



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
„МИР“

# TYPE II SUPERCONDUCTIVITY

D. SAINT-JAMES, G. SARMA

Centre d'Etudes Nucleaires de Saclay

E. J. THOMAS

Physical Laboratories Manchester University

PERGAMON PRESS

OXFORD — LONDON — EDINBURGH — NEW YORK

TORONTO — SYDNEY — PARIS — BRAUNSCHWEIG

1969

---

Д. САН-ЖАМ,  
Г. САРМА,  
Е. ТОМАС

---

# СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ ВТОРОГО РОДА

Перевод с английского  
Н. И. ГИНЗБУРГ

Под редакцией  
А. А. АБРИКОСОВА

Книга содержит систематическое изложение современных исследований по сверхпроводимости второго рода. Авторы отдельно рассматривают обратимые (первая часть) и необратимые (вторая часть) процессы.

Обратимые процессы рассматриваются в рамках феноменологической теории Гинзбурга — Ландау, которая в данном случае позволяет хорошо описать явления, происходящие в сверхпроводнике. Микроскопическая теория используется в гл. 5 и 6 в основном только для вывода уравнений и параметров теории Гинзбурга — Ландау из первых принципов. Для необратимых процессов часто еще не существует удовлетворительно-го теоретического описания, поэтому авторы прибегают к полукачественному рассмотрению явлений.

Несмотря на то что в последние годы сверхпроводимость второго рода активно изучается, книг по этому вопросу мало. Поэтому данная монография представляет интерес для широкого круга научных работников — физиков и инженеров, занимающихся изучением и практическим применением сверхпроводимости.

*Редакция литературы по физике*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга состоит из двух частей, различающихся как по тематике, так и по стилю.

Первая из них, написанная французскими физиками Сан-Жамом и Сарма (Парижский университет), посвящена теории идеальных сверхпроводников второго рода.

Все рассмотрение проводится на основе теории Гинзбурга — Ландау. Хотя эта теория применима, строго говоря, лишь в близкой окрестности критической температуры, однако она, с одной стороны, дает возможность описать все качественные особенности поведения сверхпроводников в магнитном поле и, с другой стороны, значительно проще полной микроскопической теории. Следует также отметить, что многие результаты, полученные таким способом, с помощью простой модификации могут быть распространены на все температуры.

Авторы приводят вывод уравнений Гинзбурга — Ландау из микроскопической теории (гл. 5), что помогает понять область их применимости и микроскопический смысл параметров, которые вводятся первоначально в виде феноменологических констант.

Нет необходимости перечислять разнообразные проблемы, рассмотренные в этой части. Следует, однако, заметить, что изложение является довольно неравномерным. С одной стороны, авторы не касаются ряда интересных результатов, полученных с помощью уравнений

Гинзбурга — Ландау, например касающихся свойств тонких пленок, кинетики и др., а с другой стороны, очень детально описывают зависимость третьего критического поля  $H_{c3}$  от угла относительно поверхности. По-видимому, это можно объяснить тем, что авторы предпочитают излагать свои собственные работы.

Поэтому первую часть книги не следует рассматривать как учебник по сверхпроводимости. Она может служить лишь как дополнение к учебнику (см., например, книгу Де Жена «Сверхпроводимость металлов и сплавов», изд-во «Мир», 1968) или как пособие для инженеров, интересующихся лишь теми явлениями, которые важны при конструировании сверхпроводящих соленоидов.

Вторая часть, написанная английским физиком Томасом (Манчестерский университет), представляет собой обзор экспериментальных данных по так называемым «жестким» сверхпроводникам вместе с некоторыми вариантами объяснения физического смысла этих результатов и количественными расчетами для простейших моделей. Кроме того, в этой части кратко анализируется вопрос о различных практических применениях сверхпроводимости.

Напомню, что «жесткими» называются сверхпроводники, обладающие такими дефектами структуры (неоднородности, дислокации, трещины и др.), которые могут удерживать проникающий в сверхпроводник магнитный поток.

Стиль этой части почти исключительно эмпирический, или, можно сказать, «инженерный», и в этом смысле она фактически независима от первой части.

В противоположность очень подробному изложению пусть лишь избранных вопросов, содержащемуся в первой части, автор второй части старается описать все, что

известно о жестких сверхпроводниках, но при этом очень бегло и недостаточно критично.

Несмотря на отмеченные недостатки, книга представляется мне очень полезной как для физиков, занимающихся сверхпроводимостью, так и для инженеров соответствующего профиля. Она содержит самое подробное из всех имеющихся изложение теории Гинзбурга — Ландау и некоторых ее применений — это интересно физикам. Что касается инженеров, то вторая часть дает им возможность ориентироваться в различных, практически важных свойствах жестких сверхпроводников, а первая вооружает не слишком сложными методами количественных расчетов.

При переводе мы старались исправлять неточные формулировки, допущенные авторами. Примечания редактора перевода призваны разъяснить некоторые места в книге, непонятные без изучения другой специальной литературы, а также сообщить читателю некоторые результаты, появившиеся уже после написания данной книги.

*А. А. Абрикосов*

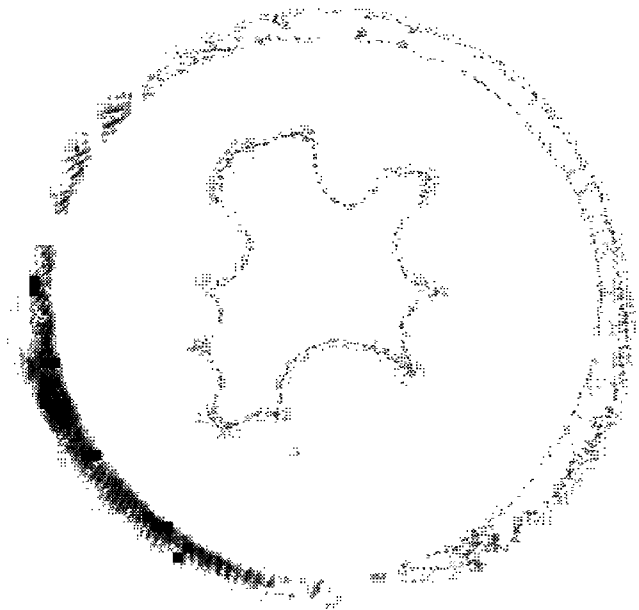
## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

В течение последних нескольких лет почти ежедневно в печати появлялась хорошая статья по сверхпроводимости. Бóльшая часть этих статей была посвящена свойствам сверхпроводников второго рода. Наша цель — дать современное описание сверхпроводимости второго рода, основанное, насколько это возможно, на феноменологическом подходе, предложенном впервые Гинзбургом и Ландау. В первой части книги говорится об обратимых процессах, излагается теория Гинзбурга — Ландау, которая позволяет хорошо описать явления. Что же касается необратимых процессов, рассматриваемых во второй части книги, то для них зачастую не существует никакого удовлетворительного теоретического описания, и мы вынуждены ограничиться качественным объяснением эффекта.

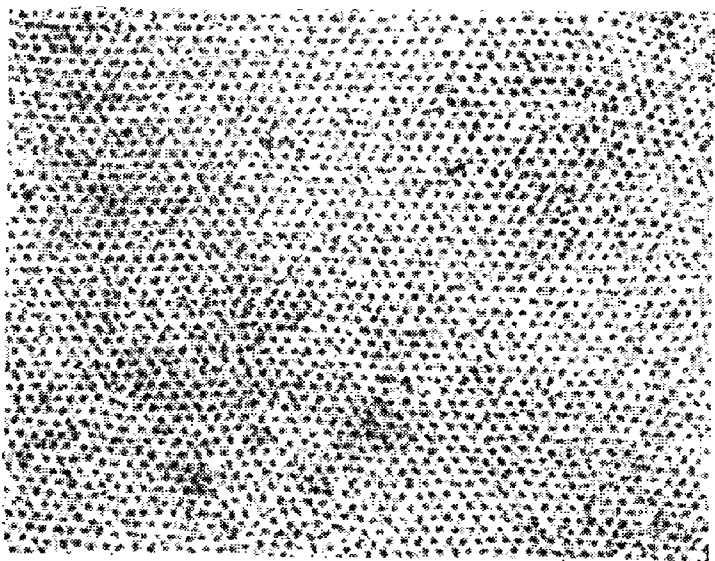
Книга написана в расчете на экспериментаторов; мы надеемся, что она окажется особенно полезной для физиков и инженеров, работающих или приступающих к работе в соответствующей области. Микроскопическая теория использована лишь в гл. 5 и 6 и только для вывода уравнений Гинзбурга — Ландау из основных положений теории, а также для того, чтобы выразить параметры теории Гинзбурга — Ландау через микроскопические величины.

Двое из авторов прослушали курс лекций проф. Де Жена в Орсе, и читатель зачастую будет ощущать его влияние на способ изложения материала. Мы очень обязаны проф. Де Жене за ценные советы по многим вопросам и хотим выразить ему сердечную благодарность.





Фотография структуры вихревых нитей Абрикосова с треугольной решеткой, сделанная на электронном микроскопе. Структура наблюдалась на поверхности кристалла  $\text{Pb} - 4 \text{ ат. \% In}$  при температуре  $1,1^\circ \text{K}$  в остаточном состоянии с применением техники реплики.



Проникновение магнитного поля в сверхпроводник второго рода, содержащий центры пиннинга. Черные области — нормальное состояние (см. гл. 8, § 1 и фиг. 75б).



# Часть I

## ОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ

Д. Сан-Жам и Г. Сарма

---

### Глава I

#### ВВЕДЕНИЕ

#### § 1. Введение в сверхпроводимость

В 1908 г. в Лейдене Камерлинг-Оннес получил жидкий гелий. Это достижение дало в руки Оннесу и его школе метод изучения целого ряда явлений в температурном интервале между 1 и 14° К. С целью проверки теории Друде — Лоренца, согласно которой электрическое сопротивление всех металлов должно изменяться с температурой как  $T^{1/2}$ , Оннес исследовал зависимость сопротивления металлов от температуры.

Первой для исследования была выбрана ртуть, поскольку ее можно получить в очень чистом состоянии. В 1911 г. Оннес обнаружил, что примерно при 4° К сопротивление образца ртути резко падает до нуля [1]. Это свойство, естественно, было названо им сверхпроводимостью. С тех пор было обнаружено, что большое число металлов и сплавов и даже некоторые сильнолегированные полупроводники являются сверхпроводниками.

Удивительное свойство сверхпроводников заключается в том, что ниже четко определенной критической температуры  $T_0$  их электрическое сопротивление равно нулю. (Например, в сравнительно недавней работе [2] было найдено, что сопротивление сверхпроводящего свинца, если и не равно нулю, по крайней мере не превышает  $10^{-23}$  ом · см.) У металлов и сплавов критические температуры  $T_0$  лежат в области от величины, меньшей 1° К, до  $\sim 18^\circ$  К<sup>1)</sup>. Очевидным следствием равенства

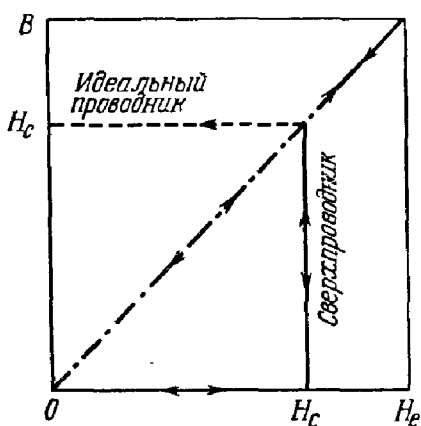
---

<sup>1)</sup> В настоящий момент (1969 г.) «рекорд» принадлежит сплаву  $(\text{Nb}_3\text{Al})_x\text{Nb}_3\text{Ge}$ , у которого критическая температура равна 20,6° К.—  
Прим. ред.

нулю сопротивления является существование незатухающих токов: замкнутый ток, наведенный в кольце из сверхпроводника, в продолжении 2 лет не обнаруживал каких-либо признаков затухания.

## § 2. Эффект Мейсснера. Диамагнетизм

Само по себе открытие эффекта исчезновения сопротивления не привело к пониманию явления сверхпроводимости. Важную роль с этой точки зрения сыграло открытие так называемого эффекта Мейсснера, обнаруженного Мейсснером и Оксенфельдом в 1933 г. [3]. Они нашли, что поведение сверхпроводника во внешнем магнитном поле отличается от поведения идеального проводника.



Фиг. 1. Зависимость индукции от поля для сверхпроводника и идеального проводника.

На фиг. 1 изображено изменение магнитной индукции внутри длинного твердого сверхпроводящего цилиндра, когда внешнее магнитное поле  $H_e$  параллельно оси цилиндра. Пока напряженность магнитного поля повышается от нуля до некоторого определенного значения  $H_c$ , поверхностные токи препятствуют проникновению поля внутрь образца и индукция  $B$  равна нулю. До этой точки сверхпроводник ведет себя так же, как идеальный проводник. При  $H = H_c$  сверхпроводник переходит в нормальное состояние, внешнее поле проникает в глубь образца, а индукция  $B$  становится равной  $H_c$ . Теперь пусть магнитное поле опять уменьшится ниже значения  $H_c$ . Если бы сверхпроводник был идеальным проводником, индукция  $B$  благодаря поверхностным токам осталась бы равной  $H_c$ . Однако на самом деле было обнаружено, что сверхпроводник выталкивает поле и что  $B = 0$  при  $0 < H_e < H_c$ .

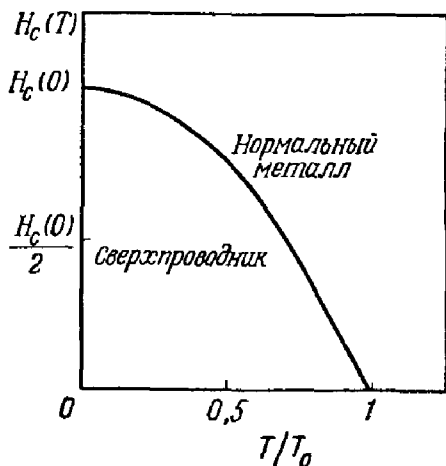
Таким образом, при данной температуре  $T < T_0$  идеальный сверхпроводник выталкивает поле  $H < H_c$ . Этот эффект не зависит от предыстории образца, т. е. был ли он сначала охлажден, а затем включалось поле или, наоборот, сначала включалось поле, а затем понижалась температура. Сверхпроводник ведет себя как идеальный диамагнетик.

Эффект Мейсснера показал, что «сверхпроводящее состояние» — это обратимое равновесное состояние, т. е. состояние, термодинамически устойчивое.

### § 3. Некоторые соображения о переходе из нормального в сверхпроводящее состояние

Обратимость процесса выталкивания магнитного поля из идеального сверхпроводника означает, что переход из нормального в сверхпроводящее состояние обратим по  $T$ ,  $H$  и  $p$ , где  $p$  — давление. Однако объем сверхпроводника претерпевает лишь очень малые изменения, и поэтому зависимостью от давления можно пренебречь. Таким образом, нормальная и сверхпроводящая фазы разделены кривой критических полей  $H = H_c(T)$ . Кривая  $H_c(T)$  близка к параболе (фиг. 2), т. е.<sup>1)</sup>

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right). \quad (1.1)$$



Фиг. 2. Зависимость критического поля  $H_c$  от температуры.

При  $T > T_0$  вещество находится в нормальном состоянии даже в нулевом поле.

<sup>1)</sup> Для обычных сверхпроводников первого рода, о которых здесь идет речь, эмпирическая зависимость (1.1) неточна. Даже в самом простом случае — модели изотропного сверхпроводника со слабым взаимодействием между электронами — точная зависимость  $H_c(T)$  не может быть выражена в аналитической форме. Асимпто-

Следствием существования критического поля  $H_c(T)$  является наличие критического тока  $J_c(T)$ , протекающего в сверхпроводнике, при котором последний переходит в нормальное состояние. Это просто тот ток, который создает критическое поле  $H_c(T)$  на поверхности сверхпроводника [4].

Пусть  $F_s(T)$  — свободная энергия сверхпроводника в отсутствие поля, а  $F_n(T)$  — соответствующая величина для нормальной фазы. Разность  $F_s(T) - F_n(T)$  можно вычислить для любой температуры [5]. Термодинамический потенциал на единицу объема можно записать в виде

$$G(H, T) = F(T) - \frac{1}{4\pi} \int_0^H B(H) dH. \quad (1.2)$$

В сверхпроводнике при  $H < H_c$  (мы пренебрегаем поверхностными эффектами)  $B = 0$  и

$$G_s(H, T) = F_s(T). \quad (1.3)$$

В нормальном состоянии мы имеем  $B = H$  (пренебрегаем восприимчивостью) и

$$G_n(H, T) = F_n(T) - \frac{H^2}{8\pi}. \quad (1.4)$$

При  $H = H_c(T)$  оба потенциала равны:

$$F_n(T) - F_s(T) = \frac{H_c^2(T)}{8\pi}. \quad (1.5)$$

Это уравнение определяет термодинамическое критическое поле  $H_c(T)$  как функцию разности свободных энергий нормальной и сверхпроводящей фаз.

тические формулы имеют вид (см. также в гл. 5, § 3)

$$\frac{H_c(T)}{H_c(0)} \approx 1 - 3,1 \left( \frac{T}{T_0} \right)^2, \quad T \ll T_0,$$

$$\frac{H_c(T)}{H_c(0)} \approx 1,74 \left( 1 - \frac{T}{T_0} \right), \quad T_0 - T \ll T_0.$$

Этот результат близок к эмпирической формуле, но не совпадает с ней. В тех металлах (например, Рb), где взаимодействие между электронами нельзя считать слабым, возможны и более сильные отличия зависимости  $H_c(T)$  от параболического закона. — *Прим. ред.*

Плотность энтропии равна  $S = -(\partial G/\partial T)_H$ , и скрытая теплота перехода на единицу объема равна

$$Q = T(S_s - S_n) = \frac{T}{4\pi} H_c \frac{dH_c}{dT}, \quad (1.6)$$

а изменение удельной теплоемкости имеет вид

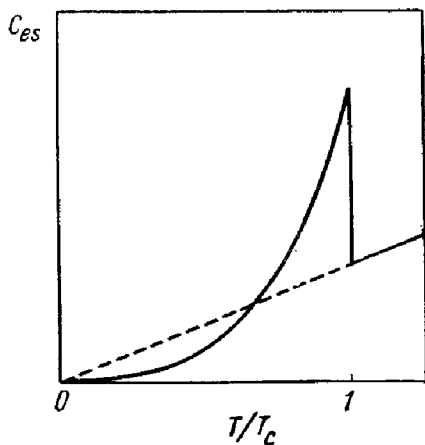
$$C_n - C_s = T \left[ \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_s - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_n \right]_H = - \frac{T}{8\pi} \frac{d^2(H_c^2)}{dT^2}. \quad (1.7)$$

Поскольку  $dH_c/dT < 0$ , получаем  $Q < 0$ , т. е. при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние выделяется теплота. Производная  $dH_c/dT$  конечна, и  $H_c(T) = 0$  для  $T = T_0$ ; переход в сверхпроводящее состояние в нулевом поле не обладает скрытой теплотой. Удельная теплоемкость претерпевает разрыв (1.7), и переход является «фазовым переходом второго рода» (фиг. 3).

При  $T = 0$  разность

$$F_n(0) - F_s(0) = \frac{H_c^2(0)}{8\pi} \quad (1.8)$$

представляет собой так называемую энергию конденсации. В самом деле, из теории следует, что сверхпроводящий переход соответствует своего рода конденсации электронов вблизи поверхности Ферми<sup>1)</sup>. Интересно отметить, что энергия конденсации порядка  $(k_B T_0)^2/E_F$  (где  $E_F$  — энергия Ферми для электронов проводимости в нормальном состоянии), так что только очень малая часть  $k_B T_0/E_F$  ( $\sim 10^{-3}$ ) электронов изменяет свою энергию при конденсации.



Фиг. 3. Схематическая зависимость электронной удельной теплоемкости  $C_{es}$  от температуры.

<sup>1)</sup> Этот вопрос обсуждается в гл. 5.

Выражения (1.6) и (1.7) согласуются с экспериментальными данными, подтверждая обратимость эффекта Мейсснера и применимость термодинамического подхода к сверхпроводимости.

#### § 4. Уравнение Лондонов

В этом параграфе мы рассмотрим одновременное действие сверхпроводящего тока  $\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$  и магнитного поля  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ .

Возьмем уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s, \quad (1.9)$$

где  $c$  — скорость света.

Свободная энергия системы имеет вид

$$F = F_s + E_{\text{кин}} + E_{\text{магн}}; \quad (1.10)$$

здесь  $F_s$  — энергия сконденсированных электронов в состоянии покоя,  $E_{\text{кин}}$  — кинетическая энергия, связанная с незатухающими токами. Для электронов в параболической зоне с дрейфовой скоростью  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  в точке  $\mathbf{r}$  имеем

$$n_s e \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_s(\mathbf{r}), \quad (1.11)$$

где  $e$  — заряд электрона и  $n_s$  — число сверхпроводящих электронов на единицу объема. Кинетическая энергия равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \int_{\text{Объем}} d\mathbf{r} m v^2 n_s, \quad (1.12)$$

где  $m$  — эффективная масса электронов. Выражение (1.12) строго справедливо только для однородного потока ( $\mathbf{v} = \text{const}$ ). Его можно, однако, использовать, если  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  является медленно меняющейся функцией  $\mathbf{r}$ . В равенстве (1.10)  $E_{\text{магн}}$  — магнитная энергия

$$E_{\text{магн}} = \int \frac{h^2}{8\pi} d\mathbf{r}. \quad (1.13)$$

Свободная энергия имеет вид

$$F = F_s + \frac{1}{8\pi} \int (h^2 + \lambda_L^2 |\text{rot } \mathbf{h}|^2) d\mathbf{r}. \quad (1.14)$$



Здесь  $\lambda_L$  — длина, определяемая выражением

$$\lambda_L = \left( \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{1/2}. \quad (1.15)$$

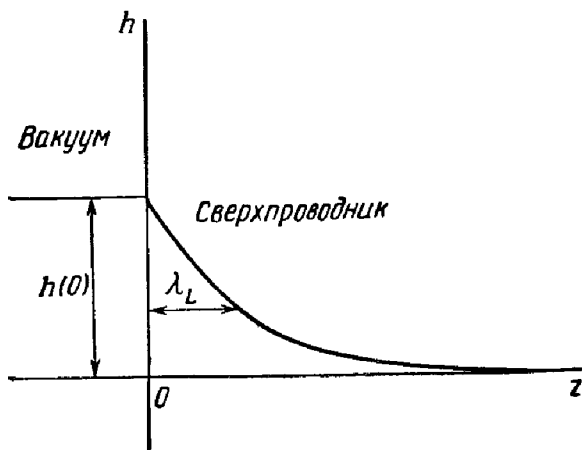
Для нахождения состояния равновесия минимизируем свободную энергию относительно изменения распределения поля  $\delta \mathbf{h}(\mathbf{r})$ . Получаем

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{h} + \lambda_L^2 \operatorname{rot} \mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \delta \mathbf{h}) d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{h} + \lambda_L^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \cdot \delta \mathbf{h} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Условие минимума дает

$$\mathbf{h} + \lambda_L^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) и есть уравнение Лондонов [6].



Фиг. 4. Проникновение поля внутрь сверхпроводника, согласно уравнению Лондонов.

Рассмотрим теперь свойства полубесконечного образца. Поверхность образца возьмем за плоскость  $xy$ , а области  $z < 0$  соответствует пустое пространство (фиг. 4).

К уравнению (1.17) нужно добавить теперь уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \quad (1.18)$$

В силу симметрии  $h$  является функцией только от  $z$ . Уравнение (1.18) дает  $dh_z/dz = 0$ , и для  $z$ -компоненты из

(1.17) получаем  $h_z = 0$ . Таким образом, вектор  $h$  не имеет компоненты, нормальной к поверхности образца. Предположим теперь, что вектор  $h$  направлен вдоль оси  $x$ . Уравнение (1.18) удовлетворяется. Вектор тока  $\mathbf{j}_s$  направлен вдоль оси  $y$ ; тогда уравнение (1.17) можно записать в виде

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = -\frac{h}{\lambda_L^2},$$

т. е.

$$h(z) = h(0) e^{-z/\lambda_L}.$$

Следовательно, при удалении в глубь от поверхности сверхпроводника поле экспоненциально падает (фиг. 4). Длина  $\lambda_L$  называется глубиной проникновения.

Когда  $T = 0$ ,  $n_s = n$ , т. е. числу электронов проводимости на единицу объема. Мы можем теперь вычислить величину  $\lambda_L$ . Значения  $\lambda_L$  лежат в пределах от нескольких сотен ангстрем для чистых металлов, когда  $m$  мало, до нескольких тысяч — для переходных металлов с узкой зоной проводимости и для интерметаллических соединений.

Число электронов проводимости  $n$  связано с энергией Ферми и с плотностью состояний  $N(0)$  выражением

$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} E_F \right)^{3/2} = \frac{2m v_F^2}{3} N(0),$$

где  $v_F$  — скорость электронов на поверхности Ферми. Следовательно, лондоновская глубина проникновения при  $T = 0$  имеет вид

$$\lambda_L(0) = \left[ \frac{3c^2}{8\pi N(0) v_F^2 e^2} \right]^{1/2}. \quad (1.19)$$

Это выражение мы будем часто использовать в следующих главах.

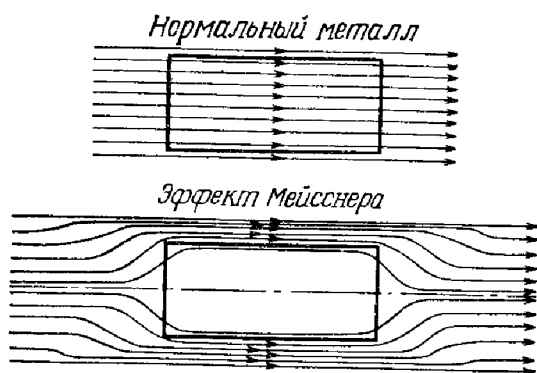
Таким образом, слабое магнитное поле лишь слегка проникает в толщу сверхпроводника. Для всех практических целей можно считать, что силовые магнитные линии полностью выталкиваются из сверхпроводника (фиг. 5). Итак, в сверхпроводнике достигается равновесие, при ко-

тором сумма кинетической и магнитной энергий минимальна.

Для идеального проводника, используя уравнение Максвелла, можно получить соотношение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h(0)}{\partial t} e^{-x/\lambda_L},$$

откуда следует, что при  $x \gg \lambda_L$  магнитное поле не может изменяться во времени. Это утверждение находится в согласии с обсуждением, проведенным в § 2.



Фиг. 5. Выталкивание поля из сверхпроводника (эффект Мейсснера).

Заметим также, что для учета отсутствия сопротивления в сверхпроводнике нужно использовать уравнение движения электронов в электрическом поле  $\mathbf{E}$ , т. е.

$$\frac{m \partial \mathbf{v}}{\partial t} = e \mathbf{E} = \frac{4\pi \lambda_L^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t}.$$

## § 5. Длина когерентности и энергетическая щель

При выводе уравнения Лондонов предполагается, что  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  является медленно изменяющейся функцией  $\mathbf{r}$ . То же условие накладывается на функции  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$ . Из уравнения Лондонов (1.17) следует, что функция  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  изменяется на расстоянии  $\lambda_L$ .

Для конденсированного состояния можно ожидать наличия сильных корреляций между сверхпроводящими электронами. Обозначим радиус этих корреляций через  $\xi_0$ . Тогда условие применимости уравнения Лондонов можно записать в виде  $\lambda_L \gg \xi_0$ .

Понятие длины когерентности  $\xi_0$  было введено Пиппардом [7] для объяснения неприменимости уравнения Лондонов для некоторых сверхпроводников. В 1955 г. Фейбер и Пиппард [8] оценили величину  $\xi_0$ , исходя из принципа неопределенности. Радиус корреляции сверхпроводящих электронов  $\xi_0$  связан с областью импульсов  $\delta p$  соотношением

$$\xi_0 \delta p \sim \hbar.$$

В процессе конденсации участвуют электроны, находящиеся на расстоянии, меньшем  $k_B T_0$ , от поверхности Ферми ( $k_B$  — постоянная Больцмана). т. е.

$$k_B T_0 \sim v_F \delta p.$$

Здесь  $v_F = p_F/m$  — скорость электронов на поверхности Ферми. Длина когерентности  $\xi_0$  такова, что

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{k_B T_0}. \quad (1.20)$$

Другое важное свойство сверхпроводимости — существование щели в спектре возбуждений низкой энергии. Бардин, Купер и Шриффер (БКШ) [9] связывают существование этой щели с образованием сконденсированных электронных пар. В большинстве сверхпроводников для образования пары электрон — дырка вблизи поверхности Ферми необходимо затратить энергию

$$\epsilon_{pp'} \geq 2\Delta, \quad (1.21)$$

где  $\Delta$  — так называемая энергетическая щель.

Существование щели в спектре возбуждения низкой энергии подтверждается рядом экспериментальных данных, позволяющих определить величину  $\Delta$ :

Удельная теплоемкость при низких температурах пропорциональна  $\exp(-\Delta/k_B T)$ .

Поглощение электромагнитных волн в далекой инфракрасной области ( $\lambda \approx 1$  мм) происходит только для

фотонов с энергией  $\hbar\omega \geq 2\Delta$  (фотон образует пару электрон — дырка)<sup>1)</sup>.

Релаксация ядерных спинов происходит в основном при их взаимодействии с электронами проводимости, и при низких температурах ее частота пропорциональна  $\exp(-\Delta/k_B T)$ .

Затухание ультразвука происходит аналогичным образом.

Эксперименты по туннельному эффекту позволяют непосредственно определять плотность состояний<sup>2)</sup>.

В табл. 1 приведены значения энергетической щели для некоторых сверхпроводников. Зная величину щели  $\Delta$ , можно получить еще одно соотношение для  $\xi_0$ . Действительно, для создания пары электрон — дырка импульс  $p$  должен удовлетворять условию

$$E_F - \Delta \leq \frac{\hbar^2 p^2}{2m} \leq E_F + \Delta,$$

так что область импульсов

$$\delta p \approx \frac{p_F \Delta}{E_F}.$$

Критические температуры и значения энергетической щели для некоторых элементов при  $T = 0$  взяты из книги Линтона [17]. Различные экспериментальные методы

1) Здесь речь идет о поглощении при  $T = 0$ . При конечной температуре тепловое возбуждение создает электроны и дырки, которые могут поглощать кванты любой энергии. Поглощение фотонов с  $\hbar\omega < 2\Delta$ , очевидно, пропорционально числу термически возбужденных электронов и дырок, т. е. при низких температурах пропорционально  $\exp(-\Delta/k_B T)$ . Это дает возможность определять  $\Delta$  по поглощению фотонов с  $\hbar\omega < 2\Delta$ . — *Прим. ред.*

2) Речь идет о характеристике  $J(V)$  для так называемого туннельного контакта, состоящего из двух сверхпроводников или сверхпроводника и нормального металла, разделенных тонким (в несколько ангстрем) слоем изолятора. Обычно это пленка окиси на одном из металлов. Из характеристики можно непосредственно определить плотность состояний для возбуждений. В частности, при  $T = 0$  отличный от нуля ток появляется лишь при  $V = (\Delta_1 + \Delta_2)/e$ , где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — значения  $\Delta$  в двух металлах (если металл нормальный, то  $\Delta = 0$ ). Мы не рассматриваем здесь малого сверхпроводящего тока, который может течь через туннельный контакт (эффект Джозефсона) и наблюдается лишь в очень малых магнитных полях ( $H < 0,1$  э). — *Прим. ред.*

Таблица 1

Элемент	$T_0, ^\circ\text{K}$	Отношение $2\Delta(0)/k_B T_0$				
		а	б	в	г	д
Алюминий	1,19			3,16	2,9	~3,4
Кадмий	0,56					
Галлий	1,09					
Индий	3,41	4,1	3,9		3,9	3,45—3,63
$\beta$ -лантан	5,95					
Свинец	7,18	4,14	4,0			4,26—4,33
$\alpha$ -ртуть	4,15	4,6				
$\beta$ -ртуть	3,95					
Ниобий	9,46	2,8			4,4	
Рений	1,70					
Рутений	0,49					
Тантал	4,48	$\leq 3,0$			3,6	
Таллий	1,37				3,2	
Олово	3,72	3,6	3,3	3,5	3,6	3,46
Ванадий	5,30	3,4			3,6	
Цинк	0,88				2,5	
Технеций	11,2					

определения величины энергетической щели обозначены в таблице следующим образом: а — поглощение в инфракрасной области; б — пропускание в инфракрасной области, в — поглощение микроволн<sup>1)</sup>; г — удельная теплоемкость; д — туннелирование.

Таким образом, длина когерентности определяется соотношением

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta}. \quad (1.22)$$

Множитель  $1/\pi$  произволен и выбран здесь для удобства.

Нужно, однако, отметить, что существование щели в спектре возбуждений низкой энергии не является необходимым условием для возникновения типичных для сверхпроводимости свойств, таких, как эффект Мейсснера и незатухающие токи. Было показано, что «бесще-

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 19. — Прим. ред.

левая» сверхпроводимость существует в сверхпроводниках, содержащих магнитные примеси, когда энергетическая щель  $\Delta$  и температура перехода  $T_0$  в сверхпроводнике зависят от концентрации примесей, причем  $\Delta$  обращается в нуль еще при отличном от нуля значении  $T_0$ . Аналогичная ситуация возникает в случае поверхностной сверхпроводимости, когда отсутствие щели в энергетическом спектре не препятствует наличию сверхпроводящего слоя (гл. 4 и 6).

Критерием сверхпроводимости является, по-видимому, наличие сильной корреляции пар, что не обязательно должно приводить к наличию отличной от нуля щели в спектре возбуждений. Тем не менее существование энергетической щели в случае большинства сверхпроводников имело большое значение для создания микроскопической теории. Теория БКШ предсказывает, что величина энергетической щели  $\Delta = 1,76 k_B T_0$ . Используя это значение, можно записать соотношение Фейбера — Пиппарда (1.20) в виде

$$\xi_0 = 0,18 \frac{\hbar v_F}{k_B T_0}. \quad (1.23)$$

## § 6. Классификация сверхпроводников

Существование длины когерентности  $\xi_0$  и лондонской глубины проникновения  $\lambda_L$  позволяет разделить естественным образом все сверхпроводники на две группы:

а) Сверхпроводники первого рода, для которых  $\lambda_L \ll \xi_0$ . Уравнение Лондонов (1.17) не удовлетворяется. У сверхпроводников первого рода наблюдается эффект Мейсснера, но глубина проникновения  $\lambda$  определяется соотношением Пиппарда более сложным, чем (1.15):

$$\lambda = \left( \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^{1/2} \xi_0^{2/3} \lambda_L^{1/3} \quad \text{для} \quad \xi_0 \gg \lambda_L. \quad (1.24)$$

В эту группу сверхпроводников входят чистые металлы и сплавы с низким содержанием одного компонента, для которых эффективная масса  $m$  близка к массе свободного электрона, глубина проникновения  $\lambda_L$  мала ( $\sim 200 \text{ \AA}$ ) и скорость  $v_F$  довольно высока ( $\sim 10^8 \text{ см/сек}$ ).

б) Сверхпроводники второго рода, для которых  $\lambda_L \gg \xi_0$ . Уравнение Лондонов удовлетворяется только в области низких полей.

К этой группе относится большинство химических соединений, таких, как  $Nb_3Sn$ ,  $V_3Ga$  и др., для которых  $m$  очень велика,  $\lambda_L \approx 2000 \text{ \AA}$ , скорость  $v_F$  мала ( $\sim 10^6 \text{ см/сек}$ ), температура перехода  $T_0$  (а следовательно, и  $\Delta$ ) высока ( $\sim 18^\circ \text{K}$  для  $Nb_3Sn$ ), а  $\xi_0$  мала ( $\sim 50 \text{ \AA}$ ). В эту группу входят также сверхпроводящие сплавы с более высоким содержанием легирующей примеси, для которых длина когерентности и глубина проникновения являются функциями длины свободного пробега  $l$  «нормальных» электронов. Уменьшение  $l$  понижает  $\xi_0$  и повышает  $\lambda_L$ .

Различие между сверхпроводниками первого и второго рода очень существенно. В присутствии магнитных полей они имеют совершенно различные свойства.

Сверхпроводники первого рода (или пиппардовские сверхпроводники) ведут себя примерно как «идеальные» сверхпроводники, о которых говорилось выше. Их поведение описывается не теорией Лондонов, а нелокальной теорией Пиппарда. С микроскопической точки зрения свойства сверхпроводников первого рода хорошо объясняются теорией БКШ в ее первоначальной форме. Большинство ранних экспериментов было посвящено сверхпроводникам первого рода. Теория БКШ может объяснить зависимость удельной теплоемкости от температуры, затухание звука, поглощение волн в инфракрасной области, туннельные эффекты и т. д. Эти свойства сверхпроводников первого рода подробно описаны в целом ряде книг, к которым мы отсылаем читателя.

Настоящая книга посвящена сверхпроводникам второго рода (или лондоновским сверхпроводникам). Впервые эти сверхпроводники были исследованы Шубниковым и др. [10]<sup>1)</sup>, и их значение сильно возросло за последние несколько лет. Мы начнем с краткого обзора основных магнитных свойств сверхпроводников второго рода.

<sup>1)</sup> Идея о существовании в природе двух родов сверхпроводников была высказана впервые в 1952 г. А. А. Абрикосовым и



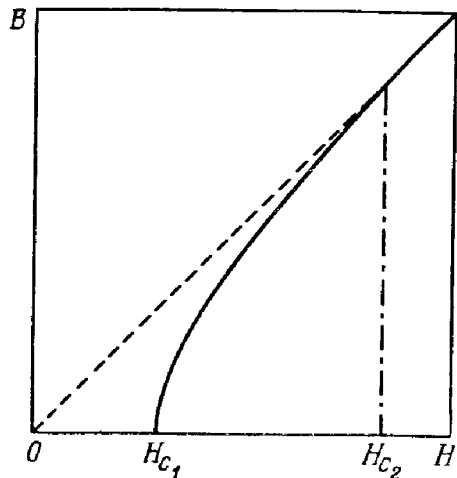
## § 7. Магнитные и термодинамические свойства сверхпроводников второго рода

Макроскопический цилиндр из сверхпроводника второго рода, помещенный во внешнее поле  $H$ , параллельное его оси, обнаруживает свойства, изображенные на фиг. 6 и 7. Существуют три интересные области, зависящие от величины внешнего поля.

а) Вытеснение поля из образца (эффект Мейснера) происходит полностью только при значениях поля  $H < H_{c_1}$ , где  $H_{c_1}$  — критическое поле, величина которого ниже термодинамического критического поля  $H_c$ , определяемого соотношением (1.5).

б) При  $H_{c_2} > H > H_{c_1}$  магнитный поток постепенно проникает в образец, но даже при термодинамическом равновесии этот поток меньше потока в нормальном состоянии. Тогда возникает новое состояние, при котором образуется решетка из квантованных вихрей сверхпроводящего тока, несущих магнитный поток; это состояние обычно называют «смешанным состоянием», иногда состоянием с «вихревыми нитями», или «состоянием Шубникова».

в) При  $H > H_{c_2}$  образец переходит в нормальное состояние, а переход, происходящий при  $H = H_{c_2}$ , является фазовым переходом второго рода<sup>1)</sup>. Критическое

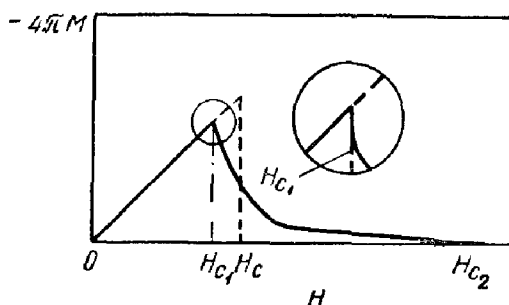


Фиг. 6. Зависимость индукции  $B$  от поля  $H$  для сверхпроводника второго рода.

Н. В. Заварицким [16] на основе экспериментальных результатов Л. В. Шубникова с соавторами [10] по кривым намагничивания сверхпроводящих сплавов и данных Н. В. Заварицкого по критическим полям тонких сверхпроводящих пленок, сконденсированных при низкой температуре. — Прим. ред.

<sup>1)</sup> Мы здесь пренебрегаем явлением поверхностной сверхпроводимости. Она будет подробно рассмотрена ниже.

значение поля  $H_{c_2}$  выше  $H_c$  и может достигать очень больших величин. В табл. 2 приведены значения  $H_{c_1}$  и  $H_{c_2}$  для нескольких веществ.



Фиг. 7. Зависимость намагниченности от поля  $H$  для сверхпроводника второго рода.

Внутри круга в увеличенном масштабе изображена окрестность поля  $H_{c_1}$ .

Поля  $H_{c_1}$  и  $H_{c_2}$  зависят от температуры. Эта зависимость изображена на фиг 8. Кривые  $H_{c_1}(T)$  и  $H_c(T)$  являются границами трех областей:  $\alpha$ ) для которой  $B = 0$

Таблица 2

НЕКОТОРЫЕ НЕДАВНО ВЫПОЛНЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПОЛЕЙ  
 $H_{c_1}$ ,  $H_{c_2}$  и  $H_c$  ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Соединение или элемент	$H_{c_1}$ , э	$H_c$ , э	$H_{c_2}$ , э	Темпера- тура, °К	Литера- тура
Pb	550	550	550	4,2	[11]
Pb — 15% Ir	250	650	3040	4,2	[11]
Pb — 25% In	195 ~ 215	570	3500	4,2	[11]
Pb — 30% Tl	145	430	2920	4,2	[11]
Pb — 2,4% Hg	340	580	1460	4,2	[11]
Pb — 8,8% Bi	245	675	3250	4,2	[11]
Nb	~ 1300	1608	2680	4,2	[12]
Nb — 50% Ta	—	~ 252	1470	5,6	[12]

(эффект Мейсснера),  $\beta$ ) для которой  $B < H$  (смешанное состояние) и  $\gamma$ ) для которой  $B = H$  (нормальное состояние).

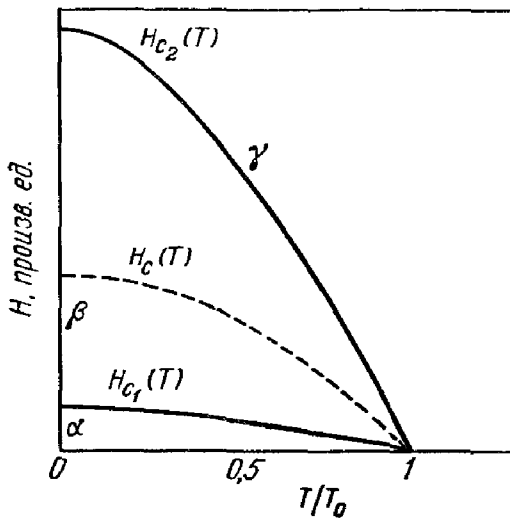
Магнитные свойства сверхпроводников второго рода при данной температуре могут быть описаны при помощи индукции внутри вещества (фиг. 6) или намагниченности (фиг. 7)

$$-4\pi M = H - B. \quad (1.25)$$

Понятие «термодинамического критического поля»  $H_c$  для сверхпроводников второго рода может быть введено с помощью уравнения (1.5):

$$F_n(T) - F_s(T) = \frac{H_c^2}{8\pi},$$

где  $F_n(T)$  и  $F_s(T)$  — свободная энергия в нормальном и сверхпроводящем состояниях в нулевом поле. Необходимо подчеркнуть, что для сверхпроводников первого рода



Фиг 8. Схематическая зависимость критических полей  $H_{c1}$  и  $H_{c2}$  от температуры для сверхпроводника второго рода.

$\alpha$  — полный эффект Мейсснера,  $\beta$  — смешанное состояние,  $\gamma$  — нормальное состояние.

это уравнение определяет истинное критическое поле, в то время как для сверхпроводников второго рода оно служит лишь для введения удобной величины. Магнитные свойства сверхпроводников первого и второго рода, имеющих одинаковую форму и одинаковую величину  $H_c$ ,

сравниваются на фиг. 7 и 8, где пунктирная линия соответствует зависимости намагниченности от поля и зависимости  $H_c$  от температуры для сверхпроводников первого рода.

Для зависимости намагниченности от поля при  $H < H_c$  и  $B = 0$  имеем

$$\int_0^{H_c} M dH = - \frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (1.26)$$

Аналогичное соотношение для сверхпроводников второго рода имеет вид

$$\int_0^{H_{c_2}} M dH = - \frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (1.27)$$

Термодинамический потенциал Гиббса можно записать в общем виде как

$$G = F(B) - \frac{BH}{4\pi}. \quad (1.28)$$

Равновесное значение  $B(H)$  получим из условия

$$\left( \frac{\partial G}{\partial B} \right)_H = 0. \quad (1.29)$$

В нормальном состоянии, когда индукция  $B_n$  равна  $H$ ,  $G$  удобно выразить в форме

$$G_n = F_n(0) + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{BH}{4\pi}. \quad (1.30)$$

Для сверхпроводящего состояния  $G_s$  определяется из (1.28) при  $F(B) = F_s(B_s)$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial H} (G_n - G_s) = \frac{B_s - B_n}{4\pi} = \frac{B_s - H}{4\pi}. \quad (1.31)$$

Согласно (1.29),

$$\frac{\partial}{\partial H} (G_n - G_s) = \frac{d}{dH} (G_n - G_s)$$

и

$$\int_0^{H_{c_2}} M dH = |G_n - G_s|_0^{H_{c_2}}.$$

При  $H = H_{c_2}$  имеем  $G_n = G_s$ , а при  $H = 0$   $G_n - G_s = F_n - F_s = -H_{c_1}^2/8\pi$ , что доказывает соотношение (1.27). Следовательно, термодинамическое критическое поле может быть найдено из обратимой кривой намагничивания путем оценки площади под кривой  $M = f(H)$ .

Другим интересным свойством сверхпроводников второго рода является тот факт, что переходы в полях  $H_{c_1}(T)$  и  $H_{c_2}(T)$  — переходы второго рода. При этих переходах не должно быть скрытой теплоты и должен существовать скачок удельной теплоемкости. Гудман [13] вывел для этих переходов несколько интересных термодинамических соотношений.

Определяя термодинамический потенциал  $G_i$ , соответствующий фазе  $i$  [ $i = (\alpha), (\beta), (\gamma)$ ], имеем

$$G_i = F_i(T, B_i) - \frac{B_i H}{4\pi}. \quad (1.32)$$

Потенциал  $G_i$  должен быть минимальным при заданных  $H$  и  $T$ , так что

$$\left( \frac{\partial F}{\partial B_i} \right)_{H, T} = \frac{H}{4\pi}. \quad (1.33)$$

Соответствующая энтропия равна

$$S_i = - \left( \frac{\partial G_i}{\partial T} \right)_H = - \frac{\partial F_i}{\partial T}. \quad (1.34)$$

При равновесии между двумя фазами  $i$  и  $j$  поле равно критическому полю  $H_{ij}(T)$ , их термодинамические потенциалы равны, и если переход является переходом второго рода, нет скрытой теплоты перехода и энтропии обеих фаз также равны. Отсюда можно показать, что в точке перехода индукция непрерывна.

Вычисляя изменение  $G_i$  при изменениях  $dH$  поля вдоль кривой  $H = H_{ij}(T)$  [т. е. для  $dH = (dH_{ij}/dT)dT$ ],

получаем

$$\frac{dG_i}{dT} = \frac{dF_i}{dT} - \frac{B_i}{4\pi} \frac{dH_{ij}}{dT} - \frac{H_{ij}}{4\pi} \frac{dB_i}{dT} = \frac{\partial F_i}{\partial T} + \frac{\partial F_i}{\partial B_i} \frac{dB_i}{dT} - \frac{B_i}{4\pi} \frac{dH_{ij}}{dT} - \frac{H_{ij}}{4\pi} \frac{dB_i}{dT} = -S_i - \frac{B_i}{4\pi} \frac{dH_{ij}}{dT}. \quad (1.35)$$

При выводе выражения (1.35) были использованы выражения (1.33) и (1.34). На кривой перехода  $H = H_{ij}(T)$ . Потенциал  $G_i \equiv G_j$ , т. е.  $dG_i/dT \equiv dG_j/dT$ . Если нет скрытой теплоты, то  $S_i \equiv S_j$ , так что

$$B_i \equiv B. \quad (1.36)$$

Вычислим теперь скачок удельной теплоемкости. Для фиксированного  $H$  в фазе  $i$

$$C_i = T \left( \frac{\partial S_i}{\partial T} \right)_H. \quad (1.37)$$

Вдоль равновесной кривой  $H = H_{ij}(T)$  полная производная от энтропии равна

$$\frac{dS_i}{dT} = \left( \frac{\partial S_i}{\partial T} \right)_H + \left( \frac{\partial S_i}{\partial H} \right)_T \frac{dH_{ij}}{dT}. \quad (1.38)$$

Поскольку нет скрытой теплоты,  $S_i \equiv S_j$  вдоль кривой  $H = H_{ij}(T)$  и

$$\frac{dS_i}{dT} = \frac{dS_j}{dT}. \quad (1.39)$$

Скачок теплоемкости равен

$$C_j - C_i = T \left( \frac{\partial S_j}{\partial T} \right)_H - T \left( \frac{\partial S_i}{\partial T} \right)_H = T \frac{dH_{ij}}{dT} \left[ \left( \frac{\partial S_i}{\partial H} \right)_T - \left( \frac{\partial S_j}{\partial H} \right)_T \right]. \quad (1.40)$$

Производная  $\partial S_j / \partial H$  может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial S_i}{\partial H} \right)_T &= \left( \frac{\partial S_i}{\partial B_i} \right)_T \left( \frac{\partial B_i}{\partial H} \right)_T = - \frac{\partial^2 F_i}{\partial B_i \partial T} \left( \frac{\partial B_i}{\partial H} \right)_T = \\ &= - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{B_i} \left( \frac{\partial B_i}{\partial H} \right)_T. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Здесь были использованы выражения (1.33) и (1.34).

С другой стороны,  $dH_{ij}/dT$  равно

$$\frac{dH_{ij}}{dT} = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{B_i} + \left( \frac{\partial H}{\partial B_i} \right)_T \frac{dB_i}{dT}, \quad (1.42)$$

где  $dV/dT = dB_i/dT = dB_j/dT$  — изменения  $V$  вдоль равновесной кривой [см. (1.36)].

Комбинируя выражения (1.41) и (1.42), получаем

$$\left(\frac{\partial S_i}{\partial H}\right)_T = -\frac{1}{4\pi} \frac{dH_{ij}}{dT} \frac{\partial B_i}{\partial H} + \frac{1}{4\pi} \frac{dB}{dT}, \quad (1.43)$$

и скачок удельной теплоемкости равен

$$C_j - C_i = \frac{T}{4\pi} \left(\frac{dH_{ij}}{dT}\right)^2 \left[ \left(\frac{\partial B_j}{\partial H}\right)_T - \left(\frac{\partial B_i}{\partial H}\right)_T \right]. \quad (1.44)$$

Это соотношение является по существу обобщением формулы Эренфеста. Рассматривая соотношение (1.44), можно сделать ряд заключений. При переходе ( $\alpha$ )  $\rightarrow$  ( $\beta$ ) (идеальный эффект Мейсснера  $\rightarrow$  смешанное состояние)  $H = H_c(T)$ , и мы ожидаем из экспериментальных данных, что  $\partial V_\alpha/\partial H = 0$ ,  $\partial V_\beta/\partial H = \infty$  (фиг. 6) и что должен быть обнаружен бесконечный скачок удельной теплоемкости. Фактически это очень трудно наблюдать, поскольку особая точка замаскирована гистерезисом. Однако переход второго рода при  $H = H_c$  недавно наблюдался в ниобии [14].

При переходе ( $\beta$ )  $\rightarrow$  ( $\gamma$ ) (смешанное состояние  $\rightarrow$  нормальное состояние)  $H = H_c(T)$ , и из экспериментальных данных  $\partial V_\beta/\partial H > 1$  и  $\partial V_\gamma/\partial H = 1$ . Зная величину  $dH_c/dT$ , можно вычислить  $C_\beta - C_\gamma$ . Сначала был сделан вывод, что  $C_\beta > C_\gamma$ . Однако сравнение выражения (1.44) с экспериментом не всегда возможно, поскольку не все входящие туда величины измерены. Для  $V_3\text{Ga}$  было найдено, что у перехода нет скрытой теплоты, и были измерены скачки  $C_\beta - C_\gamma$  и  $dH_c/dT$ . Экстраполяция  $\partial V/\partial H$  до  $H = H_c$  согласуется с точностью до 10% с величиной, вычисленной из выражения (1.44).

## § 8. Идеальные сверхпроводники второго рода и жесткие сверхпроводники

Мы видели, что в сверхпроводниках второго рода сверхпроводимость может существовать в очень высоких полях ( $\sim 10^6$  э). В силу правила Сильсби можно ожидать, что критический ток  $I_c$  будет также очень велик.

Фактически при *термодинамическом равновесии* этот критический ток меньше критического тока сверхпроводника первого рода, имеющего то же самое критическое поле  $H_c$ .

Это можно увидеть, если вычислить теоретический критический ток  $I_c$  в цилиндре радиусом  $a$ , в котором ток  $I$  течет параллельно оси (фиг. 9). Поле на поверхности цилиндра равно

$$H(a) = \frac{2I}{ca}, \quad (1.45)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме.

Для сверхпроводника первого рода, когда  $I$  превышает величину

$$I_c(I) = \frac{ca}{2} H_c, \quad (1.46)$$

цилиндр должен вблизи поверхности находиться в нормальном состоянии<sup>1)</sup> и протекание тока сопровождается рассеянием теплоты.

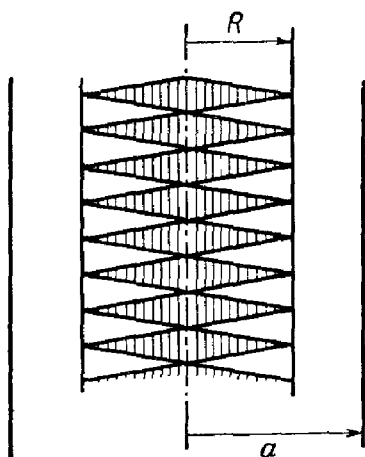
Для сверхпроводника второго рода, до тех пор пока

$2I/ca < H_c$ , соблюдается эффект Мейсснера и ток течет в области шириной  $\lambda$ , расположенной вблизи поверхности, где  $\lambda$  — глубина проникновения поля. Когда  $H(a)$  превышает  $H_c$ , происходит диссипация энергии, и критический ток  $I_c(II)$  равен

$$I_c(II) = \frac{ca}{2} H_{c1}. \quad (1.47)$$

Этот критический ток меньше  $I_c(I)$  во столько раз, во сколько  $H_{c1}$  меньше  $H_c$ .

<sup>1)</sup> Фактически цилиндр распадается на две части. Для  $R < r < a$  — нормальный слой, а для  $0 > r > R$  образец находится в промежуточном состоянии, в котором нормальные и сверхпроводящие области чередуются, располагаясь перпендикулярно оси цилиндра (фиг. 9).



Фиг. 9. Промежуточное состояние цилиндра из сверхпроводника второго рода. Ток направлен параллельно оси цилиндра.



То, что ток  $I_c(II)$  определяется выражением (1.47), следует из того, что при  $H > H_c$ , сверхпроводник второго рода находится в «смешанном состоянии», которое *приблизительно* может быть представлено как совокупность нормальных областей (нитей) с малым радиусом, заключенных в сверхпроводящую матрицу. Как только ток  $I$  достигает значения, превышающего  $I_c(II)$ , на поверхности цилиндра возникают вихревые нити. Они имеют форму колец (вдоль силовых магнитных линий). Нити движутся в глубь цилиндра и исчезают в центре с выделением тепла.

Для получения токов, больших  $I_c(II)$ , необходимо затруднить смещение вихревых нитей. Для закрепления нитей («пиннинга») используются дефекты структуры<sup>1)</sup>.

Сверхпроводники второго рода с закрепляющими центрами (центрами пиннинга) часто называют жесткими сверхпроводниками. Они представляют большой технический интерес, так как могут быть использованы для конструирования сверхпроводящих магнитов, создающих поля до нескольких сотен тысяч эрстед. Изучение обратимых процессов в идеальных сверхпроводниках второго рода (без пиннинга) тем не менее является важным и с теоретической и с экспериментальной точек зрения. За последние 10 лет в этой области достигнуты многочисленные успехи, рассмотрению которых посвящаются следующие главы. Вторая часть настоящей книги будет посвящена необратимым процессам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kamerlingh-Onnes H., Leiden Comm., 122b, 124c (1911).
2. Quinn D. J., Ittner W. B., Journ. Appl. Phys., **33**, 748 (1962).
3. Meissner W., Ochsenfeld R., Naturwiss., **21**, 787 (1933).
4. Silsbee F. B., Journ. Wash. Acad. Sci., **6**, 597 (1916).
5. Gorter C. J., Casimir H. B., G., Physica, **1**, 306 (1934).
6. London F., London H., Proc. Roy. Soc., **A149**, 71 (1935); Physica, **2**, 341 (1935).
7. Pippard A. B., Proc. Roy. Soc., **A216**, 547 (1950).
8. Faber T. E., Pippard A. B., Proc. Roy. Soc., **A231**, 336 (1955).

<sup>1)</sup> Это не оказывает большого влияния на  $H_{c2}$ , но сильно изменяет ток  $I_c(II)$  [15].

9. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R., Phys. Rev., **108**, 1175 (1957).
10. Шубников Л. В., Хоткевич В. И., Шепелев Ю. Д., Рябинин Ю. Н., ЖЭТФ, **7**, 221 (1937).
11. Druyvesteyn W. F., диссертация, Eindhoven (1965).
12. McConville T., Serin B., Phys. Rev., **140**, A1169 (1965).
13. Goodman B. B., Phys. Lett., **1**, 215 (1962).
14. Serin B., Phys. Lett., **16**, 112 (1965).
15. Gorter C. J., Phys. Lett., **1**, 69; **2**, 26 (1962).
16. Абрикосов А. А., ДАН СССР, **86**, 489 (1952).
17. Linton E., Superconductivity, New York, 1961. (Имеется перевод: Э. Линтон, Сверхпроводимость, М., 1964.)

## Глава 2

# ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

### § 1. Свободная энергия и уравнения Гинзбурга — Ландау

В 1937 г. Ландау [1] предложил общую теорию фазовых переходов второго рода, основанную на трех фундаментальных предположениях (см. [9]):

а) Существует параметр упорядочения  $\psi$ , который при переходе обращается в нуль.

б) Свободная энергия может быть разложена в ряд по степеням  $\psi$ .

в) Коэффициенты разложения являются регулярными функциями  $T$ .

Таким образом, согласно Ландау, свободную энергию на единицу объема можно записать в виде<sup>1)</sup>

$$F = F_n + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\psi|^4 + \dots, \quad (2.1)$$

где  $F_n$  — энергия нормального состояния. Согласно предположению «в», коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  должны обладать следующими свойствами: функция  $\alpha(T)$  отрицательна при  $T < T_0$  и равна нулю при  $T = T_0$ , тогда как производная  $d\alpha/dT$  остается конечной при  $T = T_0$ . Вблизи  $T_0$  функцию  $\alpha(T)$  можно записать в виде

$$\alpha(T) = (T - T_0) \left( \frac{d\alpha}{dT} \right)_{T=T_0}. \quad (2.2)$$

Функция же  $\beta(T)$  является положительной и вблизи  $T_0$  записывается как

$$\beta(T) \approx \beta(T_0). \quad (2.3)$$

---

<sup>1)</sup> С помощью микроскопической теории можно показать, что в разложении (2.1) появляются только члены с четными показателями степени  $|\psi|$  (гл. 5).

При  $T < T_0$  свободная энергия (2.1) имеет абсолютный минимум при

$$|\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) обеспечивает равенство  $|\psi|$  нулю при  $T = T_0$ . Минимум свободной энергии, соответствующий (2.4), равен

$$F = F_n - \frac{\alpha^2}{2\beta}. \quad (2.5)$$

Если теория применяется для сверхпроводника, то  $F$  — это свободная энергия сверхпроводника  $F_s$  в отсутствие поля. В гл. 1 было показано, что

$$F_n - F_s = \frac{H_c^2(T)}{8\pi}, \quad (2.6)$$

а из (2.5) следует, что вблизи  $T_0$

$$H_c^2(T) = \frac{4\pi\alpha^2}{\beta}. \quad (2.7)$$

Из уравнений (2.2) и (2.3) следует, что  $F_n - F_s \sim \sim (T - T_0)^2$ . Это общий результат теории фазовых переходов второго рода Ландау. Из этих же уравнений следует, что поле  $H_c(T)$  пропорционально  $T - T_0$ , что находится в согласии с выражением (1.1) для зависимости  $H_c$  от  $T$ <sup>1)</sup>

$$H_c(T) = H_c(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^2 \right]. \quad (2.8)$$

Применимость выражения (2.1) ограничена случаем, когда параметр упорядочения  $\psi$  постоянен по всему образцу. Если  $\psi$  изменяется в пространстве, то к (2.1) необходимо добавить *пространственные* производные  $\psi$ . Можно ожидать, что первый член будет пропорционален  $|\nabla\psi|^2$ . Общее выражение Ландау для свободной энергии вблизи точки перехода второго рода должно иметь вид

$$f = \int_{\Omega} F d\mathbf{r} \quad (2.9)$$

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 11. — Прим. ред.

Здесь интеграл берется по всему объему  $\Omega$  образца, а функция  $F(\mathbf{r})$  имеет вид

$$F = F_n + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\psi|^4 + \gamma|\nabla\psi|^2 + \dots \quad (2.10)$$

Разложение (2.10) не принесло бы большой пользы для объяснения свойств сверхпроводников, если бы Гинзбург и Ландау [2] не предложили применить (2.10) для описания поведения сверхпроводника в присутствии магнитного поля. Проявив большую физическую интуицию, они стали рассматривать параметр упорядочения  $\psi$  как некую «волновую функцию» для «частицы» с зарядом  $e^*$  и массой  $m^*$ . Для того чтобы обеспечить градиентную инвариантность, они записали свободную энергию в форме

$$F_s = F_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*\mathbf{A}}{c} \right) \psi \right|^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi}. \quad (2.11)$$

Вектор  $\mathbf{A}$  — вектор-потенциал поля  $\mathbf{h}$ , т. е.

$$\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.12)$$

и  $\hbar^2/8\pi$  — магнитная энергия.

Найдем теперь минимум свободной энергии  $f = \int_{\Omega} F d\mathbf{r}$  относительно вариации параметра упорядочения  $\psi$  и магнитного поля  $\mathbf{h}$  (т. е.  $\mathbf{A}$ )

$$\begin{aligned} \delta f = \int d\mathbf{r} & \left[ \alpha\psi \delta\psi^* + \beta|\psi|^2 \psi \delta\psi^* + \right. \\ & \left. + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left( i\hbar\nabla - \frac{e^*\mathbf{A}}{c} \right) \delta\psi^* \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*\mathbf{A}}{c} \right) \psi + \text{Компл. сопр.} \right] + \\ & + \int d\mathbf{r} \left[ \frac{\hbar}{8\pi} \cdot \text{rot } \delta\mathbf{A} - \frac{e^*}{2m^*c} \psi^* \delta\mathbf{A} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*\mathbf{A}}{c} \right) \psi + \right. \\ & \left. + \text{Компл. сопр.} \right], \quad (2.13) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \delta f = \int d\mathbf{r} \left\{ \delta\psi^* \left[ \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*\mathbf{A}}{c} \right)^2 \psi \right] + \text{Компл. сопр.} \right\} + \\ + \int d\mathbf{r} \left\{ \delta\mathbf{A} \cdot \left[ \frac{\text{rot } \mathbf{h}}{8\pi} - \frac{e^*}{2m^*c} \psi^* \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*\mathbf{A}}{c} \right) \psi \right] + \right. \\ \left. + \text{Компл. сопр.} \right\}. \quad (2.14) \end{aligned}$$

При выводе (2.14) предполагалось, что поверхностный интеграл

$$\int \left[ \delta\psi^* \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*\mathbf{A}}{c} \right) \psi + \text{Компл. сопр.} \right] \cdot d\sigma \quad (2.15)$$

равен нулю. Пока что у нас нет никаких оснований для того, чтобы считать этот интеграл равным нулю; мы вернемся к этому вопросу ниже<sup>1)</sup>. Требуя, чтобы  $f$  была минимальной, т. е.  $\delta f = 0$ , из (2.14) получаем два уравнения Гинзбурга — Ландау:

$$\frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*\mathbf{A}}{c} \right)^2 \psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\text{rot } \mathbf{h}}{4\pi} = \frac{\mathbf{j}}{c} = \frac{e^*\hbar}{2im^*c} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*c^2} \psi^* \psi \mathbf{A}. \quad (2.17)$$

С помощью первого уравнения можно вычислить параметр упорядочения  $\psi$  в присутствии поля, а уравнение (2.17) определяет распределение токов. Необходимо подчеркнуть, что в этих уравнениях  $\mathbf{h}$  — внутреннее, а не приложенное поле и что в принципе уравнения (2.16) и (2.17) вместе с уравнением (2.12) позволяют определить  $\mathbf{h}$  и  $\psi$ .

Рассмотрим теперь проблему заряда  $e^*$  и массы  $m^*$ . В своей оригинальной статье Гинзбург и Ландау не видели «причин считать заряд  $e^*$  отличным от заряда элек-

<sup>1)</sup> Фактически нужно найти минимум термодинамического потенциала  $G$ . Появляющийся при этом дополнительный поверхностный интеграл следует приравнять нулю. Как обычно, это обеспечивает на границе образца непрерывность компоненты поля, параллельной поверхности.

трона». Следовательно, они положили  $e^* = e$  и  $m^* = m$ . Позже Горьков [3, 4] смог вывести уравнения (2.16) и (2.17) с помощью микроскопической теории. Этот вопрос будет рассмотрен более детально в гл. 5. Однако мы остановимся здесь на некоторых результатах, полученных Горьковым.

В микроскопической теории важной физической величиной является так называемый потенциал пары<sup>1)</sup>  $\Delta(\mathbf{r}) = V \langle \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rangle$ . Горьков получил для этого потенциала два уравнения, аналогичных (2.16) и (2.17), и показал тем самым, что параметр  $\psi(\mathbf{r})$  пропорционален  $\Delta(\mathbf{r})$ . В то же самое время оказалось, что  $e^* = 2e$ . Это свойство связано с наличием куперовских пар. С другой стороны, масса  $m^*$  входит в коэффициент пропорциональности между  $\psi$  и  $\Delta$  и поэтому остается произвольной. Можно было бы в качестве  $m^*$  взять  $2m$ , но обычно массу  $m^*$  берут равной массе электрона  $m$ .

Уравнения Гинзбурга — Ландау принимают вид

$$\frac{1}{2m} \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \psi + \alpha\psi + \beta |\psi|^2 \psi = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\text{rot } \mathbf{h}}{4\pi} = \frac{\mathbf{j}}{c} = \frac{e\hbar}{imc} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{4e^2}{mc^2} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (2.19)$$

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  также выводятся из микроскопической теории. Для чистых веществ<sup>2)</sup> Горьков получил

$$\alpha = 1,83 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0^2} \frac{T - T_0}{T_0}, \quad (2.20)$$

$$\beta = 0,35 \frac{1}{N(0)} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0^2} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_0)^2}. \quad (2.21)$$

Здесь  $\xi_0$  — длина когерентности и  $N(0)$  — плотность состояний на поверхности Ферми.

Чтобы решить вопрос полностью, необходимо добавить к уравнениям (2.16) и (2.17) граничные условия. Например, можно считать, что ток, текущий через

<sup>1)</sup> Здесь  $V$  — параметр взаимодействия между электронами (см. гл. 5).

<sup>2)</sup> Вопрос о «чистых» сверхпроводниках будет обсуждаться в гл. 5.

поверхность образца, равен нулю. Уравнение (2.19) показывает, что это условие эквивалентно условию

$$\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c}\right)_n \psi = i\lambda\psi, \quad (2.22)$$

где  $n$  обозначает компоненту  $(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}/c)$ , параллельную нормали к поверхности. Однако условие (2.22) не обеспечивает равенства нулю поверхностного интеграла (2.15). В своей оригинальной статье Гинзбург и Ландау положили  $\lambda = 0$ , т. е.

$$\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c}\right)_n \psi = 0, \quad (2.23)$$

и тогда предположение (2.15) удовлетворяется. Фактически равенство нулю поверхностного интеграла (2.15) не является необходимым условием теории, поскольку форма свободной энергии  $F$ , принятая Гинзбургом и Ландау, не справедлива на расстояниях от поверхности, меньших  $\xi_0$ . Микроскопическая теория [5] показала, что условие (2.23) выполняется на границе сверхпроводник — изолятор и на границе сверхпроводник — вакуум, а условие (2.22) — на границе сверхпроводник — нормальный металл. Мы увидим в гл. 4, что условия (2.22) и (2.23) играют важную роль при возникновении сверхпроводимости.

## § 2. Две характеристические длины $\xi(T)$ и $\lambda(T)$ и справедливость схемы Гинзбурга — Ландау

### 1. Область изменения параметра упорядочения. Зависящая от температуры длина когерентности

Уравнения (2.16) и (2.17) Гинзбурга — Ландау имеют два очевидных частных решения:

а)  $\psi \equiv 0$ , когда  $\mathbf{A}$  определяется только уравнением  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$  — приложенное поле. Это решение соответствует нормальному состоянию.

б)  $\psi = \psi_0 = (-\alpha/\beta)^{1/2}$  и  $\mathbf{A} = 0$ . Это решение отвечает обычному сверхпроводящему состоянию с идеальным эффектом Мейсснера (при пренебрежении поверхностными эффектами). Согласно (2.4),  $\psi_0$  отвечает минимальной свободной энергии при  $\alpha < 0$ , т. е. когда  $T < T_0$ .



В случае очень слабого поля можно ожидать, что  $\psi$  будет очень медленно изменяться вблизи значения  $\psi_0$ . Область изменения  $\psi$  получаем из первого уравнения Гинзбурга — Ландау при  $\mathbf{A} = 0$ . Введем новую функцию

$$f = \frac{\psi}{\psi_0}, \quad (2.24)$$

где  $f$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 f + \alpha f - \alpha f^3 = 0. \quad (2.25)$$

Естественно теперь ввести длину  $\xi(T)$  таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$-\frac{\hbar^2}{2m\alpha} = \xi^2(T), \quad (2.26)$$

откуда получаем область изменения  $f$  (т. е.  $\psi$ ). Эта новая характеристическая длина называется зависящей от температуры длиной когерентности.

## 2. Глубина проникновения в слабых полях. Уравнение Лондонов

Рассмотрим теперь уравнение для тока. С точностью до членов первого порядка по  $\hbar$  величину  $|\psi|^2$  можно заменить  $\psi_0^2$  — значением  $|\psi|^2$  в отсутствие поля, т. е.

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{4e^2}{mc} \psi_0^2 \mathbf{A}. \quad (2.27)$$

Отсюда получаем

$$\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{4e^2}{mc} \psi_0^2 \mathbf{h}, \quad (2.28)$$

что эквивалентно уравнению Лондонов с глубиной проникновения, равной<sup>1)</sup>

$$\lambda(T) = \left( \frac{mc^2}{16\pi e^2 \psi_0^2} \right)^{1/2}. \quad (2.29)$$

<sup>1)</sup> Вопрос о сверхпроводнике, занимающем полупространство  $z > 0$ , может быть решен при помощи граничного условия (2.23). В этом случае задача та же, что и в гл. 1, § 4.

Выражение (2.29) аналогично выражению Лондонов (1.15), где число сверхпроводящих электронов  $n_s$  заменено на  $4\psi_0^2$ .

Таким образом, мы ввели вторую характеристическую длину  $\lambda(T)$  — зависящую от температуры глубину проникновения, которая определяет область изменения магнитного поля, т. е.  $h$  и  $A$ .

### 3. Справедливость теории Гинзбурга—Ландау

Для решения вопроса о справедливости уравнений Гинзбурга — Ландау необходимо обсудить четыре вопроса.

а) Первый вопрос связан со справедливостью общей теории Ландау для переходов второго рода. Ландау предположил, что свободную энергию можно разложить в ряд по степеням  $\psi$  и что коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  имеют вид (2.2) и (2.3). Ни одно из этих предположений, вообще говоря, не выполняется, особенно при наличии эффектов ближнего порядка. Однако в случае сверхпроводников можно показать теоретически, что разложение Ландау справедливо.

б) Как будет показано ниже (гл. 5), обсуждение вывода уравнений Гинзбурга — Ландау из микроскопической теории дает условия их применимости, совпадающие с теми, которые будут получены в пунктах «в» и «г».

в) Параметр  $\psi$  должен быть функцией, медленно меняющейся на расстояниях порядка  $\xi_0$ . Поэтому необходимым условием справедливости теории является требование

$$\xi(T) \gg \xi_0. \quad (2.30a)$$

Из выражения (2.20) для  $\alpha$ , выведенного Горьковым с помощью микроскопической теории для случая чистых сверхпроводников, используя (2.26), получаем

$$\xi(T) = 0,74 \left( \frac{T_0}{T_0 - T} \right)^{1/2} \xi_0. \quad (2.31)$$

Следовательно, условие (2.30a) эквивалентно условию

$$\frac{T_0 - T}{T_0} \ll 1, \quad (2.30б)$$

т. е. температура должна быть близка к  $T_0$  — критической температуре в нулевом поле.

г) Рассмотрим теперь изменение поля  $h$ .

Уравнения Гинзбурга — Ландау устанавливают локальную связь между током и вектором-потенциалом. Как уже упоминалось во введении (гл. 1, § 5 и 6), общее соотношение не может быть локальным. Фактически в чистом сверхпроводнике при постоянном значении  $|\Phi|$  и малой величине  $h$  ток  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  зависит от  $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$  для расстояний  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim \xi_0$ . Локальное приближение справедливо только, если  $h$  и  $\mathbf{A}$  являются функциями, медленно меняющимися на расстояниях порядка  $\xi_0$ . Чтобы это было справедливо, необходимо выполнение условия

$$\lambda(T) \gg \xi_0. \quad (2.32a)$$

Сравнивая выражения (2.29) для  $\lambda(T)$ , (1.19) для  $\lambda_L(0)$  (лондоновская глубина проникновения при  $T = 0$ ) и значения  $\alpha$  и  $\beta$ , полученные Горьковым, имеем<sup>1)</sup>

$$\lambda(T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_L(0) \left( \frac{T_0}{T_0 - T} \right)^{1/2} \gg \xi_0, \quad (2.32б)$$

что эквивалентно условию

$$\frac{T_0 - T}{T_0} \ll \left[ \frac{\lambda_L(0)}{\xi_0} \right]^2. \quad (2.32в)$$

Это опять указывает на то, что температура должна быть близка к  $T_0$ . Здесь нужно рассмотреть два случая.

Если  $\lambda_L(0) \ll \xi_0$ , сверхпроводник принадлежит к сверхпроводникам первого рода; более сильное ограничение дается условием (2.32в).

Если  $\lambda_L(0) \gg \xi_0$ , сверхпроводник принадлежит к сверхпроводникам второго рода, и более сильное ограничение дается теперь условием (2.30б). В этом случае температурный интервал, для которого теория справедлива, значительно шире, чем для сверхпроводников первого рода.

Тем не менее теория Гинзбурга — Ландау может быть использована для описания сверхпроводников первого рода так же, как и сверхпроводников второго рода

<sup>1)</sup> Вывод этого выражения см. в гл. 5.

(в температурной области вблизи  $T_0$ ). В следующем параграфе она будет использована для выяснения разницы между двумя типами сверхпроводимости.

### § 3. Параметр Гинзбурга — Ландау $\kappa(T)$

В предыдущем параграфе мы определили две характеристические длины  $\xi(T)$  и  $\lambda(T)$ . Согласно вычислениям Горькова, они изменяются как  $(T_0 - T)^{-1/2}$  при  $T \rightarrow T_0$ . Однако их отношение

$$\kappa(T) = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} \quad (2.33)$$

остаётся конечным при  $T = T_0$ .

Безразмерный параметр  $\kappa(T)$  можно связать с критическим полем  $H_c(T)$ , используя выражения  $\psi_0^2 = -\alpha/\beta$  и  $H_c^2 = 4\pi\alpha^2/\beta$ . Легко найти, что

$$\kappa(T) = 2\sqrt{2} \frac{e}{\hbar c} \lambda^2(T) H_c(T). \quad (2.34)$$

Согласно (2.34), параметр  $\kappa(T)$  можно определить, измеряя глубину проникновения  $\lambda(T)$  в слабых полях и термодинамическое критическое поле  $H_c(T)$ . Однако, как будет показано в следующей главе, на практике лучшие значения параметра  $\kappa(T)$  получаются из экспериментальных данных о переохлаждении.

Используя значения, полученные Горьковым для  $\lambda(T)$  и  $\xi(T)$ , имеем

$$\kappa(T) \approx \frac{\lambda_L(0)}{\xi_0}. \quad (2.35)$$

Следовательно, можно ожидать, что параметр Гинзбурга — Ландау  $\kappa$  должен быть каким-либо образом связан с различием между сверхпроводниками второго и первого рода. Необходимо подчеркнуть, что Гинзбург и Ландау в своей оригинальной статье, не зная о существовании длины когерентности  $\xi_0$ , определяли параметр  $\kappa$  с помощью выражения<sup>1)</sup>

$$\kappa(T) = \frac{mc}{2e\hbar} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{1/2}. \quad (2.36)$$

<sup>1)</sup> Конечно, вместо  $2e$  должно быть  $e$ ,

Уравнения Гинзбурга — Ландау в литературе очень часто записывают в форме, которая содержит только следующие безразмерные величины:

$$\psi = \psi_0 f, \quad \mathbf{r} = \lambda(T) \boldsymbol{\rho}, \quad \frac{2e}{\hbar c} \xi(T) \mathbf{A} = \mathcal{A}, \quad \frac{2e}{\hbar c} \xi(T) \lambda(T) \mathbf{h} = \mathbf{f}. \quad (2.37)$$

В этих обозначениях для сверхпроводящего состояния  $f = 1$ , а для нормального  $f = 0$ , а приведенное критическое поле дается выражением

$$h_c = \left( \frac{4\pi\alpha^2}{\beta} \right)^{1/2} \frac{2e}{\hbar c} \xi(T) \lambda(T) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.38)$$

Уравнения (2.18) и (2.19) преобразуются теперь к такому виду:

$$\left( i \frac{\nabla}{\kappa} + \mathcal{A} \right)^2 f = f - |f|^2 f \quad (2.39)$$

и

$$-\text{rot rot } \mathcal{A} = -\text{rot } \mathbf{h} = |f|^2 \mathcal{A} + \frac{i}{2\kappa} (f^* \nabla f - f \nabla f^*). \quad (2.40)$$

Сюда следует добавить уравнение Максвелла<sup>1)</sup>

$$\mathbf{h} = \text{rot } \mathcal{A}. \quad (2.41)$$

От этих трех уравнений можно перейти к двум связанным уравнениям, содержащим только  $f$  и  $\mathbf{h}$ . Это можно сделать простейшим образом, записав  $f$  в форме

$$f = f_0 e^{i\varphi} \quad (2.42)$$

(где  $f_0$  — модуль и  $\varphi$  — фаза функции  $f$ ), а вектор-потенциал представив в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \frac{\nabla\varphi}{\kappa}. \quad (2.43)$$

К вектору-потенциалу можно добавить градиент любой скалярной функции. В этом случае, однако, был добавлен градиент фазы, так что это преобразование справедливо только для случая односвязной геометрии.

<sup>1)</sup> В (2.39) и (2.40) производные берутся по  $\boldsymbol{\rho}$ .

Уравнения (2.39) — (2.41) принимают вид

$$\left(i \frac{\nabla}{\kappa} + \mathcal{A}_0\right)^2 f_0 = f_0 - f_0^3, \quad (2.44)$$

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathcal{A}_0 = -\operatorname{rot} \mathbf{h} = f_0^2 \mathcal{A}_0, \quad (2.45)$$

$$\mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathcal{A}_0. \quad (2.46)$$

Фактически уравнение (2.44) зависит только от  $\mathcal{A}_0^2$ , так как член, содержащий  $\mathcal{A}_0$ , равен

$$\frac{i}{f_0} \frac{\nabla}{\kappa} \cdot (f_0^2 \mathcal{A}_0) = -\frac{i}{f_0} \frac{\nabla}{\kappa} \cdot (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathcal{A}_0) = 0.$$

Исключить  $\mathcal{A}_0$  теперь очень просто, и уравнения принимают вид

$$-\frac{\nabla^2}{\kappa^2} f_0 + \frac{1}{f_0^3} (\operatorname{rot} \mathbf{h})^2 = f_0 - f_0^3, \quad (2.47)$$

$$f_0^2 \mathbf{h} = \frac{2}{f_0} \operatorname{grad} f_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{h} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h}. \quad (2.48)$$

При выводе (2.47) и (2.48) были использованы известные соотношения

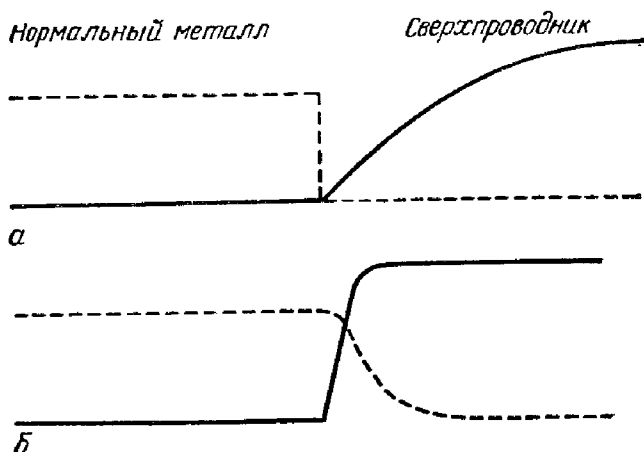
$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{rot} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \times \operatorname{grad} = 0.$$

Мы получили два связанных уравнения (2.47) и (2.48), зависящих только от поля и модуля параметра упорядочения. Они особенно удобны для решения одномерных задач, и мы используем их при выводе выражения для поверхностной энергии.

#### § 4. Поверхностная энергия

В принципе уравнения Гинзбурга — Ландау позволяют вычислить параметр упорядочения, поле, а следовательно, и токи. Однако эти уравнения нелинейны, поэтому вычисления очень промоздки и, вообще говоря, проводятся численными методами. Тем не менее они дают возможность сделать ряд качественных выводов без явного вычисления  $\psi$  или  $\mathbf{h}$ . В некоторых других случаях, например в случае линейных задач, и для некоторых частных значений параметра  $\kappa(T)$  сравнительно легко получить полное решение. Один из этих частных случаев связан с понятием поверхностной энер-

гии. Это понятие было введено Лондоном, который отметил, что при полном выталкивании поля (эффект Мейсснера) энергия будет минимальной только в том случае, если существует граничная энергия. В самом деле, при выталкивании внешнего поля  $H$  энергия сверхпроводника увеличивается на  $H^2/8\pi$  (на единицу объема). Тогда можно ожидать, что для сверхпроводника



Фиг. 10. Зависимость  $f$  (сплошная линия) и  $h$  (пунктир) от координаты  $z$ .

$a$  — при  $\kappa \ll 1$ ,  $b$  — при  $\kappa \gg 1$ .

определенной формы будет энергетически выгодно, чтобы толща вещества разделилась на чередующиеся нормальные и сверхпроводящие слои. Когда поле выталкивается из сверхпроводящей части, для образования этих слоев необходимо затратить поверхностную энергию такой величины ( $\sigma_{ns}$  на единицу поверхности), что ее вклад превышает выигрыш в магнитной энергии.

