения распределения плотности могла быть повышена, если использовать дополнительную информацию из сейсмических наблюдений. Дополнительные ограничивающие условия на распределение плотности, согласно Адамсу и Вильямсону [161], можно получить, используя уравнение, связывающее плотность σ вещества недр и его упругость со скоростями продольных V_p и поперечных V_s сейсмических волн:

$$\sigma = \frac{K_s}{V_p^2 - \frac{4}{3} V_s^2}, \quad (6.16)$$

где K_s — адиабатический модуль объемного сжатия. Написанное соотношение выведено теоретически и подтверждено экспериментально. Но особенно важно то, что по сейсмическим наблюдениям устанавливается граница раздела сред с различными упругими свойствами. Эти границы являются границами изменения химического и минералогического состава или различного фазового состояния

вещества одного и того же состава. Они одновременно являются границами раздела плотностей.

В начале шестидесятых годов, после того как наблюдались собственные колебания Земли, возбужденные крупными землетрясениями, возникла новая идея уточнения распределения масс в недрах планет. Частоты собственных колебаний планеты (сфероидальных и крутильных) зависят от распределения плотности и упругих характеристик [12], [14], [68], [79], [82]. Особенно важно то, что частоты, а их целый спектр, селективны к разным внутренним сферическим слоям масс. Это делает возможным осуществлять своеобразное глубинное зондирование плотности и упругих свойств планеты. Таким образом, уравнения частот собственных колебаний являются новыми ограничивающими условиями для распределения плотности. Эти условия в определенном смысле аналогичны (6.2) и (6.3). Число таких условий равно числу наблюдаемых частот сфероидальных и тороидальных колебаний. Для Луны эта методика не реализована, так как пока отсутствуют наблюдения ее собственных колебаний.

Сделаем некоторые оценки распределения плотности внутри Луны без учета изменения давления и температуры в ее недрах. Будем определять планетарное распределение плотности в предположении, что оно имеет центральную симметрию, т. е. что плотность является функцией только радиуса ρ и не зависит от угловых координат. Сначала рассмотрим простую модель распределения плотности внутри Луны, предположив, что она изменяется по квадратическому закону

$$\sigma(\rho) = \sigma_0 - k \left(\frac{\rho}{R} \right)^2.$$

Коэффициенты σ_0 и k определяются на основе уравнений (6.1) — (6.3):

$$k = \frac{35M_{\zeta}}{16\pi R^3} (5g - 3), \quad \sigma_0 = - \frac{15M_{\zeta}}{16\pi R^3} (7g - 5).$$

Привлекая значения M_{ζ} (5.8) и g (6.15) и приняв $R = 1738,0$ км, получим

$$\sigma(\rho) = 3,81 - 0,78 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2. \quad (6.17)$$

Отсюда следует, что в центре Луны плотность равна $\sigma_{\zeta} =$

$= 3,81 \text{ г/см}^3$, а вблизи поверхности $\sigma_{\text{пов}} = 3,03 \text{ г/см}^3$. График изменения плотности σ (ρ) в функции безразмерного радиуса $\bar{\rho} = \frac{\rho}{R}$, где R — средний радиус Луны, показан на рис. 68. Плотность $\sigma_{\text{пов}}$ согласуется с наблюдаемой плотностью поверхностных слоев. Известно ([163], [164]),

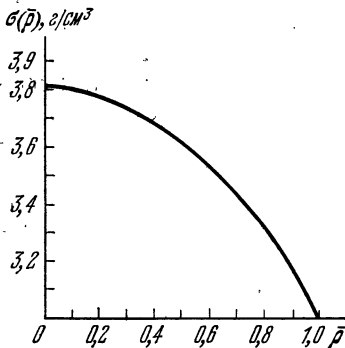


Рис. 68. Изменение плотности Луны с глубиной, $\bar{\rho} = \rho/R$ — нормированный радиус.

что горные области сложены из анортозитов и базальтов, плотность которых $\sigma = 2,8$ – $2,9 \text{ г/см}^3$ и $3,0 \text{ г/см}^3$ соответственно. Морские же области состоят из морских базальтов, имеющих плотность $3,3$ – $3,4 \text{ г/см}^3$. По результатам [156] средняя плотность лунных морей $3,19 \text{ г/см}^3$, а материков $2,97 \text{ г/см}^3$. Горные области имеют высоты на 3 – 4 км выше среднего уровня лунной поверхности, но одновременно и меньшую плотность, чем морские. Поэтому если учесть соотношение между их пло-

щадями, получается, что реальная верхняя кора может быть представлена эквивалентной моделью верхней коры с толщиной 25 км и плотностью $\sigma_1 = 3,0 \text{ г/см}^3$ [143], [157].

Для дальнейшего уточнения плотностной модели необходимо учитывать влияние на плотность давления и температуры. При возрастании температуры с глубиной плотность уменьшается, так как вещество расширяется, и наоборот, вещество сжимается из-за увеличения давления с глубиной. Плотность с глубиной изменяется также за счет изменения химического состава или фазового состояния вещества.

С достаточным приближением для учета влияния давления на плотность можно считать, что Луна находится в состоянии гидростатического равновесия. В этом случае изменение давления с глубиной выражается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dp}{d\rho} = -\sigma(\rho) g(\rho), \quad (6.18)$$

где сила тяжести

$$g(\rho) = \frac{Gm(\rho)}{\rho^2}, \quad (6.19)$$

а масса

$$m(\rho) = 4\pi \int_0^\rho \sigma(\rho_1) \rho_1^2 d\rho_1.$$

Изменение массы с глубиной можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dm}{d\rho} = 4\pi\sigma(\rho)\rho^2. \quad (6.20)$$

Теперь остановимся на температурном режиме недр Луны. Температура, помимо изменения плотности вещества, влияет на скорость распространения сейсмических волн, которые, как сказано выше, тоже используются для изучения распределения плотности. Расчет температуры недр Луны основывается на уравнении теплопроводности для тела с внутренними источниками тепла, а иногда и с учетом солнечного теплового облучения. Для расчетов надо знать распределение источников тепла, механизм переноса тепла, состав вещества недр, его теплоемкость, теплопроводность, температуру плавления при высоких давлениях, начальную температуру. Кроме того, необходимо учитывать скрытую теплоту плавления, перераспределения источников тепла, изменение механизма переноса тепла, изменение теплопроводности от температуры и др. Уже простой перечень факторов, от которых зависит температура Луны, говорит о сложности проблемы. Температурное состояние недр Луны определяется также по наблюдениям электропроводности. Тепловой истории Луны, которая непосредственно связана с температурным режимом настоящего времени, посвящено большое число работ.

На рис. 69 представлено несколько моделей изменения температуры с глубиной [146], [154]. Солидус (затверждение) соответствует морским базальтам. Как показывают графики, температура быстро растет до глубин 500—600 км. Затем рост замедляется, и она медленно увеличивается до центра Луны. Градиент ее в интервале 0—550 км равен $\sim 2,3$ °C/км, на более глубоком интервале, вплоть до центра, градиент $\sim 0,1$ °C/км. В верхнем 20-метровом

слое градиент температуры равен $\sim 1,6$ °С/м. Это указывает на малую теплопроводность этого слоя, большую пористость и малую плотность.

Для учета зависимости плотности вещества недр от химического состава и фазового состояния, характеризующихся атомным весом w , используется эмпирически

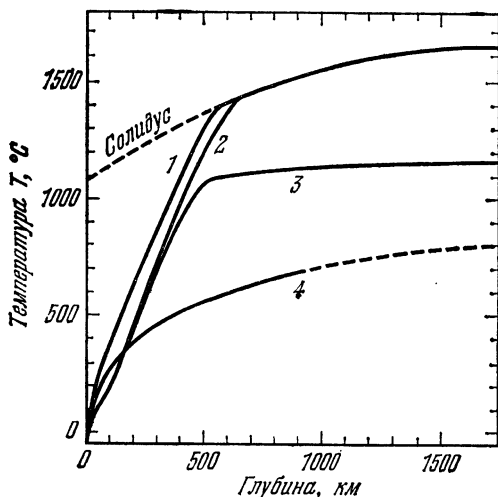


Рис. 69. Модели изменений температуры Луны с глубиной. 1 — модель Соломона и Токзоца [146], согласующаяся с наблюдавшимся тепловым потоком на лунной поверхности, полученным при посадке «Аполлона-15», 2, 3 — модели Токзоца [152]; в модели 3 принят конвективный механизм переноса тепла, в котором доминирует нижняя литосфера; 4 — модель, построенная по наблюдениям электропроводности [144].

установленная диаграмма Берча. Эта диаграмма связывает три величины: давление p , скорость сейсмических волн v и средний атомный вес w . На рис. 70 представлена взятая из работы [108] диаграмма: скорость распространения волн — плотность — атомный вес ($v - \sigma - w$). Для лунных пород w оказывается достаточно устойчивым и равен 21—22.

Дифференциальное уравнение изменения плотности с глубиной запишем в виде функции трех величин: градиента давления p , градиента температуры T и градиента

состава вещества w ,

$$\frac{d\sigma}{dp} = \sigma \left[\beta_T \frac{dp}{dp} - \alpha \frac{dT}{dp} + u \frac{dw}{dp} \right], \quad (6.21)$$

где $\beta_T(p, T, w) = \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial p} \right)_{T, w}$ — коэффициент изотермической сжимаемости; величина, обратная β_T , называется изотермическим модулем объемного сжатия $K_T = \frac{1}{\beta_T}$; $\alpha(p, T, w) =$

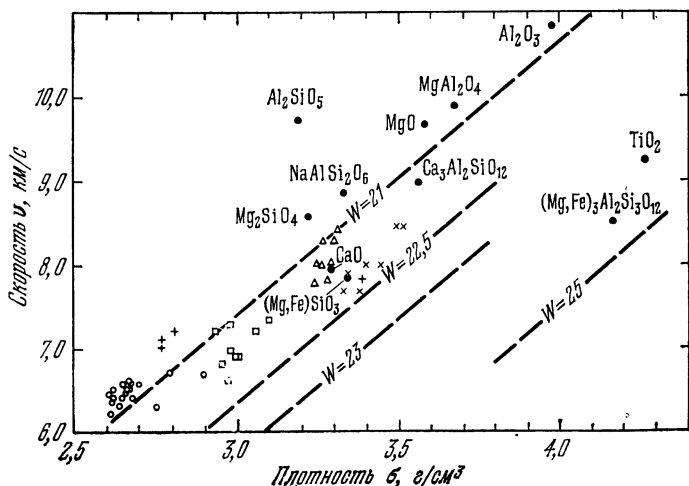


Рис. 70. Диаграмма Берча: скорость сейсмических волн — v , плотность — σ , атомный вес — w .

$= - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial T} \right)_{T, w}$ — коэффициент теплового объемного расширения; $u(p, T, w) = \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial w} \right)_{T, w}$ — коэффициент, характеризующий изменение плотности от состава вещества. Это уравнение можно привести к следующему виду [3]:

$$\frac{d\sigma}{dp} = \frac{Gm}{\rho^2} \frac{\sigma}{V_p^2 - \frac{4}{3} V_s^2} - \alpha\sigma\tau - \Delta\sigma \frac{dw}{dp}, \quad (6.22)$$

где τ — разность истинного градиента температуры и адиабатического, $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$, а σ_1 и σ_2 — плотности веще-

ства двух составов, таких, что $\frac{1}{\sigma} = \frac{w}{\sigma} + \frac{1-w}{\sigma_2}$. Это возможная другая интерпретация w . Уравнение (6.22) решается совместно с дифференциальным уравнением (6.20) для массы $m(\rho)$. Краевыми условиями для них служат $m(\rho)|_{\rho=R} = M_{\zeta}$, $m(\rho)|_{\rho=0} = 0$. Для планеты, однородной по составу, член $\Delta\sigma \frac{dw}{d\rho}$ в правой части (6.22) равен нулю.

Достоинство уравнений (6.22) и (6.20) для определения σ состоит в том, что они учитывают изменение темпера-

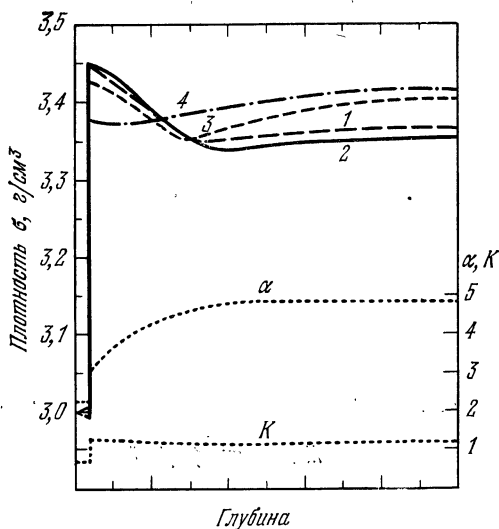


Рис. 71. Модели распределения плотности внутри Луны, соответствующие температурным моделям, представленным на рис. 69. Показано также изменение с глубиной модуля объемного сжатия K и коэффициента температурного объемного расширения α .

туры, давления и состава вещества с глубиной. Кроме того, для установления распределения плотности σ в них помимо гравиметрических данных привлечены еще наблюдения скоростей распространения сейсмических волн, которые связаны с плотностью недр Луны.

На рис. 71 представлено несколько вариантов распределения плотности Луны с учетом давления и температуры недр. Они соответствуют вариантам изменения тем-

пературы, которые изображены на рис. 69. При расчетах [143] предполагалось, что лунная кора имеет постоянные по всей глубине модуль объемного сжатия K и коэффициент температурного объемного расширения α , соответственно равные $1,4 M_{\text{бар}}^{-1}$ и $2,2 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$. Для мантии эти коэффициенты изменяются с глубиной. Их изменение предполагалось таким, как если бы веществом мантии был форстерит. Ход изменения K и α показан на том же рис. 71. Большую неопределенность создает выбор состава вещества, а не закон изменения K с давлением, который достаточно хорошо изучен в связи с Землей. При построении плотностных моделей Луны плотность коры принималась постоянной и равной $\sigma = 3,0$ г/см 3 . Как видно из графиков изменения σ для моделей 1, 2, 3, на начальных глубинах доминирует влияние температуры, поэтому плотность уменьшается с глубиной. На глубинах 500—600 км плотность в мантии достигает своего минимума и медленно возрастает вплоть до самого центра за счет увеличения давления. Вариация плотности за счет температуры и давления происходит в пределах 0,08—0,11 г/см 3 , т. е. на 2—3%. Для модели влияния температуры и давления взаимно компенсируются, поэтому вариации плотности очень малы. Картина распределения плотности, изображенная на рис. 71, может оказаться иной, если принять новое значение параметра плотностной неоднородности $g = 0,5838$ (6.15). Приведенные графики следует скорее рассматривать как иллюстрацию метода учета изменения давления, температуры и состава недр Луны.

Дальнейшее уточнение методики определения плотности возможно по наблюдениям собственных колебаний Луны. Модели собственных сфероидальных и крутильных колебаний Луны теоретически уже построены [79], [82]. Из имеющихся вариантов надо выбрать ту модель, которая лучше всего будет согласовываться с наблюдениями.

Выше уже говорилось о планетарном распределении плотности с глубиной, плотность рассматривалась как функция только радиуса ρ . Для описания изменения плотности в тангенциальном (горизонтальном) направлении используется ее аппроксимация с помощью многочленов, переменными которых являются сферические координаты ρ , φ , λ [28], [29], [56]. Горизонтальные вариации плотности в поверхностных слоях Луны могут

изучаться методами гравиметрической разведки [7], [49], которая располагает арсеналом своих методов. Для изучения распределения аномальных масс нет общего метода. Хорошо определяется граница раздела сред с различными плотностями, когда граница — единственная или имеется несколько согласующихся границ. Наиболее эффективно применение гравиметрического метода для определения границ сред как интерполяционного метода меж-

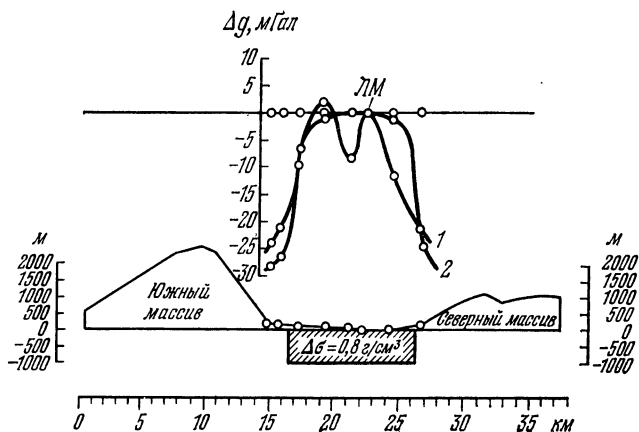


Рис. 72. Изменения силы тяжести вдоль профиля, пересекающего долину Тавр—Литтров: 1 — измеренные значения силы тяжести, 2 — аномалии Буге. Заштриховано сечение аномального тела, найденное в результате интерпретации аномалий Буге.

ду пунктами, в которых глубина границы определена путем сейсмического зондирования. Этот случай соответствует, например, определению нижней границы лунной коры, контрастирующей по плотности с подстилающей ее мантией. Представленная на рис. 50 схема толщины лунной коры, по существу, задает глубины нижней границы коры. Глубины, в том числе и для обратной стороны Луны, определялись по вариациям аномалий гравитационного поля. Опорными глубинами для них являлись глубины до мантии на видимой стороне, измеренные по сейсмическим исследованиям (§ 45). Схемы толщин лунной коры для видимой стороны ранее строились

в [51], [66], но в них исходные данные были не столь достоверны.

Хороший пример того, как по гравиметрическим измерениям детально было изучено распределение плотности в верхних слоях Луны, дан в работе [150]. Использовался профиль аномалий силы тяжести, полученный с помощью гравиметра ТГ во время движения самоходной тележки «Аполлона-17» с космонавтом. Профиль проходил поперек долины Тавр — Литтров. Она расположена на юго-восточной окраине Моря Ясности между двумя горными массивами, которые возвышаются над ней на 2 км. Образцы пород, доставленные на Землю, показывают, что горные массивы сложены из брекчированных пород. Долина Тавр — Литтров интерпретируется как грабен, образовавшийся во время возникновения самого бассейна Моря Ясности. Для геологической интерпретации по наблюдаемым значениям силы тяжести были вычислены аномалии Буге (рис. 72). Задача рассматривалась как двумерная. Избыточная плотность базальтовых пород, залегающих под дневной поверхностью и создающих аномалию Буге, над плотностью окружающих брекчированных пород принята равной $0,8 \text{ г/см}^3$. По профилю аномалий Буге найдено, что под долиной залегают базальтовый блок, толщина которого 800 м, а ширина около 10 км.

§ 44. Изменение силы тяжести, ее радиального градиента и давления с глубиной

Величина силы тяжести на глубине зависит от распределения плотности. Пренебрежем изменением плотности в тангенциальном направлении, а также центробежным ускорением собственного вращения Луны и действием на нее приливных ускорений от Земли и Солнца. Радиальное распределение плотности в недрах Луны примем то, которое получено в предыдущем параграфе (6.17). Известно, что в случае сферически-симметричного распределения плотности σ (ρ) сферические слои, внешние по отношению к точке, в которой рассматривается радиальное ускорение притяжения, не оказывают на нее притяжения. Притяжение создается только внутренними слоями. Радиальное ускорение притяжения с достаточно высокой степенью

точности можно считать равным силе тяжести $g(\rho)$:

$$g(\rho) = G \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho} \frac{\sigma(\rho_1) \rho_1^2 \cos \varphi_1 d\lambda_1 d\varphi_1 d\rho_1}{\rho_1^2} = \frac{4\pi G}{\rho^2} \int_0^{\rho} \sigma(\rho_1) \rho_1^2 d\rho_1. \quad (6.23)$$

На рис. 73 изображен график изменения $g(\bar{\rho})$ как функции безразмерного радиуса Луны $\bar{\rho} = \frac{\rho}{R}$, где R — средний радиус Луны. На этом же рисунке для сравнения показана

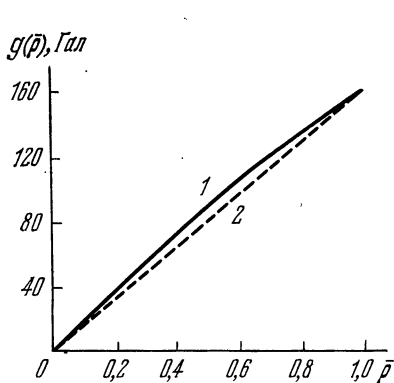


Рис. 73. Изменение силы тяжести $g(\bar{\rho})$ внутри Луны в функции нормированного расстояния $\bar{\rho} = \rho/R$ в предположении, что плотность изменяется по закону (6.17). Прерывистой линией показано изменение $g(\bar{\rho})$ для однородной Луны с ее средней плотностью.

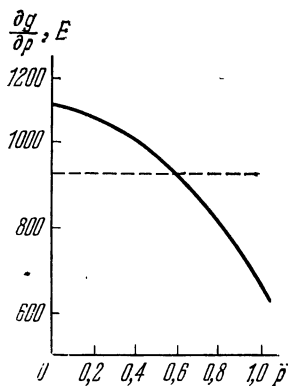


Рис. 74. Изменение радиального градиента силы тяжести $\frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho}$ внутри Луны в функции безразмерного расстояния $\bar{\rho} = \rho/R$. Прерывистой линией показано изменение $\frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho}$ для однородной Луны с ее средней плотностью.

линия изменения ускорения $g(\rho)$ для случая Луны, однородной по плотности и с массой, равной действительной массе M_{ζ} Луны. Как видно из графика, различие весьма незначительное, чего нельзя сказать для Земли.

Рассмотрим, как изменяется *радиальный градиент силы тяжести* $\frac{\partial g}{\partial \rho}$ Луны в функции ρ . Для этого продиффе-

ренцируем обе части равенства (6.23) по ρ

$$\frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho} = 4\pi G\sigma(\rho) - \frac{8\pi G \int_0^{\rho} \sigma(\rho_1) \rho_1^2 d\rho_1}{\rho^3}. \quad (6.24)$$

При заданном распределении плотности $\sigma(\rho_1)$ нетрудно подсчитать значения радиального градиента силы тяжести $\frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho}$ для различных глубин. Изменение $\frac{\partial g}{\partial \rho}$ в функции нормированного радиуса $\bar{\rho} = \frac{\rho}{R}$ показано на рис. 74. Величина $\frac{\partial g}{\partial \rho}$ возрастает с глубиной, достигая максимума в центре Луны. Для однородной Луны с постоянной плотностью σ_0 радиальный градиент $\frac{\partial g}{\partial \rho}$ внутри нее равен постоянной величине независимо от расстояния до центра, а именно:

$$\frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho} = \frac{4}{3} \pi G \sigma_0.$$

При переходе через поверхность Луны, когда $\rho > R$, радиальный градиент испытывает скачок. Он описывается уже другим аналитическим выражением:

$$\frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho} = -\frac{2GM_{\zeta}}{\rho^3}. \quad (6.25)$$

Это выражение получается из (6.24). Первый член в правой части (6.24) равен нулю, так как плотность $\sigma(\rho > R) = 0$. Интегрирование второго слагаемого в пределах от 0 до ρ , если иметь в виду, что $M_{\zeta} = \frac{4}{3} \pi \sigma_0 R^3$, приводит к выражению (6.25).

В заключение рассмотрим изменение давления с глубиной. Для приращения давления p имеем

$$dp(\rho) = -\sigma(\rho) g(\rho) d\rho.$$

Полное давление в точке, расположенной на расстоянии

ρ от центра Луны, равно

$$p(\rho) = - \int_0^{\rho} \sigma(\rho_1) g(\rho_1) d\rho_1 =$$

$$= - 4\pi G \int_0^{\rho} \frac{\sigma(\rho_1)}{\rho_1^2} \int_0^{\rho_1} \sigma(\rho_2) \rho_2^2 d\rho_2 d\rho_1. \quad (6.26)$$

График изменения давления с глубиной показан на рис. 75. Максимум давления в недрах Луны достигает в ее центре (~ 50 кбар). Такое давление достигается в недрах Земли всего на глубине 150 км. На этом же рисунке изображено изменение давления в предположении однородной плотности Луны.

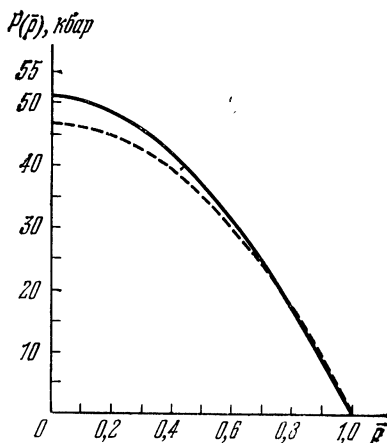


Рис. 75. Изменение давления P с глубиной в функции нормированного радиуса $\bar{\rho} = \rho/R$, в предположении, что плотность изменяется по закону (6.17). Прерывистой линией показано изменение p для однородной Луны с ее средней плотностью.

§ 45. Сейсмичность Луны и ее общее внутреннее строение

Как было сказано выше, гравиметрические методы изучения распределения масс внутри Луны проводятся в комплексе с сейсмическим методом. Достоинство последнего состоит в том, что он позволяет установить в отдельных местах глубины границ раздела сред с различными плотностями, которые используются в гравиметрических исследованиях как опорные глубины. Поэтому ниже мы кратко остановимся на описании сейсмичности Луны и основных результатов сейсмических исследований внутреннего строения Луны. Уже первые измерения сейсмических волн показали ряд особенностей, которые оказались неожиданными и до наблюдений на Луне не предвиделись.

Сейсмические волны на Луне возникают вследствие нескольких явлений:

1. Лунотрясений, происходящих при срыве находившихся в недрах Луны напряжений.

2. Ударов метеоритов о лунную поверхность.

3. Ударов падающих на Луну последних ступеней ракет и модулей космических аппаратов, взрывов на Луне специальных зарядов, действия взлетающих с лунной поверхности ракет.

Первые два источника возбуждения сейсмических волн являются естественными, эксперименты по исследованию Луны с помощью сейсмических волн, возбуждаемых искусственными взрывами, получили название **активных сейсмических экспериментов**, а эксперименты, в которых регистрируются сейсмические волны от всех других источников, — **пассивных сейсмических экспериментов**.

Сейсмические волны регистрируются сейсмометрами, установленными на лунной поверхности. Первая сейсмическая станция была создана в июне 1969 г. в Море Спокойствия экспедицией «Аполлона-11». Эта первая сейсмическая станция проработала всего один лунный месяц. Помимо нее, в последующем экипажами космических кораблей «Аполлон-12, -14—17» было создано еще пять сейсмических станций. Каждая станция состоит из двух блоков. В первом установлены три длиннопериодных сейсмометра с периодом собственных колебаний чувствительного элемента $T = 15$ с. Два из них предназначены для регистрации колебаний почвы в двух взаимно перпендикулярных горизонтальных направлениях, а третий — в вертикальном. Кроме того, в этом же блоке монтируется короткопериодический ($T = 1$ с) вертикальный сейсмометр. Все сейсмометры термостатированы. Во втором блоке смонтирована электронная часть сейсмостанции. Изменение чувствительности и калибровки сейсмометров производится дистанционно по команде с Земли. Общая масса каждой сейсмостанции 11,5 кг. Информация о сейсмических колебаниях почвы в кодированном виде поступает на Землю. Питание сейсмических станций происходит от радиоизотопных генераторов. Предполагалось, что сейсмостанции способны функционировать в течение ~ 10 лет. Не все сейсмометры на станциях работают в настоящее время. Наибольшей чувствительностью обладает сейсмо-

станция, установленная экипажем космического корабля «Аполлон-16». Сейсмометры способны регистрировать перемещения почвы с точностью 0,5 ангстрем. В каком бы месте Луны ни упал метеорит, масса которого больше 7—10 кг, он будет зарегистрирован лунными сейсмометрами.

Характер лунных сейсмических волн оказался необычным. Такие сейсмические волны на Земле ранее не наблюдались. Амплитуда их быстро возрастает, а затем медленно, в течение 1—4 часов, затухает. На Земле при взрыве или землетрясении на расстоянии нескольких сотен километров сейсмические колебания обычно наблюдаются в течение только нескольких минут. Лунная кора обладает необычными упругими и вязкими свойствами. Ее добротность (величина, обратная коэффициенту затухания) равна $Q = 5000$. Для большинства земных пород Q изменяется от 100 до 1000.

На каждой станции регистрируется ежегодно несколько сотен тысяч лунотрясений. Сейсмическая активность для различных районов Луны различна. Например, в окрестности кратера Декарт регистрируется ежегодно около 3000 лунотрясений, а в Апеннингах и Океане Бурь в пять раз меньше. В общем по всей Луне сейсмическая активность меньше, чем на Земле. Она меньше по магнитуде лунотрясений (один-два по шкале Рихтера), меньше по выделяемой энергии каждого лунотрясения. Подсчитано, что средняя величина скорости выделения сейсмической энергии на Луне порядка 10^{15} эрг/год, в то время как на Земле — 10^{24} эрг/год. Только более высокая чувствительность лунной сейсмической аппаратуры позволяет регистрировать сейсмическую активность Луны. Замечено, что максимальная сейсмическая активность приходится на время нахождения Луны в перигее, когда на нее действует наибольшая приливная сила от Земли [92]. В соответствии с этим наблюдается периодичность максимальной активности с периодом 13,6; 27,2; 27,5 и 206 земных суток (рис. 76). Предполагается также наличие еще более длиннопериодических вариаций максимальной активности с периодом около шести лет. Положение очагов лунотрясений имеет определенную закономерность. Они располагаются вдоль двух дуг большого круга, одна из них имеет меридиональное простираание, а другая — северо-восточ-

ное. Пояса лунотрясений имеют протяженность порядка 2000 км, а ширину всего 100—300 км. Очагов лунотрясений, относящихся к обратной стороне, наблюдалось мало. Глубины очагов лунотрясений оказались равными 600—800 км. На Земле только глубокофокусные землетрясения, например, Курило-Камчатские, имеют фокусы на глубине ~ 700 км, а остальные относятся к подошве земной коры, к глубинам 20—40 км. Наряду с глубокофокус-

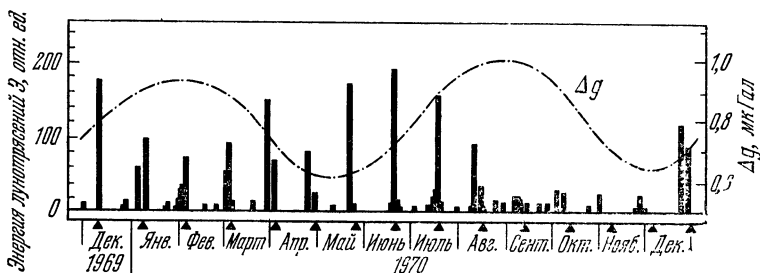


Рис. 76. Изменение выделения сейсмической энергии \mathcal{E} лунотрясений с течением времени, зарегистрированное на станции «Аполлон-12» [110]. Δg — осредненное приливное от Земли изменение силы тяжести. Моменты перигеев Земли показаны треугольниками.