В смысле поверхностной энергии сверхпроводники обнаруживают два существенно различных типа поведения, и это различие лежит в основе деления сверхпроводников на два рода, которое применялось выше.

В теории Гинзбурга — Ландау понятие поверхностной энергии вводится при решении следующей задачи.

Рассмотрим бесконечный образец (фиг. 10), на который наложены следующие граничные условия.

При  $z = -\infty$  мы требуем, чтобы образец находился в нормальном состоянии, и полагаем

$$\psi = 0 \quad \text{и} \quad h = H_c.$$

При  $z = +\infty$  образец находится в сверхпроводящем состоянии, так что

$$\psi = \psi_0 \quad \text{и} \quad h = 0.$$

Параметр упорядочения  $\psi$  и поле  $h$  постепенно изменяются, вследствие чего образуется барьер. Тогда поверхностной энергией будет разность между энергией  $F_p$ , соответствующей рассматриваемой задаче, и энергией конденсации  $\int (H_c^2/8\pi) dv$ , соответствующей полностью сверхпроводящему образцу. Согласно (2.11), свободная энергия  $F_p$  равна

$$F_p = \int dv \left[ \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right) \psi \right|^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi} \right]. \quad (2.49)$$

В этом выражении не учтено уменьшение магнитной энергии, связанное с проникновением поля. Поскольку мы имеем дело с одномерным случаем, этот член можно записать в виде

$$-MH_c = -\frac{h - H_c}{4\pi} H_c, \quad (2.50)$$

где  $h$  — функция только переменной  $z$ . Тогда поверхностная энергия на единицу поверхности равна

$$\begin{aligned} \sigma_{ns} &= \frac{F_p - \int (H_c^2/8\pi) dv}{S} = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \right. \\ &+ \frac{1}{2m} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)_z \psi \right|^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi} - \frac{hH_c}{4\pi} + \frac{H_c^2}{4\pi} - \frac{H_c^2}{8\pi} \Big] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{2e^2}{mc^2} \mathbf{A}^2 |\psi|^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi} + \frac{H_c^2}{8\pi} - \frac{hH_c}{4\pi} \right]. \quad (2.51) \end{aligned}$$



Если перейти к приведенным переменным [см. (2.37)], уравнения (2.47) и (2.48) могут быть записаны в виде

$$-\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{f^3} \left( \frac{dh}{dz} \right)^2 = f - f^3, \quad (2.52)$$

$$f^2 h = -\frac{2}{f} \frac{df}{dz} \frac{dh}{dz} + \frac{d^2 h}{dz^2}, \quad (2.53)$$

$$\mathcal{A} f^2 = \frac{dh}{dz}. \quad (2.54)$$

Здесь  $h$  и  $\mathcal{A}$  — модули приведенного поля и приведенного вектора-потенциала, а  $f$  — модуль приведенного параметра упорядочения. Ясно, что эти величины являются функциями только  $z$  и что  $f$  изменяется от нуля до 1, а  $h$  изменяется от  $h_c = 1/\sqrt{2}$  до нуля.

Поверхностная энергия принимает теперь вид

$$\sigma_{ns} = \frac{H_c^2}{4\pi} \left( \frac{mc^2 \beta}{16\pi e^2 |\alpha|} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ \frac{1}{2} (1 - f^2)^2 + \frac{1}{f^2} \left( \frac{dh}{dz} \right)^2 + \frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{df}{dz} \right)^2 + h^2 - \sqrt{2} h \right]. \quad (2.55)$$

Используя (2.52), перепишем (2.55) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ns} &= \\ &= \frac{H_c^2}{8\pi} 2\lambda(T) \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ \frac{1}{2} (1 - f^4) + h^2 - \sqrt{2} h + \frac{1}{\kappa^2} \frac{d}{dz} \left( f \frac{df}{dz} \right) \right] = \\ &= 2\lambda(T) \frac{H_c^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ \frac{1}{2} (1 - f^4) + h^2 - \sqrt{2} h \right]. \quad (2.56) \end{aligned}$$

Здесь учтены граничные условия

$$\begin{aligned} f &= 0 \quad \text{при} \quad z = -\infty, \\ \frac{df}{dz} &= 0, \quad f = 1 \quad \text{при} \quad z = +\infty. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Удобно и обычно принято вводить длину

$$\delta = 2l\lambda(T), \quad (2.58)$$

где  $I$  — значение интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ \frac{1}{2} (1 - f^4) + h^2 - \sqrt{2} h \right]. \quad (2.59)$$

Теперь поверхностная энергия равна

$$\sigma_{ns} = \delta \frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (2.60)$$

В литературе вместо  $\sigma_{ns}$  обычно приводится значение  $\delta$ . Найдем теперь  $\sigma_{ns}$  (т. е.  $I$ ) для двух предельных случаев.

а)  $\kappa \ll 1$ .

Если  $\kappa \ll 1$ , то глубина проникновения  $\lambda(T)$  очень мала по сравнению с  $\xi(T)$ , и можно предположить, что поле  $h$  равно нулю, когда функция  $f$  отлична от нуля.

Из уравнения (2.52) получаем

$$-\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 f}{dz^2} = f - f^3, \quad (2.61)$$

т. е.

$$-\frac{1}{2\kappa^2} \left( \frac{df}{dz} \right)^2 = \frac{f^2}{2} - \frac{f^4}{4} + c. \quad (2.62)$$

Очевидно, что постоянная  $c$  равна  $-1/4$ , поскольку мы приняли, что если  $f = 1$ , то  $df/dz = 0$ . Отсюда получаем

$$\frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{df}{dz} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 - f^2)^2. \quad (2.63)$$

Нужное решение имеет вид

$$\begin{aligned} f &= 0, & h &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при } z < 0, \\ f &= \text{th} \frac{z\kappa}{\sqrt{2}}, & h &= 0 \quad \text{при } z > 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

(см. фиг. 10, а), и мы видим, что интеграл равен

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (1 - f^4) dz = \frac{\sqrt{2}}{2\kappa} \int_0^1 (1 + f^2) df = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{\kappa}, \quad (2.65)$$

а поверхностная энергия имеет вид

$$\sigma_{ns} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{\lambda(T)}{\kappa(T)} \frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \xi(T) \frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (2.66)$$

Следовательно,

$$\delta = 1,89\xi(T). \quad (2.67)$$

Этот результат впервые был получен Гинзбургом и Ландау.

Таким образом, при  $\kappa \ll 1$  поверхностная энергия положительна.

б)  $\kappa \gg 1$ .

В этом случае членом  $(1/\kappa^2)(d^2f/dz^2)$ , входящим в (2.52), можно пренебречь, так что

$$\left(\frac{dh}{dz}\right)^2 = f^4(1-f^2). \quad (2.68)$$

Поскольку поле  $h$  должно уменьшаться с увеличением  $z$ ,

$$\frac{dh}{dz} = -f^2(1-f^2)^{1/2}. \quad (2.69)$$

Из (2.53) получаем

$$h = \frac{d}{dz} \frac{1}{f^2} \frac{dh}{dz} = -\frac{d}{dz} (1-f^2)^{1/2}. \quad (2.70)$$

Здесь функция  $f$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(1-f^2)^{1/2} - (1-f^2)^{3/2} = \frac{d^2}{dz^2} (1-f^2)^{1/2} \quad (2.71)$$

или

$$\frac{d^2u}{dz^2} = u - u^3, \quad (2.72)$$

где

$$u = (1-f^2)^{1/2}, \quad (2.73)$$

т. е.

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = u^2 \left(1 - \frac{u^2}{2}\right) + c. \quad (2.74)$$

Постоянная интегрирования, очевидно, равна нулю, и (2.74) можно записать в виде

$$\frac{du}{dz} = -u \left(1 - \frac{u^2}{2}\right)^{1/2}, \quad (2.75)$$

поскольку производная  $du/dz$  должна быть отрицательной.

Легко видеть, что интеграл теперь равен

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ 2u^2 \left( 1 - \frac{u^2}{2} \right) - \sqrt{2} u \left( 1 - \frac{u^2}{2} \right)^{1/2} \right] = \\ = \int_0^1 \left[ 2u \left( 1 - \frac{u^2}{2} \right)^{1/2} - \sqrt{2} \right] \frac{du}{dz} dz = -\frac{4}{3} (\sqrt{2} - 1), \quad (2.76)$$

а поверхностная энергия <sup>1)</sup>

$$\sigma_{ns} \approx -\frac{8}{3} (\sqrt{2} - 1) \lambda(T) \frac{H_c^2}{8\pi} \approx -\lambda(T) \frac{H_c^2(T)}{8\pi}. \quad (2.77)$$

Таким образом, при  $\kappa(T) \gg 1$  поверхностная энергия отрицательна.

Из двух предшествующих расчетов следует интересный результат: для сверхпроводников первого рода [ $\kappa \ll 1$ ,  $\lambda(T) \ll \xi(T)$ ] поверхностная энергия положительна, а для сверхпроводников второго рода [ $\kappa \gg 1$ ,  $\lambda(T) \gg \xi(T)$ ] эта энергия отрицательна. Поэтому можно ожидать, что свойства сверхпроводников разных типов сильно различаются. Изучению этих свойств, и особенно свойств сверхпроводников второго рода, будет посвящена следующая глава. Границу между сверхпроводниками первого и второго рода можно найти, определив величину  $\kappa$ , соответствующую поверхностной энергии, равной нулю.

Поверхностный интеграл равен

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ \frac{1}{2} (1 - f^4) + h^2 - \sqrt{2} h \right], \quad (2.59)$$

и ясно, что этот интеграл обращается в нуль при

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - f^2). \quad (2.78)$$

<sup>1)</sup> Используя вместо уравнения Гинзбурга — Ландау уравнение Лондонов, находим, что  $\sigma_{ns} = -\lambda_L H_c^2 / 8\pi$ , где  $\lambda_L$  — лондоновская глубина проникновения.

В этом случае (2.52) и (2.53) принимают вид

$$-\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{2}{f} \left( \frac{df}{dz} \right)^2 = f - f^3, \quad (2.79)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2}} f \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{df}{dz} \right)^2 = \frac{f^2}{\sqrt{2}} (1 - f^2). \quad (2.80)$$

Последние два уравнения идентичны при

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.81)$$

Это и является условием равенства нулю поверхностной энергии.

Связь между параметром  $\kappa$  и классификацией сверхпроводников ясна, и, согласно Абрикосову [6], различие между сверхпроводниками первого и второго рода может быть выражено следующим образом:

сверхпроводимость первого рода,

$$\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

положительная поверхностная энергия;

сверхпроводимость второго рода,

$$\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

отрицательная поверхностная энергия.

## § 5. Ламинарная модель и нитевидная структура

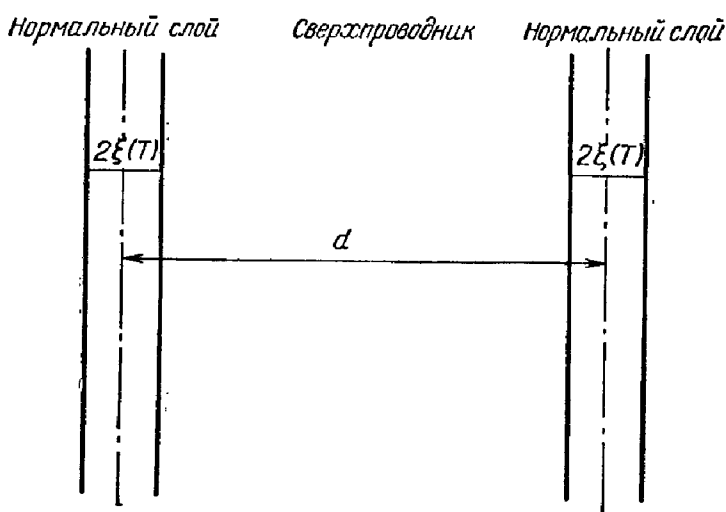
У лондоновских сверхпроводников поверхностная энергия, связанная с наличием границы между нормальной и сверхпроводящей областями, отрицательна. Поэтому сверхпроводнику в присутствии поля энергетически выгодно разбиться на большое число нормальных и сверхпроводящих областей (смешанное состояние). Таким образом, вклад, вносимый поверхностной энергией в свободную энергию системы, существен.

Для сверхпроводников первого рода, наоборот, разделение образца на нормальные и сверхпроводящие области (промежуточное состояние) менее выгодно, поскольку поверхностная энергия положительна, и вклад,

вносимый поверхностной энергией на границах между фазами в свободную энергию системы, пренебрежимо мал. В сверхпроводниках первого рода это деление происходит только для образцов определенной формы с коэффициентом размагничивания  $D$  при полях  $H$ , таких, что

$$(1 - D) H_c < H < H_c. \quad (2.82)$$

Простейшая картина для описания смешанного состояния сверхпроводников второго рода по аналогии со



Фиг. 11.

сверхпроводниками первого рода сводится к рассмотрению чередующихся параллельных нормальных и сверхпроводящих слоев [7]. В пределе малой индукции объем нормальных областей будет мал, и для того, чтобы увеличить отношение полной поверхности нормальных областей к их объему, используется модель, в которой нормальные слои шириной  $2\xi(T)$  расположены друг от друга на расстоянии, равном  $d - 2\xi(T)$  (фиг. 11).

Рассмотрим случай, когда  $\lambda(T) \gg \xi(T)$  (большое значение  $\kappa$ ), поле  $h(x)$  параллельно оси  $z$  и слои перпендикулярны оси  $x$ ,

В сверхпроводящей области поле подчиняется уравнению Лондонов

$$\lambda^2(T) \frac{d^2 h}{dx^2} = h, \quad (2.83)$$

т. е.

$$h = H_n \frac{\operatorname{ch} x/\lambda_L}{\operatorname{ch} d/2\lambda_L}, \quad (2.84)$$

где  $H_n$  — поле в нормальной области.

Свободная энергия состоит из трех частей: магнитной энергии, кинетической энергии сверхпроводящих электронов и энергии образования нормальных областей.

Первые два члена имеют вид (на единицу объема)

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \left( \frac{h^2}{8\pi} + \frac{1}{2} mn_s v^2 \right) = \frac{1}{\Omega} \int \frac{d\mathbf{r}}{8\pi} [h^2 + \lambda^2(T) (\operatorname{rot} \mathbf{h})^2] = \\ &= \frac{2}{d} \int_0^{d/2} dx \frac{h^2 + \lambda^2(T) (dh/dx)^2}{8\pi}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Третий член равен

$$F_2 = \frac{2\xi(T)}{d} \frac{H_c^2}{8\pi}, \quad (2.86)$$

так что

$$F = F_1 + F_2 = \frac{H_n^2}{8\pi} \frac{\operatorname{th} d/2\lambda_L}{d/2\lambda_L} + \frac{H_c^2}{8\pi} \frac{2\lambda_L}{\kappa d}. \quad (2.87)$$

Здесь введен параметр Гинзбурга — Ландау

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}.$$

Термодинамический потенциал равен

$$G = F - \frac{BH}{4\pi}, \quad (2.88)$$

где  $B$  — индукция, т. е. среднее значение поля  $h$ , а  $H$  — приложенное поле;

$$B = \frac{2}{d} H_n \int_0^{d/2} dx \frac{\operatorname{ch} x/\lambda_L}{\operatorname{ch} d/2\lambda_L} = H_n \frac{\operatorname{th} d/2\lambda_L}{d/2\lambda_L}. \quad (2.89)$$

В состоянии равновесия термодинамический потенциал должен быть минимален по отношению к  $H_n$ , т. е.

$$\frac{\partial G}{\partial H_n} = 0, \quad (2.90)$$

так что

$$H_n = H \quad (2.91)$$

и

$$G = \frac{1}{4\pi d/\lambda_L} \left( -H^2 \operatorname{th} \frac{d}{2\lambda_L} + \frac{H_c^2}{\kappa} \right). \quad (2.92)$$

При  $H < H_c/\kappa^{1/2}$  потенциал  $G$  минимален для  $d = \infty$  (эффект Мейсснера: поле вытеснено). При  $H > H_c/\kappa^{1/2}$  потенциал  $G$  минимален для конечного значения  $d$ .

Таким образом, в этой модели предсказывается значение поля  $H_{c_1}^L = H_c/\kappa^{1/2}$ , при котором оно начинает проникать в сверхпроводник.

Существует другой способ увеличить отношение поверхности к объему. Для этого надо построить периодическую двумерную решетку из нормальных нитей диаметром  $2\xi$ , расположенных друг от друга на расстояниях порядка  $d$ . Как будет видно из следующей главы, в этом случае полный эффект Мейсснера имеет место для полей  $H$ , меньших

$$H_{c_1}^F \approx \frac{H_c}{\kappa} \ln \kappa.$$

При  $\kappa \gg 1$

$$H_{c_1}^F < H_{c_1}^L.$$

В области  $H_{c_1}^F < H < H_{c_1}^L$

$$G_F < G_{\text{Мейсснер}},$$

$$G_L > G_{\text{Мейсснер}}.$$

Следовательно, нитевидная структура выгодней ламинарной (слоистой).

Можно показать, что это заключение справедливо для всех значений поля вплоть до  $H_{c_2}$ . Таким образом, из этих двух структур была выбрана нитевидная структура, которая лучше отражает свойства сверхпровод-



ников второго рода и которая получила недавно непосредственное экспериментальное подтверждение<sup>1)</sup> [8].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Phys. Zs. Sowjet., **11**, 545 (1937).
2. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **20**, 1064 (1950).
3. Горьков Л. П., ЖЭТФ, **36**, 1918 (1959).
4. Горьков Л. П., ЖЭТФ, **37**, 1407 (1959).
5. De Gennes P. G., Rev. Mod. Phys., **36**, 225 (1964).
6. Абрикосов А. А., ДАН СССР, **86**, 489 (1952).
7. Goodman B. B., Phys. Rev. Lett., **6**, 597 (1961).
8. Cribier D., Jacrot B., Rao L. M., Fagnoux B., Phys. Lett., **9**, 106 (1964).
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, М., 1964.

---

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 96. — *Прим. ред.*

## Глава 3

# МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА. СТРУКТУРА ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ

### § 1. Введение

В 1952 г. Абрикосов, основываясь на теории Гинзбурга — Ландау, предложил теорию, объясняющую магнитные свойства сверхпроводников второго рода [1]. В этой теории для смешанного состояния предлагалась структура, состоящая из двумерной периодической решетки вихревых линий (нитей). Схематически эту решетку можно изобразить так: сердцевину каждой нити образует магнитный поток, окруженный вихрем из сверхпроводящих электронов. Эта концепция была совершенно новой, и опубликование статьи Абрикосова было отложено до 1957 г. Необходимо подчеркнуть, что даже в 1957 г. важность сделанного Абрикосовым вклада не была понята в основном из-за отсутствия экспериментальных данных.

Последние достижения в изучении сверхпроводников второго рода подтвердили эту теорию; понятие о вихревых нитях широко используется для объяснения свойств сверхпроводников второго рода. Крибье и др. [2] непосредственно наблюдали периодическую решетку из нитей, используя метод дифракции нейтронов в ниобии и в сплавах свинец — висмут<sup>1)</sup>.

Настоящая глава будет посвящена изучению бесконечных образцов без рассмотрения проблемы поверхностной проводимости. В основном мы будем последовательно излагать статью Абрикосова и поэтому часто будем пользоваться уравнениями Гинзбурга — Ландау.

Мы остановимся на главных свойствах вихревой структуры и проведем краткий обзор последних экспериментов.

---

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 96. — *Прим. ред.*

## § 2. Возникновение сверхпроводимости. Критическое поле $H_{c_2}$

Рассмотрим сверхпроводник, находящийся в однородном внешнем поле  $\mathbf{H}$ . Если поле  $\mathbf{H}$  достаточно велико, сверхпроводимость разрушается, а микроскопическое поле  $\mathbf{h}$  становится постоянным и равным полю  $\mathbf{H}$  во всем образце. Теперь уменьшим поле  $\mathbf{H}$ . При определенном значении поля  $H_{c_2}$  в образце начинает появляться сверхпроводимость. Это критическое поле  $H_{c_2}$  отлично от термодинамического критического поля  $H_c$ . При вычислении поля  $H_{c_2}$  Гинзбург и Ландау заметили, что вблизи  $H_{c_2}$  абсолютная величина  $|\psi|$  параметра упорядочения  $\psi$  очень мала, так что первое уравнение Гинзбурга — Ландау (2.18) может быть линеаризовано и приведено к виду

$$\frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \psi = -\alpha\psi. \quad (3.1)$$

Далее, из (2.19) следует, что добавочный член, связанный со сверхпроводящими токами, имеет порядок  $|\psi|^2$ , так что в первом приближении микроскопическое поле  $\mathbf{h}$  может считаться равным приложенному полю  $\mathbf{H}$ , т. е.

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) формально аналогично уравнению Шредингера для движения частицы с зарядом  $2e$  и массой  $m$  в постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Хорошо известно [3], что такая частица движется вдоль направления поля  $\mathbf{H}$  с постоянной скоростью  $V_z$  ( $V_z$  может принимать любое значение) и описывает круговую орбиту в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}$ , с частотой

$$\omega = \frac{2eH}{mc}. \quad (3.3)$$

Если  $|\psi|$  — ограниченная функция, то собственные значения уравнения (3.1) (которые нужно отождествить с  $-\alpha$ ) таковы:

$$-\alpha_n = \frac{mV_z^2}{2} + \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad (3.4)$$

так что критическое поле  $H$  определяется соотношением

$$(2n + 1) \frac{\hbar e H}{mc} = -\alpha_n - \frac{mV_z^2}{2}. \quad (3.5)$$

Очевидно, что наибольший интерес представляет самое высокое значение поля, при котором появляется сверхпроводимость. Это соответствует  $n = 0$  и  $V_z = 0$  в (3.5). Поле, получаемое при  $\alpha = \alpha_0$ , равно

$$H_{c_2} = -\alpha \frac{mc}{\hbar e}. \quad (3.6)$$

Используя выражения (2.7)

$$\frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{H_c^2}{8\pi}$$

и (2.36)

$$\kappa = \frac{mc}{2e\hbar} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{1/2},$$

получаем соотношение между критическим полем  $H_{c_2}$  и термодинамическим критическим полем  $H_c$

$$H_{c_2} = \kappa \sqrt{2} H_c(T). \quad (3.7)$$

Вывод этого соотношения для  $H_{c_2}$  справедлив для любого значения  $\kappa$ . Мы видим, что поведение сверхпроводников первого и второго рода совершенно различно.

1) У сверхпроводников второго рода ( $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ) сверхпроводимость появляется при поле  $H_{c_2} > H_c$ . Фактически ниже  $H_c$ , образец находится в смешанном состоянии.

2) Сверхпроводник первого рода ( $\kappa < 1/\sqrt{2}$ ) может оставаться нормальным при понижении поля вплоть до величины  $H_{c_2} < H_c$ : нормальная фаза переохлаждена (метастабильное состояние).

3) При  $\kappa = 1/\sqrt{2}$  соотношение (3.7) дает, как и можно было ожидать,  $H_{c_2} = H_c$ .

Из соотношения (3.7) следует метод измерения параметра  $\kappa$  путем определения поля образования зародышей  $H_n$ . Однако этот метод не дает правильного значения  $\kappa$ , если за  $H_n$  принять  $H_{c_2}$ . Соотношение (3.7) выведено для бесконечной среды без учета поверхностных

эффектов. В гл. 4 будет показано, что в конечном образце образование зародышей сверхпроводящей фазы происходит в плоскости, параллельной направлению приложенного поля при поле образования зародышей  $H_{c_3} > H_{c_2}$ . Сверхпроводящий слой располагается близко к этим поверхностям, а остальная часть образца остается нормальной. Поле  $H_{c_2}$  соответствует установлению сверхпроводимости по всему образцу.

Линеаризованное уравнение (3.1) является однородным. Величина  $|\psi|$  при этом не определена. Чтобы получить значение максимума  $|\psi|$  вблизи  $H_{c_2}$ , необходимо рассмотреть полные уравнения. Эта задача будет рассмотрена в следующем параграфе.

Каждое решение  $\psi_n$  уравнения (3.1), соответствующее собственному значению  $-\alpha_n$ , сильно вырождено.

Это свойство, рассмотренное в приложении (п. 1), будет использовано для получения вихревой структуры Абрикосова вблизи  $H_{c_2}$  (см. гл. 3, § 3, п. 3).

### § 3. Структура смешанного состояния

Рассмотрим структуру сверхпроводника второго рода при приложенном поле  $H$ , меньшем  $H_{c_2}$ . Можно ожидать, что значение параметра упорядочения  $|\psi|$  увеличится, и теперь потребуются решение двух полных уравнений Гинзбурга — Ландау, а не только линеаризованного уравнения (3.1). Это трудная математическая задача, даже с точки зрения численных расчетов<sup>1)</sup>. Однако можно сделать ряд выводов для двух предельных случаев: в окрестности  $H_{c_2}$  и в окрестности  $H_{c_1}$ .

#### 1. Квантование потока. Квант потока $\Phi_0$

В 1950 г. Ф. Лондон [4] предположил, что поток, захваченный сверхпроводящим кольцом, квантуется. Это предположение очень важно, поскольку оно предусматривает ситуацию, при которой один из эффектов, характерных для квантовой механики, происходит

<sup>1)</sup> Было сделано несколько попыток провести такие вычисления на ЭВМ [5].

в макроскопическом масштабе. Для простоты теоретическое рассмотрение квантования потока будет проведено здесь в рамках теории Гинзбурга — Ландау. Необходимо, однако, помнить, что квантование потока — явление общее, не ограничивающееся окрестностью  $T_0$ <sup>1)</sup>.

В гл. 2 уже указывалось, что параметр упорядочения  $\psi$  не обязательно должен быть вещественным числом. Если ввести для этого параметра модуль  $|\psi|$  и фазу  $\varphi$ , то второе уравнение Гинзбурга — Ландау принимает вид

$$\mathbf{j} = \frac{2e\hbar}{m} |\psi|^2 \nabla\varphi - \frac{4e^2}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A} \quad (3.8a)$$

или

$$\mathbf{A} = - \frac{mc}{4e^2 |\psi|^2} \mathbf{j} + \frac{c\hbar}{2e} \nabla\varphi. \quad (3.8б)$$

Вычислим теперь контурный интеграл от  $\mathbf{A}$  по замкнутой петле  $\Gamma$ , т. е.

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{h} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \Phi. \quad (3.9)$$

Этот контурный интеграл равен потоку  $\mathbf{h}$  через петлю. С помощью (3.8б) легко видеть, что

$$\Phi = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{mc}{4e^2} \int \frac{\mathbf{j}}{|\psi|^2} \cdot d\mathbf{l} + \frac{c\hbar}{2e} \int \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.10)$$

Контурный интеграл  $\int_{\Gamma} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}$  не обязательно равен

нулю, так как единственное общее требование при обходе по петле  $\Gamma$  состоит в том, чтобы параметр упорядочения  $\psi$  был однозначной функцией, т. е. чтобы фаза  $\varphi$  изменялась на  $2\pi n$ , где  $n$  — целое число (или нуль). Следовательно, выражение (3.10) дает квантование магнитного потока (*флюксоида*)

$$\Phi = n \frac{c\hbar}{2e} - \frac{mc}{4e^2} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{j}}{|\psi|^2} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.11)$$

<sup>1)</sup> Квантование потока можно вывести с помощью микроскопической теории (см., например, [6]).

Если выбрать путь интегрирования так, что на нем  $\mathbf{j} \equiv 0$  или чтобы вектор  $\mathbf{j}$  был ортогонален  $d\mathbf{l}$ , то (3.11) принимает вид

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{h} \cdot d\sigma = n\Phi_0, \quad (3.12)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{ch}{2e} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ гс} \cdot \text{см}^2 \quad (3.13)$$

— квант потока<sup>1)</sup>. Таким образом, поток, захваченный сверхпроводником, квантован и равен  $n\Phi_0$ . Это квантование — общее свойство сверхпроводимости.

В односвязном сверхпроводнике первого рода эффект Мейсснера идеален и  $n$  равно нулю. Квантование потока можно наблюдать только в образцах с многосвязной геометрией, например в случае сверхпроводящего кольца. Когда приложенное поле снимается, остается захваченный поток, равный  $n\Phi_0$ . Нужно подчеркнуть, что Лондон [4] предсказал существование кванта потока, равного  $4 \cdot 10^{-7} \text{ гс} \cdot \text{см}^2$  (т. е.  $2\Phi_0$ ). Истинное значение, определенное из (3.13), связано с существованием куперовских пар. Дивер и Фейербенк [7], а также Долл и Небауэр [8] измерили  $\Phi_0$  в кольцеобразном слое, экспериментально доказав, таким образом, существование куперовских пар<sup>2)</sup>.

В сверхпроводниках второго рода картина несколько иная. Следует ожидать, что квантование потока имеет место даже для образцов с односвязной геометрией, поскольку в смешанном состоянии сверхпроводящие области, окружающие силовые линии проникающего поля, образуют многосвязную сверхпроводящую систему. Такая ситуация в какой-то степени эквивалентна случаю сверхпроводящего кольца, и заключенный в каждом «отверстии» полный поток может принимать лишь дискретные значения (3.13).

Более того, в вихревой структуре каждая нить состоит из сердцевинки радиусом порядка  $\xi(T)$  и кольцевого тока  $\mathbf{j}$ , окружающего нить и экранирующего

<sup>1)</sup> Здесь  $h = 2\pi\hbar$  — постоянная Планка.

<sup>2)</sup> Когда проводились эти эксперименты, ожидалось, что квант потока, согласно Лондону, должен быть равен  $2\Phi_0$ .

поле при  $r \geq \lambda(T)$ . Такое рассуждение приводит к квантованию потока внутри *каждой* нити. Остается выяснить, сколько квантов потока имеется в каждой нити. В приложении (п. 4) показано, что вблизи  $H_{c_2}$  каждая нить при любом значении  $\kappa$  несет один квант потока. Это справедливо также для изолированной нити, т. е. вблизи  $H_{c_1}$ . Разумно предположить, что такая же картина сохранится во всем интервале значений поля (т. е. от  $H_{c_1}$  до  $H_{c_2}$ ) при всех значениях  $\kappa > 1/\sqrt{2}$ .

Этот вывод правдоподобен, так как, если каждая нить несет только один квант потока  $\Phi_0$ , это приводит к состоянию с максимальным разветвлением потока, что выгодно с точки зрения поверхностной энергии. Однако этот довод не слишком убедителен, поскольку нужно достичь равновесия между энергией образования нитей и ростом поверхностной энергии. Иными словами, чтобы получить окончательный ответ, нужно решить уравнения Гинзбурга — Ландау и вычислить свободную энергию<sup>1)</sup>. Крибье и др. [2] показали экспериментально, что в большом интервале значений поля и при  $\kappa \approx 1$  на каждую вихревую нить все еще приходится лишь один квант потока. Нужно также подчеркнуть, что эти эксперименты были проведены при температурах, достаточно далеких от  $T_0$ , где схема Гинзбурга — Ландау неприменима<sup>2)</sup>.

Интересно выразить поля  $H_c$  и  $H_{c_2}$  через  $\Phi_0$ . С помощью выражений (2.7) для  $H_c$  и (3.6) для  $H_{c_2}$  и выражений (2.26) и (2.36) для  $\xi(T)$  и  $\kappa(T)$  легко получить

$$H_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{\Phi_0}{\lambda(T)\xi(T)}, \quad (3.14a)$$

$$H_{c_2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Phi_0}{\xi^2(T)}. \quad (3.14b)$$

Этими выражениями часто пользуются в литературе.

Далее, квантование потока позволяет вычислить индукцию  $B$  для сверхпроводников второго рода. Ясно,

<sup>1)</sup> Мы уже упоминали, что это очень трудоемкая задача. Можно считать, что экспериментальные результаты [2] являются таким же хорошим доказательством, как и численное решение уравнений Гинзбурга — Ландау.

<sup>2)</sup> Более детальное обсуждение этих экспериментов см. в § 5.



что микроскопическое поле  $\mathbf{h}$  параллельно приложенному полю  $\mathbf{H}$  и, если ось  $z$  параллельна  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{h}$  не зависит от  $z$ . Среднее значение  $\mathbf{h}$ , т. е. индукция, равно

$$B = \frac{1}{S} \int_S \mathbf{h} \cdot d\sigma = \frac{n}{S} \Phi_0, \quad (3.15)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения образца, перпендикулярного направлению приложенного поля, а  $n$  — число вихревых нитей.

## 2. Изолированная нить. Критическое поле начала проникновения потока $H_{c1}$

Поле  $H_{c1}$  — самое маленькое поле, при котором существует смешанное состояние, — может быть определено как поле возникновения первой нити. Если  $\mathbf{H}$  — приложенное поле и ось  $z$  параллельна  $\mathbf{H}$ , задача имеет цилиндрическую симметрию, и микроскопическое поле  $\mathbf{h}$  так же, как и величина параметра упорядочения  $|\psi|$ , будет зависеть только от  $|r|$ .

Используя безразмерные переменные, введенные в (2.37), оба уравнения Гинзбурга — Ландау можно записать в виде

$$\frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} f_0 \right) - \frac{1}{f_0^3} \left( \frac{d}{d\rho} h \right)^2 + f_0 (1 - f_0^2) = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho}{f_0^2} \frac{d}{d\rho} h = h. \quad (3.17)$$

Эти уравнения получены из уравнений (2.47) и (2.48) или при непосредственном исключении  $A_0$  ( $h$  — величина приведенного поля).

Для бесконечно большого сверхпроводника к уравнениям (3.16) и (3.17) нужно добавить следующие граничные условия. При  $\rho \rightarrow \infty$  сверхпроводимость полностью восстанавливается, так что

$$\rho \rightarrow \infty, \quad f_0 = 1, \quad h = 0, \quad \mathbf{j} = 0. \quad (3.18)$$

Здесь  $\mathbf{j} = \text{roth} \mathbf{h}$  — ток. Последнее условие означает, что

$$-\frac{dh}{d\rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Граничные условия (3.18) не определяют полностью решений уравнений (3.16) и (3.17). Для этого необходимы четыре условия, и два дополнительных условия возникают из квантования потока. В приведенных переменных  $\Phi_0 = 2\pi/\kappa$ , и условие квантования потока имеет вид

$$\Phi = 2\pi \int_0^{\infty} h\rho \, d\rho = \frac{2\pi\rho}{\kappa}, \quad (3.20)$$

где  $\rho$  — целое число.

Из (3.17) легко видеть, что <sup>1)</sup>

$$\Phi = 2\pi \left| \frac{\rho}{f_0^2} \frac{dh}{d\rho} \right|_0^{\infty} = -2\pi \left| \frac{\rho}{f_0^2} \frac{dh}{d\rho} \right|_{\rho=0}. \quad (3.21)$$

Теперь мы имеем три следующих граничных условия:

$$\rho = 0, \quad \frac{1}{f_0^2} \frac{dh}{d\rho} = -\frac{\rho}{\kappa\rho}, \quad \rho \text{ — целое число}, \quad (3.22)$$

$$\rho = \infty, \quad f_0 = 1, \quad h = 0, \quad \frac{dh}{d\rho} = 0. \quad (3.23)$$

Необходимо отметить, что  $-(1/f_0^2)(dh/d\rho)$  — модуль вектора-потенциала  $\mathcal{A}_0$ . При  $\rho \rightarrow 0$  уравнение (3.16) принимает вид

$$\frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} f_0 \right) - \frac{\rho^2}{\kappa^2 \rho^2} f_0 + f_0(1 - f_0^2) = 0. \quad (3.24)$$

Этому уравнению удовлетворяют регулярные решения вида

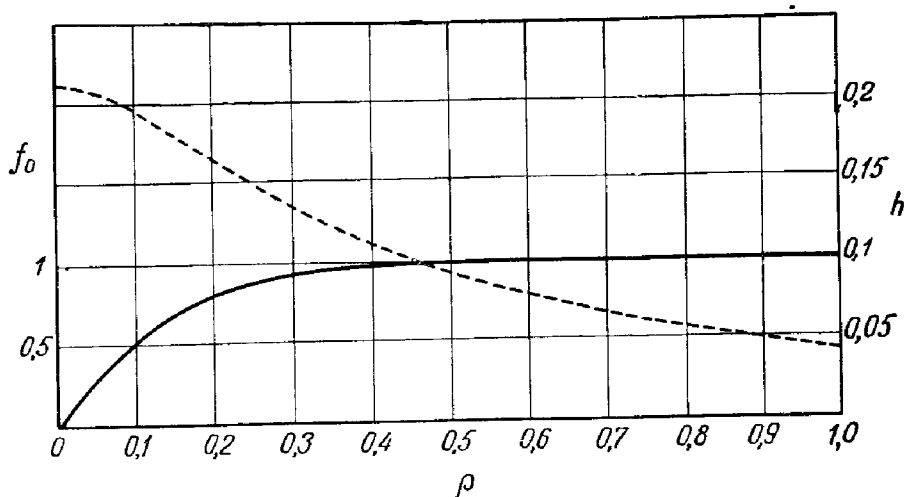
$$f_0 = c\rho^p + \dots, \quad (3.25)$$

$$h = h_p(0) - \frac{c\rho^{2p}}{2\kappa} + \dots \quad (3.26)$$

Таким образом, четвертым граничным условием является равенство  $f_0 = 0$  при  $\rho = 0$ .

<sup>1)</sup> В уравнении (3.27) будет показано (см. ниже), что  $h$  изменяется, как  $K_0(\rho)$  — функция Ханкеля нулевого порядка при  $\rho \rightarrow \infty$ , т. е. как  $e^{-\rho}/\sqrt{\rho}$ .

Константы  $c_p$  и  $h_p(0)$  должны определяться при полном интегрировании уравнений (3.16) и (3.17). Очевидно, что при  $\rho \rightarrow 0$  параметр упорядочения для вихревой нити с количеством квантов потока  $p$  меняется как  $\rho^p$ . В частности, для нити, несущей один квант,  $f_0$  зависит линейно от  $\rho$  при  $\rho \rightarrow 0$  (фиг. 12).



Фиг. 12. Зависимость параметра упорядочения  $f_0$  (сплошная линия) и поля  $h$  (пунктир) от  $\rho$  для одиночной нити ( $\kappa = 10$ ).

Поле начинает следовать закону  $K_0(\rho)$  при  $\rho \approx 0,5$ .

При  $\rho \rightarrow \infty$  из (3.17) имеем

$$h = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dh}{d\rho}. \quad (3.27)$$

Пужным решением является функция Ханкеля нулевого порядка от мнимого аргумента [9], так что

$$h = \alpha K_0(\rho). \quad (3.28)$$

Здесь  $\alpha$  — постоянная, которая также должна быть определена при полном интегрировании уравнений. Отсюда

$$\frac{dh}{d\rho} = \alpha \frac{dK_0(\rho)}{d\rho} = -\alpha K_1(\rho), \quad (3.29)$$

где  $K_1(\rho)$  — функция Ханкеля первого порядка от мнимого аргумента.

При  $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$  постоянную  $\alpha$  можно легко определить, поскольку область изменения  $h$  много больше области изменения  $f_0$ . (Если  $\delta$  — область изменения  $f_0$ , то область изменения  $h$  есть  $\kappa\delta \gg \delta$ .) Коэффициент  $\alpha$  определяется путем сравнения выражений (3.29) и (3.22)<sup>1)</sup>:

$$\frac{1}{f_0^2} \frac{dh}{d\rho} = -\alpha K_1(\rho) \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty, \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{f_0^2} \frac{dh}{d\rho} = -\frac{\rho}{\kappa\rho} \quad \text{при } \rho \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

Когда

$$K_1(\rho) \rightarrow \frac{1}{\rho} + \dots \quad \text{при } \rho \rightarrow 0,$$

легко видеть, что

$$\alpha = \frac{\rho}{\kappa}. \quad (3.31)$$

Чтобы найти самое устойчивое состояние, нужно вычислить свободную энергию. Если  $\mathcal{F}_p$  — энергия изолированной нити с  $p$  квантами потока и  $\mathcal{F}_M$  — магнитная энергия, то образование нити выгодно, когда

$$\mathcal{F}_p - \mathcal{F}_M \leq 0. \quad (3.32)$$

Очевидно, что магнитная энергия<sup>2)</sup> равна

$$\mathcal{F}_M = 2h_e B = \frac{4\pi\rho}{\kappa} h_e, \quad (3.33)$$

где  $h_e$  — приложенное поле, а  $B$  была вычислена с помощью (3.15). Поле первого появления нити с  $p$  квантами потока равно

$$h_c(p) = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{\mathcal{F}_p}{p}. \quad (3.34)$$

Видно, что образование нити с одним квантом будет выгодно, если  $\mathcal{F}_p$  растет быстрее  $p$ . Теоретическое решение этой задачи связано с решением уравнений (3.16) и (3.17). Этого пока еще сделано не было. Однако при

<sup>1)</sup> Это возможно только при больших значениях  $\kappa$ .

<sup>2)</sup> Все энергии являются приведенными и вычислены для элемента объема высотой 1. Фактические энергии равны  $F = (H_c^2/\delta\pi) \mathcal{F}$ .

$\kappa \gg 1/\sqrt{2}$  вычисление энергии  $\mathcal{F}_p$  может быть выполнено до членов низших степеней по  $\kappa^{-1}$ . Запишем выражение для свободной энергии вихревой линии. Общее выражение для энергии Гинзбурга — Ландау дается выражением (2.48), т. е.

$$\mathcal{F} = \int dv \left[ \frac{1}{2} - f_0^2 + f_0^4 + h^2 + \left| \left( -i \frac{\nabla}{\kappa} - \mathcal{A} \right) f \right|^2 \right], \quad (3.35)$$

или

$$\mathcal{F} = \int dv \left[ \frac{1}{2} (1 - f_0^4) + h^2 \right]. \quad (3.36)$$

Выражение (3.36) было получено с помощью уравнений Гинзбурга — Ландау (2.39) и (2.40) при пренебрежении поверхностным интегралом, появляющимся при преобразовании. Этот общий результат не ограничивается случаем цилиндрической симметрии. Для одиночной вихревой нити выражение (3.36) может быть упрощено. В приложении (п. 2) показано, что свободную энергию можно записать в виде

$$\mathcal{F} = 2\pi \int_0^\infty \rho (1 - f_0^2) d\rho. \quad (3.37)$$

Для больших значений  $\kappa$  интеграл (3.37) может быть вычислен в явном виде до членов первого порядка по  $\kappa^{-1}$ . В области изменения  $f_0$  выражение  $(1/f_0^2)(dh/d\rho)$  все еще равно своему граничному значению  $-p/\kappa\rho$ , так что функция  $f_0$  удовлетворяет уравнению (3.24). В области  $p/\kappa < \rho < p$  удобным решением будет

$$f_0^2 = 1 - \frac{p^2}{\kappa^2 \rho^2}. \quad (3.38)$$

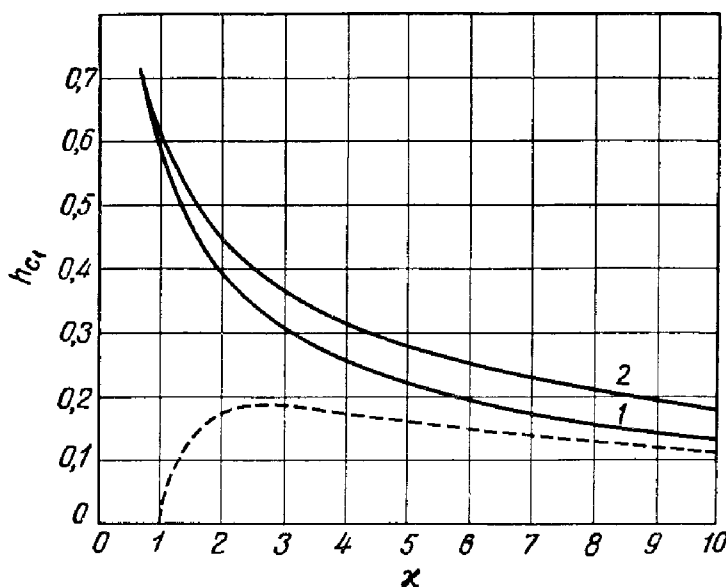
Если  $\ln \kappa \gg 1$ , основной вклад в  $\mathcal{F}$  вносит именно последняя область; так что свободная энергия равна

$$\mathcal{F}_p \approx 2\pi \int_{p/\kappa}^p \frac{p^2}{\kappa^2 \rho} d\rho = \frac{2\pi}{\kappa^2} p^2 \ln \kappa \quad (3.39)$$

и

$$h_{c1}(p) = \frac{p}{2\kappa} \ln \kappa. \quad (3.40)$$

Видно, что самое слабое поле получается при  $p = 1$ , т. е. наиболее устойчивое решение при  $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$  — образование вихревых нитей с одним квантом потока на нить. Численное интегрирование, выполненное Абрикосово-



Фиг. 13. Поле  $h_{c1}$  как функция  $\kappa$ .

Кривая 2 была также получена Харденом и Арпом [24]. Пунктирная кривая соответствует функции  $\ln \kappa/2\kappa$ . 1 — для одного кванта на нить, 2 — для двух квантов на нить.

вым [1], показало, что в пределе при больших значениях  $\kappa$  поле  $h_{c1}$  равно

$$h_{c1} = \frac{1}{2\kappa} (\ln \kappa + 0,08), \quad (3.41)$$

и истинное поле начала проникновения равно

$$H_{c1} = \frac{H_c}{\sqrt{2} \kappa} (\ln \kappa + 0,08) = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2(T)} \left[ \ln \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} + 0,08 \right]. \quad (3.42)$$

Поле в центре нити можно легко вычислить. В приложении (п. 3) показано, что свободная энергия нити при высоких значениях  $\kappa$  вплоть до членов с низшими степенями по  $\kappa^{-1}$  равна

$$\mathcal{F} \approx \frac{2\pi}{\kappa} h(0). \quad (3.43)$$

Сравнивая (3.43) и (3.34), можно видеть, что поле  $h(0)$  почти вдвое больше поля  $h_{c_1}$ . Численное интегрирование Абрикосова дает

$$h(0) = \frac{1}{\kappa} (\ln \kappa - 0,18). \quad (3.44)$$

В заключение можно сказать, что для больших значений  $\kappa$  поле изменяется на расстоянии порядка  $\lambda(T)$ , а параметр упорядочения — в области с размерами порядка  $\xi(T)$ .

Для меньших значений  $\kappa$  необходимо прибегнуть к численному интегрированию уравнений (3.16) и (3.17). Это недавно было выполнено Матриконом [10]. Энергия  $\mathcal{F}_p$  растет быстрее  $p$ , так что из (3.34) заключаем, что стабильное состояние возникает при одном кванте потока на нить. На фиг. 13 показано изменение поля  $H$  как функции  $\kappa$ . Видно, что  $H_{c_1}$  уменьшается с уменьшением  $\kappa$ . Оно достигает значений, предсказываемых соотношением (3.39), только при  $\kappa > 20$ .

### 3. Окрестность поля $H_{c_2}$ . Вихревая структура

Мы уже отмечали, что ниже  $H_{c_2}$  ожидается увеличение значения параметра упорядочения  $\psi$ , так что для описания поведения сверхпроводника необходимо решение полных уравнений Гинзбурга — Ландау. Единственное небольшое упрощение в данном случае связано с тем, что микроскопическое поле  $h$  считается параллельным приложенному полю  $H$ . Если за направление поля  $H$  принято направление  $z$ , уравнения могут быть сведены к двумерному виду. Используя безразмерные величины (2.37), уравнения для  $h$  и  $f_0$  можно записать в виде

$$\frac{\nabla^2}{\kappa^2} f_0 - \frac{1}{f_0^3} (\nabla h)^2 + f_0 - f_0^3 = 0, \quad (3.45)$$

$$\nabla^2 h - \frac{2}{f_0} \nabla h \cdot \nabla f_0 - f_0^2 h = 0. \quad (3.46)$$

В этих уравнениях  $h$  — модуль приведенного поля  $h$ , параллельного оси  $z$  и являющегося функцией  $x$  и  $y$ .

Двумерные уравнения (3.45) и (3.46) легко вывести из (2.47) и (2.48), полагая  $h$  параллельным оси  $z$ .

Вблизи  $H_{c_2}$ , как отметил Абрикосов [1], решение для  $f_0$  должно содержать какие-либо черты решения для  $H_{c_2}$ . Это будет показано ниже с помощью метода возмущений.

При  $H_{c_2}$  уравнение (3.45) можно линеаризовать и привести к виду

$$\frac{\nabla^2}{\kappa^2} f_0 - \frac{1}{f_0^3} (\nabla h)^2 + f_0 = 0. \quad (3.47)$$

Очевидно, что уравнения (3.46) и (3.47) допускают следующее решение:

$$h = \kappa - \frac{f_0^2}{2\kappa}, \quad (3.48)$$

где  $f_0$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\nabla^2}{\kappa^2} f_0 - \frac{(\nabla f_0)^2}{\kappa^2 f_0} + f_0 = 0. \quad (3.49)$$

Уравнение (3.46) при  $f_0 = 0$  имеет вид  $h = \kappa$  (т. е.  $H = H_{c_2}$ ), а уравнение (3.49) эквивалентно приведенному к линейному виду уравнению (3.1)<sup>1</sup>). При удалении от  $H_{c_2}$  функция  $f_0$  возрастает, но остается все еще малой. Мы ищем, таким образом, решение вида

$$h = \kappa + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \dots, \quad (3.50)$$

где  $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots$  — величины порядка  $f_0^2, f_0^4, \dots$ .

Ясно, что в разложение (3.50) входят только члены с четными степенями, поскольку в (3.45) и (3.46) содержатся только члены с четными степенями  $f_0$ . Поле  $h$  находится из (3.45) и (3.46), а окончательные условия для членов каждого порядка по  $f_0$  имеют вид

$$\frac{\nabla^2 f_0}{\kappa^2} - \frac{(\nabla \varepsilon_2)^2}{f_0^3} + f_0 = 0, \quad (3.51a)$$

$$\nabla^2 \varepsilon_2 - \frac{2}{f_0} \nabla \varepsilon_2 \cdot \nabla f_0 - \kappa f_0^2 = 0, \quad (3.51b)$$

$$\frac{2}{f_0^3} \nabla \varepsilon_2 \cdot \nabla \varepsilon_4 + f_0^3 = 0, \quad (3.52a)$$

$$\nabla^2 \varepsilon_4 - \frac{2}{f_0} \nabla \varepsilon_4 \cdot \nabla f_0 - \varepsilon_2 f_0^2 = 0. \quad (3.52b)$$

<sup>1</sup>) Или уравнению (П.3.1.).



Запишем по аналогии с решением (3.48)  $\nabla \epsilon_2$  как

$$\nabla \epsilon_2 = - \frac{f_0}{\kappa} \nabla f_0 + \nabla \varphi_2, \quad (3.53)$$

где  $\varphi_2$  — функция переменных  $x$  и  $y$  порядка  $f_0^2$ . Теперь уравнения (3.51а) и (3.51б) принимают вид

$$\frac{\nabla^2 f_0}{\kappa^2} - \frac{(\nabla f_0)^2}{\kappa^2 f_0} + \frac{2}{\kappa f_0^2} \nabla f_0 \cdot \nabla \varphi_2 - \frac{(\nabla \varphi_2)^2}{f_0^3} + f_0 = 0, \quad (3.54а)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 - f_0 \frac{\nabla^2 f_0}{\kappa} + \frac{(\nabla f_0)^2}{\kappa} - \frac{2}{f_0} \nabla f_0 \cdot \nabla \varphi_2 - \kappa f_0^2 = 0. \quad (3.54б)$$

Умножим (3.54б) на  $1/\kappa f_0$  и сложим с (3.54а). Получим

$$\frac{\nabla^2 \varphi_2}{\kappa f_0} - \frac{(\nabla \varphi_2)^2}{f_0^3} = 0. \quad (3.55)$$

Функции  $\varphi_2$  и  $f_0$  должны быть ограниченными. Умножая (3.55) на  $f_0$  и интегрируя по объему, получаем

$$\frac{1}{\kappa} \int \nabla^2 \varphi_2 dv = \int \frac{(\nabla \varphi_2)^2}{f_0^2} dv. \quad (3.56)$$

Интеграл в левой части можно преобразовать в поверхностный интеграл. Поскольку функция  $\varphi_2$  ограничена, поверхностный интеграл пренебрежимо мал по сравнению с объемным интегралом, входящим в правую часть. Полагая поверхностный интеграл равным нулю, получаем единственное ограниченное решение уравнения (3.55)

$$\nabla \varphi_2 \equiv 0. \quad (3.57)$$

Таким образом,  $\varphi_2$  — константа. Поэтому решение (3.51) имеет вид

$$\epsilon_2 = \varphi_2 - \frac{f_0^2}{2\kappa}, \quad (3.58)$$

где  $f_0$  удовлетворяет тому же уравнению, что было получено для  $H = H_{c_2}$ , т. е.

$$\frac{\nabla^2 f_0}{\kappa^2} - \frac{(\nabla f_0)^2}{\kappa^2 f_0} + f_0 = 0. \quad (3.49)$$

Поскольку уравнение (3.49) линейно, норма функции  $f_0$  не определена. Эта норма будет найдена в результате рассмотрения поправок четвертого порядка к  $h$ . Уравнения (3.52) дают

$$-\frac{2\nabla f_0 \cdot \nabla \varepsilon_4}{\kappa f_0^2} + f_0^3 = 0, \quad (3.59a)$$

$$\nabla^2 \varepsilon_4 - \frac{2}{f_0} \nabla \varepsilon_4 \cdot \nabla f_0 + \frac{f_0^4}{2\kappa} - \Phi_2 f_0^2 = 0. \quad (3.59б)$$

Нам не нужно вычислять  $\varepsilon_4$ , но из уравнений (3.59a) и (3.59б) можно вывести интересную взаимосвязь между константой  $\Phi_2$  и нормой  $f_0$ , которая впервые была получена Абрикосовым. Умножим (3.59a) на  $\kappa f_0$  и результат вычтем из (3.59б). После интегрирования по объему получаем

$$\int \nabla^2 \varepsilon_4 dV = \Phi_2 \int f_0^2 dV - \kappa \left( \frac{1}{2\kappa^2} - 1 \right) \int f_0^4 dV. \quad (3.60)$$

Интеграл в левой части можно преобразовать в поверхностный интеграл, которым можно пренебречь. В результате получаем следующее соотношение:

$$\Phi_2 \overline{f_0^2} - \kappa \left( \frac{1}{2\kappa^2} - 1 \right) \overline{f_0^4} = 0, \quad (3.61)$$

где черта сверху обозначает усреднение по объему.

Уравнение (3.61) показывает, что  $\Phi_2$  отрицательно и имеет второй порядок по  $f_0$ , как этого и следовало ожидать. Мы покажем, что приложенное поле равно  $\kappa + \Phi_2$  и что соотношение (3.61) определяет норму  $f_0$  как функцию приложенного поля.

С точностью до членов второго порядка по  $f_0$  микроскопическое поле будет, очевидно, равно

$$h = \kappa + \varepsilon_2 = \kappa + \Phi_2 - \frac{f_0^2}{2\kappa}. \quad (3.62)$$

Отсюда видно, что на линиях, на которых постоянна функция  $f_0$ , постоянно также поле  $h$ , т. е. эти линии являются линиями тока.

Можно легко выразить индукцию и свободную энергию через  $f_0^2$ , если ввести отношение <sup>1)</sup>

$$\beta_A = \frac{\bar{f}_0^4}{(f_0^2)^2}. \quad (3.63)$$

Очевидно, что  $\beta_A$  больше единицы (неравенство Шварца).

Индукция  $\mathcal{H}$  равна среднему значению микроскопического поля  $h$ :

$$\mathcal{H} = \kappa + \varphi_2 - \frac{\bar{f}_0^2}{2\kappa} = \kappa + \varphi_2 + \frac{\varphi_2}{(2\kappa^2 - 1)\beta_A}. \quad (3.64)$$

Свободная энергия, найденная из (3.36), равна

$$\mathcal{F} = \bar{h}^2 + \frac{1}{2} - \frac{\bar{f}_0^4}{2}, \quad (3.65a)$$

или с учетом (3.61), (3.62) и (3.64)

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} + \mathcal{H}^2 - \frac{(\kappa - \mathcal{H})^2}{1 + (2\kappa^2 - 1)\beta_A}. \quad (3.65b)$$

Напряженность приложенного поля  $h_e$  равна

$$h_e = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\kappa - \mathcal{H}}{1 + (2\kappa^2 - 1)\beta_A} = \kappa + \varphi_2. \quad (3.66)$$

Таким образом, приложенное поле  $h_e$  равно, как это упоминалось выше,  $\kappa + \varphi_2$ , и

$$\frac{\varphi_2}{\kappa} = \frac{H - H_{c_2}}{H_{c_2}}. \quad (3.67)$$

Выраженная через приложенное поле  $h_e$  индукция имеет вид

$$\mathcal{H} = h_e - \frac{\kappa - h_e}{(2\kappa^2 - 1)\beta_A}. \quad (3.68)$$

Тогда намагниченность равна

$$\mu = \frac{1}{4\pi} \frac{\kappa - h_e}{(2\kappa^2 - 1)\beta_A}. \quad (3.69)$$

<sup>1)</sup> По существу  $\beta_A$  — геометрический фактор, и будет показано, что он не зависит от  $\kappa$ .

На этой стадии остается задача отыскания удобного решения для функции  $f_0$ , удовлетворяющей уравнению (3.49). Это уравнение легко привести к виду

$$\nabla^2 (\ln f_0) + \kappa^2 = 0. \quad (3.70)$$

Из решения этого уравнения видно, что геометрический фактор  $\beta_A$  не зависит от  $\kappa^1$ ). Наиболее общее решение уравнения (3.70) можно записать в виде

$$\ln f_0 = -\frac{\kappa^2 y^2}{2} + \alpha(x, y). \quad (3.71)$$

Здесь  $\alpha(x, y)$  — общее решение уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \alpha = 0. \quad (3.72)$$

Таким образом,  $\alpha(x, y)$  — вещественная часть любой аналитической функции от  $z = x + iy$ . Поскольку

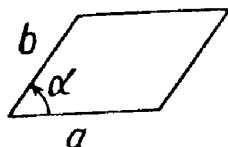
$$e^{\operatorname{Re}(a+ib)} = e^a = |e^{a+ib}|, \quad (3.73)$$

наиболее общим решением (3.70) будет

$$f_0 = e^{-\kappa^2 y^2/2} |g(z)|, \quad (3.74)$$

где  $g(z)$  — любая аналитическая функция от  $z = x + iy$ .

При заданной  $\mathcal{B}$  свободная энергия (3.65) является возрастающей функцией  $\beta_A$  ( $\kappa \geq 1/\sqrt{2}$ ), и наиболее выгодная функция  $f_0$  соответствует низшему значению  $\beta_A$ .



Фиг. 14.

Уже было установлено, что для увеличения вклада, вносимого поверхностной энергией, лучше всего рассмотреть периодическую двумерную решетку из нитей. Предположим, что единичная ячейка решетки — параллелограмм, изображенный на фиг. 14. Можно ввести новую

<sup>1)</sup> Для различных значений  $\kappa$  решения этого уравнения подобны.

координатную систему  $X, Y$  таким образом, что

$$z = x + iy = X + Ye^{i\alpha}, \quad (3.75a)$$

$$x = X + Y \cos \alpha, \quad (3.75б)$$

$$y = Y \sin \alpha. \quad (3.75в)$$

Тогда функция  $f_0$  принимает вид

$$f_0 = |g(X + Ye^{i\alpha})| \exp\left(-\frac{\kappa^2 Y^2 \sin^2 \alpha}{2}\right). \quad (3.76)$$

Функция  $f_0$  — периодическая функция по  $X$  с периодом  $a$  и по  $Y$  с периодом  $b$ .

Предполагается, что  $a$  и  $b$  — наименьшие возможные периоды по  $X$  и  $Y$ . Член  $g(X + Ye^{i\alpha})$  можно разложить в ряд по  $X$ , т. е.

$$g(X + Ye^{i\alpha}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_n \exp\left[\frac{2\pi ni}{a}(X + Ye^{i\alpha})\right], \quad (3.77)$$

где  $\gamma_n$  — постоянные. Теперь функция  $f_0$  становится равной

$$f_0 = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left[\frac{2\pi ni}{a}(X + Y \cos \alpha)\right] \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-\frac{\kappa^2}{2} \sin^2 \alpha \left(Y + \frac{2\pi n}{a\kappa^2 \sin \alpha}\right)^2\right] \right|, \quad (3.78)$$

где

$$C_n = \gamma_n \exp\left(\frac{2\pi^2 n^2}{a^2 \kappa^2}\right). \quad (3.79)$$

Эта функция периодична по  $Y$  с периодом  $b$ , если

$$\frac{bn}{p} = \frac{2\pi n}{a\kappa^2 \sin \alpha} \quad (3.80a)$$

и если

$$C_{n+p} = C_n \exp\left(\frac{2\pi i bn}{a} \cos \alpha\right), \quad (3.80б)$$

где  $p$  — целое число.

Перепишем уравнение (3.80а) следующим образом:

$$ab \sin \alpha = \frac{2\pi p}{\kappa^2}. \quad (3.81)$$

Видно, что это — поверхность единичной ячейки. Если приложенное поле равно  $H_{c_2}$ , поток приведенного поля в единичной ячейке равен

$$\int \mathbf{h} \cdot d\sigma = \kappa ab \sin \alpha = \frac{2\pi p}{\kappa}. \quad (3.82)$$

Согласно определению приведенного поля, поток истинного поля в единичной ячейке равен

$$\Phi_{H_{c_2}} = p\Phi_0. \quad (3.83)$$

Таким образом,  $p$  представляет собой число квантов потока на нить<sup>1)</sup>.

В приложении (п. 4) показано, что наиболее «выгодное» решение соответствует  $p = 1$ , т. е. один квант потока на нить. (Приведенные там рассуждения являются упрощенной версией доказательств, данных Лэшером [11].)

Достаточно, таким образом, вычислить  $\beta_A$  для  $p = 1$ . Согласно выражению (3.80б), которое можно привести к виду

$$C_{n+p} = C_n \exp\left(\frac{2\pi i b}{a} n \cos \alpha\right),$$

функция  $f_0$  зависит только от одного коэффициента  $C_0$  и равна

$$f_0 = |C_0| \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[2\pi i \frac{b}{a} \cos \alpha \frac{n(n-1)}{2}\right] \times \right. \\ \left. \times \exp\left[\frac{2\pi n i}{a} (X + Y \cos \alpha)\right] \exp\left[-\frac{\kappa^2 \sin^2 \alpha}{2} (Y + bn)^2\right] \right|. \quad (3.84)$$

<sup>1)</sup> Для полей, меньших  $H_{c_2}$ , в первом приближении единичная ячейка остается той же и только амплитуда  $f_0$  растет. Может показаться, что, согласно выражению (3.62), для поля условия квантования потока теперь не выполняются. Этот вопрос будет обсуждаться ниже.

После довольно длинных алгебраических преобразований получаем

$$\beta_A = \frac{\langle f_0^4 \rangle}{\langle f_0^2 \rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} | \kappa b \sin \alpha | \left\{ \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left( \frac{4\pi^2}{a^2 \kappa^2} \frac{ie^{i\alpha}}{\sin \alpha} n^2 \right) \right|^2 + \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ \frac{4\pi^2}{a^2 \kappa^2} \frac{ie^{i\alpha}}{\sin \alpha} \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right|^2 \right\}. \quad (3.85)$$

Вводя комплексную переменную

$$\zeta = \frac{b}{a} e^{i\alpha} = \rho + i\sigma \quad (3.86)$$

и используя (3.81) при  $\rho = 1$ , получаем

$$\beta_A = \sigma^{1/2} \left\{ \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i n^2 \zeta) \right|^2 + \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ 2\pi i \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \zeta \right] \right|^2 \right\}. \quad (3.87)$$

Как уже указывалось, геометрический фактор  $\beta_A$  не зависит от  $\kappa$ . В плоскости комплексной переменной  $\zeta$  функция  $\beta_A$  обладает следующими свойствами симметрии:

1)  $\beta_A$  периодична по  $\rho$  с периодом 1 [т. е.  $\beta_A(\rho) = \beta_A(\rho + 1)$ ].

2)  $\beta_A$  симметрична по отношению к оси  $\rho = 1/2$  [т. е.  $\beta_A(\rho) = \beta_A(1 - \rho)$ ].

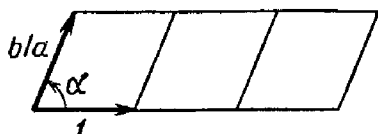
3) С помощью формулы сумм Пуассона можно показать, что  $\beta_A(\zeta) = \beta_A(1/\zeta^*)$ , т. е. функция  $\beta_A$  сохраняется при инверсии с центром в 0 с радиусом инверсии 1.

С целью интерпретации этих свойств симметрии необходимо отметить, что для данного  $\zeta$  элементарная ячейка подобна параллелограмму, изображенному на фиг. 15а<sup>1)</sup>.

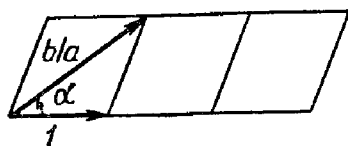
Очевидно, что переход  $\rho \rightarrow \rho + 1$  означает новый выбор элементарной ячейки для той же решетки, как показано на фиг. 15б.

<sup>1)</sup> Истинные значения  $a$  и  $b$  зависят от  $\kappa$  и получаются из (3.79) при  $\rho = 1$ .

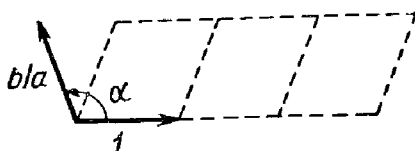
Симметрия относительно оси  $\rho = 1/2$  (т. е.  $\rho \rightarrow 1 - \rho$ ) приводит к решетке, получаемой из исходной решетки с помощью той же симметрии (фиг. 15в).



Ф и г. 15а.

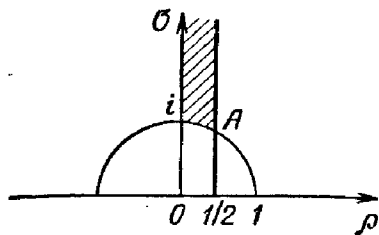


Ф и г. 15б.



Ф и г. 15в.

Инверсия состоит в перемене местами  $a$  и  $b$ , причем решетка, конечно, не меняется. Таким образом, ни одно из вышеперечисленных свойств симметрии не изменяет решетки. Благодаря этим свойствам симметрии достаточно рассмотреть поведение  $\beta_A$  для  $\zeta$ , расположенной в заштрихованной области на фиг. 16.



Ф и г. 16.

а на линии  $\rho = 1/2$   $\beta_A$  — возрастающая функция  $\sigma$  при  $\sigma \geq \sqrt{3}/2$ .

Абсолютный минимум  $\beta_A$  достигается в изолированной точке  $A$ , когда

$$\zeta = e^{i\pi/3}.$$



Эта точка соответствует равносторонней треугольной решетке. Конечно, в плоскости  $\zeta$  функция  $\beta_A$  имеет одно и то же значение в бесконечном числе изолированных точек, которые могут быть получены из точки  $A$  с помощью упомянутых уже операций симметрии, но такие точки будут соответствовать той же самой решетке. Значение  $\beta_A$  было вычислено Клейнером и др. [12], которые нашли, что

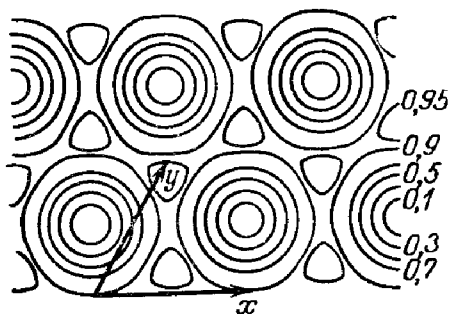
$$\beta_A = 1,1596.$$

В своей оригинальной статье Абрикосов предсказал существование квадратной решетки, соответствующей значениям  $\xi = i$ ,  $\beta_A = 1,18$ . Эта точка, действительно, является экстремальной для  $\beta_A$ , но она соответствует седловине, а не абсолютному минимуму.

Для исследования свойств поля [выражение (3.62)] интересно выразить  $f_0^2$  через двойные ряды Фурье. Простые вычисления дают

$$\begin{aligned} f_0^2 &= |C_0|^2 3^{-1/4} \times \\ &\times \sum_{m,n} (-1)^{mn} e^{-i\pi n/2} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{\pi(m^2 + n^2 - mn)}{\sqrt{3}}\right] \times \\ &\times \exp\left[\frac{2\pi i(nX + mY)}{a}\right]. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Функция  $f_0^2$  обращается в нуль в точках, которые в отношении операции сдвига эквивалентны<sup>1)</sup> точке  $X = 3a/4$ ,  $Y = a/2$ , и изменяется как  $r^2$  в окрестности этих точек, которые соответствуют минимуму поля  $H$ . Поле  $H$  поэтому обладает гексагональной симметрией (симметрией группы  $p_6$  мм). Контурная диаграмма  $f_0^2$  была



Фиг. 17. Контурная диаграмма для  $f_0^2$ , вычисленная Клейнером и др. [12].

Максимум  $f_0^2$  нормирован к 1.

<sup>1)</sup> Это легче всего увидеть, если  $f_0$  записать в форме (3.84) при  $\alpha = \pi/3$  и  $b = a$ .

составлена Клейнером и др. [12] и воспроизведена на фиг. 17. Расстояние между двумя максимумами поля равно, очевидно, параметру решетки  $a = (2\sqrt{\pi}/\kappa) \cdot 3^{-1/4}$  [получено из (3.79)]. Таким образом, фактическое расстояние между двумя вихревыми нитями равно

$$L = a\lambda(T) = 2\sqrt{\pi} \cdot 3^{-1/4} \xi(T) \approx 2,7\xi(T). \quad (3.89)$$

Как ширина нитей, так и расстояние между ними при сильном перекрытии нитей имеют величину порядка  $\xi(T)$ . Представление об изолированных нитях в окрестности  $H_c$ , бессмысленно и заменяется представлением о периодической структуре поля.

Коэффициент  $|C_0|^2$ , входящий в выражение для  $f_0^2$  и легко вычисляемый из (3.61), пропорционален  $(1 - h_c/\kappa)$ . Ряды по  $f_0^2$  очень быстро сходятся, так что для большинства вычислений достаточно записать  $f_0^2$  в виде <sup>1)</sup>

$$f_0^2 = |C_0|^2 3^{-1/4} \left\{ 1 - 2e^{-\pi/\sqrt{3}} \left[ \cos \frac{2\pi}{a} X + \cos \frac{2\pi}{a} Y + \cos \frac{2\pi}{a} (X + Y) \right] \right\}. \quad (3.90)$$

Это выражение будет использовано при обсуждении экспериментов по дифракции нейтронов (см. стр. 91).

Вернемся теперь к вопросу о квантовании потока в вихревой нити, т. е. в элементарной ячейке. В § 3, п. I было показано, что квантование потока дает <sup>2)</sup>

$$\int_{\Sigma} \mathbf{h} \cdot d\sigma = \frac{2\pi p}{\kappa} + \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}}{f_0^2}. \quad (3.91)$$

Однако линии тока, как указывалось выше, являются линиями постоянной  $f_0^2$ . Следовательно, в силу трансляционной инвариантности вихревой решетки

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}}{f_0^2} = 0$$

<sup>1)</sup> В этом выражении начало координат берется в одной из точек, где  $f_0^2$  равна нулю.

<sup>2)</sup> В этом уравнении используются безразмерные величины (2.37) и (3.11).

при интегрировании вдоль сторон элементарной ячейки. Итак, поток приведенного поля в элементарной ячейке должен быть равен  $2\pi/\kappa$  при одном кванте на нить. Из (3.62) получаем

$$\int_{\Sigma} \mathbf{h} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = h_e S_{h_e} - \int_{\Sigma} \frac{\bar{f}_0^2}{2\kappa} d\sigma = \frac{2\pi}{\kappa} = \kappa S_{h_{c_2}}, \quad (3.92)$$

где  $S_{h_e}$  — площадь элементарной ячейки, соответствующая приложенному полю  $h_e$ . Это уравнение определяет изменение размеров элементарной ячейки ниже  $H_{c_2}$ :

$$\frac{S_{H_{c_2}}}{S_{H_e}} = \frac{S_{h_{c_2}}}{S_{h_e}} = \frac{H_e}{H_{c_2}} - \frac{\bar{f}_0^2}{2\kappa^2}. \quad (3.93)$$

Это отношение равно 1 при  $H_e = H_{c_2}$ , а при  $H_e < H_{c_2}$  увеличение площади элементарной ячейки порядка  $\bar{f}_0^2$ .

Полученный вывод тем не менее согласуется с вычислениями для вихревой структуры. В самом деле, если свободную энергию записать в виде (3.65б), то индукция  $\mathcal{H}$  берется с точностью до членов порядка  $\bar{f}_0^2$  и параметры решетки не меняются.

Если в выражениях для  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{F}$  учитывать члены более высоких порядков, минимизация  $\mathcal{F}$  привела бы к решетке, зависящей от  $h_e$ . Ясно, что если при вычислении  $\mathcal{H}$  принимать во внимание изменение решетки, появятся поправки порядка  $\bar{f}_0^4$ .

#### 4. Особый случай $\kappa = 1/\sqrt{2}$

При  $\kappa = 1/\sqrt{2}$  поле  $H_{c_2}$  равно  $H_c$ .

Ниже будет показано, что поле  $H_{c_1}$  также равно  $H_c$ . Рассмотрим уравнения (3.16) и (3.17). При  $\kappa = 1/\sqrt{2}$  эти уравнения идентичны, если

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - f_0^2). \quad (3.94)$$

Это выражение для  $\mathbf{h}$  правильно, поскольку оно удовлетворяет граничным условиям (3.18). Энергию

нити можно выразить через поток поля  $h$ . Для нити с  $p$  квантами потока выражение (3.34) дает

$$\mathcal{F}_p = 2\pi \int_0^\infty (1 - f_0^2) \rho \, d\rho = 2\pi \sqrt{2} \int_0^\infty h\rho \, d\rho = 2\pi \sqrt{2} \frac{\Phi}{\kappa}. \quad (3.95)$$

Поскольку  $\mathcal{F}_p$  пропорциональна  $p$ , поле  $H_{c_1}$ , при котором начинается проникновение, не будет зависеть от  $p$ :

$$h_{c_1}(p) = \frac{\kappa \mathcal{F}_p}{4\pi p} = \frac{1}{\sqrt{2}} = h_c = h_{c_2}. \quad (3.96)$$

Этот результат является следствием равенства нулю поверхностной энергии.

#### § 4. Основные свойства структуры вихревых нитей. Кривая намагничивания

Основываясь на результатах, полученных в предыдущем параграфе, естественно предположить, что периодическая структура вихревых нитей с одним квантом на нить будет сохраняться во всей области приложенного поля. Более того, Матрикон [10] с помощью упрощенной модели, основанной на обобщенном уравнении Лондонов (см. ниже), показал, что для больших  $\kappa$  наиболее выгодной является треугольная решетка при всех значениях  $H$  ( $H_{c_1} < H < H_{c_2}$ )<sup>1)</sup>. Для этой конфигурации концентрация нитей, а следовательно, и индукция легко вычисляются как функции параметра решетки  $L$ .

Концентрация нитей на единицу площади поперечного сечения равна

$$\rho_L = \frac{n}{S} = \frac{2}{\sqrt{3} L^2}, \quad (3.97)$$

а индукция

$$B = \frac{n}{S} \Phi_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\Phi_0}{L^2}. \quad (3.98)$$

В § 3, п. 2 показано, что при больших  $\kappa$  понятие одиночной вихревой нити приводит к представлению о серд-

<sup>1)</sup> См. также работу [14].

цевине шириной  $\xi(T)$ , где параметр упорядочения сильно возмущен, а поле изменяется на расстоянии  $\lambda(T) \gg \xi(T)$  [13]. В таком случае удобно рассмотреть свойства сверхпроводника второго рода в магнитном поле в трех областях значений поля.

1) Вблизи  $H_{c_2}$ , где концентрация нитей высока. Было показано, что  $L \sim \xi(T)$  и  $\rho_L \approx 1/\xi^2(T)$ . Возникает сильное перекрытие сердцевин нитей, и от представления об изолированных нитях нужно отказаться. Однако вычисления, выполненные в § 3, п. 3, дают необходимые основные результаты.

2) Вблизи  $H_{c_1}$ . В этой области концентрация нитей низка [ $\rho_L \approx 1/\lambda^2(T)$ ]. Эти нити можно рассматривать как изолированные или как слабо взаимодействующие.

3) В промежуточной области  $1/\lambda^2(T) \ll \rho_L \ll 1/\xi^2(T)$ . Здесь концентрация достаточно высока, но все еще можно применять понятие отдельных взаимодействующих нитей.

Рассмотрим теперь эти три области полей более детально.

### 1. Вблизи $H_{c_2}$

Около  $H_{c_2}$  свободная энергия имеет вид (3.65б)

$$F = \frac{H_c^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{(H_{c_2} - B)^2}{1 + (2\kappa^2 - 1)\beta_A}. \quad (3.99)$$

Как и можно было ожидать, приложенное поле равно

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{dF}{dB}. \quad (3.100)$$

Выше уже упоминалось, что намагниченность имеет порядок  $|\psi|^2$ ; тогда из (3.69) получаем

$$M = \frac{B - H}{4\pi} = \frac{H - H_{c_2}}{4\pi\beta_A(2\kappa^2 - 1)}, \quad \frac{H_{c_2} - H}{H_{c_2}} \ll 1. \quad (3.101)$$

Намагниченность обращается в нуль при  $H = H_{c_2}$ , и переход является фазовым переходом второго рода. Это находится в согласии с утверждением, сделанным в гл. 1, § 7. Производная кривой намагничивания

конечна:

$$\frac{dM}{dH} = \frac{1}{4\pi\beta_A (2\kappa^2 - 1)} \quad (3.102)$$

(она будет очень велика, когда  $\kappa \approx 1/\sqrt{2}$ ).

Выражение (3.102) можно использовать для определения  $\kappa$  (при известном  $\beta_A$ ) или для определения  $\beta_A$  (при известном  $\kappa$ ). Ясно, что кривая намагничивания должна быть по возможности обратима. Именно по этой причине Кинзель, Линтон и Серин [15] исследовали сплав In — 2,5% Вi. В вопросе о производной остается еще некоторая неопределенность, но тем не менее измерения  $H_{c2}$  и  $H_c$  вблизи  $T_0$  привели к значению  $\kappa = (1/\sqrt{2})(H_{c2}/H_c) = 1,80$ , в то время как из производной кривой намагничивания находим, что  $\kappa = 1,81$  (при  $\beta_A = 1.16$ )<sup>1)</sup>. Необходимо отметить, что приведенные результаты вблизи  $H_{c2}$  справедливы при любом значении  $\kappa$ .

## 2. Окрестность $H_{c1}$

При высоких значениях  $\kappa$  понятие отдельных изолированных нитей дает возможность применить уравнение Лондонов для вычисления поля и тока. Сердцевина нити в пределе  $\lambda(T) \gg \xi(T)$  хорошо описывается двумерной  $\delta$ -функцией. Для отдельной нити удобное «уравнение Лондонов» будет иметь вид

$$\mathbf{h} + \lambda^2(T) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h} = \Phi_0 \delta_2(\mathbf{r}). \quad (3.103)$$

(вектор  $\Phi_0$  параллелен оси  $z$  и имеет величину кванта потока  $\Phi_0$ ).

Эта форма обеспечивает правильное квантование потока. Принимая во внимание уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad (3.104)$$

можно вычислить характеристики поля и определить  $H_{c1}$ . Получаемые результаты аналогичны результатам § 3,

<sup>1)</sup> Сравнение нужно проводить вблизи  $T_0$ . В гл. 5 будет показано, что при  $T < T_0$  необходимо вводить три параметра:  $\kappa_1(T)$ ,  $\kappa_2(T)$  и  $\kappa_3(T)$ , связанных с  $H_{c2}(T)$ ,  $(dM/dH)_{H=H_{c2}}$  и  $H_{c1}(T)$ , которые равны друг другу только при  $T = T_0$ .

п. 2. Например, микроскопическое поле имеет вид

$$h = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2(T)} K_0 \left( \frac{r}{\lambda(T)} \right), \quad r \gg \xi(T), \quad (3.105)$$

а свободная энергия, полученная из (1.14), равна (на единицу длины нити)

$$F = \left[ \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda(T)} \right]^2 \left[ \ln \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} + \varepsilon \right]. \quad (3.106)$$

Численная постоянная  $\varepsilon$  учитывает вклад сердцевин. Вышеприведенное значение  $F$  дает выражение (3.40) для  $H_{c1}$ .

При условии что использованные значения  $\xi(T)$  и  $\lambda(T)$  выбраны для соответствующей температуры  $T$ , полученные результаты представляют собой в каком-то смысле обобщение результатов Абрикосова для любой температуры ниже  $T_0$ .

Если приложенное поле слегка превышает  $H_{c1}$ , концентрация нитей увеличивается, но можно предположить, что их расстояния друг от друга все еще больше радиуса сердцевин. Пригодное для такого случая «уравнение Лондонов» теперь можно записать в виде

$$\mathbf{h} + \lambda^2(T) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h} = \Phi_0 \sum_i \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \gg \xi(T), \quad (3.107)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — положение сердцевин  $i$ -й нити.