ными на Луне наблюдаются более мелкие лунотрясения, в том числе те, которые вызываются явлениями типа оползней. В течение лунного дня и ночи возникают температурные напряжения, поэтому часть лунотрясений по времени коррелирует с восходами и заходами Солнца. Отсутствие мелкофокусных лунотрясений говорит в пользу того, что Луна не испытывает заметного расширения или сжатия. Лунные сейсмографы в мае 1972 г. зарегистрировали падение метеорита с массой около 1100 кг, который упал в 139 км севернее кратера Фра Мауро. Сейсмические волны от него многократно прошли по всей Луне. Два месяца спустя в районе кратера Москва на обратной стороне упал метеорит с такой же массой. Скорость его падения была около 20 км/с. Ежегодно на каждой станции регистрируется несколько сотен лунотрясений метеоритного происхождения. По характеру сейсмических волн они отличаются от лунотрясений, вызванных разрядкой напряжений в недрах Луны. Оказалось, к неожиданности исследователей, что количество лунотрясе-

ний, вызываемых падением метеоритов, на 1—3 порядка меньше, чем предполагалось до сейсмических наблюдений на Луне.

Сейсмические эксперименты на Луне производились неоднократно. Сейсмические волны возбуждались падениями третьих ступеней ракет «Сатурн» с массой 14 т, доставлявших космические корабли «Аполлон» на Луну. Удар их был эквивалентен взрыву 10 т тротила. Меньший, но достаточно мощный удар возникал от падения лунных модулей космических кораблей «Аполлон», масса которых была около 2,4 т. Кроме того, активный сейсмический эксперимент осуществлялся космонавтами с помощью взрывов на Луне специальных гранат массой от десятков граммов до нескольких кг и запуска по команде с Земли после отлета космонавтов установленных ими специальных ракет, а также действием взлетающих с Луны ракет. На основании сейсмических экспериментов построена модель распространения сейсмических волн для глубин порядка сотни км. Наблюдения же глубокофокусных лунотрясений, особенно тех, которые расположены на обратной стороне Луны, позволили получить информацию о больших глубинах недр Луны. В итоге сейсмических исследований [19], [108], [109], [111], [112], [125], [151], [152], [155], [160] и др. установлено пять основных зон по глубине, характеризующихся различными скоростями распространения сейсмических волн (кора, верхняя, средняя и нижняя мантии, ядро).

Кора. Нижняя ее граница располагается на глубине ~ 55 км и характеризуется скачком скорости V_p распространения продольных сейсмических волн с 7,0 до 8,1 км/с. Эта граница выделяется четко, ниже ее начинается мантия. Обнаружена слоистость строения самой коры и сложный характер изменения в ней скорости сейсмических волн. Сначала скорость возрастает с глубиной в среднем по почти экспоненциальному закону. На глубине ~ 25 км она становится равной 5,8 км/с. В трехкилометровой толще на глубине ~ 25 км она резко увеличивается на 13% и становится на больших глубинах равной 6,8 км/с. Далее до самой мантии скорость продольных волн увеличивается незначительно, а в среднем во всей нижней толще коры вплоть до мантии равна 7 км/с. Скачок скорости на глубине 25 км объясняют изменением состава веще-

ства лунной коры. В верхней части предполагается базальт, а в нижней — габбро-анортозит. Есть и другая гипотеза, что на глубине 25 км давление достигает своего критического значения 1 Кбар и происходит изменение упругих свойств пород без изменения их химического состава. Возможно, что кора в отдельных местах подстилается тонким слоем высокоскоростного материала с $V_p = 9,0-9,5$ км/с.

Верхняя мантия простирается до глубины ~ 300 км. В ее верхней части скорость продольных волн равна $V_p = 8,1$ км/с, а в нижней $V_p = 7,8$ км/с. Поперечные волны имеют скорость в верхней части мантии $V_s = 4,7$ км/с, которая немного уменьшается с глубиной. Такое уменьшение скорости продольных и поперечных волн с глубиной объясняется повышением температуры с глубиной. Породы мантии обладают высокой добротностью $Q = 3000-5000$. Верхняя мантия имеет оливино-пироксеновый состав. Плотность вещества равна $3,45-3,5$ г/см³.

Средняя мантия составляет зону на глубинах от 300 км до 800 км. На границе верхней и средней мантии скорость V_p продольных волн уменьшается на 0,3 км/с, а поперечных V_s — на 0,7—1,1 км/с. Скорость поперечных волн равна в средней мантии $\sim 3,6-4,0$ км/с. По некоторым данным электромагнитного зондирования граница представляет собой слой с высокой проводимостью. К нижней границе средней мантии приурочены очаги лунотрясений. Поскольку через среднюю мантию, так же как и через верхнюю, поперечные волны проходят без заметного ослабления; предполагается, что в них нет областей расплавленного вещества.

Нижняя мантия отличается от вышележащей средней тем, что через нее не проходят поперечные волны. Ее вещество обладает относительно низкой добротностью ($Q = 100$). Объясняется это частичным плавлением силикатного ультраосновного состава вещества мантии при температурах, больших 1500° С. Нижняя часть мантии является астеносферой, которая простирается до самого центра. Вышележащие слои Луны являются твердыми, поэтому называются литосферой. У Земли астеносфера представляет собой сферический слой толщиной всего 100—200 км. Верхний слой мантии обладает способностью выдерживать значительные напряжения.

Ядро характеризуется резким падением скорости продольных волн, которая уменьшается до 4—5 км/с. Граница этого изменения лежит на глубине 1380—1570 км. Эта аномальность скоростей распространения сейсмических волн может быть объяснена существованием небольшого расплавленного железо-сульфидного ядра. Такое ядро могло играть роль «динамо» — источника обнаруженного на Луне слабого магнитного поля. Масса ядра составляет всего 1% от общей массы Луны.

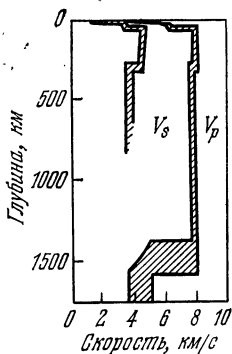


Рис. 77. Схема изменения скоростей продольных V_p и поперечных V_s сейсмических волн с глубиной.

Общая схема изменения продольных V_p и поперечных V_s скоростей сейсмических волн с глубиной Луны представлена на рис. 77. Скорость определяется с некоторыми ошибками. Особенно большая неуверенность в скоростях на больших глубинах, в частности, в ядре. Неопределенность скоростей изображена на схеме в виде полосы возможных скоростей (заштрихованных на рисунке). Значения скоростей попереч-

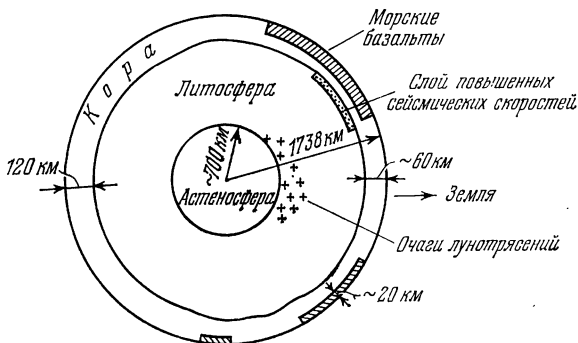


Рис. 78. Общая схема внутреннего строения Луны.

ных волн V_s отсутствуют на глубинах, соответствующих глубинам средней мантии.

Описанная выше схема внутреннего строения Луны базируется на сейсмических данных, поэтому она спра-

ведлива для области, где расположены лунные сейсмостанции. Распространить некоторые выводы на всю Луну помогает гравиметрия. По гравитационному полю, которое известно для всей Луны, определяются детали строения лунной коры как на видимой, так и на обратной ее сторонах. Ее толщина на видимой стороне в среднем около 60 км, а на обратной — 120 км. Асимметрия внутреннего строения Луны устанавливается главным образом по гравитационному полю [133]. Асимметрично расположено лунное ядро, центр масс Луны относительно ее фигуры (§ 35). По гравитационному полю изучается строение масконов, толщина базальтовых излияний в морях. На основании сейсмических и гравиметрических данных на сегодня известна общая схема внутреннего строения Луны, изображенная на схеме рис. 78.

§ 46. Масконы

Среди ряда новых открытий на Луне, сделанных с началом ее исследований космическими методами, обнаружение масконов является одним из удивительных. *Масконы* (mass concentrations — концентрации масс) совпадают с лунными морями. Наиболее крупные из них расположены в Море Дождей и Море Ясности, а также в Морях Кризисов, Нектара, Влажности и др. Масконы создают большие локальные аномалии гравитационного поля. Они залегают на относительно небольших глубинах и имеют большую плотность относительно вмещающих их пород ($\Delta\sigma = 0,3 \text{ г/см}^3$). Аномалия силы тяжести, например, над масконом Моря Дождей на высоте 100 км над Луной достигает 250 мГал. Все аномалии (за исключением аномалии в Заливе Радуги) над масконами положительны. Модель гравитационного поля Луны, на которой впервые были показаны аномалии, создаваемые масконами, была опубликована Мюллером и Сьегреном [120] в 1968 г. (см. рис. 20). За открытие масконов ее авторы были удостоены золотой медали Магеллана Американского философского общества.

В дальнейшем на основании более точных измерений гравитационного поля Луны были уточнены параметры масконов (табл. 47). В таблице указаны координаты (φ, λ) центра маскона, максимальная аномалия силы тяжести

Таблица 47

Параметры масконов

Названия масконов	Координаты		Максимальные значения аномалий силы тяжести Δg над масконом на высоте 100 км, мГал	Диаметр D и ср. кв. оп., км	Масса m и ср. кв. оп., $10^{-6} M_{\zeta}$	Разности моментов инерции, $10^{-4} M_{\zeta} R^2$	
	φ	λ				$B - A$	$C - A$
Море Дождей	+38°	-18°	220	625±35	19,40±1,65	10,26	4,29
Море Ясности	+28°	+18°	220	650±35	22,44±1,73	14,04	11,30
Море Кризисов	+16°	+58°	130	410±25	11,52±1,50	-4,95	1,81
Море Нектара	-16°	+34°	120	420±20	9,67±1,41	3,63	5,55
Залив Зноя	+16°	-8°	80		7,19±1,41		
Море Влажности	-25°	-40°	65	300±35	4,31±0,87	0,63	1,41
Море Гумбольдта	+57°	+82°	52	300	4,68	-1,31	-3,31
Море Восточное	-20°	-95°	52	315±15	5,25±0,5	-4,64	-0,53
Море Смита	-4°	+85°	52	370±20	7,25±0,75	-7,20	0,01
без названия	-7°	+27°	52				
без названия	-17°	+70°	40				
Море Гримальди	-6°	-68°	26				
Залив Радуги	+45°	-31°	-20				
Море Москвы	+26,5°	+147°		200	2,05	0,67	0,75
без названия	-37,5°	-151°		250	3,23	1,08	0,36
без названия	+1°	-128,5°		250	3,23	-0,73	1,25
без названия	-3,5°	-157,5°		190	1,84	1,29	1,55
					Сумма	12,77	24,44

над масконом на высоте 100 км над лунной поверхностью, диаметры масконов D , их избыточные массы m . Названные диаметры представляют собой диаметры кратеров, залитые морскими излияниями. Величины масс m определяются путем подбора такого распределения масс, чтобы оно создавало наблюдаемую гравитационную аномалию. Другой способ определения величины m состоит в интегрировании аномалий силы тяжести Δg (s) от маскона:

$$m = \frac{1}{4\pi G} \iint_S \Delta g(S) dS,$$

где S — лунная сфера. (Практически ограничиваются частью сферы.) Основная трудность использования этого способа состоит в том, чтобы выделить локальное гравитационное поле, соответствующее рассматриваемому маскону, исключив влияние всех других масс Луны. Подчеркнем, что в таблице даны избыточные массы m , кото-

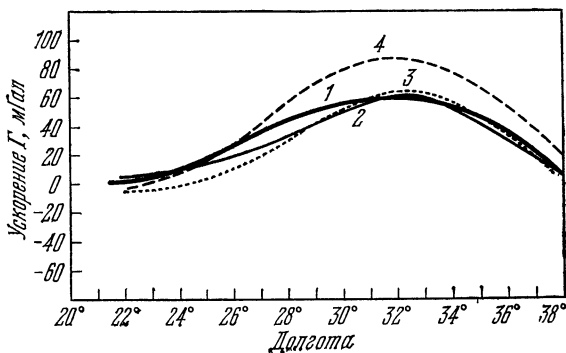


Рис. 79. Профили ускорений Γ для маскона в Море Нектара на высоте 116 км: 1 — по наблюдениям «Аполлона-12», 2 — рассчитанный для шара, 3 — рассчитанный для диска радиуса 150 км и массы $5,1 \cdot 10^{-6} M_{\zeta}$, 4 — рассчитанный для диска радиуса 200 км и массы $9,1 \cdot 10^{-6} M_{\zeta}$,

рые связаны с фактическими массами m_{ϕ} масконов следующим соотношением:

$$m_{\phi} = m \left(1 + \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} \right),$$

где σ_0 — средняя плотность вмещающих маскон пород, $\Delta\sigma$ — избыточная плотность маскона относительно вмещающих пород. Ориентировочно $\sigma_0 = 3,0 \text{ г/см}^3$, а $\Delta\sigma = 0,3 \text{ г/см}^3$. Ошибка в определении масс m масконов может достигать 20%. Нетрудно подсчитать, что фактические массы отдельных масконов составляют $(1 \div 3) \cdot 10^{-4}$ от массы всей Луны, т. е. это значительные аномальные включения в теле Луны. Наконец таблица заканчивается разностями моментов инерции Луны ($B - A$) и ($C - A$), выраженными в единицах $10^{-6} M_{\zeta} R^2$. Эти разности обусловлены наличием на Луне масконов. Как показывают подсчеты, вклад от всех масконов в разность момен-

тов Луны $B - A$ и $C - A$ (§ 38) составляет $\sim 10\%$, что существенно.

На примере маскона в Море Нектара покажем, как уточнялись представления о них. На рис. 79 изображен гравиметрический профиль, полученный по доплеровским наблюдениям «Аполлона-12» на высоте 116 км. По профилю ускорений строились модели маскона в нескольких

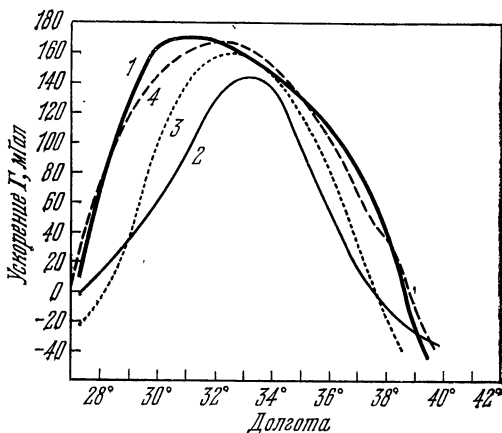


Рис. 80. Профили ускорений Γ для маскона в Море Нектара на высоте 28 км: 1 — по наблюдениям «Аполлона-12», 2 — рассчитанный для шара, 3 — рассчитанный для диска радиуса 150 км, 4 — рассчитанный для диска радиуса 200 км.

вариантах [32]. Одна из моделей была в виде шара с массой $9,1 \cdot 10^{-6} M_{\text{C}}$, расположенного на глубине 100 км. Две другие модели — в виде приповерхностных материальных дисков с радиусами 150 км и 200 км и массами $5,1 \cdot 10^{-6} M_{\text{C}}$ и $9,1 \cdot 10^{-6} M_{\text{C}}$ соответственно. С наблюдаемым гравитационным полем одинаково согласуется и поле шара на глубине 100 км и поля приповерхностных материальных дисков. Над этим же масконом позже были измерены ускорения по наблюдениям «Аполлона-14», но уже на низких высотах, 28 км (рис. 80). Обнаруживается существенное различие наблюдаемого поля и рассчитанного для прежней модели маскона в виде шара. Различие меньше для диска с радиусом 150 км; удовлетворительное согласие с наблюдаемым полем получено для гравитационного поля

от приповерхностного диска с радиусом 200 км. Этот пример показывает, как важно при оценке глубин масконов учитывать их форму и иметь гравитационное поле, в котором проявляется форма аномального тела.

Гравитационные поля над Морями Ясности и Кризисов интерпретировались в [123] как поля материальных дисков. Для Моря Ясности представлены два варианта (рис. 81). Один — материальный диск радиуса 230 км на

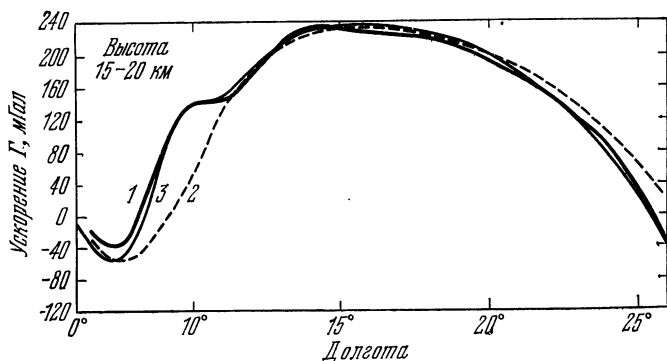


Рис. 81. Профили ускорений G для маскона в Море Ясности, 1 — по наблюдениям КСМ «Аполлон-15», 2 — рассчитанный для диска радиуса 230 км, расположенного на глубине 17 км, 3 — рассчитанный для двух дисков с радиусами 30 и 230 км соответственно, расположенных на глубинах 1 км и 17 км. Центры дисков имеют соответственно координаты $\varphi = 26^\circ$, $\lambda = 9^\circ,5$; $\varphi = 26^\circ$, $\lambda = 18^\circ,5$.

глубине 17 км с массой $18 \cdot 10^{-6} M_\zeta$. В другом варианте подобраны два диска на глубинах 17 км и 1 км с массами $15,8 \cdot 10^{-6} M_\zeta$ и $0,15 \cdot 10^{-6} M_\zeta$ и радиусами 230 км и 30 км соответственно. Второй меньший диск, центр которого сдвинут на 9° относительно центра основного диска, объясняет небольшую особенность гравитационного поля маскона в море Ясности. Гравитационное поле Моря Кризисов интерпретируется (рис. 82) моделью маскона в виде материального диска радиуса 200 км на глубине 14 км и шаровой массой $12,8 \cdot 10^{-6} M_\zeta$. Гравитационные поля, представленные на последних двух рисунках, выведены по доплеровским наблюдениям КСМ «Аполлон-15». Поле над Морем Ясности относится к высотам 15—20 км, а над Морем Кризисов — к высотам 20—25 км.

Анализ более тонких деталей гравитационного поля над масконами показывает, что вокруг маскона наблюдаются иногда отрицательные гравитационные аномалии. Особенно четко это можно видеть в Море Восточном. В работе [58] гравитационные поля масконов в Море Дождей и в Море Ясности аппроксимируются дисками и соосными с ними материальными кольцами с отрицательной плот-

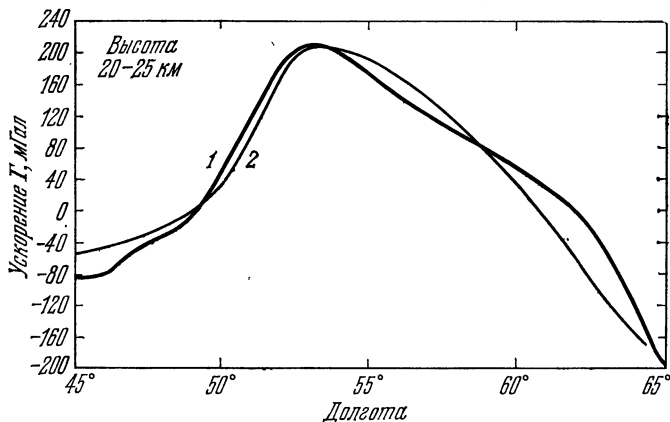


Рис. 82. Профили ускорения Γ для модели масконов в Море Кризисов. 1 — по наблюдениям КСМ «Аполлон-15»; 2 — рассчитанный для диска радиуса 200 км, массы $12,8 \cdot 10^{-6} M_{\zeta}$, расположенного на глубине 14 км. Координаты центра диска $\varphi = 17^\circ$, $\lambda = 58^\circ$.

ностью. Параметры масконов выводят, используя комбинацию значений аномального гравитационного потенциала W , вертикальной составляющей притяжения W_z и вертикального градиента W_{zz} , вычисленных на некоторой высоте от лунной поверхности на оси искомого диска. Автор [43] строит модель маскона в виде материального диска с плотностью, являющейся функцией его радиуса.

Итак, на основании интерпретации гравитационного поля масконов установлено, что масконы — это не компактные, а распределенные аномальные массы, по форме напоминающие круговые диски. Более того, масса диска к краю убывает, т. е. структура масконов скорее имеет вид шаровых или гиперболических сегментов. Хорошо устанавливаются горизонтальные границы масконов. Они являются приповерхностными образованиями.

Установлена корреляция диаметров D , приведенных в табл. 47, с максимумами аномалий силы тяжести Δg_m над масконами (рис. 83). Из рисунка видно, что корреляция достаточно уверенная.

В ряде работ [69], [126], [162] исследовалась зависимость между диаметрами D и определенными по гравита-

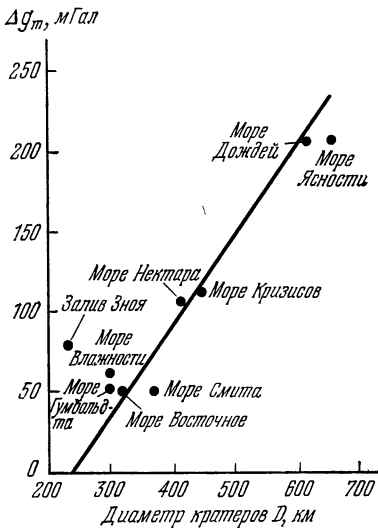


Рис. 83. Зависимость максимумов аномалий силы тяжести Δg_m над масконами от диаметров D кратеров, заполненных морскими базальтами.

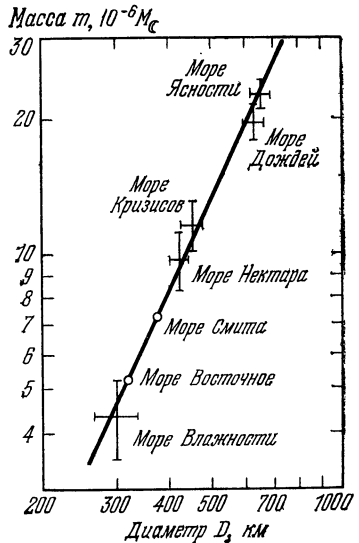


Рис. 84. Зависимость масс t масконов от их диаметров D . Вертикальные и горизонтальные линии обозначают точности определений t и D соответственно.

ционному полю массами t масконов. На рис. 84 представлена одна из таких зависимостей [69]. Очевидно, что масса t и максимум аномалии силы тяжести Δg_m имеют прямую связь. Следует заметить, что в графиках на рис. 83, 84 используются диаметры D , представляющие диаметры, определенные по видимым контурам областей, покрытых морским материалом. Эффективные средние диаметры масконов на глубине могут отличаться от названных диаметров D . Если сравнить D из табл. 47 и диаметр, определенный в результате интерпретации гравитационного поля в Мо-

ре Ясности (см. рис. 81), то различие достигает 50%. Удовлетворительно согласие диаметров для Моря Кризисов (рис. 82) и для Моря Нектара (см. рис. 80). В различии диаметров играет роль, конечно, принимаемая толщина диска, меньшую роль играет его глубина. Анализ графиков на рис. 83, 84 позволяет сделать важный вывод, что прочность лунной коры такова, что она выдерживает нагрузки масконов, диаметр D которых менее 200—250 км.

Говоря о масконах, нельзя не упомянуть работы О'Лири, Кампбелла и Сагана [75], [126], которые на основании гравитационного поля определяли совокупность масконов, аппроксимируемых в виде круговых дисков на глубине 300 км и с одинаковой поверхностной плотностью 10^5 г/см². Они предсказывали существование на обратной стороне Луны в пять раз большего маскона, чем самый большой на видимой стороне маскон в Море Дождей. Он даже получил название Скрытый (Occultum). Последующая серия работ показала, что в действительности такого единого маскона нет. Значение упомянутой работы состоит в том, что было показано наличие на обратной стороне большого аномального образования. Сейчас известно, что его роль играет центральная высокогорная область, создающая большую положительную аномалию на широкой площади (§ 32).

С момента открытия масконов стали выдвигаться различные гипотезы их происхождения. Обилие гипотез образования масконов сравнимо, пожалуй, с числом гипотез, предлагавшихся для объяснения недавно открытых в астрофизике феноменальных объектов — пульсаров. Хотя гипотезы образования масконов менее экстравагантны, чем гипотезы о пульсарах, но среди них встречаются достаточно оригинальные. Сейчас уже накопился ряд сведений о масконах, которые можно считать твердо установленными, поэтому гипотезы их образования должны объяснять эти факты. Прежде всего, это большие положительные гравитационные аномалии в районах пониженного рельефа. Литосфера должна быть способна выдерживать достаточно большую избыточную массу (~ 800 кг/см²) в течение длительного времени (~ 3 млрд. лет) без изостатического выравнивания. Морские бассейны, с которыми совпадают масконы, были заполнены веществом

не сразу после их экскавации, а спустя $\sim 0,5$ млрд. лет. Несомненно, на гипотезы образования масконов ряд ограничивающих условий наложило изучение гравитационного поля Луны. Но эти условия опосредствованные, в том смысле, что по гравитационному полю установлен ряд фактов, касающихся строения масконов и их распределения. Гипотезы должны объяснить то, что масконы представляют распределения масс вблизи лунной поверхности, а не компактные массы на глубине. Почему не выполняется изостатическая компенсация, почему масконы существуют на видимой стороне? Очень важно было бы установить, похож ли маскон на куполообразное или воронкообразное тело. Тогда можно было бы сказать о интрузивном, или ударном происхождении маскона. Для уточнения формы маскона с такой детальностью требуется более точное знание его гравитационного поля.

Ограничимся кратким обзором предлагавшихся гипотез. Первооткрыватели масконов Мюллер и Сьегрен первоначально [120] считали, что масконы есть не что иное, как железоникелевые метеориты более высокой плотности, чем породы лунной коры, которые упали на Луну и остались в лунной коре. Затем авторы эту идею трансформировали, и их гипотеза сводится к следующему [32], [123]. Сначала образуется лунная кора толщиной ~ 50 км. Она имеет меньшую плотность, чем подстилающие породы мантии. На Луну падает тело астероидных размеров и образует морскую впадину (рис. 85, а). Впадина создает небольшую отрицательную гравитационную аномалию. Упомянутые авторы считают, что впадина сразу заполнялась лавовыми излияниями из недр мантийным веществом большей плотности, чем плотность пород коры. Заполнение происходит до состояния изостатического равновесия. После этого кора Луны приобретает такую прочность, что она выдерживает поверхностную нагрузку в виде дополнительных масс без заметных деформаций. Бассейн же заполняется материалом и образуется избыточная аномальная масса. Поскольку изостатической компенсации не происходит, наблюдаются значительные положительные гравитационные аномалии. Гипотезу лавовых излияний поддерживают Конель и Холстром [80]. Они считают, что базальтовая лава нормальной плотности заполняет кратер в низкоплотностной лунной коре.

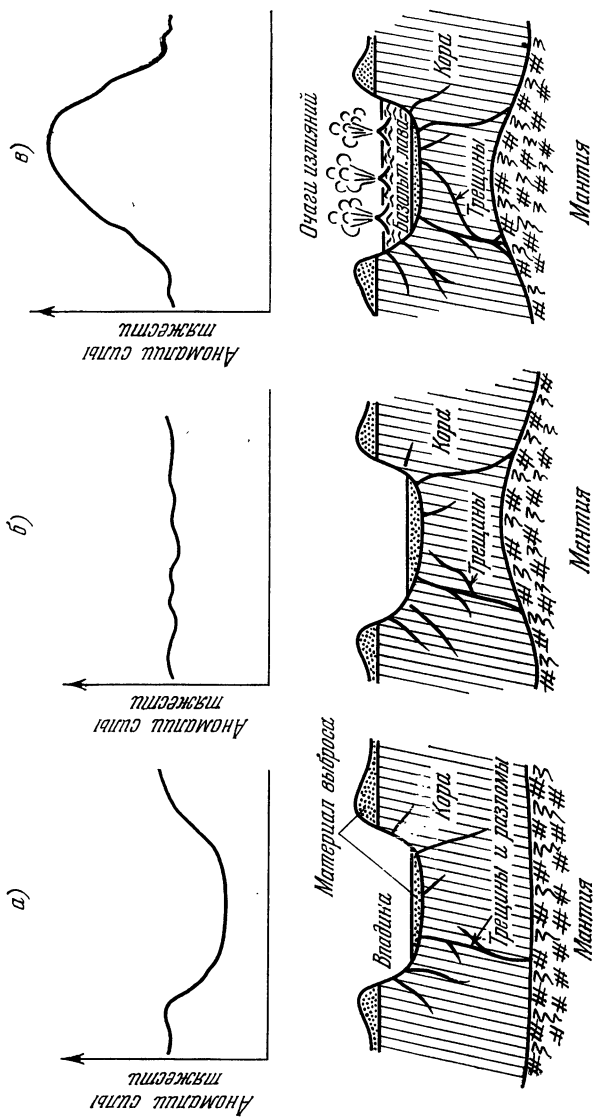


Рис. 85. Схема гипотезы образования маскона: а) образование впадины упавшим метеоритом; возникновение отрицательной аномалии силы тяжести; б) изостатическое выравнивание за счет поднятия мантии, аномалии силы тяжести убывают; в) заполнение впадины лавовыми излияниями, в результате чего образуется маскон, появляются большие аномалии силы тяжести.

Болдуин [65] и О'Киф [128] предполагают, что аномально высокоплотностная лава заполняет впадину в коре нормальной плотности. Однако современные данные говорят в пользу того, что лавовые излияния и заполнение впадин произошли не сразу, а спустя $\sim 0,5$ млрд. лет. Поэтому предполагается, что за это время лунная кора с образовавшейся впадиной приходит в состояние изостатического равновесия. Первоначально возникшая отрицательная гравитационная аномалия исчезает (см. рис. 85, б). Постепенно утолщается литосфера, кора становится прочной, способной выдержать большие дополнительные нагрузки. И когда возникают лавовые излияния морских базальтов, кора выдерживает их нагрузку, изостатически не компенсируясь вот уже в течение около 3,0 млрд. лет. Таким образом, излияния в морских впадинах, имеющие большую плотность, чем породы коры, представляют собой масконы. Они создают большие положительные аномалии силы тяжести (рис. 85, в).

Идею, что масконы — это железные метеориты, развивает Стайп [147]. Он предполагает, что метеориты, образующие в результате падения на Луну масконы, имеют достаточно большие размеры. Для шести основных морей он рассчитал размеры упавших метеоритов, которые оказались от 10 км до 60 км. При ударе они проникают на глубину, равную 7—11 их диаметрам. Для Моря Ясности масса железного метеорита должна была быть равна $930 \cdot 10^{15}$ кг, а для Моря Нектара — $17 \cdot 10^{15}$ кг. Эта гипотеза противоречит факту, что масконы — приповерхностные образования. Юри и Макдональд [59], [159], которые сомневаются в возможности плавления мантийного вещества в недрах Луны, предполагают, что существующие масконы — это большие небесные тела — планетезимали, упавшие на Луну. Эти планетезимали не из пояса астероидов Солнечной системы, а небесные тела из окрестности системы Земля — Луна. Они имеют низкие скорости. Юри, не соглашаясь с автором [147], считает, что падающие тела не проникают так глубоко в тело Луны. Ударившись о лунную поверхность, они расплющиваются, частично плавятся, равно как и часть поверхностных пород Луны в месте удара. Происходит разбрасывание вещества из места падения по поверхности Луны. В воронке вместо выброшенных пород оказывается расплющенная плане-

тезималь с большей плотностью. В гипотезе Юри и Макдональда нет объяснения того факта, что масконы наблюдаются на видимой стороне.