Рассмотрим сначала случай двух нитей. Если выполняется условие  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg \xi(T)$ , то поле  $h$  будет суперпозицией полей  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$ , отвечающих отдельным нитям:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{h}_2(\mathbf{r}), \quad (3.108)$$

$$\mathbf{h}_1(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2(T)} K_0 \left[ \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{\lambda(T)} \right]. \quad (3.109)$$

Свободная энергия на единицу длины равна

$$\frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{h}^2 + \lambda^2(T) |\operatorname{rot} \mathbf{h}|^2] dv = \frac{\lambda^2(T)}{8\pi} \int (\mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{h}) \cdot d\sigma. \quad (3.110)$$

Поверхностный интеграл берется по поверхности двух сердцевин  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \approx \xi(T)$ ,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| \approx \xi(T)$ . Энергию

можно записать в виде

$$F = \frac{\lambda^2(T)}{8\pi} \int (d\sigma_1 + d\sigma_2) \cdot [(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) \times (\text{rot } \mathbf{h}_1 + \text{rot } \mathbf{h}_2)] \quad (3.111)$$

и разделить на три части:

а) энергия отдельных нитей

$$J = F_{11} + F_{22} = \frac{\lambda^2(T)}{8\pi} \left[ \int d\sigma_1 \cdot (\mathbf{h}_1 \times \text{rot } \mathbf{h}_1) + \int d\sigma_2 \cdot (\mathbf{h}_2 \times \text{rot } \mathbf{h}_2) \right]; \quad (3.112)$$

б) член

$$\int (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) \cdot (\text{rot } \mathbf{h}_1 \times d\sigma_2 + \text{rot } \mathbf{h}_2 \times d\sigma_1), \quad (3.113)$$

который стремится к нулю при  $\xi(T) \ll \lambda(T)$ , поскольку  $\mathbf{h}_1$  и  $\text{rot } \mathbf{h}_1$  конечны в области интегрирования  $d\sigma_2$ ;

в) энергия взаимодействия

$$F_{12} = \frac{\lambda^2(T)}{8\pi} \int [(\mathbf{h}_1 \times \text{rot } \mathbf{h}_2) \cdot d\sigma_2 + (\mathbf{h}_2 \times \text{rot } \mathbf{h}_1) \cdot d\sigma_1]. \quad (3.114)$$

Эта энергия конечна, поскольку при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| \ll \lambda(T)$   $|\text{rot } \mathbf{h}_2|$  пропорционален  $1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Из выражения (3.105) для  $\mathbf{h}$  мы видим, что

$$F_{12} = \frac{\Phi_0^2}{16\pi^2 \lambda^2(T)} K_0 \left( \frac{r_{12}}{\lambda(T)} \right) \quad (r_{12} = r_1 - r_2). \quad (3.115)$$

Эта энергия взаимодействия соответствует отталкиванию и убывает на больших расстояниях как

$$\frac{1}{\sqrt{r_{12}}} e^{-r_{12}/\lambda(T)}, \quad (3.116)$$

а на коротких расстояниях ведет себя как

$$\ln \frac{\lambda(T)}{r_{12}}. \quad (3.117)$$

Теперь можно вычислить различные интересующие нас термодинамические величины с помощью выражения для свободной энергии Гиббса:

$$G = F - \frac{BH}{4\pi}, \quad (3.118)$$



которую можно записать в виде

$$G = \sum_i F_i + \sum_{ij} F_{ij} - \frac{BH}{4\pi}. \quad (3.119)$$

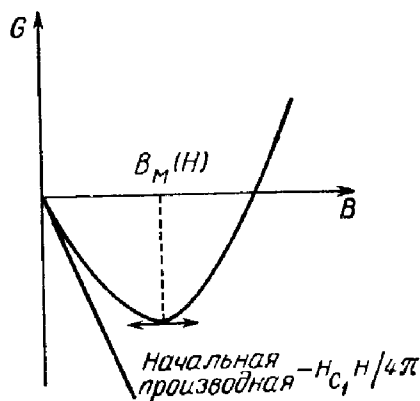
Здесь  $F_i$  — энергия нити  $i$ , определяемая согласно (3.106), и  $F_{ij}$  — энергия взаимодействия. При поле  $H$ , слегка превышающем  $H_c$ , плотность нитей  $\rho_L$  все еще мала и нужно рассматривать лишь взаимодействие с ближайшими соседями, число которых обозначим через  $z$ . Тогда энергия Гиббса на единицу площади поверхности равна <sup>1)</sup>

$$G = \frac{B}{4\pi} \left[ H_{c1} - H + \frac{1}{2} z \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2(T)} K_0 \left( \frac{L}{\lambda(T)} \right) \right]. \quad (3.120)$$

При выводе (3.120) мы использовали (3.34) и соотношение

$$B = \rho_L \Phi_0.$$

Для треугольной решетки параметр  $L$  связан с  $B$  соотношением (3.98). График  $G$  как функции от  $B$  показан на фиг. 18. Начальная производная отрицательна ( $H > H_{c1}$ ), а энергия взаимодействия пренебрежимо мала при малых  $B$ . При увеличении  $B$  входящий в энергию взаимодействия член  $K_0 \times [1,07 \sqrt{\Phi_0/B\lambda^2(T)}]$  увеличивается, и в точке  $B = B_M(H)$  индукция  $B$  проходит через минимум, отвечающий равновесному значению индукции для поля  $H$ .

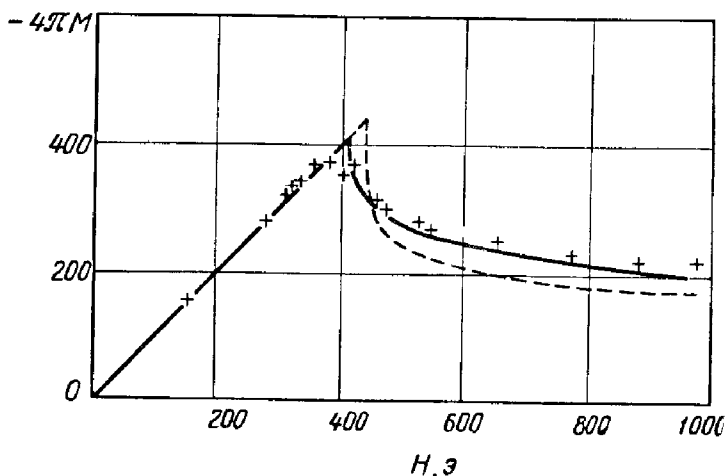


Фиг. 18. Схематическая зависимость  $G$  от  $B$ .

Минимум  $B_M(H)$ , а следовательно, и  $M(H)$ , был впервые вычислен Гудманом [16] (фиг. 19). Благодаря специфической форме члена, соответствующего энергии взаимодействия, производная  $(\partial M / \partial H)_{H=H_{c1}}$  бесконечна. Это следует из того, что энергия взаимодействия имеет

<sup>1)</sup> Заметим, что число нитей пропорционально  $B$ .

вид (3.116) при  $L \gg \lambda(T)$ . Образование многих нитей может происходить без значительного увеличения энергии взаимодействия. Экспериментальные кривые (на фиг. 19 экспериментальные точки соответствуют сплаву Mo—Re) не дают бесконечной производной при  $H = H_{c1}$ . Это объясняется слабостью взаимодействия между нитями, которое не может предотвратить прилипание (пиннинг) нитей к дефектам структуры см. гл. 8).



Фиг. 19. Кривая намагничивания для сплава Mo—Re при  $T = 0,52T_c$ .

Две теоретические кривые (пунктир для ламинарной модели и сплошная линия для модели вихревых нитей) были построены Гудманом. Экспериментальные точки взяты из работы [25].

Аналогичные вычисления можно произвести для ламинарной модели. Отталкивание между нитями все еще пропорционально  $\exp[-L/\lambda(T)]$ , но  $B$  пропорционально  $1/L$  (вместо  $1/L^2$ ) и  $\partial M(H)/\partial H$  больше для ламинарной модели, чем для структуры вихревых нитей [16].

Интересно определить условие статического равновесия нитей [6]. Используя выражение (3.115) для  $F_{12}$ , видим, что сила, действующая на нить 2, равна

$$\mathbf{f}_2 = -\nabla F_{12}. \quad (3.121)$$

Статическое равновесие достигается, когда  $\mathbf{f}_2 = 0$ . Сила  $\mathbf{f}_2$  может быть выражена через сверхтекучую скорость в точке  $\mathbf{r}_2$ . Ток  $\mathbf{j}$ , который будет проходить через

точку  $\mathbf{r}_2$  в присутствии только одной нити 1, равен

$$\mathbf{j} = n_1 e \mathbf{v} = - \frac{e}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{h}_1)_{r=r_2}. \quad (3.122)$$

Используя (3.111) и (3.116), находим

$$f_{2x} = \frac{\hbar}{2\pi} v_y, \quad (3.123)$$

$$f_{2y} = - \frac{\hbar}{2\pi} v_x. \quad (3.124)$$

Нить находится в статическом равновесии, когда сверхтекучая скорость равна нулю в любой точке нити.

### 3. Промежуточная область

В этой области вихревые нити образуют плотную решетку. Однако можно сделать некоторые теоретические выводы, если предположить, что расстояние  $L$  между нитями все еще больше радиуса сердцевины  $\xi(T)$ . Таким образом, эта область будет описываться неравенством  $1/\xi^2(T) \gg \rho_L \gg 1/\lambda^2(T)^1$ . В выражении (3.119) для энергии Гиббса суммирование в члене, соответствующем энергии взаимодействия, должно быть распространено на удаленные нити. Чтобы вычислить эту энергию, лучше всего перейти к суммированию по обратной решетке.

Если произвести преобразование Фурье для поля  $h$ , то

$$\mathbf{h}_q = \rho_L \int_{\text{Ячейка}} \mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d_2r, \quad (3.125)$$

и легко видеть, что  $h_q = 0$ , если вектор  $\mathbf{q}$  не равен вектору обратной решетки  $\mathbf{M}$ . Поле  $h_M$  получаем из (3.107)

$$h_M = \frac{\rho_L \Phi_0}{1 + \lambda^2(T) M^2}. \quad (3.126)$$

Свободная энергия теперь имеет вид

$$F = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{h}^2 + \lambda^2(T) |\text{rot } \mathbf{h}|^2) d\mathbf{r} = \frac{B^2}{8\pi} \sum_M \frac{1}{1 + \lambda^2(T) M^2}. \quad (3.127)$$

<sup>1)</sup> Необходимо отметить, что понятие промежуточной области относится лишь к случаю больших значений  $\kappa$  ( $\kappa > 10$ ), так как наименьшие значения  $L$  имеют порядок  $2,7\xi(T)$  [см. (3.89)].

Наименьшая трансляция в обратной решетке имеет порядок  $1/L$ , так что если  $M \neq 0$ , то  $\lambda^2(T)q^2 \gg 1$  [поскольку  $\rho_L \gg 1/\lambda^2(T)$ ]. Свободная энергия принимает вид

$$F = \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \sum_{M \neq 0} \frac{1}{\lambda^2(T) M^2}. \quad (3.128)$$

Эта энергия зависит от формы решетки. Однако, если заменить суммирование на интеграл, можно сделать качественные выводы:

$$\begin{aligned} \sum_M \frac{1}{M^2} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\rho_L} \int \frac{dM}{M^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi\rho_L} \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} \frac{M dM}{M^2} = \frac{1}{2\pi\rho_L} \ln \frac{M_{\max}}{M_{\min}}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Очевидно, что  $M_{\min}$  имеет порядок  $1/L$ , а  $M_{\max}$  — порядок  $1/\xi(T)$ , поскольку фурье-компоненты сердцевинки должны быть исключены. Следовательно, свободная энергия равна

$$F = \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B}{4\pi} H_c \frac{\ln \alpha L/\xi(T)}{\ln \lambda(T)/\xi(T)}. \quad (3.130)$$

Здесь  $\alpha$  — численная константа порядка единицы. Функция Гиббса

$$G = F - \frac{BH}{4\pi}$$

проходит через минимум при

$$H = B + H_c \frac{\ln \alpha' L/\xi(T)}{\ln \lambda(T)/\xi(T)} \quad (\alpha' = \alpha e^{-1/2}). \quad (3.131)$$

Намагниченность  $M$  становится, таким образом, равной

$$M = \frac{B - H}{4\pi} = - \frac{H_c}{4\pi} \frac{\ln \{[\alpha'/\xi(T)] (2\Phi_0/\sqrt{3} B)^{1/2}\}}{\ln [\lambda(T)/\xi(T)]}. \quad (3.132)$$

Логарифмическая зависимость  $M$  от  $B$  достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными по обратимым кривым намагничивания

Ход кривых намагничивания изображен на фиг. 7 и 19.

## § 5. Экспериментальное наблюдение структуры вихревых нитей

### 1. Дифракция нейтронов

В 1964 г. Де Жен и Матрикон [17] предположили, что периодическую структуру вихревых нитей можно обнаружить с помощью дифракции нейтронов, так как периодическое изменение поля  $\mathbf{h}$  будет давать брэгговские пики. Расположение этих пиков определит параметр решетки  $L$  и ее симметрию.

Энергия взаимодействия между нейтроном и магнитным полем равна  $\mu_N \mathbf{h}(\mathbf{r})$ , где  $\mu_N = (1,91 e\hbar/M_N c)$  — магнитный момент нейтрона и  $M_N$  — его масса.

В процессе рассеяния импульс нейтрона изменяется от  $\hbar \mathbf{k}_0$  до  $\hbar(\mathbf{k}_0 + \mathbf{q})$ . Амплитуда рассеяния определяется в борновском приближении в результате вычисления интеграла

$$a = \frac{M_N}{2\pi\hbar^2} \int \mu_N \mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (3.133)$$

Как и предполагалось, этот интеграл равен нулю, если  $\mathbf{q}$  не равно  $\mathbf{M}$ , вектору обратной решетки (брэгговское рассеяние), а амплитуда рассеяния пропорциональна соответствующему коэффициенту фурье-разложения  $h$ .

В области  $\rho_L \ll 1/\xi^2(T)$  и для больших значений  $\kappa$  можно использовать разложение в ряд выражения (3.126) и

$$a_M = \frac{1,91}{2} \frac{\rho_L V}{1 + \lambda^2(T) M^2}; \quad (3.134)$$

здесь  $V$  — объем образца. Поскольку экспериментаторы обычно пользуются эффективным сечением на атом, то мы за  $V$  примем атомный объем порядка  $30 \text{ \AA}^3$ . Первое брэгговское отражение происходит для треугольной решетки при  $M_1 = 4\pi/\sqrt{3}L$ . Если  $V = 2000 \text{ гс}$ ,  $L = 10^3 \text{ \AA}$  и  $M \approx 7 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ , то для глубины проникновения  $\lambda(T) \approx \approx 1000 \text{ \AA}$ , как и предполагалось,  $\lambda^2 M^2 \approx 50 \gg 1$ . Эффективное сечение тогда равно

$$\sigma_1 = 4\pi a_{M_1}^2 \approx 5 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2 = 0,5 \text{ мбарн}.$$

Эта величина очень мала и близка к точности измерений для современной нейтронной методики.

Эффективное сечение  $\sigma_2$  для второго брэгговского пика еще меньше. Ясно, что отношение  $\sigma_2/\sigma_1$  равно  $(h_{M_1}/h_{M_2})^2$ , где  $h_{M_1}$  и  $h_{M_2}$  — соответствующие фурье-коэффициенты, поскольку число вторых соседей равно числу первых (для треугольной или квадратной решеток).

В области  $\rho_L \ll 1/\xi^2(T)$  и для больших  $\kappa$  отношение  $\sigma_2/\sigma_1$  равно  $M_1^4/M_2^1$  [см. (3.126)], т. е.

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{9} \approx 10^{-1} \text{ для треугольной решетки,}$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{4} \approx 2 \cdot 10^{-1} \text{ для квадратной решетки.}$$

Вблизи  $H_{c_2}$  это отношение еще меньше, поскольку, согласно (3.88), фурье-коэффициенты пропорциональны

$$e^{-\pi(m^2+n^2-mn)/\sqrt{3}} \text{ для треугольной решетки,}$$

$$e^{-\pi(m^2+n^2)/2} \text{ для квадратной решетки.}$$

Тогда отношение  $\sigma_2/\sigma_1$  равно

$$e^{-4\pi/\sqrt{3}} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ для треугольной решетки,}$$

$$e^{-\pi} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ для квадратной решетки.}$$

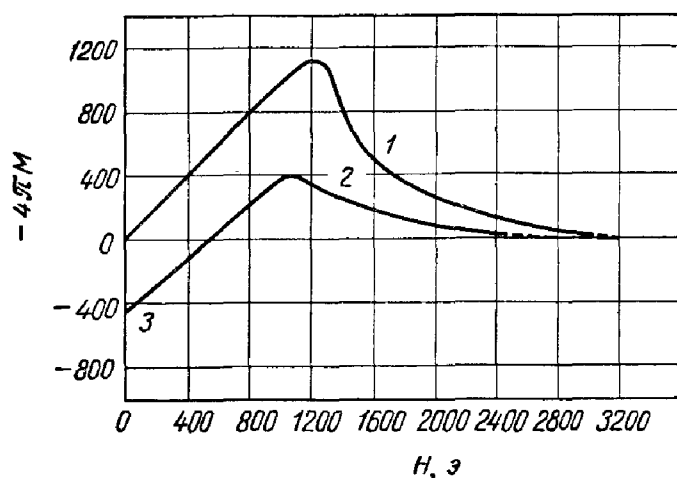
Наблюдать второй брэгговский пик, по-видимому, очень трудно, особенно в случае треугольной решетки. Нужно подчеркнуть, однако, что наблюдение этого пика, хотя и желательно, но не необходимо для определения структуры решетки. В самом деле, если измерить  $B$  (обычными магнитными способами) и  $L$  (с помощью дифракции нейтронов), из соотношения  $B = \alpha_p \Phi_0/L^2$  можно получить величину  $\alpha$ .

Для квадратной решетки с одним квантом потока на нить  $\alpha_1^s = 1$ , в то время как для треугольной решетки при одном кванте потока на нить  $\alpha_1^t = 2/\sqrt{3}$ . Достаточная точность в определении  $B$  и  $L$  позволяет сделать выбор между этими двумя типами решеток. Легче определить число квантов потока  $p$ , так как соответствующий коэффициент  $\alpha_p$  равен  $p\alpha_1$ .

Определить  $L$  непросто, так как брэгговский угол для первого отражения очень мал. По условию Брэгга

$$\lambda_N = 2\alpha_1 \sin \theta = \sqrt{3}L \sin \theta, \quad (3.135)$$

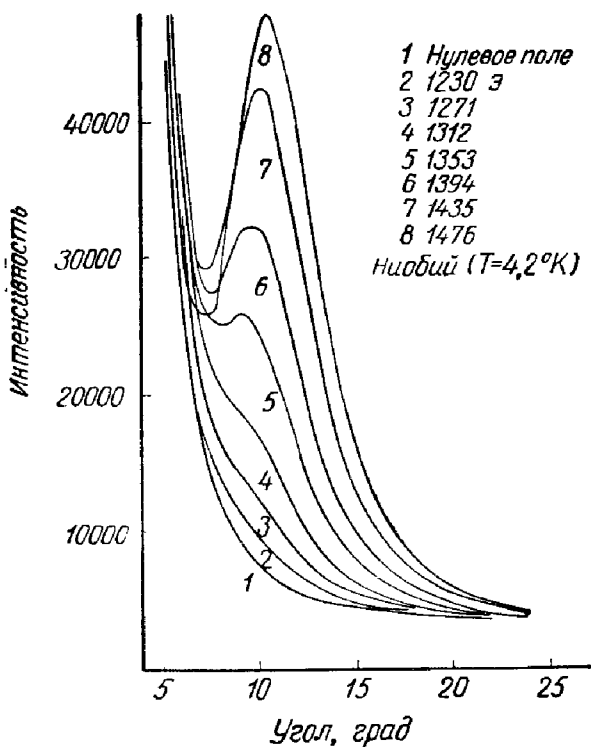
где  $\lambda_N$  — длина волны нейтрона и  $\alpha_1$  — расстояние между нитями. Для получения достаточного потока входящих нейтронов длина волны  $\lambda_N$  не должна превышать 5 Å. Это приводит к  $\theta \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$  ( $\sim 20'$ ).



Фиг. 20. Кривая намагничивания для образца Nb, использованного в экспериментах по рассеянию нейтронов (см. [2, 18]).

Такие опыты проводили Крибье, Жакро, Медхав Рао и Фарну в Сакле [18]. Мы приводим здесь их последние результаты. В качестве вещества для изучения был выбран ниобий, поскольку для этого элемента глубина проникновения не слишком велика. Образец представлял собой пачку монокристаллов, изолированных друг от друга. Поле накладывалось вдоль оси кристаллов. На фиг. 20 изображена кривая намагничивания, полученная для такого образца при температуре  $4,2^\circ \text{ К}$ . Из графика видно, что намагничивание необратимо. Эксперименты по рассеянию нейтронов были проведены для областей 1 и 2, а также для области 3, в которой присутствует захваченный поток. На фиг. 21 изображена дифракционная картина при различных значениях приложенного поля

для приходящих нейтронов со средней длиной волны  $4,2 \text{ \AA}$  и с дисперсией около  $1,3 \text{ \AA}$ . Наблюдался пик, сдвигающийся в сторону больших углов при увеличении поля (уменьшении  $L$ ). Кроме того, в экспериментах с более высоким разрешением было показано, что ширина пика



Фиг. 21. Дифракция нейтронов в Nb при различных значениях приложенного поля.

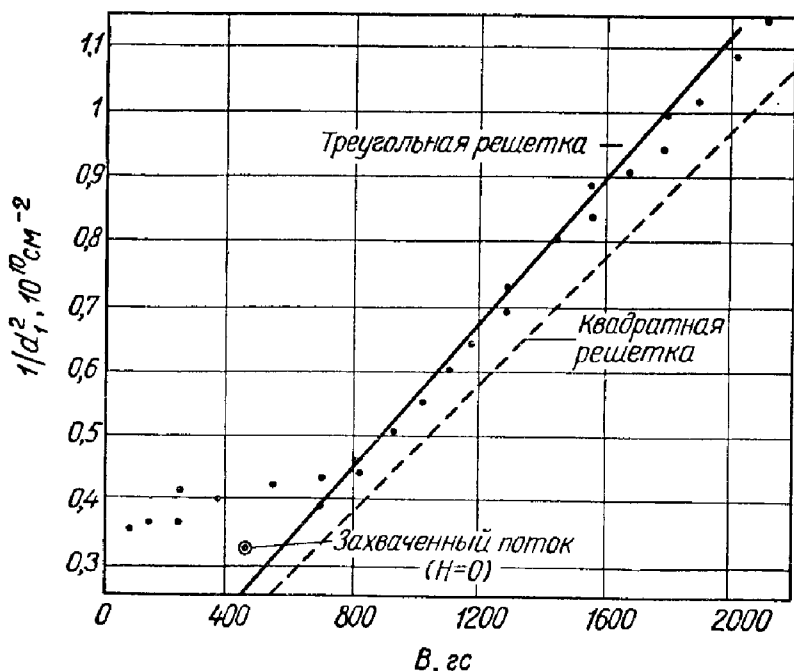
имеет порядок величины, ожидаемый для брэгговского пика, если принять во внимание различные ошибки эксперимента при определении угла и длины волны приходящих нейтронов. Это указывает на наличие дальнего порядка в структуре вихревых нитей. Для объяснения экспериментальных данных это упорядочение распространяется на расстояние, равное нескольким сотням постоянных решеток.

На фиг. 22 изображена зависимость величины  $1/d_1^2$  [ $d_1 = (\sqrt{3}/2)L$ ] от индукции  $B$ . Видно, что, за исключе-



нием окрестности  $H_c$ , зависимость  $1/d_1^2$  от  $B$  линейна, как это и предполагалось из условий квантования потока. Производная  $\alpha$  равна  $2/\sqrt{3}\Phi_0$ , что соответствует треугольной решетке с одним квантом на нить.

Отклонение от линейной зависимости вблизи  $H_c$  (при  $H > H_c$ ) связано с тем, что при использовании



Ф и г. 22. Зависимость  $1/d_1^2$  от индукции  $B$  в Nb.

больших образцов только часть объема заполнена вихревыми нитями и, следовательно, величина индукции занижается. Это объяснение подтверждается изменением интенсивности рассеянных нейтронов при увеличении приложенного поля. Интенсивность увеличивается в области, где кривая  $1/d_1^2 = f(B)$  отклоняется от прямой линии, так как увеличивается объем, заполненный нитевой структурой. Когда эта структура заполняет весь объем образца, функция  $1/d_1^2 = f(B)$  становится линейной и интенсивность нейтронов падает в согласии с формулой для эффективного сечения.

Как и следовало ожидать, в случае треугольной решетки удалось наблюдать только первый брэгговский пик. Поле в пространстве изменялось почти синусоидально, как и предсказывалось выражением (3.88).

Даже в области захваченного потока (область 3 на фиг. 20) эксперименты указывают на наличие правильной треугольной решетки.

Необходимо подчеркнуть, что вышеуказанные эксперименты проводились при температуре, достаточно далекой от  $T_0$  ( $T_0 \approx 8,2^\circ \text{K}$ ), и при низких значениях  $\kappa$  ( $\kappa \sim 1,4$ ). Более того, был проведен другой эксперимент на сплаве  $\text{Pb} - 2\% \text{V}$ , для которого  $\kappa$  еще меньше ( $\kappa = 0,9$ ). Здесь угол рассеяния, конечно, меньше, чем в ниобии, и точность недостаточна, чтобы можно было отличить треугольную решетку от квадратной. Однако на основании этих данных можно сделать заключение, что на одну нить приходится только один квант потока. Необходимо отметить, что из указанных экспериментов следует также несправедливость ламинарной модели<sup>1)</sup>.

## 2. Ядерный магнитный резонанс

Для исследования структуры вихревых нитей можно использовать другие методы, основанные на измерении

<sup>1)</sup> Совсем недавно Эссман и Тройбле [19] наблюдали непосредственно структуру магнитных нитей в сплаве  $\text{Pb} - 4\% \text{In}$  и в ниобии. Рисунок структуры возникает при нанесении ферромагнитного порошка на образец, а наблюдения проводятся методом реплики на электронном микроскопе (см. фронтиспис). Эксперименты проводились в состоянии остаточной намагниченности. Наблюдаемая картина полностью подтвердила результаты, полученные методом дифракции нейтронов. В частности, в ниобии при индукции меньше 500 *гс* узор из магнитных линий виден лишь вблизи оси образца. Это подтверждает тот факт, что индукция неоднородна, и объясняет, почему соотношение  $1/d^2 \sim B$  несправедливо вблизи  $H_{c1}$  (фиг. 22).

[Следует заметить, что, согласно последним данным Эссмана и соавторов, симметрия кристаллической решетки в состоянии влияет на симметрию нитевой структуры. В одном и том же образце можно получить как треугольную, так и квадратную решетки. Квадратная решетка возникает в том случае, когда магнитное поле параллельно оси четвертого порядка монокристаллического сверхпроводника. Связано это с малым различием в энергиях магнитных решеток разного типа. — *Прим. ред.*]

неоднородностей поля. Можно использовать эффект Мессбауэра [20], а также ядерный магнитный резонанс. Последний метод был применен Госсаром и др. [21], которые измеряли уширение линий, вызванное неоднородностью поля при резонансе на  $V^{51}$  в образцах  $V_3Ga$  и  $V_3Si$ . Форма линии ядерного магнитного резонанса определяется моментами магнитного поля. Например, второй момент резонансной линии равен

$$\overline{(H^2)} = \bar{h}^2 - \bar{h}^2. \quad (3.136)$$

Если форма линии гауссова и если уширение вызывается только неоднородностями поля, то величина, приведенная выше, определяет ширину линии. Пространственное усреднение поля  $\bar{h}$  дает, конечно, индукцию  $B$ . В области, где плотность нитей  $\rho_L \ll 1/\xi^2(T)$ , среднее значение квадрата поля  $\bar{h}^2$  легко вычисляется из (3.126)

$$\bar{h}^2 = \frac{1}{S} \int h^2 d\sigma = \sum_M h_M h_{-M} = \rho_L \Phi_0^2 \sum_M \frac{2}{[1 + \lambda^2(T) M^2]^2}. \quad (3.137)$$

В выражении (3.137) суммирование можно заменить интегрированием, и ширина становится равной

$$\overline{\Delta H^2} = \frac{B^2 L^4}{4\pi \lambda^2(T) [L^2 + 4\pi^2 \lambda^2(T)]}. \quad (3.138)$$

Этот результат был получен Госсаром и др. [21] для квадратной решетки. В области  $\xi(T) \ll L \ll \lambda(T)$  ширина приближенно равна

$$\overline{(\Delta H^2)}^{1/2} = \frac{\Phi_0}{\sqrt{8\pi^3} \lambda^2(T)}. \quad (3.139)$$

Уширение имеет порядок  $H_c$  (110 э для  $V_3Si$  и  $V_3Ga$ ). Сравнение с экспериментом нужно проводить очень осторожно, так как наблюдаемая ширина линии определяется различными другими причинами (ядерное дипольное уширение, квадрупольное уширение, неоднородный найтовский сдвиг и уширение, пропорциональное величине модулирующего поля) и имеет порядок 10—20 э. Интересно отметить, что для ламинарной модели

$$\overline{(\Delta H^2)}^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{60} B \left[ \frac{L}{\lambda(T)} \right]^2 = \frac{\sqrt{5}}{60} B \left( \frac{3}{2} \frac{H_c^2}{B^2} \right)^{2/3}, \quad (3.140)$$

т. е. в ламинарной модели ширина пропорциональна  $B^{-1/3}$ , а для нитевидной структуры эта ширина не должна зависеть от  $B$ . Сейчас проводятся эксперименты для выяснения этой зависимости. Дельрье и Винтер [22] наблюдали ядерный магнитный резонанс в ядрах  $Nb^{93}$  в сверхпроводящем состоянии вблизи  $H_{c_2}$ . Они вычислили также форму линии как функцию распределения поля для треугольной и квадратной решеток. Экспериментальные результаты подтверждают существование треугольной решетки, а также дают величину намагниченности вблизи  $H_{c_2}$ , что позволяет определить различные значения  $\kappa$ . Файт и Рэдфильд [23], применяя методику, основанную на определении времени релаксации, пришли к аналогичным выводам для ванадия во всем интервале полей от  $H_{c_1}$  до  $H_{c_2}$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Для того чтобы показать, что решения  $\psi_n$ , соответствующие собственным значениям  $-\alpha_n$  уравнения (3.1), вырождены, вычислим  $\psi_n$  в явном виде для специальной калибровки. Подставляя безразмерные величины (2.37) в уравнении (3.1), получаем

$$\left(i \frac{\nabla}{\kappa} + \mathcal{A}\right)^2 f = f. \quad (\text{П. 3.1})$$

Для  $\mathcal{A}$  можно использовать следующую калибровку:

$$\mathcal{A} = (0, h x, 0), \quad (\text{П. 3.2})$$

где  $h$  — приведенное поле, соответствующее приложенному полю  $H$ . Тогда уравнение (П.3.1) принимает вид

$$-\frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \left(\frac{i}{\kappa} \frac{\partial}{\partial y} + h x\right)^2 f - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = f. \quad (\text{П. 3.3})$$

Общее решение уравнения (П.3.3) имеет форму

$$f = e^{i k_z z} e^{i k_y y} \varphi(x). \quad (\text{П. 3.4})$$

Функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$-\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) + \left(-\frac{k_y}{x} + hx\right)^2 \varphi(x) = \left(1 - \frac{k_z^2}{x^2}\right) \varphi(x). \quad (\text{П.3.5})$$

Уравнение (П.3.5) имеет ограниченные решения только для дискретных значений  $h$ . Эти значения не зависят от  $k_y$  (если выполнить преобразование  $X = x - k_y/kh$ , уравнение переходит в знакомое уравнение для гармонического осциллятора). Каждое значение  $h$  равно

$$h = \frac{x^2 - k_z^2}{(2n+1)x} \quad (n - \text{целое число}). \quad (\text{П.3.6})$$

Для каждого значения  $h$  (т. е. для  $n$  и  $k_z$ ) существует бесконечное множество функций вида (П.3.4). Самое большое значение  $h$  получается при  $k_z = 0$  и  $n = 0$  и

$$h = \kappa \quad (\text{т. е. } H_{c_2} = \kappa \sqrt{2} H_c), \quad (\text{П.3.7})$$

а соответствующая функция равна

$$f_k = e^{-ik_y y} e^{(-x^2/2) (x - k_y/x)^2}. \quad (\text{П.3.8})$$

**2. Вывод выражения (3.37).** Умножим (3.16) на  $df_0/d\rho$ , а (3.17) на  $dh/d\rho$ . Вычитание и перегруппировка членов дают

$$h \frac{dh}{d\rho} = \frac{1}{2\rho^2} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^2}{f_0^2} \left(\frac{dh}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{2\kappa^2 \rho^2} \frac{d}{d\rho} \rho^2 \left(\frac{df_0}{d\rho}\right)^2 - f_0(1 - f_0^2) \frac{df_0}{d\rho}. \quad (\text{П.3.9})$$

Свободная энергия может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= 2\pi \int_0^\infty \left[ h^2 + \frac{1}{2} (1 - f_0^4) \right] \rho d\rho = \\ &= \pi \int_0^\infty h^2 \rho^2 d\rho - 2\pi \int_0^\infty \rho^2 h \frac{dh}{d\rho} d\rho + \pi \int_0^\infty (1 - f_0^4) \rho d\rho. \end{aligned}$$

С помощью (П.3.9) получаем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} &= -\pi \left| \frac{\rho^2}{f_0^2} \left( \frac{dh}{d\rho} \right)^2 \right|_0^\infty + \frac{\pi}{\kappa^2} \left| \rho^2 \left( \frac{df_0}{d\rho} \right)^2 \right|_0^\infty + \\
 &\quad + \pi \int_0^\infty \left[ 2\rho f_0 (1 - f_0^2) \frac{df_0}{d\rho} + 1 - f_0^4 \right] \rho d\rho = \\
 &= -\frac{\pi}{2} \left| \rho^2 (1 - f_0^2)^2 \right|_0^\infty + 2\pi \int_0^\infty (1 - f_0^2) \rho d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^\infty \rho (1 - f_0^2) d\rho. \quad (\text{П. 3.10})
 \end{aligned}$$

При выводе этого выражения были использованы граничные условия (3.22) и (3.23). Выражение (П.3.10) справедливо при любом значении  $\kappa$ .

**3. Вывод выражения (3.43).** Свободная энергия нити имеет вид

$$\mathcal{F} = 2\pi \int_0^\infty \left[ h^2 + \frac{1}{2} (1 - f_0^4) \right] \rho d\rho. \quad (\text{П. 3.11})$$

С помощью (3.17)  $\mathcal{F}$  принимает вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} &= 2\pi \int_0^\infty \left[ \frac{h}{\rho} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho}{f_0^2} \frac{dh}{d\rho} + \frac{1}{2} (1 - f_0^4) \right] \rho d\rho = \\
 &= 2\pi \left| \frac{h\rho}{f_0^2} \frac{dh}{d\rho} \right|_0^\infty - 2\pi \int_0^\infty \frac{\rho}{f_0^2} \left( \frac{dh}{d\rho} \right)^2 d\rho + \pi \int_0^\infty (1 - f_0^4) \rho d\rho.
 \end{aligned} \quad (\text{П. 3.12})$$

Или, используя граничные условия (3.22) и (3.16), получаем

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\kappa} h(0) - 2\pi \int_0^\infty \frac{f_0}{\kappa^2} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{df_0}{d\rho} + \pi \int_0^\infty (1 - f_0^2)^2 \rho d\rho. \quad (\text{П. 3.13})$$

Используя выражение (3.36) для  $f_0$ , видим, что последний интеграл в (П.3.13) порядка  $1/\kappa^2$ , так что

$$\mathcal{F} \approx \frac{2\pi}{\kappa} h(0). \quad (\text{П. 3.14})$$

**4. Доказательство условия существования одного кванта на нить.** Очевидно, что если  $f_0(x, y)$  есть решение уравнения (3.68), соответствующего  $p$  квантам потока на нить, то  $f_0^{1/p} [(V\rho)^{-1}x, (V\rho)^{-1}y]$  будет также решением этого уравнения. Периоды новой функции равны  $a/\sqrt{\rho}$  и  $b/\sqrt{\rho}$ , а площадь элементарной ячейки равна  $2\pi/\kappa^2$ . Функция  $f_0^{1/p} [(V\rho)^{-1}x, (V\rho)^{-1}y]$  соответствует одному кванту на нить. Чтобы показать, что существует только один квант на нить, достаточно доказать, что значение  $\beta_A$  для этой последней функции меньше, чем значение, соответствующее функции  $f_0(x, y)$ , т. е.

$$\frac{\langle f_0^4 \rangle}{\langle f_0^2 \rangle^2} \geq \frac{\langle f_0^{4/p^2} \rangle}{\langle f_0^{2/p} \rangle^2} \quad (\text{П. 3.15})$$

или

$$\frac{\langle \varphi^{2p} \rangle}{\langle \varphi^p \rangle^2} \geq \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{\langle \varphi \rangle^2}, \quad (\text{П. 3.16})$$

где

$$\varphi = f_0^{2/p} = |f|^{2/p} \quad (\text{П. 3.17})$$

— положительно определенная функция  $x$  и  $y$ .

Уравнение (П.3.16) означает

$$\langle \varphi^{2p}(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_3) - \varphi^2(\mathbf{r}_1) \varphi^p(\mathbf{r}_2) \varphi^p(\mathbf{r}_3) \rangle \geq 0, \quad (\text{П. 3.18})$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \langle \varphi^{2p}(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_3) - \varphi^2(\mathbf{r}_1) \varphi^p(\mathbf{r}_2) \varphi^p(\mathbf{r}_3) + \\ & \quad + \varphi^{2p}(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_3) \varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi^2(\mathbf{r}_2) \varphi^p(\mathbf{r}_3) \varphi^p(\mathbf{r}_1) + \\ & \quad + \varphi^{2p}(\mathbf{r}_3) \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi^2(\mathbf{r}_3) \varphi^p(\mathbf{r}_1) \varphi^p(\mathbf{r}_2) \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{П. 3.19})$$

Легко видеть, что величина

$$ABC [A(A^{2q} - B^q C^q) + B(B^{2q} - C^q A^q) + C(C^{2q} - A^q B^q)], \quad (\text{П. 3.20})$$

где  $q$  — целое число, а  $A, B, C$  — положительные величины, положительна и обращается в нуль только при  $A = B = C$ .

Таким образом, подынтегральное выражение в (П.3.19) положительно, и неравенство (П.3.16) доказано. Знак равенства справедлив только тогда, когда  $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$ . Этот последний случай, конечно, в нашей задаче никогда не встречается.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрикосов А. А., ЖЭТФ, **32**, 1442 (1957).
2. Cribier D., Farnoux B., Jacrot B., Madhav Rao L., Vivet B., Antonini M., Proceedings of the IXth International Conference on Low Temperature Physics, Columbus, Ohio, 1964.
3. Ландау Л., Zs. Phys., **64**, 629 (1930).
4. London F., Superfluids, Vol. I, New York, 1950, p. 152.
5. Marcus P. M., Communication to the Conference on the Physics of Type II Superconductivity, Cleveland, Ohio, USA, 1964.
6. De Gennes P. G., Métaux et Alliages Supraconducteurs, 1963—1965 (курс лекций, прочитанных в Орсе).
7. Deaver B. S., Fairbank W. M., Phys. Rev. Lett., **7**, 43 (1961).
8. Doll R., Nabauer M., Phys. Rev. Lett., **7**, 51 (1961).
9. Morse P., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, New York, 1953, Ch. 10. (Имеется перевод: Ф. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, 1960.)
10. Matricon J., Phys. Lett., **9**, 289 (1964); диссертация, 1966.
11. Lasher G., Phys. Rev., **A140**, 523 (1965).
12. Kleiner W. M., Roth L. M., Autler S. H., Phys. Rev., **A133**, 1226 (1964).
13. Friedel J., De Gennes P. G., Matricon J., Appl. Phys. Lett., **2**, 119 (1963).
14. Fetter A. L., Hohenberg P. C., Pincus P., Phys. Rev., **A147**, 140 (1966).
15. Kinsell T., Lynton E. A., Serin B., Phys. Lett., **3**, 30 (1963).
16. Goodman B. B., Compt. Rend., **258**, 5175 (1964).
17. De Gennes P. G., Matricon J., Rev. Mod. Phys., **36**, 45 (1964).
18. Cribier D., Jacrot B., Madhav Rao L., Farnoux B., Phys. Lett., **9**, 106 (1964).
19. Essmann U., Trauble H., Phys. Lett., **A24**, 526 (1967).
20. Sarma G., Compt. Rend., **258**, 1461 (1964).
21. Gossard A. C., Jaccarino V., Pincus P., Wernick J. H., Communication to the Conference on the Physics of Type II Superconductivity, Cleveland, Ohio, USA, 1964.
22. Delrieu J. H., Winter J. H., Sol. State Comm., **4**, 545 (1966).
23. Fite W., Redfield A. G., Phys. Rev. Lett., **7**, 381 (1966).
24. Harden J. L., Arp V., Cryogenics, **3**, 105 (1963).
25. Joiner W. C. H.; Blaugher R. D., Rev. Mod. Phys., **36**, 67 (1964).



## ПОВЕРХНОСТНАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

§ 1. Образование зародышей в полубесконечной среде.  
Поле  $H_{c_3}$ 

В гл. 3 было показано, что в бесконечном образце сверхпроводимость разрушается, когда приложенное поле  $H$  больше  $H_{c_2} = \kappa \sqrt{2} H_{c_1}$ . И наоборот, когда поле  $H$  уменьшается, то при  $H = H_{c_2}$  спонтанно возникают сверхпроводящие области. Это заключение было сделано для бесконечного образца, т. е. при пренебрежении поверхностными эффектами. Величина  $H_{c_2}$  была получена из линеаризованного уравнения Гинзбурга — Ландау (3.1) при условии, что параметр упорядочения  $\psi$  — ограниченная функция. В настоящей главе будет показано, что для идеального материала образование зародышей всегда начинается на поверхности, и это оказывает решающее влияние на поле образования зародышей [1].

В гл. 2 уже упоминалось, что к двум уравнениям Гинзбурга — Ландау нужно добавить граничные условия, чтобы обеспечить отсутствие тока, текущего через поверхность образца. Микроскопическая теория показывает, что для границы, отделяющей сверхпроводник от изолятора или от вакуума, соответствующим граничным условием является уравнение <sup>1)</sup>

$$\left( -i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)_n \psi = 0. \quad (4.1)$$

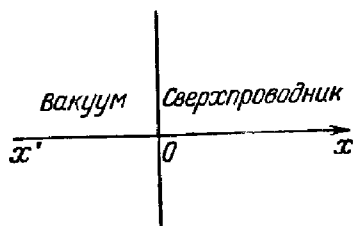
Здесь  $n$  обозначает компоненту  $[-i\hbar\nabla - (2e/c)\mathbf{A}]$ , параллельную нормали к поверхности. В условии (4.1) предполагается, что радиус кривизны поверхности много больше  $\xi(T)$  — критерий, связанный с общим условием применимости схемы Гинзбурга — Ландау (см. гл. 2, § 1).

Итак, для исследования влияния граничного условия (4.1) рассмотрим задачу о полубесконечном сверхпро-

<sup>1)</sup> Более подробное обсуждение граничных условий см. в [2].

воднике, ограниченном плоскостью  $x = 0$  и заполняющем полупространство  $x > 0$ . Полупространство  $x < 0$  заполнено изолятором (или вакуумом) (фиг. 23).

Вблизи поля, при котором начинается образование зародышей, величина параметра упорядочения мала, и



Фиг. 23.

первое уравнение Гинзбурга — Ландау можно линеаризовать и привести к виду

$$\frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \psi + \alpha\psi = 0. \quad (4.2)$$

В гл. 3, § 2 было показано, что в том же порядке по  $\psi$  вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  просто соответствует приложенному полю

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (4.3)$$

Различие с рассмотрением, проведенным в гл. 3, § 2, состоит в том, что (4.2) и (4.3) дополняются теперь граничным условием (4.1). Здесь нужно рассмотреть два случая.

### 1. Приложенное поле перпендикулярно поверхности образца

Если ось  $z$  направить параллельно полю и если для  $\mathbf{A}$  выбрать калибровку

$$A_x = 0, \quad A_y = Hx, \quad A_z = 0, \quad (4.4)$$

то (4.2) принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2e}{c} Hx \right)^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi = -\alpha\psi \quad (4.5)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (4.6)$$

Общее решение этой задачи имеет вид

$$\psi(x, y, z) = \psi(x, y) \cos k_z z, \quad (4.7)$$

где  $\psi(x, y)$  должна быть ограниченной функцией.

Ясно, что задача становится теперь эквивалентной задаче, рассмотренной в гл. 3, § 2, и что наибольшая величина поля получается при низшем собственном значении, т. е. при

$$-\alpha = \frac{e\hbar}{mc} H, \quad (4.8)$$

откуда следует, что

$$H = H_{c_2}.$$

Соответствующая собственная функция имеет вид

$$\psi = \psi_k(x, y) = e^{ik_y y} e^{-(x-x_0)^2/2\xi^2(T)}, \quad (4.9)$$

где

$$x_0 = \frac{\hbar c}{2eH} k_y \quad (4.10)$$

и  $\xi(T)$  — зависящая от температуры длина когерентности.

Следовательно, если приложенное поле перпендикулярно границе, наличие границы не изменяет поля образования зародышей, которое остается равным  $H_{c_2}$ .

## 2. Приложенное поле параллельно поверхности

Если ось  $z$  параллельна приложенному полю  $\mathbf{H}$ , то (4.2) переходит в (4.5), а граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (4.11)$$

Решение уравнения (4.5) можно записать в форме

$$\psi = e^{ik_z y} e^{ik_y z} f(x). \quad (4.12)$$

Рассмотрим только случай  $k_z = 0$ , так как нас интересует низшее собственное значение. Уравнение (4.5)

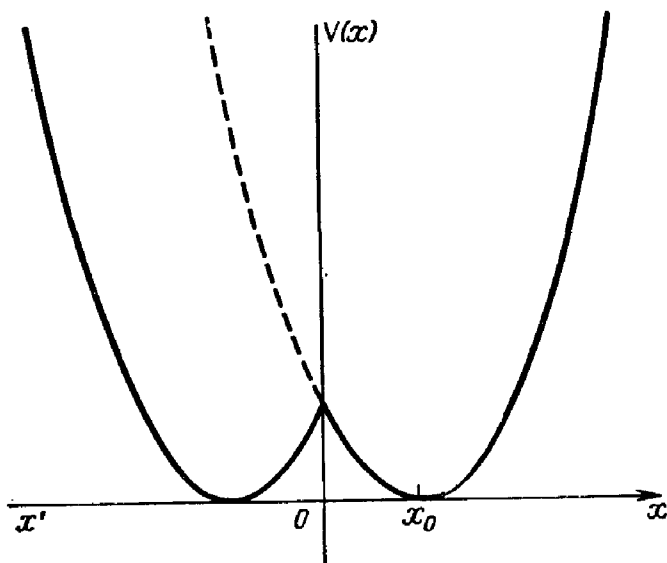
записывается так:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2e^2 H^2}{mc^2} (x - x_0)^2 f = -\alpha f \quad (4.13)$$

с граничным условием

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (4.14)$$

и с  $x_0$ , определяемым из (4.10).



Фиг. 24. Форма потенциала (4.17).

Уравнение (4.13) является уравнением Шредингера для гармонического осциллятора с частотой  $\omega = 2eH/mc$  и с минимумом потенциала, т. е. положением равновесия, расположенным в  $x_0$ .

Из граничного условия (4.14) следует, что собственное значение определяется из выражения

$$-\alpha = g_0 \frac{eh}{mc} H, \quad (4.15)$$

где  $g_0$  — число, зависящее от значения  $x_0$ . Когда поле образования зародышей соответствует наибольшему полю

$H$ , получаемому из (4.15), имеем дополнительное условие

$$\frac{dg_0}{dx_0} = 0. \quad (4.16)$$

Задача эквивалентна отысканию низшего значения  $g_0$ .

Для исследования зависимости  $g_0$  от  $x$  прежде всего нужно рассмотреть два особых случая:  $x_0 \gg \xi(T)$  и  $x_0 = 0$ .

При  $x_0 \gg \xi(T)$  функция гармонического осциллятора (4.9) приближенно равна нулю при  $x = 0$  и граничные условия выполняются. Решением по-прежнему остается (4.9) с собственным значением (4.8), т. е.  $g_0 = 1$ .

При  $x_0 = 0$  требуемым решением все еще остается функция гармонического осциллятора (4.9), так как функция  $\psi$  экстремальна при  $x = x_0$  и  $g_0 = 1$ .

Для промежуточных значений  $x_0$  собственное значение уменьшается (т. е.  $g_0 < 1$ ). Это легко видеть из следующих рассуждений.

Задачу на нахождение собственного значения (4.13) и уравнение (4.14) можно заменить другим уравнением Шредингера, в котором потенциал  $V(x)$  симметризован (фиг. 24):

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{2e^2 H^2}{mc^2} (x - x_0)^2 & \text{при } x > 0, \\ V(x) &= V(-x) & \text{при } x < 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Собственная функция, соответствующая низшему собственному значению, связанному с потенциалом  $V(x)$ , не имеет узла и является четной, так что она автоматически удовлетворяет граничным условиям (4.14)<sup>1)</sup>. При  $x < 0$  потенциал  $V(x)$  всегда меньше потенциала  $(2e^2 H^2 / mc^2) (x - x_0)^2$ . Следовательно, собственное значение, связанное с  $V(x)$ , меньше собственного значения (4.1), связанного с потенциалом  $(2e^2 H^2 / mc^2) (x - x_0)^2$  и с граничными условиями  $f(x) = 0$  при  $x = \pm \infty$ , т. е.  $g_0$  меньше единицы. Вблизи поверхности существует некоторое значение  $x_0$ , для которого  $g_0$  минимально. Это означает, что образование зародышей легче всего происходит около поверхности.

<sup>1)</sup> На собственную функцию должно быть наложено только одно условие: она должна быть ограниченной во всей области  $-\infty < x < +\infty$ .

Для вычисления оптимального значения  $x_0$  и  $g_0$  удобно ввести следующие безразмерные величины:

$$X = \frac{x}{\xi(T)}, \quad K = \xi(T) k_y, \quad h = \frac{2eH}{\hbar c} \xi^2(T), \quad \xi^2(T) = -\frac{\hbar^2}{2m\alpha}. \quad (4.18)$$

Уравнения (4.13) и (4.14) принимают вид

$$-\frac{d^2f}{dX^2} + (K - hX)^2 f = f, \quad (4.19)$$

$$\frac{df}{dX} = 0 \quad \text{при} \quad X = 0. \quad (4.20)$$

Дальнейшая замена переменных  $t = X\sqrt{h} - K/\sqrt{h}$  приводит к уравнению:

$$-\frac{d^2f}{dt^2} + t^2 f = \frac{1}{h} f = g_0 f, \quad (4.21)$$

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad f = -\mu = -\frac{K}{\sqrt{h}}, \quad (4.22)$$

поскольку

$$g_0 = -\frac{m\alpha}{e\hbar H} = \frac{1}{h}. \quad (4.23)$$

Наиболее общее решение уравнения (4.21) — линейная комбинация функций Вебера (см., например, [3]).

Если  $g_0 < 1$ , то для этих функций можно использовать следующее интегральное представление:

$$\Delta_{g_0}(t) = e^{t^2/2} \int_0^{\infty} u^{-(1+g_0)/2} e^{-(u-t)^2} du \quad (4.24)$$

и решением (4.21) будет

$$f(t) = A \Delta_{g_0}(t) + B \Delta_{g_0}(-t). \quad (4.25)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий. Ясно, что когда  $t \rightarrow \infty$ , функция  $\Delta_{g_0}(t) \rightarrow \infty$  и  $\Delta_{g_0}(-t) \rightarrow 0$ . Таким образом,  $A = 0$ . При  $x = 0$ , т. е. при  $t = -\mu$ , из граничных условий получаем

$$\int_0^{\infty} (2u - \mu) u^{-(1+g_0)/2} e^{-(u-\mu)^2} du = 0, \quad (4.26)$$

или

$$2I_1 - \mu I_0 = 0, \quad (4.27)$$

где

$$I_\alpha(\mu) = \int_0^\infty u^\alpha u^{-(1+g_0)/2} e^{-(u-\mu)^2} du. \quad (4.28)$$

Выражение (4.25) [или (4.26)] неявным образом связывает  $g_0$  и  $\mu$  (т. е. критическое поле  $H$  и  $x_0$ ). Низшее собственное значение получается при  $dg_0/d\mu = 0$ , т. е.

$$4I_2 - 6\mu I_1 + (2\mu^2 - 1)I_0 = 0. \quad (4.29)$$

С помощью рекуррентной формулы

$$2I_2 = 2\mu I_1 + \frac{1-g_0}{2} I_0 \quad (4.30)$$

без труда получаем

$$g_0 = \mu^2, \quad (4.31)$$

где  $\mu$  — число, определяемое из уравнения

$$\int_0^\infty (2u - \mu) u^{-(1+\mu^2)/2} e^{-(u-\mu)^2} du = 0. \quad (4.32)$$

Решение уравнения дает

$$g_0 = \mu^2 = 0,59010, \quad (4.33)$$

т. е.

$$h = \frac{1}{0,5901} = 1,6946. \quad (4.34)$$

Соответствующее поле образования зародышей

$$H_{c_3} = 1,695 \frac{\hbar c}{2e} \frac{1}{\xi^2(T)} = 1,695 H_{c_3} = 1,695 \sqrt{2} \kappa H_{c_3}. \quad (4.35)$$

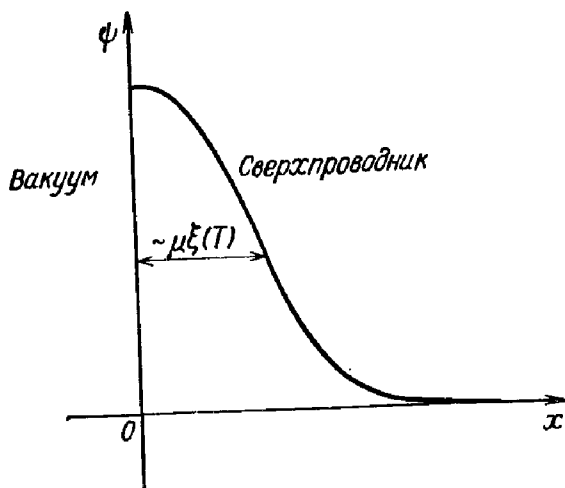
Для рассмотрения физической картины возникновения таких зародышей необходимо исследовать соответствующую вариацию параметра упорядочения, т. е. собственную функцию  $\psi$  из (4.5). Выражение (4.33) дает  $K = 1$ , т. е.  $k_y = 1/\xi(T)$ , так что минимум потенциала расположен в точке

$$x_0 = \frac{\hbar c}{2eH_{c_3}} k_y = \mu^2 \xi(T). \quad (4.36)$$

Тогда собственная функция, или параметр упорядочения, принимает вид

$$\psi(x, y) = e^{iy/\xi(T)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{x - \mu^2 \xi(T)}{\mu \xi(T)} \right]^2 \right\} \times \\ \times \int_0^{\infty} u^{-(1+\mu^2)/2} \exp \left\{ - \left[ u + \frac{x - \mu^2 \xi(T)}{\mu \xi(T)} \right]^2 \right\} du. \quad (4.37)$$

Таким образом, параметр упорядочения изменяется на расстоянии порядка  $\mu \xi(T)$  от поверхности (фиг. 25). Это



Фиг. 25. Изменение параметра упорядочения около поверхности.

обстоятельство имеет большое значение при возникновении сверхпроводимости, о чем будет сказано ниже. В зависимости от значения  $\kappa$  имеют место три случая.

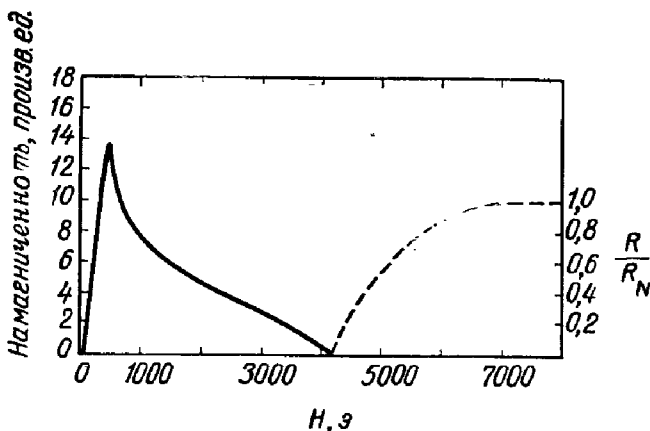
а)  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  (сверхпроводники второго рода):  $H_{c_3} > H_{c_2} > H_c$ . В случае сверхпроводников второго рода приведенные выше вычисления показывают, что при  $H_{c_2} < H < H_{c_3}$  сверхпроводимость разрушается не полностью. Вблизи поверхности остается сверхпроводящий слой. И наоборот, когда поле становится меньше  $H_{c_3}$ , сверхпроводящий слой возникает у поверхности раньше восстановления сверхпроводимости в толще образца при  $H = H_{c_2}$ . Если образец имеет форму длинного цилиндра, а поле параллельно оси цилиндра, сверхпроводящий слой



будет покрывать всю поверхность цилиндра. Если образец — сфера, сверхпроводящий слой возникает в небольшой зоне вблизи экваториальной плоскости, когда  $H$  близко к  $H_{c3}$ . Когда поле уменьшается и приближается к  $H_{c2}$ , этот слой расширяется к полюсам.

Наличие такого слоя объясняет некоторые аномалии в свойствах сверхпроводников второго рода, которые очень часто приписывались металлургическим недостаткам образцов:

1) Переход из сверхпроводящего в нормальное состояние (как функция поля) происходит в широком интервале полей, от  $H_{c2}$  до  $H_{c3}$  (фиг. 26).



Фиг. 26. Переход (по сопротивлению) из сверхпроводящего в нормальное состояние, указывающий на уширение, возникающее благодаря наличию поверхностного слоя [4]. Сплав  $\text{Mo} - 15\% \text{Re}$ .

Магнитный переход — сплошная линия, переход по сопротивлению — пунктир.

2) Измерения магнитным методом (обычно так измеряют  $H_{c2}$ ) и измерения по сопротивлению (так измеряют  $H_{c3}$ ) дают различные значения критического поля [4—6]. Сверхпроводящий слой вплоть до поля  $H_{c3}$  ведет себя, как короткозамкнутая токовая цепь.

3) Критическое поле зависит от ориентации приложенного поля относительно поверхности (этот вопрос обсуждается в § 3).

Было проведено много экспериментов для обнаружения поверхностного слоя и для определения отношения

## СВОДКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОЛЕ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ [7]

Метод измерения и форма образца	Вещество	Род сверхпроводимости	Результаты	Литература
Сопротивление. Массивный образец	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pb} + (0,03 - 6,6\%) \text{In} \\ \text{In} + \text{Sn} \\ \text{Pb} + (15 - 65\%) \text{Tl} \\ 50\% \text{Nb} + 50\% \text{Ta} \\ \text{Pb} + 17\% \text{In} \\ (\text{Pb} - \text{In}) + \text{Cu-слой} \end{array} \right.$	I, II	Качественное согласие	[5]
		I	Согласие до $\pm 20\%$	[6]
		II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,64 \pm 0,08$	[6]
		II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,71$	[15]
		II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,96$	[15]
Намагниченность. Пленка, фольга	$\text{Pb} + (4 - 10\%) \text{Tl}$	II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,69 \pm 0,02$	[12]
	$\text{Sn} + 6\% \text{In}$	II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,67$	[17]
Сопротивление. Проницаемость (600 гц). Пленка	$\text{In} + (2 - 6\%) \text{Pb}$	II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,86$	[18]
Сопротивление (23 Гц). Массивный образец	$\left\{ \begin{array}{l} 50\% \text{Pb} + 50\% \text{Tl} \\ 83\% \text{Pb} + 17\% \text{In} \end{array} \right.$	II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,4 \div 1,9$	[8]
		II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,6 \pm 0,1$	[8]
Сопротивление. Массивный образец	$\left\{ \begin{array}{l} \text{In} + 6\% \text{Pb} \\ (\text{In} - \text{Pb}) + \text{Cu-слой} \end{array} \right.$	II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,86$	[20]
		II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,15$	[20]
Туннелирование. Пленка.	$\text{Pb} + (5 - 14\%) \text{Tl}$	II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,69$	[10]
Сопротивление (23 Гц). Массивный образец	$\text{Pb} + 1\% \text{Tl}$	I	$H_{c3}/\sqrt{2\kappa}H_c = 1,9$	[22]
Действительная и мнимая части восприимчивости (18 - 100 гц). Массивный образец	$\text{Pb} + (0,1 - 5\%) \text{Bi}$	I	$H_{c3}/\sqrt{2\kappa}H_c = 1,86$	[28]
Проницаемость ( $10^4$ гц). Массивный образец	$\text{Pb} + (5 - 20\%) \text{Tl}$	II	$H_{c3}/H_{c2} = 1,75 \pm 0,02$	[33]

$H_{c3}/H_{c2}$ . В табл. 3 [7] приведены данные, полученные в этих экспериментах. Видно, что между экспериментальными и теоретическими значениями  $H_{c3}/H_c$  вполне хорошее согласие.

Наличие сверхпроводящего слоя подтверждается следующими наблюдениями:

1) Магнитные измерения показали, что аномалия в поле возникновения зародышей не связана с массивностью образца.

2) Аномалия наблюдается и при измерении импеданса на высоких частотах [8].

3) Измерения магнитной проницаемости в параллельном поле не показывают никаких изменений вблизи  $H_{c2}$ . Сверхпроводящий слой образует идеальный экран для полей ниже  $H_{c3}$ , и проницаемость растет только при  $H \sim H_{c3}$  [9].

4) В экспериментах по туннельному эффекту [10, 11] вычислена плотность состояний, существенно отличающаяся от ее значения в нормальном состоянии.

5) Сверхпроводящий слой действует как небольшая диамагнитная область, которую можно обнаружить при измерении момента вращения [12].

б)  $0,418 \leq \kappa \leq 1/\sqrt{2}$ ,  $H_{c3} < H_c < H_{c3}$ . Для этих сверхпроводников первого рода в поле  $H_c < H < H_{c3}$  сверхпроводящий слой все еще существует в областях, где  $\mathbf{H}$  параллельно поверхности.

Такая картина может наблюдаться в слабелегированных сплавах. Например, Серафим [25] подробно исследовал сплавы индия. Уширение сверхпроводящего перехода по сопротивлению наблюдалось в сплавах при следующих минимальных концентрациях:

$$\left. \begin{array}{l} 0,7 - 1\% \text{ Vi} \\ 6,2 - 7,4\% \text{ Ta} \\ 1,9\% \text{ Pb} \\ 3 - 4\% \text{ Cd} \end{array} \right\} \text{ в In.}$$

Уширение магнитной кривой, однако, появляется лишь при концентрациях, примерно вдвое превышающих

вышеприведенные. Предельные концентрации для всех этих сплавов соответствуют примерно равным сопротивлениям и значениям  $\kappa$  порядка 0,4.

Де Жен [26] и Маки [27] высказали предположение, что  $\kappa$  будет изменяться с температурой<sup>1)</sup> и увеличится примерно на 20% при изменении  $T$  от  $T_0$  до нуля (см. гл. 5). Тогда возможно возникновение ситуации, когда  $H_{c_3} > H_c$  при  $T = 0$  и  $H_{c_3} < H_c$  при  $T = T_0$ . Например, в свинце [28, 29] туннельный эффект наблюдался в полях, приложенных параллельно образцу, вплоть до  $1,22 H_c$  при температуре  $1,4^\circ \text{K}$ , когда  $\kappa \approx 0,50$ . Эффект исчезал в полях, больших  $H_c$ , при  $T \sim T_0$ , когда  $\kappa \approx 0,38$ .

в)  $\kappa < 0,418$ ,  $H_{c_2} < H_{c_3} < H_c$ . Для таких сверхпроводников первого рода поля  $H_{c_2}$  и  $H_{c_3}$  являются переохлажденными. Когда поле становится ниже  $H_c$ , обычно наблюдается локальное образование зародышей, видимо, вокруг дефектов. В очень хороших образцах и вблизи  $T_0$ , где длина когерентности  $\xi(T)$  велика (много больше радиуса примесных центров), поле может быть уменьшено ниже  $H_c$ , причем образец будет находиться в нормальном состоянии в метастабильном равновесии. Однако при поле  $H_{c_3}$  сверхпроводящие области спонтанно возникают вблизи поверхности образца. При  $H < H_c$ , нормальное состояние абсолютно неустойчиво. Все это было тщательно исследовано Фейбером [30]. Он обнаружил, что:

- 1) поле образования зародышей пропорционально  $H_c$ ,
- 2) образование зародышей всегда начинается вблизи поверхности, параллельной приложенному полю.

При вычислении  $\kappa$  Фейбер отождествил поле  $H_n$  с полем  $H_{c_2}$ . В действительности поле  $H_n$  надо отождествить с полем  $H_{c_3}$ ; тогда получаем значения  $\kappa$ , приведенные ниже. Необходимо, однако, помнить, что такая процедура не является, строго говоря, корректной, так как эксперименты проводились при температуре, много меньшей  $T_0$ , а, как было установлено в гл. 2, схема Гинзбурга —

<sup>1)</sup> Изменение  $\kappa$  с температурой было впервые получено Л. П. Горьковым [ЖЭТФ, 37, 833 (1959)]. — Прим. ред.

Ландау справедлива только при температурах, близких к  $T_0$ .

	Al	In	Sn
$\kappa_{\text{набл}}$	0,015	0,07	0,10
$\kappa_{\text{теор}}$	0,01	0,05	0,15

Однако значения, полученные для  $\kappa$ , хорошо согласуются со значениями, вычисленными из соотношения

$$\kappa = \frac{0,96\lambda_L}{\xi_0}.$$

## § 2. Образование зародышей в пластине

Проведенные выше вычисления справедливы для полубесконечной среды. Рассмотрим теперь пластину толщиной  $2a$ . Ниже будет показано, что поле образования зародышей изменяется пропорционально отношению  $a/\xi(T)$ , если приложенное поле параллельно поверхности пластины. Однако выводы, сделанные в § 1, п. 1, не меняются, и при внешнем поле, направленном перпендикулярно поверхности, поле образования зародышей оказывается, как и раньше, равным  $H_{c_2} = \kappa \sqrt{2} H_c$ .

### 1. Поле образования зародышей в пластине (внешнее поле параллельно поверхности)

Наличие двух границ меняет выводы, к которым мы пришли в § 1, п. 2, и для новой геометрии образца (фиг. 27) должны быть проведены новые вычисления. Полученные при этом результаты будут использованы также при обсуждении угловой зависимости поля возникновения зародышей (см. § 3).

Граничное условие (4.11) должно быть заменено на условие

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a. \quad (4.38)$$

Если ввести следующие безразмерные величины:

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{a}, \quad Z = \frac{z}{a},$$

$$h = \frac{2eH}{\hbar c} a^2 = \frac{2\pi a^2}{\Phi_0} H, \quad (4.39)$$

$$\epsilon = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} a^2 = \frac{a^2}{\xi^2(T)} = \frac{2\pi a^2}{\Phi_0} H_{c2},$$

то уравнение (4.5) и условие (4.38) принимают вид

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \left( i \frac{\partial}{\partial Y} + hX \right)^2 \psi = \epsilon \psi, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad \text{при} \quad X = \pm 1. \quad (4.41)$$

Здесь  $\psi$  — функция  $(X, Y, Z)$ , ограниченная и нормируемая. Решение уравнения (4.40) можно записать в форме

$$\psi(X, Y, Z) = e^{ik_z Z} e^{ik_y Y} f(X). \quad (4.42)$$

Так как максимальное поле образования зародышей соответствует низшему значению  $\epsilon/h$ , мы рассмотрим случай  $k_z = 0$ , и уравнение приобретает вид

$$-\frac{d^2 f}{dX^2} + (k_y - hX)^2 f = \epsilon f, \quad (4.43)$$

$$\frac{df}{dX} = 0 \quad \text{при} \quad X = \pm 1. \quad (4.44)$$

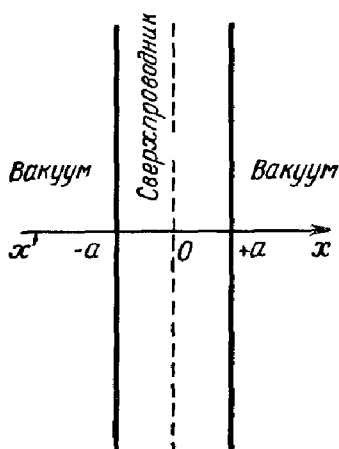
На этой стадии особенно удобно ввести новую переменную

$$t = \sqrt{2h} \left( X - \frac{k_y}{h} \right), \quad (4.45)$$

с помощью которой получаем

$$-\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{t^2}{4} f = \frac{\epsilon}{2h} f, \quad (4.46)$$

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = \sqrt{2h} \left( \pm 1 - \frac{k_y}{h} \right). \quad (4.47)$$



Фиг. 27.

Уравнение (4.46) — это так называемое уравнение Вебера. Его наиболее общее решение имеет вид

$$f(t) = \alpha_\nu D_\nu(t) + \beta_\nu D_\nu(-t), \quad (4.48)$$

где  $\alpha_\nu$  и  $\beta_\nu$  — постоянные,  $D_\nu(t)$  — функция Вебера<sup>1)</sup>, а  $\nu$  связано с  $\epsilon/h$  соотношением

$$\frac{\epsilon}{h} = 2\nu + 1. \quad (4.49)$$

Связь между  $\nu$  и  $k_y$  получаем, если записать оба граничных условия (4.47). Тогда приходим к следующему невырожденному выражению:

$$\begin{aligned} D'_\nu \left[ \sqrt{2h} \left( 1 - \frac{k_y}{h} \right) \right] D'_\nu \left[ \sqrt{2h} \left( 1 + \frac{k_y}{h} \right) \right] = \\ = D'_\nu \left[ -\sqrt{2h} \left( 1 + \frac{k_y}{h} \right) \right] D'_\nu \left[ -\sqrt{2h} \left( 1 - \frac{k_y}{h} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.50)$$

где  $D'_\nu$  — производная  $D_\nu$  по  $t$ . Для каждого значения  $h$  и  $k_y$  это уравнение дает бесконечный, но дискретный набор значений  $\nu$ . С помощью наименьшего значения  $\nu_m(k_y, h)$  определяется величина  $k_y = k_0$ , для которой  $\nu_m(k_y, h)$  достигает своего минимального значения  $\nu_0$ . Тогда из (4.49) получаем значение  $\epsilon/h$  для данного  $h$ , или, наоборот, получаем значение  $h'$  как функцию  $\epsilon$  [ $= a^2/\xi^2(T)$ ]. Таким образом, поле образования зародышей  $H_{||}$  является функцией отношения  $a/\xi(T)$ . Зависимость  $h = h(\epsilon)$ , вычисленная Сан-Жамом и Де Женом [1], приведена на фиг. 28. Из фигуры видно, что

$$\frac{H_{||}}{H_{c2}} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \frac{a^2}{\xi^2(T)} \ll 1$$

и

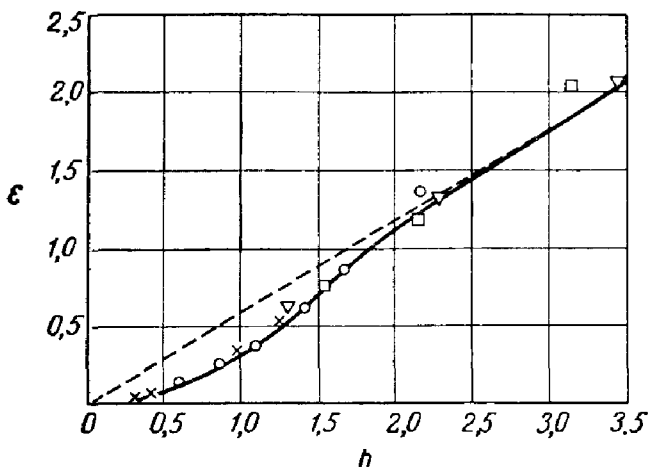
$$\frac{H_{||}}{H_{c2}} \rightarrow 1,69 \quad \text{при} \quad \frac{a^2}{\xi^2(T)} \gg 1,$$

как и следовало ожидать, поскольку здесь мы близки к случаю полубесконечной среды.

Для экспериментального подтверждения этого теоретически предсказанного поведения нужно изменять или

<sup>1</sup> См., например, [31].

толщину пластины, или, что легче, температуру, поскольку  $\xi(T)$  — функция температуры. Это было предложено и выполнено Бюрже и др. [9], которые получили экспериментальные данные, показанные на фиг. 28. Согласие теории и эксперимента очень хорошее, и при заданной температуре  $T$  одновременные измерения  $H_{c2}$  [т. е.  $\xi(T)$ ] и  $H_{\parallel}$  можно использовать для вычисления  $a$ .



Фиг. 28. Зависимость  $\epsilon$  от  $h$ , т. е. зависимость поля образования зародышей от толщины пластины [1].

Экспериментальные точки получены Бюрже и др. [9] для различных образцов.

Определив величину  $k_0$ , которая соответствует минимуму  $\epsilon_0$  для данного  $h$ , можно определить из граничных условий отношение  $\alpha_{v_0}/\beta_{v_0}$ :

$$\frac{\alpha_{v_0}}{\beta_{v_0}} = \frac{D'_{v_0} [-\sqrt{2h} (1 - k_y/h)]}{D'_{v_0} [\sqrt{2h} (1 - k_y/h)]} = \frac{D'_{v_0} [\sqrt{2h} (1 + k_y/h)]}{D'_{v_0} [-\sqrt{2h} (1 + k_y/h)]}. \quad (4.51)$$

Однако (4.50) не изменяется при замене  $k_y$  на  $-k_y$ . Отсюда следует, что данной паре значений  $h$  и  $v$  соответствуют два значения  $k_y$  и  $-k_y$ . Это связано с тем, что уравнение для  $f$  инвариантно, когда  $k_y$  меняется на  $-k_y$  и  $X$  на  $-X$ . Низшему собственному значению  $v_0$  соответствуют импульс  $\pm k_0$  и две вырожденные собственные функции  $f_{k_0}(t)$  и  $f_{-k_0}(t)$ . При  $k_y = k_0$  ( $k_y > 0$ ) выражение



для  $f(x)$  переходит в

$$f_{-k_0}(X) = \alpha_{v_0} D_{v_0} \left[ \sqrt{2h} \left( X - \frac{k_0}{h} \right) \right] + \\ + \beta_{v_0} D_{v_0} \left[ -\sqrt{2h} \left( X - \frac{k_0}{h} \right) \right], \quad (4.52)$$

где отношение  $\alpha_{v_0}/\beta_{v_0}$  берется из (4.51).

При  $k_y = -k_0$  из (4.51) можно видеть, что  $\alpha_{v_0}$  и  $\beta_{v_0}$  меняются ролями, так что

$$f_{k_0}(X) = \alpha_{v_0} D_{v_0} \left[ -\sqrt{2h} \left( X + \frac{k_0}{h} \right) \right] + \\ + \beta_{v_0} D_{v_0} \left[ \sqrt{2h} \left( X + \frac{k_0}{h} \right) \right], \quad (4.53)$$

и что

$$f_{-k_0}(X) = f_{k_0}(-X). \quad (4.54)$$

Тогда наиболее общее решение уравнений (4.40) и (4.41) имеет вид

$$\psi(X, Y) = \alpha e^{ik_0 Y} f_{k_0}(X) + \beta e^{-ik_0 Y} f_{k_0}(-X), \quad (4.55)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные. Ясно, что в качестве  $f_{k_0}(X)$  можно взять функцию вида (4.53), которая вещественна и нормирована в области  $-1 \leq X \leq 1$  без ограничения общности решения (4.55). Фактически  $\alpha$  и  $\beta$  должны быть получены из решения нелинейных уравнений Гинзбурга — Ландау, дополненных граничными условиями (4.38).

Плоскость  $X = 0$  является плоскостью симметрии, в силу чего можно ожидать симметрии модуля  $\psi^1$ ):

$$|\psi(X, Y)| = |\psi(-X, Y)|, \quad (4.56)$$

так что

$$|\alpha| = |\beta|. \quad (4.57)$$

Тогда параметр упорядочения равен

$$\psi(X, Y) = \alpha_0 \left[ e^{i(k_0 Y + \varphi)} f_{k_0}(X) + e^{-i(k_0 Y + \varphi)} f_{k_0}(-X) \right], \quad (4.58)$$

<sup>1)</sup> Это находится в согласии со свойствами симметрии нелинейного уравнения Гинзбурга — Ландау.

где  $\alpha_0$  — комплексная постоянная и  $\varphi$  — произвольная фаза. (Величины  $\alpha_0$  и  $\varphi$  должны определяться при решении нелинеаризованных уравнений.)

Видно, что параметр  $\psi(X, Y)$  обращается в нуль при

$$\cos(k_0 Y + \varphi) [f_{k_0}(X) + f_{k_0}(-X)] = 0, \quad (4.59a)$$

$$\sin(k_0 Y + \varphi) [f_{k_0}(X) - f_{k_0}(-X)] = 0. \quad (4.59b)$$

Согласно функции  $f_k(X)$  (4.53) и соотношению (4.51), единственным решением этих двух уравнений будет

$$X = 0, \quad (4.60a)$$

$$Y = -\frac{\varphi}{k_0} + (2p + 1) \frac{\pi}{2k_0}. \quad (4.60b)$$

Фиг. 29а. Схематическое изображение структуры вихревых нитей при  $h \gg h_0^c$ .

Параметр упорядочения обращается в нуль в плоскости  $X = 0$  в точках, определяемых соотношением (4.60б). Таким образом, можно ожидать возникновения регулярной системы вихрей с периодом  $L = \pi a/k_0$  (фиг. 29а). Зависимость  $L$  от  $a/\xi(T)$  будет рассмотрена в следующем параграфе.

## 2. Зависимость параллельного критического поля образования зародышей от толщины пластины

Для определения зависимости  $h$  и  $k_y$  от  $\varepsilon$  интересно изучить свойства этих величин вблизи определенного значения  $h_0$  поля  $h$ .

Этому значению  $h_0$  соответствуют определенное значение  $v_0$  и два значения  $k_y$ :  $\pm k_0$ , определяющих «основное состояние» для уравнений (4.41) и (4.43), т. е. наименьшее значение  $\varepsilon$ , равное  $\varepsilon_0$ . Рассмотрим поведение  $\varepsilon$ ,  $h$  и  $k_y$  вблизи  $\varepsilon_0$ ,  $h_0$ ,  $+k_0$ , используя второй порядок теории возмущений. Запишем (4.43) для  $f$  в виде

$$-\frac{a^2 l}{dX^2} + [(k_0 - h_0 X)^2 + (k_y - hX)^2 - (k_0 - h_0 X)^2] f = \varepsilon f. \quad (4.61)$$

Здесь значения  $k_y$  и  $\varepsilon$  соответствуют  $h$ . Это уравнение должно быть дополнено граничными условиями

$$\frac{df}{dX} = 0 \quad \text{при} \quad X = \pm 1. \quad (4.62)$$

Уравнение (4.50) определяет все значения  $v$ , соответствующие  $k_0$  и  $h_0$ , т. е. все «возбужденные состояния»  $\varepsilon_v$ , отвечающие «основному состоянию»  $(v_0, k_0, h_0)$  (или  $\varepsilon_0$ ). Соответствующие собственные функции, нормированные на единицу в области  $-1 \leq X \leq 1$ , будут обозначены через  $|\nu\rangle$ . Во втором порядке по возмущающему потенциалу  $(k_y - hX)^2 - (k_0 - h_0X)^2$  величина  $\varepsilon$  равна

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \langle 0 | [k_y + k_0 - (h + h_0)X] [k_y - k_0 - (h - h_0)X] | 0 \rangle - \sum_{\substack{v \\ v \neq v_0}} \frac{|\langle \nu | [k_y + k_0 - (h + h_0)X] [k_y - k_0 - (h - h_0)X] | 0 \rangle|^2}{\varepsilon_v - \varepsilon_0}. \quad (4.63)$$

Полагая  $h = h_0 + dh$  и  $k_y = k_0 + dk$ , получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_0 + 2(k_0 - h_0 \langle 0 | X | 0 \rangle) dk + 2(h_0 \langle 0 | X^2 | 0 \rangle - \\ - k_0 \langle 0 | X | 0 \rangle) dh + \\ + \left[ 1 - \sum_{\substack{v \\ v \neq v_0}} \frac{4}{\varepsilon_v - \varepsilon_0} |\langle 0 | (k_0 - h_0 X) | \nu \rangle|^2 \right] dk^2 - \\ - 2 \left[ \langle 0 | X | 0 \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\substack{v \\ v \neq v_0}} \frac{4}{\varepsilon_v - \varepsilon_0} \langle 0 | (k_0 - h_0 X) | \nu \rangle \times \right. \\ \left. \times \langle \nu | X (k_0 - h_0 X) | 0 \rangle + \text{Компл. сопр.} \right] dh dk + \\ + \left[ \langle 0 | X^2 | 0 \rangle - \sum_{\substack{v \\ v \neq v_0}} \frac{4}{\varepsilon_v - \varepsilon_0} |\langle 0 | X (k_0 - h_0 X) | \nu \rangle|^2 \right] dh^2. \quad (4.64) \end{aligned}$$

Сравнивая эти результаты с разложением Тейлора, видим, что

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial k} = 2(k_0 - h_0 \langle 0 | X | 0 \rangle), \quad (4.65a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial h} = 2(h_0 \langle 0 | X^2 | 0 \rangle - k_0 \langle 0 | X | 0 \rangle), \quad (4.65b)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial k^2} = 2 \left( 1 - \sum_{\substack{\nu \\ \nu \neq \nu_0}} \frac{4}{\epsilon_\nu - \epsilon_0} |\langle 0 | k_0 - h_0 X | \nu \rangle|^2 \right), \quad (4.65\text{в})$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial h \partial k} = -2 \left[ \langle 0 | X | 0 \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\nu \\ \nu \neq \nu_0}} \frac{4}{\epsilon_\nu - \epsilon_0} \langle 0 | k_0 - h_0 X | \nu \rangle \times \right. \\ \left. \times \langle \nu | X (k_0 - h_0 X) | 0 \rangle + \text{Компл. сопр.} \right], \quad (4.65\text{г})$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial h^2} = 2 \left[ \langle 0 | X^2 | 0 \rangle - \sum_{\substack{\nu \\ \nu \neq \nu_0}} \frac{4}{\epsilon_\nu - \epsilon_0} |\langle 0 | X (k_0 - h_0 X) | \nu \rangle|^2 \right]. \quad (4.65\text{д})$$

Минимальное  $\epsilon$  получаем при

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial k} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial k^2} > 0. \quad (4.66)$$

Из этого равенства следует

$$\frac{k_0}{h_0} = \langle 0 | X | 0 \rangle. \quad (4.67)$$

При  $k_0 = 0$  уравнение для  $f$  четное и низшая собственная функция также четная и не имеет узлов. Видно, что для этой функции  $\langle 0 | X | 0 \rangle = 0$ , так что

$$\frac{\partial \epsilon_0}{\partial k} = 0 \quad \text{при} \quad k_0 = 0. \quad (4.68)$$

Таким образом, для данного  $h$  значение  $k_0 = 0$  всегда соответствует экстремальному  $\epsilon$ . Этот экстремум будет минимумом, т. е. будет соответствовать образованию зародышей до тех пор, пока  $\partial^2 \epsilon / \partial k^2 \geq 0$ , т. е. при

$$\sum_{\substack{\nu \\ \nu \neq \nu_0}} \frac{4}{\epsilon_\nu - \epsilon_0} |\langle 0 | h_0 X | 0 \rangle|^2 \leq 1. \quad (4.69)$$

При  $h_0 = 0$  решение с наименьшим  $\epsilon$  получаем для  $k_0 = 0$ , и это выполняется вплоть до поля  $h_0^c$ , при котором функция  $\partial^2 \epsilon / \partial k^2$  проходит через нуль и изменяет знак. Это значение  $h_0^c$  соответствует определенному значению  $\epsilon_0^c$ .

При  $h_0 < h_0^c$  (или  $\epsilon_0 < \epsilon_0^c$ )  $k_0 = 0$  и образование зародышей начинается таким образом, что максимум  $f_{k_0}(X)$  расположен в центре пластины (фиг. 296).

При  $h_0 > h_0^c$  (или  $\epsilon_0 > \epsilon_0^c$ )  $k_0$  отличается от нуля. Существуют два значения  $\pm k_0$ , соответствующие функциям  $f_{k_0}(X)$  и  $f_{k_0}(-X)$ . Максимум  $f_{k_0}(X)$  расположен между плоскостью  $x = 0$  и поверхностью пластины (фиг. 29а и 29б).

Таким образом, точку  $h_0 = h_0^c$  можно рассматривать как пороговое значение, при котором начинает появляться «поверхностная сверхпроводимость» или при котором в образце возникают вихри.

Чтобы исследовать вопрос о появлении этих вихрей, необходимо изучить поведение  $k_0$  вблизи  $h_0^c$ . Выражение (4.67) задает неявную связь между  $k_0$  и  $h_0$ . Дифференцируя это выражение, получаем

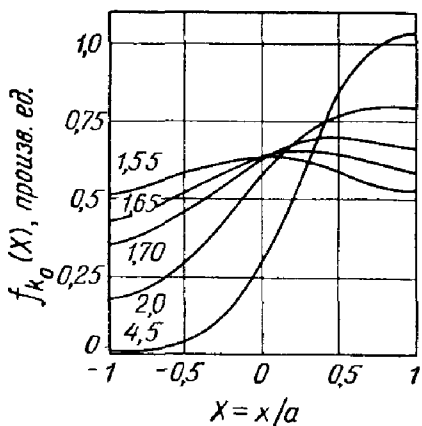
$$dk_0 = \langle 0|X|0 \rangle dh_0 + h_0 d(\langle 0|X|0 \rangle). \quad (4.70)$$

Производная от  $\langle 0|X|0 \rangle$  легко вычисляется с помощью разложения в ряд до членов первого порядка волновой функции  $|0\rangle$  вблизи  $h_0$  и  $k_0$ , и после несложных алгебраических преобразований получаем

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial k_0^2} dk_0 = \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial h_0 \partial k_0} dh_0. \quad (4.71)$$

При  $h_0 < h_0^c$   $k_0 = 0$  и  $\partial^2 \epsilon / \partial h_0 \partial k_0 \equiv 0$ , поскольку каждая собственная функция  $|\nu\rangle$  обладает заданной четностью. Таким образом,  $dk \equiv 0$ .

Если  $h_0 > h_0^c$  и  $k_0 \neq 0$ , то  $|\nu\rangle$  не имеет определенной четности и  $\partial^2 \epsilon / \partial h_0 \partial k_0$  отлично от нуля. Отношение

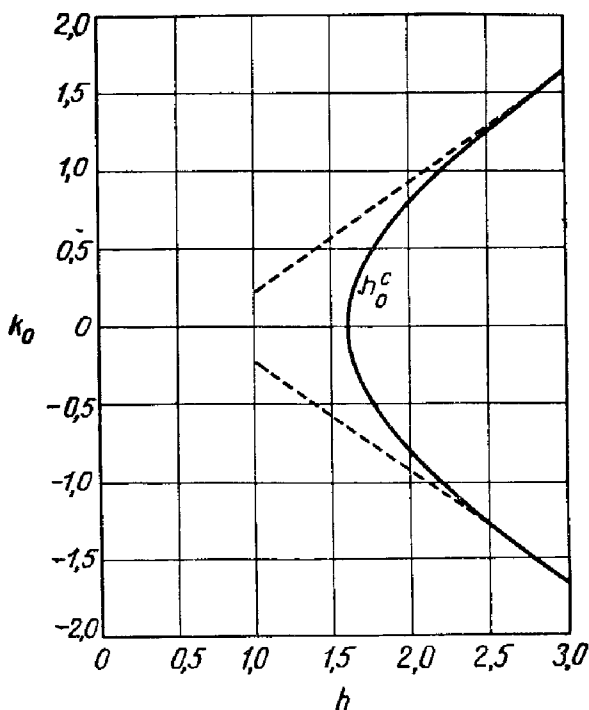


Фиг. 29б. Функция  $f_{k_0}(X)$  для различных значений  $h$ .

Заметно постепенное возникновение поверхностной сверхпроводимости.

$dk_0/dh_0$  конечно и положительно при  $k_0 > 0$  (отрицательно при  $k_0 < 0$ ).

Если  $h_0 = h_0^c$ , то  $\partial^2 \epsilon / \partial k_0^2$  и  $\partial^2 \epsilon / \partial h_0 \partial k_0$  одновременно обращаются в нуль (при  $k_0 = 0$ ). Однако можно видеть, что если  $h_0 = h_0^c$ , то  $\partial^2 \epsilon / \partial k_0^2$  пропорционально  $k_0^2$ , а  $\partial^2 \epsilon / \partial h_0 \partial k_0$  пропорционально  $k_0$ .



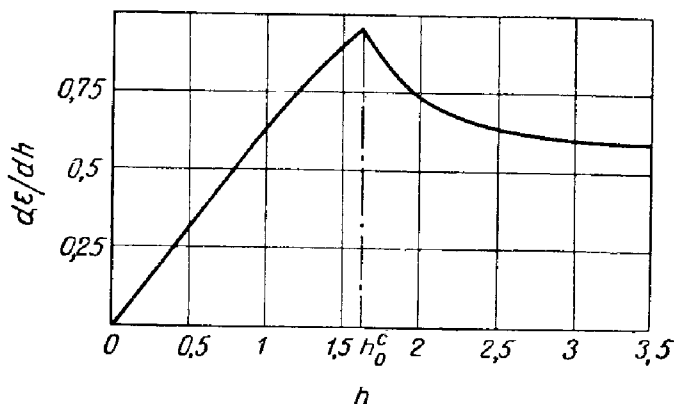
Фиг. 30. Зависимость параметра  $k_0$  от  $h$ .

При  $h = h_0^c$  появляется поверхностная сверхпроводимость. Пунктирная линия соответствует асимптотической формуле для  $k_0$  (см. стр. 126).

Это означает, что  $dk_0/dh_0$  бесконечна при  $h_0 = h_0^c$ . Функция  $k_0$ , а следовательно, и  $\partial \epsilon / \partial h_0 = d\epsilon / dh_0$  имеет точку разрыва второго рода при  $h_0 = h_0^c$  (фиг. 30 и 31). Численные вычисления приводят к значениям  $\epsilon_0^c \approx 0,8$ ,  $h_0^c \approx 1,61$  и  $h_0^c / \epsilon_0^c \approx 2$ .

Таким образом, при  $h_0 = h_0^c$  в образце возникают вихри в плоскости  $x = 0$ . Расстояние между этими вихрями

$L = a\pi/k_0$ . Поведение  $k_0$  вблизи  $h_0^c$  таково, что число вихрей возрастает очень быстро с ростом  $h_0$ , а расстояние между ними уменьшается. Такая ситуация несколько аналогична поведению вихрей вблизи  $H_{c1}$  в идеальном веществе с обратимыми свойствами (см. гл. 3). Необходимо подчеркнуть, что при возрастании толщины пластины по сравнению с  $\xi(T)$  амплитуда параметра упорядочения в плоскости  $x = 0$  уменьшается, так что изменение  $H$  становится очень малым (см. фиг. 29а и 29б).



Фиг. 31. Зависимость  $d\epsilon/dh$  от  $h$  с изломом при  $h = h_0^c$ .

Для очень малых  $h_0$ , т. е. в очень тонком образце или очень близко к  $T_0$ , можно получить выражение для  $\epsilon_0$  как функции  $h_0$  с помощью теории возмущений. При  $h_0 = 0$  собственные функции и собственные значения равны

$$\cos n\pi X \quad \text{при} \quad \epsilon = n^2\pi^2,$$

$$\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}X \quad \text{при} \quad \epsilon = (2n+1)^2\frac{\pi^2}{4}$$

и с точностью до членов второго порядка по  $h_0^2$  получаем ( $h_0^2 x^2$  — потенциал возмущения)

$$\epsilon_0 = \frac{h_0^2}{3} - \frac{8h_0^4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}. \quad (4.72)$$

Если сохранить только члены с  $h_0^2$ , то получим

$$h_0^2 = 3\epsilon_0 \quad (4.73)$$

или

$$H_{\parallel} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\Phi_0}{a\xi(T)} = \sqrt{6} \frac{\lambda(T)}{a} H_c. \quad (4.74)$$

Эта формула впервые была получена Гинзбургом [32] другим путем.

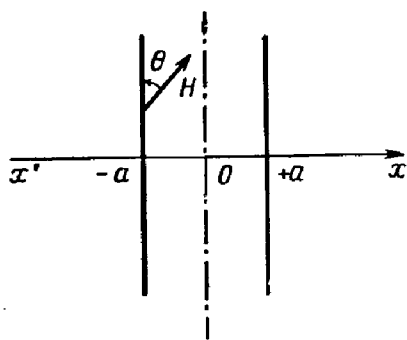
При  $h_0 \gg h_0^c$ , т. е. при  $h_0 \gtrsim 3$ , отношение  $\epsilon_0/h_0$  стремится, как это и ожидалось, к постоянной величине  $\mu^2$ , полученной в § 1. Можно показать, что при высоких значениях  $h_0$  функция  $k_0$  имеет асимптотическую форму

$$k_0 \approx h_0 - \mu \sqrt{h_0}.$$

Это означает, что на обеих поверхностях образуется сверхпроводящий слой. При больших значениях  $\epsilon_0$  [или  $a/\xi(T)$ ] возникает идеальное образование зародышей на поверхности; практически это происходит при  $a \gtrsim \gtrsim \sqrt{2}\xi(T)$ .

### § 3. Угловая зависимость критического поля образования зародышей

Интересно изучить свойства критического поля образования зародышей, когда направление приложенного поля изменяется от параллельного до перпендикулярного к поверхности образца. Можно было бы ожидать, что это поле будет понижаться от  $H_{\parallel}$  до  $H_c$ , что фактически и наблюдали Томаш и Джозеф [12], Харт и Шварц [33], а также Бюрже и др. [9]. Однако результаты, полученные в различных экспериментах, не согласуются полностью друг



Фиг. 32.

с другом, очевидно, вследствие различной толщины использованных образцов. Поэтому удобно рассмотреть пластину толщиной  $2a$ , когда направление приложенного поля образует угол  $\theta$  с поверхностью образца (фиг. 32).



В линейризованном уравнении Гинзбурга — Ландау вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  можно выбрать с калибровкой

$$A_x = 0, \quad A_y = Hx \cos \theta - Hz \sin \theta, \quad A_z = 0 \quad (4.75)$$

так что (4.2) принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2e}{c} Hx \cos \theta + \frac{2e}{c} Hz \sin \theta \right)^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi = -\alpha\psi. \quad (4.76)$$

Граничные условия определяются уравнением (4.1), т. е.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a. \quad (4.77)$$

Более того, функция  $\psi$  должна быть ограниченной и нормируемой. Используя безразмерные величины (4.39), уравнения (4.76) и (4.77) можно привести к форме

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \left( -i \frac{\partial}{\partial Y} - hX \cos \theta + hZ \sin \theta \right)^2 \psi = \epsilon \psi, \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad \text{при} \quad X = \pm 1. \quad (4.79)$$

Решением этого уравнения будет

$$\psi(X, Y, Z) = e^{iky \cos \theta} \psi(X, Z), \quad (4.80)$$

где  $\psi(X, Z)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + (k \cos \theta - hX \cos \theta + hZ \sin \theta)^2 \psi = \epsilon \psi, \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad \text{при} \quad X = \pm 1. \quad (4.82)$$

Собственным значением в рассматриваемой задаче будет функция  $\epsilon(k, h, \theta)$ , и для заданных значений  $h$  и  $\theta$  нужно искать значение  $k$ , для которого  $\epsilon$  минимальна. Решение двумерной задачи (4.81) и (4.82), где переменные  $X$  и  $Z$  связаны сложным образом, пока еще не найдено. Единственное, что можно сделать, это вычислить значение  $\epsilon$  вблизи  $\theta = 0$ , т. е. найти поле образования зародышей вблизи  $H_{\parallel}$  [34]. Если угол  $\theta$  очень мал,

величина  $\varepsilon(k, h, \theta)$  может быть получена методом возмущений. Невозмущенное уравнение берется в виде

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + (k - hX)^2 \cos^2 \theta \psi + h^2 Z^2 \sin^2 \theta \psi = \varepsilon_0 \psi, \quad (4.83)$$

где  $\varepsilon_0$  — невозмущенное собственное значение с граничными условиями (4.82). Возмущающий потенциал равен

$$V = 2h(k - hX)Z \cos \theta \sin \theta. \quad (4.84)$$

Решение уравнения (4.83) можно записать в форме

$$\psi(X, Z) = f(X)g(Z), \quad (4.85)$$

где  $f(X)$  и  $g(Z)$  должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + (k - hX)^2 f \cos^2 \theta = \varepsilon'_0 f, \quad (4.86)$$

$$-\frac{d^2 g}{dZ^2} + h^2 Z^2 g \sin^2 \theta = \varepsilon''_0 g, \quad (4.87)$$

$$\frac{df}{dX} = 0 \quad \text{при} \quad X = \pm 1. \quad (4.88)$$

Функции  $f$  и  $g$  — ограниченные нормируемые функции. Собственное значение  $\varepsilon_0$  в невозмущенной задаче, очевидно, равно

$$\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 + \varepsilon''_0. \quad (4.89)$$

Поскольку функция  $g$  должна быть ограниченной и нормируемой, ясно, что (4.87) — обычное уравнение для гармонического осциллятора. Собственные значения равны

$$\varepsilon''_0(n) = (2n + 1)h \cos \theta,$$

а соответствующие собственные функции имеют вид

$$g_n(Z) = \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{h \sin \theta}{\pi}\right)^{1/4} D_n(Z \sqrt{2h \sin \theta}), \quad (4.90)$$

где  $n$  — целое число и  $D_n$  — функция Вебера — собственная функция гармонического осциллятора<sup>1)</sup>. С дру-

<sup>1)</sup>  $D_n(x) = e^{-x^2/4} 2^{-n/2} H_n(\sqrt{2}x)$ , где  $H_n$  — полином Эрмита  $n$ -го порядка. Далее  $D_n(x) = (-1)^n D_n(-x)$ ;  $D_n(x)$  — единственная функция, правильно описывающая поведение  $g$ .

гой стороны, уравнение для  $f$  идентично (4.43), где  $k_y$  заменено на  $k \cos \theta$  и  $h$  — на  $h \cos \theta$ . Собственные значения, полученные из (4.50) (с теми же преобразованными  $h$  и  $k_y$ ), равны

$$\epsilon'_0(\nu) = (2\nu + 1) h \cos \theta, \quad (4.91)$$

а соответствующие собственные функции имеют вид

$$f_\nu(X) = \alpha_\nu D_\nu \left[ \sqrt{2h \cos \theta} \left( X - \frac{k}{h} \right) \right] + \beta_\nu D_\nu \left[ -\sqrt{2h \cos \theta} \left( X + \frac{k}{h} \right) \right]. \quad (4.92)$$

Значения  $\alpha_\nu$  и  $\beta_\nu$  связаны соотношением (4.51), где  $h$  изменено на  $h \cos \theta$ , а  $k_y$  — на  $k \cos \theta$ . Ясно, что  $\nu$  является функцией  $k$ ,  $h$  и  $\cos \theta$ . Величина  $\alpha_\nu$  определяется при нормировке  $f_\nu(X)$  на единицу в области  $-1 \leq X \leq +1$ . Нормированная функция  $f_\nu(X)$  обозначается через  $|\nu\rangle$ , а нормированная функция  $g_n(Z)$  — через  $|n\rangle$ .

Таким образом, невозмущенные собственные значения равны

$$\epsilon_0^{n, \nu} = (2\nu + 1) h \cos \theta + (2n + 1) h \sin \theta. \quad (4.93)$$

Возмущенное собственное значение  $\epsilon^{n, \nu}$  получается при разложении в ряд теории возмущений, причем вводится матричный элемент  $V$ , т. е.

$$\langle n\nu | V | n'\nu' \rangle. \quad (4.94)$$

Поскольку  $|n\rangle$  и  $|\nu\rangle$  являются фактически функциями от  $Z \sqrt{2h \sin \theta}$  и  $(X - k/h) \sqrt{2h \cos \theta}$ , удобно записать  $V$  как

$$V = h (\cos \theta \sin \theta)^{1/2} \left( \frac{k}{h} - X \right) \sqrt{2h \cos \theta} Z \sqrt{2h \sin \theta} = \lambda^{1/2} \mathcal{V}, \quad (4.95)$$

где

$$\lambda^{1/2} = h (\cos \theta \sin \theta)^{1/2}. \quad (4.96)$$

Мы видим, что ряд теории возмущений — степенной ряд по  $\lambda^{1/2}$ :

$$\epsilon^{n, \nu} = \epsilon'_0(\nu) + \epsilon''_0(n) + \sum_p \lambda^{p/2} F_{p/2}(\theta, h, k), \quad (4.97)$$

где  $F_{p/2}(\theta, h, k)$  можно выразить как функцию матричных элементов  $\mathcal{Y}^p$ . Поправка первого порядка к  $\epsilon^{n, \nu}$  равна

$$\lambda^{1/2} \langle \nu | \left( \frac{k}{h} - X \right) \sqrt{2h \cos \theta} | \nu \rangle \langle n | Z \sqrt{2h \sin \theta} | n \rangle. \quad (4.98)$$

Очевидно, что эта поправка равна нулю, так как собственная функция  $|n\rangle$  обладает определенной четностью. Это справедливо для всех поправок нечетного порядка в (4.97), так что

$$\epsilon^{n, \nu} = (2\nu + 1) h \cos \theta + (2n + 1) h \sin \theta + \sum_{p=1}^{\infty} h^{2p} (\cos \theta \sin \theta)^p [F_p(\theta, h, k)]. \quad (4.99)$$

Чтобы получить наименьшее собственное значение, прежде всего необходимо положить  $n = 0$  и выбрать наименьшее собственное значение  $\nu_0(k)$  для данного значения  $k$ . Тогда, как и в предыдущем параграфе, выбираем значение  $k$ , для которого  $\epsilon^{0, \nu_0}$  минимально, так что

$$\frac{\partial \epsilon^{0, \nu_0}}{\partial k} = 0, \quad (4.100)$$

т. е.

$$2 \frac{\partial \nu_0}{\partial k} h \cos \theta + \sum_{p=1}^{\infty} h^{2p} (\cos \theta \sin \theta)^p \frac{\partial F_p}{\partial k} = 0. \quad (4.101)$$

Для того чтобы  $\epsilon^{0, \nu_0}$  являлось наименьшим собственным значением, к этому условию нужно добавить

$$\frac{\partial^2 \epsilon^{0, \nu_0}}{\partial k^2} > 0. \quad (4.102)$$

Таким образом, наименьшее собственное значение равно

$$\epsilon = (2\nu_0 + 1) h \cos \theta + h \sin \theta + \sum_{p=1}^{\infty} h^{2p} (\cos \theta \sin \theta)^p F_p(\theta, h, k). \quad (4.103)$$

Выражение (4.103) дает неявную связь между  $h$ ,  $\epsilon$  и  $\theta$  при условии, что  $k$  получено из (4.101), т. е. неявную связь между полем образования зародышей  $H(\theta)$ , отношением  $a/\xi(T)$  и углом  $\theta$ .

Проверку этого выражения можно провести в экспериментах двух типов.

а) При данной температуре  $T$  поле, равное полю образования зародышей  $H_{\parallel}(T)$ , прикладывается параллельно поверхности образца. После этого образец поворачивается на угол  $\theta$ .

Чтобы восстановить состояние, при котором образуются зародыши, нужно изменить температуру, т. е.  $\xi(T)$ , а следовательно, и  $\epsilon$ , если величина поля остается равной  $H_{\parallel}$  (т. е.  $h$  постоянно). Дифференцируя (4.103) по  $\theta$  при постоянном  $h$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{d\theta} = & -(2\nu_0 + 1) h \sin \theta + 2 \frac{\partial \nu_0}{\partial k} \frac{dk}{d\theta} h \cos \theta + \\ & + 2 \frac{\partial \nu_0}{\partial \theta} h \cos \theta + h \cos \theta + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} h^{2p} \left[ \frac{2p}{2^p} \cos 2\theta (\sin 2\theta)^{p-1} F_p(\theta, h, k) \right] + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} h^{2p} (\sin \theta \cos \theta)^p \left( \frac{\partial F_p}{\partial \theta} + \frac{\partial F_p}{\partial k} \frac{dk}{d\theta} \right). \quad (4.104) \end{aligned}$$

Условие (4.101) показывает, что коэффициент при  $dk/d\theta$  равен нулю и

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{d\theta} = & -(2\nu_0 + 1) h \sin \theta + 2 \frac{\partial \nu_0}{\partial \theta} h \cos \theta + h \cos \theta + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} h^{2p} (\sin \theta \cos \theta)^{p-1} \times \\ & \times \left\{ p \cos 2\theta [F_p(\theta, h, k)] + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial F_p}{\partial \theta} \right\}. \quad (4.105) \end{aligned}$$

При  $\theta = 0$  это соотношение особенно упрощается. Поскольку  $\nu_0$  — функция  $\cos \theta$ , производная  $\partial \nu_0 / \partial \theta$  стремится к нулю при  $\theta = 0$ , так что

$$\frac{1}{h} \left( \frac{d\epsilon}{d\theta} \right)_{\theta=0} = 1 + h F_1(0). \quad (4.106)$$

Здесь  $F_1(0)$  — значение  $F_1(\theta, h, k)$  при  $\theta = 0$  и при  $k$ , определяемом из (4.102), где  $\theta = 0$ . Очевидно, что соответствующим значением  $k$  является значение  $k_0$ ,

определенное в § 2 и дающее наименьшее собственное значение для (4.43) [т. е. уравнения (4.86) при  $\theta = 0$ ].

Ясно, что (4.106) является точным соотношением, поскольку в выражении для  $\varepsilon$  оставлены все члены разложения. Это связано со специально выбранной формой  $\lambda$ .

б) Эксперименты второго типа проводились Бюрже и др. [35]. При данной температуре  $T$  параллельно поверхности образца прикладывалось поле, равное полю  $H_{\parallel}(T)$ . После этого образец поворачивался на угол  $\theta$  и величина поля изменялась до восстановления состояния образования зародышей при постоянной температуре. В этом случае  $\varepsilon$  постоянно, и, дифференцируя (4.103) по  $\theta$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{d\theta} = & -(2\nu_0 + 1) h \sin \theta + 2 \frac{\partial \nu_0}{\partial \theta} h \cos \theta + \\ & + 2 \frac{\partial \nu_0}{\partial k} \frac{dk}{d\theta} h \cos \theta + 2 \frac{\partial \nu_0}{\partial h} \frac{dh}{d\theta} h \cos \theta + \\ & + (2\nu_0 + 1) \frac{dh}{d\theta} \cos \theta + h \cos \theta + \frac{dh}{d\theta} \sin \theta + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} 2ph^{2p-1} \frac{dh}{d\theta} (\cos \theta \sin \theta)^p F_p(\theta, h, k) + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} h^{2p} (\sin \theta \cos \theta)^{p-1} \times \left\{ p \cos 2\theta [F_p(\theta, h, k)] + \right. \\ & \left. + \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial F_p}{\partial \theta} + \frac{\partial F_p}{\partial k} \frac{dk}{d\theta} + \frac{\partial F_p}{\partial h} \frac{dh}{d\theta} \right) \right\} = 0. \quad (4.107) \end{aligned}$$

Как и в (4.104), коэффициент при  $dk/d\theta$  равен нулю. Простейшая ситуация возникает при  $\theta = 0$ ; поскольку  $\partial \nu_0 / \partial \theta = 0$  при  $\theta = 0$ , уравнение переходит в

$$2h \frac{\partial \nu_0}{\partial h} \frac{dh}{d\theta} + (2\nu_0 + 1) \frac{dh}{d\theta} + h + h^2 F_1(0) = 0, \quad (4.108)$$

где  $F_1(0)$  определяется так же, как в (4.106). Таким образом, уравнение (4.108) приводит к логарифмической производной от  $h$  вблизи  $\theta = 0$ , т. е.

$$\frac{1}{h_0} \left( \frac{dh}{d\theta} \right)_0 = - \frac{1 + h_0 F_1(0)}{\partial \varepsilon_0 / \partial h_0}. \quad (4.109)$$

В этом выражении  $h_0$  — значение  $h$ , соответствующее  $H_{||}(T)$ , и  $\epsilon_0 = (2\nu_0 + 1)h_0$  — низшее собственное значение (4.43), соответствующее  $h_0$ ; очевидно, что  $k = k_0$ .

Рассмотрим теперь взаимосвязь между  $h_0 F_1(0)$  и свойствами функции  $\epsilon_0 = \epsilon_0(h_0)$ . Коэффициент  $F_1(0)$  появляется во втором порядке теории возмущений (4.98), т. е.

$$\begin{aligned} h_0 F_1(0) &= \\ &= - \lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_{\nu, n} \frac{h |\langle 0\nu_0 | (k/h - X) \sqrt{2h \cos \theta} Z \sqrt{2h \sin \theta} | n\nu \rangle|^2}{\epsilon^{\nu, n} - \epsilon^{0, \nu_0}} = \\ &= - \lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_{\nu, n} \frac{h |\langle \nu_0 | (k/h - X) \sqrt{2h \cos \theta} | \nu \rangle|^2 |\langle 0 | Z \sqrt{2h \sin \theta} | n \rangle|^2}{2(\nu - \nu_0) h \cos \theta + 2nh \sin \theta}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Ряды по  $n$  легко вычисляются, поскольку  $Z$  содержит матричные элементы только между состояниями  $|n\rangle$  и  $|n+1\rangle$ . Более того, из (4.90) видно, что

$$\langle 0 | Z \sqrt{2h \sin \theta} | 1 \rangle = 1. \quad (4.111)$$

Используя этот результат и полагая в (4.110)  $\theta = 0$ , получаем

$$h_0 F_1(0) = -2 \sum_{\nu} \frac{|\langle \nu_0 | k - hX | \nu \rangle|^2}{\epsilon_{\nu} - \epsilon_0}. \quad (4.112)$$

Таким образом,

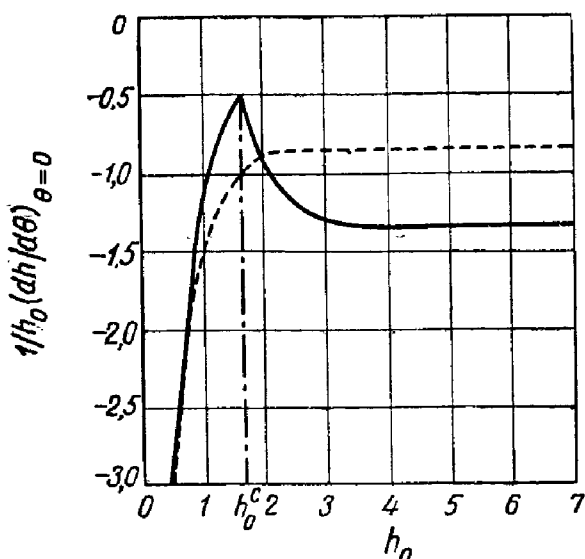
$$h_0 F_1(0) = -\frac{1}{4} \left( 2 - \frac{\partial^2 \epsilon_0}{\partial k^2} \right) \quad (4.113)$$

и

$$-\frac{1}{h_0} \left( \frac{dh}{d\theta} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{4} \frac{2 + \partial^2 \epsilon_0 / \partial k^2}{\partial \epsilon_0 / \partial h}. \quad (4.114)$$

Поскольку правая часть (4.114) положительна, поле образования зародышей уменьшается с увеличением  $\theta$ . В § 2 было показано, что  $\partial^2 \epsilon / \partial k^2$  обращается в нуль при  $h_0 = h_0^c$ , а  $\partial \epsilon / \partial h$  имеет разрыв второго рода. В результате на кривой логарифмической производной  $h_0$  появляется пик при  $h_0 = h_0^c$ . Это можно видеть на фиг. 33, где построена зависимость величины  $-(1/h_0) (dh/d\theta)_{\theta=0}$  от  $h_0$ . Изображение зависимости этой

величины на этот раз от  $H_{\parallel}/H_{\perp}$  приведено на фиг. 34 совместно с экспериментальными точками, полученными Бюрже и др. (использовалась туннельная методика на пленках Sn—In). Согласие теории с экспериментом удивительно хорошее, и Бюрже и др. смогли определить пороговое поле  $h_0^c$  и получили  $H_{\parallel}/H_{\perp} \approx 2$ , т. е.  $\varepsilon/h \approx 0,5$ .



Фиг. 33. Зависимость логарифмической производной  $(1/h_0)(dh/d\theta)_{\theta=0}$  от  $h_0$ , вычисленная Сан-Жамом [34], с изломом при  $h = h_0^c$ .

Пунктирная линия соответствует зависимости, полученной с помощью формулы Тинкхама (4.122).

Такие же данные были получены в результате измерений Харта и Шварца [33] и вычислений Тинкхама [36], проведенных аналогичным методом в пределе  $a/\xi(T) \gg 1$ .

Для очень тонких пластинок, т. е. при  $a/\xi(T) \ll 1$ , можно получить очень простую формулу, дающую угловую зависимость поля образования зародышей во всей области углов  $\theta$ .

При малых  $h$  в (4.81) можно сохранить условие  $k=0$  и рассматривать потенциал  $h^2 X^2 \cos^2 \theta - 2hXZ \cos \theta \sin \theta$  как возмущение, причем невозмущен-

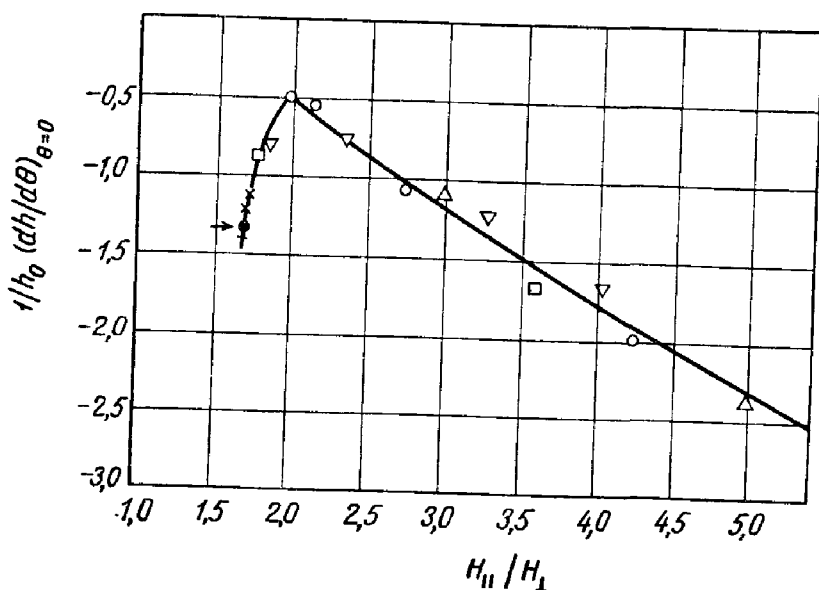


ное уравнение имеет вид <sup>1)</sup>

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + h^2 Z^2 \sin^2 \theta \psi = \epsilon_1 \psi. \quad (4.115)$$

Поправка первого порядка дает

$$\epsilon = \epsilon_1 + \langle h^2 X^2 \cos^2 \theta - 2h^2 XZ \sin \theta \cos \theta \rangle. \quad (4.116)$$



Фиг. 34. Зависимость  $(1/h_0)(dh/d\theta)_{\theta=0}$  от  $H_{||}/H_{\perp}$ .

Теоретическая кривая эквивалентна кривой, вычисленной Сан-Жамом (фиг. 35). Экспериментальные точки получены Бюрже и др. [35,9] для различных образцов. Стрелкой отмечена величина, вычисленная Тинкхамом, а кружочками — измерения, проведенные Хартом и Шварцем [33].

Здесь  $\epsilon$  — наименьшее собственное значение уравнения (4.115). Очевидно, что

$$\epsilon_1 = h \sin \theta, \quad (4.117)$$

а поправочный член равен

$$\frac{1}{3} h^2 \cos^2 \theta, \quad (4.118)$$

<sup>1)</sup> В (4.115) нужно сохранить член  $h^2 Z^2 \sin^2 \theta$ , поскольку этот потенциал бесконечен при  $Z = \pm \infty$ .

поскольку матричные элементы  $Z$  и  $X$  равны нулю. Таким образом,

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{3} \cos^2 \theta + \hbar \sin \theta. \quad (4.119)$$

Каждому данному  $\varepsilon$  соответствует такое поле образования зародышей, параллельное образцу, что

$$\varepsilon = \frac{\hbar_{\parallel}^2}{3} \quad (4.120)$$

[см. (4.73)]. Условие (4.119) может быть записано в форме

$$\frac{\hbar^2}{\hbar_{\parallel}^2} \cos^2 \theta + \frac{\hbar}{\varepsilon} \sin \theta = 1 \quad (4.121)$$

или

$$\left[ \frac{H(\theta)}{H_{\parallel}} \cos \theta \right]^2 + \frac{H(\theta)}{H_{\perp}} \sin \theta = 1. \quad (4.122)$$

Здесь  $H_{\parallel}$ ,  $H_{\perp}$  и  $H(\theta)$  — поля образования зародышей при  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = \theta$ . Эта изящная формула была получена Тинкхамом [13] другим способом. Нужно отметить, что она справедлива для любого угла  $\theta$  при условии  $a/\xi(T) \ll 1$ . Соответствующая зависимость величины  $-(1/h_0)(dh/d\theta)_{\theta=0}$  от  $h$  изображена на фиг. 33.

#### § 4. Устойчивость поверхностного слоя ниже $H_{\parallel}$

Поведение параметра упорядочения для поля, приложенного параллельно поверхности образца с напряженностью меньше  $H$ , изучено плохо. На опыте наблюдалось [10, 14] сохранение поверхностного слоя вплоть до поля  $H_c$ , т. е. в массивных образцах наличие поверхности все еще усиливает сверхпроводимость, так что параметр упорядочения около поверхности больше, чем в толще материала. Неизвестно, однако, как изменяется поверхностное состояние при наличии вихревой структуры, которая должна возникать ниже поля  $H_{c2}$ . Дважды были сделаны попытки изучить свойства параметра упорядочения. Остановимся кратко на этих попытках.

## 1. Тонкие пленки

Для тонких пленок толщиной  $2a \ll \xi(T)$  и при приложенном поле, параллельном поверхности (фиг. 27), можно вычислить величину параметра упорядочения, предположив, что он почти не изменяется в пространстве<sup>1)</sup> и зависит от приложенного поля  $H$ . Было показано [см. (4.74)], что в такой пленке параллельное поле образования зародышей равно

$$H_{\parallel} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Phi_{0/a\xi}(T), \quad (4.123)$$

или

$$H_{\parallel} = \sqrt{6} \frac{\lambda(T)}{a} H_c. \quad (4.124)$$

При приложенном поле  $H$ , меньшем  $H_{\parallel}$ , задачу можно решить в рамках теории Гинзбурга — Ландау, предположив, что  $H$  и  $\psi$  зависят только от  $x$ . Используя приведенные переменные (2.37), уравнения Гинзбурга — Ландау для одномерного случая можно привести к виду (2.52), т. е.

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 f_0}{d\xi^2} - \frac{1}{f_0^3} \left( \frac{dh}{d\xi} \right)^2 + f_0 - f_0^3 = 0, \quad (4.125)$$

$$\frac{d^2 h}{d\xi^2} - \frac{2}{f_0} \frac{dh}{d\xi} \frac{df_0}{d\xi} - f_0^2 h = 0. \quad (4.126)$$

Граничные условия имеют вид

$$h = h_0 \quad (4.127)$$

$$\left. \frac{df}{dx} = 0 \right\} \text{ при } \xi = \pm \frac{a}{\lambda(T)}. \quad (4.128)$$

Поскольку поле направлено вдоль оси  $z$  и поскольку его величина зависит только от  $x$ , ток направлен вдоль оси  $y$  и равен

$$\left( \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right)_y = (\text{rot } \mathbf{H})_y = \frac{d}{dx} h_z. \quad (4.129a)$$

В приведенных переменных (4.129a) принимает вид

$$j_r \approx \frac{d}{d\xi} h. \quad (4.129b)$$

<sup>1)</sup> При этом мы избегаем затруднения, связанного с тем, что член  $|\nabla\psi|^2$  дает большой вклад в свободную энергию.

Условие  $H = H_0$  с обеих сторон образца обеспечивает равенство нулю суммарного тока

$$\int_{-a/\lambda(T)}^{a/\lambda(T)} j_r d\xi = \int_{-a/\lambda(T)}^{a/\lambda(T)} \frac{dh}{d\xi} d\xi = 0. \quad (4.130)$$

Для более подробного исследования примем, что параметр упорядочения в (4.126) постоянен. Тогда это уравнение переходит в

$$\frac{d^2h}{d\xi^2} = f_0^2 h, \quad (4.131)$$

которое, как и можно было ожидать, является уравнением Лондонов. Таким образом, удобным решением для  $h$  является

$$h = h_0 \frac{\text{ch}(\xi f_0)}{\text{ch}\{[a/\lambda(T)] f_0\}}. \quad (4.132)$$

Значение  $f_0$  получается из этого уравнения при интегрировании по  $\xi$  от  $-a/\lambda(T)$  до  $+a/\lambda(T)$ . Член  $d^2f/d\xi^2$  обращается в нуль, и

$$\int_{-a/\lambda(T)}^{a/\lambda(T)} \frac{1}{f_0^3} \left( \frac{dh}{d\xi} \right)^2 d\xi = \int_{-a/\lambda(T)}^{a/\lambda(T)} (f_0 - f_0^3) d\xi. \quad (4.133)$$

При вычислении этих интегралов можно предположить, что  $f_0$  постоянно в области  $-a/\lambda(T)$ ,  $+a/\lambda(T)$  и условие можно записать в виде

$$\frac{1}{f_0^3} \int_{-a/\lambda(T)}^{a/\lambda(T)} \left( \frac{dh}{d\xi} \right)^2 d\xi = \frac{2a}{\lambda(T)} (f_0 - f_0^3), \quad (4.134)$$

или с помощью выражения (4.132)

$$h^2 = 2f_0^2 (1 - f_0^2) \left\{ \frac{\text{sh}[2a/\lambda(T)] f_0}{[2a/\lambda(T)] f_0} - 1 \right\}^{-1} \text{ch}^2 \left[ \frac{a}{\lambda(T)} f_0 \right], \quad (4.135)$$

т. е.

$$\left( \frac{H}{H_c} \right)^2 = 4f_0^2 (1 - f_0^2) \left\{ \frac{\text{sh}[2a/\lambda(T)] f_0}{[2a/\lambda(T)] f_0} - 1 \right\}^{-1} \text{ch}^2 \left[ \frac{a}{\lambda(T)} f_0 \right]. \quad (4.136)$$

Здесь  $f_0 = |\psi|/\psi_0$ ,  $H$  — приложенное поле,  $H_c$  — термодинамическое критическое поле.

Ясно, что значение  $f_0$ , полученное из выражения (4.136), соответствует минимуму свободной энергии, поскольку уравнение Гинзбурга — Ландау было получено при минимизации свободной энергии по параметру упорядочения.

При  $f_0 \rightarrow 0$  получаем критическое поле для перехода второго рода <sup>1)</sup>

$$\left(\frac{H}{H_c}\right)^2 = 6 \frac{\lambda^2(T)}{a^2}. \quad (4.137)$$

Это выражение совпадает с выражением (4.124). Если  $a/\lambda(T)$  очень мало, различные функции можно разложить в ряд по степеням  $f_0^2$  и

$$\left(\frac{H}{H_c}\right)^2 = 6 \frac{\lambda^2(T)}{a^2} \left[ 1 - f_0^2 + \frac{4a^2 f_0^2}{5\lambda^2(T)} \right]. \quad (4.138)$$

Подставляя выражение для  $H_{\parallel}$ , получаем

$$\frac{H^2 - H_{\parallel}^2}{H_{\parallel}^2} = \left[ \frac{4a^2}{5\lambda^2(T)} - 1 \right] \left| \frac{\psi}{\psi_0} \right|^2. \quad (4.139)$$

Это выражение дает значение параметра упорядочения как функцию  $(H^2 - H_{\parallel}^2)/H_{\parallel}^2$ . Как мы и ожидали, вблизи  $H_{\parallel}$  параметр  $|\psi|$  пропорционален  $|H_{\parallel} - H|^{1/2}$ . Выражение (4.139) для параметра упорядочения было использовано для интерпретации туннельных экспериментов в бесщелевой области (обсуждение см. в гл. 6).

## 2. Массивные образцы

Для массивных образцов ситуация не столь очевидна. Как уже было упомянуто, экспериментальные

<sup>1)</sup> Эти вычисления впервые были выполнены Гинзбургом, который пришел к выводу, что переход является переходом первого рода, если  $a > (\sqrt{5}/2)\lambda(T)$ . Однако вычисления проводятся для случая  $a \ll \xi(T)/2$ . Для сверхпроводников второго рода  $\lambda(T) \gg \xi(T)/2$ , так что переход является переходом второго рода. Обсуждение рода перехода в зависимости от  $\kappa$  и от толщины пластины см. в [16].

наблюдения показали, что поверхностный слой сохраняется ниже  $H_{c_3}$ . Теоретическое рассмотрение этой задачи должно быть связано с решением двух уравнений Гинзбурга — Ландау, включая граничные условия (4.1). Единственным упрощением здесь является возможность предположить параллельность микроскопического поля  $\mathbf{h}$  приложенному полю (т. е. поверхности). Это означает, что вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  записывается в виде

$$\mathbf{A} = [0, A_y(x, y), 0], \quad (4.140)$$

где  $A_y(x, y)$  получается при решении уравнений Гинзбурга — Ландау.

Для полубесконечной среды в поле образования зародышей параметр упорядочения принимает вид

$$\psi(x, y) = e^{iky} D(x), \quad (4.141)$$

где  $D(x)$  — вещественная функция  $(x)$  (см. § 1 и фиг. 23), и заманчиво предположить, что это выполняется и для полей, меньших  $H_{c_3}$ . Область, для которой справедливо это предположение, неизвестна, и оно, безусловно, не выполняется для пластин толщиной порядка  $\xi(T)$ , поскольку в этом случае в (4.141) надо ввести два вектора:  $+k$  и  $-k$  (см. § 2). Очевидно также, что выражение (4.141) не описывает вихревой структуры, появляющейся в полях ниже поля  $H_{c_2}^1$ ). Финк и Кессингер [19] использовали выражение (4.141) в качестве исходного при вычислении параметра упорядочения и поля  $h$ , меньшего  $H_{c_3}$ . Если функция  $\psi$  имеет вид (4.141), можно считать, что вектор-потенциал зависит только от  $x$ , и  $A_y$  можно записать в виде

$$A_y = H_0 x + \Delta A_y(x) + A_y(0). \quad (4.142)$$

Здесь  $H_0$  — приложенное поле,  $A_y(0)$  — значение  $A_y$  при  $x = 0$  и  $\Delta A_y(x)$  — искомая функция. При  $x = 0$  функция  $\Delta A_y(x) = 0$ . Функции  $\psi$  и  $A_y(x)$  должны удовлетворять

<sup>1)</sup> Неизвестно, существует ли вихревая структура в массивных сверхпроводниках между  $H_{c_3}$  и  $H_{c_2}$ .

уравнениям Гинзбурга — Ландау:

$$\frac{1}{2m} \left( i\hbar\nabla + \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \psi + \alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2 = 0, \quad (4.143)$$

$$-\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = -\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{16\pi e^2}{mc^2} |\psi|^2 \mathbf{A} + \frac{4\pi e\hbar}{mc} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (4.144)$$

с граничным условием

$$\frac{1}{2m} \left( i\hbar\nabla + \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)_x \psi = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (4.145)$$

Параметр  $k$  все еще не определен; его можно найти при минимизации свободной энергии

$$F_s(H_0) - F_s(0) = \int dv \left\{ \frac{H_c^2}{8\pi} + \alpha|\psi|^2 + \beta|\psi|^4 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} + \frac{1}{2m} \left| \left[ i\hbar\nabla + \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right] \psi \right|^2 \right\}. \quad (4.146)$$

Для упрощения приведенных выше уравнений выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{\xi(T)} \left( \frac{H_0}{H_{c_2}} \right)^{1/2}, \\ \mu^2 &= \frac{H_{c_2}}{H_0}, \\ \mathbf{a}(\xi) &= \mu \left[ \sqrt{2} H_c \lambda(T) \right]^{-1} \Delta \mathbf{A}(\xi), \\ C_0 &= \mu \left[ \sqrt{2} H_c \lambda(T) \right]^{-1} A_y(0), \\ F(\xi) &= \frac{D(\xi)}{D_0}, \\ D_0^2 &= \frac{mc^2}{16\pi e^2 \lambda^2(T)}, \\ \xi_0 &= k \xi(T) \left( \frac{H_{c_2}}{H_0} \right)^{1/2}, \\ \Gamma &= \xi_0 - C_0. \end{aligned} \quad (4.147)$$

При этих преобразованиях приложенное поле  $H_0 = 1$ . Используя выражения (4.142) для  $A$  и (4.141) для  $\psi$ , получаем свободную энергию и уравнения Гинзбурга — Ландау в виде

$$\frac{4\pi}{H_c^2} \frac{F_s(H_0) - F_s(0)}{l_y l_z} = B + C \int_0^\infty d\xi \left[ \left( \frac{dF}{d\xi} \right)^2 + (\xi + a - \Gamma)^2 F^2 - \mu^2 F^2 \left( 1 - \frac{F^2}{2} \right) + \left( \frac{\kappa}{\mu} \right)^2 \frac{da}{d\xi} \left( 2 + \frac{da}{d\xi} \right) \right], \quad (4.148)$$

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + [\mu^2 (1 - F^2) - (\xi + a - \Gamma)^2] F = 0, \quad (4.149)$$

$$\left( \frac{\kappa}{\mu} \right)^2 \frac{d^2 a}{d\xi^2} = (\xi + a - \Gamma) F^2 = - \frac{4\pi}{c} \mu j(\xi). \quad (4.150)$$

Здесь  $B$  и  $C$  — постоянные, а  $l_y$  и  $l_z$  — размеры сверхпроводника в направлениях  $y$  и  $z$ . Ясно, что  $k$  входит в этих уравнениях в параметр  $\Gamma$ , т. е. в виде члена  $[k - (2e/c)A_y(0)]$ .

К этим уравнениям нужно добавить граничные условия. При  $\xi = 0$ , т. е. на поверхности образца, эти условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} H = \frac{dA}{dX} = H_0 \\ \frac{dF}{dX} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } X = 0, \quad (4.151)$$

или, иначе говоря,

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\xi} = 0 \\ \frac{dF}{d\xi} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } \xi = 0. \quad (4.152)$$

Для определения параметра  $\Gamma$  нужно найти минимум свободной энергии относительно  $\Gamma$ . Функции  $F$  и  $a$  являются явными функциями  $\Gamma$ . Однако из (4.149) и (4.150) видно, что они фактически являются функциями  $(\xi - \Gamma)$ , так что

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} = - \frac{\partial}{\partial \xi}.$$



Условие минимума свободной энергии имеет вид

$$\int_0^{\infty} d\zeta \left[ \frac{dF}{d\zeta} \frac{d^2E}{d\zeta^2} + (\zeta + a - \Gamma)^2 F^2 + (\zeta + a - \Gamma) F^2 \frac{da}{d\zeta} + \right. \\ \left. + (\zeta + a - \Gamma)^2 F \frac{dF}{d\zeta} - \mu^2 \bar{F} \frac{dF}{d\zeta} + \mu^2 F^3 \frac{dF}{d\zeta} + \left( \frac{\kappa}{\mu} \right)^2 \frac{d^2a}{d\zeta^2} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa}{\mu} \frac{da}{d\zeta} \frac{d^2a}{d\zeta^2} \right] = 0, \quad (4.153)$$

или

$$\int_0^{\infty} d\zeta \left[ \frac{d^2F}{d\zeta^2} \frac{dF}{d\zeta} + \left( \frac{\kappa}{\mu} \right)^2 \frac{d^2a}{d\zeta^2} + \frac{\kappa}{\mu} \frac{da}{d\zeta} \frac{d^2a}{d\zeta^2} \right] = 0, \quad (4.154)$$

т. е.

$$\left| \left( \frac{dF}{d\zeta} \right)^2 + \left( \frac{\kappa}{\mu} \right)^2 \frac{da}{d\zeta} \left( 2 + \frac{da}{d\zeta} \right) \right|_0^{\infty} = 0. \quad (4.155)$$

При выводе этой формулы были использованы уравнения Гинзбурга — Ландау. При  $\zeta = 0$  вышеприведенное выражение обращается в нуль, и мы получаем дополнительное граничное условие

$$\left( \frac{dF}{d\zeta} \right)^2 + \left( \frac{\kappa}{\mu} \right)^2 \frac{da}{d\zeta} \left( 2 + \frac{da}{d\zeta} \right) = 0, \quad (4.156)$$

справедливое при  $\zeta = \infty$ .

Это уравнение можно записать в виде

$$\left( \frac{dF}{d\zeta} \right)^2 + \left( \frac{\kappa}{\mu} \right)^2 (h^2 - h_0^2) = 0, \quad (4.157)$$

где  $h_0 = 1$  — приведенное внешнее поле.

Для правильной постановки задачи необходимо дополнительное граничное условие. Ясно, что при  $\zeta = \infty$   $dF/d\zeta$  не может быть конечным, поскольку  $F$  не может неограниченно возрастать при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Тогда при  $\zeta \rightarrow \infty$  возможны два случая:

- а)  $F$  и  $H$  продолжают осциллировать,
- б)  $F$  и  $dF/d\zeta$  стремятся к нулю.

Для случая «б» получаем

$$\frac{da}{d\zeta} = 0, \quad \text{т. е.} \quad h_{\infty} = h_0,$$

или

$$\frac{da}{d\xi} = -2, \quad \text{т. е.} \quad h_\infty = -h_0.$$

Условие  $h_\infty = -h_0$  дает, по всей вероятности, максимум свободной энергии, поскольку для этого необходима огромная магнитная энергия. Однако неизвестно, дает ли условие  $h_\infty = h_0$  меньшую величину свободной энергии, чем условие «а». Возможно, что при  $H > H_{c_2}$  равенство  $H_\infty = H_0$  предпочтительнее осцилляций и что при  $H < H_{c_2}$  более устойчивы осцилляции, поскольку при  $H < H_{c_2}$  структура Абрикосова может возникнуть далеко от поверхности в глубине образца.

Нужно тем не менее отметить, что в случае пластины граничное условие имеет вид  $dF/d\xi = 0$  на обеих поверхностях пластины. Тогда естественно выбрать условие  $dF/d\xi = 0$  на бесконечности в полубесконечной среде. Согласно (4.157), это приводит к  $h_\infty = \pm h_0$ .

Во всяком случае, вычисления при  $h_\infty = h_0$  много проще, и это предположение было использовано Финком и Кессингером [19].

Если  $da/d\xi = 0$  при  $\xi = 0$  и  $\xi = \infty$ , то суммарный ток равен нулю<sup>1)</sup>, т. е.

$$\frac{4\pi}{c} \int_0^\infty j d\xi = \frac{\kappa^2}{\mu^3} \int_0^\infty \frac{d^2a}{d\xi^2} d\xi = 0. \quad (4.158)$$

Граничное условие можно записать по-другому. Если положить  $\xi = \zeta - \Gamma$ , свободная энергия принимает вид

$$B + C \int_{-\Gamma}^{\infty-\Gamma} d\xi \left[ \left( \frac{dF}{d\xi} \right)^2 + (\xi + a)^2 F^2 - \mu^2 F^2 \left( 1 - \frac{F^2}{2} \right) + \left( \frac{\kappa}{\mu} \right)^2 \frac{da}{d\xi} \left( 2 + \frac{da}{d\xi} \right) \right] \quad (4.159)$$

и условием минимума становится

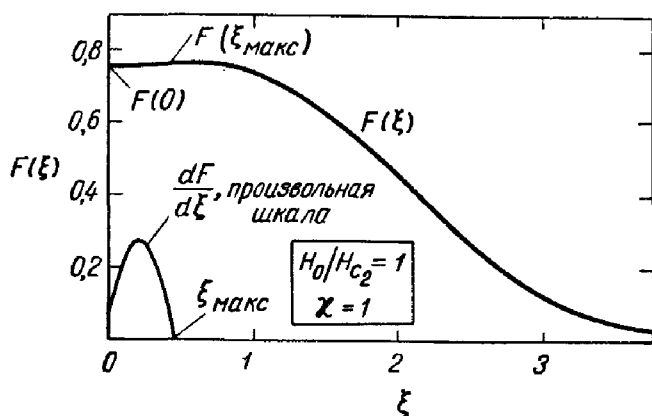
$$\Gamma^2 = \mu^2 \left( 1 - \frac{1}{2} F_0^2 \right). \quad (4.160)$$

<sup>1)</sup> Ток течет параллельно направлению  $y$ . В определенной точке  $\zeta_c$  плотность тока меняет знак, так что суммарный ток равен нулю.

Условие, связывающее параметр  $\Gamma$  (т. е. фазу параметра упорядочения и вектор-потенциал при  $\xi = 0$ ) с параметром упорядочения  $F_0$  при  $\xi = 0$ , или, что то же самое, тангенс угла наклона кривой магнитного поля (величину тока при  $\xi = 0$ ) с параметром упорядочения, имеет вид

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{d^2a}{d\xi^2} = \frac{1}{\kappa^2} F_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} F_0^2\right). \quad (4.161)$$

Финк и Кессингер вычислили  $F$  и  $a$  с помощью аналоговой вычислительной машины. Они нашли, что при

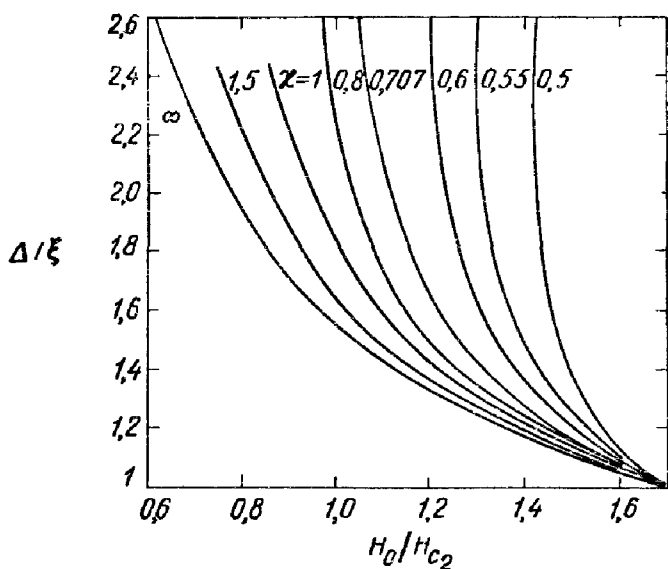


Фиг. 35. Изменение модуля параметра упорядочения вблизи поверхности для приложенного поля  $H = H_{c_2}$  и  $\kappa = 1$ , согласно работе [19].

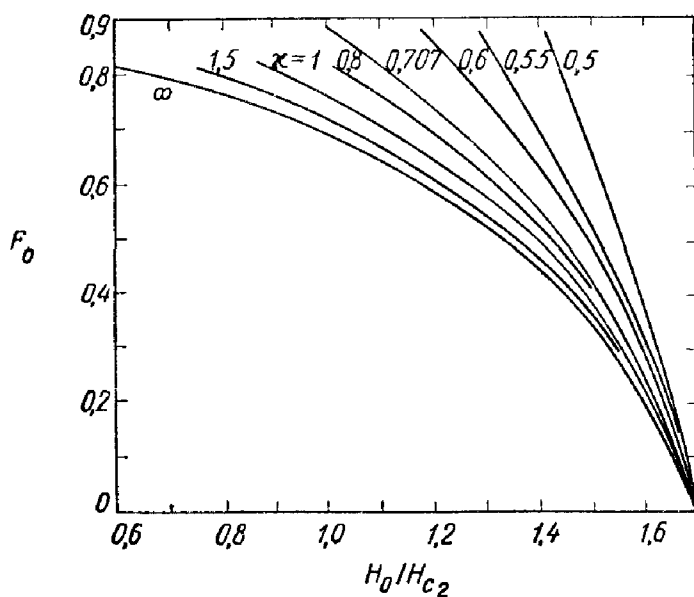
$H_0 < H_{c_2}$  параметр упорядочения  $F$  возрастает до максимума  $F_M$ , достигаемого при  $\xi = \xi_M$ , а затем падает до нуля. Магнитное поле уменьшается до минимума  $H_m$  в точке  $\xi = \xi_c$  ( $\xi_c > \xi_M$ ), где ток меняет направление. Значение  $F_0$  зависит от  $\kappa$  и  $H_0/H_{c_2}$ . График параметра упорядочения  $F$ , график толщины поверхностного слоя  $\Delta/\xi(T)$ , где

$$\Delta = \frac{1}{F_0^2} \int_0^{\infty} F^2(\xi) dx$$

и график  $F_0$  при различных значениях  $\kappa$  и  $H_0/H_{c_2}$  показаны на фиг. 35—37.



Фиг. 36. Изменение толщины слоя  $\Delta$  с полем при  $H < H_{c3}$  (см. [19]).



Фиг. 37. Изменение  $F_0$  — модуля параметра упорядочения на поверхности с полем при  $H < H_{c3}$ .

Из графиков видно, что:

- а) при уменьшении поля параметр  $F_0$  увеличивается непрерывно, так же как и толщина поверхностного слоя;
- б) точка  $H = H_{c_2}$  не является особой точкой;
- в) если в сверхпроводнике первого рода при  $0,417 < \kappa < 0,707$  подходить к значению  $H_c$  из области более высоких полей, то толщина поверхностного слоя существенно возрастает;
- г) к такому же выводу можно прийти для  $H < H_{c_1}$  в сверхпроводниках второго рода;
- д) вблизи  $H_{c_3}$  величина  $F_0$  параметра упорядочения пропорциональна  $[(H_{c_3} - H_0)/H_{c_3}]^{1/2}$ .

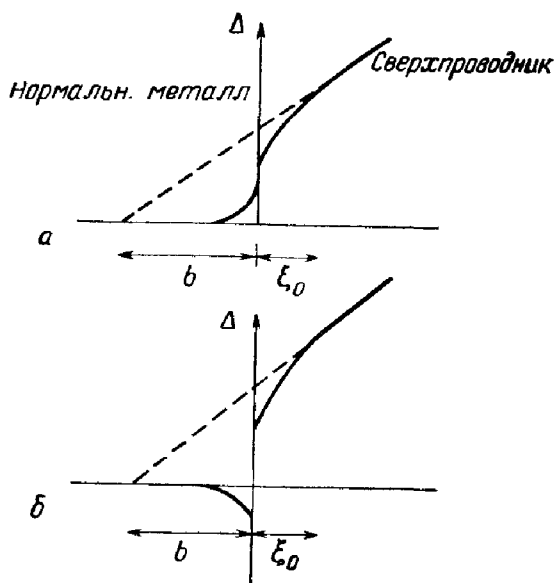
## § 5. Сверхпроводник, покрытый нормальным металлом

Если сверхпроводник покрыть слоем какого-либо проводника (например, обычным металлом), то граничное условие (4.1) непригодно. Из микроскопической теории [26] следует, что потенциал пары  $\Delta(\mathbf{r})$ , которому пропорциональна функция  $\psi$ , быстро изменяется на расстоянии  $\xi_0$  вблизи поверхности и в нормальном веществе отличен от нуля. Мы сталкиваемся здесь с двумя случаями в зависимости от того, как взаимодействуют электроны в нормальном металле — притягиваются или отталкиваются. Эти два случая схематически изображены на фиг. 38.

По схеме Гинзбурга — Ландау функция  $\psi$  изменяется в области  $\xi(T) \gg \xi_0$ . Истинную область изменения  $\Delta(\mathbf{r})$  можно заменить областью, изображенной на фиг. 39, где  $\psi$  уменьшается от поверхностного значения  $\psi_s$  до нуля на расстоянии  $b$ . Тогда граничное условие принимает вид

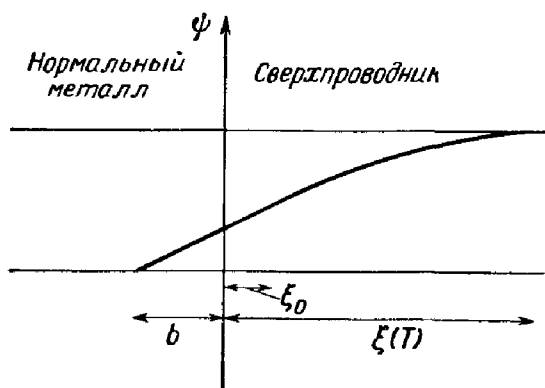
$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{b_i} f. \quad (4.162)$$

Сравнивая это выражение с условием (2.22), мы видим, что из сверхпроводника не вытекает никакого тока. Расстояние  $b$  можно рассматривать в качестве параметра, зависящего от структуры контакта и от некоторых других величин, таких, как температура, плотность состояний в сверхпроводнике и в нормальном металле. Если



Ф и г. 38. Схематическое изображение потенциала пары  $\Delta(r)$  (пропорционального параметру упорядочения).

$a$  — для сверхпроводника, покрытого нормальным металлом с межэлектронным взаимодействием, отвечающим притяжению;  $b$  — для сверхпроводника, покрытого нормальным металлом с межэлектронным взаимодействием, отвечающим отталкиванию.

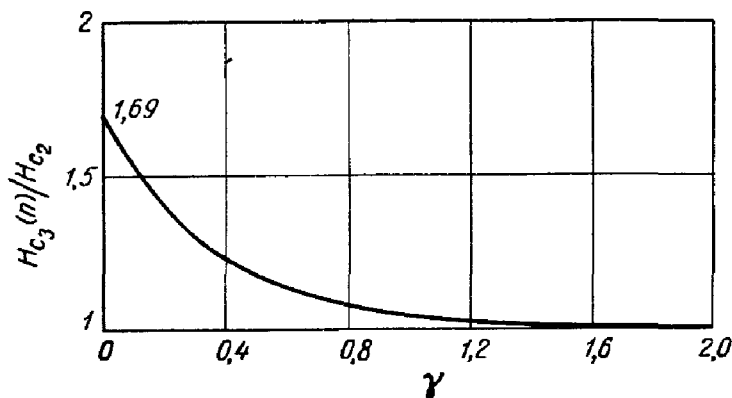


Ф и г. 39. Схематический график функции  $\psi(r)$  для сверхпроводника, покрытого нормальным металлом, в приближении Гинзбурга — Ландау.

считать, что при данной температуре расстояние  $b$  не зависит от поля, то поле образования зародышей  $H_{c_3}(n)$  для полубесконечного сверхпроводника, покрытого слоем нормального металла, можно вычислить как функцию параметра  $\gamma$ , определенного следующим образом:

$$\gamma = \frac{\xi(T)}{b} \left[ \frac{H_{c_3}(n)}{H_{c_2}} \right]^{1/2}.$$

Зависимость  $H_{c_3}(n)/H_{c_2}$  от  $\gamma$  изображена на фиг. 40. Легко видеть, что при увеличении  $\gamma$  отношение  $H_{c_3}(n)/H_{c_2} \rightarrow 1$ .



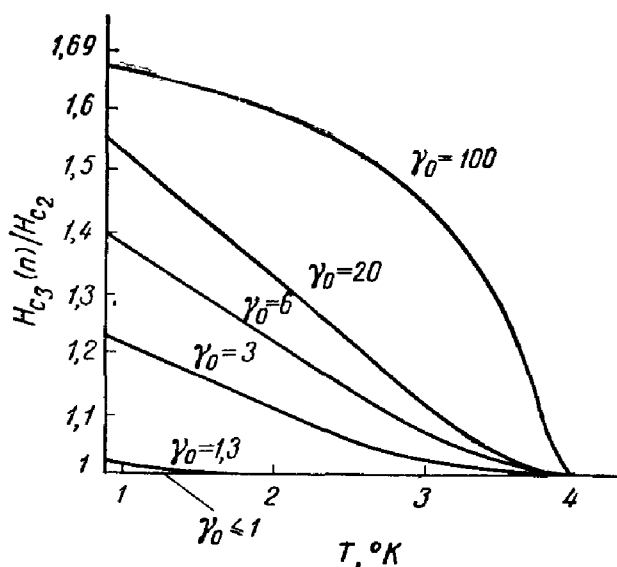
Фиг. 40. Отношение  $H_{c_3}(n)/H_{c_2}$  как функция параметра  $\gamma$ .

Когда  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $H_{c_3}(n)/H_{c_2} \rightarrow 1$ . Наличие покрытия из нормального металла уменьшает поверхностный эффект (см. текст).

В частности, если  $T \rightarrow T_0$ , то  $\xi(T) \rightarrow \infty$ . Поэтому можно ожидать, что для сверхпроводящего цилиндра, покрытого слоем нормального металла, параллельное поле образования зародышей стремится к  $H_{c_2}$ , когда  $T$  достигает  $T_0$ .

В связи с экспериментальными трудностями такое поведение  $H_{c_3}(n)$  еще не наблюдалось. При более низких температурах сравнение с фиг. 40 не было проведено, поскольку было обнаружено, что  $b$  зависит от приложенного поля, и поэтому необходимо провести более детальный анализ. Недавно Юро [21] показал, что  $b$  зависит от  $\gamma_0 = \sigma_s/\sigma_n$  — отношения проводимости сверхпроводника

в нормальном состоянии к проводимости покрывающего металла. При  $\gamma_0 \leq 1$  поверхностная сверхпроводимость исчезает и  $H_{c_3}(n) = H_{c_2}$ . При  $\gamma_0 > 1$  поверхностная сверхпроводимость все еще имеет место, но отношение  $H_{c_3}(n)/H_{c_2}$  зависит от температуры. Юро вычислил это



Фиг. 41. Теоретическая зависимость отношения  $H/H_{c_2}$  от температуры для системы  $\text{In} - \text{Bi}/\text{Zn}$  при различных значениях параметра  $\gamma_0$  [21].

Критическая температура сверхпроводника  $T_{cs} = 4^\circ \text{K}$ . При  $\gamma_0 = \sigma_s/\sigma_n < 1$  поверхностное образование зародышей прекращается при любой температуре.

отношение для сплава  $\text{In} - \text{Bi}$ , покрытого  $\text{Zn}$ , для различных значений  $\gamma_0$ . Его результаты изображены на фиг. 41. Недавние эксперименты Бюрже и др. [24] выявили невозможность образования поверхностных зародышей в системе при  $\gamma_0 < 1$ .

В случае пластины толщиной, много большей  $\xi(T)$ , покрытой нормальным металлом только с одной стороны, ясно, что нужно учитывать поле  $H_{c_3}$  на открытой поверхности, которое больше поля  $H_{c_3}(n)$ .

Более полное обсуждение различных эффектов см. в [23] (а также в [16] гл. 19).



## ЛИТЕРАТУРА

1. Saint-James D., De Gennes P. G., Phys. Lett., 7, 306 (1963).
2. Caroli C., De Gennes P. G., Matricon J., Journ. Phys. Rad., 23, 707 (1962).
3. Morse P., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, New York, 1953. (Имеется перевод: Ф. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, 1960.)
4. Joiner W. C. H., Blaugher R. D., Rev. Mod. Phys., 36, 67 (1964).
5. Druyvesteyn W. F., Van Oijen D. J., Berben T. J., Rev. Mod. Phys., 36, 58 (1964).
6. Bon Mardion G., Goodman B. B., Lacaze A., Phys. Lett., 8, 15 (1964).
7. Serin B. Contribution to Type II Superconductors Conference, Cleveland, Ohio, 1964.
8. Cardona M., Rosenblum B., Phys. Lett., 8, 308 (1964).
9. Burger J. P., Deutscher G., Guyon E., Martinet A., Phys. Rev., A137, 853 (1965).
10. Tomasch W. J., Phys. Lett., 9, 104 (1964).
11. Guyon E., Matricon J., Martinet A., Pincus P., Phys. Rev., A138, 746 (1965).
12. Tomasch W. J., Joseph A. S., Phys. Rev. Lett., 12, 148 (1964).
13. Tinkham M., Phys. Lett., 9, 217 (1964).
14. Swartz P. S., Hart H. R., Jr., Phys. Rev., A137, 818 (1965).
15. Hempstead C. F., Kim Y. B., Phys. Rev. Lett., 12, 145 (1964).
16. Parks R. D., Superconductivity, ed. M. Dekker, New York, 1968, Ch. 18.
17. Burger J. P., Guyon E., Contribution to Type II Superconductors Conference, Cleveland, Ohio, 1964.
18. Gygax S., Kropschot R. H., Olsen J. L., Phys. Lett., 3, 228 (1964).
19. Fink H. J., Kessinger R. D., Phys. Rev., A140, 1937 (1965).
20. Gygax S., Kropschot R. H., Phys. Lett., 9, 91 (1964).
21. Hurault J. P., Phys. Lett., 20, 587 (1966).
22. Rosenblum B., Cardona M., Phys. Lett., 9, 220 (1964).
23. Deutscher G., диссертация, 1966.
24. Burger J. P., Deutscher G., Guyon E., Martinet A. (в печати).
25. Seraphim D. P., Superconductors, eds. Tannenbaum, Wright, 1962.
26. De Gennes P. G., Phys. Cond. Mat., 3, 79 (1964); Rev. Mod. Phys., 36, 225 (1964).
27. Maki K., Physics, 1, 21 (1964).
28. Strongin M., Paskin A., Schweitzer D. G., Kammerer O. F., Craig P. P., Phys. Rev. Lett., 12, 442 (1964).
29. Goldstein Y., Phys. Lett., 12, 169 (1964).
30. Fabér T. E., Proc. Roy. Soc., A223, 174 (1954); A241, 531 (1957).

31. Erdelyi A. et al., Higher Transcendental Functions, Vol. II, New York, 1953. (Имеется перевод: Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, ч. 2, М., 1966.)
32. Гинзбург В. Л., ДАН СССР, **83**, 385 (1952); ЖЭТФ, **34**, 113 (1958).
33. Hart H. R., Jr., Swartz P. S., Phys. Lett., **10**, 40 (1964).
34. Saint-James D., Phys. Lett., **16**, 218 (1965).
35. Burger J. P., Deutscher G., Guyon E., Martinet A., Phys. Lett., **16**, 220 (1965).
36. Tinkham M., Contribution to Type II Superconductors Conference, Cleveland, Ohio, 1964.

## МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

### § 1. Введение

Настоящая книга не ставит своей задачей полное изложение общей микроскопической теории сверхпроводимости; это уже было сделано в нескольких книгах и статьях, некоторые из них помещены в списке цитированной литературы. В этой главе мы ограничиваемся подтверждением результатов, полученных при помощи феноменологического рассмотрения. Не излагая микроскопическую теорию в деталях, мы проведем на ее основе вывод уравнений равновесия вблизи точки сверхпроводящего перехода. Это позволит вывести уравнения Гинзбурга — Ландау (что было впервые сделано Горьковым [1]), а также получить различные параметры, введенные в предыдущих главах. Более того, в результате обсуждения будет определено различие между «чистыми» и «грязными» сверхпроводниками, очень существенное при изучении сверхпроводников второго рода. Полученные здесь «равновесные уравнения» также полезны при обсуждении справедливости схемы Гинзбурга — Ландау и при ее обобщении. Мы покажем, что в некоторых случаях можно определить обобщенные параметры Гинзбурга — Ландау и вычислить их зависимость от температуры.

В гл. 6 аналогичным образом будет исследовано влияние магнитного поля на электронные спины (парамагнитный эффект). При рассмотрении мы используем некоторые элементы теории поля без применения функций Грина. Основные результаты мы получим обычными методами.

## § 2. Основные положения микроскопической теории. Куперовские пары

В основе микроскопической теории лежит тот факт, что нормальное состояние неустойчиво при наличии притяжения между электронами [2]. Результат такой неустойчивости можно найти при рассмотрении газа свободных электронов и взаимодействия двух электронов, расположенных в точках  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Если центр масс этих электронов находится в состоянии покоя, волновая функция  $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  зависит только от  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , так что

$$\varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}, \quad (5.1)$$

где  $g(\mathbf{k})$  — амплитуда вероятности нахождения одного электрона в состоянии  $\hbar\mathbf{k}$  и другого электрона в состоянии  $-\hbar\mathbf{k}$ . При наличии взаимодействия  $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  уравнение Шредингера для двух электронов имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = (E + 2E_F) \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (5.2)$$

Энергия пары  $E$  отсчитывается от состояния, когда оба электрона находятся на уровне Ферми. Легко найти уравнение для  $g(\mathbf{k})$ :

$$\frac{\hbar^2}{m} k^2 g(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}') V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = (E + 2E_F) g(\mathbf{k}), \quad (5.3a)$$

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{\Omega} \int V(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle, \quad (5.3b)$$

$$g(\mathbf{k}) \equiv 0 \quad \text{при} \quad k < k_F; \quad (5.3b)$$

здесь  $\Omega$  — объем системы.

Уравнение (5.3b) означает, что состояния  $k < k_F$  уже заполнены (принцип Паули). Уравнения (5.3) (уравнения Бете — Гольдстона) имеют непрерывный спектр решений при  $E > 0$ , соответствующий столкновению двух электронов с импульсами  $\pm \hbar\mathbf{k}$ . Однако Купер отметил, что если взаимодействие  $V$  является притяжением, то при  $E < 0$  существуют связанные состояния независимо от величины взаимодействия.

Это легко видеть на простой модели

$$V_{kk'} = -\frac{V}{\Omega} \quad \text{при} \quad \begin{cases} E_F < \frac{\hbar^2 k^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D, \\ E_F < \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D \end{cases} \quad (5.4)$$

и  $V_{kk'} \equiv 0$  в остальных случаях. Здесь  $\omega_D$  — предельная частота. Взаимодействие  $V_{kk'}$  является притяжением ( $V > 0$ ); оно постоянно в полосе  $\hbar\omega_D$  выше уровня Ферми. Уравнение (5.3а) переходит в уравнение

$$\left(\frac{\hbar^2}{m} k^2 - E - 2E_F\right) g(\mathbf{k}) = \frac{V}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}'), \quad (5.5)$$

где суммирование по  $\mathbf{k}'$  ограничивается полосой  $\hbar\omega_D$  выше  $E_F$ . Деля каждый член уравнения (5.5) на  $[(\hbar^2/m)k^2 - E - 2E_F]$  и суммируя по  $\mathbf{k}$ , получаем

$$1 = \frac{V}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(\hbar^2/m)k^2 - E - 2E_F} \quad (5.6)$$

при

$$E_F < \frac{\hbar^2 k^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D.$$

Для каждого разрешенного значения  $k > k_F$  правая часть уравнения (5.6) имеет полюс  $E$ , причем  $2\hbar\omega_D > E > 0$ , что отвечает решению с учетом рассеяния. Однако если параметр  $V$  положителен, то существует решение и при  $E < 0$ , т. е. решение, для которого энергия пары меньше  $2E_F$ . Если бы потенциал соответствовал отталкиванию (т. е.  $V < 0$ ), то такое состояние существовало бы и при  $E > 2\hbar\omega_D$ .

Для исследования связанного состояния можно ввести новое определение энергии

$$\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 - E_F \quad (5.7)$$

и новое определение плотности состояний (на единицу энергии и на единицу объема)

$$N(\xi_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k^2 dk}{d\xi_{\mathbf{k}}}. \quad (5.8)$$

Суммирование можно заменить интегрированием; тогда

$$1 = V \int_0^{\hbar\omega_D} N(\xi) \frac{d\xi}{2\xi - E}. \quad (5.9)$$

Если  $\hbar\omega_D \ll E_F$ , то  $N(\xi)$  можно заменить ее значением  $N(0)$  на уровне Ферми; тогда

$$1 = \frac{1}{2} N(0) V \ln \frac{E - 2\hbar\omega_D}{E}. \quad (5.10)$$

Если  $N(0) V \ll 1$  (слабое взаимодействие), то

$$E = -2\hbar\omega_D e^{-2/N(0)V}. \quad (5.11)$$

Таким образом, мы видим, что существует разрешенное стационарное состояние с  $E < 0$ . Если для газа свободных электронов ввести взаимодействие  $V$ , то электроны будут образовывать пары с освобождением энергии. Таким образом, нормальное состояние неустойчиво. В этой связи можно сделать несколько замечаний:

1) Неустойчивость имеет место для очень слабого взаимодействия  $V$  при условии, что  $V$  соответствует притяжению.

2) Приведенное выше выражение для  $E$  не может быть разложено в ряд по степеням  $V$ , когда  $V$  стремится к нулю. Это объясняет, почему микроскопическую теорию сверхпроводимости нельзя получить из стандартной теории возмущений.

3) В предшествующих вычислениях принцип Паули учитывался между электроном ( $\mathbf{r}_1$ ) и электронами на поверхности Ферми, а также между электроном ( $\mathbf{r}_2$ ) и электронами на поверхности Ферми. Волновая функция пары должна быть симметрична по отношению к перестановке векторов  $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$ . При упрощенном потенциале  $V$  функция  $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  симметрична [см. (5.1)], а спиновая волновая функция должна быть антисимметричной.

Если бы взаимодействие  $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  зависело от угла между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , можно было бы получить два результата:

- а) существует несколько связанных состояний;
- б) пространственная часть волновой функции была бы анизотропной, а спиновая часть более сложной.

Фактически в сверхпроводниках основная часть потенциала  $V_{kk'}$  зависит только от модулей  $k$  и  $k'$ , так что угловой зависимостью можно пренебречь.

В предшествующих рассуждениях ничего не было сказано о происхождении притяжения между электронами. Ниже будет кратко рассмотрено состояние этого вопроса в настоящее время и даны ссылки на специальные работы, где эта проблема рассмотрена более подробно.

В электронном газе взаимодействие между электронами является кулоновским, т. е. имеет место отталкивание. Чтобы возникло притяжение, электронный газ должен быть связан с другой системой частиц. Известно, что для непереходных металлов механизм, ответственный за сверхпроводимость, обуславливается связью электронов с ионной решеткой [3]. Взаимодействие с ионами рассматривается как взаимодействие электронов посредством обмена фононами. В такой модели можно вычислить величину члена взаимодействия. Было найдено, что  $N(0)V$  должно быть меньше  $0,5$ <sup>1)</sup>. Более того, такой механизм объясняет изотопический эффект (температура сверхпроводящего перехода пропорциональна  $M^{-\alpha}$ , где  $M$  — масса изотопа и  $\alpha \sim 1/2$ )<sup>2)</sup>.

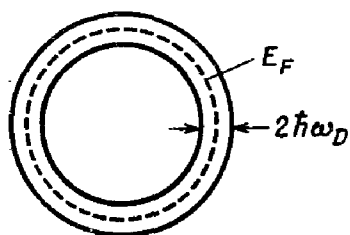
<sup>1)</sup> В модели Фрелиха может быть получен следующий результат. Если  $N(0)V > 0,5$ , то длинноволновая часть спектра фононов становится мнимой. При этом амплитуда колебаний решетки растет со временем как  $e^{|\omega|t}$ , т. е. решетка разрушается. Отсюда делается вывод, что для всех реальных решеток  $N(0)V < 0,5$ , и это накладывает естественное ограничение на возможность получения сверхпроводников с высокой критической температурой.

В этой связи нужно отметить, что модель Фрелиха сама по себе не следует непосредственно из картины взаимодействующих электронов и ионов. Ввиду этого отмеченный критерий не имеет строгого обоснования. Правда, во всех известных случаях он оказывается выполненным.

Однако даже в том случае, если этот критерий в дальнейшем подтвердится, следует иметь в виду, что он относится лишь к фоновому механизму притяжения электронов. Поэтому не исключено существование другого механизма такого притяжения, свободного от этого ограничения. Поэтому идея о возможности высокотемпературной сверхпроводимости не находится в принципиальном противоречии с современными представлениями. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Если взаимодействие электронов ограничивается фононным притяжением, то  $\alpha = 1/2$ . То, что на опыте довольно часто встре-

С помощью такой модели Бардин, Купер и Шриффер [4] смогли развить первую микроскопическую теорию сверхпроводимости. Они решили задачу о поведении электронного газа при наличии притяжения



$$\begin{aligned} V &= V \quad \text{при } |\xi_k|, |\xi_{k'}| < \hbar\omega_D, \\ V &= 0 \quad \text{в остальных случаях,} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Фиг. 42. Схематическое изображение полосы шириной  $2\hbar\omega_D$  вокруг уровня Ферми, в которой электроны притягиваются (модель БКШ).

Ширина полосы здесь сильно увеличена. В действительности  $E_F \gg 2\hbar\omega_D$ .

где  $\xi_k$  и  $\xi_{k'}$  — энергии двух электронов, отсчитываемые от уровня Ферми, а  $\hbar\omega_D$  — дебаевская энергия фононов. В такой модели притяжение имеет место для электронов, расположенных внутри полосы  $\pm\hbar\omega_D$  вокруг уровня Ферми  $E_F$ . Такое ограничение полосой  $\pm\hbar\omega_D$  называется «обрезанием» БКШ.

Для ионов переходных металлов картина не столь очевидна, и относительно механизма, ответственного за сверхпроводимость, не существует общего согласия.

Для нас истинная форма взаимодействия несущественна. Достаточно принять, что притяжение имеет место внутри полосы шириной  $2\hbar\omega_D$  (фиг. 42).

### § 3. Формулировка микроскопической теории. Самосогласованный метод <sup>1)</sup>

#### 1. Самосогласованный гамильтониан

Гамильтониан системы электронов при наличии произвольного потенциала  $U_0(\mathbf{r})$  (например, периодического

чаются сверхпроводники с  $\alpha < 1/2$ , можно объяснить примесью кулоновского отталкивания или какого-либо иного механизма взаимодействия между электронами. Таким взаимодействием может быть, например, обмен квантами колебаний электронного спина (магнонами), если металл является антиферромагнитным. Возможно, именно это имеет место в рутении, где  $T_0$  практически не зависит от массы иона. — Прим. ред.

<sup>1)</sup> Подробнее об этом методе см. [5].



потенциала решетки), магнитного поля  $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$  и двухчастичного взаимодействия может быть записан как

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 - \mu N, \quad (5.13)$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left\{ \frac{[\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}]^2}{2m} + U_0(\mathbf{r}) \right\} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (5.14)$$

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Psi_{\beta}(\mathbf{r}') \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (5.15)$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{\gamma}{2} \int d\mathbf{r} [\Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) - \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r})] h(\mathbf{r}). \quad (5.16)$$

В этих выражениях  $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r})$  — оператор вторичного квантования, который уничтожает электрон со спином  $\alpha$ , расположенный в точке  $\mathbf{r}$ . Операторы  $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r})$  подчиняются следующим соотношениям антикоммутации:

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}(\mathbf{r}') + \Psi_{\beta}(\mathbf{r}') \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.17a)$$

$$\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') + \Psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.17б)$$

$$\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}(\mathbf{r}') + \Psi_{\beta}(\mathbf{r}') \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) = \delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.17в)$$

В таких обозначениях оператор, соответствующий нескольким частицам, имеет вид

$$N = \sum_{\alpha} \int d\mathbf{r} \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \quad (5.18)$$

В гамильтониане (5.13)  $\mu$  — химический потенциал для большого канонического ансамбля, а  $\mathcal{H}_0$  представляет кинетическую энергию электронов в присутствии поля  $\mathbf{h}$  и потенциала  $U_0(\mathbf{r})$ . Для упрощения  $U_0(\mathbf{r})$  считается не зависящим от спинов.