Многие гипотезы различались между собой в деталях. Так, в одних из них [64] предполагалось, что при ударе метеорита наряду с образованием ударной воронки происходило уменьшение давления на глубине под воронкой и возникало частичное плавление мантийного вещества. Вследствие увеличения давления в зоне плавления из мантийного вещества дифференцировались базальты, а в очаге плавления появлялось тело с меньшей плотностью. По образовавшимся в результате удара трещинам базальты изливались на дно бассейна. В ряде областей бассейны переполнялись и мантийное вещество заходило за края бассейна, образуя моря неправильной формы. Если возникло изостатическое выравнивание, то гравитационные аномалии исчезали и масконы не обнаруживались. В других областях, где изостатическое выравнивание не происходило, обнаруживались масконы. Гипотезы с лавовыми излияниями имеют ту трудность, что надо допустить, что кора должна, с одной стороны, выдерживать дополнительные нагрузки масс, не допуская изостатической компенсации, а с другой, кора должна пропускать горячие лавовые излияния из недр. Каула [100] избегает эту трудность, предполагая, что Луна сжимается. Лунная сферическая кора, сжимаясь, выдавливает базальтовые лавы, которые через трещины заполняют морские бассейны.

Увязывая образование масконов с тепловой эволюцией Луны, автор работы [64] предполагает, что в результате удара небесного тела обнажается слой высокой теплопроводности. Это должно приводить к быстрому росту литосферы под бассейном. Одновременно за счет того, что окружающая ударную впадину материковая область раздробливалась и покрывалась выбросами, ее теплопроводность уменьшалась. Начиналось более интенсивное нагревание недр из-за аккумуляции тепла радиоактивного распада. Породы недр плавилась и только через $\sim 0,5$ млрд. лет после удара начинали изливаться во впадину и заполнять ее, образуя масконы.

Гипотеза Гильвари [88] образования масконов предполагает, что возникали впадины в результате падения метеоритов. Но основную роль в образовании масконов

играли некогда существовавшие атмосферы и гидросфера. Гипотеза не согласуется с установленным фактом [43] исчезновения гидросферы за время, которое на три порядка меньше того, что требуется для образования масконов по его гипотезе.

Вайс и Уотес [162] развивают идею, согласно которой положительные гравитационные аномалии в районе масконов есть не что иное, как избыток масс в виде пробки в лунной коре. Веществом пробки являются породы мантии, которые поднялись из недр и заполнили пробойну в коре, образованную падением метеорита. Масконы — это батолиты из пород большой плотности, выросшие из подстилающей лунную кору мантии [97].

Предлагались гипотезы, согласно которым масконы являются результатом процесса химической дифференциации вещества, без привлечения механизма падения метеоритов или планетезималей и излияния магматических пород. В качестве оригинальной гипотезы можно упомянуть в заключение гипотезу, которая предполагает, что масконы образовались в результате уплотнения вещества при охлаждении поверхности морей во время лунных затмений [72]. Она мало правдоподобна. Критический анализ части гипотез происхождения масконов сделал Каула в работе [100]. Автор настоящей книги склонен присоединиться к гипотезе, согласно которой в процессе эволюции Луны возникло синхронное вращение Луны вокруг собственной оси и вокруг Земли. Это приводило к возникновению асимметрии теплового режима для видимой и обратной сторон Луны. Литосфера на обратной стороне стала толще, чем на видимой, и была более «непробиваемой». На видимой стороне более тонкая кора нарушалась, приводя к новым излияниям. Образовывались кратеры, происходил разброс веществ и изменялась теплоемкость, возникал местный разогрев, частичное плавление и излияние магм на поверхность в кратеры будущих масконов. Так можно объяснить то, что масконы существуют на видимой стороне. Находят объяснение в такой гипотезе и большие положительные гравитационные аномалии над масконами, их глубинность и строение.

За десять лет, прошедших с момента открытия масконов, им посвящено свыше сотни работ, в которых исследованы различные стороны этих необычных для Земли об-

разований. Предлагалось даже использовать масконы для обнаружения гравитационных волн от пульсаров (сочетание трех феноменальных объектов: масконы, пульсары, гравитационные волны) [83]. Маскон рассматривается как пробное тело с упругой связью с телом Луны. Приходящая гравитационная волна на частоте (~ 1 Гц), резонансной с собственной частотой маскона, возбуждает его колебания. Установленный на Луне вблизи маскона сейсмограф, как предполагается, зафиксирует в числе других сейсмических колебаний реакцию маскона на гравитационную волну.

§ 47. Приливные изменения гравитационного поля и его использование для изучения недр Луны

Гравитационное поле Луны изменяется во времени. Эти изменения небольшие. Их можно разделить на *вековые* и *периодические*. Причины вековых изменений силы тяжести могут быть астрономические и селенофизические. Из астрономических причин можно назвать постоянное удаление Луны от Земли в течение времени. Изменение расстояния приводит к уменьшению приливного гравитационного потенциала. В прошлом были большими постоянная часть приливного гравитационного потенциала, а также амплитуды периодически изменяющихся компонент. Так, при расстоянии между Землей и Луной вдвое меньшем, чем сейчас, приливное гравитационное поле было на порядок больше. Другими причинами вековых изменений силы тяжести являются гравитационная дифференциация пород недр, их изостатическое выравнивание, фазовые переходы вещества недр, изменение температуры недр, а вследствие этого изменение плотности пород. Определенный вклад вносит падение на Луну метеоритов, увеличивая ее общую массу. Эта причина векового изменения силы тяжести была существенной на ранней стадии эволюции Луны. Кроме того, возможны небольшие эффекты за счет изменения угловой скорости суточного вращения Луны, происходящего как за счет приливного торможения, так и из-за изменения момента инерции Луны относительно оси вращения. Изменение момента инерции возникает за счет естественного перераспределения масс во времени, но также и вынужденным путем за счет приливных деформаций Луны.

Относительно временных вариаций гравитационного поля пока нет никаких наблюдательных данных. Современный уровень науки и техники в принципе уже позволяет регистрировать вековые изменения силы тяжести. Более доступны для изучения периодические ее вариации. Амплитуда их на три-четыре порядка больше точности современных гравиметров. Периодические изменения силы тяжести возникают вследствие приливного действия движущихся относительно Луны небесных тел, и в первую очередь Земли и Солнца. Зная положения приливобразующих светил относительно Луны, предполагаемой абсолютно твердым телом, можно аналитически описать их приливной гравитационный потенциал и его производные в точках самой Луны, на ее поверхности и в окружающем ее пространстве. Приливное гравитационное поле различно в каждой точке Луны и изменяется в течение времени. Под действием приливных сил Луна деформируется, из-за этого в небольших пределах изменяются координаты ее точек относительно своего первоначального положения и в ее недрах происходит перераспределение масс. В обоих случаях к основному приливному полю, соответствующему абсолютно твердой Луне, добавляется приливное гравитационное поле, обусловленное деформацией Луны. Величина деформации зависит от упругих свойств Луны (модуля сдвига μ и модуля всестороннего сжатия K), а также от общего распределения массы в ее недрах. Установленный на Луне гравиметр будет измерять суммарное изменение силы тяжести реальной Луны. Поэтому различие изменения силы тяжести во времени, наблюдаемого и рассчитанного для абсолютно твердой Луны, позволяет определить упругость нашей спутницы. Из-за вязкости вещества недр Луны должно существовать запаздывание лунных приливов, под которым понимаются различные фазы максимума или минимума изменения силы тяжести, наблюдаемой для реальной Луны и рассчитанной для абсолютно твердой. По запаздыванию приливов в принципе можно было бы определять вязкость вещества Луны. Однако для этого нужна особенно высокая точность измерений временного изменения силы тяжести на Луне.

Прежде всего остановимся на аналитическом описании приливного гравитационного потенциала для абсолютно твердой Луны. Известно, что приливной потенциал в точ-

ках \mathcal{P} (см. рис. 6) Луны возникает как разность гравитационных действий приливообразующего светила на эту точку и на центр масс Луны. Если GM — геоцентрическая или гелиоцентрическая гравитационная постоянная, $\bar{\Delta}$ — расстояние рассматриваемой точки от Земли или Солнца, Δ — расстояния от этих тел до центра масс Луны, ρ — расстояние от центра масс до рассматриваемой точки \mathcal{P} , z — зенитное расстояние в этой точке приливообразующего тела S , то приливной гравитационный потенциал равен (§ 3)

$$W(\mathcal{P}) = \frac{GM}{\bar{\Delta}} - \frac{GM}{\Delta} - \frac{GM\rho \cos z}{\Delta^2}. \quad (6.27)$$

Поскольку функция $\bar{\Delta}^{-1}$ представляется в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\frac{1}{\bar{\Delta}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^n P_n(\cos z),$$

вместо (6.27) получим выражения для приливного потенциала в виде следующего разложения:

$$W(\mathcal{P}) = \frac{GM}{\Delta} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^n P_n(\cos z). \quad (6.28)$$

Отношение $\left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^n$ быстро убывает с ростом степени n . Действительно, для Земли $\rho/\Delta_{\oplus} \approx 5 \cdot 10^{-3}$, а для Солнца $\rho/\Delta_{\odot} \approx 10^{-5}$. Это означает, что каждый последующий член разложения (6.28) меньше предыдущего для приливного потенциала Земли более чем на два порядка, а для солнечного потенциала почти на пять порядков. Поэтому часто для оценок ограничиваются только первым главным членом разложения (6.28)

$$W_2 = \frac{GM\rho^2}{\Delta^3} P_2(\cos z). \quad (6.29)$$

В дальнейшем иногда мы будем опускать нижний индекс «2» при W , а вместо него писать значок \oplus или \odot , в зависимости от того, к Земле или Солнцу относится рассматриваемый приливной потенциал. Сравним главные члены W_2 , соответствующие Земле и Солнцу, образовав

отношение

$$\frac{(W_{\odot})_2}{(W_{\oplus})_2} = \frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}} \left(\frac{r_{\oplus}}{r_{\odot}} \right)^3 \approx 2 \cdot 10^{-3}. \quad (6.30)$$

Во столько раз приливной потенциал от Солнца меньше приливного потенциала от Земли. Поэтому во многих расчетах часто пренебрегают и приливным гравитационным потенциалом Солнца W_{\odot} .

Приливное гравитационное поле на Луне отличается от аналогичного поля на Земле. Из-за того, что Луна постоянно обращена к Земле одной своей стороной, на ней имеется значительная постоянная компонента приливов, достигающая $\sim 2,5$ мГал. На Луне периоды основных периодических компонент имеют двухнедельную продолжительность, в то время как на Земле период аналогичных гармоник равен половине суток. Почти на порядок амплитуда лунных периодических компонент больше земных.

Для анализа приливных эффектов формулы (6.29) неудобны тем, что приходится использовать зенитное расстояние z . Выразим z через координаты точки \mathcal{P} (φ , λ) Луны, в которой рассматривается приливной потенциал, и селеноцентрические экваториальные координаты (b , l) приливообразующего небесного тела:

$$\cos z = \sin \varphi \sin b + \cos \varphi \cos b \cos (l - \lambda). \quad (6.31)$$

Подставляя (6.31) в уравнение (6.29) и используя теорему сложения сферических функций, выражение (6.29) можно привести к виду

$$\begin{aligned} W_2(\mathcal{P}) = \frac{1}{12} \frac{GM_{\oplus}^2}{\Delta^3} [12P_{20}(\sin \varphi) P_{20}(\sin b) + \\ + 4P_{21}(\sin \varphi) P_{21}(\sin b) \cos(l - \lambda) + \\ + P_{22}(\sin \varphi) P_{22}(\sin b) \cos 2(l - \lambda)]. \quad (6.32) \end{aligned}$$

В этом уравнении от времени t зависят три аргумента: b , l и Δ . Представление (6.32) ясно показывает, что главная часть приливного потенциала W_2 состоит из трех сферических функций второго порядка (зональной, секториальной и тессеральной). Из этого уже видно, что картина распределения изменений силы тяжести на поверхности Луны от приливного действия Земли и Солнца не-

проста. Если рассматривать все члены разложения (6.28), то очевидно, что в общем случае приливной гравитационный потенциал описывается зональными, секториальными и тессеральными сферическими функциями всех порядков. Сферические функции второго порядка являются только основными.

Теперь легко найти составляющие приливных ускорений по трем ортогональным осям ρ , φ , λ :

$$F_{\rho}(\rho, \varphi, \lambda) = -\frac{\partial W_2}{\partial \rho} =$$

$$= -\frac{GM_{\rho}}{6\Delta^3} [12P_{20}(\sin \varphi) P_{20}(\sin b) + 4P_{21}(\sin \varphi) P_{21}(\sin b) \times$$

$$\times \cos(l - \lambda) + P_{22}(\sin \varphi) P_{22}(\sin b) \cos 2(l - \lambda)], \quad (6.33)$$

$$F_{\varphi}(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_2}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{GM_{\rho}}{6\Delta^3} [6P_{21}(\sin \varphi) P_{20}(\sin b) + 2[2P_{22}(\sin \varphi) - 3] \times$$

$$\times P_{21}(\sin b) \cos(l - \lambda) - P_{21}(\sin \varphi) P_{22}(\sin b) \cos 2(l - \lambda)], \quad (6.34)$$

$$F_{\lambda}(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_2}{\partial \lambda} =$$

$$= \frac{GM_{\rho}}{6\Delta^3} [2P_{21}(\sin \varphi) P_{21}(\sin b) \sin(l - \lambda) +$$

$$+ P_{22}(\sin \varphi) P_{22}(\sin b) \sin 2(l - \lambda)]. \quad (6.35)$$

Компоненты *приливных ускорений* на Луне представляются в виде комбинации зональных, тессеральных и секториальных сферических функций второго порядка. F_{ρ} , F_{φ} , F_{λ} имеют размерность ускорения. $F_{\rho} = \Delta g$ представляет приливное изменение силы тяжести на Луне.

Приливное уклонение отвеса на Луне в угловых секундах для составляющих вдоль меридиана и вдоль параллели соответственно равно

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 206265'' \frac{F_{\varphi}}{\bar{g}}, \\ \eta &= 206265'' \frac{F_{\lambda}}{\bar{g}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

где \bar{g} — среднее ускорение силы тяжести на Луне.

Так как движение Земли и Солнца относительно Луны является неравномерным, то и изменение b и l происходит сложным образом. Координаты b , l представляются в виде тригонометрических рядов, аргументами которых являются некоторые комбинации независимых переменных: s — средняя долгота Земли, p — средняя долгота лунного перигея, N — средняя долгота восходящего узла Луны, h — средняя долгота Солнца, p_s — средняя долгота солнечного перицентра. Имеющиеся разложения приливного изменения силы тяжести на Луне [93] недостаточны, так как они учитывают гармоники разложения, амплитуда которых больше, чем $\pm 0,01$ мГал. Ниже приведем разложение, обеспечивающее вычисление приливного изменения силы тяжести для абсолютно твердой Луны с учетом гармоник с амплитудами более 0,0005 мГал. О необходимости знания периодического изменения силы тяжести на Луне с более высокой, чем на Земле, относительной точностью будет подробнее сказано ниже, а пока вернемся к выводу формул для описания периодических приливных изменений силы тяжести. Приведенные выше формулы относились к любому приливообразующему небесному телу, будь то Земля или Солнце и т. д. Теперь более конкретно остановимся на приливных изменениях силы тяжести и уклонения отвеса, возникающих под действием Земли. Для этого удержим в разложении (6.28) два первых члена разложения. Найдем путем дифференцирования этих членов по ρ и небольших преобразований выражение для приливного изменения силы тяжести на Луне:

$$\Delta g_{\oplus} = - \frac{2GM_{\oplus}R}{C_1^3} \left(\frac{\rho}{R}\right) \left(\frac{C_1}{\Delta}\right)^3 \left(\frac{3}{2} \cos^2 z_{\oplus} - \frac{1}{2}\right) - \\ - \frac{3GM_{\oplus}R^2}{C_1^4} \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \left(\frac{C_1}{\Delta}\right)^4 \left(\frac{5}{2} \cos^3 z_{\oplus} - \frac{3}{2} \cos z_{\oplus}\right), \quad (6.37)$$

где $C_1 = 384\,400$ км — среднее расстояние между Луной и Землей, $R = 1738$ км — средний радиус Луны, z_{\oplus} — зенитное расстояние Земли, ρ — расстояние до точки наблюдения из центра масс Луны. Найдем значения постоянных сомножителей в выражении (6.37), используя для этого значение геоцентрической гравитационной постоянной $GM_{\oplus} = (398603 \pm 1) \cdot 10^{15}$ см³/с², а также приве-

денные выше значения C_1 и R :

$$\left. \begin{aligned} \frac{2GM_{\oplus}R}{C_1^3} &= 2,4393 \cdot 10^{-3} \text{ см/с}^2, \\ \frac{3GM_{\oplus}R^2}{C_1^4} &= 0,0165 \cdot 10^{-3} \text{ см/с}^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Безразмерные множители ρ/R и $(\rho/R)^2$ в (6.37) зависят только от того, каково расстояние ρ до точки \mathcal{P} , где рассматривается приливное гравитационное поле. В безразмерных отношениях $(C_1/\Delta)^3$ и $(C_1/\Delta)^4$ с течением времени изменяется расстояние Δ . Воспользуемся законом изменения C_1/Δ , приведенным в работе [31] *) в виде разложения:

$$\begin{aligned} C_1/\Delta &= 1 + 10^{-6}[54501 (s - p) + 8249 \cos 2 (s - h) + \\ &+ 2970 \cos 2 (s - p) + 1025 \cos (s + p - 2h) + \\ &+ 902 \cos (3s - 2h - p) + 560 \cos (2s - 3h + p_s) + \\ &+ 422 \cos (s - 3h + p + p_s) + 337 \cos (s - p - h + p_s) - \\ &- 286 \cos (s - h) - 277 \cos (s + h - p - p_s) - \\ &- 208 \cos (s + p) + 182 \cos 3 (s - p) + \\ &+ 176 \cos (3s - 4h + p) - 117 \cos (h - p_s) + \\ &+ 109 \cos 2 (s + p - 2h) - 89 \cos 2 (h - p) - \\ &- 88 \cos (2s - p_s - h) + 83 \cos (4s - 2p - 2h) + \\ &+ 76 \cos 4 (s - h) + 67 \cos (3s - 3h - p + p_s) - \\ &- 66 \cos (s + p - h - p_s) + \dots]. \quad (6.39) \end{aligned}$$

Смысл аргументов¹ s , p , h , p_s , N был объяснен выше. Все они являются функциями времени. Мы ограничимся в (6.39) только основными членами, отбрасывая гармоники, амплитуды которых менее $5 \cdot 10^{-5}$. На основании (6.39) найдем разложения для $(C_1/\Delta)^3$ и $(C_1/\Delta)^4$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_1}{\Delta}\right)^3 &= 1 + 0,0046 + 0,1461 \cos (s - p) + \\ &+ 0,0249 \cos 2 (s - h) + 0,0134 \cos 2 (s - p) + \end{aligned}$$

*) В качестве аргументов тригонометрических функций в [31] использовались комбинации средней аномалии Земли g , средней аномалии Солнца g^1 , углового расстояния перигея Луны от восходящего узла орбиты ω и углового расстояния перицентра Солнца от восходящего узла на лунной орбите ω^1 .

$$\begin{aligned}
& + 0,0044 \cos(s + p - 2h) + 0,0041 \cos(3s - 2h - p) + \\
& + 0,0017 \cos(2s - 3h + p_s) + 0,0013 \cos(s - 3h + p + p_s) + \\
& + 0,0010 \cos(s - p - h + p_s) + 0,0010 \cos 3(s - p) - \\
& - 0,0009 \cos(s - h) - 0,0008 \cos(s - p + h - p_s) - \\
& - 0,0006 \cos(s + p) + 0,0005 \cos(3s - 4h + p) - \\
& - 0,0004 \cos(h - p_s) + 0,0004 \cos 2(2s - p - h) + \\
& + 0,0003 \cos(2s - 2p - 4h) - 0,0003 \cos(2s - p_s - h) + \\
& + 0,0003 \cos 4(s - h) + 0,0002 \cos(3s - 3h - p - p_s) - \\
& - 0,0002 \cos(s + p - h - p_s) + \dots; \quad (6.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{C_1}{\Delta}\right)^4 & = 1 + 0,0009 + 0,219 \cos(s - p) + \\
& + 0,033 \cos 2(s - h) + 0,013 \cos 2(s - p) + \\
& + 0,004 \cos(s + p - 2h) + \dots \quad (6.41)
\end{aligned}$$

Величину $\left(\frac{C_1}{\Delta}\right)^4$ можно знать с меньшей точностью ($3 \cdot 10^{-2}$). Соотношения $\left(\frac{3}{2} \cos^2 z_{\oplus} - \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{5}{2} \cos^3 z_{\oplus} - \frac{3}{2} \cos z_{\oplus}\right)$ зависят от времени посредством изменения зенитного расстояния z_{\oplus} . В каждой точке Луны z_{\oplus} изменяется в небольших пределах ($\sim 6^\circ$). Эти изменения происходят относительно некоторого нулевого направления, соответствующего среднему зенитному расстоянию \bar{z}_{\oplus} Земли из данной точки Луны, для которого

$$\cos \bar{z}_{\oplus} = \cos \varphi \cos \lambda. \quad (6.42)$$

Отклонение положения Земли от этого направления характеризуется углами оптической либрации b и l . Из-за малости углов b и l целесообразно приливообразующий потенциал, равно как его производные, разделить на две части: первую — постоянную часть, зависящую от среднего зенитного расстояния \bar{z}_{\oplus} , а вторую — переменную, изменяющуюся с вариацией зенитного расстояния Земли. Представим $\cos^2 z_{\oplus}$ в виде выражения, в котором выделена постоянная часть, характеризуемая зенитным расстоянием \bar{z}_{\oplus} , и переменная, зависящая от координат b и l ,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{2} \cos^2 z_{\oplus} - \frac{1}{2}\right) & = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \bar{z}_{\oplus} - \frac{1}{2}\right) - \\
& - 3 \cos^2 \bar{z}_{\oplus} [\sin^2 b \cos 2l + \sin^2 l \cos 2b] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \cos^2 \lambda \sin^2 b \cos 2l + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \sin^2 l \cos 2b - \\
& - \frac{3}{4} \sin 2\varphi \cos^2 \lambda \sin 2b \cos 2l - \frac{3}{4} \sin 2\lambda \cos^2 \varphi \sin 2l \cos 2b - \\
& - \frac{3}{4} \sin 2\varphi \sin^2 l \sin 2b - \frac{3}{4} \sin 2\lambda \sin^2 b \sin 2l + \\
& + \frac{3}{8} \sin 2\varphi \sin 2\lambda \sin 2b \sin 2l + \frac{3}{2} \sin^2 b \sin^2 l.
\end{aligned}$$

Разлагая $\sin b$, $\cos b$, $\sin l$, $\cos l$ в ряд относительно своих аргументов и удерживая в этих разложениях третьи степени аргументов, последнее равенство можно переписать так:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{2} \cos^2 z_{\oplus} - \frac{1}{2} \right) &= \left(\frac{3}{2} \cos \bar{z}_{\oplus} - \frac{1}{2} \right) + \\
&+ b \left[-\frac{3}{2} \sin 2\varphi \cos^2 \lambda \right] + l \left[-\frac{3}{2} \sin 2\lambda \cos^2 \varphi \right] + \\
&+ b^2 \left[-3 \cos^2 \bar{z}_{\oplus} + \frac{3}{2} \cos^2 \lambda \right] + \\
&+ l^2 \left[-3 \cos^2 \bar{z}_{\oplus} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right] + bl \left[\frac{3}{2} \sin 2\varphi \sin 2\lambda \right] + \\
&+ b^3 [\sin 2\varphi \cos^2 \lambda] + l^3 [\sin 2\lambda \cos^2 \varphi] + \\
&+ b^2 l \left[3 \sin 2\lambda \cos^2 \varphi - \frac{3}{2} \sin 2\lambda \right] + \\
&+ l^2 b \left[3 \sin 2\varphi \cos^2 \lambda - \frac{3}{2} \sin 2\varphi \right]. \quad (6.43)
\end{aligned}$$

Аналогично найдем, удержав в разложениях тригонометрических функций только вторые степени b и l ,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5}{2} \cos^3 z_{\oplus} - \frac{3}{2} \cos z_{\oplus} \right) &= \left(\frac{5}{2} \cos^3 \bar{z}_{\oplus} - \frac{3}{2} \cos \bar{z}_{\oplus} \right) - \\
&- \frac{15}{2} b \sin \varphi \cos \lambda \left[\cos^2 \bar{z}_{\oplus} - \frac{1}{5} \right] - \frac{15}{2} l \sin \lambda \cos \varphi \times \\
&\times \left[\cos^2 \bar{z}_{\oplus} - \frac{1}{5} \right] - \frac{45}{4} b^2 \cos \bar{z}_{\oplus} \times \\
&\times \left[\cos^2 \bar{z}_{\oplus} - \frac{2}{3} \cos^2 \lambda - \frac{1}{15} \right] - \\
&- \frac{45}{4} l^2 \cos \bar{z}_{\oplus} \left[\cos^2 \bar{z}_{\oplus} - \frac{2}{3} \cos^2 \varphi - \frac{1}{15} \right] + \\
&+ \frac{45}{2} bl \sin \varphi \sin \lambda \left[\cos^2 \bar{z}_{\oplus} - \frac{1}{15} \right]. \quad (6.44)
\end{aligned}$$

Воспользуемся выражением для b и l , приведенным в [31]. Изменение b и l нами представлено в виде суммы тригонометрических членов, аргументами которых являются s, h, p, p_s, N *). При этом мы удерживаем члены, коэффициенты которых $\geq 0,0001$ радиана,

$$\begin{aligned}
 l = 10^{-4} [& 1098 \sin(s - p) + 222 \sin(s - 2h + p) + \\
 & + 115 \sin 2(s - h) + 37 \sin 2(s - p) + 32 \sin(-h + p_s) - \\
 & - 20 \sin 2(s - N) + 10 \sin 2(-h + p) + \\
 & + 10 \sin(s + p - 3h + p_s) + 9 \sin(3s - p - 2h) + \\
 & + 8 \sin(2s - 3h + p_s) + 7 \sin(s - h - p + p_s) - \\
 & - 6 \sin(s - h) + 5 \sin(-s + p - h + p_s) + \\
 & + 2 \sin 3(s - p) + 3 \sin 2(N - h) - 2 \sin(3s - p - 2N) + \\
 & + 2 \sin(3s + p - 4h) - 2 \sin(s + p - 2N) + \\
 & + \sin(2s + 2p - 4h) - \sin(s - h + p - p_s) - \\
 & - \sin(2s + h - 3p_s) - \sin(-h + p) + \sin(s - p_s) + \\
 & + \sin(3s - p - 3h + p_s) + \sin(4s - 2p - 2h) + \\
 & + \sin 4(s - h) + \sin(-s - 2h + 3p)]; \quad (6.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -b = 10^{-4} [& 895 \sin(s - N) + 49 \sin(2s - p - N) - \\
 & - 48 \sin(p - N) - 30 \sin(s - 2h + N) + \\
 & + 10 \sin(2s - 2h + p - N) + 8 \sin(-2s + 3p - 2p_s + N) + \\
 & + 6 \sin(3s - 2h - N) + 3 \sin(3s - 2p - N) + \\
 & + 2 \sin(2s - p - 2h + N) - 2 \sin(-s + 2p - N) + \\
 & + \sin(s - 3h + p_s + N) + \sin(-s + 2p - 2h + \\
 & + N) + \sin(4s - p - 2h - N) - \sin(s - h - \\
 & - p_s + N)]. \quad (6.46)
 \end{aligned}$$

Подставляя в (6.37) выражения (6.38), (6.40) — (6.46), получим

$$\Delta g_{\oplus} = \Delta g_{\oplus}^{(0)} + \Delta g_{\oplus}^{(1)} + \Delta g_{\oplus}^{(2)} + \Delta g_{\oplus}^{(3)}, \quad (6.47)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta g_{\oplus}^{(0)} = - \left[& 1,2253 \left(\frac{\rho}{R} \right) (3 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - 1) + \right. \\
 & \left. + 0,0083 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 (5 \cos^3 \varphi \cos^3 \lambda - 3 \cos \varphi \cos \lambda) \right] \text{ мГал} \quad (6.48)
 \end{aligned}$$

*) См. сноску на стр. 370.

— постоянное слагаемое, не зависящее от времени, а только от координат точки наблюдения на Луне. В свою очередь оно состоит из двух частей: первая соответствует приливной гармонике потенциала W_2 , а вторая — W_3 . Максимального значения $\Delta g_{\oplus}^{(0)}$ достигает при $\varphi = 0^\circ$, $\lambda = 0^\circ$, 180° и равно на поверхности Луны ($\rho = R$) 2,4504 мГал и 0,0166 мГал, соответственно для гармоник W_2 и W_3 . Величина $\Delta g_{\oplus}^{(0)}$ равна нулю при $\bar{z}_{\oplus} = \arccos(\cos \varphi \cos \lambda) = 54^\circ 43'$.

Второе слагаемое равенства (6.47) равно

$$\begin{aligned} \Delta g_{\oplus}^{(1)} = & - \left\{ 0,2001 \left(\frac{\rho}{R} \right) (3 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - 1) \times \right. \\ & \times [\cos(s-p) + 0,1517 \cos 2(s-h) + \\ & + 0,0104 \cos(2s-3h+p_s) + 0,0079 \cos(s-3h+p+p_s) + \\ & + 0,0061 \cos(s-p-h+p_s) + 0,0061 \cos 3(s-p) - \\ & - 0,0055 \cos(s-h) - 0,0049 \cos(s-p+h-p_s) - \\ & - 0,0037 \cos(s-p) + 0,0030 \cos(3s-4h+p) - \\ & - 0,0024 \cos(h-p_s) + 0,0024 \cos 2(2s-p-h) + \\ & + 0,0018 \cos(2s+2p-4h) - 0,0018 \cos(2s-p_s-h) + \\ & + 0,0018 \cos 4(s-h) + 0,0012 \cos(3s-3h-p+p_s) - \\ & \left. - 0,0012 \cos(s+p-h-p_s) + \dots \right] + \\ & + 0,0018 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 (5 \cos^3 \varphi \cos^3 \lambda - 3 \cos \varphi \cos \lambda) \times \\ & \times [\cos(s+p) + 0,151 \cos 2(s-h) + 0,059 \cos 2(s-p) + \\ & + 0,018 \cos(s+p-2h) + \dots] \text{ мГал. } \quad (6.49) \end{aligned}$$

Это слагаемое обусловлено изменением расстояния между Землей и Луной при их орбитальном движении. Функциями времени являются переменные s , p , h .

Третье слагаемое в (6.47) выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta g_{\oplus}^{(2)} = & \left\{ 3,6775 \left(\frac{\rho}{R} \right) \left[b \left(1 - \frac{2}{3} b^2 \right) \cos^2 \lambda \sin 2\varphi + \right. \right. \\ & + l \left(1 - \frac{2}{3} l^2 \right) \cos^2 \varphi \sin 2\lambda + b^2 \cos^2 \lambda \cos 2\varphi + \\ & + l^2 \cos^2 \varphi \cos 2\lambda + bl \sin 2\varphi \sin 2\lambda - bl^2 \sin 2\varphi \cos 2\lambda - \\ & \left. - lb^2 \sin 2\lambda \cos 2\varphi \right] + 0,1226 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \left[b \sin \varphi \cos \lambda \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{1}{5} \right) + l \sin \lambda \cos \varphi \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{1}{5} \right) + \\ & + \frac{3}{2} b^2 \cos \varphi \cos \lambda \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{2}{3} \cos^2 \lambda - \frac{1}{15} \right) + \\ & + \frac{3}{2} l^2 \cos \varphi \cos \lambda \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{2}{3} \cos^2 \lambda - \frac{1}{15} \right) - \\ & - 3bl \sin \varphi \sin \lambda \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{1}{15} \right) \Big] \text{ мГал. } (6.50) \end{aligned}$$

Оно описывает изменение силы тяжести вследствие эффекта оптической либрации Луны, возникающей из-за неравномерности ее движения по орбите. От времени зависят переменные b , l , которые выражаются равенствами (6.45), (6.46).