Член  $\mathcal{H}_1$  — часть гамильтониана, соответствующая двухчастичному взаимодействию между электронами. Член  $\mathcal{H}_2$  соответствует поляризации электронных спинов, обусловленной полем  $\mathbf{h}$  (парамагнитный эффект),  $\gamma = (e\hbar/2mc)g$ , где  $g$  —  $g$ -фактор электрона ( $g = 2$ ) и  $e\hbar/2mc$  — магнетон Бора  $\mu_B$ . Метод самосогласованного поля заключается в замене взаимодействия  $V\Psi^{\dagger}\Psi^{\dagger}\Psi\Psi$

на усредненный потенциал, действующий на одну частицу (т. е. с двумя  $\Psi$ -операторами). Это определяет эффективный гамильтониан

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{эфф}} = & \sum_{\alpha} \int d\mathbf{r} \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left\{ \frac{[p - (e/c)\mathbf{A}]^2}{2m} + U_0(\mathbf{r}) \right\} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) - \mu N + \\ & + \sum_{\alpha\beta} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left[ U(\mathbf{r}\alpha | \mathbf{r}'\beta) \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}(\mathbf{r}') + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} W(\mathbf{r}\alpha | \mathbf{r}'\beta) \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') + \frac{1}{2} W^*(\mathbf{r}\alpha | \mathbf{r}'\beta) \Psi_{\beta}(\mathbf{r}') \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Два последних члена необычны, но они должны быть включены для учета параметра упорядочения самосогласованным образом. Ниже будет показано, что параметр упорядочения в конденсированной фазе пропорционален среднему значению  $\langle \Psi^{\dagger} \Psi^{\dagger} \rangle$ . В члене  $U(\mathbf{r}\alpha | \mathbf{r}'\beta)$  можно выделить «локальную» и «нелокальную» части, т. е.

$$U(\mathbf{r}\alpha | \mathbf{r}'\beta) = U_1(\mathbf{r}) \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + U_2(\mathbf{r}\alpha | \mathbf{r}'\beta).$$

Здесь  $U_1(\mathbf{r})$  — так называемый потенциал Хартри, а  $U_2$  — обменный потенциал. Можно ожидать, что эти члены не очень различаются для сверхпроводящего и нормального состояний, поскольку процесс конденсации затрагивает лишь немногие электроны в полосе шириной  $\hbar\omega_D$  вокруг уровня Ферми. Их можно включить в  $\mathcal{H}_0$ ; тогда

$$\mathcal{H}_0 = \int d\mathbf{r} \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left\{ \frac{[p - (e\mathbf{A}/c)]^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right\} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}). \quad (5.14a)$$

Здесь  $U(\mathbf{r})$  — потенциал Хартри — Фока для одноэлектронного гамильтониана. Опишем коротко способ вычисления  $W$ .

Диагоналируем  $\mathcal{H}_{\text{эфф}}$  с помощью преобразования Боголюбова, т. е. полагая

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_n [u_{n\alpha}(\mathbf{r}) \mathbf{v}_{n,\alpha} + v_{n\alpha}(\mathbf{r}) \mathbf{v}_{n,\alpha}^{\dagger}]. \quad (5.20)$$

Здесь  $\mathbf{v}_{n,\alpha}$  — фермионные операторы. Теперь  $\mathcal{H}_{\text{эфф}}$  принимает вид

$$\mathcal{H}_{\text{эфф}} = E_g + \sum_{n,\alpha} \epsilon_n \mathbf{v}_{n,\alpha}^{\dagger} \mathbf{v}_{n,\alpha}, \quad (5.21)$$

где  $E_g$  — энергия основного состояния и  $\epsilon_n$  — энергия  $n$ -го возбуждения. Фактически  $E_g$  и  $\epsilon_n$  являются функциями  $\mathcal{W}$ . Чтобы определить  $\mathcal{W}$ , воспользуемся тем, что

$$\langle \tilde{\varphi} | \mathcal{H} | \tilde{\varphi} \rangle \quad (5.22a)$$

минимально, где  $\tilde{\varphi}$  — состояние без возбуждения, т. е.

$$\nabla_{n,\alpha} \tilde{\varphi} = 0, \quad (5.22b)$$

и  $\mathcal{H}$  — гамильтониан (5.13).

Находим далее

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}\alpha | \mathbf{r}'\beta) = V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \langle \tilde{\varphi} | \Psi_\beta(\mathbf{r}') \Psi_\alpha(\mathbf{r}) | \tilde{\varphi} \rangle, \quad (5.23a)$$

$$\mathcal{W}^*(\mathbf{r}\alpha | \mathbf{r}'\beta) = -\mathcal{W}(\mathbf{r}'\beta | \mathbf{r}\alpha). \quad (5.23b)$$

Матричный элемент  $\langle \tilde{\varphi} | \Psi_\beta(\mathbf{r}') \Psi_\alpha(\mathbf{r}) | \tilde{\varphi} \rangle$  отличен от нуля, если рассматривается открытая система, так что волновая функция основного состояния является линейной комбинацией функций, соответствующих разному числу частиц.

Далее, как обычно, химический потенциал  $\mu$  равен энергии Ферми  $E_F$ .

Эффективный гамильтониан принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{эфф}} = \mathcal{H}_0 - E_F N + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \langle \Psi_\beta(\mathbf{r}') \Psi_\alpha(\mathbf{r}) \rangle \times \\ \times \Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}') + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \\ \times \langle \Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}') \rangle \Psi_\beta(\mathbf{r}') \Psi_\alpha(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Приведенные выше вычисления справедливы при  $T = 0$ . Если  $T \neq 0$ , матричный элемент  $\langle \Psi \Psi \rangle$  нужно рассматривать как среднее значение при тепловом равновесии (термодинамическое среднее), т. е.

$$\langle \Psi \Psi \rangle = \frac{\text{Sp}(e^{-\beta \mathcal{H}_{\text{эфф}} \Psi \Psi})}{\text{Sp}(e^{-\beta \mathcal{H}_{\text{эфф}}})},$$

где  $\beta = 1/k_B T$  и  $k_B$  — постоянная Больцмана.

Как обычно в самосогласованном методе, эффективный гамильтониан зависит от температуры через неизвестные средние величины  $\langle \Psi \Psi \rangle$  и каждый гамильтониан

$\mathcal{H}_{\text{эфф}}(T)$  может быть использован только при температуре  $T$ .

Чтобы вывести уравнения Гинзбурга — Ландау, достаточно предположить, что взаимодействие  $V$  является локальным и что  $W(\mathbf{r}\alpha|\mathbf{r}'\beta)$  связывает только состояния с антипараллельными спинами, т. е.

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -V\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

$$W(\mathbf{r}\uparrow|\mathbf{r}'\downarrow) = -V \langle \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}') \rangle = \Delta(\mathbf{r}). \quad (5.25)$$

Таким образом вводится новая величина  $\Delta(\mathbf{r})$ , называемая потенциалом пары. Ниже будет показано, что  $\Delta(\mathbf{r})$  пропорционален параметру упорядочения Гинзбурга — Ландау  $\psi(\mathbf{r})$ . Теперь эффективный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{эфф}} = & \int d\mathbf{r} \Psi_{\alpha}^{\dagger} \left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 + U(\mathbf{r}) - E_F \right] \Psi_{\alpha} + \\ & + \gamma \int d\mathbf{r} h(\mathbf{r}) \left[ \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) - \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right] + \\ & + \int d\mathbf{r} \left[ \Delta^*(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \right] + \\ & + \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} |\Delta(\mathbf{r})|^2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Последний член добавляется в самосогласованном методе, потому что два предыдущих члена вводят взаимодействия дважды.

Теперь найдем минимум свободной энергии  $F_s$ , варьируя  $\Delta(\mathbf{r})$ . Имеем

$$F_s = -k_B T \ln Z, \quad (5.27a)$$

где

$$Z = \text{Sp} e^{-\beta \mathcal{H}_{\text{эфф}}} \quad (5.27b)$$

и

$$\frac{\delta F}{\delta \Delta^*} = \int \left[ \frac{\text{Sp} e^{-\beta \mathcal{H}_{\text{эфф}}} \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r})}{Z} + \frac{\Delta(\mathbf{r})}{V} \right] d\mathbf{r}. \quad (5.28)$$

Эта вариация равна нулю, если  $\Delta(\mathbf{r})$  удовлетворяет самосогласованному уравнению

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}) &= V(\mathbf{r}) \langle \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle = \\ &= \frac{\text{Sp} e^{-\beta \mathcal{H}_{\text{эфф}}} \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) V(\mathbf{r})}{\text{Sp} e^{-\beta \mathcal{H}_{\text{эфф}}}}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Фактически вычисление свободной энергии — задача большой сложности. Она сильно упрощается в отсутствие магнитного поля; в этом случае приходим к теории БКШ. Остановимся на этом кратко с целью вычисления термодинамического критического поля с помощью соотношения, приведенного в гл. 1,

$$\frac{H_c^2(T)}{8\pi} = F_n - F_s.$$

## 2. Уравнение БКШ и определение термодинамического критического поля

Эффективный гамильтониан в отсутствие приложенного поля равен

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{эфф}} = & \int d\mathbf{r} \Psi_{\alpha}^{\dagger} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - E_F \right) \Psi_{\alpha} + \int d\mathbf{r} [\Delta^*(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) + \\ & + \Delta(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r})] + \int \frac{|\Delta(\mathbf{r})|^2}{V} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Здесь  $\Psi_{\alpha}$  можно разложить в ряд следующим образом:

$$\Psi_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \alpha},$$

где  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \alpha}$  — оператор уничтожения электрона со спином  $\alpha$  и импульсом  $\hbar\mathbf{k}$ , а  $\Omega$  — объем системы. Эффективный гамильтониан теперь имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{эфф}} = & \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \mathbf{a}_{\mathbf{k}\uparrow} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \mathbf{a}_{\mathbf{k}\downarrow}) + \\ & + \sum_{\mathbf{k}} \Delta (\mathbf{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \mathbf{a}_{\mathbf{k}\uparrow} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \mathbf{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger}) + \frac{\Delta^2}{V}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

При выводе этого выражения взаимодействие  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$  считалось таким, что

$$\begin{aligned} V = -V & \quad \text{при} \quad -\hbar\omega_D < \xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{k}'} < \hbar\omega_D, \\ V = 0 & \quad \text{в остальных случаях} \end{aligned} \quad (5.32)$$

и что

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -V \sum_{|\xi_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_D} \langle a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle = \Delta$$

при  $-\hbar\omega_D < \xi_{\mathbf{k}} < \hbar\omega_D$ ,  $|\xi_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_D$ ,

$\Delta_{\mathbf{k}} = 0$  в остальных случаях.

Здесь  $\xi_{\mathbf{k}}$  — энергии электронов в состоянии  $\mathbf{k}$ , отсчитанные от уровня Ферми. Гамильтониан легко диагонализировать с помощью преобразования

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\downarrow} - v_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger}, \\ \gamma_{-\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}\uparrow} + v_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Это приводит к

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad (5.35a)$$

$$\mathcal{H}_{\text{эфф}} = E_g + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} (\gamma_{\mathbf{k}}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k}} + \gamma_{-\mathbf{k}}^{\dagger} \gamma_{-\mathbf{k}}), \quad (5.35b)$$

$$E_{\mathbf{k}} = (\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)^{1/2}. \quad (5.35b)$$

Операторы  $\gamma_{\mathbf{k}}$  подчиняются правилам коммутации для фермионов и статистике Ферми. Очевидно, что спектр возбуждений, определяемый уравнением (5.33в), содержит энергетическую щель  $\Delta$ .

Энергетическая щель  $\Delta$  должна удовлетворять самоогласованному уравнению, и это легко сделать, вычисляя термодинамическое среднее от  $a_{-\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{k}\downarrow}$  в присутствии новых фермионов. Это дает

$$\Delta = V \Delta \sum_{\mathbf{k}} \frac{1 - 2f(E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{k}}}, \quad (5.36)$$

где  $f(E_{\mathbf{k}})$  — функция Ферми. Суммирование по  $\mathbf{k}$  ограничено полосой  $-\hbar\omega_D < \xi_{\mathbf{k}} < \hbar\omega_D$ .

Очевидно, что уравнение (5.36) всегда имеет решение  $\Delta = 0$ , соответствующее нормальному состоянию. Существуют также решения со значением  $\Delta$ , отличным от нуля.

Заменяя, как обычно, суммирование по  $k$  на интегрирование, получаем

$$1 = N(0) V \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\text{th} [(\beta/2) (\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}]}{2 (\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} d\xi, \quad (5.37)$$

где  $N(0)$  — плотность состояний на единицу энергии и на единицу объема на поверхности Ферми<sup>1)</sup>. Это хорошо известное интегральное уравнение БКШ, дающее зависимость  $\Delta$  от температуры. Температура сверхпроводящего перехода  $T_0$  получается из (5.37) при  $\Delta = 0$ , т. е.

$$\frac{1}{N(0) V} = \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\text{th} \xi/2k_B T_0}{2\xi} d\xi. \quad (5.38)$$

Интегрирование по частям дает

$$\frac{1}{N(0) V} = \ln \frac{\hbar\omega_D}{k_B T_0} \text{th} \frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_0} - \int_0^{\hbar\omega_D/k_B T_0} dx \ln x \frac{d}{dx} \text{th} \frac{x}{2}. \quad (5.39)$$

Поскольку  $k_B T_0 \ll \hbar\omega_D$ ,  $\text{th} (\hbar\omega_D/2k_B T_0) = 1$ , и верхний предел интеграла можно заменить на  $\infty$ . Он равен  $-\ln(2\gamma/\pi)$ , где  $\gamma = e^C$  и  $C$  — постоянная Эйлера ( $C = 0,55$ ). Температуру сверхпроводящего перехода получаем из уравнения

$$\frac{1}{N(0) V} = \ln 1,14 \frac{\hbar\omega_D}{k_B T_0}. \quad (5.40)$$

При  $T = 0$  величина щели  $\Delta_0$  равна

$$\Delta_0 = \frac{\pi}{\gamma} k_B T_0 \approx 1,74 k_B T_0. \quad (5.41)$$

Зависимость  $\Delta$  от температуры очень хорошо аппроксимируется выражением

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta_0} = \text{th} \left[ \frac{T_0}{T} \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \right], \quad (5.42)$$

<sup>1)</sup> В этом уравнении предполагается существование сферической полосы. Поскольку  $\hbar\omega_D$  очень мало по сравнению с  $E_F$ ,  $N(\xi)$  можно считать постоянной и равной плотности состояний на поверхности Ферми.

за исключением области вблизи  $T_0$ . Можно видеть, что вблизи  $T_0$

$$\Delta(T) = 3,1k_B T_0 \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)^{1/2}. \quad (5.43)$$

Изменение  $\Delta$  с температурой изображено на фиг. 43. Теперь легко получить выражение для свободной энергии:

$$F_s(T) = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln \text{Sp} e^{-\beta \mathcal{H}_{\text{эфф}}}. \quad (5.44)$$

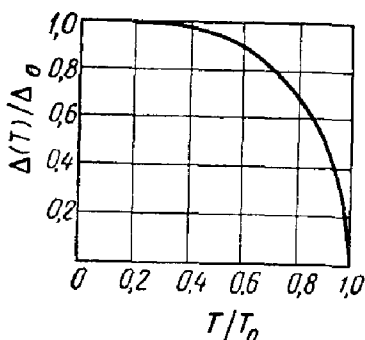
В это выражение входят два члена:

$$-k_B T \text{Sp} e^{-\beta E_g}$$

и

$$-k_B T \text{Sp} \exp \left[ -\beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} (\gamma_{\mathbf{k}}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k}} + \gamma_{-\mathbf{k}}^{\dagger} \gamma_{-\mathbf{k}}) \right]. \quad (5.45)$$

Фиг. 43. Зависимость величины щели  $\Delta$  от температуры, согласно теории БКШ.



Второй член — свободная энергия совокупности независимых фермионов (квазичастиц); он равен

$$2k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln [1 - f(E_{\mathbf{k}})]. \quad (5.46)$$

Используя значение  $E_g$ , полученное с помощью преобразования Боголюбова, имеем

$$F_s(T) = 2k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln [1 - f(E_{\mathbf{k}})] + \sum_{\mathbf{k}} \left[ \xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} - \frac{\Delta^2}{2E_{\mathbf{k}}} - \frac{\Delta^2 f(E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{k}}} \right]. \quad (5.47)$$

Чтобы получить термодинамическое поле, необходимо из  $F_n(T)$  вычесть  $F_s(T)$ . Последнюю величину получаем из выражения (5.47) при  $\Delta = 0$ . Для  $T = 0$  имеем

$$\frac{H_c^2(0)}{8\pi} = \frac{N(0) \Delta_0^2}{2}, \quad (5.48)$$

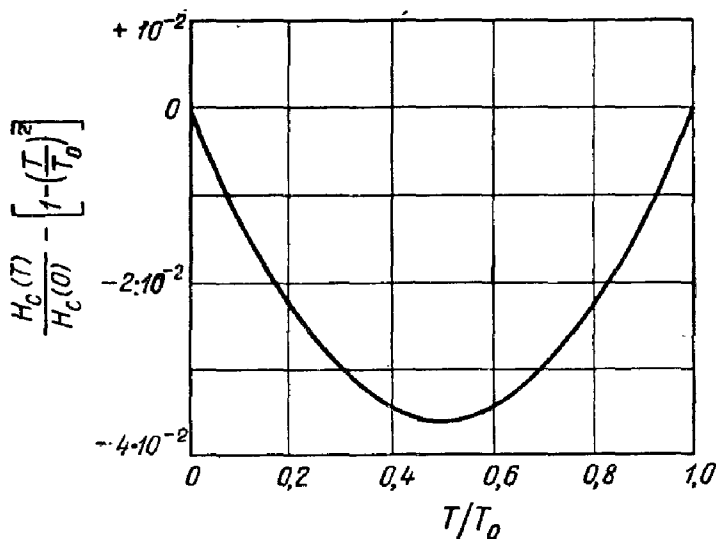
где  $\Delta_0$  — величина щели при  $T = 0$ . Вблизи  $T_0$ , где  $\Delta$



мала,  $F_s(T)$  можно разложить в ряд по степеням  $\Delta$  и

$$\frac{H_c(T)}{H_c(0)} = \gamma \left[ \frac{8}{7\zeta(3)} \right]^{1/2} \frac{T_0 - T}{T_0} = 1,74 \left( 1 - \frac{T}{T_0} \right), \quad (5.49)$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера, а  $\zeta(3)$  — дзета-функция Римана. При  $T = T_0$  поле  $H_c(T) = 0$ , причем производная



Фиг. 44. Зависимость  $H_c(T)/H_c(0) - [1 - (T/T_0)]^2$  от температуры в теории БКШ, согласно [6].

конечна. Отношение  $H_c(T)/H_c(0)$  слегка отличается от  $1 - (T/T_0)^2$  — эмпирического соотношения, полученного из ранних экспериментов. Мюльшлегель [6] вычислил функцию

$$D\left(\frac{T}{T_0}\right) = \frac{H_c(T)}{H_c(0)} - \left(1 - \frac{T}{T_0}\right)^2. \quad (5.50)$$

Его результаты приведены на фиг. 44. Таким образом, можно вычислить термодинамическое критическое поле. Этими результатами мы воспользуемся ниже.

#### § 4. Вывод уравнений Гинзбурга — Ландау. Различие между чистыми и грязными сверхпроводниками

Для упрощения записи удобно ввести следующие обозначения:

$$T_{\uparrow}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 + U(\mathbf{r}) - E_F + \gamma h(\mathbf{r}), \quad (5.51a)$$

$$T_{\downarrow}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 + U(\mathbf{r}) - E_F - \gamma h(\mathbf{r}), \quad (5.51b)$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}), \quad (5.52a)$$

$$\mathcal{A}^{\dagger}(\mathbf{r}) = \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}). \quad (5.52b)$$

Тогда эффективный гамильтониан можно записать в виде

$$\mathcal{H}_{\text{эфф}} = H_0 + H_1 + \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} |\Delta|^2, \quad (5.53)$$

где

$$H_0 = \int d\mathbf{r} \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) T_{\uparrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r} \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) T_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}), \quad (5.54)$$

$$H_1 = \int d\mathbf{r} [\Delta(\mathbf{r}) \mathcal{A} + \Delta^*(\mathbf{r}) \mathcal{A}^{\dagger}]. \quad (5.55)$$

В схеме Гинзбурга — Ландау  $\psi(\mathbf{r})$  [т. е.  $\Delta(\mathbf{r})$ ] мала, и  $H_1$  можно рассматривать как возмущение гамильтониана  $H_0$ , который соответствует нормальному электрону в поле  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ . Разложение в ряд теории возмущений для (5.29) запишем как

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) \langle \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle &= \text{Sp} e^{-\beta H_0} \left[ 1 - \int_0^{\beta} H_1(\beta_1) d\beta_1 + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\beta} d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 H_1(\beta_1) H_1(\beta_2) + \dots \right] V(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \times \\ &\times \left\{ \text{Sp} e^{-\beta H_0} \left[ 1 - \int_0^{\beta} H_1(\beta_1) d\beta_1 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_0^{\beta} d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 H_1(\beta_1) H_1(\beta_2) + \dots \right] \right\}^{-1}, \quad (5.56) \end{aligned}$$

где

$$H_1(\beta_1) = e^{\beta_1 H_0} H_1 e^{-\beta_1 H_0}.$$

Ясно, что разложение (5.56) можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\Delta(\mathbf{r}) &= V(\mathbf{r}) \langle \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle = \\ &= \frac{\left\langle \left[ 1 - \int_0^{\beta} H_1(\beta_1) d\beta_1 + \int_0^{\beta} d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 H_1(\beta_1) H_1(\beta_2) + \dots \right] V(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right\rangle_0}{\left\langle 1 - \int_0^{\beta} H_1(\beta_1) d\beta_1 + \int_0^{\beta} d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 H_1(\beta_1) H_1(\beta_2) + \dots \right\rangle_0}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

где  $\langle \rangle_0$  обозначает термодинамическое усреднение в *нормальном состоянии* (с учетом действия поля на спины).

Первое уравнение Гинзбурга — Ландау может быть получено непосредственно из разложения в ряд правой части выражения (5.57) по степеням  $\Delta$ , в результате чего имеем

$$\begin{aligned} -\Delta(\mathbf{r}) &= \int K_0(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \Delta(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int K_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) \Delta(\mathbf{s}_1) \Delta^*(\mathbf{s}_2) \times \\ &\quad \times \Delta(\mathbf{s}_3) d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 d\mathbf{s}_3 + \dots \end{aligned} \quad (5.58)$$

### 1. Нахождение члена, линейного по $\Delta$

Чтобы вычислить ядро  $K_0(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ , сделаем следующие предположения:

1) Как и в оригинальном уравнении Гинзбурга — Ландау, пренебрежем парамагнитным эффектом. Это значит, что  $\gamma$  равно нулю.

2) Потенциал взаимодействия  $V$  будем считать постоянным в полосе  $\pm \hbar\omega_D$  вокруг поверхности Ферми (предположение БКШ) для электронов с противоположными спинами и импульсами. За пределами полосы  $V = 0$ . Тогда линейный член имеет вид

$$\Delta(\mathbf{r}) = V \int d\mathbf{s} \Delta(\mathbf{s}) \int_0^{\beta} d\beta_1 \langle \mathcal{A}(\mathbf{s}, \beta_1) \mathcal{A}^{\dagger}(\mathbf{r}, 0) \rangle_0. \quad (5.59)$$

Используем преобразование Фурье

$$\Delta(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \Delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (5.60)$$

Выражение (5.59) принимает вид

$$\Delta(\mathbf{q}) = V \int \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{s}} \Delta(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \int_0^\beta d\beta_1 e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{s})} \langle \mathcal{A}(\mathbf{s}, \beta_1) \mathcal{A}^\dagger(\mathbf{r}, 0) \rangle_0 d\mathbf{r}. \quad (5.61)$$

Ясно, что для бесконечного образца из чистого металла в нормальном состоянии среднее значение  $\langle \mathcal{A}(\mathbf{s}, \beta_1) \mathcal{A}^\dagger(\mathbf{r}, 0) \rangle_0$  в силу трансляционной инвариантности зависит только от  $(\mathbf{r} - \mathbf{s})$ .

В случае сплава трансляционная инвариантность отсутствует. Чтобы восстановить ее, нужно провести усреднение по расположению примесей. Однако правая часть выражения (5.61) будет содержать член

$$\overline{\Delta(\mathbf{s}) \langle \mathcal{A}(\mathbf{s}, \beta_1) \mathcal{A}^\dagger(\mathbf{r}, 0) \rangle_0}, \quad (5.62)$$

где черта обозначает усреднение по расположению примесей. Дальнейшее упрощение заключается в замене (5.62) на

$$\overline{\Delta(\mathbf{s}) \langle \mathcal{A}(\mathbf{s}, \beta_1) \mathcal{A}^\dagger(\mathbf{r}, 0) \rangle_0}, \quad (5.63)$$

так что среднее значение  $\langle \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger \rangle_0$  зависит только от  $(\mathbf{r} - \mathbf{s})$ . Приближение (5.63) разумно, когда потенциал примесей слаб [7]. Это оправдано по существу, когда компоненты сплава химически подобны.

Следовательно, необходимо найти величину

$$K(\mathbf{q}) = V \int e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{s})} d(\mathbf{r} - \mathbf{s}) \int_0^\beta d\beta_1 \overline{\langle \mathcal{A}(\mathbf{s}, \beta_1) \mathcal{A}^\dagger(\mathbf{r}, 0) \rangle_0}. \quad (5.64)$$

Оператор поля  $\Psi_\alpha(\mathbf{r})$  сначала раскладывается в ряд следующим образом:

$$\Psi_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_n \omega_{n\alpha}(\mathbf{r}) a_{n\alpha}, \quad (5.65)$$

где  $\mathbf{a}_{n\alpha}$  — оператор уничтожения электрона со спином  $\alpha$  в состоянии  $n$ . Функция  $w_{n\alpha}(\mathbf{r})$  — собственная функция невозмущенного гамильтониана  $H_0$ , так что

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 + U(\mathbf{r}) \right] w_{n\alpha}(\mathbf{r}) = \xi_{n\alpha} w_{n\alpha}(\mathbf{r}). \quad (5.66)$$

Здесь  $\xi_{n\alpha}$  — энергия состояния  $n\alpha$ , отсчитанная от уровня Ферми. Ясно, что  $w_{n\alpha}(\mathbf{r})$  и  $\xi_{n\alpha}$  не зависят от спина  $\alpha$ , так что

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}(\mathbf{s}, \beta) \mathcal{I}^\dagger(\mathbf{r}, 0) \rangle_0 &= \sum_{\substack{m, n \\ m', n'}} w_m^*(\mathbf{s}) w_n^*(\mathbf{s}) w_{m'}(\mathbf{r}) w_{n'}(\mathbf{r}) \times \\ &\times \langle \mathbf{a}_{m\uparrow}^\dagger(\beta_1) \mathbf{a}_{n\downarrow}^\dagger(\beta_1) \mathbf{a}_{m'\downarrow}(0) \mathbf{a}_{n'\uparrow}(0) \rangle_0, \end{aligned} \quad (5.67)$$

где

$$\mathbf{a}_{m\alpha}(\beta) = \mathbf{a}_{m\alpha} e^{\beta \xi_m}. \quad (5.68)$$

Вычисление термодинамического среднего от правой части дает

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}(\mathbf{s}, \beta_1) \mathcal{I}^\dagger(\mathbf{r}, 0) \rangle_0 &= \\ &= \sum_{m, n} w_m^*(\mathbf{s}) w_n^*(\mathbf{s}) w_m(\mathbf{r}) w_n(\mathbf{r}) e^{\beta_1 (\xi_n + \xi_m)} f_m f_n; \end{aligned} \quad (5.69)$$

здесь  $f_m$  и  $f_n$  — функции Ферми, т. е.

$$f_m = \frac{1}{e^{\beta \xi_m} + 1}. \quad (5.70)$$

После простого интегрирования получаем

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}) &= \sum_{m, n} V \int e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s})} d(\mathbf{r} - \mathbf{s}) \times \\ &\times \left[ f_m f_n w_m^*(\mathbf{s}) w_n^*(\mathbf{s}) w_m(\mathbf{r}) w_n(\mathbf{r}) \frac{e^{\beta (\xi_m + \xi_n)} - 1}{\xi_m + \xi_n} \right] = \\ &= \sum_{m, n} \frac{V}{2} \int d(\mathbf{r} - \mathbf{s}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s})} \left( \text{th} \frac{\beta \xi_m}{2} + \text{th} \frac{\beta \xi_n}{2} \right) \times \\ &\times \frac{w_m^*(\mathbf{s}) w_n^*(\mathbf{s}) w_m(\mathbf{r}) w_n(\mathbf{r})}{\xi_m + \xi_n}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Если разложить в ряд функцию  $\text{th}(\beta\xi_n/2)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{th} \frac{\beta\xi_n}{2} &= \frac{4}{\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\xi_n}{[(2\nu+1)\pi/\beta]^2 + \xi_n^2} = \\ &= \frac{2}{\beta} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi_n + i\omega} = \frac{2}{\beta} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi_n - i\omega}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

где

$$\omega = (2\nu + 1) \frac{\pi}{\beta}$$

— частота Мацубары, то после алгебраических преобразований получаем

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}) &= \sum_{\substack{m, n \\ \omega}} \frac{V}{\beta} \int d(\mathbf{r} - \mathbf{s}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s})} \times \\ &\times \omega_m^*(\mathbf{s}) \omega_n^*(\mathbf{s}) \omega_m(\mathbf{r}) \omega_n(\mathbf{r}) \frac{1}{(\xi_m + i\omega)(\xi_n - i\omega)}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Удобно переписать  $K(\mathbf{q})$  следующим образом:

$$K(\mathbf{q}) = \sum_{\substack{m, n \\ \omega}} \frac{V}{\beta\Omega} \int d\mathbf{r} d\mathbf{s} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s})} \frac{\omega_m^*(\mathbf{s}) \omega_n^*(\mathbf{s}) \omega_m(\mathbf{r}) \omega_n(\mathbf{r})}{(\xi_m + i\omega)(\xi_n - i\omega)}. \quad (5.74)$$

Здесь  $\Omega$  — объем образца, а при выводе (5.74) была учтена трансляционная инвариантность.

Запишем  $\omega_n(\mathbf{r})$  в виде

$$\omega_n(\mathbf{r}) = \exp\left[i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}\right] \varphi_n(\mathbf{r}). \quad (5.75)$$

Видно, что  $\varphi_n(\mathbf{r})$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{1}{2m} \left\{ \mathbf{p} + \frac{e}{c} \nabla [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}] - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right\}^2 \varphi_n(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}) = \xi_n \varphi_n(\mathbf{r}). \quad (5.76)$$

Если  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — медленно изменяющаяся функция  $\mathbf{r}$ , то ее изменением можно пренебречь, и  $\varphi_n(\mathbf{r})$  является решением уравнения

$$H_{\text{он}} \varphi_n(\mathbf{r}) = \frac{p^2}{2m} \varphi_n(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}) = \xi_n \varphi_n(\mathbf{r}), \quad (5.77)$$

где  $H_{0n}$  — гамильтониан для нормального металла в отсутствие магнитного поля. Таким образом,  $\varphi_n(\mathbf{r})$  и  $\xi_n$  — собственные функции и соответствующие собственные значения для электронов в нормальном металле в отсутствие поля  $\mathbf{h}$ . Ясно, что функцию  $\varphi_n(\mathbf{r})$  можно считать вещественной. Это основное предположение при выводе уравнений Гинзбурга — Ландау. Область, где такое предположение оправдано, будет определена подробнее в конце параграфа. Главная цель указанного предположения — избежать решения трудно решаемой задачи, связанной с диамагнетизмом Ландау для электрона, и выразить параметры Гинзбурга — Ландау через простые характеристики нормального металла. Теперь уравнение для  $\Delta(\mathbf{q})$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{q}) &= \Delta(\mathbf{q}) \int d\mathbf{r} \exp\left[i\left(\mathbf{q} + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{r}\right] K(\mathbf{r}) = \\ &= K\left(\mathbf{q} + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}\right) \Delta(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (5.78)$$

где

$$K(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = \frac{V}{\beta\Omega} \sum_{m, n} \varphi_n(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{s}) \varphi_m(\mathbf{r}) \varphi_m(\mathbf{s}) \frac{1}{(\xi_n + i\omega)(\xi_m - i\omega)}. \quad (5.79)$$

Величину  $\Delta(\mathbf{r})$  получаем с помощью обратного преобразования Фурье, т. е.

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} K\left(\mathbf{q} + \frac{2e\mathbf{A}}{\hbar c}\right) \Delta(\mathbf{q}) d\mathbf{q}. \quad (5.80)$$

Поскольку

$$K\left(i\nabla + \frac{2e\mathbf{A}}{\hbar c}\right) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = K\left(\mathbf{q} + \frac{2e\mathbf{A}}{\hbar c}\right) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad (5.81)$$

(5.80) преобразуется в уравнение

$$\Delta(\mathbf{r}) = K\left(-i\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{\hbar c}\right) \Delta(\mathbf{r}). \quad (5.82)$$

Видно, что достаточно вычислить  $K(\mathbf{q})$  без учета вектора-потенциала  $\mathbf{A}$ . Как и следовало ожидать, в уравнении для  $\Delta(\mathbf{r})$  [т. е. для  $\psi(\mathbf{r})$ ] появляется оператор  $[i\nabla - (2e/\hbar c)\mathbf{A}]$ .

Ядро  $K(\mathbf{q})$  имеет простой вид

$$K(\mathbf{q}) = \frac{V}{\beta\Omega} \sum_{\substack{m, n \\ \omega}} \frac{\langle n | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | m \rangle \langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | n \rangle}{(\xi_n + i\omega)(\xi_m - i\omega)}. \quad (5.83)$$

Теперь можно ввести корреляционную функцию для электрона в нормальном металле, так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\xi_n + i\omega)(\xi_m - i\omega)} &= \frac{1}{\xi_n - \xi_m + 2i\omega} \left( \frac{1}{\xi_m - i\omega} - \frac{1}{\xi_n + i\omega} \right) = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left( \frac{1}{\xi_m - i\omega} - \frac{1}{\xi_n + i\omega} \right) \int_0^\infty dt \exp [i(\xi_n - \xi_m + 2i\omega)] \frac{t}{\hbar}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Выражение для  $K(\mathbf{q})$  принимает вид

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}) &= \text{Im} \sum_{\omega, n} \frac{V}{\hbar\beta\omega} \int_0^\infty dt e^{-2|\omega|t} \frac{t}{\hbar} \langle n | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}(0)} | n \rangle \times \\ &\times \left( \frac{1}{\xi_n + i\omega} - \frac{1}{\xi_n - i\omega} \right), \end{aligned} \quad (5.85)$$

где

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}(t)} = e^{i\beta H_{\text{он}}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\beta H_{\text{он}}}. \quad (5.86)$$

Корреляционную функцию  $\langle n | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}(0)} | n \rangle$  можно вычислить с помощью простых физических рассуждений, рассматривая процессы переноса в нормальном металле. Поскольку в процессах переноса участвуют только электроны, находящиеся вблизи поверхности Ферми, достаточно вычислить корреляционную функцию только для этих электронов. Теперь удобно ввести различие, впервые предложенное Андерсоном [8], между «чистыми» сверхпроводниками, в которых длина свободного пробега электрона  $l$  много больше длины когерентности  $\xi_0$ , и «грязными» сверхпроводниками, для которых  $l \ll \xi_0$ . В класс «чистых» сверхпроводников входят чистые металлы, а в класс «грязных» — сплавы и металлы, содержащие примеси.

а) «Чистый» сверхпроводник. В этом случае электрон на поверхности Ферми движется со скоростью  $\mathbf{v}_F$ . Если при  $t = 0$  этот электрон расположен в точке  $\mathbf{r} = 0$ , то в момент  $t$  величина  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}(t)$  будет равна  $qv_F t \cos \theta$ ,



где  $\theta$  — угол между скоростью электрона и вектором  $\mathbf{q}$ .  
Таким образом,

$$\overline{\langle n | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}(0)} | n \rangle} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta e^{iqv_F \cos \theta t}, \quad (5.87)$$

где черта обозначает усреднение по всем состояниям  $|n\rangle$  с энергией  $\xi_n$  и

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}) &= \text{Im} \sum_n \frac{V}{\hbar\beta\Omega} \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \int_0^\pi \sin \theta d\theta e^{iqv_F \cos \theta t} \times \\ &\quad \times e^{-2|\omega|t/\hbar} \left( \frac{1}{\xi_n + i\omega} - \frac{1}{\xi_n - i\omega} \right) = \\ &= \sum_n \frac{V}{\hbar\beta\Omega} \frac{4\omega^2}{\xi_n^2 + \omega^2} \frac{1}{2|\omega|qv_F} \text{arctg} \frac{\hbar qv_F}{2|\omega|}. \quad (5.88) \end{aligned}$$

Здесь ядро  $K(\mathbf{q})$  зависит только от длины вектора  $\mathbf{q}$ . Суммирование по  $n$  можно заменить интегрированием. Если  $N(0)$  — плотность состояний на поверхности Ферми на единицу энергии и на единицу объема, то

$$K(\mathbf{q}) = \sum_\omega \frac{2\pi N(0) V}{\hbar\beta} \frac{1}{qv_F} \text{arctg} \frac{\hbar qv_F}{2|\omega|}. \quad (5.89)$$

В выражении (5.89) сумма по  $\omega$  расходится. Это происходит в силу того, что не было учтено «обрезание» БКШ. Чтобы восстановить сходимость, обычно поступают следующим образом. Запишем  $K(\mathbf{q})$  в виде

$$K(\mathbf{q}) = [K(\mathbf{q}) - K(0)] + K_t(0), \quad (5.90)$$

где  $K_t(0)$  — значение  $K(0)$ , вычисленное с учетом «обрезания» БКШ:

$$K(0) = \frac{2\pi N(0) V}{\beta} \sum_\omega \frac{1}{2|\omega|}. \quad (5.91)$$

Из (5.83) имеем

$$K_t(0) = \frac{N(0) V}{\beta} \sum_\omega \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\xi^2 + \omega^2} = N(0) V \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\text{th}(\beta\xi/2)}{2\xi} d\xi. \quad (5.92)$$

В пределе  $\hbar\omega_D \gg k_B T$  этот интеграл равен [см. (5.40)]

$$K_t(0) = N(0) V \ln \frac{1,14\hbar\omega_D}{k_B T} \quad (5.93)$$

и линейная часть уравнения равна

$$\Delta(\mathbf{q}) [1 - K_t(0)] = [K(\mathbf{q}) - K(0)] \Delta(\mathbf{q}). \quad (5.94)$$

б) «Грязный» сверхпроводник. В этом случае движение электрона определяется процессами рассеяния. Если длина свободного пробега электрона мала по сравнению с  $1/q$ , то имеем

$$\overline{\langle n | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}(0)} | n \rangle} = e^{-\hbar D q^2 |t|} \quad (lq \ll 1), \quad (5.95)$$

где  $D = v_F l / 3$  — коэффициент диффузии. Тогда

$$K(\mathbf{q}) = \sum_n \frac{V}{\hbar\beta\Omega} \operatorname{Im} \int_0^\infty dt \exp\left(-\hbar D q^2 - 2 \frac{|\omega|}{\hbar}\right) \times \\ \times t \left( \frac{1}{\xi_n + i\omega} - \frac{1}{\xi_n - i\omega} \right). \quad (5.96)$$

Как и в случае чистого металла, интегрируем по энергиям и по  $t$ , в результате чего имеем

$$K(\mathbf{q}) = \sum_\omega \frac{2\pi V N(0)}{\beta} \frac{1}{2|\omega| + \hbar D q^2}. \quad (5.97)$$

Здесь ядро  $K(\mathbf{q})$  зависит только от длины вектора  $\mathbf{q}$ . Это выражение, конечно, расходится. Здесь необходимо применить тот же метод, что и в случае чистого металла, и линейная часть уравнения переходит в

$$\nabla(\mathbf{q}) [1 - K_t(0)] = [K(\mathbf{q}) - K(0)] \Delta(\mathbf{q}), \quad (5.98)$$

где  $K(0)$  и  $K_t(0)$  даются выражениями (5.91) и (5.93) соответственно.

## 2. Область, где справедливы вышеприведенные выкладки

а) Радиус действия ядра  $K(R)$ . Чтобы оценить радиус действия ядра  $K(R)$ , необходимо выполнить обратное преобразование Фурье

$$K(R) = \frac{2\pi}{8\pi^3} \int_0^\infty q^2 dq \int_{-1}^1 \sin \theta d\theta e^{iqR \cos \theta} K(q). \quad (5.99)$$

Для чистых металлов с помощью (5.89) получаем

$$K(R) = \frac{N(0)V}{2} \frac{k_B T}{\hbar v_F} \sum_{\omega} \frac{e^{-(2|\omega|/\hbar v_F)R}}{R^2}; \quad (5.100a)$$

для грязных сверхпроводников с помощью (5.96) имеем

$$K(R) = \frac{N(0)V}{2} \frac{k_B T}{\hbar D} \sum_{\omega} \frac{e^{-(2|\omega|/\hbar D)^{1/2}R}}{R}. \quad (5.100b)$$

Радиус действия ядра порядка

$$\frac{\hbar v_F}{2\omega_0} = \frac{\hbar v_F}{\pi k_B T} \quad (\text{для чистых сверхпроводников}), \quad (5.101a)$$

$$\left(\frac{\hbar D}{2\omega_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\hbar v_F}{\pi k_B T}\right)^{1/2} \quad (\text{для грязных сверхпроводников}), \quad (5.101b)$$

где  $\omega_0$  — значение  $\omega$  при  $\nu = 0$ . Наименьший радиус получается при  $T = T_0$ <sup>1)</sup>. Из определения  $\xi_0$  (1.23) следует, что радиус действия ядра  $K(R)$  порядка

$$\xi_0 = 0,18 \frac{\hbar v_F}{k_B T_0} \quad (\text{для чистых сверхпроводников}), \quad (5.102a)$$

$$\sqrt{l\xi_0} \quad (\text{для грязных сверхпроводников}). \quad (5.102b)$$

<sup>1)</sup> Следует подчеркнуть, что все рассмотрение этого параграфа относится лишь к температурам, близким к  $T_0$ . Что касается корреляционной длины (или длины когерентности), то эта величина по-разному определяется в разных задачах. В данном случае речь идет о радиусе действия ядра  $K(R)$ . Можно ввести корреляционную длину, характеризующую пространственное изменение  $\Delta$ . Эта длина при  $T \rightarrow T_0$  растет как  $(T_0 - T)^{-1/2}$  [см. (5.142), (5.143)] и порядка  $\xi_0$

Выкладки для грязных сверхпроводников справедливы при  $ql \ll 1$ , т. е. при  $R \gg l$ . Сравнивая эти результаты со значением, полученным для радиуса действия ядра, можно видеть, что сверхпроводник является грязным, если

$$\sqrt{l\xi_0} \gg l, \text{ т. е. } l \ll \xi_0. \quad (5.103)$$

Определение грязного сверхпроводника, согласно (5.103), оказалось очень полезным для понимания сверхпроводящих свойств. Можно видеть, что легко превратить чистый сверхпроводник в грязный. В чистом алюминии, например,  $\xi_0 = 16\,000 \text{ \AA}$ , но даже очень малое количество примесей ( $\sim 0,1\%$ ) снижает длину свободного пробега настолько, что выполняется условие (5.103).

б) *Учет изменений  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{A}$ .* Чтобы вывод выражений (5.89) и (5.97) был правилен,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{h}$  должны изменяться медленно на расстоянии порядка радиуса действия ядра  $K(R)$ . Первое условие удовлетворяется, если глубина проникновения  $\lambda(T)$  много больше  $\xi_0$  — радиуса действия  $K(R)$  в чистом металле:

$$\lambda(T) \gg \xi_0. \quad (5.104)$$

Это условие упоминалось уже в гл. 2. Условие (5.104) обеспечивает медленное изменение  $\mathbf{h}$ , но при этом  $\mathbf{A}$  изменяется недостаточно медленно. Поскольку  $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}$ , изменение  $\mathbf{A}$  на расстоянии  $\xi_0$  будет порядка  $\xi_0 |\mathbf{h}|$ , если принять, что на этом расстоянии  $|\mathbf{h}|$  постоянно. Это приводит к изменению фазы функции  $\omega_n(\mathbf{r})$  порядка [см. (5.75)]

$$\frac{e}{\hbar c} |\mathbf{h}| \xi_0^2 \approx \frac{E_F}{(k_B T_0)^2} \hbar \frac{e |\mathbf{h}|}{mc} = \frac{E_F \hbar \omega_c}{(k_B T_0)^2}, \quad (5.105)$$

или  $\sqrt{l\xi_0}$  при  $T \rightarrow 0$ . Наконец, еще одна корреляционная длина фигурирует в интегральной связи тока с малым электромагнитным полем:  $j_i(\mathbf{r}) = \int Q_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_n(\mathbf{r}') dV'$ . Эта корреляционная длина всегда порядка  $\xi_0$  или  $\sqrt{l\xi_0}$  независимо от температуры. — *Прим. ред.*

где  $\omega_c$  — циклотронная частота нормальных электронов в поле  $\mathbf{h}$ . Изменением фазы можно пренебречь, если

$$\hbar\omega_c \ll \frac{(k_B T_0)^2}{E_F}. \quad (5.106)$$

Для сверхпроводников первого рода наибольшее значение поля получается при  $|\mathbf{h}| = H_c(T)$ , и условие (5.106) можно записать в виде

$$\frac{e}{\hbar c} H_c(T) \xi_0^2 \ll 1,$$

т. е., используя (3.14а) для  $H_c(T)$ ,

$$\xi(T) \gg \frac{\xi_0}{\sqrt{\kappa}}. \quad (5.107)$$

Поскольку  $\kappa < 1/\sqrt{2}$ , это условие менее жесткое, чем условие (5.104), которое дает

$$\xi(T) \gg \frac{\xi_0}{\kappa}.$$

Для сверхпроводников второго рода наибольшее значение  $|\mathbf{h}|$  — это  $|\mathbf{h}| = H_{c_2}(T)$ , и условие имеет вид

$$\frac{e}{\hbar c} H_{c_2}(T) \xi_0^2 \ll 1,$$

т. е.

$$\xi(T) \gg \xi_0. \quad (5.108)$$

Эти условия были уже получены в гл. 2.

в) *Влияние диамагнетизма Ландау.* Чтобы можно было пренебречь диамагнетизмом Ландау, циклотронный радиус  $R_c = mc v_F / e |\mathbf{h}|$  должен быть много больше радиуса действия ядра  $K(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ . Отсюда имеем

$$\frac{mc v_F}{e |\mathbf{h}|} \gg \xi_0,$$

т. е. для чистых металлов

$$\hbar\omega_c \ll k_B T_0. \quad (5.109)$$

Это условие менее жестко, чем (5.106).

г) *Обсуждение полученных результатов.* Выше было показано, что в случае чистых сверхпроводников линейный

член в уравнении для  $\Delta$  определяется выражением (5.94) при условии, что

$$\lambda(T) \gg \xi_0 \quad (\text{для сверхпроводников первого рода}),$$

$$\xi(T) \gg \xi_0 \quad (\text{для сверхпроводников второго рода}).$$

Эти условия, упоминавшиеся уже в гл. 2, могут быть сведены к условию

$$\frac{T_0 - T}{T_0} \ll 1.$$

В случае грязных сверхпроводников радиус действия ядра  $K(R)$  равен  $\sqrt{\xi_0 l}$ , что много меньше  $\xi_0$ . Поэтому следует ожидать, что вывод линейного члена будет справедлив для более обширной области, чем в случае чистых сверхпроводников. И действительно, Маки [9] и Де Жен [10] показали, что выражение, полученное для  $K(\mathbf{q})$ , справедливо во всем температурном интервале. Добавочный член по порядку величины равен  $l/\xi_0$ , и, следовательно, им можно пренебречь.

Выводы, которые можно сделать из этого результата, очень существенны, так как они позволяют вычислить критическое поле  $H_{c2}$  как функцию  $H_c(T)$  при любой температуре.

Итак, линейный член принимает вид (5.94) и (5.98)

$$\Delta(\mathbf{q}) [1 - K_t(0)] = [K(\mathbf{q}) - K(0)] \Delta(\mathbf{q}),$$

т. е.

$$\Delta(\mathbf{r}) [1 - K_t(0)] = \left[ K \left( -i\nabla - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) - K(0) \right] \Delta(\mathbf{r}). \quad (5.110)$$

Здесь  $K(\mathbf{q})$  для чистых сверхпроводников определяется уравнением (5.89) в случае выполнения условий (5.104) и (5.106), а  $K(\mathbf{q})$  для грязных сверхпроводников определяется во всем температурном интервале выражением (5.97).

Для всех сверхпроводников — грязных и чистых, первого и второго рода — вблизи  $T_0$  в отсутствие приложенного поля можно ожидать, что  $\Delta(\mathbf{r})$  не зависит от  $\mathbf{r}$ . Линеаризованное уравнение для  $\Delta$  принимает вид

$$\Delta [1 - K_t(0)] = 0. \quad (5.111)$$

Это уравнение приводит к равенству

$$K_t(0) = 1, \quad (5.112a)$$

т. е.

$$\ln \frac{1,14\hbar\omega_D}{T_0} = \frac{1}{N(0)V}. \quad (5.112б)$$

Это уравнение БКШ (5.40), что и можно было ожидать, поскольку при  $T = T_0$  сверхпроводящий переход является переходом второго рода, который хорошо описывается линеаризованным уравнением.

Легко видеть, что

$$[1 - K_t(0)] \Delta(\mathbf{r}) = N(0)V \ln \frac{T}{T_0} \Delta(\mathbf{r}). \quad (5.113)$$

### 3. Параметр $\kappa_1(T)$

В случае грязных сверхпроводников можно вычислить  $H_{c_2}$  как функцию температуры. В поле  $H_{c_2}$  переход является переходом второго рода и достаточно сохранить в самосогласованном уравнении только лишь линейный член по  $\Delta(\mathbf{r})$ . Далее, вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  выбирается таким же, как в гл. 3:

$$A_x = 0, \quad A_y = Hx, \quad A_z = 0, \quad (5.114)$$

где  $H$  — приложенное поле, т. е.  $H_{c_2}$ .

В силу выбранного нами вида  $K(\mathbf{q})$  можно считать, что  $\Delta(\mathbf{r})$  зависит только от  $x$ , и тогда уравнение для  $\Delta$  в поле  $H_{c_2}$  принимает вид

$$\left\{ \ln \frac{T}{T_0} + f_0 \left[ \frac{\hbar D}{4\pi k_B T} \left( \frac{d^2}{dx^2} - \frac{4e^2}{\hbar^2 c^2} H^2 x^2 \right) \right] \right\} \Delta(x) = 0, \quad (5.115)$$

где

$$f_0(x) = \psi\left(\frac{1}{2} + x\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

и

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) - \text{дигамма-функция } ^1).$$

<sup>1)</sup> Свойства этой функции и ее связь с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} [1/(n+x)]$  см. в [11]. (См. также [28]. — Прим. ред.)

Верхнее критическое поле  $H_{c_2}$  определяется наибольшим собственным значением  $H$  уравнения (5.115) при условии, что функция  $\Delta(x)$  ограничена на бесконечности.

Вследствие того что  $f_0$  является собственной функцией оператора  $[(d^2/dx^2) - (4e/\hbar^2 c^2) H^2 x^2]$ , легко видеть, что

$$\Delta(x) = e^{-(eH/\hbar c)x^2} \quad (5.116)$$

и  $H_{c_2}$  связано с  $T$  уравнением

$$\ln \frac{T}{T_0} + f_0 \left( \frac{D}{2\pi k_B T} \frac{eH}{c} \right) = 0. \quad (5.117)$$

При помощи асимптотического разложения для  $\psi(x)$  находим

$$H_{c_2} \approx \frac{1}{2} \frac{c}{D} \frac{\Delta_0}{e} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{\pi k_B T}{\Delta_0} \right)^2 \right] \quad \text{при } T \ll T_0, \quad (5.118a)$$

$$H_{c_2} \approx \frac{4k_B T_0}{\pi e} \frac{c}{D} \left( 1 - \frac{T}{T_0} \right) \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{2} - \frac{28}{\pi^4} \zeta(3) \right] \theta \right\} \quad (5.118b)$$

при  $T_0 - T \ll T_0$ ,

где  $\theta = 1 - T/T_0$ ;  $\Delta_0 = 1,74k_B T_0$  — энергетическая щель при  $T = 0$  в нулевом поле и  $\zeta(3)$  — дзета-функция Римана.

Если определить параметр  $\kappa_1(T)$  таким образом, что

$$\sqrt{2} \kappa_1(T) = \frac{H_{c_2}(T)}{H_c(T)}, \quad (5.119)$$

где  $H_c(T)$  получено из (5.50), то будем иметь

$$\kappa_1(T) = 1,20\kappa \left( 1 - 1,06 \frac{T^2}{T_0^2} \right) \quad \text{при } T \ll T_0, \quad (5.120a)$$

$$\kappa_1(T) = \kappa (1 + 0,13\theta) \quad \text{при } T_0 - T \ll T_0. \quad (5.120b)$$

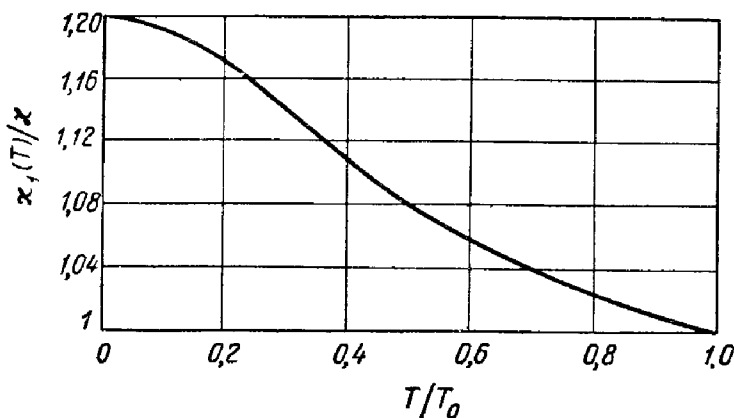
Параметр  $\kappa$  равен <sup>1)</sup>

$$\kappa = \frac{3c}{2\pi^2 e v_F l} \left[ \frac{7\zeta(3)}{2\pi N(0)} \right]^{1/2}. \quad (5.121)$$

<sup>1)</sup> Подробное определение  $\kappa$  при  $T = T_0$  см. в п. 6.



Это выражение связывает параметр Гинзбурга — Ландау с микроскопическими величинами. Впервые оно было получено Горьковым [1]. Выражения (5.115) — (5.120) взяты из работ [9, 10]. Функция  $\kappa_1(T)/\kappa$  изображена на фиг. 45. Ясно также, что если на поверхность образца наложить граничное условие  $d\Delta/dx = 0$ , то вычисления для  $H_{c_3}$  сохранят справедливость. Величина  $\Delta(x)$  будет определяться не выражением (5.116),



Фиг. 45. Зависимость параметра  $\kappa_1(T)$  от температуры в случае грязного сверхпроводника [9].

а функцией Вебера, и собственное значение оператора  $(p - 2eA/c)^2$  будет равно  $1,69 H_{c_2}$ . Это означает, что во всем температурном интервале отношение  $H_{c_3}/H_{c_2}$  постоянно <sup>1)</sup>.

В случае чистых сверхпроводников вычисления [9, 10] неприменимы, так как  $l \gg \xi_0$ . Вдали от  $T_0$  нельзя использовать ядро (5.88), и нужно возвратиться к линеаризованному уравнению в его интегральной форме (5.59). Этот вопрос кратко обсуждается в § 5.

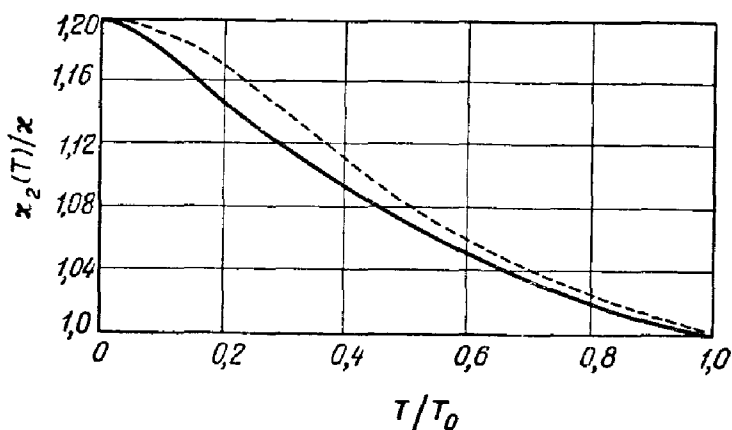
<sup>1)</sup> В случае пластины конечной толщины метод вычисления  $H_{\parallel}$  также справедлив во всем температурном интервале при условии, что  $\xi(T)$  получено из  $H_{c_2}(T)$  с помощью (3.146),

4. Нелинейные члены. Параметр  $\kappa_2(T)$ 

В принципе возможно вычислить первый нелинейный член, равный

$$\int K_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) \Delta(\mathbf{s}_1) \Delta^*(\mathbf{s}_2) \Delta(\mathbf{s}_3) d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 d\mathbf{s}_3. \quad (5.122)$$

Такие вычисления были проведены Маки [9] и Кароли и др. [12]. Здесь мы не приводим вычисления, а остановимся лишь кратко на их основных чертах. Для случая грязного сверхпроводника нелинейный член (5.122)



Фиг. 46. Зависимость  $\kappa_2(T)$  от температуры для грязного сверхпроводника [12].

Пунктир соответствует функции  $\kappa_1(T)$ .

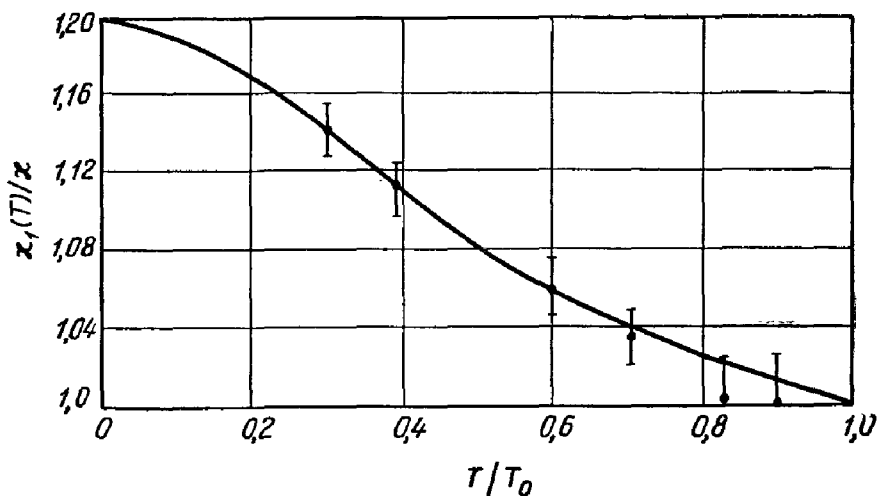
можно получить во всем температурном интервале. После того как это сделано, можно провести расчет, аналогичный сделанному Абрикосовым вблизи  $H_{c_2}$ , в результате чего получаем

$$\left(\frac{dM}{dH}\right)_{H=H_{c_2}(T)} = \frac{1}{4\pi\beta_A [2\kappa_2^2(T) - 1]}. \quad (5.123)$$

Здесь  $\beta_A$  — геометрический фактор, такой же как в гл. 3. Коэффициент  $\kappa_2(T)$  — новый обобщенный параметр Гинзбурга — Ландау, который можно вычислить с помощью (5.123).

Вычисление  $\kappa_2(T)$  было впервые выполнено Маки, который подсчитал, что отношение  $\kappa_2(T)/\kappa$  уменьшается

от 1 до 0,7 при понижении температуры от  $T_0$  до нуля. Это приводит к необычному поведению сверхпроводников, имеющих  $\kappa$  порядка  $1/\sqrt{2}$ . Однако более поздние вычисления [12] показали, что результаты Маки ошибочны<sup>1)</sup>. Поведение  $\kappa_2(T)$  в случае грязного сверхпроводника аналогично поведению  $\kappa_1(T)$ . Это видно на фиг. 46.



Фиг. 47. Сравнение экспериментальной зависимости  $\kappa_1(T)/\kappa$  от  $T/T_0$  с теоретической для сплава  $\text{In}-2,5\% \text{Bi}$ .

Сравнение проводить трудно, поскольку существует большая неопределенность в значении  $H_c(T)$ , особенно вблизи  $T_0$ . Это приводит к неточному определению значения  $\kappa$  (величина  $\kappa_1$  при  $T=T_0$ ). Обычно в литературе можно найти зависимость  $H_{c2}(T)$ . Настоящая кривая приводится в иллюстративных целях.

В работе [12] показывается, что  $\kappa_2(T)$  равно  $\kappa_1(T)$  с точностью до 2%. Экспериментальное определение  $\kappa_2(T)$  [более трудное, чем определение  $\kappa_1(T)$ ] всегда дает  $\kappa_2(T) \approx \kappa_1(T)$  в пределах точности эксперимента [13—15] (фиг. 47)<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Интересно отметить, что методы, основанные на функциях Грина и корреляционных функциях, не приводят к одинаковым результатам для члена  $|\Delta|^2\Delta$ , но оба метода дают один и тот же результат для  $\kappa_2(T)$ .

<sup>2)</sup> В пленках зависимость  $\kappa_2(T)$  отличается от этой зависимости в массивном сверхпроводнике. Подробнее см. [16].

## 5. Первое уравнение Гинзбурга—Ландау

Для области вблизи  $T_0$  можно вывести уравнение Гинзбурга — Ландау как для чистых, так и для грязных сверхпроводников. Очевидно, что величина  $K(\mathbf{q}) - K(0)$ , определяемая выражениями (5.89) и (5.97), отрицательна при  $q \neq 0$  и максимальна при  $q = 0$ . Эта величина может быть разложена в ряд по степеням  $q$ , причем вблизи  $T_0$  достаточно сохранить только первый член разложения, который пропорционален  $q^2$ .

Для чистых сверхпроводников

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}) - K(0) &\approx -\frac{\pi N(0)V}{6\beta} \hbar^2 (qv_F)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta^3}{\pi^3 (2\nu+1)^3} \approx \\ &\approx -\frac{N(0)V}{6\pi^2} \left( \frac{\hbar v_F}{k_B T_0} \right)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^3} q^2 \approx \\ &\approx -\frac{N(0)V}{6\pi^2} \left( \frac{\hbar v_F}{k_B T_0} \right)^2 \frac{7}{8} \zeta(3) q^2, \quad (5.124) \end{aligned}$$

где  $\zeta(3)$  — дзета-функция Римана.

Для грязных сверхпроводников

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}) - K(0) &\approx -\frac{\pi N(0)V}{\beta} \hbar D q^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta^2}{\pi^2 (2\nu+1)^2} \approx \\ &\approx -\frac{\pi N(0)V}{24} \frac{\hbar v_F l}{k_B T_0} q^2. \quad (5.125) \end{aligned}$$

При выводе двух последних выражений температура  $T$  была заменена на  $T_0$ . Рассмотрим теперь выражение

$$1 - K_t(0),$$

которое содержится в правой части уравнений (5.94) и (5.98). Имеем

$$\begin{aligned} 1 - K_t(0) &= 1 - N(0)V \ln \frac{1,14\hbar\omega_D}{T} = N(0)V \ln \frac{1,14\hbar\omega_D}{T_0} - \\ &- N(0)V \ln \frac{1,14\hbar\omega_D}{T} \approx N(0)V \frac{T - T_0}{T_0}. \quad (5.126) \end{aligned}$$

При выводе этого выражения было использовано уравнение (5.40), откуда находится температура сверхпроводящего перехода в нулевом поле, т. е.  $T_0$ .

В выражении (5.82) линейная часть, связанная с  $\Delta(\mathbf{r})$ , равна для чистых сверхпроводников

$$\frac{T-T_0}{T_0} \Delta(\mathbf{r}) = -\frac{7}{8} \xi(3) \frac{v_F^2}{6\pi^2 (k_B T_0)^2} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \Delta(\mathbf{r}); \quad (5.127)$$

для грязных сверхпроводников —

$$\frac{T-T_0}{T_0} \Delta(\mathbf{r}) = -\frac{\pi}{24} \frac{v_F l}{\hbar k_B T_0} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \Delta(\mathbf{r}). \quad (5.128)$$

Это, конечно, линейная часть первого уравнения Гинзбурга — Ландау. Очевидно, что  $\Delta(\mathbf{r})$  пропорционально  $\psi(\mathbf{r})$ . Коэффициент пропорциональности будем пока считать произвольным. Однако вектор-потенциал появляется, как и следовало ожидать, в виде  $(2e/c)\mathbf{A}$ , что является следствием существования куперовских пар.

Для полноты картины необходимо также вычислить коэффициент  $R$  в члене  $|\Delta|^2 \Delta$ . Согласно теории Гинзбурга — Ландау, вблизи  $T_0$  этот коэффициент не зависит от  $\mathbf{A}$ . Поэтому достаточно вычислить его в пределе, когда поле равно нулю, т. е. разлагая в ряд самосоглаванное уравнение БКШ (5.37) по степеням  $\Delta$ . Легко видеть, что

$$R = -\frac{\pi}{\beta} N(0) V \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta^3}{\pi^3 (2\nu+1)^3} = -\frac{7N(0)V}{8\pi^2 k_B^2 T_0^2} \zeta(3), \quad (5.129)$$

и первое уравнение Гинзбурга — Ландау имеет вид для чистых сверхпроводников

$$\begin{aligned} & \frac{7}{8} \xi(3) \frac{v_F^2}{6\pi^2 (k_B T_0)^2} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \Delta(\mathbf{r}) + \\ & + \frac{T-T_0}{T_0} \Delta(\mathbf{r}) + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 k_B^2 T_0^2} |\Delta(\mathbf{r})|^2 \Delta(\mathbf{r}) = 0; \quad (5.130) \end{aligned}$$

для грязных сверхпроводников —

$$\frac{\pi}{24} \frac{v_F l}{\hbar k_B T_0^2} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \Delta(\mathbf{r}) + \frac{T - T_0}{T_0} \Delta(\mathbf{r}) + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 k_B^2 T_0^2} |\Delta(\mathbf{r})|^2 \Delta(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.131)$$

Уравнение для тока можно найти с помощью аналогичного метода, и нет необходимости приводить здесь все вычисления полностью. В результате имеем:

для чистых сверхпроводников

$$\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c} = \left[ \frac{ie}{mc} (\Delta\nabla\Delta^* - \Delta^*\nabla\Delta) - \frac{4e^2}{mc^2} |\Delta|^2 \mathbf{A} \right] \frac{7}{8} \zeta(3) \frac{2mv_F N(0)}{6\pi^2 (k_B T_0)^2}; \quad (5.132)$$

для грязных сверхпроводников

$$\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c} = \left[ \frac{ie}{mc} (\Delta\nabla\Delta^* - \Delta^*\nabla\Delta) - \frac{4e^2}{mc^2} |\Delta|^2 \mathbf{A} \right] \frac{\pi}{24} \frac{v_F l N(0)}{\hbar k_B T_0}. \quad (5.133)$$

Эти результаты были получены Горьковым [1]. Итак, схема Гинзбурга — Ландау подтверждается микроскопической теорией. Теперь остается выразить различные параметры и характеристические длины через параметры микроскопической теории. Это будет сделано в следующем параграфе.

Необходимо отметить, что приведенные выше результаты относятся к изотропному случаю как для чистых, так и для грязных сверхпроводников. Если такое предположение не выполняется, ядро  $K(\mathbf{q})$  будет зависеть от направления  $\mathbf{q}$ . Этот вопрос был исследован Кароли и др. [17].

## 6. Выражения для $\xi(T)$ , $\lambda(T)$ , $\kappa(T)$

Вышеприведенные уравнения принимают привычный вид, если положить:

для чистых сверхпроводников

$$\psi(\mathbf{r}) = \left[ \frac{7\zeta(3) m v_F^2 N(0)}{24\pi^2 k_B^2 T_0^2} \right]^{1/2} \Delta(\mathbf{r}); \quad (5.134)$$

для грязных сверхпроводников

$$\psi(\mathbf{r}) = \left[ \frac{\pi m v_F N(0)}{12 \hbar k_B T_0} \right]^{1/2} \Delta(\mathbf{r}). \quad (5.135)$$

Тогда коэффициент  $\alpha$  в уравнении Гинзбурга — Ландау равен

для чистых сверхпроводников

$$\alpha_p = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{48\pi^2}{7\zeta(3)} \left( \frac{k_B T_0}{\hbar v_F} \right)^2 \frac{T - T_0}{T_0} = 1,83 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0^2} \frac{T - T_0}{T_0}; \quad (5.136)$$

для грязных сверхпроводников

$$\alpha_d = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{24}{\pi} \frac{k_B T_0}{\hbar v_F l} \frac{T - T_0}{T_0} = 1,36 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0 l} \frac{T - T_0}{T_0}. \quad (5.137)$$

Как и следовало ожидать, коэффициент  $\alpha$  отрицателен и обращается в нуль при  $T = T_0$ .

Другой коэффициент имеет вид

для чистых сверхпроводников

$$\begin{aligned} \beta_p &= \frac{288\pi^2}{7\zeta(3)} \frac{1}{N(0)} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{k_B T_0}{\hbar v_F} \right)^2 \right]^2 \frac{1}{k_B^2 T_0^2} = \\ &= 0,35 \frac{1}{N(0)} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0^2} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_0)^2}; \end{aligned} \quad (5.138)$$

для грязных сверхпроводников

$$\begin{aligned} \beta_d &= \frac{504\zeta(3)}{\pi^4} \frac{1}{N(0)} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\hbar v_F l} \right)^2 = \\ &= 0,2 \frac{1}{N(0)} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0 l} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_0)^2}. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Зависящая от температуры длина когерентности  $\xi(T)$ , определяемая выражением  $\xi^2(T) = \hbar^2/2m|\alpha|$ , равна

для чистых сверхпроводников

$$\xi_p^2(T) = \frac{7\zeta(3)}{48\pi^2} \frac{\hbar^2 v_F^2}{k_B^2 T_0^2} \frac{T_0}{T_0 - T}, \quad (5.140)$$

для грязных сверхпроводников

$$\xi_d^2(T) = \frac{\pi}{24} \frac{\hbar v_F l}{k_B T_0} \frac{T_0}{T_0 - T}, \quad (5.141)$$

или для чистых сверхпроводников

$$\xi_p(T) = 0,74 \xi_0 \left( \frac{T_0}{T_0 - T} \right)^{1/2}, \quad (5.142)$$

для грязных сверхпроводников

$$\xi_d(T) = 0,85 (\xi_0 l)^{1/2} \left( \frac{T_0}{T_0 - T} \right)^{1/2}. \quad (5.143)$$

Глубина проникновения  $\lambda(T)$  дается выражением  $\lambda^2(T) = mc^2 \beta / 16 \pi e^2 |\alpha|$  и

$$\lambda_p^2(T) = \frac{3c^2}{16 \pi e^2 v_F^2 N(0)} \frac{T_0}{T_0 - T}, \quad (5.144)$$

$$\lambda_d^2(T) = \frac{3c^2}{8 \pi e^2 v_F^2 N(0)} \frac{7\zeta(3)}{4\pi^3} \frac{1}{l} \frac{\hbar v_F}{k_B T_0} \frac{T_0}{T_0 - T}, \quad (5.145)$$

или

$$\lambda_p(T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_L(0) \left( \frac{T_0}{T_0 - T} \right)^{1/2}, \quad (5.146)$$

$$\lambda_d(T) = 0,615 \lambda_L(0) \left( \frac{\xi_0}{l} \right)^{1/2} \left( \frac{T_0}{T_0 - T} \right)^{1/2}, \quad (5.147)$$

где

$$\lambda_L(0) = 3c^2 / 8 \pi e^2 v_F^2 N(0)$$

— лондоновская глубина проникновения. Длина когерентности  $\xi(T)$  и глубина проникновения  $\lambda(T)$  расходятся как  $[T_0 / (T_0 - T)]^{1/2}$ , когда  $T \rightarrow T_0$ . Параметр Гинзбурга — Ландау равен

$$\kappa_p = \frac{3ck_B T_0}{e \hbar v_F^2} \left[ \frac{\pi}{7\zeta(3)} \frac{1}{N(0)} \right]^{1/2} = 0,96 \frac{\lambda_L(0)}{\xi_0}, \quad (5.148)$$

$$\kappa_d = \frac{3c}{2\pi^2 e v_F l} \left[ \frac{7\zeta(3)}{\pi N(0)} \right]^{1/2} = 0,725 \frac{\lambda_L(0)}{l}. \quad (5.149a)$$

Выражения для  $\kappa$  были впервые получены Горьковым [1]. Горьков вычислил также  $\kappa$  для промежуточных значений  $l$ . Гудман [18] показал, что с точностью до нескольких процентов  $\kappa$  определяется выражением

$$\kappa = 0,96 \left( \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{1,32l} \right). \quad (5.149b)$$



Интересно связать  $\kappa$  с сопротивлением и с электронной удельной теплоемкостью нормального металла. При наличии центров рассеяния и электрического поля  $\mathbf{E}$  ток  $\mathbf{j}$  определяется как

$$\mathbf{j} = -eD\nabla n + \frac{\mathbf{E}}{\rho}, \quad (5.150)$$

где  $\rho$  — сопротивление в нормальном состоянии,  $D$  — коэффициент диффузии и  $n$  — число электронов в единице объема. В состоянии равновесия в присутствии поля  $\mathbf{E}$  поверхность Ферми смещается и число электронов равно

$$n = n_0 - 2N(0)eV, \quad (5.151)$$

где  $V$  — потенциал, соответствующий  $\mathbf{E}$  (т. е.  $\mathbf{E} = -\nabla V$ ). При равновесии  $\mathbf{j} = 0$ , и получаем

$$\rho = 2e^2N(0)D = \frac{2}{3}e^2N(0)v_F l. \quad (5.152)$$

Плотность состояний  $N(0)$  можно получить из электронной удельной теплоемкости  $C_e$  при низкой температуре. Хорошо известно, что

$$C_e = \gamma T, \quad (5.153)$$

где  $\gamma = (2\pi^3/3)N(0)k_B^2$ ; это дает

$$\frac{\lambda_L(0)}{l} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{C_e}{k_B} \rho \gamma^{1/2}. \quad (5.154)$$

Если выразить  $\rho$  в  $\text{ом}^{-1}$  и  $\gamma$  в  $\text{эрг}/\text{см}^3 \cdot \text{град}^2$ , то выражение для  $\kappa$  примет вид

$$\kappa = 7,5 \cdot 10^3 \rho \gamma^{1/2} \quad (\xi_0 \gg l). \quad (5.155)$$

Видно, что в случае грязных сплавов значение  $\kappa$  зависит только от свойств процессов переноса в металле в нормальном состоянии.

Выражение (5.155), полученное Горьковым, было проверено на нескольких сверхпроводниках. Для сплава  $\text{InBi}$ , исследованного Кинзелом и др. [19], магнитные измерения дали  $\kappa = 1,79$ , а значение, вычисленное из (5.155), равно 1,7. Другое интересное подтверждение (5.155) было получено при исследовании сплавов индия [20]. Увеличение концентрации примесей снижает длину

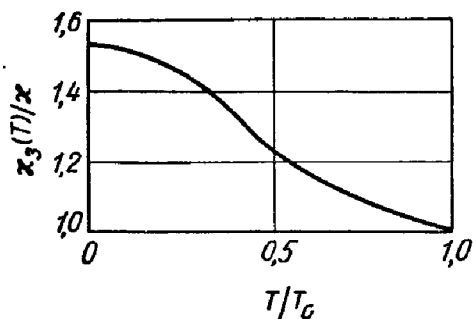
свободного пробега  $l$ , и если  $l$  меньше критической длины

$$l_c = 1,06\lambda_L(0), \quad (5.156)$$

то сверхпроводник становится сверхпроводником второго рода, как это видно из (5.149). Серафим [20] исследовал ряд сплавов индия с Bi, Pb, Sn, Cd, Tl, Hg. Было обнаружено, что критическая длина не зависит от вида примеси и приблизительно равна  $440 \pm 100 \text{ \AA}$ . Лондоновская глубина проникновения равна  $400 \text{ \AA}$ <sup>1)</sup>.

## § 5. Выводы и обсуждение результатов

В предыдущей главе была выяснена возможность вывести уравнения Гинзбурга — Ландау из микроскопической теории, что подтверждает справедливость феноменологического рассмотре-



Фиг. 48. Зависимость  $\kappa_3(T)$  для грязного сверхпроводника при высоких значениях  $\kappa$  [9].

нения. При проведении вычислений оказалось полезным ввести важные понятия грязных и чистых сверхпроводников. Для случая грязных сверхпроводников в связи с тем, что длина свободного пробега электрона  $l$  много меньше длины когерентности  $\xi_0$ , оказалось возможным получить локальное уравнение для параметра упорядочения вблизи поля образования зародышей ( $H_{c_2}$  или  $H_{c_3}$ ), справедливое для всего температурного интервала. В результате были найдены значения  $H_{c_2}(T)$  и  $H_{c_3}(T)$ , что привело к введению двух обобщенных параметров Гинзбурга — Ландау  $\kappa_1(T)$  и  $\kappa_2(T)$  и к установлению постоянства отношения  $H_{c_3}(T)/H_{c_2}(T)$  во всем температурном интервале. В случае грязных сверхпроводников с высокими значениями  $\kappa$  можно, кро-

<sup>1)</sup> Критическая концентрация, соответствующая  $l_c$ , зависит от типа примеси.

ме того, ввести третий параметр  $\kappa_3(T)$ , связывающий величину поля  $H_{c_1}(T)$ , при котором начинается его проникновение в толщу сверхпроводника, с полем  $H_c(T)$ :

$$H_{c_1}(T) = \frac{H_c(T)}{2\kappa_3(T)} \ln \kappa_3(T).$$

Зависимость параметра  $\kappa_3(T)$  от температуры, вычисленная в [9], изображена на фиг. 48.

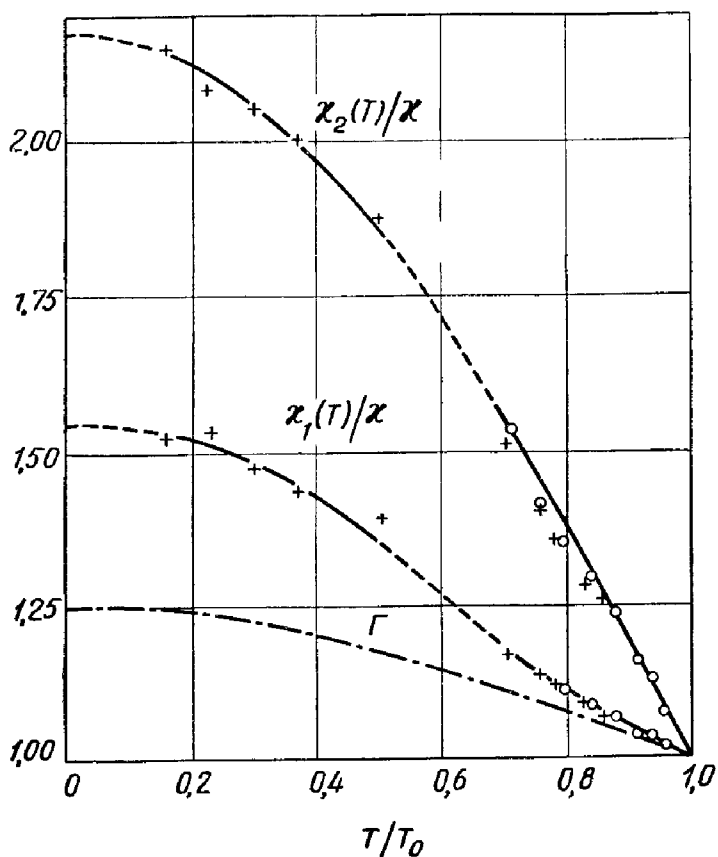
В случае чистого сверхпроводника для вычисления поля  $H_{c_2}$  как функции температуры нужно вернуться к линеаризованному уравнению для потенциала пары в его интегральной форме (5.59). Это было выполнено Горьковым [1] с помощью вариационной техники, причем в качестве исходного выражения для  $\Delta(r)$  выбиралась функция гауссова распределения.

Гельфанд и Верзамер [21, 22] смогли показать, что функция гауссова распределения является точным решением уравнения (5.59). С помощью этого решения можно определить параметр  $\kappa_1(T)$  для случая чистых сверхпроводников. Вычисления Горькова, а также Гельфанда и Верзамера предсказывают аналогичное поведение  $\kappa_1(T)$  для случаев чистого и грязного сверхпроводников, причем  $\kappa_1(0)$  должно составлять  $1,25\kappa$ , где  $\kappa$  — значение параметра при  $T = T_0$ .

Экспериментальные данные для чистого ниобия, полученные Мак-Конвиллем и Серином [14], изображены на фиг. 49. Экспериментальные значения  $\kappa_1(T)$ , несомненно, выше теоретических. При  $T = 0$  экспериментальное значение отношения  $\kappa_1/\kappa = 1,6$ . Более поздние эксперименты Финнемора и др. [23] дали еще большие значения этого отношения.

Тем же способом Гельфанд и Верзамер вычислили также  $\kappa_1(T)$  как функцию длины свободного пробега. Они пришли к заключению, что при изменении  $l$  от бесконечности до нуля параметр  $\kappa_1(T)$  плавно изменяется от значения, полученного для чистых сверхпроводников, до значения, вычисленного для грязных сверхпроводников (фиг. 50). Несоответствие между экспериментом и теорией в случае чистых сверхпроводников не может быть отнесено за счет длины свободного пробега. Гельфанд и Верзамер предположили, что это несовпадение

связано с неадекватностью модели БКШ в случае чистых веществ с сильной связью, для которых могут оказаться существенными запаздывающее электрон-фононное взаи-

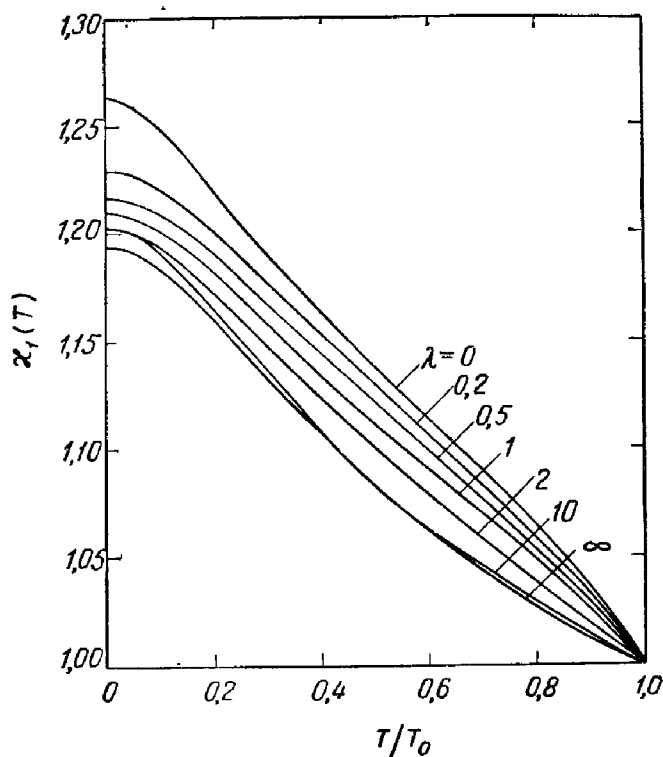


Фиг. 49. Параметр  $\chi_1(T)$  для чистых металлов по вычислениям Горькова [1] (кривая обозначена  $\Gamma$ ).

На рисунке приведены также экспериментальные значения  $\chi_1(T)$  и  $\chi_2(T)$ , полученные в работе [14] для чистого Nb (крестики и кружочки соответствуют двум разным образцам высокой чистоты). Данные при низких температурах были получены из измерений намагниченности, данные вблизи  $T_0$  — из измерений удельной теплоемкости (см. гл. 7, § 1).

модействие и анизотропия поверхности Ферми. Однако недавние эксперименты Кеезома и Радебауфа [24] на чистом ванадии, который не является сверхпроводником с сильной связью, показали, что функция  $\chi_1(T)/\chi$  почти

совпадает с аналогичной функцией для чистого ниобия. Вопрос о правильности теории Гельфанда — Верзамера остается открытым. Мак-Конвилль и Серин измеряли также параметр  $\kappa_2(T)$ , связанный с производной кривой намагничивания при  $H = H_{c_2}(T)$ . Функция  $\kappa_2(T)$  изме-



Фиг. 50. Зависимость  $\kappa_1(T)$  от температуры как функция длины свободного пробега  $l$  нормального электрона ( $\lambda = 0,882\xi_0/l$ ) [22]. Заметим, что кривая для  $l = \infty$  совпадает с кривой, вычисленной Горьковым и изображенной на фиг. 49.