Наконец последнее слагаемое $\Delta g_{\oplus}^{(3)}$ представляет собой смешанные члены, которые зависят как от изменения расстояния между Землей и Луной, так и от либрационных движений:

$$\begin{aligned} \Delta g_{\oplus}^{(3)} = & \left\{ 0,6004 \left(\frac{\rho}{R} \right) \left\{ \left[l \left(1 - \frac{2}{3} l^2 \right) \cos^2 \varphi \sin 2\lambda + \right. \right. \\ & + l^2 \cos^2 \varphi \cos 2\lambda + b \left(1 - \frac{2}{3} b^2 \right) \cos^2 \lambda \sin 2\varphi + \\ & + b^2 \cos^2 \lambda \cos 2\varphi - bl \sin 2\varphi \sin 2\lambda - bl^2 \sin 2\varphi \cos 2\lambda - \\ & \left. \left. - b^2 l \sin 2\lambda \cos 2\varphi \right] \cos (s - p) + 0,101 [l \cos^2 \varphi \sin 2\lambda + \right. \\ & + b \cos^2 \lambda \sin 2\varphi + l^2 \cos^2 \varphi \cos 2\lambda + b^2 \cos^2 \lambda \cos 2\varphi + \\ & + bl \sin \varphi \sin 2\lambda] \cos 2(s - h) + (l \cos^2 \varphi \sin 2\lambda + \\ & + b \cos^2 \lambda \sin 2\varphi) [0,054 \cos 2(s - p) + \\ & + 0,018 \cos (s + p - 2h) + 0,017 \cos (3s - 2h - p) + \\ & + 0,007 \cos (2s - 3h + p_s) + 0,005 \cos (s + p - 3h + p_s) + \\ & + 0,004 \cos (s - h - p + p_s) - 0,004 \cos 3(s - h)] \Big\} + \\ & + 0,0203 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \left\{ \left[l \sin \lambda \cos \varphi \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{1}{5} \right) + \right. \right. \\ & + b \sin \varphi \cos \lambda \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{1}{5} \right) + \\ & + \frac{3}{2} b^2 \cos \varphi \cos \lambda \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{2}{3} \cos^2 \lambda - \frac{1}{15} \right) + \\ & \left. \left. + \frac{3}{2} l^2 \cos \varphi \cos \lambda \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{2}{3} \cos^2 \lambda - \frac{1}{15} \right) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 3bl \sin \varphi \sin \lambda \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{1}{15} \right) \Big] \cos (s - p) + \\
& + \left[l \sin \lambda \cos \varphi \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{1}{5} \right) + \right. \\
& + b \sin \varphi \cos \lambda \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \frac{1}{5} \right) \Big] 0,15 \cos 2 (s - h) + \\
& \left. + 0,08 \cos 2 (s - p) \right\} \text{ мГал. } (6.51)
\end{aligned}$$

В этом выражении, как и в предыдущем, удержаны не только первые степени b и l , но и более высокие, а также их произведения. Выражения для них можно получить, используя (6.45), (6.46). В выражениях $\Delta g_{\oplus}^{(0)}$, $\Delta g_{\oplus}^{(1)}$, $\Delta g_{\oplus}^{(2)}$, $\Delta g_{\oplus}^{(3)}$ (6.48) — (6.51) отбрасывались члены, порядок малости которых меньше $\sim 0,0003$ мГал. Для сравнения напомним, что приливные изменения силы тяжести на Земле за счет действия Луны достигают значения всего лишь 0,16 мГал, а за счет действия Солнца — 0,08 мГал.

Рассмотрим приливное изменение силы тяжести на Луне под действием Солнца. Ограничимся только первой гармоникой в разложении (6.28) приливного потенциала; тогда изменение силы тяжести выразится так:

$$\Delta g_{\odot} = \frac{2GM_{\odot}R}{C_2^3} \left(\frac{\rho}{R} \right) \left(\frac{C_2}{\Delta_{\odot}} \right)^3 \left(\frac{3}{2} \cos^2 z_{\odot} - \frac{1}{2} \right), \quad (6.52)$$

где GM_{\odot} — гелиоцентрическая гравитационная постоянная, равная $1327 \cdot 10^{23} \text{ см}^3/\text{с}^2$, Δ_{\odot} — расстояние между Луной и Солнцем, а $C_2 = 149\,600\,000$ км — среднее расстояние, z_{\odot} — зенитное расстояние Солнца в точке наблюдения. Ввиду малости самого приливного эффекта в равенстве (6.52) можно пренебречь изменением C_2/Δ_{\odot} , т. е. положить это отношение равным единице. С помощью (6.31) выразим $\cos z_{\odot}$ (6.52) через координаты точки наблюдения φ , λ и селеноцентрические широту b_{\odot} и долготу l_{\odot} Солнца. Имея в виду, что b_{\odot} зависит от изменения наклона плоскости лунного экватора к эклиптике и достигает $\sim 1^{\circ},5$, а l_{\odot} изменяется от 0° до 360° , после преобразований можно получить

$$\begin{aligned}
\Delta g_{\odot} = & \frac{3GM_{\odot}R}{2C_2^3} \left(\frac{\rho}{R} \right) \left[\left(\cos^2 \varphi - \frac{2}{3} \right) + \right. \\
& \left. + \cos^2 \varphi \cos 2 (s - h + \lambda) + 2b_{\odot} \sin 2\varphi \cos (s - h + \lambda) \right].
\end{aligned}$$

Пренебрегая изменением b_{\odot} , подставив числовые значения GM_{\odot} и C_2 , получим

$$\Delta g_{\odot} = -0,0102 \left[\left(\cos^2 \varphi - \frac{2}{3} \right) + \right. \\ \left. + \cos^2 \varphi \cos 2(s - h + \lambda) \right] \text{ мГал.} \quad (6.53)$$

Как очевидно из этого выражения, имеется составляющая силы тяжести, не зависящая от времени, а только от широты точки наблюдения. Периодически изменяющаяся часть зависит от средних долгот Солнца и Земли, соответственно h и s , и долготы λ точки наблюдения. Период изменения основной гармоники равен 14,76 суток.

Приливное влияние Земли и Солнца на Луну приводит к изменению на ней отклонений отвеса. Как обычно, полное отклонение отвеса представим в виде двух компонент, одной вдоль меридиана, а другой вдоль параллели. Величины отклонений отвеса по каждой из компонент достигают более $2'',3$, что почти на два порядка больше, чем отклонения отвеса на Земле. Остановимся на закономерности изменения отклонения отвеса на Луне, обусловленного влиянием Земли. Ограничимся членами в разложениях, влияние которых больше $0'',01$. Влиянием Солнца можно пренебречь и учитывать только основную гармонику W_2 приливного потенциала Земли (6.28). На основании (6.36), (6.37), (6.42), (6.43) получим

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{206265''}{\bar{g}} \frac{3GM_{\oplus\rho}}{2C_1^3} \left(\frac{C_1}{\Delta} \right)^3 \left\{ \sin 2\varphi [-\cos^2 \lambda + \right. \\ &\quad \left. + l \sin 2\lambda + l^2 \cos 2\lambda + b^2(1 + \cos^2 \lambda)] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos 2\varphi [b \cos \lambda - bl \sin \lambda] \right\}, \\ \eta &= \frac{206265''}{\bar{g}} \frac{3GM_{\oplus\rho}}{2C_1^3} \left(\frac{C_1}{\Delta} \right)^3 \left\{ -\sin 2\varphi [b \sin \lambda + \right. \\ &\quad \left. + bl \cos \lambda] - \cos^2 \varphi [\sin 2\lambda + 2l \cos 2\lambda - \right. \\ &\quad \left. - (b^2 + 2l^2) \sin 2\lambda] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

Положив $\rho = R$, приняв $\bar{g} = 162,3 \text{ см/с}^2$, а C_1 и GM_{\oplus} — равными приведенным выше значениям, подсчитаем коэффициент при фигурных скобках последних двух равенств:

$$L = \frac{206265''}{\bar{g}} \frac{3GM_{\oplus}R}{2C_1^3} = 2'',325. \quad (6.55)$$

Представим каждую из компонент отвеса ξ и η , как и в случае изменения силы тяжести, состоящей из нескольких слагаемых:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \xi^{(3)}, \\ \eta &= \eta^{(0)} + \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

Первые слагаемые $\xi^{(0)}$ и $\eta^{(0)}$ соответствуют постоянной части уклонений отвеса, не зависящей от времени, а зависящей только от координат точки наблюдения на Луне, $\xi^{(1)}$ и $\eta^{(1)}$ представляют компоненты отвеса, обусловленные периодическим изменением расстояния между Луной и Землей с течением времени, $\xi^{(2)}$ и $\eta^{(2)}$ — слагаемые, соответствующие периодическому изменению вследствие либрационных эффектов при орбитальном движении Луны. Слагаемые $\xi^{(3)}$ и $\eta^{(3)}$ выражают зависимость компонент отвеса от совместного действия либрационных движений и вариации расстояния Δ . Слагаемые, соответствующие постоянной части, равны:

$$\left. \begin{aligned} \xi^{(0)} &= -2'',336 \sin 2\varphi \cos^2 \lambda, \\ \eta^{(0)} &= -2'',336 \sin 2\lambda \cos^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.57)$$

Для слагаемых $\xi^{(1)}$ и $\eta^{(1)}$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \xi^{(1)} &= -0'',382 \sin 2\varphi \cos^2 \lambda [\cos (s - p) + \\ &+ 0,152 \cos 2(s - h) + 0,082 \cos 2(s - p) + \\ &+ 0,027 \cos (s + p - 2h) + 0,025 \cos (3s - 2h - p)], \\ \eta^{(1)} &= -0'',382 \sin 2\lambda \cos^2 \varphi [\cos (s - p) + \\ &+ 0,152 \cos 2(s - h) + 0,082 \cos 2(s - p) + \\ &+ 0,027 \cos (s + p - 2h) + 0,025 \cos (3s - 2h - p)], \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

а для $\xi^{(2)}$ и $\eta^{(2)}$ получим

$$\left. \begin{aligned} \xi^{(2)} &= -0'',4019 \{ [\sin (s - N) + [0,0547 \times \\ &\times \sin (2s - p - N) + 0,0536 \sin (p - N) + \\ &+ 0,0335 \sin (s - 2h + N)] \cos 2\varphi \cos \lambda - \\ &- [0,6134 \sin (s - p) + 0,1240 \sin (s - 2h + p) + \\ &+ 0,0642 \sin 2(s - h) + 0,0207 \sin 2(s - p) + \\ &+ 0,0179 \sin (-h + p_s)] \sin 2\varphi \sin 2\lambda - \\ &- [0,0676 \sin^2 (s - p) + 0,022 \sin (s - p) \times \\ &\times \sin (s - 2h + p)] \sin 2\varphi \cos 2\lambda - \end{aligned} \right\} \quad (6.59)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & - [0,0448 \sin^2(s - N)](1 + \cos^2 \lambda) \sin 2\varphi - \\
 & - [0,1098 \sin(s - N) \sin(s - p) + 0,0222 \times \\
 & \quad \times \sin(s - N) \sin(s - 2h + p)] \cos 2\varphi \sin \lambda, \\
 \eta^{(2)} = & - 0'',4931 \{[\sin(s - p) + \\
 & + 0,2022 \sin(s - 2h + p) + 0,1047 \sin 2(s - h) + \\
 & + 0,0337 \sin 2(s - p) + 0,0291 \sin(-h + p_s) - \\
 & - 0,0182 \sin 2(s - N)] \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - \\
 & - [0,4076 \sin(s - N) + 0,0223 \sin(2s - p - N) - \\
 & - 0,0219 \sin(p - N) - 0,0137 \sin(s - 2h + N)] \times \\
 & \quad \times \sin 2\varphi \sin \lambda - [0,0365 \sin^2(s - N) + \\
 & + 0,1098 \sin^2(s - p) + 0,0444 \sin(s - p) \times \\
 & \times \sin(s - 2h + p) + 0,0241 \sin(s - p) \sin 2(s - h)] \times \\
 & \quad \times \cos^2 \varphi \sin 2\lambda + [0,0448 \sin(s - p) \times \\
 & \quad \times \sin(s - N)] \sin 2\varphi \cos \lambda \}.
 \end{aligned} \right\} (6.59)$$

Смешанные члены выражаются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned}
 \xi^{(3)} = & 0'',045 \{ - \cos 2\varphi \cos \lambda \sin(s - N) + \\
 & + 0,611 \sin 2\varphi \sin 2\lambda [\sin(s - p) + \\
 & + 0,202 \sin(s - 2h + p)] \} \cos(s - p), \\
 \eta^{(3)} = & 0'',039 \{ - \cos^2 \varphi \cos 2\lambda [\sin(s - p) + \\
 & + 0,202 \sin(s - 2h + p)] + \\
 & + 0,438 \sin 2\varphi \sin \lambda \sin(s - N) \} \cos(s - p).
 \end{aligned} \right\} (6.60)$$

Формулы (6.55) — (6.60) позволяют вычислять отклонения отвеса для абсолютно твердой Луны. В них учтены гармоники, которые больше, чем $0'',01$. Таким образом, переменная часть отклонений отвеса на Луне от приливного действия Земли достигает более полусекунды дуги. Интересно то обстоятельство, что на Луне существует большая постоянная компонента отклонений отвеса (впрочем, как и силы тяжести). Она рассматривается как часть нормального гравитационного поля. Для сравнения напомним, что максимальное изменение отклонения отвеса на Земле под действием приливного влияния Луны достигает всего лишь $\sim 0'',02$, а действие Солнца и того меньше, $\sim 0'',01$.

Приливное влияние Земли и Солнца на градиенты ускорений притяжения пренебрежимо мало. Действительно, приливное изменение от влияния Земли вертикального градиента на Луне равно

$$\Delta W_{zz} = \frac{2GM_{\oplus}}{\Delta^3} P_2(\cos z_{\oplus}) = 0,02 \cdot 10^{-9} \left(\cos^2 z_{\oplus} - \frac{1}{3} \right) c^{-2}, \quad (6.61)$$

т. е. не превосходит 0,02 Этвеша.

Все сказанное выше относительно силы тяжести, уклонений отвеса, градиентов силы тяжести верно только для абсолютно твердой Луны, т. е. такого тела, которое под действием приливного гравитационного поля не деформируется. Ниже рассматривается, какое дополнительное поле возникает за счет упругой деформации Луны.

Если сумма гравитационных потенциалов, соответствующих притяжению всех масс Луны и центробежной силе ее суточного вращения, есть $W(\rho, \varphi, \lambda)$, то уравнение уровня поверхности имеет вид

$$W(\rho, \varphi, \lambda) = \text{const.}$$

Это же уравнение для уровневых поверхностей можно записать иначе, разрешив его относительно радиуса-вектора:

$$\rho = \rho(\varphi, \lambda, \text{const}). \quad (6.62)$$

Из-за приливного действия Земли и Солнца к потенциалу W добавляются приливные потенциалы W_{\oplus} и W_{\odot} . Изменится и уровневая поверхность. Приращение радиуса-вектора ρ уровня поверхности (6.62) от приливного действия Земли (аналогично и от Солнца), если учитывать все гармоники приливного потенциала (6.28), равно

$$\Delta \rho_0 = \sum_{n=2}^{\infty} (\Delta \rho_0)_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(W_{\oplus})_n}{\bar{g}}, \quad (6.63)$$

где \bar{g} — сила тяжести на Луне; $(\Delta \rho_0)_n$ и $(W_{\oplus})_n$ — сферические функции n -го порядка, представляющие соответственно изменение радиуса-вектора ρ и приливного потенциала на Луне. При этом изменение уровня поверхности состоит из двух частей. Одна — постоянная во времени, зависящая только от координат ρ, φ, λ , другая — переменная; она помимо координат зависит еще и от времени t .

Пока рассуждения шли при предположении, что Луна абсолютно твердое тело. В реальности же вследствие ее упругой деформации возникнут дополнительные поправки. За счет упругости Луны введем поправку к $\Delta\rho_0$ (6.63), вызванную тем, что при деформации изменяется положение точек Луны относительно своего первоначального положения. Обозначим ее $(\delta\rho_1)_n$. Она зависит от номера гармоники n и пропорциональна $\Delta\rho_0$ с некоторым безразмерным коэффициентом h_n

$$(\delta\rho_1)_n = -h_n(\rho) \frac{(W_{\oplus}(\rho))_n}{\bar{g}}. \quad (6.64)$$

Коэффициенты h_n называют числами Лява, который впервые ввел их в геофизику [114].

Дополнительный приливной потенциал за счет изменения координат точек Луны при приливной деформации равен

$$\Delta_1 W_{\oplus}(\rho) = - \sum_{n=2}^{\infty} h_n(\rho) (W_{\oplus}(\rho))_n. \quad (6.65)$$

Из-за перераспределения масс при приливных деформациях Луны возникает еще один дополнительный приливной потенциал,

$$\Delta_2 W_{\oplus}(\rho) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n(\rho) \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+1} (W_{\oplus}(\rho))_n, \quad (6.66)$$

где $k_n(\rho)$ — еще одни числа Лява, R — средний радиус Луны. Этот дополнительный потенциал также деформирует исходную урovenную поверхность и изменяет радиус-вектор ρ или его приращение $\Delta\rho_0$ (6.63) на величину

$$(\delta\rho_2)_n = k_n(\rho) \frac{(\Delta_2 W_{\oplus}(\rho))_n}{\bar{g}}. \quad (6.67)$$

Общее изменение высот урovenной поверхности Луны за счет приливногo действия состоит из трех членов:

$$\begin{aligned} (\Delta\rho)_n &= (\Delta\rho_0)_n + (\delta\rho_1)_n + (\delta\rho_2)_n = \\ &= \frac{(W_{\oplus}(\rho))_n + (\Delta_1 W_{\oplus}(\rho))_n + (\Delta_2 W_{\oplus}(\rho))_n}{\bar{g}}. \end{aligned}$$

Отношение сферических гармоник для высот (6.63), (6.64) и (6.67) уровенной поверхности реальной Луны, которая испытывает упругие деформации, к соответствующим гармоникам высот (6.63) для абсолютно твердой Луны ($\rho = R$) равно так называемому γ -фактору:

$$\gamma_n = \frac{(\Delta\rho_0)_n + (\delta\rho_1)_n + (\delta\rho_2)_n}{(\Delta\rho_0)_n} = 1 + k_n(\rho) - h_n(\rho). \quad (6.68)$$

Поскольку основное влияние оказывает только вторая гармоника приливного потенциала $(W_{\oplus})_2$, рассматриваются γ_2 , k_2 , h_2 , которые обычно пишутся без нижних индексов и без указания аргумента ρ ; при этом подразумевается, что они рассматриваются для лунной поверхности. Таким образом, число γ характеризует изменение уровенной поверхности Луны, а следовательно, и уклонений отвеса. Для измерения этих характеристик применяются наклономеры. Есть надежда использования для определения приливных изменений уклонений отвеса на Луне точных астрономических наблюдений звезд с лунных обсерваторий, а по ним вычислять γ -фактор.

Также очевидно, что и к изменениям силы тяжести, соответствующим прямому действию приливного гравитационного эффекта, описываемого формулой (6.47), добавляются косвенные эффекты, обусловленные изменением положения точек Луны и перераспределением масс в ее теле

$$\Delta g = \Delta g_{\oplus} + \delta g_1 + \delta g_2,$$

где

$$\Delta g_{\oplus} = -\frac{2(W_{\oplus})_2}{\rho}, \quad \delta g_1 = -h\frac{2(W_{\oplus})_2}{\rho}, \quad \delta g_2 = \frac{3k(W_{\oplus})_2}{\rho}. \quad (6.69)$$

Отношение наблюдаемого изменения силы тяжести Δg , соответствующего реальной Луне к рассчитанному Δg_{\oplus} по формуле (6.47), в предположении абсолютно твердой Луны равно

$$\delta = 1 + h - \frac{3}{2}k. \quad (6.70)$$

Эту величину называют δ -фактором. Таким образом, δ -фактор выражается теми же числами Лява h и k , что и γ -фактор, но в другой их комбинации, чем в формуле

(6.68). Используя совместно результаты определения γ - и δ -факторов, из наклономерных, астрономических и гравиметрических наблюдений можно вывести числа k и h . Для измерения изменения силы тяжести на Луне на ее поверхности должны быть установлены стационарные высокоточные гравиметры. Они могут иметь достаточно небольшой диапазон изменения силы тяжести (~ 3 мГал). Основное требование к таким гравиметрам предъявляется в отношении стабильности их показаний во времени. Оно более жесткое, чем для земных приливных гравиметров из-за того, что основные приливные волны на Луне имеют полумесячные и месячные периоды, в то время как на Земле — суточные и полусуточные. Необходимо, чтобы в течение длительного времени в условиях резко изменяющейся внешней температуры сохранялась стабильность показаний гравиметров по крайней мере в течение нескольких месяцев.

Приливные деформации Луны сопровождаются горизонтальными упругими смещениями точек ее тела. Величины этих смещений характеризуются [137] числом Шида l (третье число Лява). Оно равно отношению реального горизонтального смещения ($\Delta\tau_\varphi$ по меридиану, $\Delta\tau_\lambda$ по параллели) вследствие приливной деформации к смещению, рассчитанному для абсолютно твердой Луны:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tau_\varphi &= \frac{1}{l} \frac{1}{\bar{g}} \frac{\partial W_\oplus}{\partial \varphi}, & \Delta\tau_\lambda &= \frac{1}{l} \frac{1}{\bar{g}} \frac{\partial W_\oplus}{\partial \lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (6.71)$$

Определяют l , используя число Лява k , выводимое из уравнений (6.68) и (6.70) и привлекая определяемый из наблюдений Λ -фактор, который равен

$$\Lambda = 1 + k - l.$$

Определяется Λ -фактор на Земле из экстенсметрических измерений. Экстенсметры — приборы определения расстояния и сжатия пород. Поскольку число Шида связано с наблюдениями уклонений отвеса, для его измерения, возможно, могут быть использованы специальные астрономические наблюдения звезд. Из этих наблюдений надо выводить изменения отвеса по отношению к оси мира. На Земле такие наблюдения недостаточно точны из-за рефракции, дрожания изображения звезд и т. д.

Итак, числа Лява h и l характеризуют смещения физической поверхности Луны, а k — ее урвенной поверхности. Из наблюдений с Луны определяются величины, пропорциональные названным смещениям, которые зависят от упругих свойств планеты. Можно точно рассчитать величину приливной силы от Земли, деформирующей Луну. Из наблюдательных данных и значения величины приливного воздействия можно определить упругие свойства Луны. В точной постановке, с учетом упругости, плотностной неоднородности, сжимаемости, самогравитации, вязкости и релаксации, задача становится необычайно трудной. Поэтому делаются упрощения. Еще Кельвином была установлена связь модуля сдвига μ с числами Лява h, k, l . Для однородной, несжимаемой, идеально упругой сферической планеты он получил [10]

$$\left. \begin{aligned} h &= 5 \left(2 + \frac{19\mu}{g\sigma_{\zeta}R} \right)^{-1}, & k &= \frac{3}{5} h = 3 \left(2 + \frac{19\mu}{g\sigma_{\zeta}R} \right)^{-1}, \\ l &= \frac{3}{10} h = \frac{3}{2} \left(2 + \frac{19\mu}{g\sigma_{\zeta}R} \right)^{-1}, \end{aligned} \right\} (6.72)$$

где g — сила тяжести, R, σ_{ζ} — средний радиус и плотность Луны соответственно.

Оценим для Луны числа Лява h, k, l и значения δ, γ, Λ -факторов для предельных значений упругих постоянных Ляме λ и μ , а также для значений λ и μ , соответствующих Земле (табл. 48). Очевидно, что упругие постоянные Ляме μ и λ для реальной Луны имеют значения, промежуточные между теми, которые соответствуют абсолютно твердой и жидкой Луне. В соответствии с этим будут и промежуточные значения $h, k, l, \delta, \gamma, \Lambda$.

Двухслойную модель планеты еще в начале века рассматривал Герглотц [94]. Если радиус Луны R , то радиус ядра обозначим $\alpha_1 R$, плотность оболочки — σ , а плотность центральной области — $\sigma(1 + \eta_1)$; μ и μ_{κ} — модули сдвига оболочки и центральной области соответственно. Величины σ, α_1, η_1 выбираются так, что средняя плотность равна $\sigma_{\zeta} = 3,34$ г/см³. Делается предположение, что μ и λ являются функциями ρ . В принятых обозначениях числа Лява выражаются через $\mu, \sigma, \alpha_1, \eta_1$, так:

$$h = \frac{H_2 + H_4}{H_2 H_3 - H_1 H_3}, \quad k = \frac{3}{5} \frac{H_2 + H_4 + \eta_1 \alpha_1^5 (H_1 + H_3)}{(1 + \eta_1 \alpha_1^3) (H_2 H_3 - H_1 H_4)}, \quad (6.73)$$

Таблица 48

Числа Лява k, h, l и значения δ -, γ -, Λ -факторов для модели Луны однородной плотности ($\sigma_{\tau} = 3,34 \text{ г/см}^3$) при некоторых предположениях об упругих постоянных Ляме

	Упругие постоянные Ляме, дин/см ²		Числа Лява			Значения факторов		
	λ	μ	h	k	l	δ	γ	Λ
Абсолютно твердая	∞	∞	0	0	0	1	1	1
Однородная несжимаемая жидкость	∞	0	2,5	1,5	0,75	1,25	0	1,5
С упругими свойствами Земли	$2 \cdot 10^{12}$	$2 \cdot 10^{12}$	0,0123	0,0074	0,0037	1,0012	0,9951	1,0037

где

$$H_1 = \frac{3}{5} \frac{1}{1 + \eta_1 \alpha_1^3} + \frac{e}{5\eta_1 \alpha_1^2} \left[\frac{35(8 - 3\alpha_1^2) - 2(64 - 21\alpha_1^2 + 21\alpha_1^5 - 64\alpha_1^7) \varepsilon}{4 - 7\alpha_1^3 + 3\alpha_1^7 - 2(1 - \alpha_1^3)(1 - \alpha_1^7) \varepsilon} \right],$$

$$H_2 = \frac{1 + \frac{2}{5} \eta_1}{1 + \eta_1 \alpha_1^3} + \frac{e}{5\eta_1 \alpha_1^2} \left[19(\delta - 1) + \frac{175 - 2(43 + 21\alpha_1^3 - 64\alpha_1^7) \varepsilon}{4 - 7\alpha_1^3 + 3\alpha_1^7 - 2(1 - \alpha_1^3)(1 - \alpha_1^7) \varepsilon} \right],$$

$$H_3 = 1 - \frac{3}{5} \frac{1}{1 + \eta_1 \alpha_1^3} + \frac{e}{5} \left[19 - \alpha_1^3 \frac{7(8 - 3\alpha_1^2) - 2(64 - 21\alpha_1^4 - 43\alpha_1^7) \varepsilon}{4 - 7\alpha_1^3 + 3\alpha_1^7 - 2(1 - \alpha_1^3)(1 - \alpha_1^7) \varepsilon} \right],$$

$$H_4 = \eta_1 \alpha_1^5 H_1, \quad e = \frac{\mu}{g\sigma R}, \quad \varepsilon = \frac{\kappa - 1}{\kappa}.$$

Уравнения упругого равновесия плапеты с учетом сжимаемости, самогравитации, в предположении центральной симметрии в распределении плотности $\sigma(\rho)$ и упругих свойств, характеризуемых величинами $\mu(\rho)$ и $\lambda(\rho)$, М. С. Молоденский [30] записывает в виде

$$\begin{aligned} \sigma \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(W_{\oplus} + W_i + \frac{\zeta}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right) - \frac{X}{\rho} \theta \frac{dW}{d\rho} \right] + \\ + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial X} + \mu \Delta u + \frac{X}{\rho} \theta \frac{d\lambda}{d\rho} + \frac{1}{2} \frac{d\mu}{d\rho} \times \\ \times \left(\frac{\partial \zeta}{\partial X} - u + X \frac{\partial u}{\partial X} + Y \frac{\partial v}{\partial Y} + Z \frac{\partial w}{\partial Z} \right) = 0. \quad (6.74) \end{aligned}$$

Уравнения для двух других координат Y и Z аналогичны этому. В этих уравнениях u, v, w — компоненты смещения по трем ортогональным прямоугольным осям X, Y, Z .

$\theta = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Z}$ — дилатация, характеризующая

объемное расширение, $\zeta = Xu + Yv + Zw$, а $\frac{\zeta}{\rho}$ — ра-

диальная компонента смещения. W — потенциал силы тяжести Луны, W_{\oplus} — приливной потенциал от Земли, W_i — дополнительный потенциал, возникающий в результате деформации Луны под действием приливного потенциала W_{\oplus} . Потенциал W_i равен сумме потенциалов $\Delta_1 W$ (6.65) и $\Delta_2 W$ (6.66). Он удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta W_i = 4\pi G \left(\sigma\theta + \frac{\zeta}{\rho} \frac{d\sigma}{d\rho} \right). \quad (6.75)$$

В системе уравнений (6.74) и (6.75) неизвестными являются смещения u, v, w и потенциал W_i . К этим уравнениям необходимо добавить краевые условия на поверхности сферической Луны и в центре или на границе сферических слоев, являющихся границами раздела сред с различными упругими и плотностными характеристиками. Иными словами, уравнения (6.74) и (6.75) вместе с краевыми уравнениями определяют состояние планеты после деформации ее приливным потенциалом W_{\oplus} и дополнительным к нему потенциалом W_i .

Вводя некоторые вспомогательные функции, зависящие от ρ , М. С. Молоденский систему уравнений (6.74) и (6.75)

в частных производных приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Такими вспомогательными функциями являются H и T , которые характеризуют радиальное и тангенциальное смещения; N и M характеризуют нормальную и тангенциальную компоненты напряжения; R характеризует изменения потенциала в результате приливных деформаций планеты, а L — его градиент. Эта система дифференциальных уравнений для вспомогательных функций имеет вид

$$\left. \begin{aligned}
 N &= (\lambda + 2\mu) \frac{dH}{d\rho} + \frac{\lambda}{\rho} \left(2H - \frac{n(n+1)}{\rho} T \right), \\
 M &= \mu \left(\frac{dT}{d\rho} - \frac{2}{\rho} T + H \right) \rho^2, \\
 L &= \left(\frac{dR}{d\rho} - 4\pi G\sigma H \right) \rho^2, \\
 \frac{dL}{d\rho} &= n(n+1)R - 4\pi G\sigma(n+1)T, \\
 \frac{dM}{d\rho} &= - \left[\sigma \frac{dW}{d\rho} \rho + \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \right] H \rho + \\
 &+ \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} [\lambda(2n^2+2n-1) + 2\mu(n^2+n-1)] T - \\
 &\quad - \left[\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} N + \sigma K \right] \rho^2, \\
 \frac{dN}{d\rho} &= \frac{n(n+1)}{\rho^4} M + \frac{4\mu}{\rho^2} \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} H - \\
 &\quad - \frac{n(n+1)}{\rho^3} \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} T - \frac{\sigma}{\rho^2} L - \\
 &\quad - \frac{4\mu}{\lambda+2\mu} \frac{1}{\rho} N + \frac{\sigma}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \left(4H - \frac{n(n+1)}{\rho} T \right).
 \end{aligned} \right\} (6.76)$$

Приведенные выше уравнения упругого равновесия выводились применительно к Земле. Они применимы и к другим планетам земной группы, в том числе к Луне. На основе этих уравнений по приливному наблюдениям на Луне возможно найти напряжения в теле Луны, упругие постоянные Ламе λ и μ . Для решения задачи задаются следующие краевые условия.