няется быстрее  $\kappa_1(T)$ , и при  $T = 0$  в случае чистого ниобия  $\kappa_2(0)/\kappa \approx 2,2$  (фиг. 49). Более поздние вычисления, проведенные Маки и Цусуки [25], показали, что величина  $\kappa_2(T)$  всегда больше  $\kappa_1(T)$  и в случае очень чистого сверхпроводника ( $l = \infty$ ) при  $T = 0$  она обращается в бесконечность, что находится в приближенном согласии с экспериментом.

Для поля  $H_{c_3}$  вычислений нет<sup>1)</sup>, но нет никаких априорных доказательств того, что отношение  $H_{c_3}(T)/H_{c_2}(T)$  в случае чистых сверхпроводников остается постоянным во всем температурном интервале<sup>2)</sup>.

В настоящее время свойства чистых сверхпроводников при низких температурах не столь понятны, как свойства грязных сверхпроводников.

Заметим, что было предпринято также несколько других попыток распространить уравнения Гинзбурга — Ландау на все температуры для случая слабых полей [26, 27].

### ЛИТЕРАТУРА<sup>3)</sup>

1. Горьков Л. П., ЖЭТФ, **36**, 1918; **37**, 833, 1407 (1959).
2. Cooper L. N., Phys. Rev., **104**, 1189 (1956).
3. Fröhlich H., Phys. Rev., **79**, 845 (1950).
4. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R., Phys. Rev., **108**, 1175 (1957).
5. De Gennes P. G., Superconductivity of Metals and Alloys, New York, 1966. (Имеется перевод: Де Жен П., Сверхпроводимость металлов и сплавов, изд-во «Мир», 1968.)
6. Muhlschlegel B., Zs. Phys., **155**, 313 (1959).
7. Caroli C., De Gennes P. G., Matricon J., Journ. Phys. Rad., **23**, 707 (1962).
8. Anderson P. W., Journ. Phys. Chem. Soc., **11**, 26 (1959).
9. Maki K., Physics, **1**, 21, 127, 201 (1964).
10. De Gennes P. G., Phys. Cond. Mat., **3**, 79 (1964).
11. Erdelyi A. et al., Higher Transcendental Functions, Vol. 1, 1953. (Имеется перевод: Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, М., 1966.)
12. Caroli C., Cyrot M., De Gennes P. G., Sol. State Comm., **4**, 17 (1966).
13. Von Mardion G., Goodman B. B., Lacaze A., Journ. Phys. Chem. Sol., **26**, 1143 (1965).
14. McConville T., Serin B., Phys. Rev., **A140**, 1169 (1965).
15. Orsay Group, Доклад на симпозиуме по квантовым жидкостям, Брайтон, Англия, 1965.

1) Недавно был проведен численный расчет  $H_{c_3}/H_{c_2}$  в зависимости от температуры для чистого металла в предположении зеркального отражения электронов от поверхности [29]. Оказалось, что при  $T \rightarrow 0$  это отношение становится равным 1,98. — Прим. ред.

2) Ясно также, что в случае чистых сверхпроводников все вычисления поля  $H_{c_3}$ , выполненные в гл 4, справедливы только вблизи  $T_0$ .

3) Литература, отмеченная звездочкой, добавлена редактором перевода. — Прим. ред.

16. Guyon E., Meunier F., Thompson R. S., Phys. Rev. (в печати).
17. Caroli C., De Gennes P., Matricon J., Phys. Cond. Mat., 1, 176 (1963).
18. Goodman B. B., I. B. M. Journ. Res. Developm., 6, 63 (1962).
19. Kinsell T., Lynton E. A., Serin B., Phys. Lett., 3, 30 (1962); Bull. Am. Phys. Soc., 8, 294 (1963).
20. Seraphim D. P., Superconductors, eds. Tannenbaum, Wright, 1962, p. 25.
21. Helfand E., Werthamer N. R., Phys. Rev. Lett., 13, 686 (1964).
22. Helfand E., Werthamer N. R., Phys. Rev., 147, 288 (1966).
23. Finnemore D. K., Stromberg T. F., Swenson C. A., Phys. Rev., 149, 231 (1966).
24. Keesom P. H., Radebaugh R., LT X Conference, 1966.
25. Maki K., Tsuzuki T., Phys. Rev., A139, 868 (1965).
26. Tewordt L., Phys. Rev., A132, 595 (1963); A137, 1745 (1965).
27. Werthamer N. R., Phys. Rev., A132, 663 (1963); Rev. Mod. Phys., 36, 292 (1964).
- 28\*. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1962.
- 29\*. Ебнер, Sol. State Comm., 7, 1207 (1969).

Ниже приводится список книг, в которых изложена микроскопическая теория сверхпроводимости. Список не претендует на исчерпывающую полноту.

- Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962.
- Blatt J. M., Theory of Superconductivity, New York, 1964.
- Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В., Новый метод в теории сверхпроводимости, М., 1957.
- Rickayson G., Theory of Superconductivity, New York, 1965.
- Schrieffer J. R., The Theory of Superconductivity, New York.

## Глава 6

# РАЗЛИЧНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ

## А. ПАРАМАГНИТНЫЙ ЭФФЕКТ

### § 1. Введение

В предыдущей главе были выведены уравнения Гинзбурга — Ландау без учета влияния магнитного поля на спин электронов. Различные свойства чистых и грязных сверхпроводников могут быть поняты при вычислении соответствующих параметров из микроскопической теории. Такие вычисления справедливы, пока магнитное поле мало. Однако в случае сверхпроводников второго рода с высокими значениями  $\kappa$  верхнее критическое поле  $H_{c_2}$  (или  $H_{c_3}$ ) может быть очень большим, и в таком случае нельзя пренебречь вкладом, вносимым спиновой восприимчивостью (парамагнетизм Паули) в термодинамическое равновесие.

В нормальном состоянии спиновая восприимчивость мала, но конечна и равна

$$\chi_n = \frac{1}{2} (g\mu_B)^2 N(0), \quad (6.1)$$

где  $g$  — спектроскопический фактор для электрона ( $g = 2$ ),  $\mu_B$  — магнетон Бора и  $N(0)$  — плотность состояний на поверхности Ферми.

В сверхпроводящей фазе благодаря образованию куперовских пар восприимчивость сильно понижается. Чтобы поляризовать сверхпроводник, нужно разбить пары, т. е. нужно приложить такое поле  $H$ , при котором  $\mu_B H \sim \Delta$  — энергия образования пары. В частности, при  $T = 0$  спиновая восприимчивость сверхпроводника должна быть, по-видимому, равна нулю, т. е.

$$\chi_s = 0 \quad (T = 0). \quad (6.2)$$

Таким образом, нормальное состояние сильнее поляризуется, чем сверхпроводящее, и в больших полях может оказаться, что поляризованное нормальное состояние



имеет более низкую свободную энергию, чем сверхпроводящая фаза.

Качественно это означает, что переход из сверхпроводящего состояния в поляризованное нормальное состояние произойдет как только энергия поляризации сравняется с энергией конденсации  $H_c^2(T)/8\pi$ , т. е. при

$$\frac{1}{2}(\chi_n - \chi_s)H^2 = \frac{H_c^2(T)}{8\pi}. \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) определяет предельное поле, ниже которого не может существовать сверхпроводимость. Это так называемый парамагнитный предел  $H_p(T)$ , определяемый формулой

$$H_p(T) = \frac{H_c(T)}{[4\pi(\chi_n - \chi_s)]^{1/2}}. \quad (6.4)$$

Такая формула впервые была предложена Клогстоном [1] и Чандрасекаром [2]. При  $T = 0$  предел  $H_p(0)$  равен

$$H_p(0) = \frac{H_c(0)}{\sqrt{2\pi N(0)g\mu_B}}, \quad (6.5a)$$

или

$$H_p(0) = \frac{\sqrt{2}\Delta_0}{g\mu_B}. \quad (6.5b)$$

Для получения последнего выражения было использовано соотношение (5.48), связывающее величину щели при  $T = 0$  и критическое поле  $H_c(0)$ . Уравнение (6.5b) отражает тот факт, что энергия поляризации равна энергии образования пары.

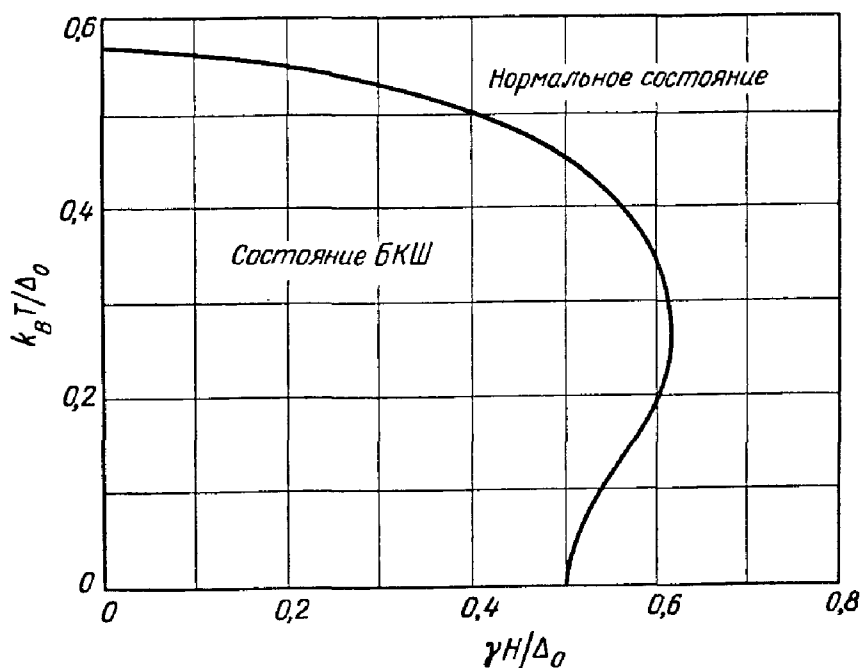
Интересно оценить порядок величины  $H_p(0)$ . Обычно  $\Delta_0$  порядка  $20 \text{ см}^{-1}$ , так что при  $g = 2$

$$H_p(0) \approx 300 \text{ кэ.}$$

Для сверхпроводников первого рода с идеальным эффектом Мейсснера можно показать, что переход первого рода из сверхпроводящей в нормальную фазу должен происходить в поле

$$H_c^* = \left( \frac{1}{H_c^2} + \frac{1}{H_p^2} \right)^{-1/2}. \quad (6.6)$$

Можно считать, что  $H_p$  порядка 300 кэ и  $H_c$  не больше 1 кэ, и поэтому парамагнитный эффект в сверхпроводниках первого рода пренебрежимо мал. Наоборот, в случае сверхпроводников второго рода, как это было показано

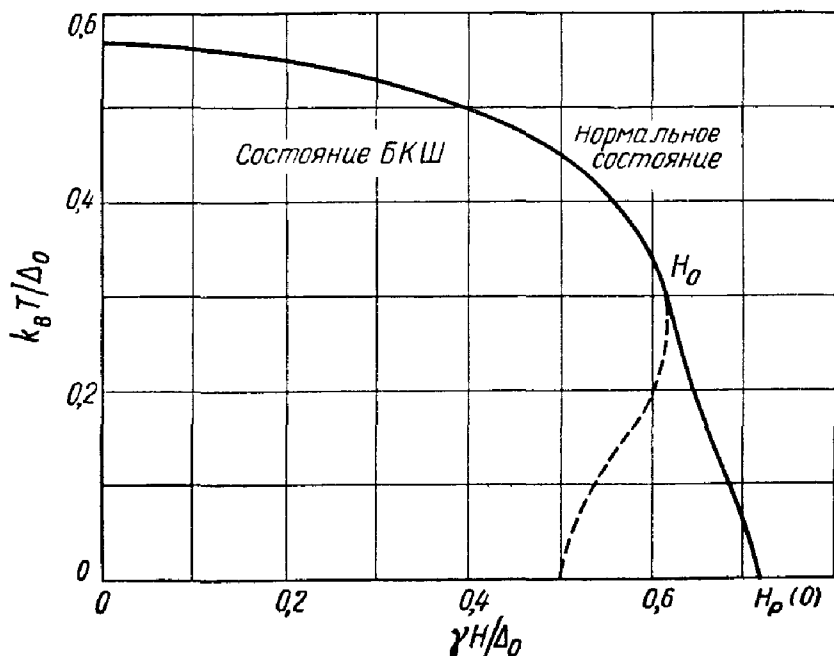


Фиг. 51. Кривая перехода из состояния БКШ в нормальное состояние в случае однородного поля, действующего на спины электронов.

Предполагается, что переход является фазовым переходом второго рода.

в предшествующих главах, магнитное поле может проникать в образец. Сверхпроводящий переход происходит в поле  $H_{c_2}$  и является фазовым переходом второго рода. Для веществ с большими значениями  $\kappa$ , когда можно ожидать больших значений  $H_{c_2}$ , при вычислении истинного поля, в котором происходит сверхпроводящий переход, нужно учитывать спиновый парамагнетизм и орбитальные эффекты. Если сверхпроводящий переход является фазовым переходом второго рода, можно применять метод, описанный в гл. 5, т. е. разлагать самосогласованное уравнение для  $\Delta(\mathbf{r})$  в ряд по

степеням  $\Delta$ . Однако, когда спиновый парамагнетизм особенно силен [или если  $H_{c2}$  очень велико по сравнению с  $H_p(0)$ ], переход в нормальное состояние может оказаться фазовым переходом первого рода. Это впервые



Фиг. 52. Кривая перехода из состояния БКШ в нормальное состояние для тех же условий, что и на фиг. 51, по вычислениям Сарма [3].

Кривая между  $H_0$  и  $H_p(0)$  ( $\gamma H_p^0 / \Delta_0 = 1/\sqrt{2}$ ) соответствует переходу первого рода.

было отмечено Сарма [3], вычислившим поле, в котором происходит сверхпроводящий переход, для частного случая однородного поля, действующего только на спины (обменное поле). Он получил кривую  $T(H)$ , разделяющую состояние БКШ и поляризованное нормальное состояние (фиг. 51 и 52). Существует тройная точка  $T_c(H_0)$ , в которой фазовый переход становится переходом первого рода [при  $T < T_c(H_0)$ ,  $H > H_0$ ]. Однако Фульде и Феррелл [4] предположили, что система может перейти в «непарное» сверхпроводящее состояние, в котором

куперовские пары будут иметь определенный не равный нулю импульс<sup>1)</sup>. Переход между сверхпроводящим состоянием и «непарным» состоянием будет фазовым переходом первого рода, а переход между «непарным» и нормальными состояниями будет по-прежнему переходом второго рода. Этот вопрос рассматривался Сарма и Сан-Жамом [6]. Они пришли к заключению, что образование состояния, предложенного Фульде и Ферреллом, возможно только в чистых сверхпроводниках. Для грязных сверхпроводников образование такого состояния невыгодно и переход из сверхпроводящего в нормальное состояние может быть переходом первого рода, что соответствует расчетам Сарма<sup>2)</sup>.

Необходимо подчеркнуть, что вышеприведенные рассуждения справедливы для модели, в которой учитывается только действие поля на электронные спины. Маки [7] вычислил поле  $H_{c_2}$  как функцию температуры с учетом орбитальных эффектов. Его результаты были получены для случая грязных сверхпроводников и справедливы только, если сверхпроводящий переход является фазовым переходом второго рода. Маки рассмотрел вопрос о характере фазового перехода и пришел к выводу, что для достаточно высоких отношений  $H_{c_2}(0)/H_p(0)$  сверхпроводящий переход при низких температурах становится переходом первого рода.

Теоретически спиновая восприимчивость в сверхпроводнике должна быть равна нулю при  $T = 0$ . Это не согласуется с измерением сдвига Найта для малых частиц, для которых сдвиг составляет 75% сдвига в нормальном

---

<sup>1)</sup> Независимо от Фульде и Феррелла такое состояние было изучено в работе А. И. Ларкина и Ю. Н. Овчинникова [26]. Его было бы правильнее называть неоднородным сверхпроводящим состоянием, так как куперовские пары в нем имеются, однако параметр упорядочения меняется по пространству периодическим образом с периодом порядка корреляционной длины. Для осуществления такого состояния нужно, чтобы длина пробега была больше периода структуры, т. е. больше корреляционной длины, как это и указано в основном тексте. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Этот вопрос рассматривался также Грюнбергом и Гюнтером [5], которые пришли к аналогичному заключению; см. § 3.

состоянии<sup>1)</sup>. Это заставило Феррелла [8], Андерсона [9], Абрикосова и Горькова [10] и Горькова [11] рассмотреть вопрос о влиянии спин-орбитального рассеяния. В силу спин-орбитального взаимодействия электроны при рассеянии могут изменить направление спина, что приведет к нарушению корреляции электронов в паре, и, следовательно, при  $T = 0$  спиновая восприимчивость не обратится в нуль.

Этот эффект был учтен Верзамером и др. [12] и независимо от них Маки [13]. Они учли и спиновый парамагнетизм и спин-орбитальное рассеяние и пришли к заключению, что в таком случае влияние спинового парамагнетизма уменьшается. В частности, они вычислили поле  $H_{c2}$  для случая грязного сверхпроводника и показали, что оно выше соответствующего поля, вычисленного Маки при отсутствии спин-орбитальных эффектов.

Теперь перейдем к количественному обсуждению затронутых вопросов, используя формализм, примененный в гл. 5, без детального обсуждения характера фазового перехода. Будут приведены лишь основные результаты; более подробное обсуждение см. в цитированной литературе.

## § 2. Вычисление различных ядер

Начнем с вычисления различных ядер, пренебрегая спин-орбитальным рассеянием. Это, естественно, приведет нас к вопросу о «непарном» состоянии Фульде и Феррелла. Чтобы получить ядро  $K(\mathbf{q})$  в присутствии парамагнитного эффекта, необходимо вернуться к

<sup>1)</sup> Приведенное значение найтовского сдвига было получено для конкретного образца из частиц олова и примерно такое же значение было найдено для частиц ртути. Желание объяснить это «магическое» число привело к возникновению целого ряда неправильных теорий. По-видимому, правильной является теория, учитывающая спин-орбитальные эффекты при рассеянии электронов на примесях и на границах образца. Из нее следует, что отношение найтовского сдвига в сверхпроводящем состоянии к сдвигу в нормальном состоянии зависит от отношения длины пробега электрона, связанной с переворотом спина, и корреляционной длины и, следовательно, может иметь различное значение в разных образцах. Это заключение подтвердилось в результате дальнейших экспериментов на других металлах (алюминий, ванадий). — *Прим. ред.*

микроскопическому рассмотрению гл. 5 с учетом парамагнетизма Паули, а именно

$$\gamma \int h(\mathbf{r}) [\Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) - \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r})] d\mathbf{r}. \quad (6.7)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{1}{2} g \mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (g = 2).$$

Влияние этого члена в самом общем случае оценить очень трудно. Однако если предположить, что микроскопическое поле  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  постоянно, независимо от  $\mathbf{r}$  и равно во всем образце приложенному полю, то можно провести вычисления. Такое предположение является более сильным, чем предположение о медленном изменении вектора-потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Если сверхпроводящий переход является переходом второго рода, то вблизи  $H_{c2}$ , где параметр упорядочения [а следовательно, и  $\Delta(\mathbf{r})$ ] мал, это предположение будет справедливо по крайней мере для грязных веществ. Как и в гл. 5, полученные результаты в случае грязных веществ будут справедливы во всем температурном интервале. Для чистых же сверхпроводников можно высказать лишь общие соображения. Более того, и в случае грязных сверхпроводников возникнут осложнения, поскольку, когда поле превысит определенное значение, переход станет переходом первого рода и принятые предположения окажутся несправедливыми.

Если оператор поля электронов  $\Psi$  разложить в ряд следующим образом:

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_n \varphi_{n\alpha}(\mathbf{r}) a_{n\alpha}, \quad (6.8)$$

где  $\alpha$  — спиновый индекс, то  $\varphi_{n\alpha}(\mathbf{r})$  удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 + U + \gamma h \right] \varphi_{n\uparrow}(\mathbf{r}) = \xi_{n\uparrow} \varphi_{n\uparrow}(\mathbf{r}), \quad (6.9a)$$

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 + U - \gamma h \right] \varphi_{n\downarrow}(\mathbf{r}) = \xi_{n\downarrow} \varphi_{n\downarrow}(\mathbf{r}). \quad (6.9б)$$

Здесь  $h$  — модуль  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ , а ось  $z$  параллельна  $\mathbf{h}$ . Если считать  $h$  постоянным и равным приложенному полю  $H$  и если предположить, что  $\mathbf{A}$  — медленно меняющаяся функ-

ция  $\mathbf{r}$ , то  $\varphi_{n\alpha}(\mathbf{r})$  можно записать в виде

$$\varphi_{n\alpha}(\mathbf{r}) = e^{i(e/c)\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}}\omega_{n\alpha}(\mathbf{r}). \quad (6.10)$$

Функция  $\omega_{n\alpha}(\mathbf{r})$  удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\frac{1}{2m}(p^2 + U + \gamma H)\omega_{n\uparrow}(\mathbf{r}) = \xi_{n\uparrow}\omega_{n\uparrow}(\mathbf{r}), \quad (6.11a)$$

$$\frac{1}{2m}(p^2 + U - \gamma H)\omega_{n\downarrow}(\mathbf{r}) = \xi_{n\downarrow}\omega_{n\downarrow}(\mathbf{r}). \quad (6.11б)$$

Ясно, что если  $H$  постоянно, функцию  $\omega_{n\alpha}(\mathbf{r})$  можно считать вещественной и не зависящей от спина, в то время как

$$\xi_{n\uparrow} = \xi_n + \gamma H, \quad (6.12a)$$

$$\xi_{n\downarrow} = \xi_n - \gamma H, \quad (6.12б)$$

где  $\xi_n$  — энергия электрона в отсутствие поля. Вычисления проводятся аналогично вычислениям в гл. 5. Очевидно, что мы получим те же выражения, только нужно везде заменить  $\omega$  на  $\omega - i\gamma H$ . Ядро  $K(\mathbf{q})$  будет функцией  $K(\mathbf{q}, H, T)$  от  $\mathbf{q}$ ,  $H$  и  $T$ :

$$K(\mathbf{q}, H, T) = -\text{Im} \sum_{n, \omega} \frac{V T}{\Omega} \int_0^{\infty} dt e^{-2|\omega|t} e^{2i\gamma H t} \times \\ \times \langle n | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}(t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}(0) | n \rangle \left( \frac{1}{\xi_n + i\omega + \gamma H} - \frac{1}{\xi_n - i\omega - \gamma H} \right). \quad (6.13)$$

Корреляционная функция, появляющаяся в правой части выражения (6.13), которая в случае нормального металла должна вычисляться в отсутствие поля, была уже получена в гл. 5. Поэтому выражение (6.13) будет справедливо при тех же условиях, что и в гл. 5. Однако здесь появляется дополнительное ограничение, поскольку применение функции  $K(\mathbf{q}, H, T)$  ограничено областью вблизи  $H_{c_2}$ . Как для грязных, так и для чистых сверхпроводников функция  $K(\mathbf{q}, H, T)$  получается из соответствующих ядер (см. гл. 5) при замене  $\omega$  на  $\omega - i\gamma H$ , а  $K(\mathbf{q})$ , как обычно, является расходящимся рядом по  $\omega$ . Для восстановления сходимости ряда запишем линейную часть уравнения для  $\Delta$  в виде

$$[K(\mathbf{q}, H, T) - K(0, 0, T)]\Delta(\mathbf{q}) = [1 - K_t(0, 0, T)]\Delta(\mathbf{q}), \quad (6.14)$$

где в выражении для  $K_t(0, 0, T)$  учитывается обрезание БКШ. Ясно, что  $K_t(0, 0, T)$  — ядро, уже вычисленное в гл. 5, так что выражение

$$K_t(0, 0, T) = 1 \quad (6.15)$$

определяет температуру сверхпроводящего перехода  $T_0$  в нулевом поле в отсутствие парамагнитного эффекта. Правая часть уравнения (6.14) принимает вид

$$1 - K_t(0, 0, T) = N(0) V \ln \frac{T}{T_0}.$$

Линеаризованное уравнение для потенциала пары можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left[ K \left( \mathbf{p} - \frac{2e\mathbf{A}}{c}, H, T \right) - K(0, 0, T) \right] \Delta(\mathbf{r}) = \\ = [1 - K_t(0, 0, T)] \Delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Это уравнение можно теперь использовать для вычисления критического поля точно так же, как в гл. 5. Мы проведем эти вычисления в § 4, а сейчас перейдем к обсуждению некоторых особых свойств ядра  $K(\mathbf{q})$ , которые позволяют исследовать возможность существования состояния Фульде и Феррелла.

### § 3. Состояние Фульде и Феррелла

Уравнение (6.16) для  $\Delta(\mathbf{r})$  имеет весьма сложный вид. Интересно в связи с этим рассмотреть несколько идеализированную задачу, в которой состояние БКШ сравнивается с поляризованным нормальным состоянием, т. е. учитывается только действие постоянного поля на спины при пренебрежении вкладом вектора-потенциала  $\mathbf{A}$ . Рассмотрение упрощается, если переписать (6.16) в виде

$$[K(\mathbf{q}, H, T) - K(0, H, T)] \Delta(\mathbf{q}) = [1 - K_t(0, H, T)] \Delta(\mathbf{q}). \quad (6.17)$$

Здесь определено новое ядро  $K_t(0, H, T)$ , в котором учтено обрезание БКШ. Если положить  $\Delta(\mathbf{r})$  постоянным, получаем состояние БКШ. В этом случае  $\Delta(\mathbf{q})$  от-



личается от нуля только при  $q = 0$ . Мы видим, что уравнение

$$K_t(0, H, T) = 1 \quad (6.18)$$

определяет температуру перехода  $T_c(H)$ , соответствующую переходу из состояния БКШ в нормальное поляризованное состояние. Оно описывает изменение парамагнитного предела в зависимости от температуры, т. е. дает в явном виде выражение (6.4).

Соответствующее изменение  $T_c(H)$  в зависимости от  $H$  впервые было получено Балтенспергером [14] (фиг. 51). Здесь мы видим очень странную зависимость  $H_p$  от  $T$ . Это связано с тем, что при выводе уравнения (6.18) было предположено, что переход между состоянием БКШ и нормальным состоянием является фазовым переходом второго рода. В 1963 г. Сарма [3] отметил, что существует критическая точка  $[H_0, T_c(H_0)]$ , в которой переход становится фазовым переходом первого рода. Такой результат Сарма получил при рассмотрении свободных энергий состояния БКШ, нормального состояния и поляризованного состояния БКШ, в котором величина щели зависит от поля. Обсудим этот вопрос в рамках теории фазовых переходов Ландау. Третий член в разложении в ряд по  $\Delta$  для нашей упрощенной задачи легко получить из коэффициента  $R$  [см. (5.129)], заменяя  $\omega$  на  $\omega - i\gamma N$ .

Чтобы переход был переходом второго рода, коэффициент  $R$  должен быть положителен. Если  $R$  обращается в нуль и меняет знак, то переход второго рода заменяется переходом первого рода, и разложение в ряд по степеням  $\Delta$ , вообще говоря несправедливо [15]. Поэтому критическую точку  $[H_0, T_c(H_0)]$  находим, совместно решая уравнения

$$\begin{aligned} K_t(0, H, T) &= 1, \\ R(H, T) &= 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Из (5.129) видно, что

$$R = -\frac{\pi k_B T}{2} \operatorname{Re} \sum_{\omega} \frac{1}{(|\omega| + i\gamma H)^3} \quad (6.20)$$

обращается в нуль при

$$\frac{\gamma H_0}{k_B T_c(H_0)} = 1,911. \quad (6.21)$$

Уравнения (6.19) были решены Сарма, который получил

$$\begin{aligned} \frac{\gamma H_0}{\Delta_0} &= 0,61, \\ \frac{k_B T_c(H_0)}{\Delta_0} &= 0,31. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Здесь  $\Delta_0 = 1,74 k_B T_0$  — энергетическая щель БКШ при  $T = 0$ . При температурах  $T < T_c(H_0)$  сверхпроводящий переход становится фазовым переходом первого рода. Вблизи  $T_c(H_0)$  поле и температуру перехода можно вычислить, используя высшие члены разложения в степенной ряд по  $\Delta$ . Соответствующая кривая перехода, вычисленная Сарма с помощью другого метода, изображена на фиг. 52. При  $T = 0$  поле перехода  $H_p(0)$  получаем из соотношения

$$\frac{\gamma H_p(0)}{\Delta_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (6.23a)$$

т. е.

$$H_p(0) = \frac{\sqrt{2} \Delta_0}{g \mu_B}. \quad (6.23b)$$

Как и следовало ожидать, нами получен предел Чандрасекара — Клогстона.

Все приведенные выше рассуждения справедливы для постоянной величины  $\Delta$ . Однако, как было впервые замечено Фульде и Ферреллом, уравнение (6.16) (в отсутствие  $\mathbf{A}$ ) имеет также решения вида

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{q}_0) e^{i\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{r}}, \quad (6.24)$$

где  $\mathbf{q}_0$  — вектор и  $\Delta(\mathbf{q}_0)$  — постоянная. Соответствующее уравнение для  $\Delta(\mathbf{q}_0)$  принимает вид (6.17).

Если  $\mathbf{q}_0$  отличается от нуля, потенциал пары  $\Delta(\mathbf{r})$  соответствует «непарному» сверхпроводящему состоянию, в котором куперовские пары имеют единый отличный

от нуля импульс<sup>1)</sup>. Если переход из такого непарного состояния в поляризованное нормальное состояние является фазовым переходом второго рода, то из (6.17) видно, что каждой температуре  $T$  будет соответствовать предельное поле  $H_{FF}$  или, наоборот, каждому полю  $H$  — температура перехода  $T_{FF}$ , которая получается из уравнения

$$K(q_0, H, T) - K(0, H, T) = 1 - K_t(0, H, T), \quad (6.25a)$$

или

$$K(q_0, H, T) - K(0, 0, T) = 1 - K_t(0, 0, T) = N(0) V \ln \frac{T}{T_0}. \quad (6.25b)$$

Из (6.25b) ясно, что состояние Фульде и Феррелла соответствует максимуму  $K(q_0, H, T) - K(0, 0, T)$  [или, что то же самое, максимуму  $K(q_0, H, T) - K(0, H, T)$ ] как функции  $q_0$ . Таким образом, переходная кривая  $H = f(T)$  получается при совместном решении уравнения (6.25b) и уравнения<sup>2)</sup>

$$\frac{dK(q, H, T)}{dq} = 0. \quad (6.26)$$

Прежде чем начать подробный анализ уравнения (6.26), отметим, что если непарное состояние существует, то переход между состоянием БКШ (которое, очевидно, является правильным решением для слабых полей) и непарным состоянием должен быть переходом первого рода. Тогда функция  $K(q, H, T) - K(0, H, T)$  не имеет максимума, если  $H < H_0$ , где  $H_0$  определяется из (6.21) и (6.22).

Как и в гл. 5, теперь необходимо ввести понятие грязных и чистых сверхпроводников. Для грязного сверхпроводника ядро  $K(q)$  легко получить из соответ-

<sup>1)</sup> Согласно уравнению (5.133) для тока, выражение (6.24) для  $\Delta(\mathbf{r})$  приводит к появлению постоянного тока. Однако этот ток компенсируется противоположно направленным током неспаренных электронов [4].

<sup>2)</sup> Отметим, что  $K(q, H, T)$  зависит только от модуля  $q$ .

ствующего ядра гл. 5, заменив  $\omega$  на  $\omega - i\gamma H$ , так что

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}, H, T) - K(0, H, T) &= \\ &= 2\pi k_B T N(0) V \operatorname{Re} \sum_{\omega} \left( \frac{1}{2|\omega| + Dq^2 - i\gamma H} - \frac{1}{2|\omega| - 2i\gamma H} \right). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Для чистого сверхпроводника аналогичное преобразование приводит к выражению

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}, H, T) - K(0, H, T) &= \\ &= \frac{\pi V N(0) k_B T}{qv_F} \operatorname{Re} \sum_{\omega} \left( \operatorname{arctg} \frac{qv_F - 2\gamma H}{2|\omega|} + \operatorname{arctg} \frac{qv_F + 2\gamma H}{2|\omega|} \right) - \\ &\quad - \pi V N(0) k_B T \operatorname{Re} \sum_{\omega} \frac{1}{|\omega| + i\gamma H}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Эти функции были вычислены Сарма и Сан-Жамом [6] для различных значений отношения  $H/T$  в зависимости от  $\mathbf{q}$ . Их результаты приведены на фиг. 53 и 54.

Мы видим, что в случае грязного сверхпроводника функция  $K(\mathbf{q}, H, T) - K(0, H, T)$  не имеет максимума и всегда отрицательна, так что нет оснований ожидать появления непарного состояния. Это согласуется с тем фактом, что диффузия, происходящая в грязном сверхпроводнике, делает маловероятным синусоидальное изменение потенциала пары. Однако в случае чистого сверхпроводника легко видеть, что максимум существует при  $q_0 \neq 0$ , если  $H/T > H_L/T$ . Это связано с тем, что производная

$$\left[ \frac{dK(\mathbf{q}, H, T)}{dq} \right]_{q=0}$$

отрицательна при  $H/T < H_L/T$  и положительна при  $H/T > H_L/T$ . Предельное поле  $H_L$  определяется из

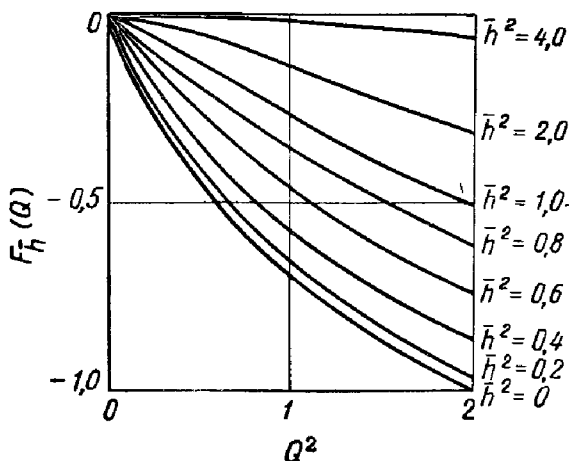
$$\left[ \frac{d^2 K(\mathbf{q}, H, T)}{dq^2} \right]_{q=0} = 0. \quad (6.29)$$

Как и следовало ожидать, это уравнение соответствует уравнению  $R = 0$ , где  $R$  определяется выражением

(6.20). Отсюда находим предельную точку

$$H = H_0, \quad T = T_c(H_0).$$

Теперь легко вычислить кривую перехода между непарным и нормальным состояниями, решив уравнения (6.25б) и (6.26). Эта кривая изображена на фиг. 55.



Фиг. 53. Грязные сверхпроводники.

Зависимость

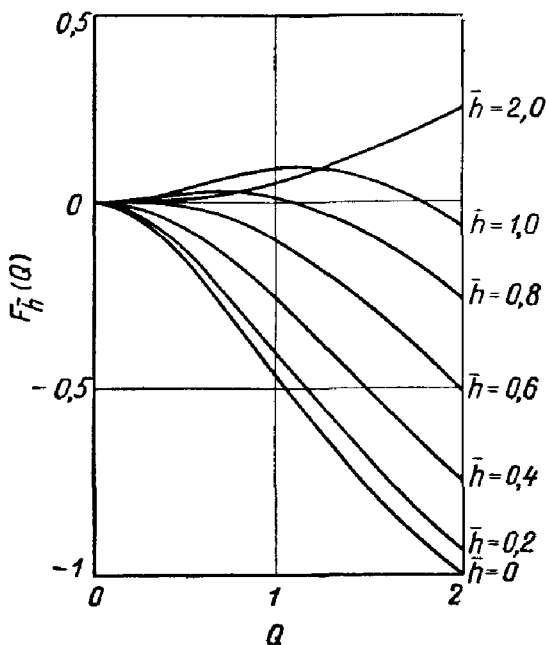
$$F_{\bar{h}}(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2n+1+Q^2}{(2n+1+Q^2)^2 + \bar{h}^2} - \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + \bar{h}^2} \right]$$

от  $Q^2 = Dq^2/2\pi k_B T$  для различных значений  $\bar{h} = \gamma H/\pi k_B T$ . Видно, что эта функция максимальна при  $Q=0$ .

Для полноты картины необходимо было бы теперь вычислить кривую перехода первого рода между состоянием БКШ и непарным состоянием, но это не было сделано для всех температур. В своей оригинальной статье Фульде и Феррелл рассматривали возможность существования непарного состояния при  $T=0$  в случае чистого сверхпроводника. Они пришли к заключению, что общим условием существования такого состояния является условие  $H > H_0$ , но переход первого рода между состоянием БКШ и непарным состоянием происходит при  $\gamma H/\Delta_0 = 1/\sqrt{2}$  (предел Чандрасекара — Клогстона). В то время как переход между непарным и

нормальными состояниями является переходом второго рода и происходит при  $\gamma H/\Delta_0 = 0,76$  [согласно (6.256) и (6.26)]<sup>1)</sup>.

Кривая перехода первого рода между состоянием БКШ и непарным состоянием начинается, таким обра-



Ф и г. 54. Чистые сверхпроводники.

Зависимость

$$F_{\bar{h}}(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{Q} \operatorname{arctg} \frac{Q - \bar{h}}{2n+1} + \frac{1}{Q} \operatorname{arctg} \frac{Q + \bar{h}}{2n+1} - \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2 + \bar{h}^2} \right]$$

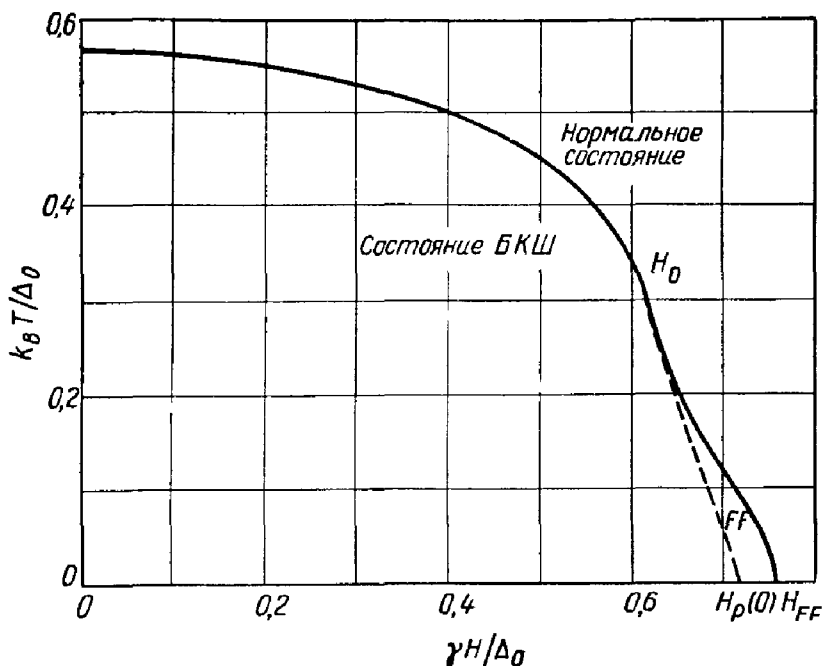
от  $Q = \hbar q v_F / 2k_B T$  для различных значений  $\bar{h} = \gamma H / \pi k_B T$ . Видно, что эта функция экстремальна при  $Q \neq 0$ , если  $H > H_0$ .

зом, в точке  $[H_0, T_c(H_0)]$  и кончается при  $\gamma H_0/\Delta_0 = 1/\sqrt{2}$ ,  $T = 0$ .

В заключение отметим, что из этой простой модели видно, что состояние Фульде и Феррелла вряд ли воз-

<sup>1)</sup> Можно показать, что при  $T = 0$  из (6.256) и (6.26) следует в точности то же самое уравнение, которое было получено Фульде и Ферреллом совершенно другим методом.

можно в случае грязного сверхпроводника. Поскольку ядро  $K(q, H, T)$  можно использовать для всего температурного интервала и поскольку оно не имеет максимума, то этот вывод должен быть правильным для всех тем-



Фиг. 55. Кривая перехода из состояния БКШ и из «непарного» состояния Фульде и Феррелла в нормальное состояние (сплошная линия).

Область существования состояния Фульде и Феррелла обозначена *FF*. Пунктирная линия соответствует приближительной границе между состоянием БКШ и состоянием Фульде и Феррелла.

ператур даже при учете орбитальных эффектов. В случае чистых сверхпроводников рассмотренная модель не позволяет сделать определенных выводов, поскольку применимость ядра  $K(q, H, T)$  строго ограничена окрестностью  $T_0$  — температурой сверхпроводящего перехода в нулевом поле.

В статье Грюнберга и Гюнтера [5] с помощью метода, аналогичного методу Гельфанда и Верзамера (см. гл. 5, § 5), был рассмотрен вопрос о возможности существования состояния Фульде и Феррелла при

наличии орбитальных эффектов. Они получили следующие результаты.

1) Для чистых сверхпроводников:

а) Для любого значения  $\alpha = \sqrt{2}H_{c_2}(0)/H_p(0) > 1,8$ , где  $H_{c_2}(0)$  — верхнее критическое поле в отсутствие парамагнитного эффекта при  $T = 0$ , существует температура  $T_{0,\alpha}$ , ниже которой состояние Фульде и Феррелла устойчиво. При  $\alpha \rightarrow \infty$  имеем<sup>1)</sup>

$$T_{0,\alpha} = T_c(H_0) = 0,55T_0,$$

где  $T_c(H_0)$  определяется из (6.22).

б) Переход из смешанного состояния в состояние Фульде и Феррелла является переходом первого рода, но переход из состояния Фульде и Феррелла в нормальное состояние — переход второго рода.

2) Для грязных сверхпроводников:

При  $\alpha \rightarrow \infty$  оптимальное решение для  $\Delta$  имеет вид  $\exp(iq_0z)\Delta(x, y)$ , что, видимо, находится в противоречии с выводами, сделанными в предыдущем параграфе<sup>2)</sup>.

Однако, рассматривая первую нелинейную поправку к уравнению для потенциала пары, Гюнтер и Грюнберг показали, что такое решение неустойчиво, так что вычисленное поле, при котором происходит переход, оказывается полем переохлаждения. Авторы не делают определенных выводов о возможности наблюдения состояния Фульде и Феррелла в грязных сверхпроводниках.

Итак, состояние Фульде и Феррелла, видимо, существует в чистых сверхпроводниках. Необходимо отметить, что это состояние существенно для сверхпроводников с высокими критическими полями, т. е. для материалов с большими  $\kappa$ , но таких материалов среди чистых сверхпроводников очень мало. Однако Грюнберг и Гюнтер высказывают предположение, что это новое состоя-

<sup>1)</sup> Можно показать, что при  $\alpha \rightarrow \infty$  орбитальные эффекты не существенны.

<sup>2)</sup> Согласно Грюнбергу (частное сообщение), это расхождение объясняется недостаточностью диффузионного приближения. Мы, однако, воспользовались им для простоты изложения.



ние может быть реализовано в  $V_3Ga$  при достаточно низкой температуре и высоких полях<sup>1)</sup>.

#### § 4. Поле $H_{c_2}$ в случае грязного сверхпроводника

Для грязного сверхпроводника непарное состояние, по-видимому, невозможно, и ядро  $K(q)$  применимо для всех температур. Поле  $H_{c_2}$  можно легко вычислить с помощью соответствующих уравнений (5.115) и (5.117). Замена  $\omega$  на  $\omega - i\gamma H$  дает

$$\ln \frac{T}{T_0} + f_0 \left( \frac{D}{2\pi k_B T} \frac{eH}{c} + \frac{i\gamma H}{2\pi k_B T} \right) = 0, \quad (6.30)$$

где  $f_0$  теперь равно

$$f_0(Z) = \operatorname{Re} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} + Z \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right) \right].$$

Решение уравнения (6.30) было найдено Маки [7], который получил критическое поле  $H_{c_2}^*$  при учете парамагнитного эффекта как функцию приведенной температуры. Удобно ввести параметр

$$\alpha = \frac{\gamma c}{eD}. \quad (6.31a)$$

Этот параметр связан непосредственно с пределом Чандрасекара — Клогстона при  $T = 0$ . Согласно (5.118a), поле  $H_{c_2}(0)$  при  $T = 0$  в отсутствие парамагнитного эффекта равно

$$H_{c_2}(0) = \frac{\Lambda_0}{2D} \frac{c}{e} = 0,87 \frac{k_B T_0}{D} \frac{c}{e}. \quad (6.32)$$

<sup>1)</sup> Интересно исследовать поведение состояния Фульде и Феррелла в зависимости от длины свободного пробега электронов  $l$ . Качественно можно утверждать, что, когда  $l$  уменьшается, кривая перехода между непарным и нормальным состояниями (переход второго рода) не будет совпадать с кривой, изображенной на фиг. 55. Она будет по-прежнему начинаться в точке  $H_0$ , но достигнет более низких полей. При определенном значении  $l$  кривая пройдет ниже кривой перехода первого рода, вычисленной Сарма (фиг. 52). Тогда непарное состояние будет неустойчивым и может возникнуть лишь как переохлажденное состояние. В конце концов при  $l = 0$  кривая достигнет кривой Балтенспергера, изображенной на фиг. 51.

Поле  $H_p(0)$  определяется из (6.5б). Таким образом,

$$\alpha = \sqrt{2} \frac{H_{c_2}(0)}{H_p(0)}, \quad (6.316)$$

и уравнение (6.30) принимает вид

$$\ln \frac{T}{T_0} + f_0 \left[ \frac{0,87}{2\pi} \frac{T_0}{T} \frac{H_{c_2}^*(T)}{H_{c_2}(0)} (1 + i\alpha) \right] = 0. \quad (6.33)$$

Зависимость  $H_{c_2}^*(T)/H_{c_2}(0)$  от  $T/T_0$  для различных значений  $\alpha$  изображена на фиг. 56. Используя асимптотическую форму  $\psi$ -функции, получаем

$$H_{c_2}^* = \frac{\Delta_0}{2D} \frac{c}{e} (1 + \alpha^2)^{-1/2} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{\pi k_B T}{\Delta_0} \right)^2 \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right] \text{ при } T \ll T_0, \quad (6.34a)$$

$$H_{c_2}^* = \frac{4k_B T_0}{D} \frac{c}{e} \left( 1 - \frac{T}{T_0} \right) \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{T}{T_0} \right) \left[ \frac{1}{2} - \frac{28\xi(3)}{\pi^4} (1 - \alpha^2) \right] \right\} \quad (6.34б)$$

при  $|T - T_0| \ll T_0$ .

В частности, при  $T = 0$  значение  $H_{c_2}^*(0)$  равно

$$H_{c_2}^*(0) = \frac{H_{c_2}(0) H_p(0)}{[2H_{c_2}^2(0) + H_p^2(0)]^{1/2}}. \quad (6.34в)$$

Вычисление поля  $H_{c_3}^*$  (т. е. поля  $H_{c_3}$  при наличии парамагнитного эффекта) выполняется аналогичным образом. Оператор  $(p - 2eA/c)^2$ , который входит в (6.16), должен быть заменен на  $0,59eH/\hbar c$ , и критическое поле  $H_{c_3}^*$  определяется из уравнения

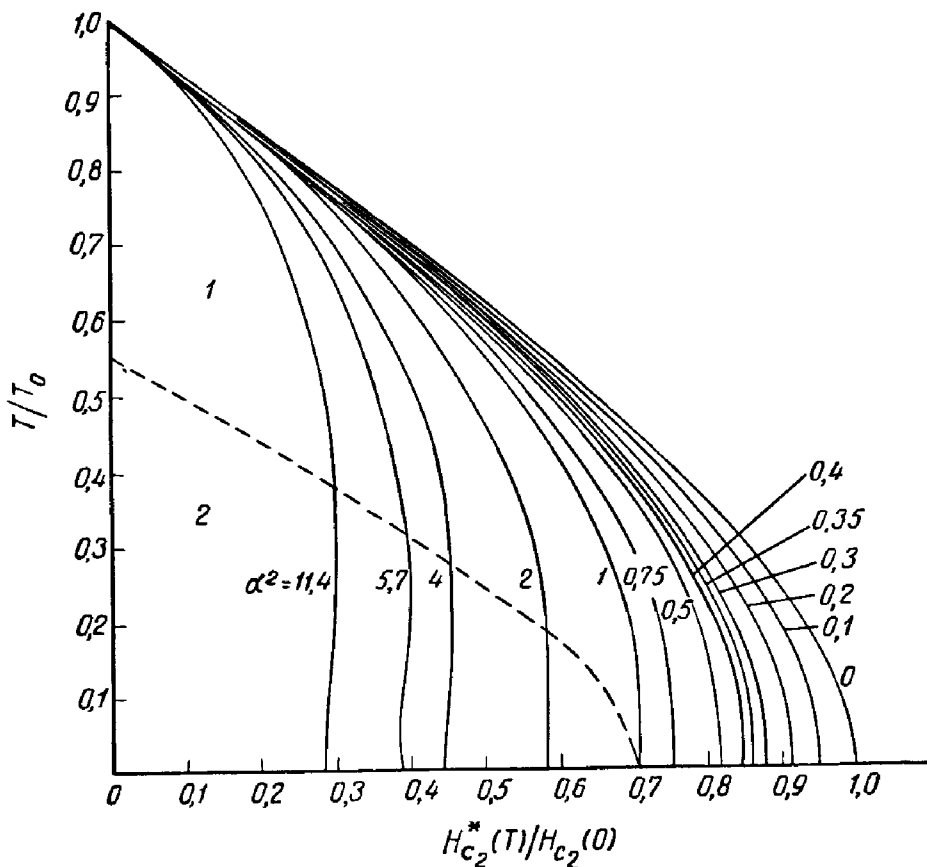
$$\ln \frac{T}{T_0} + f_0 \left( \frac{0,59D}{2\pi k_B T} \frac{e}{c} H_{c_3} + \frac{i\gamma H_{c_3}}{2\pi k_B T} \right) = 0. \quad (6.35)$$

Очевидно, что зависимость  $H_{c_3}^*$  от температуры просто получается из зависимости  $H_{c_2}^*$  при замене  $\alpha$  на  $1,69\alpha$ , т. е.

$$H_{c_3}^* = 1,69 H_{c_2}^*(1,69\alpha). \quad (6.36)$$

Соответствующая зависимость  $H_{c_3}^*/H_{c_2}^*$ , вычисленная Сан-Жамом [16], приведена на фиг. 57. Мы видим, что

отношение  $H_{c3}^*/H_{c2}^*$  равно 1,69 при  $T = T_0$  и уменьшается с понижением температуры. Можно получить соответ-



Фиг. 56. Зависимость  $H_{c2}^*(T)/H_{c2}^*(0)$  от  $T/T_0$  для различных значений параметра  $\alpha$ .

Предполагается, что переход при  $H_{c_0}^*$  является переходом второго рода. Пунктирная кривая соответствует границе между областями с переходами первого и второго рода (при больших  $\alpha$ ). В области 2, где переходы должны быть переходами первого рода, вычислений для кривых перехода не имеется.

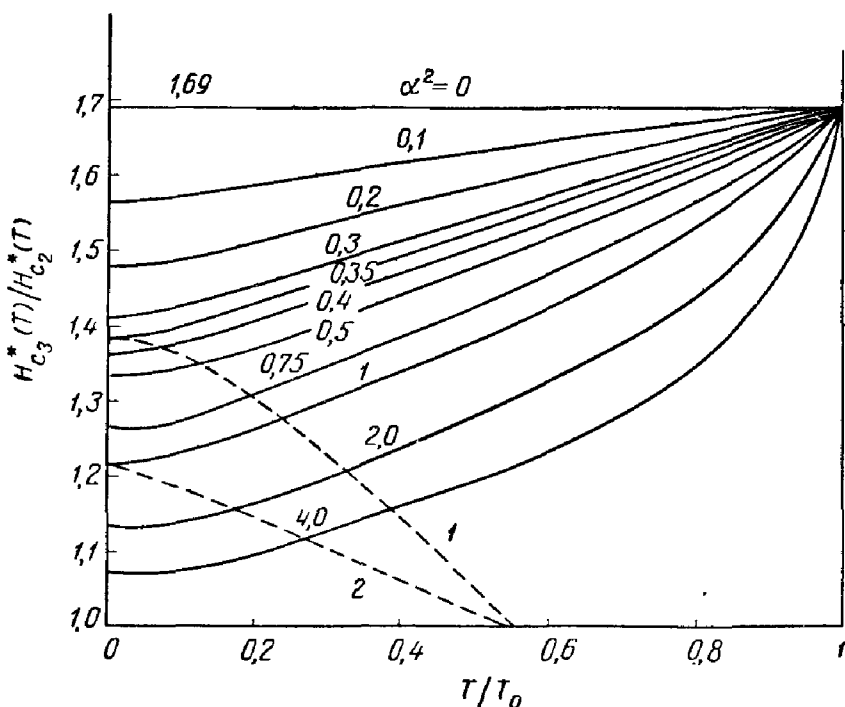
ствующую асимптотическую формулу из (6.34а) и (6.34б). В частности, при  $T = 0$

$$H_{c_3}^*(0) = \frac{H_{c_3}(0) H_p(0)}{[2H_{c_3}^2(0) + H_p^2(0)]^{1/2}}, \quad (6.37a)$$

где  $H_{c_3}^*(0) = 1,69H_{c_2}^*(0)$ . Таким образом, отношение  $H_{c_3}^*(0)/H_{c_2}^*(0)$  равно

$$\frac{H_{c_3}^*(0)}{H_{c_2}^*(0)} = \frac{1,69 \sqrt{\alpha^2 + 1}}{\sqrt{1,69^2 \alpha^2 + 1}}. \quad (6.376)$$

Одновременные измерения  $H_{c_3}^*$  и  $H_{c_2}^*$  должны непосредственно давать величину  $\alpha$ .



Фиг. 57. Зависимость отношения  $H_{c_3}^*/H_{c_2}^*$  от  $T/T_0$  для различных значений параметра  $\alpha^2$ .

Предполагается, что переходы при  $H_{c_3}^*$  и  $H_{c_2}^*$  являются переходами второго рода. Ниже кривой 1 переход становится переходом первого рода в поле  $H = H_{c_3}^*$ , а ниже кривой 2 переход становится переходом первого рода в поле

$$H = H_{c_2}^* \quad (\text{при больших } \kappa).$$

Все вышеприведенные рассуждения справедливы при условии, что переход из сверхпроводящего состояния в нормальное является переходом второго рода. Если же

происходит переход первого рода, то  $H_{c_2}^*$  и  $H_{c_3}^*$  будут лишь полями переохлаждения. Чтобы определить критические точки, в которых переход второго рода сменяется переходом первого рода, нужно вычислить коэффициент  $R$  в  $|\Delta|^2 \Delta$  и решить уравнение  $R = 0$  и уравнение (6.33) для  $H_{c_2}$ , [или (6.35) для  $H_{c_3}$ ]. Впервые это сделал Маки [42]. Его результаты, однако, ошибочны, поскольку он вывел коэффициент  $R$  из неправильного коэффициента, полученного без учета парамагнитного эффекта. Правильное уравнение легко найти, используя коэффициент  $R$ , полученный Кароли и др. [18] заменой  $\omega$  на  $\omega - i\gamma H$ . Отсюда находим, что критическая точка для больших значений  $\kappa$  при пренебрежении членом порядка  $1/\kappa^2$  определяется уравнением

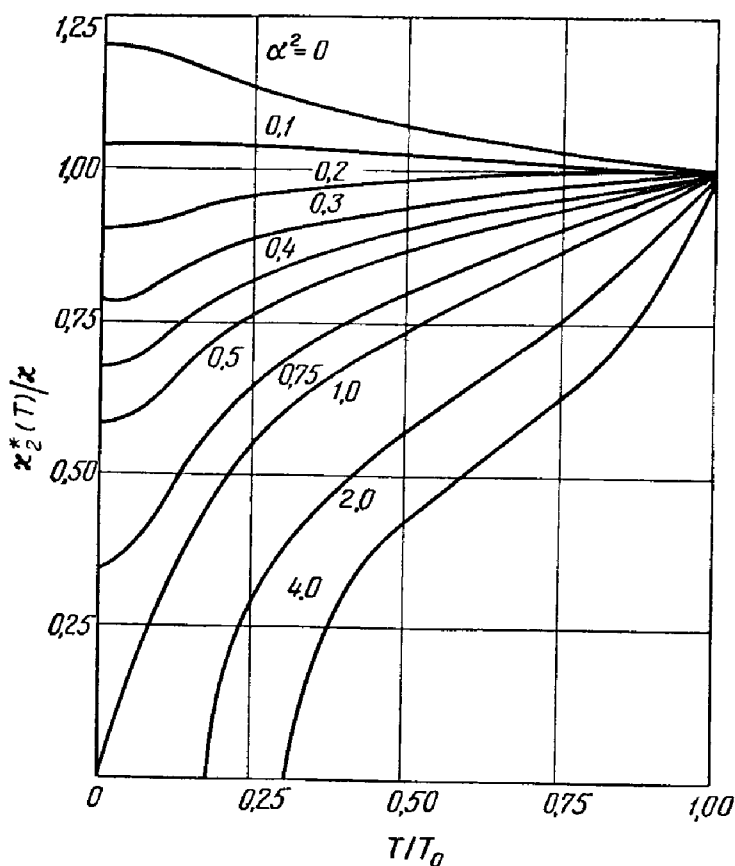
$$\operatorname{Re} \sum_n \frac{1}{[n + 1/2 + \bar{h} (1 + i\alpha)]^3} = 0, \quad (6.38)$$

$$\bar{h} = \frac{0,87}{2\pi} \frac{T_0}{T} \frac{H_{c_2}^*(T)}{H_{c_2}(0)}.$$

Решая уравнения (6.33) и (6.38), получаем для перехода в критическом поле  $H_{c_2}^*$  кривую, разделяющую область переходов первого и второго рода. Эта кривая изображена на фиг. 56. Найдено, что левая часть уравнения (6.38) не может обратиться в нуль при  $\alpha^2 < 1$  и что при  $\alpha^2 > 1$  при низких температурах переход становится переходом первого рода. Это находится в согласии с тем фактом, что  $H_{c_2}^*(T)$  становится двузначной функцией при  $\alpha^2 > 1$ . Необходимо заметить, что, какой бы ни была величина  $\alpha$ , переход в поле  $H_{c_2}^*$  является переходом второго рода вплоть до температуры  $T/T_0 = 0,557$ .

Нужно также отметить, что ошибка при определении коэффициента  $R$  приводит к ошибке в угловом коэффициенте кривой намагничивания при  $H = H_{c_2}$ . Таким образом, необходимо ввести поправку в коэффициент Маки  $\kappa_2^*$  (значение  $\kappa_2$  в присутствии парамагнитного эффекта). Исправленная зависимость  $\kappa_2^*$  от температуры изображена на фиг. 58. Видно, что при достаточно высоких

значениях  $\alpha$  отношение  $\kappa_2^*/\kappa$  должно уменьшаться с температурой. Это наблюдал Кейп [19] в сплавах Ti—Mo. Аналогичные выводы можно сделать относительно



Фиг. 58. Параметр Маки  $\kappa_2^*(T)/\kappa$  для различных значений  $\alpha^2$ .

Когда переход становится переходом первого рода, выражение  $2\kappa_2^{*2} - 1$  обращается в нуль.

поля  $H_{c_3}^*$ . Уравнение (6.38) остается справедливым при замене  $\alpha$  на  $1,69\alpha$ . Видно, что при  $\alpha > 1/1,69 = 0,59$  переход становится переходом первого рода. Тогда  $H_{c_3}^*$  — поле переохлаждения. На фиг. 57 изображены границы между переходами первого и второго рода при  $H = H_{c_3}^*$  или  $H = H_{c_2}^*$ . При экспериментальном определении пер-

пендикулярного и параллельного полей образования зародышей необходимо убедиться, что измеряется интересное нас поле. Если  $T/T_0 > 0,56$ , переход в обоих случаях будет переходом второго рода при любом значении  $\alpha$ . К настоящему времени не было сделано вычислений для параллельного и перпендикулярного полей образования зародышей в случае перехода первого рода <sup>1)</sup>.

Все эти рассуждения справедливы при больших значениях  $\kappa$ . Если это не выполняется, то при достаточно малых значениях  $\alpha$  переход становится переходом первого рода. Угловой коэффициент кривой намагничивания в поле  $H_{c_2}^*$  пропорционален  $-(2\kappa_2^{*2} - 1)^{-1}$ . Поскольку этот коэффициент не может быть положительным, это означает, что переход становится переходом первого рода, если  $\kappa_2^* < 1/\sqrt{2}$ . В силу того что при  $\alpha^2 > 0,13$  функция  $\kappa_2^*(T)/\kappa$  является убывающей функцией относительно  $T$ , вблизи  $T_0$  имеем сверхпроводник, для которого  $\kappa = \kappa_2(T_0) > 1/\sqrt{2}$ , а ниже определенной температуры  $T_1$  параметр  $\kappa_2$  меньше  $1/\sqrt{2}$ . При  $T < T_1$  переход в перпендикулярном поле будет переходом первого рода, а поле  $H_{c_2}^*$ , определяемое уравнением (6.33), будет полем переохладения. Однако практически справедливо приближение  $2\kappa_2^{*2} \gg 1$ , поскольку парамагнитный эффект существен только в веществах с высокими  $\kappa$ .

## § 5. Экспериментальные данные. Эффект спин-орбитального рассеяния

Были проведены различные эксперименты для сплавов с большими значениями  $\kappa$ , особенно для Ti—V, Ti—Nb и Ti—Mo [19—22]. К сожалению, не было проведено одновременных измерений  $H_{c_3}^*$  и  $H_{c_2}^*$ , так что непосредственное определение  $\alpha$  с помощью этого метода

<sup>1)</sup> Переход в поле образования зародышей может быть переходом второго рода в перпендикулярном поле и переходом первого рода в параллельном поле. Это может привести к завышенному значению  $H_{c_3}^*$ , а следовательно, и  $\alpha$ .

пока еще невозможно<sup>1)</sup>. Хотя  $\alpha$  является подгоночным параметром теории, но он может в принципе быть получен из измерений, проведенных для нормальной фазы. Коэффициент диффузии, входящий в (6.32), связан со свойствами переноса электронов в нормальном состоянии и выражается через скорость на поверхности Ферми  $v_F$  и среднюю длину свободного пробега  $l$ . Это приводит к следующему выражению:

$$\alpha = \frac{3e^2 \hbar \gamma_n \rho_n}{2m\pi^2 k_B^2}, \quad (6.39)$$

где  $\gamma_n$  — электронная теплоемкость в нормальном состоянии и  $\rho_n$  — сопротивление в нормальном состоянии для постоянного тока. Это выражение может также быть получено из отношения  $H_{c_2}(0)/H_p(0)$ , которое легко вычислить из выражения Горькова (5.155) для  $\kappa$ . В самом деле

$$H_{c_2}(0) = \frac{3\Delta_0 c}{2elv_F} = 3,09 \cdot 10^{-2} \rho_n \gamma_n T_0, \quad (6.40)$$

где  $\gamma_n$  и  $\rho_n$  выражены в единицах СГС.

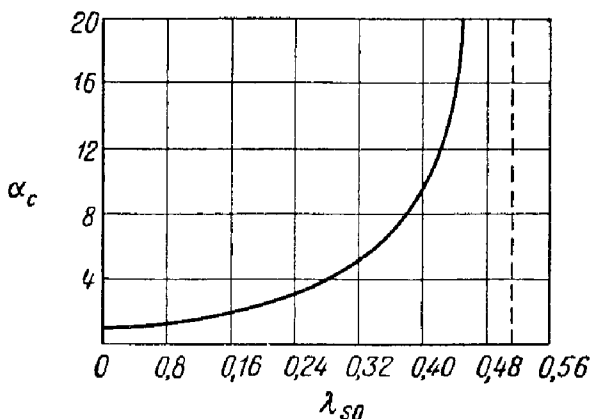
В сплавах Ti, исследованных авторами, указанными выше, коэффициент  $\alpha$  порядка 1,5. Вообще говоря, измеренные значения  $H_{c_2}^*(T)$ , как и следовало ожидать, меньше  $H_{c_2}(T)$ , что находится в качественном согласии с вычислениями Маки. Однако результаты, полученные для перпендикулярного критического поля, всегда больше теоретических значений, найденных при использовании вычисленного значения  $\alpha$ .

Как уже упоминалось в гл. 1, этот эффект можно объяснить спин-орбитальным рассеянием, которое приближает спиновую восприимчивость сверхпроводящего состояния к спиновой восприимчивости нормального со-

<sup>1)</sup> В статье Кима и др. [24] приводятся  $H_{c_3}$  и  $H_{c_2}$ , но без приемлемых температурных данных. Авторы успешно согласовали свои результаты с (6.37б) для низких значений  $\alpha$ . Недавно Хейк [23] получил значения  $H_{c_3}^{**}$  и  $H_{c_2}^{**}$ . Сравнение данных провести нельзя, поскольку  $H_{c_3}^{**}$  из-за несовершенства поверхности обращается в нуль при более высокой температуре, чем  $H_{c_2}^{**}$ .



стояния. Мы не будем подробно останавливаться на соответствующей теории, предложенной одновременно Верзамером и др. [12] и Маки [13], а приведем здесь выражение для  $H_{c_2}^{**}$  (значение  $H_{c_2}$  в присутствии парамаг-



Фиг. 59. Значения  $\alpha_c$ , при которых функция  $T(H_{c_2})$  становится двузначной функцией относительно  $\lambda_{SO}$ .

Пунктирная линия соответствует асимптоте при  $\lambda_{SO} = \lambda_{SO}^c$  [12].

нитного эффекта и спин-орбитального рассеяния) и сделаем несколько замечаний. Это выражение справедливо только для грязных сверхпроводников и при условии

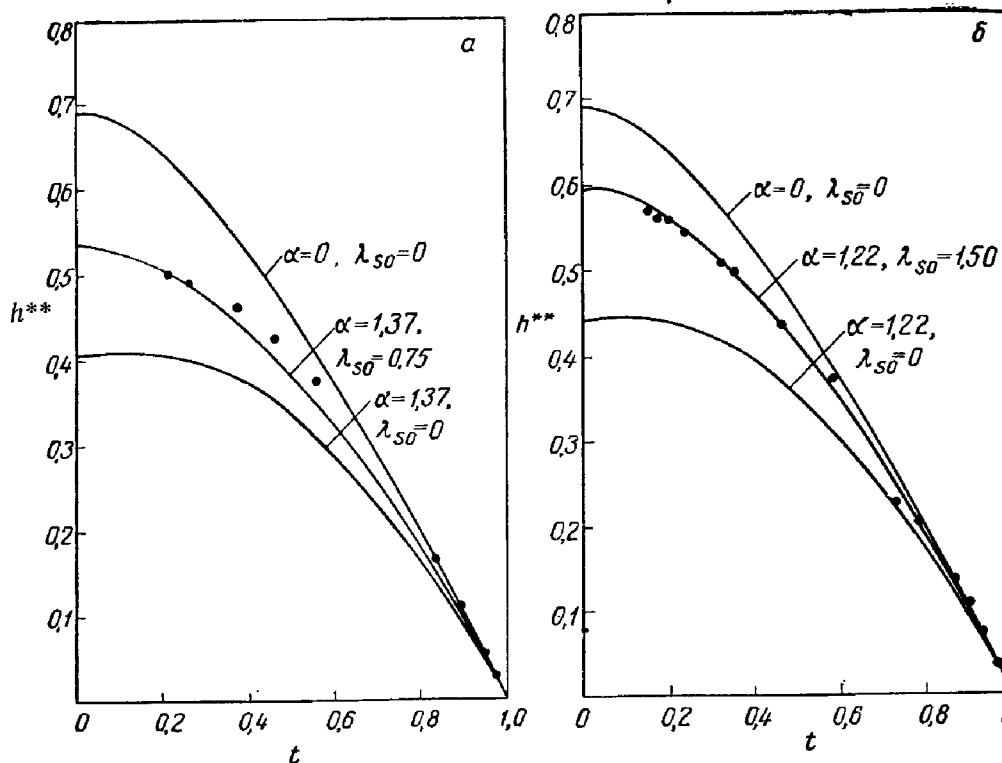
$$l \ll l_{SO},$$

где  $l$  — средняя длина свободного пробега электронов, не зависящая от спин-орбитального рассеяния в нормальном металле, а  $l_{SO} = v_F \tau_{SO}$  — средняя длина свободного пробега для спин-орбитального рассеяния. Чтобы выполнялось такое условие, длина  $l$  должна быть очень невелика и, кроме того, рассеяние с опрокидыванием спина должно происходить редко по сравнению с рассеянием без опрокидывания спина<sup>1)</sup>. Согласно Верзамеру

<sup>1)</sup> За исключением, может быть, сплава  $V_3Si$ , все сверхпроводники второго рода с критическим полем  $H_{c_2}$ , достаточно высоким для парамагнитного эффекта, являются грязными.

и др. [12], удобно ввести безразмерные переменные

$$t = \frac{T}{T_0}, \quad \bar{h} = \frac{\Delta_0}{4\pi k_B T_0} \frac{H_{c_2}^{**}}{H_{c_2}(0)}, \quad \lambda_{so} = \frac{\hbar}{3\pi k_B T_0 v_{so}}.$$



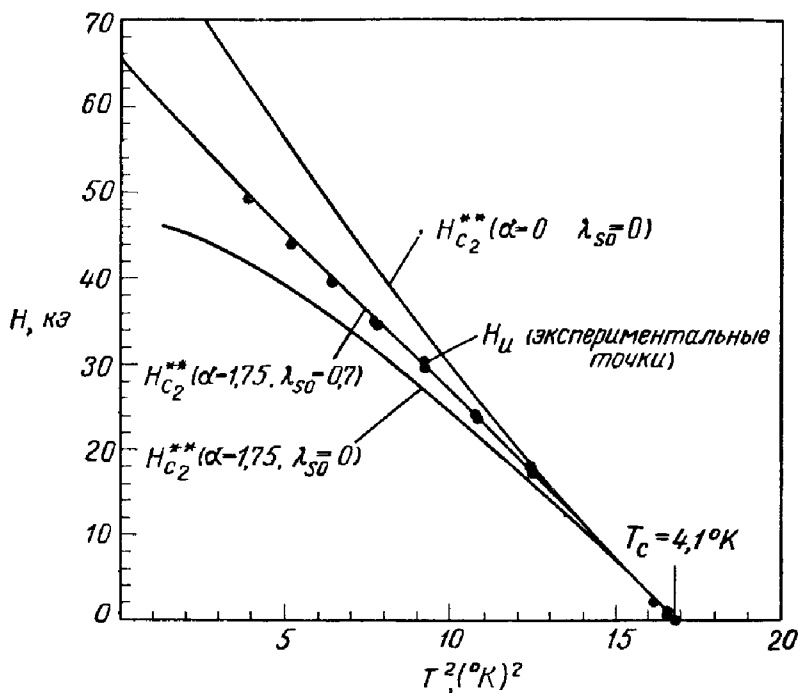
Фиг. 60. Сравнение теории с экспериментом для верхнего критического поля  $H_{c_2}^{**}$  в присутствии парамагнитного и спин-орбитального эффектов [12].

Кривые соответствуют зависимости функции  $h^{**} = H_{c_2}^{**}(t) / (-dH_{c_2}^{**}/dt)$   $t=1$  от  $t = T/T_0^2$  для сплавов: а — Ti — 65% V [21], б — Ti — 44% Nb [22].

Тогда уравнение для  $H_{c_2}^{**}$  принимает вид

$$\ln t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|2n+1|} - \left[ |2n+1| + \frac{\bar{h}}{t} + \frac{(\alpha\bar{h}/t)^2}{|2n+1| + (\bar{h} + \lambda_{so})/t} \right]^{-1} \right\}. \quad (6.41)$$

При  $\lambda_{so} = 0$  это уравнение переходит в уравнение (6.30). Из (6.41) видно, что, если  $\lambda_{so} > 0$ , спиновый парамагнетизм уменьшается, т. е.  $H_{c_2}^{**} > H_{c_2}^*$ . Верзамер и др. смогли также показать, что значение  $\alpha_c$ , при котором  $t$  ста-



Фиг. 61. Сравнение теории с экспериментом для верхнего критического поля  $H_{c_2}^{**}$  в присутствии парамагнитного и спин-орбитального эффектов для сплава Ti — 16% Mo [19].

новится двузначной функцией  $\bar{h}$ , растет с ростом  $\lambda_{so}$ . При  $\alpha > \alpha_c$  переход при низких температурах будет переходом первого рода<sup>1)</sup>. Если  $\lambda_{so} = 0$ , то  $\alpha_c = 1$  — результат, уже полученный в § 4. Зависимость  $\alpha_c$  от  $\lambda_{so}$  приведена на фиг. 59. Существует также такое критиче-

<sup>1)</sup> Граничная кривая между сверхпроводящим и нормальным состояниями не может быть двузначной функцией. Если бы это было так в области низких температур, то переход из сверхпроводящего состояния (упорядоченная фаза) в нормальное состояние (неупорядоченная фаза) мог бы происходить при понижении температуры и в то же время с увеличением энтропии. Это противоречит тому, что энтропия — возрастающая функция температуры.

ское значение  $\lambda_{so}^c = 0,5139$ , выше которого  $t$  никогда не становится двузначной функцией  $h$ . При  $\lambda_{so} > \lambda_{so}^c$  можно ожидать, что во всем температурном интервале переход останется переходом второго рода.

Существует вполне хорошее согласие между теорией и экспериментальными данными, полученными Страндом и Кимом [21], Шапира и Ньюрингером [22] и Кейпом [19]. Сначала определяется  $\alpha$  с помощью (6.39), а  $\lambda_{so}$  рассматривается как заданный параметр. На фиг. 60, *a* и *b*, и 61 приведены сравнения различных экспериментальных результатов с предсказаниями теории<sup>1)</sup>.

Можно также показать, что уравнение (6.41) справедливо и для  $H_{c_3}^{**}$  при замене  $H_{c_2}$  на  $H_{c_3}$ , а  $\alpha$  на  $1,69\alpha$ , т. е.

$$H_{c_3}^{**} = 1,69 H_{c_2}^{**}(1,69\alpha, \lambda_{so}). \quad (6.42)$$

Об измерениях  $H_{c_3}^{**}$  ничего не сообщалось, так что выражение (6.42) сравнить не с чем.

## Б. БЕСЩЕЛЕВАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

### § 6. Введение

В предыдущих главах было показано, что в сверхпроводящем состоянии имеется дальний порядок. Параметр упорядочения  $\psi(\mathbf{r})$  пропорционален потенциалу пары

$$\Delta(\mathbf{r}) = -V \langle \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle \quad (6.43)$$

(см. гл. 5). Необходимо снова подчеркнуть, что существование термодинамического среднего, фигурирующего в (6.43), является квантовым эффектом, не имеющим классического аналога, и что сверхпроводимость представляет собой квантовый эффект макроскопического масштаба.

В простейшем случае однородного газа электронов в отсутствие магнитного поля потенциал  $\Delta(\mathbf{r})$  переходит

<sup>1)</sup> См. также работу Хейка [23], который сравнивает экспериментальные значения  $\kappa_2$  со значениями, приведенными на фиг. 58.

в постоянную  $\Delta$ . В спектре возбуждений квазичастиц имеется энергетическая щель (БКШ). Однако  $\Delta(\mathbf{r})$  не всегда связан с энергетической щелью в спектре возбуждения. Потенциал  $\Delta(\mathbf{r})$  фактически может отличаться от нуля для всех значений  $\mathbf{r}$ , даже если в спектре нет энергетической щели. В этом случае спектр сверхпроводящей фазы не отличается *качественно* от спектра нормального состояния.

Абрикосов и Горьков [25] впервые показали, что такая ситуация возникает в случае сверхпроводника, содержащего магнитные примеси. Наиболее удивительным свойством является зависимость  $\Delta$  и температуры перехода  $T_0$  от концентрации примесей в отсутствие внешнего поля. Для данной концентрации щель в спектре возбуждения  $2\Delta$  может обратиться в нуль еще при конечной температуре  $T_0$ .

Недавно было обнаружено, что этим свойством обладают все сверхпроводники второго рода (грязные и чистые), когда приложенное поле слегка меньше верхнего критического поля. Это свойство будет рассмотрено подробнее.

## § 7. Параметр упорядочения и спектр возбуждения

В гл. 5 были получены основные выводы микроскопической теории в рамках самосогласованного метода. Гамильтониан (5.13), описывающий систему электронов в присутствии произвольного потенциала  $U_0(\mathbf{r})$  и двухчастичных взаимодействий, был заменен самосогласованным гамильтонианом (5.53), который в отсутствие спинового парамагнетизма Паули имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{эфф}} = & \int d\mathbf{r} \Psi_{\alpha}^{\dagger} \left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 + U(\mathbf{r}) - E_F \right] \Psi_{\alpha} + \\ & + \int d\mathbf{r} \left[ \Delta^*(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \right] + \\ & + \frac{1}{V} \int |\Delta(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}. \quad (6.44) \end{aligned}$$

В этом уравнении  $U(\mathbf{r})$  учитывает влияние примесей, граничные эффекты и др. Для диагонализации гамиль-

тониана (6.44) можно применить преобразование Боголюбова, т. е. положить

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_n [\gamma_{n\alpha} u_{n\alpha}(\mathbf{r}) + \gamma_{n\alpha}^{\dagger} v_{n\alpha}(\mathbf{r})], \quad (6.45)$$

где  $\gamma_n$  — операторы уничтожения для фермионов, которые удовлетворяют соотношениям антикоммутиации. Операторы  $\gamma_n$  соответствуют квазичастицам.

Величины  $u$  и  $v$  будут коэффициентами унитарного преобразования, если

$$\sum_{\alpha} \int d\mathbf{r} [u_{n\alpha}(\mathbf{r}) u_{m\alpha}^*(\mathbf{r}) + v_{n\alpha}(\mathbf{r}) v_{m\alpha}^*(\mathbf{r})] = \delta_{n,m}, \quad (6.46a)$$

$$\sum_{\alpha} \int d\mathbf{r} [u_{n\alpha}(\mathbf{r}) v_{m\alpha}(\mathbf{r}) + v_{n\alpha}(\mathbf{r}) u_{m\alpha}(\mathbf{r})] = 0, \quad (6.46b)$$

$$\sum_n [u_{n\alpha}(\mathbf{r}) u_{n\beta}^*(\mathbf{r}') + v_{n\alpha}^*(\mathbf{r}) v_{n\beta}(\mathbf{r}')] = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (6.46b)$$

$$\sum_n [u_{n\alpha}(\mathbf{r}) v_{n\beta}^*(\mathbf{r}') + v_{n\alpha}^*(\mathbf{r}) u_{n\beta}(\mathbf{r}')] = 0. \quad (6.46r)$$

После диагонализации  $\mathcal{H}_{\text{эфф}}$  принимает вид

$$\mathcal{H}_{\text{эфф}} = E_g + \sum_n \epsilon_n \gamma_{n\alpha}^{\dagger} \gamma_{n\alpha}, \quad (6.47)$$

и легко найти, что коммутатор гамильтониана  $\mathcal{H}_{\text{эфф}}$  и  $\gamma_{n\alpha}^{\dagger}$  равен

$$(\mathcal{H}_{\text{эфф}}, \gamma_{n\alpha}^{\dagger}) = \epsilon_n \gamma_{n\alpha}. \quad (6.48)$$

В выражении (6.47) член  $E_g$  дает энергию основного состояния  $\mathcal{H}_{\text{эфф}}$ , а  $\epsilon_n$  — энергию возбуждения.

Используя выражения (6.44), (6.45) и (6.48), мы видим, что функции  $u_{n\alpha}(\mathbf{r})$  и  $v_{n\alpha}(\mathbf{r})$  подчиняются следующему ряду линейных уравнений (уравнения Боголюбова):

$$\epsilon_n u_{n\uparrow}(\mathbf{r}) = T u_{n\uparrow}(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) v_{n\downarrow}(\mathbf{r}), \quad (6.49a)$$

$$\epsilon_n v_{n\downarrow}(\mathbf{r}) = -T^* v_{n\downarrow}(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r}) u_{n\uparrow}(\mathbf{r}), \quad (6.49b)$$

$$\epsilon_n u_{n\downarrow}(\mathbf{r}) = T u_{n\downarrow}(\mathbf{r}) - \Delta(\mathbf{r}) v_{n\uparrow}(\mathbf{r}), \quad (6.49b)$$

$$\epsilon_n v_{n\uparrow}(\mathbf{r}) = -T^* v_{n\uparrow}(\mathbf{r}) - \Delta^*(\mathbf{r}) u_{n\downarrow}(\mathbf{r}), \quad (6.49r)$$

где

$$T = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 + U(\mathbf{r}) - E_F. \quad (6.50)$$

Уравнения (6.49) определяют волновую функцию с двумя компонентами  $\begin{pmatrix} u_n \psi(\mathbf{r}) \\ v_n \alpha(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ , которая описывает возбуждение;  $u$  называется «амплитудой электрона», а  $v$  — «амплитудой дырки»,  $T$  — эрмитов оператор, и различные решения  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  ортогональны, так что удовлетворяется уравнение (6.46а). Поскольку решения  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^*$  соответствуют  $-\epsilon$ , уравнение (6.46б) также удовлетворяется.

Здесь  $\epsilon_n$  должно соответствовать энергии возбуждения, поэтому  $\epsilon_n > 0$ . Мы должны оставить в (6.49) решение, соответствующее этому условию. Следовательно, к уравнению (6.49а) нужно добавить самосогласованное уравнение для потенциала пары (6.44). Это уравнение можно записать через  $u_n$  и  $v_n$ , что мы сделаем здесь для случая, когда можно пренебречь спином [т. е. когда невозмущенный гамильтониан  $T$  имеет вид (6.50)].

В этом случае  $u$  и  $v$  можно считать вещественными и написать

$$u_{n\uparrow}(\mathbf{r}) = u_{n\downarrow}(\mathbf{r}) = u_n(\mathbf{r}), \quad (6.51a)$$

$$v_{n\downarrow}(\mathbf{r}) = -v_{n\uparrow}(\mathbf{r}) = v_n(\mathbf{r}), \quad (6.51b)$$

так что уравнения (6.49) принимают простой вид

$$\epsilon_n u_n(\mathbf{r}) = T u_n(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}), \quad (6.52a)$$

$$\epsilon_n v_n(\mathbf{r}) = -T^* v_n(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r}) u_n(\mathbf{r}), \quad (6.52b)$$

а самосогласованное уравнение для  $\Delta(\mathbf{r})$  имеет вид

$$\Delta(\mathbf{r}) = \sum_n u_n(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}) [1 - 2f(\epsilon_n)]. \quad (6.53)$$

Решая три уравнения (6.52а), (6.52б) и (6.53), мы должны прийти к полному решению задачи<sup>1)</sup>.

### 1. Энергетическая щель БКШ

В общем случае решение трех уравнений (6.52а), (6.52б) и (6.53) невозможно. Однако задача значительно

<sup>1)</sup> Детальное описание самосогласованного метода см. в [27].

упрощается, если уже известен потенциал пары  $\Delta(\mathbf{r})$ . Таким является случай однородного электронного газа в отсутствие магнитного поля ( $\mathbf{A} \equiv 0$ ), с рассмотрения которого начинается теория БКШ. Если  $\varphi_n(\mathbf{r})$  — собственная функция  $T$  с собственным значением  $\xi_n$ , то можно положить <sup>1)</sup>

$$u_n(\mathbf{r}) = u_n \varphi_n(\mathbf{r}), \quad (6.54)$$

$$v_n(\mathbf{r}) = v_n \varphi_n(\mathbf{r}), \quad (6.55)$$

и уравнения принимают вид

$$\epsilon_n u_n = \xi_n u_n + \Delta v_n, \quad (6.56)$$

$$\epsilon_n v_n = -\xi_n v_n + \Delta u_n. \quad (6.57)$$

Видно, что эта система обладает отличным от нуля решением, если

$$\epsilon_n^2 = \xi_n^2 + \Delta^2, \quad (6.58a)$$

или

$$\epsilon_n = (\xi_n^2 + \Delta^2)^{1/2}, \quad (6.58b)$$

и что в спектре квазичастиц существует щель, т. е.  $\epsilon \gg \Delta$ . Существование этой энергетической щели приводит к нескольким важным последствиям. При конечной температуре населенность квазичастичных состояний определяется ферми-функцией для энергий  $\epsilon_n$ . Удельная теплоемкость зависит от температуры по закону  $\exp(-\Delta/k_B T)$ , что дает возможность измерить  $\Delta$ . В других методах измерения  $\Delta$  используется рождение новых квазичастиц в системе. Можно разделить соответствующие эксперименты на две основные группы:

1) Можно создавать одиночные возбуждения. Это возможно при туннельных экспериментах, в которых электроны инжектируются в сверхпроводник через тонкий слой окиси и туннельный ток отличен от нуля, когда приложенное напряжение больше  $\Delta^2$ .

Эта методика, широко используемая для измерения  $\Delta$ , впервые была предложена Жевером [28]. В таком случае можно измерять плотность состояний в сверхпроводнике. Используя для  $\epsilon$  выражения (6.58), легко по-

<sup>1)</sup> Энергии  $\xi_n$  отсчитываются от энергии Ферми.

<sup>2)</sup> См. примечание на стр. 19. — *Прим. ред.*

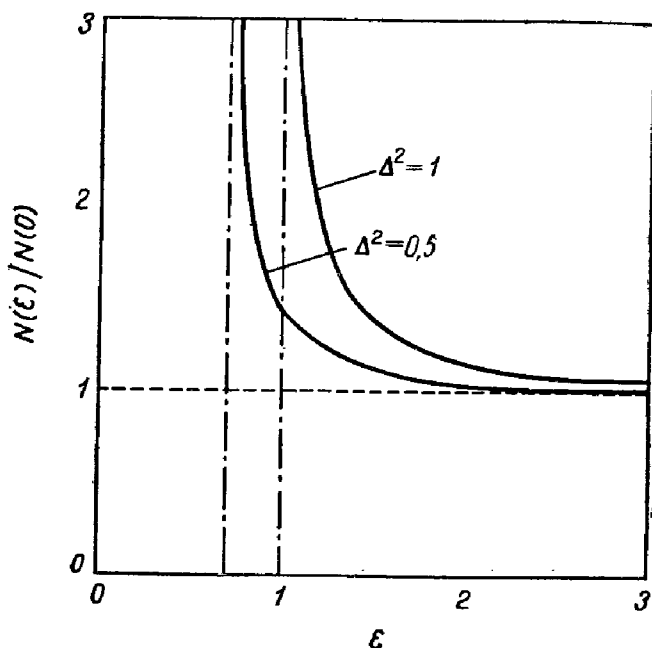


лучить эту плотность состояний в следующем виде:

$$\frac{N(\epsilon)}{N(0)} = \frac{\epsilon}{(\epsilon^2 - \Delta^2)^{1/2}} \quad \text{при } \epsilon > \Delta,$$

$$\frac{N(\epsilon)}{N(0)} = 0 \quad \text{при } \epsilon < \Delta,$$
(6.59)

где  $N(0)$  — плотность состояний на уровне Ферми в нормальном состоянии. Зависимость  $N(\epsilon)$  от  $\epsilon$  в модели БКШ изображена на фиг. 62.



Фиг. 62. Плотность состояний в модели БКШ для двух значений энергетической щели.

2) Когда сохраняется число частиц, возбуждения создаются путем «разрыва пар», для чего требуется энергия, равная по крайней мере  $2\Delta$ . Это происходит, например, в случае поглощения в инфракрасной области, когда наблюдается пороговое значение  $2\Delta$ . Более подробнее об этом и о других методах см. [29]. Величина щели для некоторых сверхпроводников приведена в табл. 1.

## 2. Вычисление спектра возбуждений в общем случае. Бесщелевая сверхпроводимость

Приведенные выше вычисления легко осуществимы, так как в модели БКШ  $\Delta(\mathbf{r})$  постоянен. Однако в общем случае потенциал пары будет зависеть от  $\mathbf{r}$ , и возникает необходимость решать два уравнения: уравнение Боголюбова (6.52) и самосогласованное уравнение (6.53). Вблизи  $T_0$  можно использовать потенциал пары  $\Delta(\mathbf{r})$ , полученный путем решения уравнений Гинзбурга — Ландау, поскольку при этом удовлетворяется самосогласованное уравнение. Кароли [30] применил этот метод для вычисления спектра возбуждения сверхпроводников второго рода при наличии вихревых линий вблизи  $H_{c1}$ .

Можно также получить энергии  $\epsilon_n$ , рассматривая потенциал пары  $\Delta(\mathbf{r})$  как возмущение. Очевидно, что если в спектре возбуждений существует щель, то это разложение не должно сходиться вблизи уровня Ферми. Это послужило основным принципом в вычислениях Де Жена [31], которые мы рассмотрим.

Предположим, что  $\varphi_n$  — собственная функция невозмущенного гамильтониана  $T$ , соответствующая энергии одноэлектронного возбуждения  $\xi_n$ . Фактически функции  $\varphi_n$  очень сложны, поскольку они учитывают все эффекты многократного рассеяния в нормальной фазе. Однако, как это было в случае грязных сверхпроводников (см. гл. 5), конечный результат содержит только одну частную комбинацию значений  $\varphi_n$ , имеющую простой физический смысл.

Технику теории возмущений можно использовать для решения уравнений (6.52). Функции  $u$  и  $v$  разлагаются в ряд следующим образом:

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{r}) &= u_n^0(\mathbf{r}) + u_n^1(\mathbf{r}) + \dots, \\ v_n(\mathbf{r}) &= v_n^0(\mathbf{r}) + v_n^1(\mathbf{r}) + \dots, \end{aligned} \quad (6.60)$$

где  $u_n^i(\mathbf{r})$  — поправка порядка  $|\Delta|^i$  к  $u_n$ , а  $v_n^i(\mathbf{r})$  — соответствующая поправка к  $v_n$ .

В нулевом порядке по  $\Delta$  имеем

$$u_n^0(\mathbf{r}) = \varphi_n(\mathbf{r}), \quad v_n^0(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{при } \xi_n > 0, \quad (6.61a)$$

$$u_n^0(\mathbf{r}) = 0, \quad v_n^0(\mathbf{r}) = \varphi_n^*(\mathbf{r}) \quad \text{при } \xi_n < 0. \quad (6.61б)$$

Энергия возбуждения соответствует электронам при  $\xi_n > 0$  и дыркам при  $\xi_n < 0$  и равна

$$\epsilon_n = |\xi_n|. \quad (6.62)$$

В первом порядке по  $\Delta$  функции  $u_n^1(\mathbf{r})$  и  $v_n^1(\mathbf{r})$  имеют вид

$$u_n^1(\mathbf{r}) = \sum_{m \neq n} a_{mn} \varphi_m, \quad (6.63a)$$

$$v_n^1(\mathbf{r}) = \sum_{m \neq n} b_{mn} \varphi_m^*. \quad (6.63б)$$

Легко видеть, что

$$a_{mn} = 0, \quad b_{mn} = -\frac{1}{\xi_n + \xi_m} \int d\mathbf{r} \varphi_m(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}) \quad \text{при } \xi_n < 0, \quad (6.64a)$$

$$b_{mn} = 0, \quad a_{mn} = -\frac{1}{\xi_n + \xi_m} \int d\mathbf{r} \varphi_m^*(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}) \varphi_n^*(\mathbf{r}) \quad \text{при } \xi_n > 0. \quad (6.64б)$$

Таким образом, во втором порядке по  $\Delta$  собственное значение равно

$$\epsilon_n = \xi_n + \sum_{m \neq n} \frac{\left| \int d\mathbf{r} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}) \varphi_m^*(\mathbf{r}) \right|^2}{\xi_n + \xi_m}. \quad (6.65)$$

Этот результат отчасти напоминает результат, полученный с помощью обычной теории возмущений, примененной к  $T$ , с  $\Delta(\mathbf{r})$  в качестве возмущающего потенциала. Следует обратить внимание на различие, которое заключается в появлении функции  $\varphi_m^*$  в числителе и знака плюс в знаменателе. Это различие возникает в связи с тем, что возмущение в полном гамильтониане имеет вид  $\Delta(\mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r})$ .

Чтобы получить матричный элемент в (6.65), введем оператор  $K$ , который преобразует  $\varphi_n$  в  $\varphi_n^*$ . Тогда<sup>1)</sup>

$$\int \varphi_n^*(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}) \varphi_m^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int \varphi_n^*(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}) K \varphi_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \langle n | \Delta(\mathbf{r}) K | m \rangle \quad (6.66)$$

и (6.65) принимает вид

$$\varepsilon_n = \xi_n + \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n | \Delta(\mathbf{r}) K | m \rangle|^2}{\xi_n + \xi_m}. \quad (6.67)$$

Теперь нужно исследовать свойства матричного элемента (6.66) с целью определения области применимости разложения (6.67). Можно исследовать два качественно различных случая:

а) Гамильтониан для нормального металла не содержит члена, соответствующего магнитному полю ( $\mathbf{A} \equiv 0$ ). В этом случае  $K$  коммутирует с  $T$ , т. е.

$$\left(\frac{p^2}{2m} + U\right) K = K \left(\frac{p^2}{2m} + U\right).$$

Собственные функции  $\varphi_n(\mathbf{r})$  этого гамильтониана очень сложны, но, как впервые было отмечено Андерсоном<sup>2)</sup> [9], можно построить состояние с «куперовскими парами», рассматривая две функции  $\varphi_n(\mathbf{r})$  и  $K\varphi_n(\mathbf{r})$ , отвечающие одной и той же энергии  $\xi_n$ . Разложение в ряд теории возмущений (6.67) запишем в виде

$$\varepsilon_n = \xi_n + \frac{|\langle n | \Delta(\mathbf{r}) | n \rangle|^2}{2\xi_n} + \sum_{\substack{m \\ m \neq n \\ m \neq Kn}} \frac{|\langle n | \Delta(\mathbf{r}) K | m \rangle|^2}{\xi_n + \xi_m}. \quad (6.68)$$

В общем случае среднее значение  $\langle n | \Delta(\mathbf{r}) | n \rangle$  не равно нулю, так что разложение расходится при  $\xi_n \rightarrow 0$ . В частности, в методе БКШ, когда  $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta$ , последняя сумма равна нулю и

$$\varepsilon_n = \xi_n + \frac{\Delta^2}{2\xi_n}, \quad (6.69)$$

<sup>1)</sup> Оператор  $K$  переводит функцию  $\varphi_{na}$  в  $\varphi_{n-a}^*$ .

<sup>2)</sup> См. также в гл. 5 вывод уравнений Гинзбурга — Ландау для грязного сверхпроводника.

что и можно было ожидать из (6.58б) при  $\Delta \ll \xi_n$ . Таким образом, когда  $K$  коммутирует с  $T$ , т. е. в отсутствие магнитных эффектов, система, вообще говоря, будет иметь щель, равную среднему значению  $\Delta(\mathbf{r})$ , соответствующему электрону на уровне Ферми.

б) Оператор  $K$  не коммутирует с гамильтонианом  $T$ . В этом случае нужно исследовать матричный элемент (6.66) более тщательно. Согласно Де Жену и Тинкхаму [32], удобно ввести спектральную мощность  $I(\omega)$ , определяемую как

$$I(\omega) = \sum_m |\langle n | \Delta(\mathbf{r}) K | m \rangle|^2 \delta(\xi_m - \xi_n - \omega), \quad (6.70)$$

где усреднение производится по состояниям  $|n\rangle$  с фиксированной энергией  $\xi_n$ . Фурье-преобразование  $I(\omega)$  имеет простой вид, а именно

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \overline{\Delta^*[\mathbf{r}(0)] K(0) \Delta[\mathbf{r}(t)] K(t)}, \quad (6.71)$$

где  $K(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$  — операторы Гейзенберга, описывающие изменение во времени  $K$  и  $\mathbf{r}$  в нормальном состоянии. На больших расстояниях изменение  $\mathbf{r}$  подчиняется классическому уравнению переноса. Изменение  $K(t)$  можно получить из соответствующего уравнения движения, а именно

$$\frac{dK}{dt} = i[T, K] = ie \left( \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}}{mc} \right) K \quad (6.72)$$

и

$$K(t) = e^{i\varphi(t)} K(0), \quad (6.73)$$

где

$$\varphi(t) = \frac{2e}{mc} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} dt = \frac{2e}{\hbar c} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (6.74)$$

так что

$$I(t) = \langle \Delta^*[\mathbf{r}(0)] e^{i\varphi(t)} \Delta[\mathbf{r}(t)] \rangle. \quad (6.75)$$

Здесь усреднение производится по всем классическим траекториям электрона.

Изучая свойства  $I(t)$  при больших значениях  $t$ , можно выяснить, имеется ли в спектре возмущений щель или

нет. Можно выделить два случая [31]:

$$1) \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \eta \neq 0 \text{ (неэргодический случай),} \quad (6.76a)$$

$$2) \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0 \text{ (эргодический случай)}^1). \quad (6.76b)$$

В случае 1 функция  $I(\omega)$  сингулярна при  $\omega = 0$ . Разложение по теории возмущений (6.67) расходится при малых значениях  $\xi_n$ . В спектре возмущений имеется щель. Ясно, что случай БКШ, рассмотренный выше, относится к случаю 1.

В случае 2 функция  $I(\omega)$  несингулярна при  $\omega = 0$ . Две энергии  $\xi_n$  и  $\xi_m$ , входящие в (6.67), никогда не могут быть равными, и ряд теории возмущений сходится. Спектр качественно не отличается от спектра нормального состояния. В этом случае сверхпроводник бесщелевой<sup>2)</sup>. Рассмотрим теперь кратко несколько примеров.

1. Поверхностная сверхпроводимость в параллельных полях. В полубесконечной среде  $\Delta(\mathbf{r})$  изменяется от своего максимального значения вблизи поверхности до нуля внутри образца на расстоянии от поверхности  $d \geq \xi(T)$ .

Если  $|t| \rightarrow \infty$ , то  $\langle \Delta^*[\mathbf{r}(0)]\Delta[\mathbf{r}(t)] \rangle \rightarrow 0$ , так как электрон имеет большую вероятность оказаться в толще образца, где  $\Delta = 0$ . Поэтому можно ожидать, что  $I(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Разложение по теории возмущений (6.67) сходится, когда  $H \approx H_{c3}$ , и спектр возмущений не имеет щели.

Сделанное замечание справедливо в случае чистых и грязных сверхпроводников, но лишь для полубесконечной среды. В случае пластины [ $d \ll \xi(T)$ ] ситуация несколько иная; во всем образце значение  $|\Delta|$  постоянно, и задача состоит в исследовании свойств фазы  $\exp[i\varphi(t)]$ . Это было выполнено Де Женом и Тинкхамом [32], которые пришли к следующим выводам.

Для случая чистого сверхпроводника с диффузным поверхностным рассеянием

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{i\varphi(t)} \neq 0,$$

<sup>1)</sup> Обсуждение стохастических процессов в физике см. в [33].

<sup>2)</sup> Необходимо, однако, определить радиус сходимости ряда (6.67).

так что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \eta |\Delta|^2, \quad (6.77)$$

где

$$\eta = \begin{cases} 1 - \frac{\pi}{3} \frac{Hd^2}{\Phi_0} & \text{при } H \ll \frac{\Phi_0}{d^2}, \\ \frac{2\Phi_0}{\pi Hd^2} & \text{при } H \gg \frac{\Phi_0}{d^2}; \end{cases} \quad (6.78a)$$

$$(6.78b)$$

здесь  $H$  — приложенное поле и  $\Phi_0$  — квант потока.

Этот вывод получается в результате чисто геометрического сокращения последовательных вкладов в фазу. Однако в случае грязного сверхпроводника эргодические свойства восстанавливаются, и в определенной области полей грязные пленки являются бесщелевыми сверхпроводниками [34]. В частности, при  $d < l < \sqrt{\xi_0 d}$ , где  $d$  — толщина образца, пленка должна быть бесщелевой [32]<sup>1)</sup>, когда

$$0,95H_{\parallel} < H < H_{\parallel}.$$

2. Двуслойные пленки из нормального и сверхпроводящего металлов в нулевом поле. Этот случай был рассмотрен Де Женом и Мауро [35]. Если отражение и прохождение на границах считать диффузными, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = |\bar{\Delta}|^2, \quad (6.79)$$

где  $|\bar{\Delta}|$  — среднее  $\Delta(\mathbf{r})$  для электрона на уровне Ферми. Спектр возмущений, вообще говоря, будет иметь щель.

3. Грязные сверхпроводники второго рода в высоких полях (вблизи  $H_{c_2}$  или  $H_{c_3}$ ). Это эргодический случай, и вычисления очень просты. Если  $(H_{\text{макс}} - H)/H_{\text{макс}} \ll \ll 1$ , т. е.  $H_{\text{макс}}$  равно  $H_{c_2}$  или  $H_{c_3}$ , то  $I(t)$  принимает вид

$$I(t) = \langle |\Delta(\mathbf{r})|^2 \rangle e^{-t/\tau(T)}, \quad (6.80)$$

где  $\tau(T)$  — время, зависящее только от температуры. Такой особый случай называется марковской эргодической ситуацией.

<sup>1)</sup> Общее рассмотрение вопроса о бесщелевой сверхпроводимости в пленках см. в [17].

Выражение (6.80) имеет такой вид в силу того, что в грязных сверхпроводниках свойства электрона определяются процессами диффузии (см. гл. 5). Величина  $\tau(T)$  может быть получена из выражения (5.98) для  $\Delta(\mathbf{r})$ ; в результате имеем

$$\frac{1}{\tau(T)} = \frac{2\pi D H_{c_2}(T)}{\Phi_0}, \quad (6.81)$$

где  $H_{c_2}(T)$  определяется из (5.117)<sup>1)</sup>. Таким образом, измерение  $\tau(T)$  позволяет определить  $H_{c_2}(T)$ , т. е. коэффициент Маки  $\kappa_1(T)$ . Видно, что  $1/\tau(T)$  при  $T \rightarrow T_0$  стремится к нулю по линейному закону, а при  $T \rightarrow 0$  стремится к постоянной  $\Delta_{\text{БКШ}}/\hbar$ . Собственное значение (6.67) принимает вид

$$\varepsilon_n = \xi_n + \frac{2 \langle \Delta^2 \rangle \xi_n}{2\xi_n^2 + [\hbar/\tau(T)]^2}. \quad (6.82)$$

Это выражение справедливо, пока  $\Delta\tau(T)/\hbar \ll 1$ , т. е.  $(H_{c_2} - H)/H_{c_2} \ll 1$ . Используя это выражение для спектра возбуждений, Де Жен [31] нашел плотность состояний в точке  $\mathbf{r}$  внутри материала. Оказалось, что

$$\frac{N(\mathbf{r}, \varepsilon)}{N_n(0)} = 1 + \frac{2|\Delta(\mathbf{r})|^2 [\tau(T)]^2}{\hbar^2} \frac{[2\varepsilon\tau(T)/\hbar]^2 - 1}{\{[2\varepsilon\tau(T)/\hbar]^2 + 1\}^2}, \quad (6.83)$$

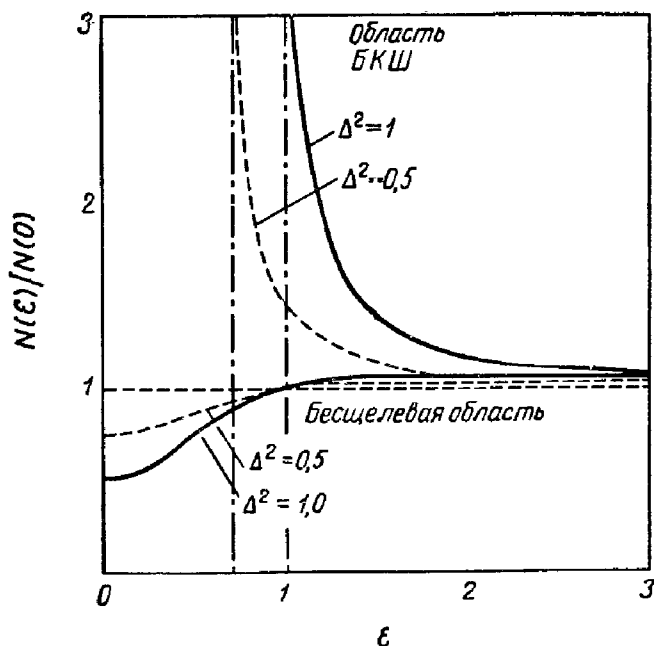
где  $N_n(0)$  — плотность состояний в нормальном веществе на уровне Ферми. Функция  $N(\mathbf{r}, \varepsilon)/N_n(0)$  (для данного  $\mathbf{r}$ ) изображена на фиг. 63. Из графика видно, что щель отсутствует, но число возможных состояний в полосе  $\pm \hbar/2\tau(T)$  вблизи уровня Ферми сильно уменьшено. При конечной температуре влияние разрыва плотности состояний в случае БКШ снижается под действием тепловых возбуждений. Это означает, что туннельные характеристики, наблюдаемые в случае БКШ, качественно не очень сильно отличаются от характеристик при бесщелевой сверхпроводимости, рассмотренной выше.

Выражение (6.83) связывает величину плотности состояний в точке  $\mathbf{r}$  с параметром упорядочения в той же точке. Фактически в плотность состояний вносит вклад

<sup>1)</sup> В полубесконечной среде вблизи  $H_{c_3}$  величина  $H_{c_2}(T)$  должна быть заменена на  $1,69 H_{c_2}(T)$ .



область радиусом  $\xi(T)$  вокруг точки  $\mathbf{r}$ , но эти добавки можно выразить через  $\Delta(\mathbf{r})$ . Нужно отметить, что туннельные эксперименты в больших полях дают значение  $\Delta(\mathbf{r})$  на поверхности туннельного контакта. Для энергий  $\varepsilon \gg \hbar/\tau(T)$  отношение  $N(\varepsilon)/N_r(0)$  стремится к  $1 + \Delta^2/2\varepsilon^2$ , что совпадает с асимптотическим выражением в теории



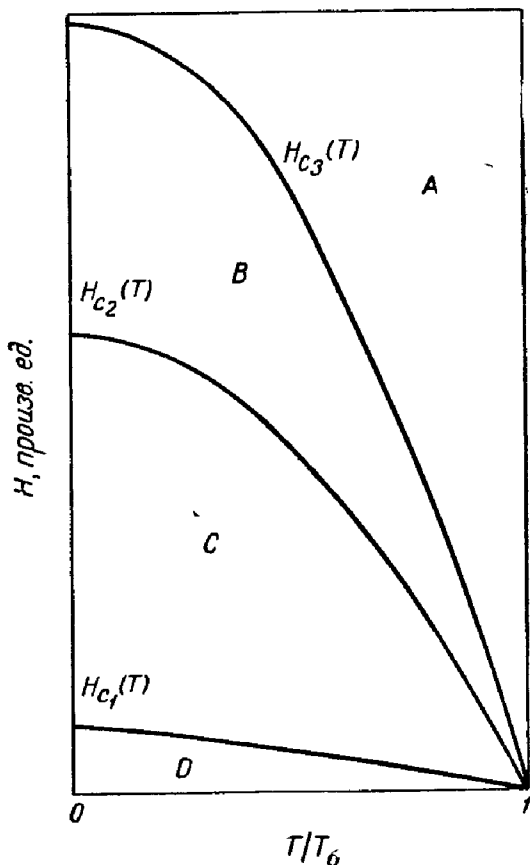
Фиг. 63. Плотность состояний в точке  $\mathbf{r}$  для марковского эргодического бесщелевого сверхпроводника для двух различных значений потенциала пары  $|\Delta(\mathbf{r})|$  и при  $\hbar/2\tau(T) = 1$ .

На фигуре представлена также соответствующая плотность состояний для модели БКШ с  $\Delta = |\Delta(\mathbf{r})|$ .

БКШ. Туннельные характеристики дают среднее значение отношения  $N(\varepsilon)/N(0)$  в полосе шириной  $k_B T$ . Таким образом, если  $k_B T \gg \hbar/\tau(T)$ , эксперимент не дает возможности отличить случай БКШ от марковской эргодической бесщелевой ситуации.

В полях, меньших  $H_{\text{макс}}$ , все еще имеется область, в которой существует бесщелевая сверхпроводимость. Однако марковская эргодическая бесщелевая сверхпроводимость ограничена окрестностью  $H_{\text{макс}}$ . Гра-

ница между бесщелевой сверхпроводимостью и сверхпроводимостью со щелью неизвестна. Вероятно, эта граница соответствует первому появлению вихревых ни-



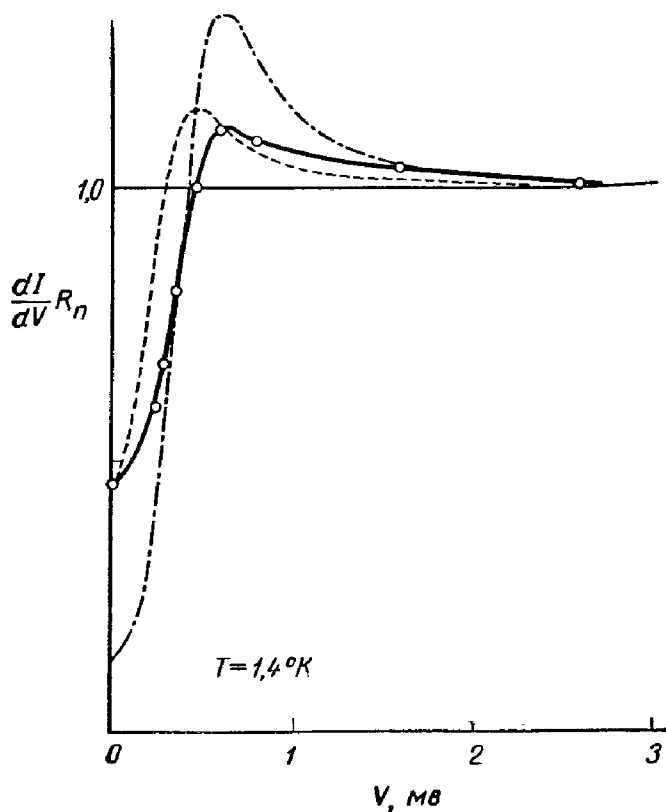
Фиг. 64. Схематическое изображение области существования различных типов сверхпроводимости для сверхпроводников второго рода [36].

*A* — нормальное состояние, *B* — марковская эргодическая бесщелевая сверхпроводимость (поверхностная сверхпроводимость), *C* — бесщелевая сверхпроводимость (смешанное состояние), *D* — сверхпроводимость со щелью (эффект Мейснера).

тей, т. е. полям  $H = H_{c1}$ . Схематическое изображение различных областей показано на фиг. 64.

Гюйон и др. [36, 37] измеряли туннельные характеристики в марковской бесщелевой области; их результаты изображены на фиг. 65. Можно видеть, что согласие теории с экспериментом очень хорошее. Отметим, что

максимум пунктирной кривой отличается от максимума теоретической кривой. Фактически не существует значения эффективной щели  $\Delta$ , при котором характеристики



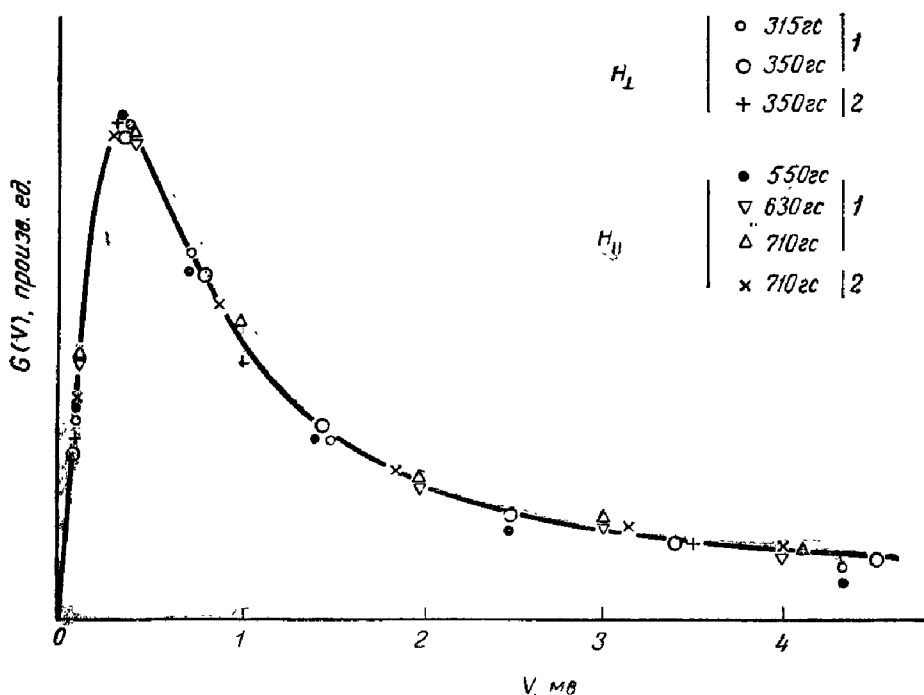
Фиг. 65. Туннельные характеристики в марковской эргодической бесщелевой области [37].

Точки соответствуют измеренному отношению дифференциальных проводимостей в сверхпроводящем и нормальном состояниях сплава Sn-5% In как функции приложенного напряжения при внешнем поле 553 э, направленном параллельно образцу, при  $T = 1,4^\circ\text{K}$ . Сплошная линия — теоретическая кривая, полученная с помощью выражения (6.83). Остальные линии — туннельные характеристики теорин БКШ с той же начальной производной (пунктирная  $\Delta = 231 \text{ мкв}$ ) или с тем же положением максимума  $dI/dV$  (штрих-пунктирная,  $\Delta = 416 \text{ мкв}$ ).

БКШ разумным образом согласуются с экспериментом (фиг. 66).

4. Чистые сверхпроводники второго рода в сильном магнитном поле. Этот случай труден для исследования при помощи туннельных экспериментов, поскольку трудно

изготовить туннельный образец, в котором сверхпроводник остался бы «чистым». Интересно, однако, рассмотреть вопрос с теоретической точки зрения, так как



Ф и г. 66. График функции  $G(V) = [I_n(V) - I_s(V)] R_n$ , где  $I_n(V)$  — туннельная проводимость в нормальном состоянии.

$I_s(V)$  — туннельная проводимость в сверхпроводящем состоянии и  $R_n$  — сопротивление в нормальном состоянии. Теоретически из выражения (6.83) следует, что нормированная функция  $G(V)/G(V_{\text{макс}})$  не зависит ни от напряженности поля, ни от его ориентации. Сплошная линия — теоретическая кривая. Отметим, что форма кривой  $G(V)$ , полученная для разных образцов из сплава Sn — 5% In, для разных полей и различных их ориентаций не зависит от этих параметров, как это и было предсказано в работе [37].

в отличие от случая грязных сверхпроводников здесь мы приходим к бесщелевой сверхпроводимости вблизи  $H_{c2}$ , которая не является марковской. Де Жен и Мауро [35] показали, что в этом случае

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \text{const} \left[ \frac{\xi(T)}{\hbar v_F t} \right]^2. \quad (6.84)$$

Здесь  $v_F$  — скорость на уровне Ферми и  $\xi(T)$  — длина когерентности, зависящая от температуры. Такое выра-

жение связано с тем, что электроны движутся по прямым траекториям через вихревую решетку, так что фаза  $\Delta(\mathbf{r})$  осциллирует более или менее случайно, и  $I(t)$  должна поэтому стремиться к нулю. Величина  $\xi(T)$  появляется в (6.84) в силу того, что вблизи  $H_{c2}$  расстояние между двумя вихрями порядка  $\xi(T)$  (см. гл. 3). Соответствующая плотность состояний была вычислена Де Женом и Мауро [35]; в их работе можно ознакомиться с вопросом более подробно.

Вблизи  $H_{c1}$  и при  $\kappa \gg 1$  возбуждения с низкой энергией можно вычислить точно [38, 39]. Было найдено также, что и в этом случае система является бесщелевой.

### § 8. Заключение

В предыдущем параграфе было показано, что наличие щели в энергетическом спектре не является определяющей чертой сверхпроводимости и что главное ее свойство — существование параметра упорядочения, так называемого потенциала пары  $\Delta(\mathbf{r})$ . Здесь было рассмотрено несколько типов бесщелевой сверхпроводимости, возникающей под действием магнитного поля, но мы не рассматривали влияние магнитных примесей. В этом случае оператор изменения знака времени  $K$  не коммутирует с гамильтонианом, так как в выражение для  $T$  войдут члены, зависящие от спина. В обычном случае  $|\Delta|$  постоянно и  $I(t) = |\Delta|^2 \langle K(0)K(t) \rangle$ . Обменное взаимодействие между электронами проводимости и локализованными примесями приводит к тому, что

$$\langle K(0)K(t) \rangle \neq 1.$$

Эта ситуация была рассмотрена Де Женом и Сарма [40], а также Абрикосовым и Горьковым [25]. Они нашли, что

$$I(t) = |\Delta|^2 e^{-2|t|/\tau_s}. \quad (6.85)$$

Здесь  $\tau_s$  — время столкновения между электроном и примесями в результате обменного взаимодействия. Уравнение (6.85) предсказывает бесщелевую сверхпроводимость марковского типа, при которой бесщелевая сверхпроводимость существует в ограниченной области концентраций примесей. Если  $C_r$  — концентрация, при

которой температура перехода в нулевом поле падает до нуля, то эта область такова:

$$0,9 C_r < C < C_r.$$

Такую ситуацию трудно анализировать из-за наличия взаимодействия между примесями и эффекта Кондо<sup>1)</sup>. Некоторые эксперименты на таких сплавах были выполнены Рейфом и Вулфом<sup>2)</sup> [41].

Существование бесщелевой области оказывает влияние на некоторые термодинамические свойства сверхпроводников. Ее влияние на теплопроводность сверхпроводников второго рода в больших полях было рассмотрено Маки [42], Амбегаокаром и Гриффином [43] и Кароли и Сиро [44].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Clogston A. M., Phys. Rev. Lett., **9**, 266 (1962).
2. Chandrasekhar B. S., Appl. Phys. Lett., **1**, 7 (1962).
3. Sarma G., Journ. Phys. Chem. Sol., **24**, 1029 (1963).
4. Fulde P., Ferrell R. A., Phys. Rev., **A135**, 550 (1964).
5. Gruenberg L. W., Gunther L., Phys. Rev. Lett., **16**, 996 (1966).
6. Sarma G., Saint-James D., Communication to the Conf. on the Phys. of Type II Superconductivity Cleveland (Ohio), 1964.
7. Maki K., Physics, **1**, 127 (1964).
8. Ferrell R. A., Phys. Rev. Lett., **3**, 262 (1959).
9. Anderson P. W., Phys. Rev. Lett., **3**, 325 (1959).
10. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., ЖЭТФ, **42**, 1088 (1962).
11. Горьков Л. П., ЖЭТФ, **48**, 1772 (1965).

1) Эффект Кондо заключается в том, что ниже некоторой температуры  $T_K$ , не зависящей от концентрации примесей, происходит экранировка примесного спина электронами металла. Если  $T_K > T_c$ , это явление может оказать существенное влияние на свойства сверхпроводников. Полностью этот вопрос еще не исследован. — *Прим. ред.*

2) В упомянутой работе [25] было предположено, что спины отдельных примесных атомов не взаимодействуют друг с другом. В действительности в той же области температур и концентраций, где в рассмотренной модели возникает бесщелевая сверхпроводимость, должно происходить упорядочение спинов вследствие их взаимодействия друг с другом. Этот вопрос был изучен Л. П. Горьковым и А. И. Русиновым [45]. Беннеманном [46], а также Фульде и Маки [47] в предположении, что упорядочение примесных спинов является ферромагнитным. В последней работе было показано, что бесщелевая сверхпроводимость возникает и при упорядочении, причем начинается с более низких концентраций примеси (это качественно согласуется с результатами Рейфа и Вулфа). — *Прим. ред.*

12. Werthamer N. R., Helfand H., Hohenberg P. C., Phys. Rev., **147**, 1, 295 (1966).
13. Maki K., Phys. Rev., **148**, 362 (1966).
14. Baltensperger W., Physica, Suppl., **24S**, 153 (1958).
15. Ландау Л. П., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, М., 1964.
16. Saint-James D., Phys. Lett., **23**, 177 (1966).
17. Guyon E., Meunier F., Thompson, Phys. Rev. (в печати).
18. Caroli C., Cyrot M., De Gennes P. G., Sol. State Comm., **4**, 17 (1966).
19. Cape J. A., Phys. Rev., **148**, 257 (1966).
20. Berlincourt T. G., Hake R. R., Phys. Rev., **131**, 140 (1963).
21. Strnad A. R., Kim Y. B., Proc. of the Symposium on Quantum Fluids, Univer. of Sussex. 1965).
22. Shapira Y., Neuringer L. J., Phys. Rev., **A140**, 1638 (1965).
23. Hake R. R., Phys. Rev. (в печати).
24. Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R., Phys. Rev., **A139**, 1163 (1965).
25. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., ЖЭТФ, **39**, 1781 (1960).
- 26\*. Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н., ЖЭТФ, **47**, 1136 (1964).
27. De Gennes P. G., Superconductivity of Metals and Alloys, New York, 1966. (Имеется перевод: П. Де Жен, Сверхпроводимость металлов и сплавов, изд-во «Мир», 1968.)
28. Giaever T., Phys. Rev. Lett., **5**, 147, 464 (1960).
29. Linton E., Superconductivity, New York, 1962. (Имеется перевод: Э. Линтон, Сверхпроводимость, изд-во «Мир», 1964.)
30. Caroli C., диссертация, Университет Орсе (1966).
31. De Gennes P. G., Phys. Cond. Mat., **3**, 79 (1964); Many Body Theory, ed. Kubo, New York, 1966.
32. De Gennes P. G., Tinkham M., Physics, **1**, 107 (1964).
33. Chandrasekhar, Selected papers on noise and stochastic processes, Wax. ed., Dover, 1964.
34. Maki K., Progr. Theor. Phys., **31**, 731 (1964).
35. De Gennes P. G., Mauro S., Sol. State Comm., **3**, 381 (1965).
36. Guyon E., диссертация, Университет Орсе (1966).
37. Guyon E., Martinet F., Matricon J., Pincus P., Phys. Rev., **A138**, 746 (1965).
38. Caroli C., De Gennes P. G., Matricon J., Phys. Lett., **9**, 307 (1964).
39. Caroli C., Matricon J., Phys. Cond., Mat., **3**, 380 (1965).
40. De Gennes P. G., Sarma G., Journ. Appl. Phys., **34**, 1380 (1963).
41. Reif F., Woolf M., Phys. Rev. Lett., **9**, 315 (1962).
42. Maki K., Progr. Theor. Phys., **31**, 378 (1964).
43. Ambegaokar V., Griffin A., Phys. Rev., **A137**, 1151 (1965).
44. Caroli C., Cyrot M., Phys. Cond. Mat., **4**, 285 (1965).
- 45\*. Горьков Л. П., Русинов А. И., ЖЭТФ, **46**, 1363 (1964).
- 46\*. Bennemann K. H., Phys. Rev. Lett., **17**, 438 (1966).
- 47\*. Fulde P., Maki P., Phys. Rev., **141**, 275 (1966).

## Глава 7

# ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА

В последние годы механизмы удельной теплоемкости и теплопроводности в сверхпроводниках второго рода исследовались сравнительно мало, и эти явления теоретически поняты еще не полностью. Однако зависимость тепловых свойств от температуры и магнитного поля экспериментально исследована хорошо, и настоящая глава будет посвящена качественному описанию этих эффектов.

### § 1. Удельная теплоемкость

В результате ранних экспериментов Мендельсона и Мура [1] было установлено, что зависимость удельной теплоемкости сверхпроводников второго рода от температуры аналогична зависимости, наблюдаемой для сверхпроводников первого рода, которая описывается достаточно полно (по крайней мере для температур, удаленных от абсолютного нуля), уравнением теории БКШ [2]:

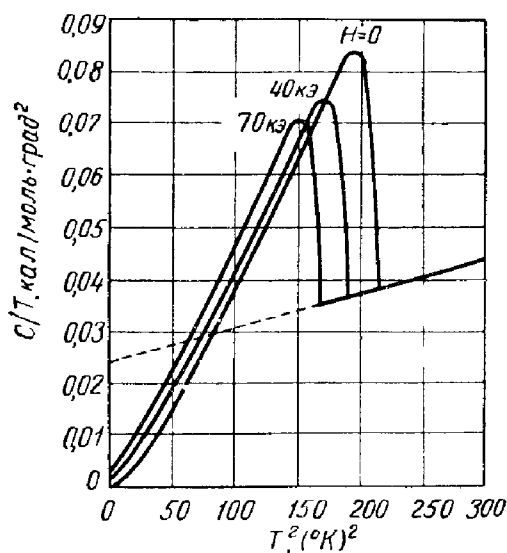
$$\frac{c_s}{\gamma T_0} = a e^{-b/t}. \quad (7.1)$$

Здесь  $\gamma$  — постоянная Зоммерфельда,  $T_0$  — критическая температура,  $t = T/T_0$  — приведенная температура, а  $a$  и  $b$  — постоянные. Строго говоря, это уравнение для электронной теплоемкости, но при низких температурах вклад, вносимый решеткой, очень мал и обычно им можно пренебречь.

Результаты более поздних измерений зависимости удельной теплоемкости от температуры для  $V_3Ga$  в различных внешних магнитных полях приведены на фиг. 67. Такая зависимость обычно встречается у сверхпроводников второго рода, например у Nb [3], V [4] и  $V_3Ga$  [5].



Данные, приведенные на фиг. 67, представляют особый интерес, поскольку они указывают на тот факт, что магнитное поле до 70 кэ не снижает заметным образом сверхпроводимости в  $V_3Ga$ . В этом случае было найдено, что удельная теплоемкость не зависит от магнитной предыстории образца и что на нее не оказывает влияния захваченный поток, даже если намагниченность образца

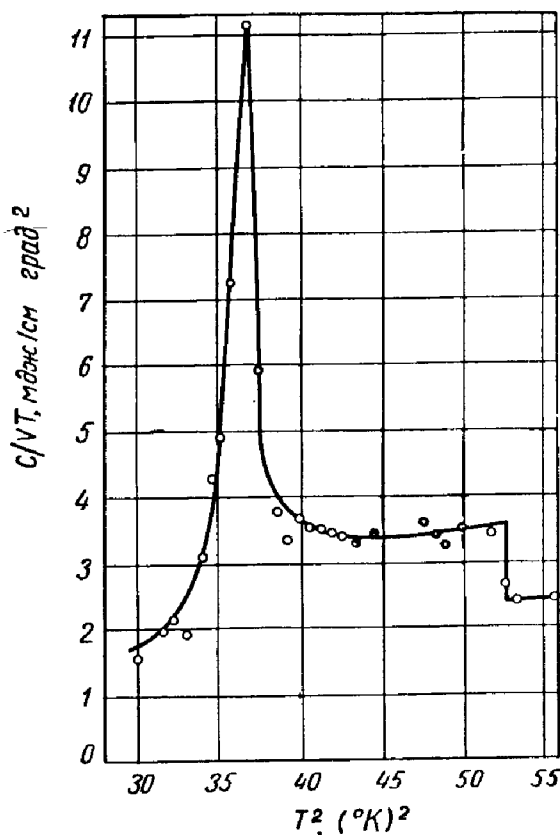


Фиг. 67. Зависимость удельной теплоемкости  $V_3Ga$  от температуры в магнитных полях 0, 40 и 70 кэ [26].

очень необратима (см. гл. 8). Гудман [6] отметил, что так как удельная теплоемкость обратима, она может быть использована для оценки обратимых характеристик намагничивания для «необратимого» образца с помощью термодинамических соотношений.

Для материалов с низким  $\kappa$  зависимость удельной теплоемкости от температуры в постоянном магнитном поле может сильно отличаться от зависимости, изображенной на фиг. 67. Зависимость удельной теплоемкости от температуры для образца ниобия ( $\kappa \sim 1$ ) в поле 1030 э изображена на фиг. 68. Из графика видно, что наряду с резким возрастанием удельной теплоемкости при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние наблюдается очень резкий пик при более низких

температурах. Этот пик удельной теплоемкости связан с изменением свободной энергии, когда магнитный поток входит в образец, находящийся в возрастающем магнитном поле, и примерно соответствует температуре, когда



Фиг. 68. Зависимость удельной теплоемкости Nb от температуры в магнитном поле 1030 э [8].

приложенное поле совпадает с нижним критическим полем образца. В принципе из изменения теплоемкости вблизи  $H_c$ , можно было бы определить характер перехода. Однако отличить фазовый переход первого рода от перехода второго рода очень трудно, и Мак-Конвилл и Серин при исследовании имеющихся у них образцов не смогли решить этого вопроса. Как отмечалось в гл. 1, Серин [7] провел тщательные измерения намагни-

ченности ниобия вблизи  $H_{c_1}$  и доказал, что переход в поле  $H_{c_1}$  является переходом второго рода. Мак-Конвилл и Серин [8] сообщили также об измерениях на сплавах Nb—Ta и In—Bi. Для сплава In—Bi есть очевидные доказательства существования пика удельной теплоемкости при  $H = H_{c_1}$ , и авторы пришли к предположению, что все сверхпроводники второго рода должны в идеальном случае иметь  $\lambda$ -точку в поле  $H_{c_1}$ .

Данные об удельной теплоемкости можно использовать для определения параметров  $\kappa_1(T)$  и  $\kappa_2(T)$  в температурном интервале, где измерения намагниченности неточны. При данной температуре  $T_H$  скачок удельной теплоемкости при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние происходит во внешнем поле  $H = H_{c_2}(T_H)$ . Если термодинамическое поле  $H_c(T_H)$  известно, то параметр  $\kappa_1(T)$  можно получить из соотношения

$$H_{c_2}(T) = \kappa_1(T) \sqrt{2} H_c(T). \quad (7.2)$$

Чтобы определить  $H_c(T)$ , Мак-Конвилл и Серин воспользовались термодинамическим соотношением между скачком удельной теплоемкости, полем и индукцией при переходе. Согласно (1.44), скачок удельной теплоемкости на единицу объема при переходе второго рода равен

$$\Delta C = \frac{T}{4\pi} \left( \frac{dH}{dT} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial B_i}{\partial H} \right)_T - \left( \frac{\partial B_j}{\partial H} \right)_T \right], \quad (7.3)$$

где  $i$  и  $j$  относятся к двум различным фазам. Если  $T = T_0$ , то  $B \equiv 0$  в сверхпроводящем состоянии и  $B = H$  в нормальном состоянии, так что

$$\left( \frac{\Delta C}{T} \right)_T = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{dH_c}{dT} \right)_{T=T_0}^2, \quad (7.4)$$

где  $H_c$  — термодинамическое критическое поле. Считая, что зависимость  $H_c(T)$  от температуры имеет вид<sup>1)</sup>

$$H_c(T) = H_c(0) \left( 1 - \frac{T}{T_0} \right)^2, \quad (7.5)$$

получаем значение  $H_c(0)$ , а следовательно, и  $\kappa_1(T)$ , измеряя скачок удельной теплоемкости при  $T = T_0$ .

<sup>1)</sup> Это приводит к ошибке в несколько процентов.

Параметр  $\kappa_2(T)$  определяется из выражения

$$\left(\frac{dM}{dH}\right)_{H_{c_2}} = \frac{1}{4\pi\beta_A [2\kappa_2^2(T) - 1]}, \quad (7.6)$$

где  $(dM/dH)_{H_{c_2}}$  — угловой коэффициент кривой намагничивания при  $H = H_{c_2}$  и  $\beta_A$  — геометрический фактор, связанный с симметрией вихревой решетки, введенный в гл. 3<sup>1)</sup>. Угловой коэффициент кривой намагничивания легко находится из скачка удельной теплоемкости при  $H = H_{c_2}$ , поскольку, согласно (7.3),

$$\left(\frac{\Delta C}{T}\right)_{T_H} = \left(\frac{dH_{c_2}}{dT}\right)_{T_H} \left(\frac{dM}{dH}\right)_{H_{c_2}}, \quad (7.7)$$

и значения  $\kappa_2(T)$  выводятся из (7.6). Мак-Конвилл и Серин получили значения  $\kappa_1(T)$  и  $\kappa_2(T)$  для ниобия; их результаты уже были приведены на фиг. 49.

Измерения удельной теплоемкости позволили определить эти значения вблизи  $T_0$ , а соответствующие измерения намагниченности — значения в области более низких температур. В гл. 5 проводится более детальное сравнение существующих теорий с экспериментально найденной зависимостью  $\kappa_1(T)$  и  $\kappa_2(T)$  от температуры.

## § 2. Теплопроводность

В металлических сплавах тепло переносится электронами и фононами. Для понимания свойств переноса тепла необходимо рассмотреть, каким образом оба эти носителя могут рассеиваться при их движении через образец. (Более подробно см. в [9].) Электроны рассеиваются на фононах и на статических неоднородностях (примесях, границах зерен, дефектах упаковки и т. д.). Согласно правилу Маттисена, можно считать, что вклады, вносимые этими двумя механизмами в электронное теплосоппротивление  $W_e$ , аддитивны, так что

$$W_e = W_i + W_0, \quad (7.8)$$

<sup>1)</sup> Фактор  $\beta_A = 1,1596$  для треугольной решетки. Мак-Конвилл и Серин использовали для квадратной решетки значение 1,18. Это приводит к небольшой ошибке в значениях  $\kappa_2$ .

где  $W_i = \alpha T^2$  — вклад, связанный с рассеянием на фононах, и  $W_0 = \beta/T$  — вклад, связанный с рассеянием на неоднородностях<sup>1)</sup>. Такие зависимости для  $W_i$  и  $W_0$  справедливы только при достаточно низких температурах, т. е. когда  $T/\theta_D$  мало ( $\theta_D$  — температура Дебая). Ясно, что при низких температурах доминирующим членом в  $W_e$  будет  $W_0$ .

Существуют различные механизмы рассеяния фононов в образце. Они перечисляются ниже в порядке увеличения их эффективности с ростом температуры:

- 1) рассеяние на границах образца ( $\sim VT^{-3}$ );
- 2) рассеяние на электронах ( $\sim ET^{-2}$ );
- 3) рассеяние на дислокациях ( $\sim DT^{-2}$ );
- 4) рассеяние на точечных дефектах ( $\sim PT$ );
- 5) рассеяние на других фононах [ $\sim gT^n \exp(-\theta/mT)$ ] (см. более подробно в [10]).

Полное фононное теплосопrotивление имеет вид

$$W_g = VT^{-3} + ET^{-2} + DT^{-2} + PT + gT^n e^{-\theta/mT}. \quad (7.9)$$

В хорошо отожженных металлах и сплавах основной вклад при низких температурах вносится электрон-фононным рассеянием и  $W_g$  изменяется с температурой по закону  $\gamma T^{-2}$ . Полную теплопроводность металла или сплава тогда можно записать как

$$K = K_e + K_g, \quad (7.10)$$

где

$$K_e = \frac{1}{W_e} \quad \text{и} \quad K_g = \frac{1}{W_g}.$$

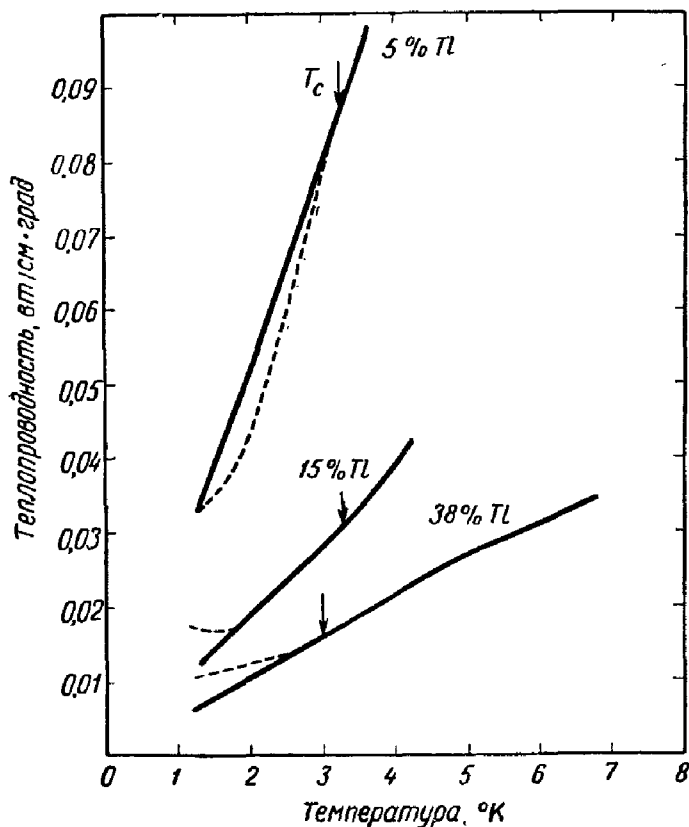
Ясно, что при низких температурах в нормальных металлах и сплавах основной вклад в теплопроводность вносится электронами, так что  $K \approx T/\beta$ .

### 1. Зависимость теплопроводности от температуры

В сверхпроводниках электроны, участвующие в процессе конденсации, не могут переносить тепло, и в отличие от электросопротивления теплосопротивление

<sup>1)</sup> Отметим, что  $W_0$  зависит от температуры так же, как и остаточное сопротивление  $\rho_0$ , в согласии с законом Видемана — Франца.

электронов должно стремиться к бесконечности, т. е.  $K_e \rightarrow 0$ . Таким образом, при рассмотрении теплопроводности в сверхпроводящем состоянии нужно учитывать лишь вклад, вносимый фононами.



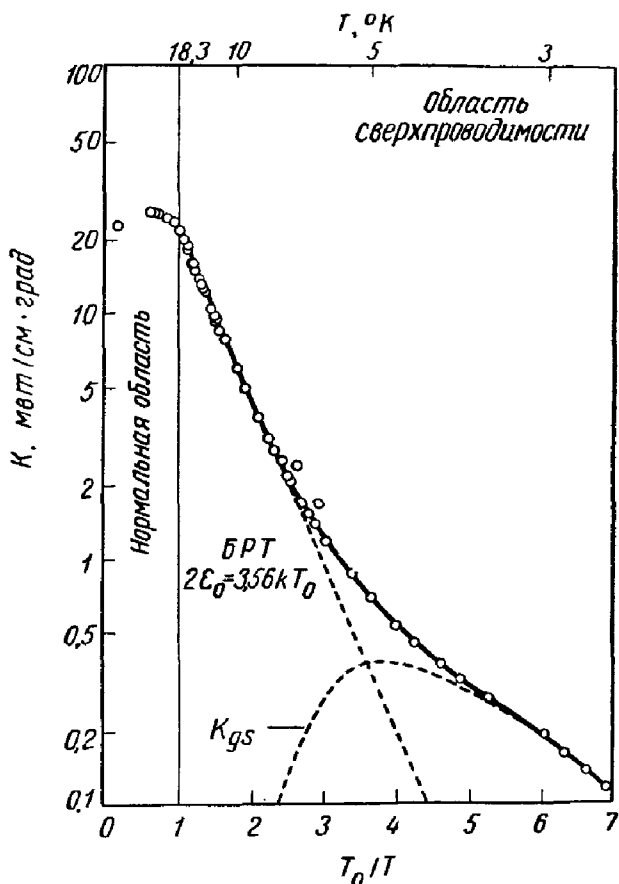
Фиг. 69. Зависимость теплопроводности от температуры для сплавов In — 5% Tl, In — 15% Tl и In — 38% Tl.

Нормальное состояние — сплошная линия; сверхпроводящее состояние — пунктир [25].

На первый взгляд может показаться, что теплосопротивление сверхпроводника должно быть значительно выше в сверхпроводящем состоянии, чем в нормальном, и это наблюдалось для нескольких чистых металлов. И действительно, сверхпроводящие проволоки используются в качестве тепловых выключателей, которые «разомкнуты», т. е. не проводят тепло в сверхпроводя-

щей фазе, и «замкнуты», когда сверхпроводимость разрушена с помощью магнитного поля [11].

Однако в процессе конденсации взаимное рассеяние электронов и фононов также сильно уменьшается, так



Фиг. 70. Зависимость теплопроводности  $\text{Nb}_3\text{Sn}$  от  $T_0/T$  (обратной приведенной температуры) [16].

что фононная проводимость изменяется и в принципе увеличивается. В настоящее время невозможно предсказать, до какой степени каждый из механизмов теплосопротивления будет воздействовать на теплопроводность того или иного образца, и пока еще не существует никакого количественного теоретического описания полной теплопроводности.

Можно наблюдать различное поведение теплосопротивления. Так, на фиг. 69 изображена зависимость теплопроводности сплавов  $\text{In—Tl}$  от температур и концентрации. При возрастании концентрации сплава теплопроводность понижается и в то же время происходит постепенное изменение относительного положения нормальной и сверхпроводящей кривых. В сильнолегированных сплавах теплопроводность в сверхпроводящем состоянии может даже превысить теплопроводность нормального состояния. Это наблюдалось де-Гаазом и Бреммером в сплаве  $\text{Pb—Tl}$  [12], Мендельсоном и Олсеном [13] в  $\text{Pb—Bi}$ , Линденфельдом [14] в  $\text{Pb—In}$  и, по-видимому, является общим свойством таких сплавов. Это свойство связано, грубо говоря, с тем фактом, что в сильнолегированных сплавах нельзя пренебрегать вкладом, вносимым фононами в теплосопротивление в нормальном состоянии, и тем, что в сверхпроводящем состоянии фонная теплопроводность возрастает.

Вклад, вносимый в теплопроводность сверхпроводящей фазы электронами, может оказаться малым, но пренебрегать им нельзя. Его можно вычислить в рамках теории БКШ [2]. Это было выполнено Бардином, Рикайзенем и Тьюордом [15] (БРТ), которые применили простое уравнение Больцмана для описания процессов переноса в сверхпроводнике. Отношение электронной теплопроводности в сверхпроводящей фазе к электронной теплопроводности в нормальной фазе имеет вид

$$\frac{K_{eS}}{K_{eN}} = \frac{\int_{\epsilon_0}^{\infty} \epsilon^2 (\partial f / \partial \epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\infty} \epsilon^2 (\partial f / \partial \epsilon) d\epsilon}, \quad (7.11)$$

где  $f$  — функция Ферми и  $\epsilon_0$  — щель в спектре возбужденных квазичастиц. Сравнение формулы БРТ с экспериментом провести не всегда легко, поскольку для этого из экспериментальных результатов необходимо выделить вклад, вносимый фононами. Однако Коди и Коэн [16] нашли, что вблизи  $T_0$  в  $\text{Nb}_3\text{Sn}$  теплопроводность хорошо описывается формулой БРТ. При низких температурах



в теплопроводности преобладает фононная часть, а зависимость  $K$  от температуры следует закону  $T^3$ . Это указывает на то, что фононная теплопроводность ограничена границами кристаллических зерен (фиг. 70).

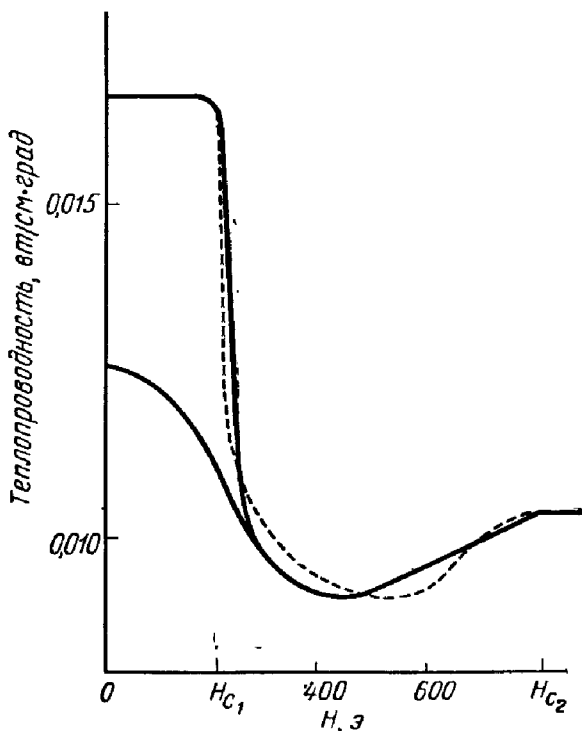
## 2. Зависимость теплопроводности от магнитного поля

В присутствии внешнего магнитного поля задача становится не столь простой, и как эксперимент, так и теория существенно усложняются. Мы остановимся здесь на свойствах сверхпроводников второго рода. Обычно кривая зависимости теплопроводности от внешнего магнитного поля изображена на фиг. 71. Видно, что в возрастающем поле происходит очень резкое снижение теплопроводности при  $H_{c1}$  с последующим постепенным возрастанием до значения теплопроводности в нормальном состоянии, достигаемого при  $H_{c2}$ . В уменьшающемся поле кривая теплопроводности совпадает с начальной кривой до окрестности точки  $H_{c1}$ , где она удаляется от этой кривой и идет ниже ее, достигая значения теплопроводности, меньшего начального, что указывает на присутствие захваченного потока.

Для интерпретации этой зависимости Дюбек и др. [17, 18] воспользовались простым и заманчивым методом. Они оставили уравнение БРТ (7.11), но ввели в него зависящую от поля щель  $\varepsilon_0(H)$ . Такое приближение можно назвать «приближением эффективной щели». Фактически Дюбек и др. предположили, что  $\varepsilon_0(H)$  пропорциональна корню квадратному из намагниченности, поскольку среднее квадратичное параметра упорядочения в теории Гинзбурга — Ландау — Абрикосова пропорционально намагниченности вблизи  $H_{c2}$  (см. гл. 3, § 3 и 4). Полученная в результате этих вычислений зависимость электронной теплопроводности от поля изображена пунктирной кривой на фиг. 71, и видно, что она находится в хорошем согласии с экспериментальными результатами.

Это согласие, однако, несколько обманчиво, так как приближение эффективной щели вызывает серьезные возражения. Как было показано в части Б гл. 6, сверхпроводники второго рода в сильных полях фактически

являются «бесщелевыми», и на основе модели эффективной щели нельзя вычислить, например, плотность состояний. Можно поэтому подозревать, что согласие между теорией Дюбека и экспериментом является случайным.



Фиг. 71. Зависимость теплопроводности сплава  $\text{In}-3\% \text{Bi}$  от магнитного поля при  $T = 2,16^\circ\text{K}$  [17].

Сплошные линии — экспериментальные данные при повышении и понижении поля. Пунктирная кривая вычислена из данных по намагниченности.

Свойства теплопроводности  $K$  качественно можно понять, рассматривая вклады, вносимые в теплопроводность электронами и фононами. При  $H = H_{c1}$  в образце возникают вихревые нити. Как было показано в гл. 3, § 3 и 4, плотность вихревых нитей на единицу площади поверхности вблизи  $H_{c1}$  увеличивается очень быстро. Это приводит к рассеянию фононов на вихрях и вызывает быстрое снижение теплопроводности, связанное с фононами, — так называемый «фононный провал». В более

сильных полях фононное теплосопrotивление постепенно растет с ростом плотности нитей и достигает своего значения в нормальном состоянии при  $H = H_{c_2}$ . В то же время при проникновении потока в образец электронное теплосопrotивление должно уменьшаться. Комбинация этих двух эффектов качественно описывает наблюдаемую картину. Можно отметить, что вблизи критического поля вклад, вносимый фононами в теплопроводность, должен быть пренебрежимо мал по сравнению с электронным вкладом.

Справедливость таких рассуждений косвенно была продемонстрирована Мошелем и Парксом [19], которые при исследовании пленок из сплавов  $\text{In} - 7\% \text{Pb}$  и  $\text{Sn} - 6\% \text{In}$  не наблюдали «фононного провала» вблизи поля  $H_{c_1}$  (фиг. 72). Благодаря очень дисперсной структуре исследуемых пленок средняя длина свободного пробега фононов снижается до такой степени, что электрон-фононное рассеяние становится несущественным и «фононного провала» не наблюдается. Это означает, что в сверхпроводящем состоянии зависимость теплопроводности от магнитного поля определяется только возбуждениями из сверхпроводящего основного состояния.

Кароли и Сиро [20] вычислили электронную теплопроводность в бесщелевой области. Справедливость их вычислений ограничивается окрестностью критического поля ( $H_{c_2}$  или  $H_{c_3}$ ), где параметр упорядочения  $\psi(\mathbf{r})$  мал, и для *грязных* сверхпроводников  $K_{cs}$  вычисляется с точностью до членов порядка  $\langle |\Delta|^2 \rangle$ . Как было показано в гл. 5, § 4, п. 5, потенциал пары  $\Delta(\mathbf{r})$  все еще удовлетворяет линеаризованному уравнению вида

$$\frac{1}{\tau_K} \Delta = D \left( \nabla - \frac{2ie\mathbf{A}}{\hbar c} \right)^2 \Delta, \quad (7.12)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии. Величину  $\tau_K$  можно рассматривать как время жизни электронных пар, определяемое из выражения

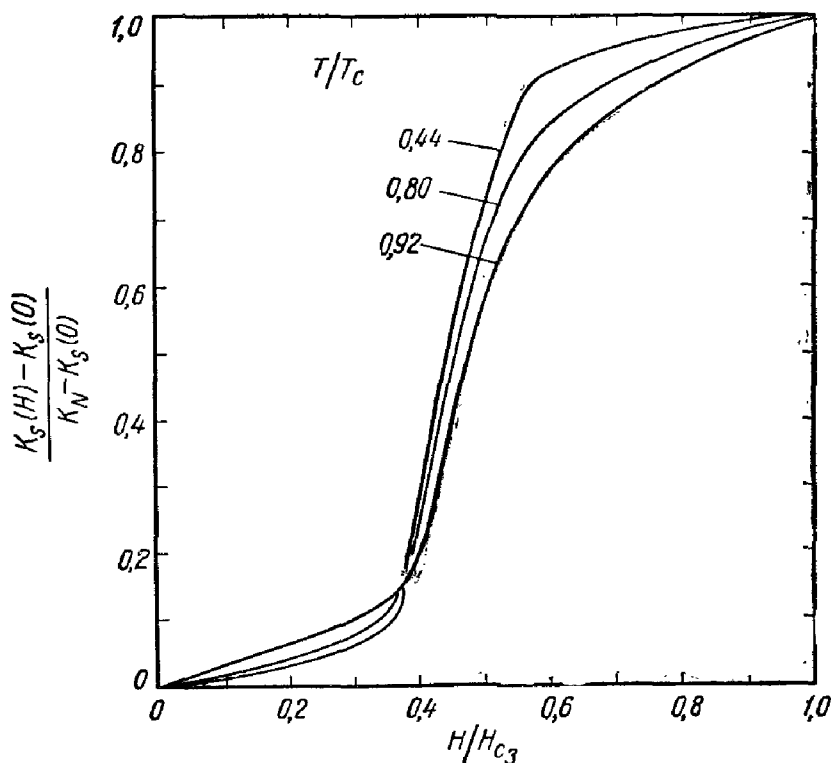
$$\ln \frac{T}{T_0} = \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\hbar}{4\pi k_B T \tau_K}\right), \quad (7.13)$$

где  $\psi(Z)$  — дигамма-функция. Было найдено, что отношение электронных теплопроводностей в сверхпрово-

дзящем и нормальном состояниях равно

$$\frac{K_{es}}{K_{en}} = 1 - \frac{6\hbar^3}{\pi^2} \beta^3 \int_0^\infty d\omega \omega^3 \frac{1}{\text{ch}^2(\hbar\beta\omega/2)} \frac{\langle |\Delta|^2 \rangle \tau_K^2}{(4\omega^2 \tau_K^2 + 1)^2}, \quad (7.14)$$

где  $\beta = 1/k_B T$  и  $\langle |\Delta|^2 \rangle$  — среднее квадратичное потенциала пары по координатам.

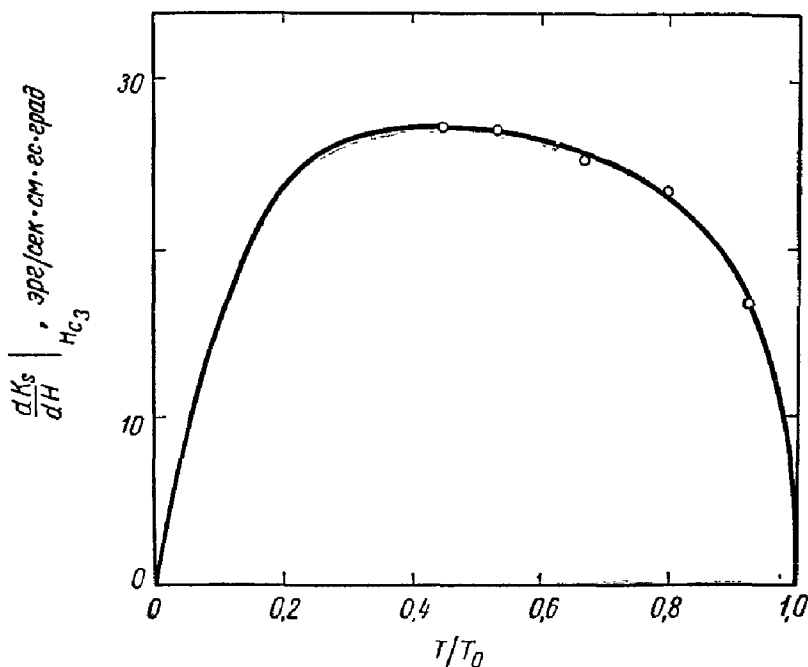


Фиг. 72. Приведенная теплопроводность как функция параллельного магнитного поля для пленки из сплава In—5% Pb толщиной 15 200 Å при различных температурах ( $T_0 = 3,75^\circ\text{K}$ ) [19].

Заметим, что производная вблизи  $H_{c3}$  конечна.

Наиболее интересный вывод из этих вычислений заключается в том, что вблизи  $H_{c2}$  (или  $H_{c3}$ ) производная теплопроводности  $dK/dH$  не равна нулю в отличие от приближения эффективной щели, где эта производная должна обращаться в нуль. Отличная от нуля производ-

ная  $dK/dH$  действительно наблюдалась вблизи  $H_{c2}$  Дюбеком и др. (см. фиг. 71)<sup>1)</sup>. Мошель и Паркс провели более систематическое исследование изменения теплопроводности вблизи  $H_{c2}$ . Их результаты вместе с теоретической кривой Кароли и Сиро изображены на фиг. 73.

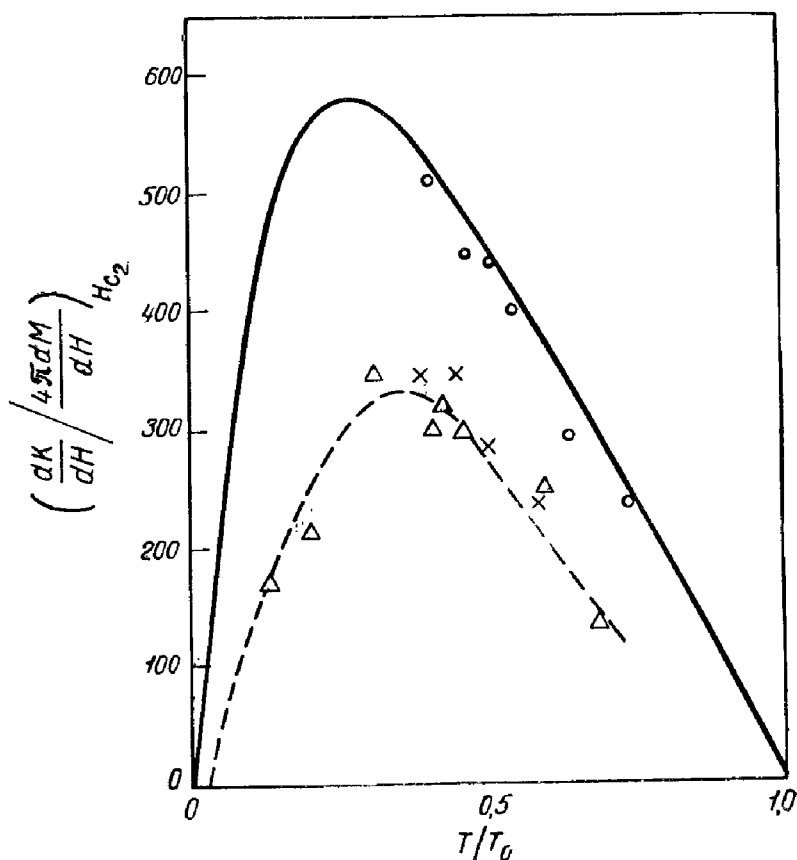


Фиг. 73. Сравнение экспериментальных данных (точки) для температурной зависимости функции  $(dK_s/dH)_{H_{c2}}$  для пленки из сплава  $\text{In} - 5\% \text{Pb}$  толщиной  $15\,200 \text{ \AA}$  с теоретической кривой Кароли и Сиро [19].

Видно, что теория и эксперимент вполне хорошо согласуются. Вместе с тем эти результаты дают новое доказательство бесщелевой природы сверхпроводников второго рода. Линденфельд и др. [21] также измеряли теплопроводность индия и сплавов свинец — висмут. В случае сплава  $\text{In} - 2\% \text{V}$  было получено очень

<sup>1)</sup> Нужно отметить, что вблизи критического поля вклад, вносимый фононами в теплопроводность, пренебрежимо мал.

хорошее согласие с теорией, но для других концентраций изменение производной теплопроводности в точке  $H = H_{c2}$  если и имеет в общем виде форму, предска-



Фиг. 74. Изменение производной теплопроводности для сплавов In — Vi [21].

Экспериментальные точки для сплава In — 2%Vi (кружки) почти точно ложатся на теоретическую кривую (сплошная линия), а точки для более высоких концентраций Vi, хотя и ложатся на кривую, по форме близкую к теоретической, соответствуют значениям, меньшим примерно на  $1/3$ .

зываемую теорией, однако заметно отличается от абсолютного значения, вычисленного Кароли и Сиро (фиг. 74). В настоящее время это расхождение еще не имеет объяснения.

В более слабых полях ситуация сильно усложняется. Можно ожидать, что сердцевина вихревых нитей прово-

дит тепло лучше, чем наружные области. Это должно привести к появлению анизотропии теплопроводности в зависимости от взаимной ориентации поля и градиента температуры<sup>1)</sup>).

Однако исследование этой анизотропии нужно производить в отсутствие фоновой теплопроводности, которая может замаскировать интересующий нас эффект. Возможно, именно это произошло в экспериментах Дюбека и др., где наблюдалась анизотропия порядка 3% или меньше, когда направление теплового потока изменялось от параллельного вихревым нитям до перпендикулярного.

В полях ниже  $H_{c1}$  в сверхпроводнике второго рода наблюдается эффект Мейсснера и можно применять соотношение БРТ.

Было проведено несколько экспериментов на тонких пленках, в основном Моррисом и Тинкхамом [22]. Они обнаружили, что при увеличении поля теплопроводность растет пропорционально  $H^2$ . В этом случае приближение эффективной щели плохо согласуется с экспериментальными данными.

Маки [23] провел детальные вычисления теплопроводности для «грязных» тонких пленок. Его результаты отличаются от результатов, полученных с помощью приближения эффективной щели. До тех пор пока в образце потенциал пары можно считать постоянным, в спектре возбуждений при определенных значениях поля нет щели. Однако в силу того, что параметр упорядочения не равен нулю, величина теплопроводности отличается от величины в нормальном состоянии. До сих пор вычисления Маки с экспериментом еще не сравнивались.

Другая, но сходная с рассмотренной ситуация исследовалась Амбегаокаром и Гриффином [24]. В таком случае вместо магнитного поля возмущающим агентом были магнитные примеси. Как было указано в гл. 6, это приводит к бесщелевому случаю, даже если потенциал пары  $\Delta$  постоянен по всему образцу. Как и в

---

<sup>1)</sup> Отметим, что для фононов также может наблюдаться небольшая анизотропия.

методе Кароли и Сиро, здесь можно ввести время жизни электронной пары  $\tau_K$ , и теплопроводность становится функцией  $\Delta$  и  $\tau_K$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Mendelsohn K., Moore J. K., Proc. Roy. Soc., A152, 39 (1935).
2. Bardeen J., Cooper L. N., Schriffer J. R., Phys. Rev., 108, 1175 (1957).
3. Brown A., Zemansky M. W., Boorse H. A., Phys. Rev., 92, 52 (1953).
4. Corak W. S., Goodman B. B., Satterthwaite C. B., Wexler A., Phys. Rev., 102, 656 (1956).
5. Hake R. R., Rev. Mod. Phys., 36, 124 (1964).
6. Goodman B. B., Phys. Lett., 1, 215 (1962).
7. Serin B., Phys. Lett., 16, 112 (1965).
8. McConville T., Serin B., Phys. Rev., A140, 1169 (1965).
9. Rosenberg H. M., Low Temperature Solid State Physics, Oxford, 1963, Ch. 5.
10. Klemens P. G., Solid State Physics eds., Seitz, Turnbull, Vol. 7, New York, 1958, p. 1.
11. Reese W., Steyert W. A., Rev. Sci. Instr., 33, 43 (1962).
12. De Haas W. J., Bremmer H., Leiden Comm., 220c (1932).
13. Mendelsohn K., Olsen J. L., Proc. Phys. Soc., A63, 2 (1950).
14. Lindenfeld P., Phys. Rev. Lett., 6, 613 (1961).
15. Bardeen J., Rickaysen G., Tewordt T. L., Phys. Rev., 113, 982 (1959).
16. Cody G. D., Cohen R. W., Rev. Mod. Phys., 36, 121 (1964).
17. Dubeck L., Lindenfeld P., Lynton E. A., Rohrer H., Phys. Rev. Lett., 10, 98 (1963).
18. Dubeck L., Lindenfeld P., Lynton E. A., Rohrer H., Rev. Mod. Phys., 36, 110 (1964).
19. Mochel J. M., Parks R. D., Phys. Rev. Lett., 16, 1156 (1966).
20. Caroli C., Cyrot M., Phys. Cond. Matt., 4, 285 (1965).
21. Lindenfeld P., Lynton E. A., Soulen R., L. T. X. Conference, 1966.
22. Morris G., Tinkham M., Phys. Rev. A134, 1154 (1964).
23. Maki K., Progr. Theor. Phys., 31, 378 (1964).
24. Ambegaokar V., Griffin A., Phys. Rev., A137, 1151 (1965).
25. Sladek R. J., Phys. Rev., 97, 902 (1955).
26. Morin F. J., Maita J. P., Williams H. J., Sherwood R. C., Wernick J. H., Kunzler J. E., Phys. Rev. Lett., 8, 275 (1962).
27. Абрикосов А. А., ЖЭТФ, 5, 1174 (1957).
28. Горьков Л. П., ЖЭТФ, 10, 998 (1960).
29. Lynton E. A., Superconductivity, New York, 1962, Ch. 9. (Имеется перевод: Э. А. Лиитон, Сверхпроводимость, изд-во «Мир», 1964.)



# Часть II

## НЕОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. Д. Томас

---

### Глава 8

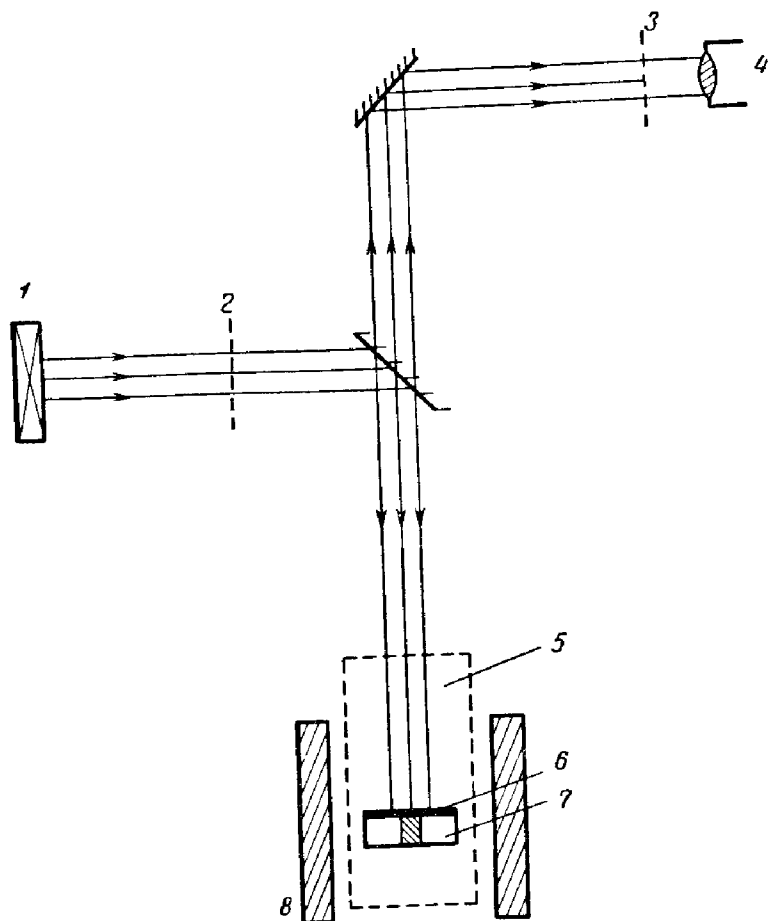
#### ЗАХВАТ ПОТОКА И НЕОБРАТИМЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССОВ НАМАГНИЧИВАНИЯ

В гл. 3 уже отмечалось, что, когда внешнее магнитное поле превышает значение нижнего критического поля  $H_{c1}$  для данного сверхпроводника второго рода, эффект Мейсснера становится неполным и магнитные силовые линии проникают в толщу образца. Вообще говоря, когда магнитное поле снова уменьшается, часть магнитного потока остается захваченной внутри образца. Минимальное поле, при котором происходит захват потока, можно отождествить с полем, при котором начинается проникновение потока [ $H_{c1}$ , если сверхпроводник не обладает гладкой поверхностью (см. § 3)]. Измерение минимального поля, при котором начинается захват потока, можно использовать в качестве удобного метода экспериментального определения  $H_{c1}$  [1].

Захват потока внутри кольца как для сверхпроводников первого, так и для сверхпроводников второго рода — явление обычное, но нужно подчеркнуть, что в случае сверхпроводников второго рода захват потока происходит также и в односвязных образцах. В принципе такие образцы могут содержать многосвязную структуру, обеспечивающую захват потока; эта возможность рассматривается в § 2. Способность сверхпроводников второго рода захватывать поток приводит, вообще говоря, к необратимости их магнитных свойств. Особенно это проявляется в зависимости намагниченности от поля, которая будет подробно рассмотрена в настоящей главе.

## § 1. Наблюдение захваченного потока

Можно составить представление о распределении магнитного потока внутри образца, исследуя поток, вы-

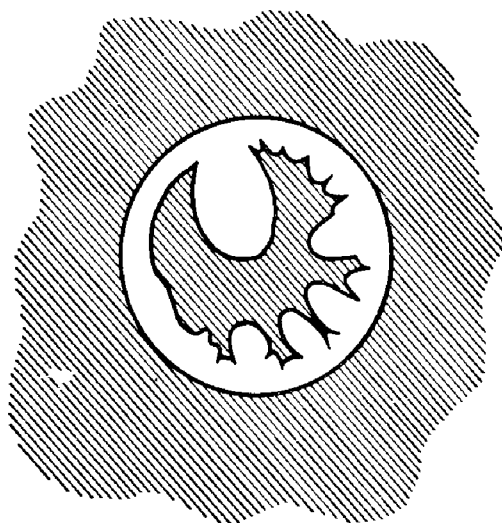


Ф и г. 75а. Схема установки, использованной для наблюдения проникновения потока в сверхпроводник с помощью эффекта Фарадея.