На поверхности:

$$\bar{M}_n(R) = 0, \quad \bar{N}_n(R) = 0, \quad \bar{L}_n(R) + \\
 + (n+1) R \bar{K}_n(R) = 0.$$

Таблица 49

Числа Лява h , k и значения δ -, γ -факторов для различных моделей Луны

Автор	$\frac{R}{R_{\zeta}}$	Плотность σ , г/см ³		Модуль сдвига μ , $1 \cdot 10^{11}$ дин/см ²		Числа Лява		Фактор	
		центр. обл.	внешн. оболочка	центр. обл.	внешн. оболочка	h	k	δ	γ
Гаррисон	1,00	3,34	3,34	7,38	7,38	0,0331	0,0199	1,0033	0,9868
Каула						0,0334	0,0195	1,10051	0,9851
Гаррисон	0,50	3,34	3,34	0	7,38	0,0591	0,0355	1,0058	0,9764
Каула						0,0683	0,0384	1,0107	0,9700
Гаррисон	0,50	5,72	3,00	0	7,38	0,0559	0,0319	1,0080	0,9760
Каула						0,0649	0,0349	1,0125	0,9700
Гаррисон	0,50	5,72	3,00	0	4,00	0,1006	0,0575	1,0143	0,9569
Каула						0,1169	0,0631	1,0223	0,9462
Гаррисон	0,75	3,81	3,00	0	4,00	0,2833	0,1667	1,0333	0,8834
Каула						0,3295	0,1860	1,0505	0,8565
Гаррисон	0,90	3,65	2,50	3,00	3,00	0,0777	0,0456	1,0093	0,9679
Каула						0,0814	0,0460	1,024	0,9646
Бодри	0,028	3,37	3,20	4,00	3,00	0,0639	0,0173	1,0381	0,9534

Эти условия означают отсутствие нормального и тангенциального напряжений на свободной поверхности.

В центре:

$$\bar{M}_n(0) = 0, \quad \bar{N}_n(0) = 0, \quad \bar{L}_n(0) = 0.$$

Эти условия соответствуют тому, что вспомогательные функции регулярны в центре.

В таблице 49 приведены результаты расчетов чисел Лява h , k и γ -, δ -факторов для ряда моделей Луны. Рассмотрены одно-двухслойные модели с различными упругими постоянными Ламе μ и λ и плотностями σ в слоях. В табл. 49 R означает в моделях Гаррисона и Каулы радиус ядра, а в модели Б. Бодри — мантию, простирающуюся до центра. Модель рассчитывалась с учетом и без учета сжимаемости. Гаррисон [93] производил расчет по формулам (6.98), в которых сжимаемость не учитывалась. Каула [103] применял численное интегрирование

уравнений, аналогичных (6.76), в которых учитывалась сжимаемость. При этом для твердой модели Луны принималось $\lambda = \mu$, а для модели с жидким ядром $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, где K — модуль всестороннего сжатия. Б. Бодри [2] применял метод численного интегрирования уравнений (6.76), в которых учитывается сжимаемость вещества. При этом его двухслойная модель соответствует лунной коре и мантии, простирающейся до центра.

Таблица показывает, что от вариации плотности и модуля сдвига в однослойной и двухслойной моделях δ -, γ -факторы изменяются мало. Из этого следует неутешительный вывод, что для вывода упругих свойств недр Луны нужно иметь приливные наблюдения как изменений силы тяжести, так и наклонов уровенной поверхности, с очень высокой точностью. Весь эффект влияния упругости составляет 1—3% от измеряемой величины. Задавшись целью регистрировать этот эффект с относительной точностью хотя бы 10^{-1} , необходимо силу тяжести измерять с точностью 1—3 мкГал, а отклонение отвеса с точностью до тысячных долей угловой секунды. Для сравнения напомним, что эффект, обусловленный упругими свойствами Земли, в изменениях силы тяжести составляет 20%, т. е. $\delta = 1,20$, а в изменениях отклонений отвеса 30%, ибо $\gamma = 0,70$.

§ 48. Происхождение и эволюция Луны

Знание происхождения] Земли и ее эволюции представляет первостепенный научный интерес для всех наук о Земле. Оно необходимо для познания природы не только глубинного строения Земли, но и ее верхней части — коры. Изучение последней имеет большое практическое значение, которое в конце концов сводится к направленному поиску и разведке полезных ископаемых. Космогонические выводы важны для выработки мировоззрения.

Надо думать, что образование спутников планет, в частности Луны, происходило по схеме, общей со схемой происхождения самих планет. Поэтому данные о планетах и их спутниках одинаково нужны для построения гипотезы происхождения как планет, так и их спутников. Важным звеном в проблеме происхождения Земли, несомнен

о, является вопрос о происхождении Луны. Построение гипотезы происхождения Луны было бы проще, если бы в Солнечной системе были планеты со спутниками, подобными Луне, находящиеся на разных стадиях их истории. Не являются ли кольца Сатурна ранней стадией развития его будущей «луны»? Если бы это было так, то это означало бы, что имеется эволюционная картина уже для двух стадий развития Луны. Но, к сожалению, во Вселенной мы пока не видим систем, подобных Солнечной, находящихся на разных стадиях развития. Факты, относящиеся к различным моментам истории развития планет и их спутников, позволили бы установить основные пути их происхождения и эволюции.

Чтобы вообразить трудность воссоздания картины происхождения Луны, канувшей в глубину времени, позволим себе провести для наглядности следующее сравнение. Допустим, что «божественному кинооператору» удалось запечатлеть на киноленту всю историю происхождения и эволюции Луны, продолжавшуюся около 5 млрд. лет, с момента ее начала до наших дней. В каждом из кадров фильма «режиссер» сумел отразить разнообразные стороны процесса для данного момента времени: химический состав первичного вещества, из которого образовалась Луна, химический состав самой Луны и его изменение во времени, внутреннее строение Луны, образование материков и морей, масконов, кратеров, температуру Луны, источники тепла, магнитные, электрические свойства, сейсмичность Луны, со всеми ее особенностями и т. д. и т. п. «Зрителям», т. е. ученым, занимающимся проблемой происхождения Луны, из всего фильма показан только один последний кадр со всеми сведениями о Луне и ее окружения для настоящего момента времени. По этому единственному кадру нужно воссоздать весь фильм, продолжавшийся многие миллиарды лет. Конечно, прошлое наложило отпечаток на настоящее. Но надо иметь в виду, что многое из того, что было, исчезло бесследно. Оставшаяся часть если и сохранилась, то в сильно измененном виде.

Какими же основными исходными данными располагают ученые о Луне? Прежде всего, имеются фотографии, полученные из телескопических наблюдений, и детальные снимки с помощью космических методов. На фотографиях запечатлена морфология лунной поверхности, носящая

следы истории Луны. Кроме того, имеются данные различных видов физического картирования — оптического (яркость, поляризация, цвет), радиоастрономического, инфракрасного, радиационного и пр. На основании этих наблюдений выводятся химический состав и физические свойства (плотность, пористость, раздробленность, электропроводность, температура, теплопроводность и пр.) поверхностных слоев в различных районах Луны. Более подробно химический состав и физические свойства пород Луны и, что особенно важно для космогонии и эволюции, их возраст определяются по образцам пород, доставленными на Землю автоматическими станциями и космическими кораблями с космонавтами.

Возможны приемы восстановления прошлого путем «аналитического продолжения», причем под этим понимают следующее: на основании знания закономерности того или иного явления, описываемого определенным уравнением в функции времени (обычно дифференциальным уравнением), можно рассчитать явление для прошлого, зная его современное состояние. Данные настоящего времени играют роль граничных условий. Важно правильно установить закономерность явления и надо, чтобы задача в принципе решалась устойчиво, т. е. чтобы малые неточности в граничных условиях не приводили к практически неприемлемым большим вариациям решений. Примером такого исследования прошлого Луны является изучение ее термической истории. Прежде всего надо было оценить и учесть все возможные источники тепла (тепло от долгоживущих радиоактивных изотопов U^{238} , U^{235} , Th^{232} , K^{40} , аккреций вещества на Луну, приливных деформаций Луны, короткоживущих радиоактивных элементов, солнечное тепло и пр.). Надо знать распределение радиоактивных элементов в теле Луны, теплопроводность слоев Луны, их теплоемкость, температуру плавления вещества Луны, скрытую теплоту фазовых переходов, вязкость недр Луны для учета конвекции и пр.

Уже один простой перечень параметров, от которых зависит тепловая история Луны, показывает, насколько она может быть сложной. На рис. 86 изображен температурный режим внутри Луны на протяжении ее истории существования [46], [154]. Он восстановлен путем аналитического продолжения. На рисунке изображены изотер-

мы недр в предположении их центральной симметрии, начиная с момента времени, когда сформировалась Луна, и до наших дней. Показаны для каждого момента времени области, находившиеся в расплавленном, полурас-

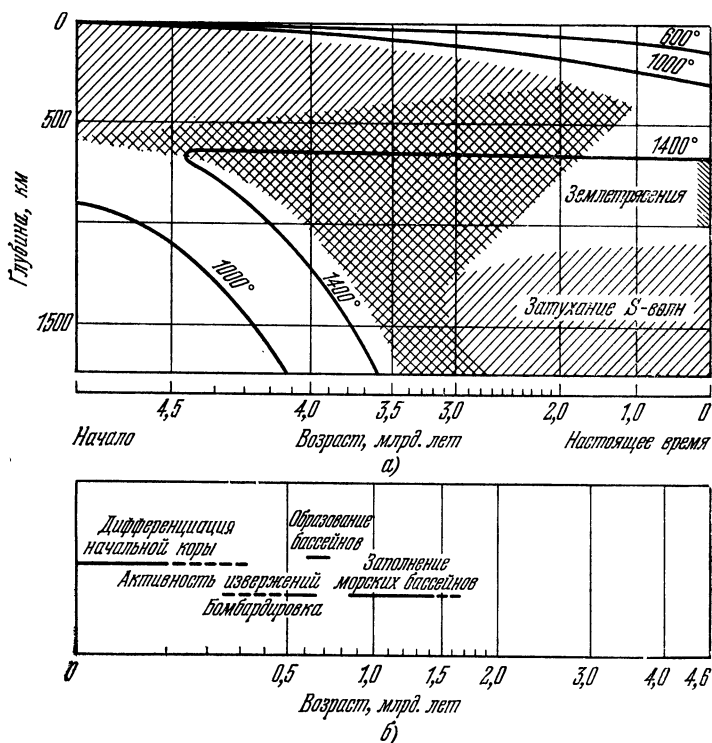


Рис. 86. а) Температура недр Луны, их состояние со времени ее образования до настоящего времени. Густая штриховка означает полностью расплавленное вещество, редкая штриховка — частичное плавление. б) Основные этапы эволюции Луны.

плавленном и твердом состояниях. Начальная температура подобрана так, чтобы объяснить последующую эволюцию Луны, которая проявлялась в дифференциации вещества недр, образовании лунной коры, вулканических извержениях, оставшихся следах бомбардировки лунной поверхности метеоритами и планетезималями, образовании бассейнов, заполнении их магматическими излияния-

ми и пр. (Сам механизм раннего разогрева Луны до высоких температур ныне остается еще неясным.) Начавшееся остывание верхних слоев с момента образования привело к тому, что в настоящее время глубина нижней границы лунной литосферы равна ~ 1000 км. Затухание поперечных сейсмических волн на больших глубинах свидетельствует о возможном расплавленном состоянии центральной части Луны, чего не было 1,5 млрд. лет после образования Луны.

Другим примером «аналитического продолжения» является изучение механики движения Луны в далеком прошлом. Современное вращение Луны вокруг собственной оси, движение по геоцентрической орбите и эволюция этих движений могут быть описаны дифференциальными уравнениями. В них фигурируют возмущения, приводящие к эволюции движений Луны. Одними из основных возмущений являются приливное трение и влияние Солнца. Задавая начальные условия (современное движение), можно восстановить движение Луны в прошлом и определить соответствующие ему лунные сутки, наклон плоскости лунного экватора, расстояние до Земли, период обращения вокруг Земли, наклон плоскости орбиты и др. Гипотеза происхождения и эволюции Луны должна объяснять не только нынешнее и прошлое ее тепловое состояние, не только современную динамику Луны и ее эволюцию, но и многие другие стороны состояния спутника Земли в настоящем и далеком прошлом. Факты и наблюдательные данные «экзаменуют» гипотезу. Не выдержавшие экзамен гипотезы уходят со сцены навсегда или временно, чтобы в подновленном виде вновь предстать перед фактами и наблюдениями.

Какие же основные факты должна объяснить гипотеза происхождения и эволюции Луны?

1. Геоцентрическую орбиту Луны, синхронность суточного вращения Луны с обращением вокруг Земли. Близость к компланарности лунного экватора и плоскости орбиты.

2. Химический состав Луны, его сходство с составом Земли, Солнца, планет, метеоритов и различие. Их возраст.

3. Глубинное слоистое строение Луны со ступенчатым изменением физических свойств. Слабую сейсмичность.

4. Существование морей и материков, масконов, кратеров, отсутствие горизонтальных движений.

5. Отличие Луны от гидростатически равновесного состояния, наличие больших изостатических гравитационных аномалий.

6. Слабое магнитное поле Луны.

7. Особенности электропроводности недр Луны.

8. Отсутствие гидросферы и атмосферы.

Этот перечень можно было бы продолжить. Ограничимся перечисленными пунктами, которые уже показывают, что гипотеза должна объяснить факты разного характера: механические, химические, физические. Понимается, что при объяснении фактов мы должны оставаться в рамках установленных законов природы. Среди приведенного перечня не все факты известны достаточно надежно. Недостаточно известны химический состав для обратной стороны, для глубинных областей Луны. Представления о внутреннем строении пока приблизительны. Несмотря на то, что экспериментальных данных далеко недостаточно, а многие факты требуют своего уточнения, надо строить рабочие гипотезы для объяснения отдельных явлений в истории Луны на ограниченных промежутках времени ее развития. Нет сомнения и в необходимости общей гипотезы происхождения Луны. Без гипотез немыслимо продвижение научных исследований. Но при этом надо уяснить, что выводы по космогонии на современном уровне знаний (это будет продолжаться достаточно долго) не могут не находиться на грани достоверности. Недостаточно удовлетворительный по точности и ограниченный в объеме наблюдательный материал позволяет делать многозначные выводы, которые в силу этого иногда можно легко утверждать и также легко отрицать. Поэтому часто космогонические выводы не столь категоричны.

Естествен и вопрос: какое имеет отношение гравиметрия Луны к гипотезам ее происхождения и эволюции? Гравитационное поле играло роль еще на самой ранней стадии образования Луны, когда проходил процесс аккреции вещества. Эти вопросы рассматриваются на основе гипотетических расчетов. Мы же упомянем факты, которые установлены на основании измеренного гравитационного поля и являются «пробным камнем» для гипотез. О них говорилось в соответствующих параграфах книги,

поэтому ограничимся кратким их напоминанием. С помощью гравитационного поля установлены существенно бóльшие, чем для Земли, плотностные неоднородности в недрах Луны — масконы (§ 46). Они являются приповерхностными образованиями с большой избыточной плотностью. Располагаются масконы на видимой стороне. В § 43 было показано, что в целом плотность от поверхности к центру изменяется мало. Обнаружена внутренняя асимметрия масс и различие положения центра масс относительно центра фигуры (§ 35). Установлено по гравитационному полю различие толщины лунной коры на видимой и обратной сторонах Луны (§ 32). Сохраняется состояние изостатической акомпенсации в течение длительного времени, что позволило сделать заключение о прочности коры и состояний недр (§ 46). По гравиметрическим данным оценивается гидростатическая неравновесность Луны (§ 38). Ко всему этому следует добавить сказанное в § 19 о роли гравитационного поля на формирование нынешнего состояния Луны. Таким образом, изучение гравитационного поля помогает разрешению проблемы происхождения и эволюции Луны.

Предложено большое число гипотез происхождения и эволюции Луны. Одни из них основываются на идеях катастрофического отрыва Луны от Земли под действием приливных сил, в других считается, что двойная планетная система образовалась в результате эволюционного раздвоения вращающегося жидкого тела. Имеется серия гипотез, в которых предполагается, что Луна и Земля образовались из облака газа и частиц. Анализ различных гипотез образования Луны дан в [38], [101], [117].

Ряд гипотез ныне представляет уже исторический интерес, так как они не в состоянии объяснить ряд основных наблюдательных фактов или основывались на ошибочных исходных предположениях. К числу таких гипотез можно отнести гипотезу образования Луны путем отделения от Земли. Она была выдвинута в начале этого столетия. Дж. Дарвином [81], сыном знаменитого естествоиспытателя Чарльза Дарвина. По-видимому, на разработку этой гипотезы автора натолкнуло то, что средняя плотность Луны близка к плотности пород верхней мантии Земли, дно Тихого океана представляет громадную впадину с базальтовым дном, центральная часть видимой

стороны Луны тоже имеет вид впадины, заполненной базальтами,— это лунные моря. Согласно Дж. Дарвину некогда было вращающееся жидкое тело, момент количества движения которого был равен моменту нынешней системы Земля — Луна. Период суточного вращения этого тела был четыре часа. Под действием прилива от Солнца, период которого, следовательно, был два часа, возник резонанс в собственных колебаниях исходного тела, ибо период его собственных колебаний, как предполагал Дж. Дарвин, был тоже два часа. В конце концов наступал момент, когда резонанс приводил к отрыву от родительского тела приливного выступа, из которого образовалась Луна. Как было уточнено позже, период собственных колебаний Земли равен 54 минутам, поэтому резонанс в собственных колебаниях под действием приливных сил не может возникать, кроме того, наличие внутреннего трения в исходном теле ограничивает резонанс [10]. Критический анализ взглядов Дж. Дарвина был проделан в работах [22], [115].

Имеются гипотезы образования Луны в результате отделения ее от вращающегося жидкого тела при наступлении ротационной неустойчивости. Эта классическая задача, безотносительно к образованию Луны, привлекла к себе еще в конце прошлого столетия внимание многих выдающихся математиков (Ляпунов, Пуанкаре, Якоби и др.). Отделение поверхностного слоя, из которого сформировалась Луна, от вращающегося тела позволило бы объяснить химическое различие Луны и Земли. Для этого надо допустить, что к моменту разделения в родительском теле произошла дифференциация вещества и более легкие породы собрались в поверхностных слоях. В литературе последнего времени из серии этих гипотез можно познакомиться с гипотезой О'Кифа [128], [129]. Он предполагает, что Земля в прошлом вращалась вокруг собственной оси с высокой угловой скоростью (период два часа). При наступлении ротационной неустойчивости она разделилась на две части в отношении 1 : 10. Первая из них — протолуна, вторая — Земля. Обе части продолжали вращаться вокруг собственных осей и одновременно возникло вращение одной вокруг другой. Период последнего вращения был около четырех часов. Приливы, роль которых при близких взаимных расстояниях особен-

но велика, рассеивают энергию вращения тел. Вращение замедляется, Луна удаляется от Земли. Первоначально Луна и Земля были окутаны одним газовым облаком (как двойная звезда). Происходила конденсация облака. Образуется сначала земная, а затем лунная кора. В гипотезе остается неясным механизм, вызвавший быстрое вращение исходного тела, из которого образуются Земля и Луна. Идею ротационной неустойчивости Р. Литтлтон [116] использует для объяснения одновременного образования Земли, Марса и Луны. Последняя по этой гипотезе возникла из части вещества между Землей и Марсом.

В работах [115], [22] было показано, что если и возникает отделение спутника от вращающегося тела, то это происходит не эволюционным путем, а в виде кратковременного выброса. Выбрасываемое вещество улетает от исходного тела или падает на него вновь. При этом падении на поверхности происходит разброс вещества. Гипотезы отделения Луны от вращающегося жидкого тела испытывают некоторые трудности при объяснении динамики движения в части согласования быстрого вращения и расстояний от центра исходного тела до вещества, которое отрывается при наступлении ротационной неустойчивости. В настоящее время сторонников этих гипотез осталось немного.

В основе ряда гипотез лежат идеи аккреции вещества из некоторого первоначального облака газов (роя частиц и тел) и захвата на околоземную орбиту. Особенно успешно эти идеи развивались О. Ю. Шмидтом [53], [54] для планетной космогонии. Им были высказаны соображения о гипотезе образования Луны, которая была разработана его последователями. Эти же идеи нашли большое развитие в многочисленных работах Г. Юри [59], [158] и др. В большинстве гипотез с аккрецией вещества предполагается, что Луна формировалась в пределах Солнечной системы, но в различных ее местах. Различие мест диктуется необходимостью объяснить различие химического состава Луны, Земли, Солнца. Например, автор работы [76] считает, что Луна формировалась в области, расположенной внутри орбиты Меркурия, в других гипотезах местом рождения Луны предполагается кольцо астероидов. Так, Г. Юри предполагает, что Земля захватила Луну, которая сформировалась из роя частиц и тел,

двигавшегося вдали от Земли. Юри допускает, что рой существовал в интервале между Юпитером и кольцом астероидов. Из него образовались в результате аккреции небесные тела, размеры которых были порядка нашей Луны. Они сталкивались между собой и теряли скорости. В результате этого одна из протолун оказалась на геоцентрической орбите и в результате захвата стала спутником Земли. При столкновениях еще на первичной орбите происходил переход части кинетической энергии движения в тепло, а состав вещества, из которого формировалась Луна, терял летучие элементы.

В течение многих лет гипотезу образования Луны развивает Е. Л. Рускол [38] — [40] и др. В ее исследованиях многие необходимые факты объяснены теоретически и подтверждены количественными расчетами, поэтому кажутся убедительными. Она вслед за О. Ю. Шмидтом предполагает, что Луна образовалась из роя тел и частиц, двигавшегося по геоцентрической орбите. Работа основывается на ряде результатов, изложенных в работах В. С. Сафронова, в частности [44]. На околоземной же орбите рой оказывается, будучи захваченным Землей с геоцентрической орбиты. Эта задача ранее рассматривалась рано скончавшейся талантливой ученой Н. Ф. Рейн [37]. Она решала ограниченную задачу трех тел (Солнце, Земля, частица). Условием, благоприятствующим переходу на околоземную орбиту, является то, что при неизбежных столкновениях между частицами роя происходит потеря их скорости. Естественно, что при столкновениях будет протекать и обратный процесс — переход частиц с околоземной на околосоляную орбиту. Но поскольку предполагается, что столкновения между частицами неупругие, этот обратный процесс будет происходить в меньшей степени. Так же как и в гипотезе Юри, при столкновениях из-за нагрева будет происходить испарение низкоплавких и летучих элементов (Pb, Bi, Tl, In, Hg) и их вынос солнечным ветром на периферию роя.

Впрочем, существует точка зрения, что уменьшение в составе Луны летучих элементов происходило на стадии лавовых излияний и их испарения. Под действием взаимного притяжения частицы и тела роя собрались в отдельные сгустки материи, из которых сначала образовались две-три протолуны. Они образовались позднее, чем обра-

зовалась Земля, и аккумуляровались в теперешнюю Луну спустя $5 \cdot 10^7$ — 10^8 лет после образования самой Земли. Слияние протолун в одну протекало быстро; при этом выделилось большое количество энергии, за счет чего температура Луны повысилась на несколько сотен градусов. Предположение об образовании Луны путем объединения нескольких протолун позволяет разрешить проблему высокой начальной температуры Луны (до 1000°K). Другой путь повышения начальной температуры, — радиоактивный разогрев, имеет свои трудности.

Е. Эпик [131], [130] из анализа параметров лунных кратеров пришел к заключению, что на Луну падали небесные тела с небольшими скоростями, ~ 3 км/с. Это были тела, находившиеся на геоцентрической орбите, существовавшие в виде роя тел, подобных кольцам Сатурна. Что же касается вопроса, откуда появилось вещество роя, то автор обсуждал две возможности. Он допускал, что возможен отрыв вещества от быстровращающейся Земли. Другая возможность состоит в захвате Землей крупного метеорита в области предела Роша. Разрыв метеорита приливными силами Земли в области предела Роша поставляет материал для образования Луны. В кольцевом рое образуются сначала сгустки вещества, которые затем соединяются.

Вариант гипотезы с использованием идеи захвата развивает Альвен [60], [61]. Первоначально Луна двигалась по геоцентрической орбите. Затем, будучи захваченной Землей, стала двигаться по эллиптической орбите большого эксцентриситета и большой наклонности. Вследствие действия приливного трения орбита становится круговой, а радиус, изменяясь, становится равным пределу Роша $2,89 R_\oplus$. Под действием приливных сил Луна частично разрушается, часть материи падает на Луну, образуя впадины и кратеры. Альвен основывался на расчетах эволюции орбиты Луны, выполненных Гестенкорном в его многочисленных работах, например [87]. Гипотезы образования Луны из вещества с околоземной орбиты излагаются Макдональдом [117] и др.

А. Рингвуд [134] предложил качественную гипотезу образования железного ядра Земли и одновременного образования Луны. В начале была массивная, горячая атмосфера Земли из CO , H_2 и испарившихся силикатов.

Охлаждаясь, ядро дало начало кольцу частиц, которые были обеднены железом и летучими элементами. Из кольца частиц образуется Луна.

В истории эволюции Луны можно выделить три фазы: догеологическую, магматическую и экзогенную.

В догеологической фазе сразу после образования из протолунного ядра 4,6 млрд. лет назад произошла дифференциация пород в недрах Луны, в процессе которой образовалась первичная лунная кора. Как происходила дифференциация вещества — наиболее дискуссионная проблема в истории Луны. В состав первичной коры входило вещество, обогащенное кальцием и алюминием, — анортзитовые плагиоклазы. Подстилала кору верхняя мантия, которая состояла из минералов, богатых железом и магнием (пироксены и оливины). Для дифференциации вещества и выделения анортзитов и базальтов необходима была достаточно высокая начальная температура Луны (1000 °К). Плавление происходило хотя не во всем объеме Луны, но по крайней мере в половине объема. Первоначально лунная кора была еще пластичной. Падавшие на лунную поверхность тела не оставили следов, которые сохранились бы до настоящего времени. Во время образования первичной лунной коры происходило выделение газов из недр и образование атмосферы Луны.

Магматическая фаза наступила 4,3 млрд. лет назад (см. рис. 86, б). Радиоактивные элементы при дифференциации, происходившей в предыдущей фазе, будучи вынесенными в верхние слои Луны, выделяли тепло. Происходила интенсивная бомбардировка лунной поверхности падающими телами. В результате поверхность Луны оказалась усеянной кратерами всевозможных размеров. Раздробленные, переплавленные, разбросанные, многократно переотложенные обломки пород первозданной коры покрыли Луну рыхлым слоем реголита. Структуры этой эпохи, представляющей начало магматической фазы, не сохранилось, ибо на них наложилось формирование более позднего времени.

Во вторую эпоху магматической фазы 4,0 млрд. лет назад на Луну упало несколько планетезималей. Они образовали на ней большие «шрамы» — впадины округлой формы протяженностью сотни — тысячи км. Это будущие круговые моря — Море Дождей, Море Спокойствия, Море

Ясности, Море Нектара и др. Они обрамлены кольцевыми горами высотой в несколько километров. К этому времени в механических свойствах коры произошли большие изменения, возможно, завершилась стадия конденсации и кристаллизации расплавленных пород. Кора сделалась прочной, способной выдерживать большие поверхностные нагрузки без деформаций. Увеличилась мощность литосферы.

Благодаря покрытию мест образования впадин слоем выброшенных пород резко уменьшилась теплопроводность лунной поверхности. Вследствие этого в недрах Луны за счет распада радиоактивных элементов, вынесенных в верхние ее слои, происходил местный разогрев и частичное плавление. По трещинам и разломам, которые возникли одновременно со впадинами при падении планетезималей, расплавленный базальт (с глубин ~ 400 км) изливался на поверхность, заполняя впадины. При этом при переполнении впадин базальтовые лавы разливались, образуя морские площади с неправильными границами (Океан Бурь). Если кора в области круговых впадин выдерживала длительную нагрузку от излившихся базальтов, то возникали большие положительные аномалии силы тяжести. Так образовались масконы. Возможно, существуют впадины, заполненные ранними базальтовыми излияниями, когда лунная кора еще не приобрела достаточной прочности, изостатически скомпенсировавшиеся и не имеющие поэтому больших гравитационных аномалий. Активные лавовые излияния происходили 3,8—3,2 млрд. лет назад. Этот период составляет третью эпоху в магматической фазе истории Луны.

Заполнение впадин базальтами произошло спустя некоторое время после образования самих впадин. В это же время на Луне была высокая вулканическая активность. Базальты лунных морей (морские базальты) по составу наиболее близки к земным океаническим базальтам. Они состоят в основном из полевого шпата, пироксена, ильменита и оливина, обогащены железом и титаном и обеднены натрием, углеродом по сравнению с земными базальтами. Кристаллизация излившихся пород магмы возникала при быстром ее остывании. Постепенно обеднялся основной источник тепла — расход радиоактивных элементов, конвективный перенос тепла уменьшался,

так как образовалась толстая литосфера. Излияния базальтов хотя и продолжались почти 0,4 млрд. лет, но они происходили импульсами. На Луне обнаружены базальтовые потоки различных возрастов, наложенные друг на друга. По существу, интенсивная активность магматизма закончилась ~ 3,0 млрд. лет назад. Этим завершилась вторая фаза в истории Луны. До наших дней сохранились следы лунной активности, относящиеся ко времени ~ 4 млрд. лет назад.

Экзогенная фаза началась (см. рис. 86, б), когда ослабла роль внутренней энергии. Луна стала «умирать», затухали магматизм, вулканизм, тектонические движения, сейсмическая активность. На смену эндогенным процессам пришли экзогенные процессы, обусловленные внешними силами. Такими в эту фазу были метеоритная бомбардировка Луны, действие микрометеоритов с большими скоростями, действие элементарных частиц высоких энергий облучения во всех диапазонах длин волн (световым, ультрафиолетовом, инфракрасном, рентгеновском, радио). Экзогенные процессы уже не могли существенно изменить внутреннее строение Луны, а также ее внешнего облика. Все, что происходило во время экзогенной фазы, сохранилось, естественно, в частично измененном виде. Но не следует думать, что во время экзогенной фазы развития Луны исчезли эндогенные процессы. Они остались, только уменьшилась их роль. Следы недавних лавовых излияний можно видеть на валах позднейших крупных кратеров. Признаки вулканизма наблюдались и в наши дни, в виде выходов газов из недр, в частности, в кратерах Тихо, Аристарх и др. Гидросфера (вода в парообразном состоянии) и атмосфера некогда короткое время существовали на Луне, когда их рассеивание в космическое пространство пополнялось из недр Луны. Но они не оставили сколько-нибудь существенных следов своего прямого воздействия, что имеет место на Земле. Возросла эффективность действия экзогенных сил. Особенно наглядно, если сравнить с Землей, можно видеть на Луне следы действия метеоритов, многочисленные кратеры от микроскопических до гигантских. Теперь уже не вызывает сомнения, что они ударного происхождения. Особенно это стало убедительным после открытия аналогичных кратеров на Марсе, Меркурии и спутниках Марса — Фобосе и

Деймосе. Трудно представить себе, что тела столь малого размера, как Фобос и Деймос, имели бы кратеры вулканического происхождения. На Луне же отдельные кратеры образовались в результате вулканической деятельности. Утверждению ударного происхождения большинства кратеров Луны способствовало открытие на Земле впадин метеоритного происхождения, таких как Аризонский в США, кратер Табун Хара Обо в Монголии, Уолф Крик в Австрии и др. На фотографиях их внешний вид очень схож.

Здесь уместно вспомнить, что в свое время А. Вагнер, обладающий необычным даром убеждения, писал: «Я не понимаю, как возможно, сравнивая Луну с земным глобусом, прийти к другому выводу, кроме следующего: лунные и земные формы различны в корне, а следовательно, и происхождение их различно. Противоположность между ними столь разительна, что уже ближайшее поколение ученых будет посмеиваться над нашими судорожными усилиями установить здесь какое-нибудь сходство» [6]. Но сходство все же есть, и оно обнаруживается при более глубоком анализе. То, что названные кратеры на Земле метеоритного происхождения, доказывается текстурными исследованиями слагающих их пород, геофизическими измерениями. Имеются сообщения об ударном образовании кратеров в результате падения метеорита в наши дни. При соударениях метеоритов с Луной образование кратеров сопровождается сложным метаморфизмом лунных пород. Происходит изменение минералогического состава и механического состояния. Доказано, что, в отличие от обычного метаморфизма пород, в течение геологического времени под действием динамических нагрузок происходит процесс, аналогичный метаморфизму, но в течение долей секунд.

В заключение можно сказать, что Луна «умирает», но еще «живет».

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1

1. *Бальмино Дж.* Представление потенциала Земли с помощью совокупности точечных масс, находящихся внутри Земли.— В кн.: Использование искусственных спутников для геодезии.— М.: Мир, 1975, с. 178—183.
2. *Бровар В. В., Юзефович А. П.* Параметры лунных масконов.— В кн.: Современные проблемы позиционной астрометрии.— М.: Изд. МГУ, 1975, с. 303—312.
3. *Грушинский Н. П.* Теория фигуры Земли.— М.: Наука, 1976, 511 с.
4. *Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Интегральные уравнения для плотности простого слоя.— Тр. ЦНИИГАиК, 1972, вып. 198, с. 57—178.
5. *Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* К выводу плотности простого слоя на лунной поверхности.— Астрон. вестн., 1973, т. 7, № 3, с. 129—138.
6. *Жонголович И. Д.* Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним.— Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1952, вып. 3, 126 с.
7. *Идельсон Н. И.* Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике.— Л. — М., 1936, 423 с.
8. *Кокурин Ю. Л., Лобанов В. Ф.* О возможности изучения физической либрации Луны методом оптической локации.— Космич. исслед., 1968, т. 6, № 2, с. 247—251.
9. *Кох К. Р.* Использование модели потенциала простого слоя в космической геодезии.— В кн.: Использование искусственных спутников для геодезии.— М.: Мир, 1975, с. 156—162.
10. *Куликов К. А., Гуревич В. Б.* Основы лунной астрометрии.— М.: Наука, 1972, 392 с.
11. *Лундквист С. А., Джакалия Дж. О.* Представление геопотенциала с помощью выборочных функций.— В кн.: Использование искусственных спутников для геодезии.— М.: Мир, 1975, с. 184—192.
12. *Огородова Л. В., Юзефович А. П., Бобков Г. Н.* Представление аномального гравитационного поля Луны полем точечных масс.— В кн.: Современные проблемы позиционной астрометрии.— М.: Изд. МГУ, 1975, с. 312—317.
13. *Сагитов М. У.* Постоянная тяготения и масса Земли.— М.: Наука, 1969, 188 с.
14. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974, 224 с.

15. *Хабибуллин Ш. Т.* Нелинейная теория физической либрации Луны.— Тр. Казанской городской астрон. общ., 1966, № 34, с. 3—70.
16. *Чуйкова Н. А.* Геометрическая фигура Луны, представленная в виде разложения по сферическим и выборочным функциям.— Астрон. журн., 1975, т. 52, № 6, с. 1279—1292.
17. *Юзефович А. П.* О точности представления гравитационного потенциала Луны.— Астрон. вестн., 1974, т. 8, № 2, с. 77—81.
18. *Эйлер Л.* Новая теория движения Луны.: Пер. с латинск.— Л.: Изд-во АН СССР, 1934, 208 с.
19. *Ananda M.* Lunar gravity: A mass point model.— Journ. Geophys. Res. 1977, v. 82, № 20, p. 3049—3064.
20. *Brown E. W.* Tables of the motion of the moon.— New Haven, 1919. Sect. 1—6.
21. *Eckhardt D. H., Dieter K. D.* A non-linear analysis of the moon's physical libration in longitude.— Moon, 1971, v. 2, № 3, p. 309—319.
22. *Eckhardt D. H.* Physical librations due to the third and fourth degree harmonics of the lunar gravity potential.— Moon, 1973, v. 6, № 1, p. 127—134.
23. *Ferrari A. J.* Lunar gravity analysis from long term effects.— Sci., 1975, v. 188, № 4195, p. 1297—1300.
24. *Forward R. L.* Gravity gradient mapping from the lunar polar orbiter — a simulation study.— Moon, 1976, v. 16, № 1, p. 3—26.
25. *Giacaglia G. E., Lundquist C. A.* Sampling functions for geophysics.— Smith. Astrophys. obs., Spec. rep. 1972, № 344, 94 pp.
26. *Kaula W. M., Baxa P. A.* The physical librations of the Moon, including higher harmonic effects.— Moon, 1973, v. 8, № 3, p. 287—307.
27. *Kholshevnikov C.* On convergence of an asymmetrical body potential expansion in spherical harmonics.— Celest. Mech., 1977, v. 16, p. 45—60.
28. *Koch K. R.* Surface density values for the earth from satellite and gravity observations.— Geophys. Journal RAS, 1970, v. 21, № 1, p. 1—12.
29. *Koch K. R., Witte B. N.* Earth's gravity field represented by a simply-layer potential from doppler tracking of satellites.— Journ. Geophys. Res. 1971, v. 76, № 35, p. 8471—8479.
30. *Koch K. R., Morrison F.* A simple layer model of the geopotential from a combination of satellite and gravity data.— Journ. Geophys. Res. 1970, v. 75, № 8, p. 1483—1492.
31. *Levie Jr.* Simple mass distribution for the lunar potential.— Moon, 1971, v. 3, № 3, p. 315—325.
32. *Liu A. S., Laing P. A.* Lunar gravity analysis from long-term effects.— Sci., 1971, v. 173, № 4001, p. 1017—1020.
33. *Prey A.* Darstellung der Höhen und Tiefenverhältnisse der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16 Ordnung.— Abhandl. d. Königl. Gesellschaft d. Wissen. Göttingen, math.-phys. klasse. Neue Folge, 1922, Bd. 11, S. 1—29.
34. *Schmidt F.* Darstellung des geoidpotentiale mit Hilfe von

- «Sampling Functions».— Veroff. Bayer. Kommiss. Inst. Erdmess. Bayer. Akad. Wiss. Astron. Geod. Arb., 1973, № 3.
35. *Sjogren W., Muller P., Gottlieb P., Wong G., Downs W., Prisltn R.* Lunar surface mass distribution from dynamical point — mass solution — Moon, 1971, v. 2, № 3, p. 338—353.
 36. *Sjogren W., Wimberly R. N., Wollenhaupt W. R.* Lunar gravity via the Apollo 15 and 16 subsatellites.— Moon, 1974, v. 9, № 1/2, p. 115—128.
 37. *Williams J. G., Slade M. A., Eckhardt D. H., Kaula W. M.* Lunar physical librations and laser ranging.— Moon, 1973, v. 8, № 4, p. 469—483.
 38. *Wong L., Buechler G., Downs W., Sjogren W., Muller P., Gottlieb P.* A surface-layer representation of the lunar gravitational field.— Journ. Geophys. Res. 1971, v. 76, № 26, p. 6220—6226.

К главе 2

1. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике/Под ред. Г. Н. Дубошина.— М.: Наука, 1971, 584 с.
2. *Аким Э. Л.* Определение поля тяготения Луны по движению искусственного спутника Луны «Луна-10».— ДАН СССР, 1966, т. 170, № 4, с. 799—802.
3. *Аким Э. Л.* Определение поля тяготения Луны по движению искусственного спутника Луны «Луна-10».— Космич. исслед., 1966, т. 4, № 6, с. 823—826.
4. *Аким Э. Л., Власова З. П.* Модель гравитационного поля Луны по наблюдениям за движением ее искусственных спутников «Луна-10, 12, 14, 15 и 22».— ДАН СССР, 1977, т. 235, № 1, с. 38—41.
5. *Аксенов Е. П.* Теория движения искусственных спутников Земли.— М.: Наука, 1977, 360 с.
6. *Баевский А. В.* Космические автоматические аппараты США для изучения Луны и окололунного пространства (1958—1968). Исследования космического пространства 1969.— М.: Изд. ВИНТИ, 1971, 194 с.
7. *Бровар В. В., Ганифаева Н. Г.* Об одном методе определения потенциала Луны.— Астрон. журн., 1974, т. 51, № 5, с. 1072—1078.
8. *Бровар В. В., Ганифаева Н. Г.* О смешанной краевой задаче для определения потенциала Луны.— В кн.: Современные проблемы позиционной астрометрии.— М.: Изд. МГУ, 1975, с. 264—265.
9. *Бурша М.* Основы космической геодезии. Ч. II. Динамическая космическая геодезия: Пер. с чеш.— М.: Недра, 1975, 280 с.
10. *Веселов К. Е., Сагитов М. У.* Гравиметрическая разведка.— М.: Недра, 1959, 512 с.
11. *Евдокимова Л. С.* Долгопериодические возмущения орбит искусственных спутников Луны.— Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1968, т. 11, № 8, с. 523—529.

12. *Исавнина И. В.* Фигура и гравитационное поле Луны.— В кн.: Исследование космического пространства. Т. 5. Луна, ч. 1.— М.: Изд. ВИНТИ, 1973, с. 86—120.
13. *Изотов А. А., Зубинский В. И., Макаренко М. Л., Микуша А. М.* Основы спутниковой геодезии.— М.: Недра, 1974, 317 с.
14. *Каула В. М.* Космическая геодезия: Пер. с англ.— М.: Недра, 1966, 162 с.
15. *Каула У.* Спутниковая геодезия: Пер. с англ.— М.: Мир, 1970, 172 с.
16. *Кокурин Ю. Л., Курбасов В. В., Лобанов В. Ф., Можжорин В. М., Сухановский А. Н., Черных Н. С.* О возможности измерения параметров фигуры и орбиты Луны методом оптической локации.— Космич. исслед., 1966, т. 4, № 3, с. 414—426.
17. *Коржев В. Н.* К вопросу о перспективах использования динамических методов для гравиметрической связи Земля—Луна.— Сообщ. ГАИШ, 1979, № 216.
18. *Меликян А. Б.* Об одном способе быстрого определения вариации ускорения силы тяжести.— ДАН СССР, 1938, т. 21, № 8, с. 375—376.
19. *Михайлов А. А.* Исследования Луны.— Земля и Вселенная, 1968, № 2, с. 2—13.
20. *Огородова Л. В., Шимбирев Б. М., Юзефович А. П.* Гравиметрия.— М.: Недра, 1978, 325 с.
21. *Пеллинен Л. П.* Совместное уравнивание гравиметрических и спутниковых данных при определении гравитационного поля Земли.— Бюл. станции оптич. набл. ИСЗ, 1969, № 55, с. 56—68.
22. *Пеллинен Л. П.* Исследование гравитационных полей и формы Земли, других планет и Луны по наблюдениям космических аппаратов.— М.: Изд. ВИНТИ, 1972, 180 с.
23. *Сагитов М. У.* Гравитационное поле Луны и использование его для решения некоторых астрометрических задач.— В кн.: Современные проблемы позиционной астрометрии.— М.: Изд. МГУ 1975, с. 66—78.
24. *Словохотова Н. П.* Космические аппараты для исследования Луны и окололунного пространства.— В кн.: Исследование космического пространства. т. 5. Луна. ч. 1.— М.: Изд. ВИНТИ, 1973, с. 1—35.
25. *Форвард Р. Л.* Геодезия с гравиметрическими градиометрами.— В кн.: Использование искусственных спутников для геодезии: Пер. с англ.— 1975, М.: Мир, с. 339—345.
26. *Чуйкова Н. А.* Методы определения фигуры и гравитационного поля Луны.— Вестн. МГУ, сер. физ., астр., 1969, № 5, с. 81—88.
27. *Эльясберг П. Е.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли.— М.: Наука, 1965, 540 с.
28. *Ananda M.* Farside lunar gravity from a mass point model.— Proc. Sixth lun. sci. conf. Geochim. et Cosmochim. Acta, 1975, v. 3, suppl. 6, p. 2785—2796.

29. *Ananda M.* Mean rates of the orbital elements of a satellite perturbed by a lens-shaped concentration.— *Celest. Mech.*, 1975, v. 12, № 4, p. 495—511.
30. *Ananda M.* Lunar gravity: a mass point model.— *Journ. Geophys. Res.* 1977, v. 82, № 20, p. 3049—3064.
31. *Ananda M., Ferrari A.* Lunar gravity: A long-term keplerian rate method.— *Journ. Geophys. Res.* 1977, v. 82, № 20, p. 3085—3097.
32. *Bell C. C., Forward R. L., Williams H. P.* Simulated terrain mapping with the rotating gravity gradientometer.— In: *Advances in Dynamic Gravimetry.*— *Instrum. Soc. Am. Pittsburg, Pa.*, 1970, p. 115—128.
33. *Berman D.* Nonideal Behavior of rotating gravitational mass sensors.— *AIAA Journ.* 1967, v. 5, № 5, p. 1000—1008.
34. *Blackshear W. T., Capcynski I. P.* An improved value of the lunar moment of inertia.— *Journ. Geophys. Res.* 1977, v. 82, № 11, p. 1699—1701.
35. *Blackshear W. T., Compton H. R., Schiess I. R.* Preliminary results on the lunar gravitational field from analysis of long-period and secular effects on Lunar Orbiter-I — Presented at NASA seminar on guidance theory and trajectory analysis.— Cambridge, Massachusetts, May 31 — June 1, 1967.
36. *Bowin C., Wing C. G., Aldrich T. C.* Test of the MIT vibrating string gravimeter, 1967 — *Journ. Geophys. Res.*, 1969, v. 74, № 12, p. 3278—3880.
37. *Brovar V. V.* Determining the gravity potential by means of a force component in a constant direction.— *Studia Geop. et Geod.*, 1970, v. 14, N 2, p. 242—250.
38. *Bryant W. C., Wells W. T., Williamson R. G.* An analysis of the lunar potential utilizing Explorer 49.— Paper presented at Mechanics and Control of flight. Conf. Amer. Inst. of Aeronaut. and Astronaut.— Anaheim, Calif., Aug. 5—9, 1974.
39. *Bryson A. E.* Applied Optimal control. Blaisdell. Weltham. Mass., 1969.
40. *Chobotov V.* The radially vibrating rotating gravitational gradient sensor.— *Journ. Spacecraft and Rockets*, 1968, v. 5, № 4, p. 434—439.
41. *De Bra D. B., Harrison J. C., Muller P. M.* A proposed lunar orbiting gravity gradientometer experiment — *Moon*, 1972, v. 4, № 3/4, p. 103—112.
42. *Ferrari A. J.* An empirically derived lunar gravity field.— *Moon*, 1972, v. 5, № 3/4, p. 390—410.
43. *Ferrari A. J.* Lunar gravity derived from long-period satellite motion — a proposed method—*Celest. Mech.*, 1973, v. 7, № 1, p. 46—76.
44. *Ferrari A. J.* Lunar gravity: The first forside map.— *Sci.*, 1975, v. 188, № 4195, p. 1297—1300.
45. *Ferrari A. J.* Lunar gravity: harmonic analysis.— *Journ. Geophys. Res.*, 1977, v. 82, № 20, p. 3065—3084.
46. *Ferrari A. J., Ananda M. P.* Lunar gravity: A long-term Keplerian rate method.— *Journ. Geophys. Res.*, 1977, v. 82, № 20, p. 3086—3097.

47. *Forward R. L., Miller L. R.* Generational and detection of dynamic gravitational gradient field.— *Journ. Appl. Phys.* 1967, v. 38, p. 512.
48. *Forward R. L.* Artificial satellite gravity gradiometer techniques for geodesy.— 1st International symposium on the use of artificial satellite for geodesy and geophysics.— Athens, Greece, May, 1973.
49. *Forward R. L.* Review of artificial satellite gravity gradiometer techniques for geodesy.— In: *The use of artificial satellites for geodesy and geodynamics.*— Athens, Greece, 1974, p. 157—192.
50. *Forward R. L.* Gravity gradient mapping from the lunar polar orbiter — a simulation study.— *Moon*, 1976, v. 16, № 1, p. 3—25.
51. *Gapcynski I. P., Blackshear W. T., Compton H. R.* Lunar gravitational field as determined from Lunar Orbiter tracking data. — *AIAA Journ.*, 1969, v. 7, № 10, p. 1905—1908.
52. *Gapcynski I. P., Blackshear W. T., Tolson R. H., Compton H. R.* A determination of the lunar moment of inertia.— *Geophys. Res. Letters*, 1972, v. 2, № 9, p. 353—356.
53. *Gottlieb P.* Estimation of local lunar gravity features.— *Radio Sci.*, 1970, v. 5, № 2, p. 301—312.
54. *Gottlieb P., Muller P. M., Sjogren W. L., Wollenhaupt W. R.* Lunar gravity over large craters from Apollo 12 tracking data.— *Sci.*, 1970, v. 168, № 3930, p. 477—479.
55. *Gilbert R. L.* A dynamic gravimeter of nevel design.— *Proc. Phys. soc.*, ser. B, 1949, v. 62, № 355, p. 445—454.
56. *Henderson G. C., Iverson R. M.* Testing gravimeters for lunar surface measurements.— *IEEE Trans. Geosci. Electron.*, 1960, v. 6, № 3, p. 132—138.
57. *Kane M. F.* Doppler gravity a new method.— *Journ. Geophys. Res.* 1969, v. 74, № 27, p. 6579—6582.
58. *Kaula W. M.* Plans for analysis of lunar satellite orbits.— In: *Trajectories of artificial celestial bodies.*— Berlin, 1966, p. 247—260.
59. *Kaula W. M.* Test and combination of satellite determination of the gravity field with gravimetry.— *Journ. Geophys. Res.*, 1966, v. 71, № 22, p. 5303—5314.
60. *Kaula W. M.* Recent developments in determination of the lunar gravitational field from satellite orbit.— *Philos. Trans. Roy. Soc. London, A*, 1967, v. 262, № 1124, p. 148—155.
61. *Kaula W. M.* Analysis of satellite orbit perturbations to determine the lunar gravitational field.— In: *Measure of the Moon.*— Dordrecht, Holland, 1967, p. 344—355.
62. *Kaula W. M.* The gravitational field of the Moon.— *Sci.*, 1969, v. 166, № 3913, p. 1581—1588.
63. *Kaula W. M.* The gravity and shape of the Moon — *EOS Trans. Amer. Geophys. Un.*, 1975, v. 56, № 6, p. 309—316.
64. *Kohnlein W.* On the moon's gravity field.— *Veroffentlichungen der Astron. Inst. Bonn*, 1973, № 86, p. 197.
65. *Liu A. S., Laing P. A.* Lunar gravity analysis from long-term effects.— *Sci.*, 1971, v. 173, № 4001, p. 1017—1020.
66. *Lorell I.* Lunar gravity] from Lunar Orbiter tracking data.—

- In: *Measure of the Moon*.— Dordrecht, Holland, 1967, p. 356—365.
67. *Lorell I., Sjogren W. L.* Lunar gravity: Preliminary estimates from Lunar Orbiter.— *Sci.*, 1968, v. 159, № 3815, p. 625—627.
 68. *Lorell I.* Lunar Orbiter gravity analysis.— *Moon*, 1970, v. 1, № 2, p. 190—231.
 69. *Metzger E. H., Allen Don. E.* Gravity gradiometer using four miniature electrostatic accelerometer (MESA). — Presented at Amer. Geophys. Un. Spring annual meeting.— Washington. D. C. Report № 9500—92044.— Buffalo—New York: Bell Aerospace Co., Apr. 1972.
 70. *Michael W. H., Tolson R. H., Gapcynski I. P.* Lunar Orbiter: Tracking data indicate properites of Moon's gravitational field.— *Sci.*, 1966, v. 153, № 3740, p. 1102—1103.
 71. *Michael W. H., Blackshear W. T., Gapcynski I. P.* Results on the mass and gravitational field of the Moon as determined from dynamics of lunar satellite.— In: *Dynamics of satellites*.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1969, p. 42-56.
 72. *Michael W. H., Blackshear W. T.* Recent results on the mass, gravitational field and moments of inertia of the Moon.— *Moon*, 1972, v. 3, № 3/4, p. 388—402.
 73. *Moritz H.* On the determination of the potential from gravity disturbances along a fixed direction.— *Tellus*, 1969, v. 21, № 4, p. 568—571.
 74. *Moritz H.* Combination of satellite harmonics and gravity.— *Depart. geod. sci., Ohio state Univ. Columbus*, 1970, Report № 146, 25 p.
 75. *Moritz H.* Combination of aerial gravimetry and gradiometry.— Там же, 1975, Report № 223.
 76. *Moritz H.* Lecture notes on kinematical geodesy.— *Bollettino di geodesia e scienze affini*, 1975, v. 34, № 2, p. 145—160.
 77. *Muller P. M., Sjogren W. L.* Mascons: Lunar mass concentrations.— *Sci.*, 1968, v. 161, № 3842, p. 680—684.
 78. *Muller P. M., Sjogren W. L.* Consistency of Lunar Orbiter residuals with trajectory and local gravity effects.— *Journ. Spacecraft and Rockets*, 1969, v. 6, № 7, p. 849—850.
 79. *Muller P. M., Sjogren W. L.* Lunar gravimetry.— *Space Research*, 1970, v. 10, p. 975—983.
 80. *Muller P. M., Sjogren W. L., Wollenhaupt W. R.* Lunar gravity Apollo 15 doppler radio tracking.— *Moon*, 1974, v. 10, № 1, p. 195—205.
 81. *Nance R. L.* Gravity: First measurement on the Lunar surface.— *Sci.*, 1969, v. 166, № 3903, p. 384—385.
 82. *Nance R. L.* Gravity Measured at the Apollo 14 Landing site.— *Sci.*, 1971, v. 174, № 4013, p. 1022—1023.
 83. *Oestervinter C.* The motion of a lunar satellite.— *Celest. Mech.*, 1970, v. 1, № 3/4, p. 368—436.
 84. *Roy A. E.* The theory of the motion of an artificial lunar satellite.— *Icarus*, 1968, v. 9, № 1, p. 82—132, p. 133—161.
 85. *Savet P. H.* Gravity field exploration by a new gradient technique.— *Journ. Spacecraft and Rockets*, 1969, v. 6, № 6, p. 710—716.

86. *Sjogren W. L.* Lunar gravity estimate: Independent confirmation.— Journ. Geophys. Res., 1971, v. 76, № 29, p. 7021—7025.
87. *Sjogren W. L., Gottlieb P., Muller P. M., Wollenhaupt W. R.* Lunar gravity via Apollo 14 doppler radio tracking.— Sci., 1972, v. 175, № 4018, p. 165—168.
88. *Sjogren W. L., Muller P. M., Wollenhaupt W. R.* Apollo 15 gravity analysis from the S-band transponder experiment.— Moon, 1972, v. 4, № 3/4, p. 411—418.
89. *Sjogren W. L.* Evolution of lunar gravity measurements.— Proc. Am. Philosoph. Soc., 1972, v. 116, № 5, p. 357—361.
90. *Sjogren W. L., Wollenhaupt W. R.* Gravity: Mare Humorum.— Moon, 1973, v. 8, № 1/2, p. 25—32.
91. *Sjogren W. L., Wimberly R. N., Wollenhaupt W. R.* Lunar gravity via the Apollo 15 and 16 subsatellites.— Moon, 1974, v. 9, № 1/2, p. 115—128.
92. *Sjogren W. L., Wimberly R. N., Wollenhaupt W. R.* Lunar gravity: Apollo 16.— Moon, 1974, v. 11, № 1/2, p. 35—40.
93. *Sjogren W. L., Wimberly R. N., Wollenhaupt W. R.* Lunar gravity: Apollo 17.— Moon, 1974, v. 11, № 1/2, p. 41—52.
94. *Sjogren W. L., Anderson J. D., Phillips R. J., Trask D. W.* Gravity fields — IEEE Trans. Geosci. Electron., 1976, v. GE-14, № 3, p. 172—183.
95. *Tang C. C. H., Greer C. L.* Determination of orbits of planetary artificial satellites and planetary gravitational fields.— AIAA Journ., 1969, v. 7, № 8, p. 1469—1476.
96. *Talwani M., Kahle H. G.* Apollo 17: Traverse gravimeter experiment (Prelim. Res.).— Geol. Jahrb., 1976, E, № 7, p. 85—91.
97. *Talwani M., Thomson G., Dent B., Kahle H. G., Buch S.* Traverse gravimeter experiment.— NASA Spec. Publ., SP-330, 1973, v. 13, p. 1—13.
98. *Tolson R. H., Gapcynski J. P.* An analysis of the lunar gravitational field as obtained from Lunar Orbiter tracking data.— In: Moon and Planets, II.— Amsterdam, 1968, p. 178—186.
99. *Tolson R. H., Compton H. R.* Accuracy of determining the state of a lunar satellite and lunar gravitational field.— Journ. Spacecraft and Rockets, 1967, v. 4, № 1, p. 26—33.
100. *Wong L., Buechler G., Downs W., Sjogren W., Muller P., Gottlieb P.* A surface-layer representation of the lunar gravitational field.— Journ. Geophys. Res., 1971, v. 76, № 26, p. 6220—6236.

К главе 3

1. *Аким Э. Л., Власова Э. П.* Модель гравитационного поля Луны по наблюдениям за движением ее искусственных спутников «Луна-10, 12, 14, 19 и 22». — ДАН СССР, 1977, т. 235, № 1, с. 38—41.
2. *Бузук В. В.* О связи между коэффициентами разложения по сферическим функциям основных характеристик гравитационного поля Земли.— Тр. НИИГАиК, 1964, т. 18, № 1, с. 3—7.
3. *Бузук В. В.* Параметры, характеризующие уровенный эллипсоид Луны и высот селеноида.— Геодезия и картография, 1972, № 3, с. 13—19.

4. Бузук В. В. Гравитационное поле и фигура Луны по данным ИСЛ с учетом гармонических коэффициентов до 7-го порядка.— В кн.: Современные проблемы позиционной астрометрии.— М.: Изд. МГУ, 1975, с. 255—300.
5. Бурша М. Основы космической геодезии. Ч. II. Динамическая космическая геодезия: Пер. с чеш.— М.: Недра, 1975, 280 с.
6. Бурша М. Вывод параметров селеноцентрической системы относимости и определение уклонений отвеса на поверхности Луны. Прага: 1971, 26 с.
7. Горшков Г. П. Об изогравитационных поверхностях.— Тр. Сейсмологич. ин-та АН СССР, 1935, № 63, с. 16—19.
8. Грушинский Н. П., Сагитов М. У. Некоторые соображения о поле силы тяжести Луны.— Астрон. журн., 1962, т. 35, № 1, 151—157.
9. Грушинский Н. П., Сагитов М. У., Чан Ван Нян. Нормальный геоид.— Сообщ. ГАИШ, М.: Изд. МГУ, 1978, № 202—203, с. 49—62.
10. Дубошин Г. Н. Теория притяжения.— М.: Физматгиз, 1964, 288 с.
11. Жонголович И. Д. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним.— Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1952, вып. 3, с. 126.
12. Пицетти П. Основы механической теории фигуры планет: Пер. с итал.— М.— Л.: ГТТИ, 1933, 170 с.
13. Михайлов А. А. Сила тяжести и фигура Луны.— Астрон. журн., 1965, т. 42, № 5, с. 1062—1066.
14. Сагитов М. У., Таджидинов Х. Г. Изогравитационные поверхности Луны на различных высотах.— Сообщ. ГАИШ, М.: Изд. МГУ, 1979, № 216.
15. Чуйкова Н. А. Гравитационное поле и фигура Луны.— Астрон. журн., 1968, т. 45, № 6, с. 1293—1302.
16. Чуйкова Н. А. О распределении потенциала и силы тяжести на физической поверхности Луны.— Астрон. журн., 1969, т. 46, № 5, с. 1119—1123.
17. Burša M. Potential of the geoidal surface, the scale factor for lengths and earth's figure parameters from satellite observations.— Studia geoph. et geod. 1969, v. 13, № 4, p. 337—358.
18. Burša M. Best-fitting tri-axial Earth ellipsoid parameters derived from satellite observations.— Studia geoph. et geod., 1970, v. 14, № 1, p. 1—9.
19. Burša M. Scale factor for lengths of the geopotential model.— Studia geoph. et geod., 1974, v. 18, № 3, p. 298—303.
20. Burša M. The derivatives of the lunar disturbing potential harmonic's with respect to Euler's angles.— Studia geoph. et geod., 1974 v. 18, № 2, p. 103.
21. Burša M. Expansion of a function given over an equipotential surface into spherical harmonics.— Studia geoph. et geod., 1977, v. 21, № 3, p. 217—226.
22. Caputo M. The gravity field of the Earth.— New York — London: Acad. Press., 1967, 202 p.
23. Ferrari A. A lunar gravity: A harmonic analysis.— Journ. Geophys. Res., 1977, v. 89, № 20, p. 3065—3084.

24. *Gaposchkin E. M., Lambeck K.* Smithsonian Standard Earth (II), 1969.— *Smith. Astrophys. obs., Spec., rep.*, 1970, № 315, 95 p.
25. *Gaposchkin E. M., Williamson M. R., Kozai Y., Mendes G.* Determination of the Geopotential. 1973 *Smithson. Standard Earth III.*— *Smith. Astrophys. obs., Spec., rep.*, 1973, № 353, p. 229—307.

К главе 4

1. Атлас обратной стороны Луны./Под ред. Н. П. Барабашева, А. А. Михайлова, Ю. Н. Липского.— М.: Наука, 1960, 147 с.
2. *Аким Э. Л., Власова Э. П.* Модель гравитационного поля Луны по наблюдениям за движением ее искусственных спутников «Луна-10, 12, 14, 19 и 22».— *ДАН СССР*, 1977, т. 235, № 1, с. 38—41.
3. *Болдуин Р.* Фигура Луны и новая гипсометрическая карта.— В кн.: *Фигура Луны и проблемы лунной топографии.*— М.: Наука, 1968, с. 99—143.
4. *Большаков В. Д., Краснопеццев Б. В., Краснопецева Б. В., Константинова Н. И., Лаврова Н. П., Федорчук Г. Д.* Фотографические эксперименты на автоматических межпланетных станциях «Зонд 6, 7, 8» — В кн.: *Атлас обратной стороны Луны*, ч. III.— М.: Наука, 1975, с. 20—51.
5. *Бондаренко Л. Н., Гурштейн А. А., Липский Ю. Н., Поспергелис М. М., Псковский Ю. П., Родионова Ж. Ф., Шевченко В. В.* Краткий глобальный обзор лунной поверхности.— В кн.: *Атлас обратной стороны Луны*, ч. II.— М.: Наука, 1965, с. 215—220.
6. *Бузук В. В.* Об основных особенностях гравитационного поля и фигуры Луны по данным ИСЛ.— *Тр. НИИГАиК*, 1973, т. 30, с. 7—12.
7. *Волков М. С., Шобер Т. И.* Определение формы поверхности Луны по значениям коэффициентов разложения гравитационного потенциала Луны.— *Бюлл. Ин-та теор. астроном. АН СССР*, 1969, т. 11, № 9 (132), с. 565—577.
8. *Гаврилов И. В.* Фигура и размеры Земли по астрономическим наблюдениям.— Киев: Наукова думка, 1969, 149 с.
9. *Гаврилов И. В., Кисляк В. С., Дума А. С.* Сводная система селенодезических координат 4900 точек лунной поверхности (видимая сторона Луны).— Киев: Наукова думка, 1977, 172 с.
10. *Гудас К.* Гипсометрическая карта Луны.— В кн.: *Фигура Луны и проблемы лунной топографии.*— М.: Наука, 1968, с. 28—234.
11. *Гудас К.* Разложение рельефа Луны по сферическим функциям.— В кн.: *Фигура Луны и проблемы лунной топографии.*— М.: Наука, 1968, с. 184—211.
12. *Гудас К.* О гравитационном поле Луны.— В кн.: *Физика Луны и проблемы лунной топографии.*— М.: Наука, 1968, с. 212—217.
13. *Гудас К.* Геометрические и динамические свойства Луны.— В кн.: *Физика и астрономия Луны.*— М.: Наука, 1973, с. 110—165.

14. *Гурштейн А. А., Конопихин А. А.* Об оценке точности современных данных по абсолютным и относительным высотам деталей лунной поверхности.— *Астрон. журн.*, 1971, т. 48, № 5, с. 1051—1055.
15. *Зиман Я. Л., Красиков В. А., Родионов Б. Н.* Селеноцентрическая система координат на восточный сектор обратной стороны Луны.— В кн.: *Атлас обратной стороны Луны*, ч. III, М.: Наука, 1973, с. 52—58.
16. *Идельсон Н. И.* Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике.— Л.— М., 1936, 423 с.
17. *Копал З.* Топография Луны.— В кн.: *Фигура Луны и проблемы лунной топографии*.— М.: Наука, 1968, с. 13—66.
18. *Кропоткин П. Н.* Гравиметрия и рельеф Луны (в сопоставлении с Землей).— *Геотектоника*, 1971, № 1, с. 3—12.
19. *Кропоткин П. Н.* Изостазия и рельеф Земли, Луны и Марса.— *ДАН СССР*, 1972, т. 206, № 6, с. 1420—1422.
20. *Липский Ю. Н., Никонов В. А., Скобелева Т. П.* Единая система селенодезических координат из девяти каталогов на видимом полушарии Луны.— М.: Наука, 1973, 384 с.
21. *Липский Ю. Н., Родионова Ж. Ф.* Антиподы на Луне.— В кн.: *Космохимия Луны и планет*.— М.: Наука, 1975, с. 602—606.
22. *Михайлов А. А.* Обратная сторона Луны.— В кн.: *Новое о Луне*.— М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1963, с. 5—8.
23. *Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли.— *Тр. ЦНИИГАиК*, 1960, вып. 131, 246 с.
24. *Нейман Ю. М.* Об условиях изотропности при вероятностном изучении гравитационного поля.— *Изв. вузов. Сер. геод. и аэрофот.*, 1974, № 1, с. 85—91.
25. *Нейман Ю. М.* Точностные расчеты при некоторых интегральных преобразованиях физической геодезии.— *Изв. вузов. Сер. геод. и аэрофот.* 1974, № 4, с. 49—58.
26. *Нейман Ю. М.* К описанию гравитационного поля Земли рядами шаровых функций.— *Геодезия и картография*, 1975, № 9, с. 25—27.
27. *Пеллинен Л. П.* Статистический анализ силы тяжести.— *Изв. вузов. Сер. геод. и аэрофот.*, 1970, № 5, с. 43—50.
28. *Родионов Б. Н.* и др. (17 авторов). Новые данные о фигуре и рельефе Луны по результатам обработки фотографий, доставленных «Зондом-6».— *Космич. исслед.*, 1971, т. 9, № 3, с. 450—458.
29. *Родионов Б. Н., Нефедьев А. А., Шпекин М. И., Валеев С. Г., Киселев В. В.* Изучение рельефа обратной стороны Луны по фотографиям КА «Зонд-8».— *Космич. исслед.*, 1976, т. 14, № 4, с. 624—629.
30. *Родионова Ж. Ф.* Гипсометрические особенности видимого полушария Луны.— *Астрон. журн.*, 1972, т. 49, № 3, с. 621—623.
31. *Рапп Р.* Оценка точности получаемых коэффициентов геопотенциала.— В кн.: *Использование искусственных спутников для геодезии: Пер. с англ.*— М.: Мир, 1975, с. 219—232.

32. Трифонов В. Г. Геология лунных морских впадин.— В кн.: Вулканизм и тектоника Луны.— Тр. ГИН АН СССР, 1974, вып. 262, с. 174—243.
33. Фролов А. И. Гравитационное поле, рельеф и некоторые вопросы внутреннего строения Луны.— Астрон. вестн., 1971, т. 5, № 4, с. 201—216.
34. Холщевников К. В. О величине коэффициентов разложения потенциала.— Вестн. ЛГУ, 1965, № 13, с. 155—158.
35. Холщевников К. В. О величине коэффициентов при тессеральных гармониках.— Вестн. ЛГУ, 1968, № 1, с. 143—153.
36. Чуйкова Н. А. Геометрическая фигура Луны, представленная в виде разложения по сферическим и выборочным функциям.— Астрон. журн., 1975, т. 52, № 6, с. 1279—1292.
37. Чуйкова Н. А. О представительности разложения геометрической фигуры Луны по сферическим и выборочным функциям.— Астрон. журн., 1978, т. 55, № 3, с. 617—627.
38. Ananda M. Farside lunar gravity from a mass point model.— Proc. sixth lun. sci. conf.— Geochim. et Cosmochim. Acta, 1975, v. 3, suppl. 6, pp. 2785—2796.
39. Balmino G., Lambeck K., Kaula W. A spherical harmonic analysis of the earth topography.— Journ. Geophys. Res., 1973, v. 78, № 2, p. 478—481.
40. Bills B., Ferrari A. A lunar density model consistent with topographic, gravitation, libration and seismic data.— Journ. Geophys. Res., 1976, v. 82, № 8, p. 1306—1314.
41. Bills B., Ferrari A. A harmonic analysis of lunar topography.— Icarus, 1977, v. 31, № 2, p. 244—259.
42. Bowin C. Negative gravity anomalies on the Moon.— Proc. sixth lun. sci. conf.— Geochim. et Cosmochim. Acta, 1975, v. 3, suppl. 6, p. 2797—2804.
43. Eckhardt D. H. On the harmonic analysis of absolute lunar elevations.— Icarus, 1966, v. 5, № 3, p. 313—316.
44. Ferrari A. A comparison near and farside lunar gravity.— Abstr. Sixth lun. sci. conf. Houston, 1975, p. 260—262.
45. Ferrari A. Lunar gravity: The first farside map.— Sci., 1975, v. 188, № 4195, p. 1297—1300.
46. Ferrari A. Lunar gravity: A harmonic analysis.— Journ. Geophys. Res., 1977, v. 82, № 20, p. 3065—3084.
47. Franz J. Der Mond.— 2 Auflage.— Leipzig, 1912, 75 s.
48. Friedlander S. Limits to tidal control on lunar asymmetry.— Abstr. 8th lun. sci. conf. p. I.— Houston, 1977, p. 322—324.
49. Garnitz V. Correlation between region of enhanced Mare Flooding on the lunar farside and Apollo orbital results.— Moon, 1974, v. 9, № 3/4, p. 323—325.
50. Goudas C. L., Kopal L., Kopal Z. Shape of the Moon from the orbiter determination of its gravitational field.— Nature, 1966, v. 212, № 5059, p. 271.
51. Goudas C. L. The Figure and gravity of the Moon.— In: Advances Astron. and Astrophys.— New York; London, 1966, p. 27—151.
52. Gurshtein A. A., Slovokhotova N. P. Selection of details for the realisation of fundamental control system on the lunar surface.— Moon, 1971, v. 3, № 3, p. 266—288.

53. *Habibullin Sh. T., Chikanov Yu. A., Kisliuk V. S.* Relative deformation of selenodetic nets of coordinates.— *Moon*, 1972, v. 3, № 4, p. 371—385.
54. *Heiskanen W., Moritz H.* *Physical Geodesy*.— San Francisco: W. H. Freeman, 1967, 364 p.
55. *Helmering R. J.* Selenodic control derived from Apollo metric photography.— *Moon*, 1973, v. 8, № 4, p. 450—460.
56. *Kaula W. M.* Statistical and harmonic analysis of gravity.— *Journ. Geophys. Res.* 1959, v. 64, № 12, p. 2401—2422.
57. *Kaula W. M.* Theory of statistical analysis of data distributed over a sphere.— *Reviews of Geophysics*, 1967, v. 5, № 1, p. 83—107.
58. *Kaula W. M., Schubert G., Lingenfelter R. E., Sjogren W. L., Wollenhaupt W. R.* Lunar topography from Apollo 15 and 16 laser altimetry.— *Proc. 4 lun. sci. conf.*— *Geochim. Cosmochim. Acta*, 1973, v. 3, p. 2811—2819.
59. *Kaula W. M., Schubert G., Lingenfelter R. E., Sjogren W. L., Wollenhaupt W. R.* Apollo laser altimetry and inferences as to lunar structure.— *Proc. 5 lun. sci. conf.*— *Geochim. Cosmochim. Acta*, 1974, v. 4, p. 3049—3058.
60. *Kaula W.* The gravitational field of the Moon.— *Sci.*, 1969, v. 166, № 3913, p. 1581—1588.
61. *Krarup T.* A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy.— *Danish geodetic inst. Copenhagen*, 1969, № 44, 80 p.
62. *Laurentzen S.* The probabilistic background of some statistical methods in physical geodesy.— *Danish geodetic inst. Copenhagen*, 1973, № 48, 96 p.
63. *Light D. L.* Photo geodesy from Apollo.— *Photogrammetric Engineering*, 1972, v. 38, № 6, p. 574—587.
64. *Meissl P.* A study of covariance functions related to the earth's distribution potential.— *Depart. geod. sci., Ohio state univ.*— *Columbus*, 1970, № 151, 88 p.
65. *Moritz H.* Least squares estimation in physical geodesy.— *Publ. Deutsch. Geodät. komis., München*, 1970, A, № 69, 34 p.
66. *Moritz H.* Least-squares collocation.— *Reviews of Geophys. and Space Phys.*— 1978, v. 16, № 3, p. 421—430.
67. *Moritz H.* Least Square Collocation.— *Deutsch. geodät. komis. München*, 1975, A, № 75, 91 p.
68. *Moritz H.* Covariance functions in least-squares collocation.— *Depart. geod. sci., Ohio State Univ.* — *Columbus*, 1976, rep. № 240, 79 p.
69. *Muller P. M., Sjogren M. L.* Mascons: Lunar mass concentrations.— *Sci.*, 1968, v. 161, № 3842, p. 680—684.
70. *Pellinen L. P.* Estimation and application of degree variances of gravity.— *Studia geoph. et geod.*, 1970, v. 14, № 2, p. 168—173.
71. *Ransdorf G., Sjogren W.* Moon model — an offset core.— *Nature*, 1972, v. 238, № 5362, p. 260—262.
72. *Rapp R. H.* Improved models for potential coefficients and anomaly degree variances.— *Journ. Geophys. Res.*, 1973, v. 78, № 17, p. 3497—3500.

73. *Sjogren W. L., Wollenhaupt W. R.* Lunar shape via the Apollo laser altimeter.— *Sci.*, 1973, v. 179, № 4070, p. 2775—2781.
74. *Sjogren W. L., Wollenhaupt W. L.* Lunar global figure from mare surface elevation.— *Moon*, 1976, v. 15, № 1/2, p. 143—154.
75. *Sjogren W. L.* Lunar gravity determination and implications.— *Philos. trans. Roy. soc. London, A*, 1977, v. 285, p. 219—226.
76. *Tscherning C. C., Rapp R. H.* Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models.— *Report depart. geod. sci. Ohio State Univ.*—Columbus, 1974, rep. № 208, 89 p.
77. *Voss J.* An estimate of the lunar frontside Moho depth from gravimetric and topographic data — *Abstr. 8 lun. sci. conf. part. III, Houston*, 1977, p. 958—960.
78. *Wollenhaupt W. R., Osburn R. K., Ransdorf G. A.* Comments on the figure of the Moon from Apollo landmark tracking.— *Moon*, 1972, v. 5, № 1/2, p. 149—157.
79. *Wollenhaupt W. R., Sjogren W. L.* Comments on the figure of the Moon based preliminary results from laser altimetry.— *Moon*, 1972, v. 4, № 3/4, p. 337—347.
80. *Wood J.* Bombardment as a cause of the lunar asymmetry.— *Moon*, 1973, v. 8, № 1/2, p. 73—103.
81. *Zisk S. H.* Lunar topography: First radar-interferometer measurements of the Alphonsus — Ptolemaeus — Arzachel region.— *Sci.*, 1972, v. 178, № 4064, p. 977—980.

К главе 5

1. *Аким Э. Л.* Определение поля тяготения Луны по движению искусственного спутника Луны «Луна-10». — *ДАН СССР*, 1966, т. 170, № 4, с. 799—802.
2. *Аким Э. Л., Степаняц В. Д., Власова З. П.* Уточнение массы Земли и Луны по наблюдениям за движением удаляющихся от Земли автоматических межпланетных станций «Венера-4», «Венера-5», «Венера-6», «Венера-7». — *ДАН СССР*, 1971, т. 201, № 6, с. 1303—1306.
3. *Аким Э. Л., Власова З. П.* Модель гравитационного поля Луны по наблюдениям за движением ее искусственных спутников «Луна-10, 12, 14, 19 и 22». — *ДАН СССР* 1977, т. 235, № 1, с. 38—41.
4. *Гаврилов И. В.* Фигура и размеры Луны по астрономическим наблюдениям. — Киев: Наукова думка, 1969, 150 с.
5. *Джеффрис Г.* Земля, ее происхождение, история и строение: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1960, 484 с.
6. *Жарков В. Н., Трубицын В. П., Самсоненко Л. В.* Физика Земли и планет: Фигура и внутреннее строение. — М.: Наука, 1971, 383 с.
7. *Жарков В. Н., Паньков В. Л., Калачников А. А., Оснач А. И.* Введение в физику Луны. — М.: Наука, 1969, 311 с.
8. *Жонголович И. Д.* Некоторые стоксовы постоянные для урванного трехосного эллипсоида. — *Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР*, 1950, т. 4, № 8, с. 375—389.

9. *Жонголович И. Д.* Потенциал земного притяжения.— Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1957, т. 6, № 8, с. 505—523.
10. *Идельсон Н. И.* Фундаментальные постоянные астрономии.— В кн.: *Астрономический Ежегодник СССР на 1942 г.*— М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1944, с. 409—476.
11. *Крат В. А.* Фигуры равновесия небесных тел.— М.: Гостехиздат, 1950, 329 с.
12. *Кук А. Г.* Геодезические константы и движение Луны.— В кн.: *Фундаментальные постоянные астрономии: Пер. с англ.*— М.: Мир, 1967, с. 68—108.
13. *Куликов К. А.* Фундаментальные постоянные астрономии.— М.: Гостехиздат, 1956, 340 с.
14. *Куликов К. А., Гуревич В. Б.* Основы лунной астрометрии.— М.: Наука, 1972, 391 с.
15. *Левин Б. Ю.* Влияние термических эффектов на фигуру Луны.— В кн.: *Фигура и движение Луны.*— Киев: Наукова думка, 1967, № 2, с. 58—104.
16. *Липский Ю. Н., Никонов В. А.* Положение центра фигуры Луны.— *Астрон. журн.*, 1971, т. 48, № 2, 445—446.
17. *Липский Ю. Н., Никонов В. А., Скобелева Т. П.* Единая система селенодезических координат из девяти каталогов на видимом полушарии Луны.— М.: Наука, 1973, 384 с.
18. *Липский Ю. Н., Никонов В. А.* Определение положения центра масс Луны: Точность созданной в ГАИШ единой селеноцентрической системы координат.— В кн.: *Современные проблемы позиционной астрометрии.*— М.: Изд. МГУ, 1975, с. 278—282.
19. *Магницкий В. А.* Внутреннее строение и физика Земли.— М: Недра, 1965, 379 с.
20. *Мещеряков Г. А.* Динамическая фигура Луны и распределение плотности лунных недр.— *Астрон. журн.*, 1973, т. 50, № 1, с. 186—200.
21. *Мещеряков Г. А., Зазуляк П. М.* Об основных механических параметрах Луны.— В кн.: *Современные проблемы позиционной астрометрии.*— М.: Изд. МГУ, 1975, с. 266—272.
22. *Мещеряков Г. А., Зазуляк П. М.* Об уравнивании основных механических параметров Луны.— *Письма в Астрон. журн.*, 1975, т. 1, № 12, с. 43—47.
23. *Мещеряков Г. А., Зазуляк П. М., Киричук В. В.* О вычислении моментов инерции Луны.— *Астрон. журн.*, 1976, т. 5, № 3, с. 620—625.
24. *Сагитов М. У.* Гравитационное поле Луны и использование его для решения некоторых астрометрических задач.— В кн.: *Современные проблемы позиционной астрометрии.*— М.: Изд. МГУ, 1975, с. 66—78.
25. *Сафронов В. С.* К вопросу о фигуре Луны.— В кн.: *Фигура и движение Луны.*— Киев. Наукова думка, 1967, № 2, с. 105—117.
26. *Словохотова Н. П.* Опорные селенодезические сети.— В кн.: *Исследование космического пространства, т. 5. Луна ч. I.*— М.: Изд. ВИНТИ, 1973, с. 136—169.

27. Хабибуллин Ш. Т. Нелинейная теория физической либрации Луны.— Тр. Казанской городской астрон. obs., 1966, № 34, с. 3—70.
28. Хабибуллин Ш. Т., Чиканов Ю. А. Лунный эллипсоид по измерениям абсолютных высот.— Тр. Казанской городской астрон. obs., 1970, № 37, с. 23—39.
29. Хабибуллин Ш. Т., Чиканов Ю. А. Определение фигуры и аномалий силы тяжести Луны по данным наблюдений ИСЛ.— Изв. Энгельгардтовской obs., 1969, № 37, с. 158—170.
30. Хабибуллин Ш. Т., Чиканов Ю. А. К вопросу о значениях коэффициентов C_{20} и C_{22} разложения гравитационного поля Луны.— Астрон. журн., 1972, т. 49, № 1, с. 222—223.
31. Чиканов Ю. А. Об определении параметров гравитационного поля Луны по траекторным измерениям ИСЛ.— Астрон. вестн., 1970, т. 4, № 3, с. 167—177.
32. Чуйкова Н. А. Гравитационные аномалии и отклонения отвеса на Луне.— Астрон. журн., 1971, т. 48, № 6, с. 1322—1321.
33. Alley C. O., Chang R. E., Currie D. G., Poultney S. K. Laser ranging retro-reflector; Continuing measurements and expected result.— Sci., 1970, v. 167, № 3918, p. 458—460.
34. Ananda M. F., Ferrari A. Y., Sjogren W. L. An improved lunar moment of inertia determination: A proposed strategy.— Abstr. fifth lin. sci. conf., Houston, 1974, p. 31—32.
35. Ananda M. Lunar gravity: a mass point model.— Journ. Geophys. Res., 1977, v. 82, № 20, p. 3049—3064.
36. Anderson J. D., Efron L., Wong S. K. Martian mass and Earth—Moon ratio from coherent S-band tracking of Mariner 6 and 7.— Sci., 1970, v. 167, № 3916, p. 277—279.
37. Anderson J. D., Warner M. B. Determination the masses of the Moon and Venus and the astronomical unit from the radio tracking of Mariner 2.— In: Trajectories of artificial celestial bodies.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag, 1965.
38. Anderson J. D., Hilt D. E. Improvement of astronomical constants and ephemerides from Pioneer radio-tracking data.— AIAA Journ., 1969, v. 7, N 6, p. 1048—1054.
39. Anderson J. D., Esposito P. B., Martin W., Muchleman D. D. Determination of astrodynamical constants and a test of the general relativistic time delay with S-band range and doppler data from Mariner 6 and 7.— Plenary meeting COSPAR, Leningrad, 20—29 may 1970, 50 p.
40. Ash M. E., Shapiro I. I., Smith W. S. Astronomical constants and Planetary ephemerides deduced from radar and optical observations.— Astron. Journ., 1967, v. 72, № 3, p. 338—350.
41. Bender P. L., Currie D. D., Dicke R. H., Eckhardt D. H., Faller J. E., Kaula W. M., Mulholland J. D., Plotkin H. H., Paulthey S. K., Silverberg E. C., Wilkinson D. T., Williams J. G., Alley C. O. The lunar laser ranging experiment.— Sci., 1973, v. 182, № 4109, p. 229—238.
42. Bender P. L., Hoinser J. P., Mulholland J. D., Shelus P. Y., Sinclair W. S., Shlade M. A., Williams J. G. Lunar moments of inertia constraints from lunar laser ranging.— Abstr. fifth. lun. sci. conf. Houston, 1974, p.

43. *Bills B., Ferrari A.* A harmonics analysis of lunar topography.— *Icarus*, 1977, v. 31, № 2, p. 244—259.
44. *Blackshear W. T., Gapcynski J. P.* An improved value of the lunar moment of inertia.— *Journ. Geophys. Res.*, 1977, v. 82, № 11, p. 1699—1701.
45. *Brown D. C.* A unified lunar control network.— *Photogrammetric Engineering*, 1968, v. 34, № 11, p. 1272—1292.
46. *Bryant W. C., Wells W. T., Williamson R. C.* An analysis of the lunar potential utilising Explorer 49.— Paper presented at Mechanics and Control of flight. Calif. Amer. inst. Aeronaut. astronaut.— Anaheim, 1974.
47. *Burša M.* Determination of the parameters of a selenocentric reference system and the deflections at the lunar surface.— *Studia geop. et geod.* 1971, v. 15, № 3, p. 210—227.
48. *Burša M.* Parameters of the selenopotential model and the lunar deflections of the vertical.— *Bull. Astron. inst. Czech.*, 1975, v. 26, N 3, p. 140—148.
49. *Burša M.* Positions of the axes of the ellipsoid of inertia from satellite observations.— *Bull. Astron. inst. Czech.*, 1977, v. 28, № 6, p. 316—318.
50. *Caputo M.* The gravity field of the Earth.— New York; London: Acad. Press., 1967, 202 p.
51. *Clemence G. M.* On the system of astronomical constant.— *Astron. Journ.*, 1948, v. 53, № 6, p. 169—179.
52. *Counselman C. C. III, Hinteregger H. F., King R. W., Shapiro I. I.* Precision selenodesy via differential interferometry.— *Sci.*, 1973, v. 181, № 4101, p. 772—774.
53. *Counselman C. C. III, Hinteregger H. F., King R. W., Shapiro I. I.* Lunar baselines and libration from differential VLBI observations of ALSER.— *Moon*, 1973, v. 8, № 4, p. 484—489.
54. *Cook A. H.* The moment of inertia and the density distribution of the Moon.— *Monthly Not. Roy. Astr. Soc.*, 1970, v. 150, № 2, p. 187—194.
55. *Derr J.* The moment of inertia of the Moon.— *Icarus*, 1967, v. 7, № 2, p. 261—263.
56. *De Sitter W.* On the system of astronomical constants.— *Bull. Astron. inst. Netherl.* 1938, v. 8, № 307, p. 213—231.
57. *Eckhardt D. H.* Physical librations due to the third and fourth degree harmonics of the lunar gravity potential.— *Moon.*, 1973, v. 6, № 1/2, p. 127—134.
58. *Eckert W. J.* On the motions of the perigee and node and the distribution of the mass in the Moon.— *Astron. Journ.*, 1965, v. 70, № 6, p. 787—792.
59. *Eckert W. J.* The moment of inertia of the Moon, determined from its orbital motion.— In: *Mantles Earth and terrestrial planets.*— London; New York; Sydney: Intersci. Publ. 1967, p. 57—106.
60. *Fajemirokun F. A.* Application of laser ranging and VLBI observations for selenodesy control—*Depart. geod. Sci. Ohio state Univ.*, 1974, rep. № 157, 230 p.
61. *Ferrari A. J.* An empirically derived lunar gravity field.— *Moon*, 1972, v. 5, № 3/4, p. 390—410.

62. *Ferrari A.* Lunar gravity: A harmonic analysis.— *Journ. Geophys. Res.*, 1977, v. 82, № 20, p. 3065—3084.
63. *Goudas C. L.* Moments of inertia and gravity field of the Moon.— *Icarus*, 1964, v. 3, № 5/6, p. 375—409.
64. *Gapcynski J. P., Blackshear W. T., Compton H. R.* Lunar gravitational field as determined from Lunar Orbiter tracking data.— *AIAA Journ.*, 1969, v. 7, № 10, p. 1905—1908.
65. *Gavrilov I. V., Yanovitskaya G. I.* Comparison of dynamical shape of the Moon.— *Phys. Earth. Plan. Inter.*, 1974, v. 8, № 1, p. 102—106.
66. *Gavrilov I. V., Kisliuk V. S.* Comparison of same selenodetic catalogue.— *Moon.*, 1971, v. 12, № 3, p. 363—364.
67. *Helmering R. J.* Selenodetic control derived from Apollo metric photography.— *Moon*, 1973, v. 8, № 4, p. 450—460.
68. *Jeffreys H.* Certain hypotheses as to the internal structure of the Earth and Moon.— *Memor. Roy. Astron. Soc.*, 1915, v. 60, part. V, p. 187—217.
69. *Jeffreys H.* On the figure of the Earth and Moon.— *Monthly Not. Roy. Astr. Soc., geophys. suppl.*, 1948, v. 5, № 7, p. 219—249.
70. *Jeffreys H.* On the figure of the Moon.— *Monthly. Not. Roy. Astr. Soc.*, 1961, v. 122, № 5, p. 421—432.
71. *Jeffreys H.* Figure and density of the Moon.— In: *Mantles of the Earth and terrestrial planets.*— *Lon.; N. Y.; Sydney: Intersci. publ.*, 1967, p. 93—95.
72. *Kaula W. M.* The geometric and dynamical figure of the Moon.— In: *Physic Moon.*— *Washington: D. C. Am. Astron. Soc.*, 1967, p. 181—187.
73. *Kaula W. M.* Selenodesy.— *Trans. Am. Geophys. Un.*, 1967, v. 48, № 2, p. 345—348.
74. *Kaula W. M.* Selenodesy and planetary geodesy.— *EOS Trans. Am. Geophys. Un.*, 1971, v. 52, № 3, p. 1—4.
75. *Kaula W. M.* Selenodesy.— *Revs Geophys. Space Phys.*, 1975, v. 13, № 3, p. 272—273.
76. *Kaula W. M.* The gravity and shape of the Moon.— *Trans. Am. Geophys. Un.* 1975, v. 56, № 6, p. 309—316.
77. *Kaula W. M., Schubert G., Lindenfelter R. E., Sjogren W. L., Wollenhaupt W. R.* Apollo laser altimetry and inferences as to lunar structure.— *Proc. fifth lun. sci. conf., Suppl. 5.*— *Geochim. Cosmochim. Acta*, 1974, v. 3, p. 3049—3058.
78. *King R. W., Counselman C. C. III, Shapiro I. I.* Lunar dynamics and selenodesy: Results from analysis of VLBI and laser data.— *Journ. Geophys. Res.* 1976, v. 81, № 35, p. 6251—6256.
79. *Koch K. R.* Lunar shape and gravity field.— *Photogramm. Eng.*, 1970, v. 36, № 4, p. 375—380.
80. *Kopal Z.* The shape of the Moon, its inertial structure and moments of inertia.— *Proc. Roy. Soc.* 1967, v. 296, № 1446, p. 254—256.
81. *Koziel K.* The constants of the Moon's physical libration derived on the basis of four series of heliometric observations from the years 1877—1915.— *Icarus*, 1967, v. 7, № 1, p. 1—28.

82. *Koziel K.* Differences in the Moon's moment of inertia.— Proc. Roy. soc., ser. A, 1967, v. 296, № 1446, p. 248—253.
83. *Ledersteger K.* The equilibrium figure of the Moon.— In: Use artificial satellite geodesy.— Vol. 2.— Athens: Publ. Nat. Techn. univ., 1967, p. 539—555.
84. *Lieske J. H.* Mass of the Earth—Moon system from observations of Eros 1893—1966.— Astron. Journ., 1968, v. 73, № 7, p. 628—643.
85. *Levin B. J.* A new hypothesis for the non-equilibrium figure of the Moon.— Nature, 1964, v. 202, № 4938, p. 1201.
86. *Liu A. S., Laing P. A.* Lunar gravity analysis from long-term effects.— Sci., 1971, v. 173, № 4001, p. 1017—1020.
87. *Lorell J.* Lunar Orbiter gravity analysis.— Moon, 1970, v. 1, № 1, p. 190—231.
88. *Lorell J., Sjogren W. L.* Lunar gravity: Preliminary estimates from Lunar Orbiter.— Sci. 1968, v. 159, № 3815, p. 625—627.
89. *Macdonald G. J. F.* Interior of the Moon.— Sci., 1961, v. 133, № 3488, p. 1045—1050.
90. *Macdonald G. J. F.* On the internal constitution of innerplanets. Journ. Geophys. Res. 1962, v. 67, № 7, 2945—2974.
91. *Melbourne W. G.* The determination of planetary masses from radio-tracking space probes and planetary radar.— In: Dynamics of satellite.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag, 1970, p. 63—88.
92. *Michael W. H., Blackshear J. W.* Recent result on the mass, gravitational field and moments of inertia of the Moon.— Moon, 1972, v. 3, № 4, p. 388—402.
93. *Michael W. H., Blackshear J. T., Gapcynski J. P.* Results on the mass and gravitational field of the Moon as determined from dynamics of lunar satellite.— In: Dynamics of Satellites.— Berlin; Heidelberg; New York, 1970, p. 42—56.
94. *Mottinger N. A., Sjogren W. L.* Consistency of Lunar Orbiter 2 ranging land doppler data.— Space Progr. Summary JPL, Calif. Inst. Techn. 1967, v. 3, p. 37—46.
95. *O'Leary B. T.* Influence of lunar mascons on its dynamical figure.— Nature, 1968, v. 220, № 5774, p. 1309.
96. *Rabe E.* Derivation of fundamental constants from the observations of Eros during 1926—1945.— Astron. Journ., 1950, v. 55, № 4, p. 112—126.
97. *Rabe E., Francis M. P.* The Earth — Moon mass and other astronomical constants from the Eros motion 1926—1965.— Astron. Journ., 1967, v. 72, № 7, p. 856—864.
98. *Runcorn S. K.* Convection in the Moon.— Nature, 1962, v. 195, № 4847, p. 1150—1151.
99. *Runcorn S. K., Shrubbsall M. H.* The figure of the Moon.— Phys. Earth Planet. Inter., 1968, v. 5, № 5, p. 317—320.
100. *Shapiro A., Uliana E. A., Yaplee B. S., Knowles S. H.* Lunar radius from radar measurements.— In: Moon and Planets, II.— Amsterdam: North—Holland Publ Co, 1968, p. 34—46.
101. *Sjogren W. L., Trask D. W., Vegos C. J., Wollenhaupt W. R.* Physical constants as determined from radio tracking of the

- Ranger lunar probs.— TR—32—1057, JPL, Calif. inst. techn., 1966.
102. *Sjogren W. L., Trask D. W.* Results on physical constants and related data from the radio tracking of Mariner (Venus) and Ranger 3—7 missions.— *Journal Spacecraft and Rockets*, 1965, v. 2, № 5, p. 689—697.
 103. *Sjogren W. L.* Lunar gravity estimate: Independent confirmation.— *Journ. Geophys. Res.* 1971, v. 76, № 23, p. 3024—3026.
 104. *Sjogren W. L.* Estimate of four topocentric lunar radii.— In: *Measure of the Moon*.— Dordrecht, Holland: D. Reidel Publ. Co, 1967, p. 341—343.
 105. *Sjogren W. L., Wollenhaupt W. R.* Lunar shape via the Apollo laser altimeter.— *Sci.*, 1973, v. 179, № 4070, p. 275—278.
 106. *Sinclair W. S., Sjogren W. L., Williams J. G., Ferrari A. J.* The lunar moment of inertia derived combined doppler and laser data.— *Abstr. 7 lun. sci. conf. part. II*.— Houston, 1976, p. 817.
 107. *Tolson R. H., Gapeynsci J. P.* An analysis of the lunar gravitational field as obtained from Lunar Orbiter tracking data.— In: *Moon and Planets. II*.— Amsterdam, 1968, p. 178—186.
 108. *Urey H. C.* The planets, their origin and development.— Connecticut, 1952. New Haven: Yale Univers. Press, 1952, 245 p.
 109. *Urey H. C.* Origin and history of the Moon.— In: *Physies and astronomy of the Moon, I*.— New York: Acad. Press, 1962, p. 481.
 110. *Urey H. C.* The origin and significance of the Moon's surface. *Vistas in Astronomy*, 1956, № 2, p. 1667—1680.
 111. *Urey H., Elsasser W., Rochester M.* Note on the internal structure of the Moon.— *Astrophys. Journ.* 1959, v. 129, № 3, p. 842—848.
 112. *Vegos C. J., Trask D. W.* Ranger combined analysis. Part II. Determination of the masses of the Earth and Moon from radio-tracking data.— *Space progr. symp.*, 37—44. vol. III. JPL. Calif. inst. techn., 1967, p. 11—28.
 113. *Williams J. G., Slade M. A., Eckhardt D. H., Kaula W. M.* Lunar physical librations and laser ranging.— *Moon*, 1973, v. 8, № 4, p. 469—483.
 114. *Williams J. G., Sinclair W. S., Slade M. A., Bender P. L., Hauser J. P., Mulholand J. D., Shelus P. J.* Lunar moment of inertia constraints from lunar laser ranging.— *Abstr. V lun. sci. conf.* Houston, 1974, p. 845.
 115. *Wollenhaupt W. R., Ransford G. A.* Lunar radii values from Apollo missions.— *Bull. Am. astron. soc.*, 1971, v. 3, № 2, part. II, p. 272.
 116. *Wollenhaupt W. R., Sjogren W. L.* Comments on the figure of the Moon based on preliminary results from laser altimetry.— *Moon*, 1972, v. 4, № 3—4, p. 337—347.
 117. *Wollenhaupt W. R., Osburn R. K., Ransford G. A.* Comments on the figure of the Moon from Apollo landmark tracking.— *Moon.*, 1972, v. 5, № 1/2, p. 149—157.
 118. *Wong S. K.* Deep space station locations and physical constants solutions of Syrveyor missions.— *Space progr. symp.*, 37—52. v. II, JPL, Calif. inst. techn., 1968, p. 12.

119. Zech C. The determination of the mass of the Earth — Moon system by the dynamical method from observations of Eros.— Veröff. astr. rechen. Inst. Heidelberg, 1969, № 24, 36 p.

К главе 6

1. Берикошвили В. Ш., Жарков В. Н., Яновская Т. Б. О скоростном разрезе Луны.— Изв. АН СССР. Сер. «Физика Земли», 1965, № 7, с. 9—21.
2. Бодри Б. Приливные деформации в Луне.— Письма в Астрон. журн., 1976, т. 2, с № 5, с. 261—265.
3. Бровар В. В., Юзефович А. П. Параметры лунных масконов.— В кн.: Современные проблемы позиционной астрометрии.— М.: Изд. МГУ, 1975, с. 303—312.
4. Бровар В. В. Стоксовы постоянные масконов.— Там же, с. 318—323.
5. Бронштэн В. А. Об ударных и взрывных метеоритных кратерах на Земле и Луне.— Астрон. вестн., 1977, т. 11, № 2, с. 78—83.
6. Вагнер А. Происхождение Луны и ее кратеров.— Москва, Петроград; ГИЗ, 1923, 47 с.
7. Веселов К. Е., Сагитов М. У. Гравиметрическая разведка.— М.: Недра, 1968, 512 с.
8. Галкин И. Н., Шварев В. В. Строение Луны.— М.: Знание, 1977, 63 с.
9. Дабижа А. И., Красс М. С., Федьинский В. В. Эволюция метеоритных кратеров как структур планетной коры.— Астрон. вестн., 1976, т. 10, № 1, с. 6—18.
10. Джеффрис Г. Земля, ее происхождение, история и строение: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1960, 474 с.
11. Жарков В. Н., Паньков В. Л., Калачников А. А., Оснач А. И. Введение в физику Луны.— М.: Наука, 1960, 311 с.
12. Жарков В. Н., Берикошвили В. Ш., Оснач А. И. Проблемы геофизики и исследования Луны.— Астрон. журн., 1966, т. 43, № 3, с. 22—46.
13. Жарков В. Н., Трубицин В. П. Лунные масконы.— В кн.: Космохимия Луны и планет.— М.: Наука, 1975, с. 311—313.
14. Жарков В. Н. Внутреннее строение Земли и планет.— М.: Наука, 1978, 191 с.
15. Козлов В. В., Кузнецов Ю. Я., Сульфь-Кондратьев Е. Д. Глобальная тектоника Луны и Земли.— Природа, 1972, № 2, 30—40.
16. Каула В. Введение в физику планет земной группы: Пер. с англ.— М.: Мир, 1971, 534 с.
17. Кротиков В. Д. Некоторые электрические характеристики земных пород и их сравнение с характеристиками поверхностного слоя Луны.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1962, т. 5, № 6, с. 1057—1061.
18. Крупенин Н. Н. Оценка плотности вещества поверхностного слоя Луны, Марса и Венеры.— Пр. 212,— М.: Изд. Ин-та косм. иссл. АН СССР, 1975, 34 с.
19. Латем Г., Накамура И., Дорман Дж., Дьюнебье Ф., Юинг М., Ламлейн Д. Результаты пассивного сейсмического экспери-

- мента по программе «Аполлона». — В кн.: Космохимия Луны и планет. — М.: Наука, 1975, с. 299—310.
20. *Левин Б. Ю.* Физическая теория метеоритов и метеоритное вещество в Солнечной системе. — М.: Изд-во АН СССР, 1956, 293 с.
 21. *Левин Б. Ю.* Строение Луны. — Астрон. журн., 1966, т. 43, № 3, с. 606—621.
 22. *Литтлтон Р. А.* Теоретические основы гипотезы происхождения двойных звезд путем деления. — В кн.: Вопросы космогонии, 1960, т. 7, с. 315—323.
 23. *Магницкий В. А.* Внутреннее строение и физика Земли. — М.: Недра, 1965, 379 с.
 24. *Марков М. С., Суханов А. Л.* Некоторые общие закономерности развития структур Луны и особенности ее геологической истории. — В кн.: Проблемы геологии Луны. — Тр. Геол. ин-та АН СССР, 1969, вып. 204, с. 262—273.
 25. *Марков М. С., Суханов А. Л.* Масконы — впадины лунных морей. — Природа, 1970, № 3, с. 84—88.
 26. *Мельхиор П.* Земные приливы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1968, 482 с.
 27. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет: Пер. с англ. — М.: Мир, ч. I, 1975, 575 с.; ч. II, 1976, 483 с.
 28. *Мещеряков Г. А., Дайнека Ю. П.* О построении глобальных механических моделей Земли. — Геод., картограф., аэрофото-съемка. — Львов: Вища школа, 1975, вып. 21, с. 30—37.
 29. *Мещеряков Г. А.* Динамическая фигура Луны и распределение плотности лунных ядер. — Астрон. журн., 1973, т. 50, № 1, с. 186—200.
 30. *Молоденский М. С.* Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли. — Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, 1953, № 19 (146), с. 3—52.
 31. *Моутсулас М. Д.* Либрация Луны. — В кн.: Физика и астрономия Луны: Пер. с англ. — М.: Мир, 1973, с. 36—70.
 32. *Мюллер П., Сьегрен В.* Большие диски как модель лунных масконов и теория их образования. — В кн.: Луна: Пер. с англ. — М.: Мир, 1975, с. 30—37.
 33. *Панков В. Л., Жарков В. Н.* О распределении плотности в недрах Земли. — В кн.: Земные приливы и внутреннее строение Земли. — М.: Наука, 1967, с. 44—61.
 34. *Парийский Н. Н.* On the origin of the solar system and tidal action on the size of the planet's orbit. — Астрон. цирк., 1944, № 34, с. 1.
 35. *Радзиевский В. В.* Происхождение Луны в свете космогонической теории О. Ю. Шмидта. — Бюлл. ВАГО, 1952, № 11 (18), с. 3—8.
 36. *Ранкорн С., Хофман С.* Фигура Луны. — В кн.: Луна: Пер. с англ. — М.: Мир, 1975, с. 21—29.
 37. *Рейн Н. Ф.* О сгущениях внутри пылевой туманности. — Астрон. журн., 1933, т. 10, № 4, с. 400—420.
 38. *Рускол Е. Л.* Происхождение Луны. — М.: Наука, 1975, 185 с.

39. *Рускол Е. Л.* Модель аккумуляции Луны, совместно с данными о составе и возрасте лунных пород.— *Мон*, 1973, v. 6, № 1/2, p. 127—134.
40. *Рускол Е. Л.* Происхождение Луны.— В кн.: *Космохимия Луны и планет*.— М.: Наука, 1975, с. 38—44.
41. *Саваренский Е. Ф., Кирнос Д. П.* Элементы сейсмологии и сейсмометрии.— М.: Гостехиздат, 1955, 542 с.
42. *Сагитов М. У.* Гравитационное поле Луны и использование его для решения некоторых астрометрических задач.— В кн.: *Современные проблемы позиционной астрометрии*.— М.: Изд. МГУ, 1975, с. 66—79.
43. *Сафронов В. С.* Лунные масконы и изостазия.— *Изв. АН СССР. Сер. «Физика Земли»*, 1971, т. 2, № 2, с. 3—9.
44. *Сафронов В. С.* Эволюция допланетного облака.— М.: Наука, 1969, 243 с.
45. *Станюкович К. П., Броштан В. А.* Роль внешних космических факторов в эволюции Луны.— В кн.: *Луна*.— М.: Физматгиз, 1950, с. 299—330.
46. *Токсоц М. Н., Джонстон Д. Х.* Эволюция Луны и планет земной группы.— В кн.: *Космохимия Луны и планет*.— М.: Наука, 1975, с. 210—240.
47. *Трифонов В. Г.* Гравитационные аномалии Луны в свете геологических данных.— *ДАН СССР*, 1971, т. 196, № 1, с. 176—179.
48. *Трифонов В. Г., Флоренский П. В.* Геологическое сравнение Луны и Земли.— В кн.: *Проблемы геологии Луны*.— *Тр. Геологич. ин-та АН СССР*, 1969, вып. 204, с. 274—285.
49. *Федынский В. В.* Разведочная геофизика.— М.: Недра, 1964, 669 с.
50. *Флоренский К. П., Базилевский А. Т., Иванов А. В.* Роль экзогенных факторов в формировании лунной поверхности.— В кн.: *Космохимия Луны и планет*.— М.: Наука, 1975, с. 439—452.
51. *Фролов А. И.* Гравитационное поле, рельеф и некоторые вопросы внутреннего строения Луны.— *Астрон. вестн.*, 1971, т. 5, № 4, с. 201—216.
52. *Хабаков А. В.* Об основных вопросах истории развития поверхности Луны.— *Зап. Всесоюзн. геогр. общ.*, 1949, новая серия, т. 6, 193 с.
53. *Шмидт О. Ю.* Четыре лекции о теории происхождения Земли и планет.— М.: Изд-во АН СССР, 1957, 140 с.
54. *Шмидт О. Ю.* Метеоритная теория происхождения Земли и планет.— *ДАН СССР*, 1944, т. 45, № 6, с. 245—249.
55. *Шмитт Г. Г.* Эволюция Луны: Модель 1974 г.— В кн.: *Космохимия Луны и планет*.— М.: Наука, 1975, с. 345—357.
56. *Щербаков А. М.* Объемное распределение плотности Луны.— *Астрон. вестн.*, 1978, т. 12, № 2, с. 88—95; № 3, с. 143—151.
57. *Черкасов И. И., Шеварев В. В.* Грунт Луны.— М.: Наука, 1975, 144 с.
58. *Чуйкова Н. А.* Определение параметров лунных масконов из анализа вертикального распределения гравитационного потенциала.— В кн.: *Современные проблемы позиционной астрометрии*.— М.: Изд. МГУ, 1975, с. 300—303.

59. Юри Г. С., Макдональд Дж. Ф. Возникновение и история Луны.— В кн.: Физика и астрономия Луны: Пер. с англ.— М.: Мир, 1973, с. 230—310.
60. *Alfven H.* The origin of the Moon.— In: *Mantles of the Earth and terrestrial planets.*— London; New York, Sydney: Intersci. publ., 1967, p. 234—240.
61. *Alfven H., Arrhenius G.* Evolution of the Moon System.— *Moon*, 1974, v. 9, № 1—2, p. 235—239.
62. *Arkani-Hamed J.* Viscosity of the Moon.— *Moon*, 1973, v. 6, № 1/2, p. 100—111, p. 112—124.
63. *Arkani Hamed J.* Density and stress distribution in the Moon.— *Moon*, 1973, v. 7, № 1/2, p. 84—126.
64. *Arkani Hamed J.* Lunar Mascons as consequence of giant impacts.— *Moon*, 1974, v. 10, № 3/4, p. 307—322.
65. *Baldwin R. B.* Lunar mascons: Another interpretation.— *Sci.*, 1968, v. 162, № 3860, p. 1407—1408.
66. *Baldwin R. B.* The question of isostasy on the Moon.— *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1974, v. 4, № 3, p. 167—179.
67. *Blackshear W. T., Gapcynski J. P.* An improved value of the lunar moment of inertia.— *Journ. Geophys. Res.*, 1977, v. 82, № 11, p. 1699—1701.
68. *Bolt B. A.* Spheroidal oscillations of the Moon.— *Nature*, 1960, v. 188, № 4757, p. 1176—1177.
69. *Booker J. R., Kovach R. L., Lu L.* Mascons and lunar gravity.— *Journ. Geophys. Res.*, 1970, v. 75, № 32, p. 6558—6564.
70. *Boyce W. M.* Selenodetic implications of mascons.— *Sci.*, 1969, v. 164, № 3884, p. 1189—1190.
71. *Bowin C., Simon B., Wollenhaupt W.* Mascons — a two body solutions.— *Journ. Geophys. Res.*, 1975, v. 80, № 35, p. 4955—4964.
72. *Buhl D.* The source of anomalous cooling of the lunar mare during an eclipse.— Abstracts paper 128th Meeting Am. Astron. Soc. Austin, Texas, 1968.
73. *Burša M.* Lunar deflections of the vertical and their elementary interpretation.— *Studia geoph. et geod.*, 1972, v. 16, № 4, p. 315—328.
74. *Burša M.* Tidal potential due to a non-spherical lunar body.— *Studia geoph. et geod.*, 1974, v. 18, № 1, p. 1.
75. *Campbell M. J., O'Leary B. T., Sagan K.* Moon: Two new mascon basins.— *Sci.*, 1969, v. 164, № 3885, p. 1273—1275.
76. *Cameron G. W.* Properties of the solar nebula and the origin of the Moon.— *Moon*, 1973, v. 7, № 3/4, p. 377—383.
77. *Caputo M.* On the shape, gravity field and strength of the Moon.— *Journ. Geophys. Res.*, 1965, v. 70, № 16, p. 3993—4003.
78. *Caputo M., Panja G. F.* The Moon after satellites Luna 10 and Lunar Orbiter 1, III, IV — *Sympos. math. v. 3.*— Roma, 1970, p. 97—119.
79. *Carr R. E., Kovach R. L.* Toroidal oscillations of the Moon.— *Icarus*, 1962, v. 1, № 1, p. 75.
80. *Conel J. E., Holstrom G. B.* Lunar mascons: A near-surface interpretation.— *Sci.*, 1968, v. 162, № 3860, p. 1403—1404.

81. *Darwin G. H.* Tidal friction and cosmogony.— Sci. paper, v. II,— Cambr. univ. press., 1908, 516 p.
82. *Derr J. S.* Free oscillations of new lunar mantels.— Phys. Earth Planet. Inter., 1969, v. 2, № 2, p. 61—68.
83. *De Sabbata V.* Lunar mascons as detector of gravitational waves from pulsars.— Memor. Soc. Astron. Italiana, 1970, v. 41, p. 65—67.
84. *Eckert W. J.* On the motion of the perigee and node and the distribution of the mass in the Moon.— Astron. Journ., 1965, v. 70, № 10, p. 787—792.
85. *Eckert W. J.* The moment inertia of the Moon determined from its orbital motion.— In: Mantles Earth and terrestrial planets.— London; New York; Sydney: Intersci. publ. 1967, p. 97—106.
86. *Gapcynski J. P., Blackshear W. T., Tolson R. H., Compton H. R.* A determination of the lunar moment of inertia.— Geophys. Res. Letters, 1975, № 2(8), p. 353—356.
87. *Gestenkorn H.* Über gezeitenreibung beim zwei-körperproblem.— Z. Astrophys., 1955, Bd. 36, H. 4, s. 245—274.
88. *Gilvary J. J.* Nature of the lunar mascons.— Nature, 1969, v. 221, № 5182, p. 40—44.
89. *Gilvary J. J.* Mensuration and isostasy of lunar mascons and maria.— Nature, 1969, v. 223, № 5203, p. 255—258.
90. *Gast P. W., Giuli R. T.* Density of the lunar interior.— Earth and Planet. Sci Letters., 1972, v. 16, № 2, p. 299—305.
91. *Gottlieb P., Miller P. M., Sjogren W. L.* Nonexistence of large mascons at Mare Marginis and Mare Orientall.— Sci., 1969, v. 166, № 3909, p. 1145—1147.
92. *Hamilton W. L.*, Tidal triggering of Moonquakes.— Sci., 1972, v. 176, № 4040, p. 1258—1259.
93. *Harrison J. C.* An analysis of the lunar tides.— Journ. Geophys. Res., 1963, v. 68, № 14, p. 4269—4280.
94. *Herglotz G.* Über die elastizität der Erde bei berücksichtigung ihrer variablen dichte.— Zeitschr. Math. Physik, 1905, Bd. 52, s. 275—299.
95. *Jeffreys H.* Certain hypotheses as to the internal structure of the Earth and Moon.— Memor. Roy. Astron. soc., 1915, v. 60, p. 187—217.
96. *Jeffreys H.* On the structure of the Moon.— Monthly Not. Roy. Astr. Soc., 1967, v. 136, № 3, p. 311—312.
97. *Kane J., Carucci G., Turner B., Entee J.* Mascons, marid and sinuous rilles — a postulated igneous origin.— Nature, 1969, v. 224, № 5215, p. 164.
98. *Kaula W.* Geophysical implications of satellite determinations of the earth's gravitational field.— Space Sci. Revs., 1967, v. 7, № 5/6, p. 769—794.
99. *Kaula W. M.* The gravitational field of the Moon.— Sci., 1969, v. 166, № 3913, p. 1581—1588.
100. *Kaula W. M.* Interpretation of the lunar gravitational field.— Phys. Earth Planet. Inter., 1971, v. 4, № 3, p. 185—192.
101. *Kaula W. M.* Dynamical aspects of lunar origin.— Revs. Geophys. Space Phys., 1971, v. 9, № 2, p. 217—238.

102. *Kaula W. M., Harris A. W.* Dynamically plausible hypotheses of lunar origin.— *Nature*, 1973, v. 245, № 5425, p. 367—369.
103. *Kaula W. M.* The gravity and shape of the Moon.— *Trans. Am. Geophys. Un.*, 1975, v. 56, № 6, p. 309—316.
104. *King R. W., Counselman C. C. III, Shapiro I. I.* Lunar dynamics and selenodesy results from analysis of VLBI and laser data.— *Journ. Geophys. Res.*, 1976, v. 81, № 35, p. 6251—6256.
105. *Kopal Z.* An introduction to the study of the Moon.— Dordrecht, Holland: D. Reidel Publ. Co., 1966, 464 p.
106. *Kopal Z.* Physics and astronomy of the Moon.— 2 nd. ed.— New York, 1971.
107. *Latham G., Ewing M., Dorman J., Lammlein D., Press F., Toksöz N., Sutton G., Duennebier F., Nakamura Y.* Moonquakes. *Sci.*, 1971, v. 174, № 4010, p. 687—692.
108. *Kovach R. L., Watkins J. S.* The velocity structure of the lunar crust.— *Moon*, 1973, v. 7, № 1/2, p. 63—75.
109. *Kovach R. L., Watkins J. S.* Apollo 17 seismic profiling probing the lunar crust.— *Sci.*, 1973, v. 18, № 4090, p. 1063—1064.
110. *Latham C., Ewing M., Press F., Sutton G.* The Apollo passive seismic experiment.— *Sci.*, 1969, v. 165, № 3890, p. 241—250.
111. *Latham G., Ewing M., Dorman J., Press F., Toksöz N., Sutton G.* Seismic data from man-made impacts on the Moon.— *Sci.*, 1970, v. 170, № 3958, p. 620—626.
112. *Latham G., Ewing M., Dorman J., Nakamura Y., Press F., Toksöz N., Sutton G., Duennebier F., Lammlein D.* Lunar structure and dynamics— results from the Apollo passive seismic experiments.— *Moon*, 1973, v. 7, № 3/4, p. 396—421.
113. *Lindenfelter R. E., Schubert G.* Evidence for convection in planetary interiors from first-order topography.— *Moon*, 1973, v. 7, № 1/2, p. 172—180.
114. *Love A. E. H.* Some problems of geodynamics.— London: Cambr. univ. press., 1926, 178 p.
115. *Littleton R. A.* The Stability of rotating liquide mass.— London: Cambr. univ. press., 1953, 150 p.
116. *Littleton R. A.* The origin of the Moon.— *Sci. Journ.*, 1969, v. 5, № 5, p. 53—58.
117. *Mac Donald G. J. F.* Tidal friction.— *Rev. Geophys.*, 1964, v. 2, № 3, p. 467—541.
118. *Mac Donald G. J. F.* The interior of the Moon.— *Sci.*, 1969, v. 133, № 3458, p. 1045.
119. *Mac Donald G. J. F.* The internal constitutions of the inner planets and the Moon.— *Space Sci. Rev.*, 1963, v. 2, № 4, p. 473—557.
120. *Muller P. M., Sjogren W. L.* Mascons: Lunar mass concentrations — *Sci.*, 1968, v. 161, № 3842, p. 680—684.
121. *Muller P. M., Sjogren W. L.* Lunar gravimetry and mascons.— *Appl. Mech. Revs.*, 1969, v. 22, № 3, p. 955—959.
122. *Murphy J. P., Stry J. W.* Lunar mascons from Apollo orbits.— *Planet. Space Sci.*, 1970, v. 18, № 8, p. 1137—1141.

123. *Muller P. M., Sjogren W. L., Wollenhaupt W.* Lunar gravity: Apollo 15 doppler radio tracking.— *Moon*, 1974, v. 10, № 2, p. 195—205.
124. *Nakamura Y., Latham G. V.* Internal constitution of the Moon: The lunar interior chemacally homogenous?— *Journ. Geophys. Res.*, 1969, v. 74, № 5, p. 3771—3780.
125. *Nakamura Y., Lammlein D., Latham G., Ewing M., Dorman J., Press F., Toksöz N.* New seismic data on the state of the deep lunar interior.— *Sci.*, 1973, v. 181, № 4094, p. 49—51.
126. *O'Leary B. T., Campbell M. J., Sagan K.* Lunar and Planetary mass concentrations.— *Sci.* 1969, v. 165, № 3894, p. 651—657.
127. *O'Keefe J. A.* Isostasy on the Moon.— *Sci.*, 1968, v. 162, № 3894, p. 1405—1406.
128. *O'Keefe J. A.* The Origin of the Moon.— *Journ. Geophys. Res.*, 1970, v. 75, № 32, p. 6565—6574.
129. *O'Keefe J. A.* The formation of the Moon.— *Moon*, 1974, v. 9, № 1/2, p. 219—225.
130. *Öpik E. J.* Tidal deformations and the origin of the Moon.— *Astron. Journ.*, 1961, v. 66, № 2, p. 60—67.
131. *Öpik E. J.* Comments on lunar origin.— *Irish. Astron. Journ.*, 1972, v. 10, № 5/6, p. 190—238.
132. *Philips R. J., Conel J. E., Abolt E. A., Sjogren W. L., Morton J. B.* Mascons: Progress toward a unique solution for mass distribution.— *Journ. Geophys. Res.*, 1972, v. 77, № 35, p. 7109—7114.
133. *Ransdorf G., Sjogren W.* Moon model — an offset core.— *Nature* 1972, v. 238, № 5362, p. 260—262.
134. *Ringwood A. E.* The origin of the Moon precipitation hypothesis.— *Earth and Planet. Sci. Letters*, 1970, № 8, p. 131.
135. *Runcorn S.* On the origin of mascons and moonquakes.— *Proc. fifth Lun. Sci. conf. Suppl. 5.*— *Geochim. Cosmochim. Acta*, 1974, v. 3, p. 3115—3126.
136. *Sadeh D.* Possible sidereal period for the seismic lunar acting.— *Nature*, 1972, v. 240, № 5377, p. 139—140.
137. *Shida T.* On the elasticity of the Earth and the earth's crust.— *Mem. Coll. Sci. and Eng. Kyoto: Imp. Univ.*, 1912, v. 4, p. 1—286.
138. *Sjogren W. L.* Lunar gravity determinations and their implications.— *Philos. Trans. Roy. Soc. London, A*, 1977, v. 285, p. 219—226.
139. *Sjogren W., Gottlieb P., Muller P., Wollenhaupt W.* Lunar gravity via Apollo 14 doppler radio tracking.— *Sci.* 1972, v. 175, № 4018, p. 165—168.
140. *Sjogren W., Wollenhaupt W.* Gravity: Mare Humorum.— *Moon*, 1973, v. 8, № 1/2, p. 25—32.
141. *Sjogren W., Wimberly R., Wollenhaupt W.* Lunar gravity via the Apollo 15 and 16 subsatellites.— *Moon*, 1974, v. 9, № 1/2, p. 115—128.
142. Ibid.
143. *Solomon S. S.* Density within the Moon and implications for lunar composition.— *Moon*, 1974, v. 9, № 1/2, p. 147—166.

144. *Sonnet C. P., Calburn D. S., Schubert G., Smith B. F., Schwarz K., Dyal P., Parkin C. W.* Lunar electrical conductivity profile.— *Nature*, v. 230, № 5293, p. 359—362.
145. *Sutton G. H., Neidell N. S., Kovach R. L.* Theoretical tides on a rigid spherical Moon.— *Journ. Geophys. Res.*, 1963, v. 68, № 14, p. 4261—4267.
146. *Solomon S., Toksöz M.* Internal constitution and evolution of the Moon.— *Phys. Earth Plan. Inter.*, 1973, v. 7, № 1, p. 5—38.
147. *Stipe J. G.* Iron meteorites as mascons.— *Sci.*, 1968, v. 162, № 3860, p. 1402—1403.
148. *Takeuchi H., Saito M., Kobayshi M.* Free oscillations of the Moon.— *Journ. Geophys. Res.*, 1971, v. 66, № 10.
149. *Takeuchi H.* Theory of the Earth's interior.— *Blasdel: Waltham, Mass.*, 1966.
150. *Talwani M., Kahle H.* Apollo 17 traverse gravimeter experiment (Prel. Res.) — *Geol. Jahrb.*, 1976, E, № 7, p. 85—91.
151. *Toksöz M., Press F., Dainty A., Anderson K., Latham G., Ewing M., Dorman J., Lammlin D., Sutton G., Ducnebiez F., Nakamura Y.* Velocity structure and properties of the lunar crust.— *Moon*, 1972, v. 4, № 3/4, p. 490—504.
152. *Toksöz M.* Lunar crust: Structure and composition.— *Sci.*, 1972, v. 176, № 4038, p. 1012—1016.
153. *Toksöz M. N., Solomon S.* Thermal history and evolution of the Moon.— *Moon*, 1973, v. 7, № 3/4 p. 251—278.
154. *Toksöz M. N., Johnston D. H.* The evolution of the Moon.— *Icarus*, 1974, v. 21, № 4, p. 389—414.
155. *Toksöz M. N., Press F., Dainty A. M., Anderson K. R.* Lunar velocity structure and compositional and thermal inferences.— *Moon*, 1974, v. 9, № 1/2, p. 31—42.
156. *Turkevich A. L.* Average chemical composition of the lunar surface.— *Moon*, 1973, v. 8, № 3, p. 365—368.
157. *Turkevich A. L.* Comparison of the analytical results from Surveyor, Apollo, and Luna missions.— *Geochim. Cosmochim. Acta*, 1971, v. 2, p. 1209—1215.
158. *Urey H. C.* Origin and history of the Moon.— In: *Phys. and Astronomy of the Moon*.— *New York: Acad. Press*, 1962, p. 481.
159. *Urey H. C.* Mascons and the history of the Moon.— *Sci.*, 1968, v. 162, № 3860, p. 1408—1410.
160. *Watkins J. S., Kovach R. L.* Apollo 14 active seismic experiment.— *Sci.*, 1972, v. 175, № 4027, p. 1244—1245.
161. *Williamson E. D., Adams L. H.* Density distribution in the Earth.— *Journ. Washington Acad. Sci.*, 1973, v. 13, № 19, p. 413—428.
162. *Wise D. U., Yates M. T.* Mascons as structural relict on a lunar Moho.— *Journ. Geophys. Res.*, 1970, v. 75, № 2, p. 261—268.
163. *Wood J. A., Marvin Ir., Reid J. B., Taylor G. J., Bower J. F., Powell B. N., Dickly J. S.* Mineralogy and petrology of the Apollo-12 lunar sample.— *Smith. Astrophys. Obs. Spec. rep.*, 1971, № 333, 272 p.
164. *Wood J. A., Dickly J. S., Marvin Ir., Powell B. N.* Lunar anortosites.— *Sci.*, 1970, v. 167, № 3918, p. 602—604.

Марат Усманович Сагитов

ЛУННАЯ ГРАВИМЕТРИЯ

М., 1979 г., 432 стр. с илл.

Редакторы *Н. А. Чуйкова,*
Г. С. Жуликов

Технические редакторы *Н. В. Вершинина,*
В. Н. Кондакова

Корректоры *Е. А. Белицкая,*
Т. А. Панькова

ИБ № 2091

Сдано в набор 31.05. 79. Подписано к печати
03.09.79. Т-16139. Формат бумаги 84×108¹/₃₂, тип. № 1.
Обыкновенная гарнитура. Высокая печать.
Условн. печ. л. 22,68. Уч.-изд. л. 24,91.
Тираж 1600 экз. Заказ № 1951. Цена книги 2 р. 80 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической
литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография изд-ва «Наука»

121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 10