1 — источник, 2 — закрепленный поляризатор, 3 — вращающийся поляризатор, 4 — кинокамера, 5 — жидкий гелий, 6 — стекло, содержащее нитрат церия, 7 — образец, 8 — магнит.

ходящий на поверхность. Это можно сделать различными способами [2], но несомненно наиболее эффективный метод был предложен Алерсом, который использовал стекло, содержащее парамагнитную примесь

азотнокислого церия. Такое стекло вызывает особенно заметное вращение плоскости поляризации света в присутствии магнитного поля (эффект Фарадея). Стекланный лист помещался на гладкую поверхность сверхпроводника и освещался плоскополяризованным светом. Эта поверхность наблюдалась через призму Николя,

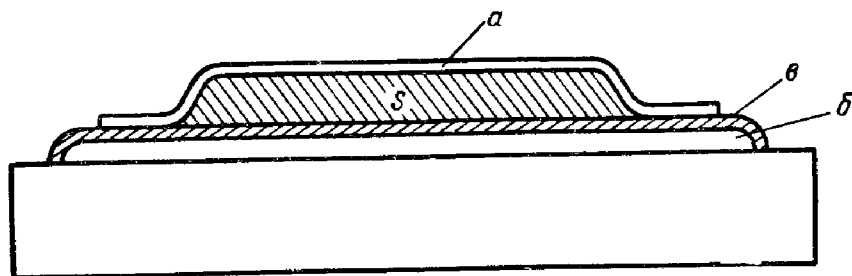


Фиг. 756. Картина, получаемая для хорошо отожженного диска из сплава Nb — 10% Ta в поле 500 э [36] (см. также фронтиспис).

ориентированную таким образом, что падающий свет через нее не проходит и поверхность кажется темной. Схема установки изображена на фиг. 75а. Если теперь приложить магнитное поле, поток проникает в глубь образца, и в тех точках поверхности, откуда выходят магнитные силовые линии, плоскость поляризации света вращается, и возникает светлая область (фиг. 756). Ввиду наличия в стекле локальных полей разрешение в этом методе не превышает 0,2 мм, и наблюдать отдельные кванты потока или структуру смешанного состояния невозможно. Однако такие эксперименты доказали, что по крайней мере часть потока, захваченного внутри образца, образует пучки.

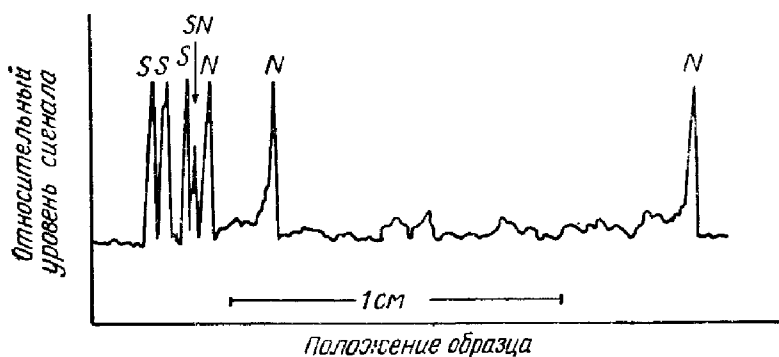
Наличие одиночных квантов потока (вихревых нитей), захваченных в толще образца, можно обнаружить

с помощью интерферометрического метода, который основан на макроскопическом квантовом интерференционном эффекте, возникающем на контакте Джозефсона (фиг. 76а). Ток сверхпроводимости, текущий через устройство такого типа, зависит от магнитного потока



Ф и г. 76а. Поперечное сечение контакта Джозефсона.

Контакт *S* заключен между тонкими ( $\sim 1000 \text{ \AA}$ ) оловянными пленками *а* и *б*, разделенными тонким слоем окиси *в*. Ток измеряется между пленками *а* и *б* [37].



Ф и г. 76б. Ток через контакт как функция положения ниобиевой проволоки [3].

Направление выходящего поля обозначено буквами *S* и *N*.

через поверхность *S* и изменяется с периодом  $hc/2e$ , равным кванту потока. Управляя этим током во время движения мимо устройства проволоки из сверхпроводника второго рода, содержащей захваченный поток, можно получить сигнал, показывающий распределение магнитного потока внутри проволоки. Одна из таких записей изображена на фиг. 76б [3]. Максимумы на этой

кривой соответствуют точкам, где контакт пронизывают одиночные вихревые нити.

Мы видим, таким образом, что в «необратимых» сверхпроводниках второго рода поток захватывается как в виде отдельных вихревых нитей<sup>1)</sup>, так и пучками.

## § 2. Захват потока в нитевидной структуре

Тот факт, что в сверхпроводящем кольце захват потока происходит в меняющемся внешнем поле, наводит на мысль, что внутри сверхпроводника может существовать многосвязная система тонких нитей с критическими полями, превышающими критическое поле окружающего их материала [4]. Многие авторы отождествляли такую «структуру губки» с сетью существующих в образце дислокаций.

Зависимость намагниченности от поля для веществ такого типа можно получить, предположив существование нитевидной структуры (губки), способной выдерживать незатухающий ток вплоть до критического тока  $J_c$  [5]. Материал между такими нитями представляет собой сверхпроводник первого рода с критическим полем  $H_c$ . Для простоты предположим, что критический ток не зависит от поля (это эквивалентно предположению, что приложенное поле много меньше критического поля губки). Намагниченность  $M$  определяется уравнением

$$4\pi M = \frac{\int (h - H) d\tau}{\int d\tau}, \quad (8.1)$$

где оба интеграла берутся по всему объему образца,  $h$  — внутреннее поле,  $H$  — внешнее приложенное поле и  $\tau$  — объем образца. Чтобы выполнить интегрирование,

<sup>1)</sup> Отдельные вихревые нити недавно наблюдались с помощью электронного микроскопа [6]. (См. примечание на стр. 96. — *Ред.*) Эти результаты показывают, что решетка из магнитных силовых линий обладает «упругими» и «пластическими» дефектами. Среди последних наблюдались дефекты, эквивалентные дислокациям, точечным дефектам и дефектам упаковки.

нужно выразить  $h$  через  $H$  и  $\tau$  для различных интересующих нас областей поля. Для упрощения математических выкладок выберем образец в виде длинного стержня радиусом  $a_c$ , а поле приложим вдоль оси образца. Тогда, если приложенное поле меньше  $H_c$ , оно экранируется полностью, если  $a_c$  много больше глубины проникновения и

$$h = 0, \quad 0 \leq r \leq a_c, \quad 0 \leq H \leq H_c. \quad (8.2)$$

Когда поле увеличивается и становится больше  $H_c$ , мягкий сверхпроводник, окружающий губку, переходит в нормальное состояние, а в наружных частях губки индуцируется ток. По закону Ампера ток проникает от поверхности до глубины  $\delta$ , которая равна

$$\delta = \frac{10(H - H_c)}{4\pi J_c},$$

т. е. существует макроскопическая, зависящая от поля глубина проникновения. С повышением поля  $\delta$  увеличивается и достигает максимума  $\delta = a_c$ , где  $a_c$  — радиус цилиндра. Тогда наружное поле равно  $H^* + H_c$ , где  $H^* = 4\pi J_c a_c / 10$ . Внутреннее поле на этом этапе намагничивания равно

$$\left. \begin{aligned} h &= 0, \quad 0 \leq r \leq a_c \left(1 - \frac{H - H_c}{H^*}\right), \\ h &= H - H^* \left(1 - \frac{r}{a_c}\right), \\ a_c \left(1 - \frac{H - H_c}{H^*}\right) &\leq r \leq a_c, \quad H_c \leq H \leq H^* + H_c. \end{aligned} \right\} \quad (8.3a)$$

Здесь  $(H - H_c)/H^* = \delta/a_c$ , так что первое условие соблюдается для области от  $r = 0$  до  $r = a_c - \delta$ , а второе — для области от  $r = a_c - \delta$  до  $r = a_c$  [для удобства интегрирования все радиусы в (8.3) выражены через поле]. На этой стадии сверхпроводимость в толще образца разрушена, ток течет только по губке, причем

$$h = H - H^* \left(1 - \frac{r}{a_c}\right), \quad 0 \leq r \leq a_c, \quad H^* + H_c \leq H. \quad (8.3б)$$

Подставляя (8.2), (8.3а) и (8.3б) в (8.1) и интегрируя, получаем

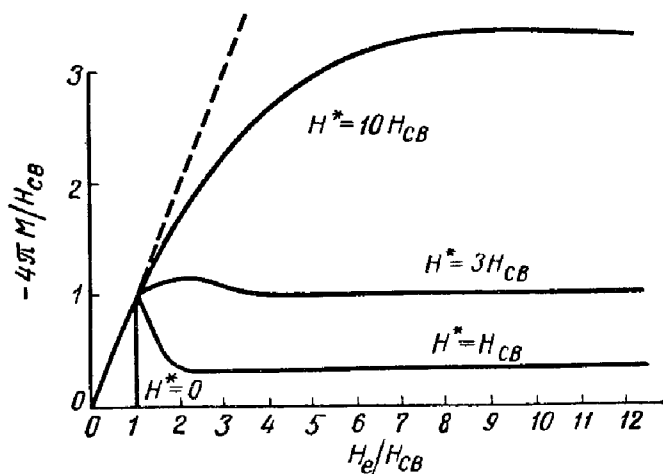
$$4\pi M = -H, \quad 0 \leq H \leq H_c,$$

$$4\pi M = -H + \frac{H^2 - H_c^2}{H^*} + \frac{H_c^2(3H - 2H_c) - H^3}{3H^{*2}},$$

$$H_c \leq H \leq H^* + H_c, \quad 4\pi M = -\frac{H^*}{3},$$

$$H^* + H_c \leq H.$$

На фиг. 77а изображены теоретические кривые намагничивания для различных значений критического тока



Фиг. 77а. Кривые намагничивания для цилиндрического сверхпроводника с нитевидной структурой, предсказываемой теорией Бина [5].

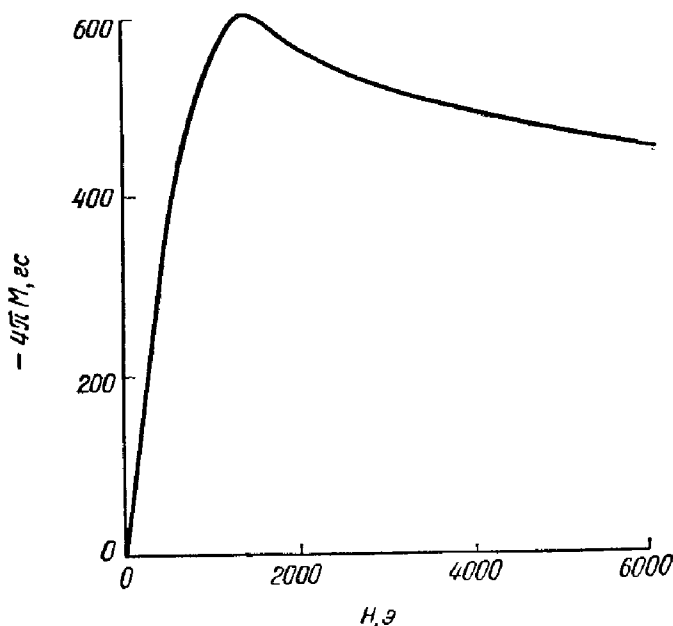
Здесь  $H_{cB}$  — критическое поле сверхпроводника в «междоузлиях» и  $H^* = 4\pi I_c a_c / 10$ , где  $I_c$  — критический ток нитей, а  $a_c$  — радиус нити.

губки, т. е. для различных  $H^*$ . Случай  $H^* = 0$  соответствует сверхпроводнику первого рода.

Из теории следует, что в слабых полях ( $0 \leq H \leq \leq 2H_c$ ) форма кривых  $M(H)$  аналогична форме экспериментальных кривых намагничивания. Но такого согласия нет и не должно быть в более сильных полях,

где перестает быть справедливым предположение о независимости критического тока от поля.

Если выщелочить стекло викор в промежуточной стадии его изготовления, то внутри его остается пористый остов окиси кремния с перекрещивающимися порами, средний радиус которых составляет около 30 Å.



Фиг. 77б. Экспериментальная кривая намагничивания длинного цилиндра с нитевидной сверхпроводящей структурой, изготовленного запрессовкой ртути в стекло викор [7].

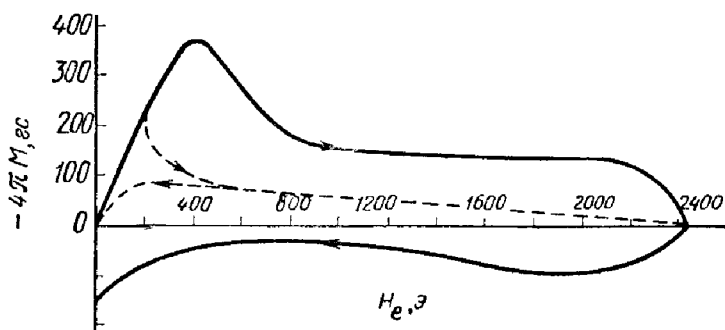
Если из этих пор откачать воздух, а в образовавшиеся каналы загнать ртуть, то мы получим образцы, напоминающие по структуре модель, рассмотренную выше. При измерении  $M(H)$  в таких образцах (фиг. 77б) получается необратимая зависимость, характерная для сверхпроводников второго рода [7].

Хотя модель с губчатой структурой почти наверняка справедлива для такого частного случая, с ее помощью нельзя объяснить ни начального проникновения поля в сверхпроводник второго рода при полях, меньших  $H_c$ , ни захвата потока, вызванного точечными дефектами, когда нет никакой многосвязной структуры.



### § 3. Захват потока в односвязной системе

Кривые намагничивания, полученные экспериментально, отличаются, по крайней мере слегка, от теоретических кривых Абрикосова (см. гл. 3, § 3), поскольку в области полей от  $H_{c1}$  до  $H_{c2}$  все сверхпроводники второго рода обнаруживают некоторый гистерезис. Для материалов с низкими  $\kappa$  для некоторых образцов можно наблюдать гистерезис в области полей между  $H_{c2}$  и  $H_{c3}$



Фиг. 78. Влияние холодной обработки на кривую намагничивания сплава Pb—8,23 вес. % In [10].

Сплошная линия — образец после холодной прокатки, пунктир — образец после отжига.

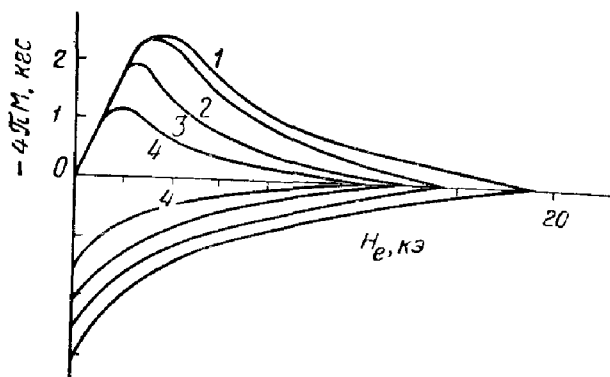
[8]. Этот гистерезис обуславливается незатухающим током, наведенным в сверхпроводящем поверхностном слое при изменении внешнего магнитного поля [9]. Эффект можно сильно снизить, если поверхность образца покрыть царапинами, препятствующими протеканию тока.

Одна из причин гистерезиса в крупных образцах — размерный эффект: поверхность под кривой намагничивания, равная  $\int M dH$ , увеличивается с увеличением площади поперечного сечения образца.

Первопричиной гистерезиса является, однако, наличие в сверхпроводнике дефектов решетки (дислокаций, точечных дефектов и включений второй фазы). Это хорошо иллюстрируется кривой на фиг. 78, построенной для образца Pb—8,23 вес. % In [10]. В отожженном образце гистерезис мал и захваченного потока практически

нет. Однако после холодной прокатки, в результате которой возникает большая плотность дислокаций и различных точечных дефектов, гистерезис увеличивается и после снижения поля до нуля остается захваченный поток. Последующий отжиг с целью удаления дефектов одновременно ликвидирует гистерезис и восстанавливает первоначальную кривую намагничивания.

Проводя измерения в металлургических системах с известными дефектами структуры, можно исследовать



Фиг. 79. Изменение намагниченности эвтектики Рб—Ві при 4,2°К в результате старения при комнатной температуре [11].

1 — сразу после отжига, 2 — через 1 день, 3 — через 5 дней, 4 — через 19 дней.

влияние на кривую намагничивания некоторых определенных дефектов решетки. Влияние изменения концентрации и размеров нормальных включений было исследовано на закаленных эвтектических образцах Рб—Ві [11]. В свежей отливке очень мелкие включения Ві распределены случайно в матрице сверхпроводника второго рода, для которого  $\kappa \approx 12$ . При старении образцов происходит рост зерен висмута, при котором число включений уменьшается, а их средний размер растет. Зависимость намагниченности от «возраста» образца изображена на фиг. 79, где виден заметный захват потока, несмотря на отсутствие в толще образца многосвязной структуры.

Облучение быстрыми нейтронами, приводящее к появлению целого ряда точечных дефектов различных ти-

пов и не оказывающее заметного воздействия на плотность дислокаций, также увеличивает гистерезис примерно пропорционально дозе облучения [12].

Однако даже в случае сильно отожженных образцов невозможно полностью снять гистерезис вблизи  $H_c$ , и, вероятно, отсутствие обратимости в этой области вызвано другой причиной. Вблизи  $H_c$  на вихревые нити действует суммарная сила, противодействующая проникновению потока, и поток не входит в образец, пока приложенное поле не превысит этот барьер. Простой расчет этого барьера по порядку величины для материалов с высоким  $\kappa$  был выполнен в [13, 14]. Рассматривая одиночную магнитную силовую линию, параллельную поверхности на расстоянии  $x_L$  от нее, уравнение Лондонов можно применять повсюду, за исключением области внутри сердцевинки вихря радиусом  $\xi(T)$ . На эту магнитную линию действуют две силы:

а) Сила со стороны внешнего поля  $H$ , которое проникает на глубину  $\lambda$  в сверхпроводник. Это поле отталкивает магнитную линию с силой

$$F_1 = \frac{1}{c} \Phi_0 J(x_L),$$

где  $J$  — плотность тока, индуцированного внешним полем, и  $\Phi_0$  — квант потока. В лондоновском приближении эта плотность тока равна

$$J(x) = \frac{cH}{4\pi\lambda(T)} e^{-x/\lambda(T)}.$$

б) Сила, вызванная изображением линии (расположенной при  $x = -x_L$ ); она стремится притянуть рассматриваемую линию к поверхности и равна

$$F_2 = -\frac{1}{c} \Phi_0 J_L(2x_L).$$

Здесь  $J_L(x)$  — плотность тока, обусловленная магнитной силовой линией, на расстоянии  $x$  от центра вихря. Для малых  $x$  скорость сверхпроводящих электронов равна

$$v = \frac{\hbar}{2mx},$$

где  $m$  — масса электрона. Тогда

$$J_L(x) = n_s e v = \frac{e \hbar n_s}{2 m x}.$$

Наименьшее расстояние  $x_L$ , на котором можно применять эти уравнения, равно  $\xi(T)$ . Магнитная силовая линия пересечет поверхность, если  $F_1 \gg |F_2|$ ; поле барьера  $H_s$  получается из условия  $F_1 = |F_2|$ , т. е.  $(\varphi_0/c) J[\xi(T)] = (\varphi_0/c) J_L[2\xi(T)]$ .

Если  $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$  и  $\lambda(T) \gg \xi(T)$ , то получаем

$$\frac{c H_s}{4 \pi \lambda(T)} = \frac{e \hbar n_s}{4 m \xi(T)},$$

т. е.

$$H_s = \frac{\varphi_0}{4 \pi \lambda(T) \xi(T)} \approx H_c.$$

При выводе выражений для  $H_s$  были использованы уравнения (1.15) для  $\lambda(T)$  и (3.13) для  $\varphi_0$ . Очевидно, что коэффициент пропорциональности между  $H_s$  и  $H_c$  не полностью определен, поскольку выбор  $x_L = \xi(T)$  довольно произволен. В [15] был рассмотрен более реальный случай «полупетли» вместо бесконечной вихревой нити. Полученные результаты аналогичны выводам, приведенным выше.

В экспериментах [16], где был исследован хорошо отполированный образец из сплава Nb—Ta, поля  $H_s$  и  $H_c$  мало отличались друг от друга ( $H_c = 310$  э и  $H_s = 320$  э при  $4,2^\circ$  К).

Следует отметить, что, когда поле  $H$  имеет порядок  $H_c$ , значение параметра упорядочения вблизи поверхности сильно уменьшается еще до появления вихря. Этот эффект обсуждался в [14], и его сравнительно легко исследовать в схеме Гинзбурга—Ландау при  $\kappa \gg 1$ , поскольку задача является одномерной. Для массивного сверхпроводника найдено, что  $H_s = H_c$ <sup>1)</sup>. Однако в случае тонких пленок картина должна существенно измениться.

<sup>1)</sup> Матрикон и Сан-Жам [17] недавно вычислили поле барьера как функцию  $\kappa$ . Было найдено, что это поле снижается от величины порядка  $H_c$  при  $\kappa = 1/\sqrt{2}$ , приближаясь к  $H_c$ , при увеличении  $\kappa$ .

Поверхностные неоднородности и краевые эффекты вызывают концентрацию локальных полей вдоль поверхности. В этих «слабых» точках поток может проникнуть внутрь образца, так что при увеличении поля (т. е. при проникновении потока в образец) роль барьера уменьшается. Однако, когда внешнее поле уменьшается, поток, заключенный в образце, направлен в ту же сторону, что и приложенное поле, и теперь те же неоднородности будут противодействовать выходу потока, вследствие чего относительное количество захваченного потока возрастает.

Эти выводы были подтверждены при исследовании гладких и рифленых образцов из сплава  $Pb-Tl$  [18],  $Nb$  и сплава  $Nb-Ta$  [16].

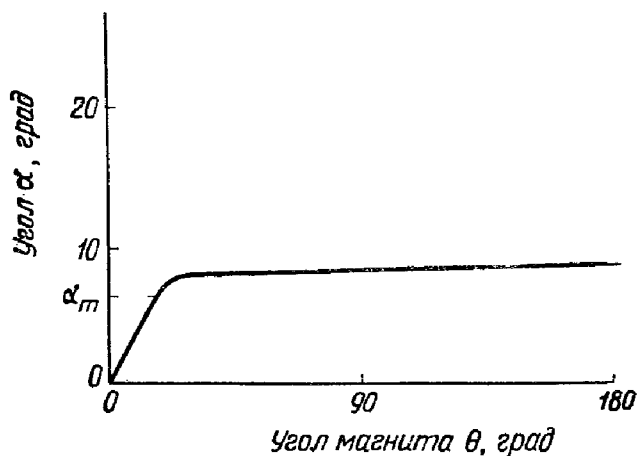
#### § 4. Центры пиннинга

После того как было обнаружено, что поток захватывается сверхпроводником, содержащим точечные дефекты, а не многосвязную структуру, возникла идея о существовании внутри сверхпроводника «центров пиннинга». Точного физического объяснения пиннинга пока не существует. Одной из возможных причин пиннинга на включениях в решетке может быть существование притяжения (силы изображения) на границе между сверхпроводником и включением. Из оценки по порядку величины следует, что поле таких сил, связанных с дефектами решетки, достаточно для объяснения наблюдаемого пиннинга.

При определении истинной силы пиннинга существенны относительные размеры линии потока и центра пиннинга, поскольку влияние сердцевины распространяется на область внутри сверхпроводника с размерами порядка длины когерентности  $\xi$ . Поэтому вполне вероятно, что центры пиннинга с диаметром, меньшим  $\xi$ , будут мало эффективны. Величина  $\xi$  изменяется от значения, превышающего  $1000 \text{ \AA}$  в хорошо отожженном ниобии [19], до  $\sim 50 \text{ \AA}$  в соединении  $V_3Ga$  [20], уменьшаясь с ростом  $\kappa$ . Диаметр локализованных дефектов может изменяться от нескольких ангстрем для выкристаллизовавшейся фазы, до величины порядка размеров

самого образца в случае бинарной структуры. Ввиду различия  $\xi$  эффективность разных дефектов по отношению к захвату потока будет зависеть от материала.

Экспериментальную оценку средней энергии, связанной с центрами пиннинга, можно осуществить с помощью метода, предложенного в [21]. Образец из сверхпроводника второго рода подвешивается на крутильном подвесе, а затем включается и выключается магнитное



Фиг. 80а. Угол между  $m$  и  $H$  как функция угла магнита в поле  $5 \text{ кэ}$  [21].

поле, в результате чего в образце остается захваченный поток. Затем снова включается слабое поле, и магнит поворачивается на угол  $\theta$ . Если теперь освободить образец, он повернется на угол  $\alpha$  по отношению к своему первоначальному положению. Зависимость  $\alpha$  от  $\theta$  для поля  $5 \text{ кэ}$  изображена на фиг. 80а. Угол  $\alpha_m$ , при котором  $\alpha$  начинает отклоняться от  $\theta$ , можно рассматривать как угол, при котором крутящий момент, действующий на линии магнитного потока, достаточен для преодоления сил пиннинга.

Если магнитный момент образца обозначить через  $m$ , то крутящий момент в поле  $H$  равен

$$\tau = mH \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между образцом и полем. Выражая момент через магнитную индукцию, имеем для образца

объемом  $V$

$$\tau = BVH \sin \alpha. \quad (8.4)$$

Полное число вихревых нитей в образце с площадью поперечного сечения  $S$  равно

$$n = \frac{BS}{\Phi_0}, \quad (8.5)$$

и энергия всех центров пиннинга в образце имеет вид

$$E = \int_0^{\alpha_m} \tau d\tau.$$

Таким образом, с помощью (8.4) и (8.5) получаем для образца длиной  $l$  энергию пиннинга на один квант потока

$$E_f = \Phi_0 H l (1 - \cos \alpha_m). \quad (8.6)$$

Зависимость  $E_f$  от поля для проволоки из Nb—25% Zr, вычисленная с помощью выражения (8.6), изображена на фиг. 80б.

Сила, действующая на вихри и обусловленная полем напряжений вокруг сферического включения в решетке, также может явиться причиной пиннинга [22]. Если критическая температура в этой области меньше, чем в остальной решетке (или если область находится в нормальном состоянии), свободная энергия включения в этой области будет выше, чем в остальной части решетки. Это приведет к отталкиванию электронов сверхпроводимости. Следовательно, такое положение будет одним из положений устойчивого равновесия для вихря (который имеет нормальную сердцевину). Плотность упругой энергии  $u$  в матрице, окружающей сферическое включение радиусом  $a$  в решетке с модулем сдвига  $\mu$ , равна

$$u = \frac{6\mu a^4 (a - r_s)^2}{r^6}.$$

Здесь  $r_s$  — радиус, который имела бы сфера, если бы она была заполнена таким же числом свободных атомов и такого же состава, как матрица. Энергия взаимодействия в рассматриваемой области возникает в силу

изменения энергии, обусловленного наличием вихревой нити. Интегрируя по объему вихря, получаем изменение энергии в этом объеме матрицы

$$U_m = 9\pi\Delta S_{44}\mu^2 a (a - r_s)^2,$$

где  $\Delta S_{44}$  — разница в упругой податливости между нормальной и сверхпроводящей областями. Кроме того, некоторый энергетический вклад дает деформация самой сферы (см. [35]):

$$U_s = \frac{6\pi a (a - r_s')^2}{\chi} \frac{\Delta\chi}{\chi},$$

где  $r_s'$  — радиус, который имела бы сфера, если бы она находилась в ненапряженном состоянии,  $\chi$  — сжимаемость внутри сферы и  $\Delta\chi = \chi_n - \chi_s$ . Тогда полная энергия  $U$  равна

$$U = U_m + U_s.$$

Сила  $F$ , действующая на квант потока, имеет вид

$$F = \frac{dU}{dx},$$

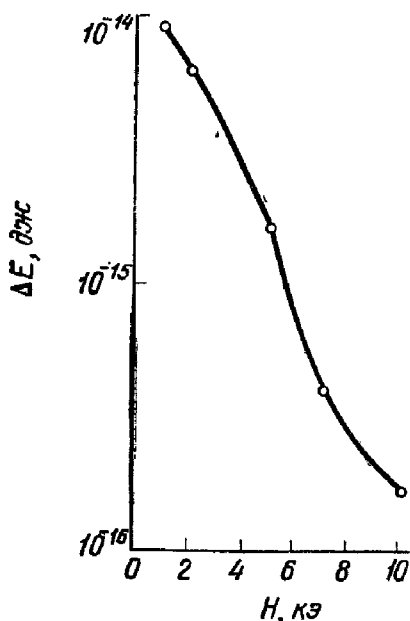
и приближенное значение средней силы  $\bar{F}$  можно найти, полагая

$$\bar{F} = \frac{U(b=2a) - U(b=0)}{2a}.$$

Фиг. 806. Изменение энергии пиннинга одной вихревой нити для проволоки из сплава Nb — 25% Zr во внешнем магнитном поле [21].

Подставляя подходящие значения для ниобия [ $\chi = 2 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>/дин,  $\Delta\chi/\chi = -1 \cdot 10^{-6}$  [23],  $|(a - r_s')/a| = 1/2 |(a - r_s)/a|$  и  $a = 40$  Å], получаем  $F \approx 10^{-2}$  дин/см, и энергия деформации составляет около  $10^{-20}$  дж на один центр пиннинга.

Аналогичным образом в [24] была оценена энергия взаимодействия и сила, действующая на квант потока со стороны дислокаций. С помощью общих формул, полученных в [25] для изменения критического поля при





возникновении напряжений, можно вычислить изменение разности свободной энергии на единицу объема между нормальной и сверхпроводящей фазами как функцию компонент тензора напряжений. Рассуждая таким же образом, как при вычислении плотности упругой энергии для точечных дефектов, и интегрируя по объему вихревой нити радиусом  $R$ , расположенной на расстоянии  $\omega$  от дислокации, получаем полную энергию взаимодействия. Когда поток перпендикулярен дислокации, для предельного случая  $\omega \gg R$  имеем

$$U = -\Delta S_{44} \left( \frac{\mu b}{2\pi} \right)^2 \frac{\pi^2 R^2}{2\omega} \quad (\omega \gg R).$$

Здесь  $\mu$  — напряжение сдвига и  $b$  — вектор Бюргерса. Используя в качестве приближения для  $dU/d\omega$  среднее от производной от  $U$  в области от  $\omega = 0$  до  $\omega = R$  (чтобы избежать нефизичного обрезания в ядре дислокации), получаем

$$F \sim -\Delta S_{44} \left( \frac{\mu b}{2\pi} \right)^2 \frac{\pi^2}{d},$$

где  $d$  — расстояние между дислокациями, на которых происходит пиннинг. По порядку величины сила пиннинга и энергия взаимодействия почти такие же, как и для случая пиннинга на включениях в решетке.

В гл. 9 будет показано, что, когда в сверхпроводнике второго рода с центрами пиннинга, находящемся в смешанном состоянии, течет ток, на вихревые нити действуют силы типа лоренцевских, и критический ток соответствует силе, достаточной для преодоления пиннинга вихрей. Следовательно, чтобы оценить по порядку величины значение  $F$ , можно приравнять его силе Лоренца при известном значении плотности критического тока. В этом случае

$$J_c = \frac{10F}{\Phi_0}.$$

Принимая  $J_c = 10^5$  а/см<sup>2</sup> для сплава Nb — 25% Zr, получаем  $d \approx 10^{-5}$  см и, следовательно, плотность дислокаций составляет  $\sim 10^{10}$  см<sup>-2</sup>. Плотность дислокаций, измеренная для этого вещества, равна  $\sim 10^{11}$ — $10^{12}$  см<sup>-2</sup>. Однако возможно, что только небольшая

часть дислокаций имеет конфигурацию, способную вызвать захват потока.

Сравним эти результаты с экспериментальными данными Хайзе [21], предполагая, что в его экспериментах пиннинг обуславливался рассмотренными выше взаимодействиями. Энергия пиннинга одной нити изменяется в пределах от  $10^{-14}$  до  $10^{-16}$  дж, и энергия одного центра пиннинга составляет  $\sim 10^{-20}$  дж. Отсюда ясно, что число центров пиннинга на каждую линию потока изменяется от  $10^4$  до  $10^6$ . Эффективная длина образцов составляла около 30 см, так что расстояние между центрами пиннинга изменялось от  $3 \cdot 10^3$  до  $3 \cdot 10^5$  Å. Предполагая, что размеры самих центров на порядок меньше этих расстояний, легко видеть, что их размеры имеют величину порядка  $\xi$  и больше, как этого и следовало ожидать.

Поскольку энергия взаимодействия между вихревой нитью и дислокацией отрицательна, для образования соответствующего барьера необходимо, чтобы удлиненная ячейка дислокаций была перпендикулярна потоку. Это как раз и происходит в ниобии, где сплетение дислокаций значительно эффективнее по отношению к захвату потока [26].

Свободная энергия вихревой нити в поле  $H$  равна  $-\varphi_0 H/4\pi$ , так что  $x$ -компонента силы на единицу длины равна

$$F_x = - \frac{\varphi_0 (\partial H / \partial x)}{4\pi} = - \frac{\varphi_0 (\partial H / \partial B) (\partial B / \partial x)}{4\pi}, \quad (8.7)$$

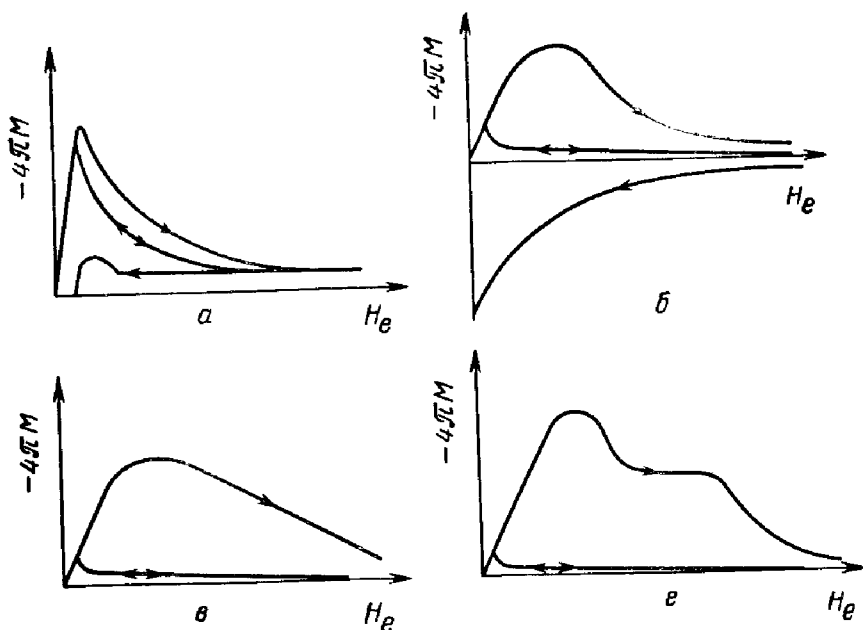
где  $\partial B / \partial x$  — градиент потока в образце, и в первом приближении производная  $\partial H / \partial B$  обратно пропорциональна градиенту обратимой кривой  $B(H)$ . Зная  $F_x$ , можно вычислить поток в образце как функцию координат для различных значений внешнего поля и затем, проинтегрировав по объему образца, найти величину  $M(H)$ , обусловленную наличием центров пиннинга. Можно оценить зависящий от поля гистерезис, предположив, что сила пиннинга обратно пропорциональна магнитной индукции, а именно [27]

$$F = \frac{F_0 \varphi_0}{Bl^2}.$$

Здесь  $F_0$  — сила пиннинга, действующая на изолированную вихревую нить, а  $l$  — расстояние между центрами пиннинга. Подставляя это выражение в (8.7) и интегрируя, получаем

$$B^2 - B_0^2 = \frac{8\pi m F_0}{l^2} x = \beta x, \quad (8.8)$$

где  $m = \partial N / \partial B$ ,  $\beta$  — постоянная, а граничное условие для интеграла имеет вид  $B = B_0$ , где  $B_0$  — обратимая

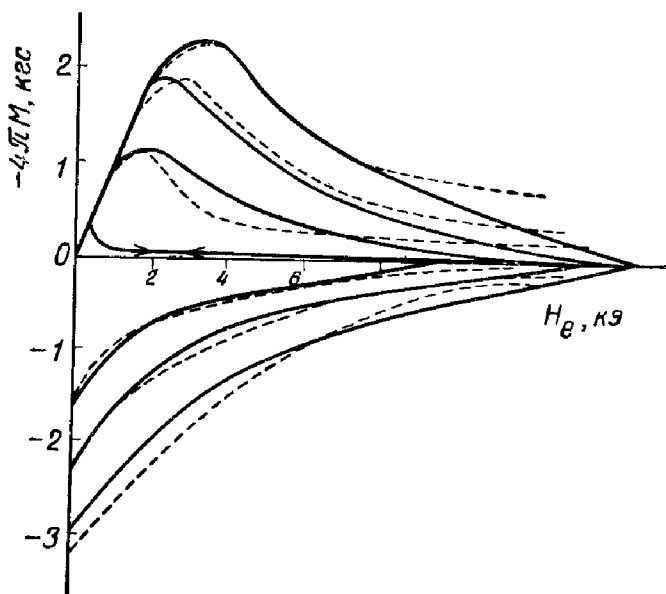


Фиг. 81. Кривые намагничивания для четырех типов центров пиннинга [27].

*а* — слабый пиннинг, *б* — сильный пиннинг, *в* — близко расположенные центры пиннинга, *г* — смесь сильных, удаленных друг от друга центров пиннинга и близко расположенных слабых центров пиннинга.

величина индукции на поверхности образца. Выбрав соответствующим образом обратимую кривую  $M(H)$ , можно вычислить форму гистерезиса. Необратимые кривые  $M(H)$ , получаемые из этого уравнения для четырех случаев, представляющих интерес, изображены на фиг. 81 вместе с обратимой кривой, с помощью которой были сделаны вычисления.

Эти теоретические кривые сравнивались с экспериментальными результатами, полученными на образцах Рb—Вi (см. фиг. 79). Результаты такого сравнения изображены на фиг. 82, где значения постоянных выбраны таким образом, чтобы максимумы экспериментальных и теоретических кривых соответствовали одному значению



Фиг. 82. Сравнение зависимости намагниченности от поля для сплавов Рb—Вi после стжига различной продолжительности с теорией (пунктир) [27].

Обратимая кривая, принятая за основу вычислений, обозначена стрелками.

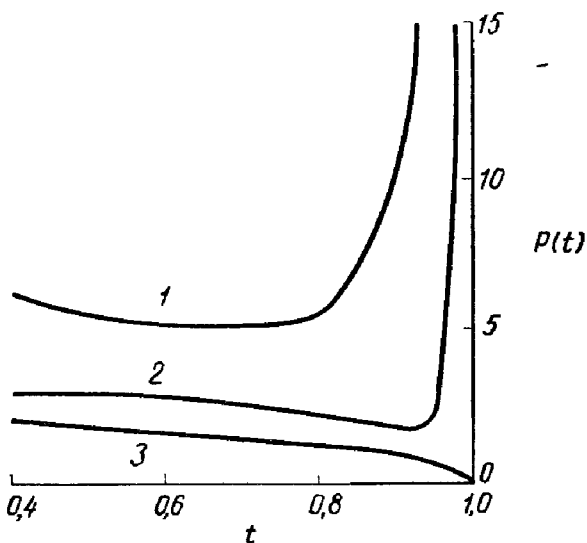
нию намагниченности. В слабых полях согласие вполне хорошее, но, по-видимому, при большой плотности вихревых нитей предположение об обратной пропорциональности между силой пиннинга и индукцией несправедливо.

Для индукции, обусловленной гистерезисом, можно получить аналогичный (8.8) результат, рассматривая энергию взаимодействия между вихревыми нитями в треугольной решетке, когда они взаимодействуют с параметрами в решетке [28]. При таком подходе нет необходимости предполагать в качестве исходного пункта для вычислений пропорциональность  $F \sim 1/V$ . Вместо этого

необходимо сделать ряд других упрощающих предположений (взаимодействие только между ближайшими соседями; уменьшение свободной энергии решетки только за счет наличия пор; все поры вносят вклад в пиннинг для всех значений поля между  $H_{c1}$  и  $H_{c2}$ ).

### § 5. Зависимость захваченного потока от температуры

Пиппард [29] подробно исследовал зависимость захваченного потока от температуры в образцах, пред-

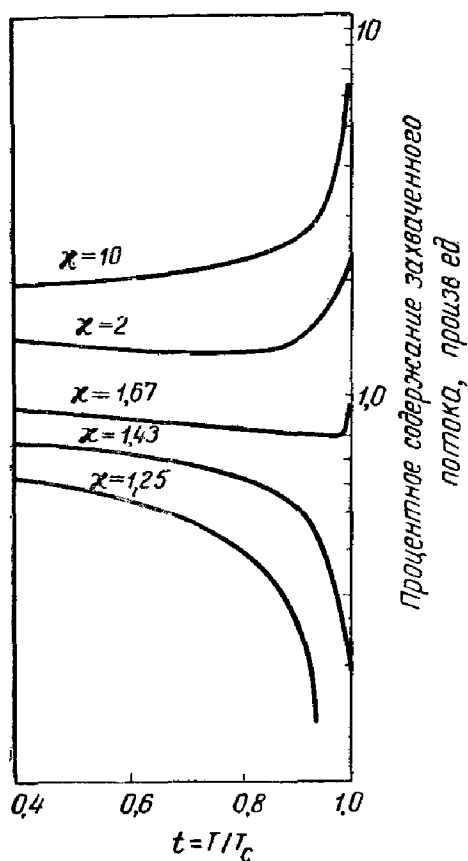


Фиг. 83. Кривые зависимости процентного содержания  $P$  захваченного потока от приведенной температуры  $t$  сплава Sn—1% In, характеризующие влияние отжига и различие между поликристаллическим (кривая 1) и монокристаллическим (кривая 2) образцами [29].

1 — неотожженный образец, 2 — отожженный в течение 44 час, 3 — отожженный в течение 44 дней. Это вещество является сверхпроводником первого рода, но происходящие в нем изменения характерны для сверхпроводников второго рода.

ставляющих собой длинные стержни из олова, содержащего до 3 вес. % In. Кривые на фиг. 83 показывают характерную зависимость результатов от качества и отжига кристаллов. Аналогичные эксперименты были выполнены на образцах из Sn—Sb, Sn—Bi, Sn—In [30].

Ни в одном из этих экспериментов не наблюдалось уменьшения захваченного потока до нуля при  $t = 1$ . Исследованные образцы были отожжены, имели блестящие поверхности, состояли всего из нескольких кристаллитов (как и в экспериментах Пиппарда), и трудно сказать, чем вызвано это расхождение. Аналогичная зависимость захваченного потока от температуры (с большими значениями только при  $t = 1$ ) найдена также для родия [31]. В образце родия относительное содержание захваченного потока равномерно растет с увеличением дозы облучения нейтронами.



Фиг. 84. Зависимость процентного содержания захваченного потока от температуры для значений  $\chi$  от 1,25 до 10 согласно работе [32].

в окружающие канал области и будет уменьшаться в силу эффекта когерентности между электронами, расположенными вне и внутри границы канала. Если  $C$  — периметр канала, изменение его эффективного поперечного сечения, обусловленное комбинацией этих эффектов, имеет порядок  $C(\lambda - \xi)$ , а эффективная площадь за-

хватки каналов будет увеличиваться при проникновении захваченного поля

Удовлетворительного объяснения зависимости захваченного потока от температуры не существует, но можно сделать ряд простых выводов, предположив, что магнитный поток проходит по ряду нормальных каналов, расположенных в толще материала [32]. Эффективная площадь захвата каналов будет увеличиваться при проникновении захваченного поля

хвата канала равна

$$A_e = A_c + C(\lambda - \xi);$$

здесь  $A_c$  — фактическая площадь поперечного сечения канала. Отсюда следует, что относительное содержание захваченного потока в данном образце пропорционально  $\gamma + \lambda - \xi$ , где  $\gamma$  — характеристический размер канала. Нет никаких оснований считать, что  $\gamma$  зависит от температуры, но известно, что  $\lambda$  и  $\xi$  изменяются с температурой. Процент захвата потока  $P$  как функцию температуры  $t$  можно записать в виде

$$P(t) = P(0) \frac{\gamma + \lambda(t) - \xi(t)}{\gamma + \lambda(0) - \xi(0)}.$$

Температурная зависимость глубины проникновения в олове, согласно [33], приблизительно равна  $\lambda(t) = \lambda(0)(1 - t^4)^{-1/2}$ . Непосредственные измерения длины когерентности не проводились, но в [34] приведены данные по зависимости поверхностной энергии от температуры для чистого олова. В силу высокой чистоты образцов в этой зависимости преобладающей является температурная зависимость длины когерентности. Следовательно, в этом случае температурная зависимость длины когерентности предполагается такой же, как температурная зависимость поверхностной энергии, т. е. ее можно записать в виде

$$\xi(t) = \xi(0)(1 - t^{3/2})^{-1/2}.$$

Зависимость процента захвата потока от температуры, предсказываемая такой моделью для различных значений  $\kappa$ , изображена на фиг. 84. Основные свойства захваченного потока и его зависимость от  $\kappa$ , найденные теоретически, дают только качественное (но не количественное) согласие с экспериментом, как и можно было ожидать для такой простой модели.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hecht R., Cleveland Conference IV, 98 (1964).
2. Alers P., Phys. Rev., **105**, 104 (1957).
3. Zimmerman J. E., Mercereau J. E., Phys. Rev. Lett., **13**, 125 (1964).

4. Mendelssohn K., Proc. Roy. Soc., **A152**, 34 (1935).
5. Bean C. P., Phys. Rev. Lett., **8**, 250 (1962).
6. Essman Y., Trauble H., Phys. Lett., **A24**, 526 (1967).
7. Bean C. P., Phys. Rev. Lett., **9**, 93 (1962).
8. Sandiford D. J., Schweitzer D. G., Phys. Lett., **13**, 98 (1964).
9. Jones D. P., Park J. G., Phys. Lett., **20**, 111 (1966).
10. Livingston J. D., Phys. Rev., **129**, 1943 (1963).
11. Evetts J. E., Campbell A. M., Dew-Hughes D., Phil. Mag., **10**, 339 (1964).
12. Swartz P. S., Hart H. R., Fleischer R. L., Appl. Phys. Lett., **4**, 71 (1964).
13. Bean C. P., Livingston J. D., Phys. Rev. Lett., **12**, 14 (1964).
14. De Gennes P. G., Sol. State Comm., **3**, 127 (1965).
15. Matricon J., диссертация.
16. De Blois R. W., De Sorbo W., Phys. Rev. Lett., **12**, 499 (1964).
17. Matricon J., Saint-James D., Phys. Lett., **A24**, 241 (1967).
18. Joseph A. S., Tomasch W. J., Phys. Rev. Lett., **12**, 219 (1964).
19. Cribier D., Jacrot B., Madhav Rao L., Farnoux B., Phys. Lett., **9**, 106 (1964).
20. Goodman B. B., IBM Journ. Res. Developm., **6**, 63 (1962).
21. Heise B. H., Rev. Mod. Phys., **36**, 64 (1964).
22. Toth L. E., Pratt I. P., Appl. Phys. Lett., **4**, 75 (1964).
23. Alers G. A., Waldorf D. L., Phys. Rev. Lett., **6**, 677 (1961).
24. Webb W. W., Phys. Rev. Lett., **11**, 191 (1963).
25. Seraphim D. P., Marcus P. M., IBM Journ. Res. Developm., **6**, 94 (1962).
26. Narlikar A. V., Dew-Hughes D., Phys. Stat. Solidi, **6**, 383 (1964).
27. Campbell A. M., Evetts J. E., Dew-Hughes D., Phil. Mag., **10**, 333 (1964).
28. Silcox J., Rollins R. W., Appl. Phys. Lett., **2**, 231 (1963).
29. Pippard A. B., Phil. Trans. Roy. Soc. (London), **A248**, 97 (1955).
30. Budnick J. I., Lynton E. A., Serin B., Phys. Rev., **103**, 286 (1956).
31. Doulat J., Goodman B. B., Renard M., Weil L., Compt. Rend., **249**, 2017 (1959).
32. Jurrison J., Oakes J. A., Phys. Lett., **2**, 187 (1962).
33. Schawlow A. L., Devlin G. E., Phys. Rev. **113**, 120 (1959).
34. Faber T. E., Proc. Roy. Soc., **A248**, 460 (1958).
35. Friedel J., Adv. Phys., **3**, 446 (1954).
36. De Sorbo W., Healey W., Cryogenics, **4**, 257 (1964).
37. Jaklevic R., Lamb J., Silver A., Mercereau J., Phys. Rev. Lett., **12**, 159 (1964).



## Глава 9

# ДВИЖЕНИЕ ПОТОКА ВНУТРИ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА

Вообще говоря, магнитный поток внутри сверхпроводника второго рода в смешанном состоянии находится в метастабильном равновесии. Какое-либо изменение внешних условий может вызвать изменение в распределении потока. В настоящей главе мы рассмотрим, каким образом происходят эти изменения.

Движение потока внутри сверхпроводника качественно можно изучать с помощью эффекта Фарадея (см. гл. 8, § 1) [1, 2]. Полученные результаты показывают, что движение магнитного потока в сверхпроводнике второго рода может происходить плавно (§ 1) или в виде ряда внезапных перемещений, называемых *скачками потока* (§ 2) в зависимости от плотности и распределения дефектов в образце. Скачки потока обычно происходят в образцах с высокой плотностью дефектов. Движение линий потока вызывает диссипацию энергии в образце и вследствие этого его нагревание (§ 3). В силу диссипации энергии движение потока в сверхпроводниках второго рода является необратимым процессом даже в том случае, когда в образце нет центров пиннинга.

### § 1. Стационарное движение линий потока

Линии потока в сверхпроводнике, находящемся в смешанном состоянии, могут испытывать действие нескольких сил. Когда в материале имеется больше чем одна вихревая нить, в результате дальнего действия кулоновского взаимодействия<sup>1)</sup> между двумя вихревыми

---

<sup>1)</sup> Упоминание автором о кулоновском взаимодействии непонятно, так как в действительности взаимодействие между вихревыми нитями происходит от сложения вихревых токов и магнитных полей (см. гл. 3). — *Прим. ред.*

ниями возникает сила, знак которой зависит от их взаимного направления.

При наличии в образце тока с плотностью  $\mathbf{J}$  возникает сила типа лоренцевской  $\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \Phi_0/c$ , действующая на каждую вихревую нить и направленная перпендикулярно току. Наблюдая за разностью потенциалов между двумя точками вдоль образца, находящегося в смешанном состоянии, между этими точками можно обнаружить постоянное напряжение, если ток и поле постоянны. Это напряжение можно объяснить стационарным движением линий потока поперек образца, возникающим в результате совместного действия силы Лоренца и «вязкой» силы. Если в материале имеются подходящие центры пиннинга, движение линий потока задерживается и может полностью прекратиться. И наконец, локальные области с более высокой температурой внутри сверхпроводника могут передать линиям потока энергию, достаточную для преодоления пиннинга.

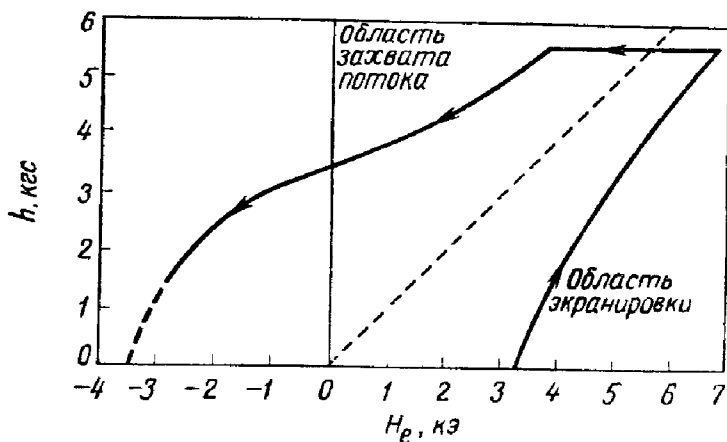
Величина кулоновских сил<sup>1)</sup>, действующих между линиями потока, зависит от распределения этих линий, которые, вообще говоря, в образце распределены неравномерно. Поэтому редко удается произвести точные вычисления магнитных сил, действующих на нить потока. Однако в некоторых случаях можно приближенно задать распределение потока. Тогда, если  $B(x)$  — локальная плотность потока, энергия на единицу длины линии равна  $\Phi_0 B(x)/4\pi$ . Следовательно, сила, действующая на единицу длины линии потока в направлении  $x$ , равна

$$F_x = \frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{\partial B(x)}{\partial x}. \quad (9.1)$$

Предположение о том, что при наличии тока на нить потока действует сила Лоренца, впервые было высказано в [3], а затем было использовано для объяснения экспериментов по намагничиванию трубок из сверхпроводника второго рода [4]. Зависимость внутреннего поля  $h$  от внешнего поля  $H_e$  для трубки из сплава Nb—25% Zr изображена на фиг. 85. В области с поло-

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 287. — Прим. ред.

жительными  $h$  и  $H_e$  (а также в области с отрицательными  $h$  и  $H_e$ , не изображенной на фигуре) кривые представляют собой равносторонние гиперболы, а в двух других квадрантах — окружности.



Фиг. 85. Изменение магнитного поля внутри трубки из сплава Nb — 25% Zr при изменении внешнего поля [5].

Для трубки намагниченность  $M$  определяется следующим образом:

$$M = h - H_e.$$

Среднее поле в стенке трубки равно

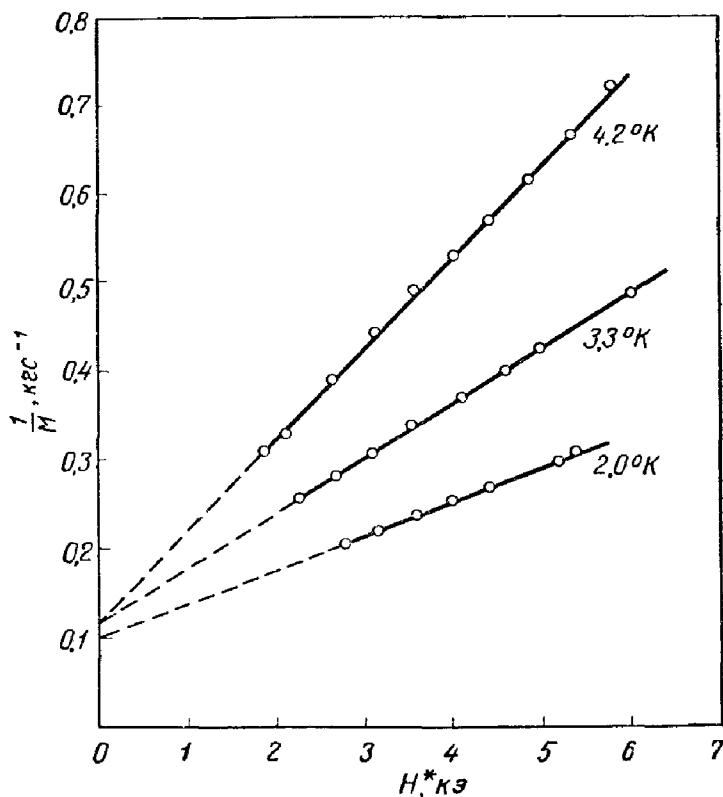
$$H^* = \frac{1}{2}(h + H_e).$$

Чтобы получить закон, которому подчиняются эти результаты, построим график зависимости  $1/M$  от  $H^*$ . Ряд таких результатов для различных температур для трубок из спеченного ниобия изображен на фиг. 86. Для полей, не слишком близких к  $H_{c1}$  и  $H_{c2}$ , получено семейство прямых линий. Это семейство прямых удовлетворяет уравнению

$$\frac{W\alpha}{M} = H^* + B_0, \quad (9.2)$$

где  $W$  — толщина стенки, а постоянные  $\alpha$  и  $B_0$  (угловой коэффициент и отрезок на оси, отсекаемый прямой)

характеризуют рассматриваемый сверхпроводник. Гиперболы и окружности, аппроксимирующие кривую критического состояния  $h(H_e)$ , получаются при подстановке в (9.2) выражений для  $M$  и  $H^*$ .



Фиг. 86. График зависимости  $1/M$  от  $H^*$  для трубки, спеченной из ниобиевого порошка, при различных температурах [5].

Несовпадение полей  $h$  и  $H_e$  обусловлено наличием тока, наведенного в стенках цилиндра. Внутреннее и внешнее поля можно поэтому связать следующим образом:

$$h = H_e + k \int_0^w JB(r) dr,$$

где  $r$  — радиус, измеряемый от поверхности трубки,  $J$  — ток, текущий в стенках цилиндра,  $B(r)$  — магнитная

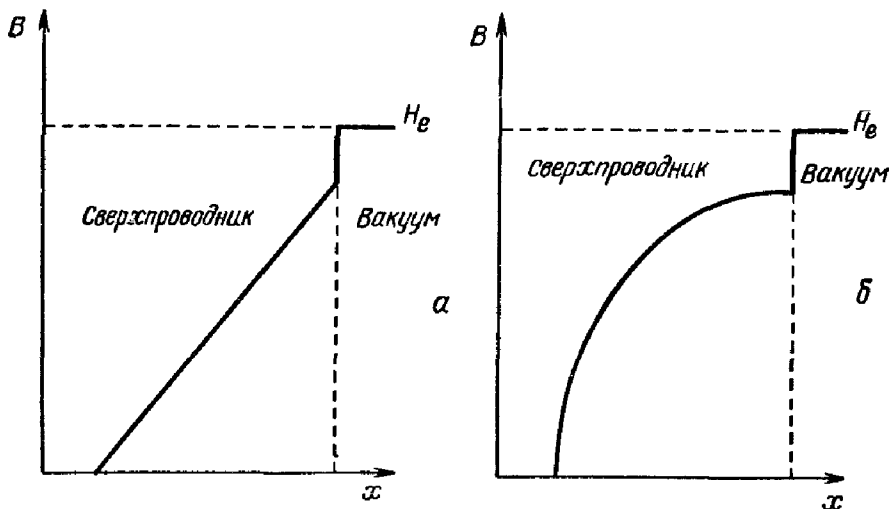
индукция в точке  $r$  и  $k$  — постоянная. Исключение  $r$  приводит к интегральному выражению

$$kW = \int_{H^* - M/2}^{H^* + M/2} \frac{dB}{J(B)}.$$

Это выражение переходит в (9.2), если ток связан с индукцией следующим соотношением:

$$\alpha_c = J(B + B_0).$$

Вдалеке от  $H_{c1}$  индукция  $B \sim H$  (см. фиг. 85), так что величина  $\alpha_c$  пропорциональна величине  $(JH + \text{const})$ .



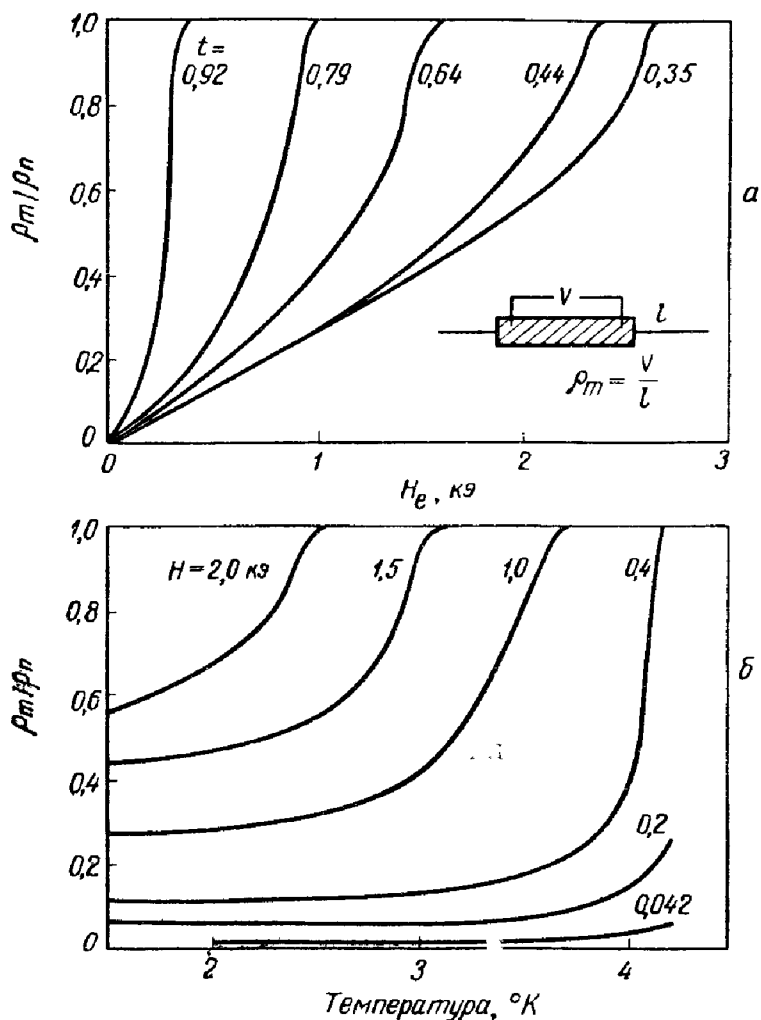
Фиг. 87. Магнитная индукция внутри сверхпроводника.

$a$  — модель Бинна,  $b$  — модель Крэма — Андерсона.

Это означает, что связь между полем и током определяется силой Лоренца. Постоянная  $B_0$  различна для разных материалов, может даже быть отрицательной, и ее смысл не вполне ясен. Наиболее вероятно, что она представляет собой сложное выражение, отражающее действие всех других сил на нить потока в условиях данного эксперимента, а именно

$$\sum F = JB_0.$$

В модели Бина, рассмотренной в гл. 8, § 2, предполагается, что  $J = \alpha$ , т. е. что  $J$  не зависит от  $B$ . Это



Фиг. 88. Сопротивление потоку для ленты из сплава Nb — 90% Ta, находящейся в смешанном состоянии [7].

*a* — как функция поля при различных температурах, *б* — как функция температуры при различных значениях поля.

приводит к линейной зависимости  $B$ , изображенной на фиг. 87, *a*. В модели Кима — Андерсона поле внутри сверхпроводника изменяется параболически (фиг. 87, *б*).

При наблюдении сверхпроводящего перехода по сопротивлению можно заметить возникновение разности потенциалов, а следовательно, и сопротивления в образце, находящемся еще в смешанном состоянии [6, 7]. На фиг. 88 изображена зависимость приведенного сопротивления для смешанного состояния от поля при различных температурах и от температуры при различных полях для ленты из сплава Nb—90% Ta. Когда приведенная температура  $t$  приближается к нулю, эти результаты аппроксимируются соотношением

$$\frac{\rho_m}{\rho_n} = \frac{H_c}{H_{c2}},$$

где  $\rho_m$  и  $\rho_n$  — соответственно сопротивление в смешанном и нормальном состояниях.

Было высказано предположение [8], что разность потенциалов возникает из-за движения потока через образец под действием силы Лоренца. Это подтверждается экспериментами на тонких пленках [9]. Однако такое объяснение неоднозначно, поскольку стационарное движение потока через образец должно создавать поток в измерительной цепи. Имеется, однако, альтернативная возможность — накопление потока на одной поверхности образца и исчезновение его на другой поверхности, что само по себе не может вызвать появления постоянного напряжения [10]. Движущиеся линии потока вызывают, однако, изменение химического потенциала вдоль сверхпроводника. Эта разность химического потенциала появляется как электрическое напряжение между любыми двумя точками сверхпроводника в смешанном состоянии [11]. Мы получили бы точно такой же результат, если бы это напряжение создавалось непосредственно силой Лоренца, и поэтому разность потенциалов  $E$  между двумя точками сверхпроводника в смешанном состоянии можно записать следующим образом:

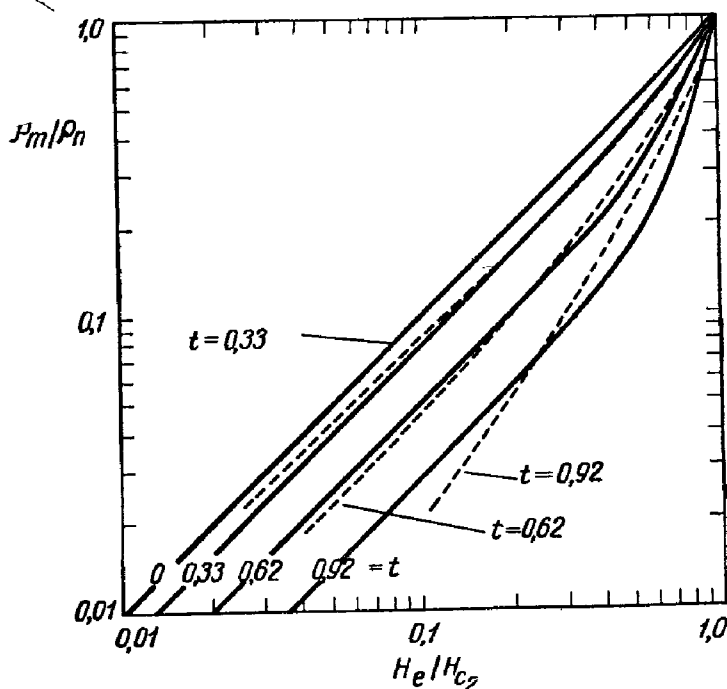
$$E = - \left( \frac{v}{c} \right) \times \mathbf{B},$$

где  $v$  — скорость линии потока и  $\mathbf{B}$  — локальная магнитная индукция.

Силу трения, действующую на линии потока и не позволяющую им достичь бесконечной скорости, можно записать, используя коэффициент вязкости, в виде

$$F_v = -\eta v_e,$$

где  $\eta$  — коэффициент вязкости и  $v_e$  — скорость линий потока относительно окружающей среды. Природа коэффициента вязкости еще не полностью ясна. Одна из



Фиг. 89. Сравнение теоретических кривых Тинкхама (сплошная линия) с экспериментальными данными (пунктир) для сопротивления потоку как функции поля при различных температурах [13].

возможностей — возникновение диссипации под влиянием вихревых токов, индуцированных в сердцевине магнитной линии, находящейся почти в нормальном состоянии [12]. Однако диссипация, обнаруженная экспериментально, много больше теоретической [7]. В работе [13] диссипация в сверхпроводнике была вычислена феноменологически. Автор ввел время релаксации для сверхпроводящей волновой функции, когда она после



прохождения линии потока через данную точку возвращается к равновесному виду. Добавляя член вихревого тока, после ряда приближений получаем для  $\rho_m/\rho_n$  выражение вида

$$\frac{\rho_m}{\rho_n} = \frac{b}{(1+t)^2(1-b^2)} + b^2 + (b-b^2)t$$

где  $b = V/H_{c2}$  и  $t$  — приведенная температура. Полученная из этого выражения зависимость  $\rho_m/\rho_n$  от  $H_c/H_{c2}$  изображена на фиг. 89. В более поздней работе<sup>1)</sup> было обнаружено, что принятое здесь время релаксации, вероятно, для случая грязных материалов слишком велико. Однако оно все же обеспечивает достаточно хорошее эмпирическое описание экспериментальных результатов. В частности, это выражение вполне хорошо согласуется с экспериментальными данными, изображенными на фиг. 88 (линейная шкала). Оно хорошо согласуется также с результатами, полученными на проволоке из сплава Pb—In [15].

При измерении продольного напряжения в смешанном состоянии было установлено [4, 5], что в широком интервале температур и процентного состава сплавов коэффициент вязкости определяется эмпирическим выражением

$$\eta = \frac{\pi \hbar H_{c2} \sigma}{ec},$$

где  $\sigma$  — проводимость в нормальном состоянии. При движении линии потока сверхпроводящие электроны, расположенные в любой точке решетки вблизи края сердцевины нити, ускоряются, когда нить проходит мимо них. Следовательно, в сердцевине вихревой нити возникает электрическое поле. Если энергетические потери, связанные с этим полем, приравнять  $\eta \mathbf{v}_l$  — диссипации энергии в ядре на единицу длины [16], то выражение для  $\eta$  принимает вид

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{\pi \hbar H_{c2} \sigma}{ec}.$$

<sup>1)</sup> М. Тинкхат, частное сообщение.

Это выражение получено для коэффициента вязкости, связанного с диссипацией энергии внутри сердцевин. Можно ожидать, что диссипация вне сердцевин имеет примерно ту же величину, так что в целом эффект удвоится. Согласно [16], такой механизм ответствен за основную часть энергетических потерь в экстремальном сверхпроводнике второго рода (при  $\xi \ll \lambda$ )

Для объяснения упомянутых выше результатов, полученных при намагничивании трубок [4], было выдвинуто предположение [8], что движение линий потока может возбуждаться тепловым движением. Этот эффект можно понять, рассматривая движение не отдельных линий, а пучков потока. Напряжение, индуцированное в катушке, помещенной внутри или снаружи сверхпроводящей трубки (в зависимости от направления движения потока), соответствует движению не одного, а  $n$  (20—50) квантов потока. Сила Лоренца, действующая на пучок линий потока с эффективным диаметром  $d$ , равна  $\int \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\tau$ , так что свободная энергия записывается в виде

$$\mathcal{F}_l = -In\varphi_0 dx.$$

Размер эффективных центров пиннинга больше или равен  $\xi$  (см. гл. 8, § 4). Если считать, что центры пиннинга находятся в нормальном состоянии, то свободная энергия барьера равна  $\sim (H_c^2/8\pi)\xi^3$ . Предполагая, что эффективна лишь часть  $p$  этой энергии, для полной энергии барьера, препятствующего движению линий потока в присутствии тока, получаем

$$\mathcal{F}_b = \frac{pH_c^2}{8\pi}\xi^3 - In\varphi_0 d^2.$$

В силу теплового возбуждения барьер будет пропускать линии потока в количестве

$$R = R_0 e^{-\mathcal{F}_b/kT}. \quad (9.3)$$

Здесь  $R_0$  — характерная частота колебаний пучка ( $\sim 10^5$ — $10^{10}$  в 1 сек).

Это рассмотрение непригодно в двух случаях: вблизи  $H_{c1}$  и вблизи  $H_{c2}$ . Вблизи  $H_{c1}$  величины  $B$  и  $H$

сильно отличаются друг от друга (см. фиг. 85, где  $B \sim h$ , а  $H \sim H_c$ ). Чем больше это различие, тем больше ток, индуцированный в стенке трубки, что усложняет результаты. Кроме того, число вихревых нитей уменьшается, и сила, действующая на вихрь, будет стремиться к  $\mathbf{J} \times \Phi_0/c$  независимо от внешнего поля. Когда  $H_c$  приближается к  $H_{c2}$ , вихри должны перекрываться, что очень усиливает взаимодействие между ними. В этом случае магнитное давление становится сравнимым с силой Лоренца, что приводит к отклонению результатов от простой лоренцевской схемы.

Присутствие сил, действующих на вихревые нити, приводит к тому, что в отличие от сверхпроводников первого рода поток, захваченный в сверхпроводящем кольце из сверхпроводника второго рода, не остается постоянным, а экспоненциально затухает. Это следует из выражения (9.3), если его записать для образца в форме кольца. Если  $h > H_c$ , то ползучесть потока заставляет пучки потока выходить из кольца со скоростью  $R N_w / N_p$ , где  $N_w$  — число пучков в стенке кольца и  $N_p$  — число эффективных центров пиннинга, которые встречает пучок при пересечении стенки. Далее,

$$N_w \sim \frac{2\pi a W H^*}{\Phi_0},$$

и  $N_p \sim pW/d$ , где  $a$  — радиус трубки. Когда  $H_c$  равно нулю, скорость ползучести равна

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{2dR_0 H^*}{\rho a} e^{-\mathcal{F}_b/kT}. \quad (9.4)$$

Полагая

$$K = \frac{2dR_0}{\rho a} e^{-\rho H_c^2 d^3/8\pi kT}$$

и

$$\alpha(t) = J(t) [B(t) + B_0],$$

получаем

$$\frac{d\alpha}{dt} = - H^* \left| \frac{d\alpha}{dh} \right| K e^{\alpha d^3/kT}.$$

Считая, что общее изменение  $\alpha$  мало, и пренебрегая начальным неустановившимся процессом, получаем

$$\delta\alpha \sim \text{const} - \frac{kT}{d^3} \ln t. \quad (9.5)$$

Найденная экспериментально величина  $\alpha$  равна квазипостоянной величине  $\alpha_c$ , которая достигается сразу после начального периода быстрого экспоненциального затухания. Из (9.5) следует, что

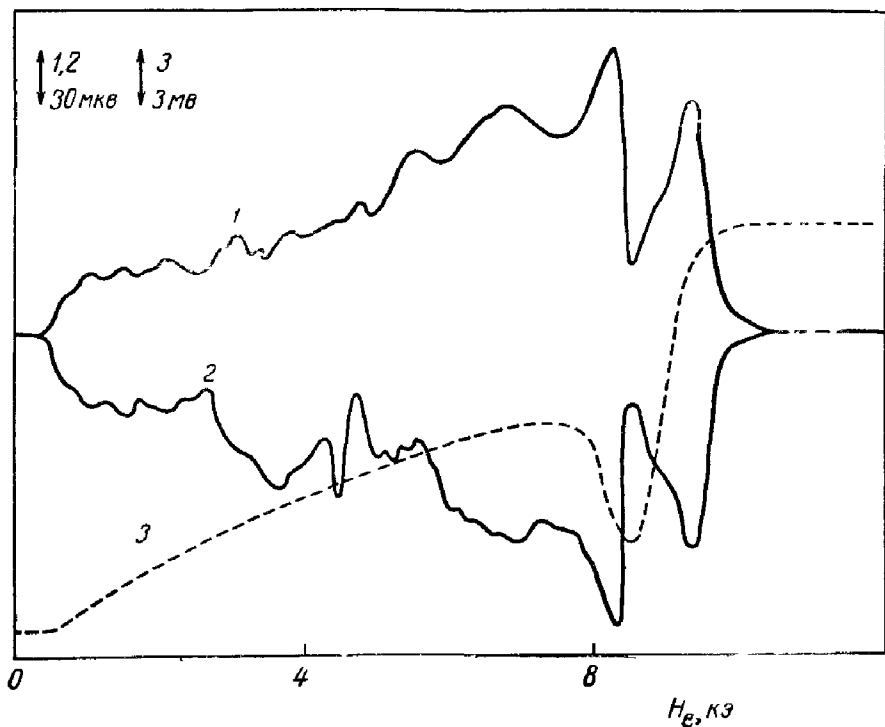
$$h = \frac{dh}{d\alpha} \frac{kT}{d^4} \ln t = - \frac{k'W}{h + B_0} \frac{kT}{d^4} \ln t,$$

где  $k'$  — постоянная.

Экспоненциальное затухание поля было найдено в трубках из сверхпроводника второго рода [4]. Скорость затухания достигала 10 э за 10 лет. Если ток в стенках образца затухает с такой скоростью, то он уменьшится до нуля примерно за  $3 \cdot 10^{92}$  лет. Следовательно, практически ток в стенках не затухает, и захваченный поток после начального периода быстрого затухания остается постоянным. В силу упомянутого затухания кривые, изображенные на фиг. 85, соответствуют лишь квазиравновесному состоянию, когда при любом заданном значении  $H_e$  изменение  $h$  может быть обнаружено экспериментально.

Скорость линий потока, движущихся через образец, может иметь продольную компоненту. В этом случае будет индуцироваться поперечное напряжение, обратное относительно магнитного поля и тока, т. е. напряжение Холла. Эффект Холла был измерен для смешанного состояния в сверхпроводниках второго рода: в Nb [17] и в сплаве Nb — 50% Ta [18] (а также для промежуточного состояния в сверхпроводнике первого рода, в In). Если поверхность образца недостаточно хорошая, в нем возникают большие необратимые поперечные разности потенциалов, которые могут замаскировать эффект Холла. Вероятно, именно по этой причине другие исследователи не смогли заметить холловского напряжения. Было найдено, что эти нерегулярные поперечные напряжения коррелируют с легкой гофрировкой поверхности листовых образцов, которая возникает при их прокатке. Очевидно, эта гофрировка направляет движение вихревых нитей; поток может двигаться вдоль впадин, но не поперек их. Такую картину можно имитировать в макроскопическом масштабе, вызывая изменение потенциальной энергии линий потока в образце

модуляцией внешнего магнитного поля, которая достигается с помощью гофрированных полюсов в магните, создающем внешнее поле. Первоначально при анализе таких экспериментов с управляемым движением потока рассматривались действующие на вихрь силы Магнуса,

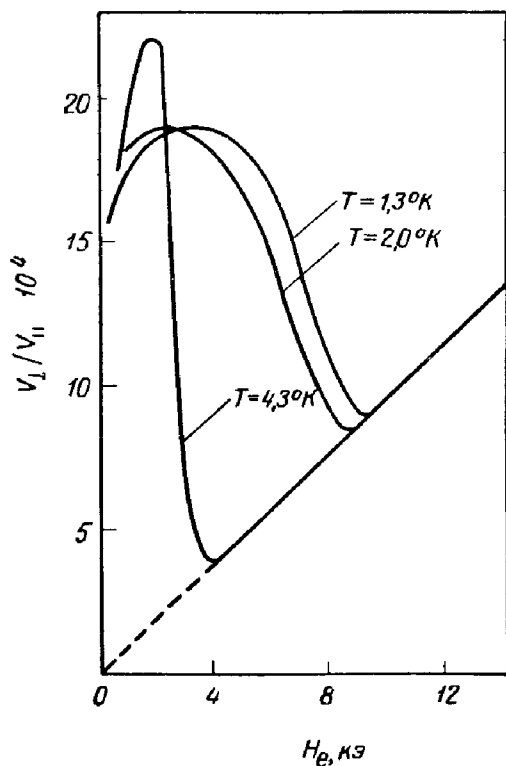


Фиг. 90а. Поперечная и продольная разность потенциалов как функция магнитного поля для листа из сплава Nb — 50% Ta [18].

Температура 1,3°K при плотности тока в образце  $3 \cdot 10^8$  а/см<sup>2</sup>. 1 — поле параллельно току, 2 — поле антипараллельно току, 3 — поле перпендикулярно току. Тонкая структура кривых 1 и 2 и провал на кривой 3 исчезают при отжиге.

по аналогии с классической теорией вихрей в гидродинамике. (В [19] было предположено, что при бесконечно сильной связи между электронами и решеткой, т. е. в пределе частых столкновений, сила Магнуса, действующая на вихрь сверхпроводящих электронов, полностью уравнивается наличием в решетке положительных ионов. В этом пределе эффект Холла также исчезает.) Эффект Холла и необратимое напряжение, возбуждаемое управляемым потоком, изображены на фиг. 90а

для образца из сплава Nb—50% Ta при температуре 1,3° К. Ток для кривой 2 обратен току для кривой 1. Разность между этими кривыми составляет удвоенную холловскую разность потенциалов. Тонкая структура



Фиг. 90б. Угол Холла как функция магнитного поля для сплава Nb—50% Ta при различных температурах [18].

кривых определяется центрами пиннинга, которые встречает поток при различных значениях поля. Это подтверждается тем, что тонкая структура повторяется при одновременной перемене знака тока и поля, а также тем, что при тщательном отжиге образцов тонкая структура исчезает [20]. Кривая 3 на фиг. 90а изображает продольную разность потенциалов, измеренную вдоль образца. Зависимость угла Холла  $\arctg(V_{\perp}/V_{\parallel})$  от поля для трех различных температур изображена на фиг. 90б.

Угол Холла очень мал. Это указывает на то, что линия потока движется почти перпендикулярно току.

В очень чистых сверхпроводниках, для которых  $\omega_c \tau \gg 1$  и  $\xi_0 \gg l$  (т. е. для которых плотность дефектов кристаллической решетки незначительна), возможны коллективные колебания конфигурации вихревых нитей в смешанном состоянии [21]. Рассмотрим конфигурацию линий потока в поле  $H(\parallel Oz)$  и заменим каждую линию переменными  $s_x(r)$ ,  $s_y(r)$ . Тогда, считая среду изотропной, потенциал можно разложить в ряд:

$$G = G_0 + \frac{1}{2} K_1 \left[ \left( \frac{\partial s_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial s_y}{\partial y} \right)^2 \right] + K_2 \left[ \left( \frac{\partial s_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial s_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} K_3 \left[ \left( \frac{\partial s_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial s_y}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Здесь  $K_1$  и  $K_2$  — коэффициенты Ламе для двумерной решетки линий потока. Вычисленную из этого уравнения силу, действующую на линию потока, можно приравнять обычной электродинамической силе, действующей на линию движущегося потока,

$$F = \frac{n_s e v}{c} \Phi_0.$$

Значения коэффициентов Ламе можно получить из общей формулы

$$G = G_0 + \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{[B_z - B(H)]^2}{\mu_z} + \frac{B_x^2 + B_y^2}{\mu} \right\},$$

так что  $\mu_z = dB(H)/dH$  и  $\mu = B(H)/H$ . Если  $\lambda \gg \xi$ , то  $\mu_z \sim \mu \sim 1$ , так что

$$\frac{1}{2} K_1 + K_2 = \frac{B^2(H)}{4\pi\mu_z} \sim \frac{B^2}{4\pi},$$

$$K_3 = \frac{HB(H)}{4\pi}.$$

Модуль сдвига  $K_2$  мал, так что  $K_2 \sim K_1(\xi/\lambda)^2$ . Подставляя эти величины  $K$  в уравнение для силы и находя собственные колебания  $s = s_0 \exp[i(kr - \omega t)]$ , получаем

дисперсионные соотношения<sup>1)</sup>:

$$\omega = \frac{eH}{m^*c} k^2 \lambda^2 \quad (k \parallel Oz) \quad (9.6)$$

и

$$\omega \sim \frac{eB}{m^*c} k^2 \lambda d \quad (k \perp Oz), \quad (9.7)$$

где  $d$  — среднее расстояние между линиями потока и  $m^*$  — эффективная масса электрона. Колебания (9.6) имеют круговую поляризацию, а колебания (9.7) — эллиптическую, и, когда  $k$  направлено вдоль оси  $x$ ,  $s_x/s_y \sim \xi/\lambda \ll 1$ .

Все эти вычисления были выполнены без учета усложняющих ситуацию центров пиннинга. Для учета их влияния нужно добавить к выражению для потенциала члены  $s_x^2$  и  $s_y^2$ . В этом случае все еще существуют четко выраженные длинноволновые моды (колебания), имеющие форму плоских волн, однако в частотном спектре появится щель.

Из обобщенной теории Гинзбурга — Ландау, учитывающей зависимость от времени<sup>2)</sup>, следует, что каждая линия потока имеет инертную массу на единицу длины [22]. Представление о времени релаксации резонирующей вихревой нити можно получить, если приравнять член, связанный с ускорением, который определяется

<sup>1)</sup> Теория Де Жена и Матрикона, касающаяся колебаний вихревой структуры, вызывает сильные возражения. В настоящее время можно считать установленной возможность распространения продольных колебаний, связанных с изменением плотности магнитного потока. Соответствующий закон дисперсии имеет вид  $\omega = (eH/m^*c)[k^2\lambda^2/(1+k^2\lambda^2)]$  [14], который при  $k\lambda \ll 1$  переходит в формулу (9.6). Что касается поперечных колебаний, то этот вопрос пока остается открытым. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Как показано в недавних работах Л. П. Горькова и Г. М. Элиашберга [23], вопрос об учете зависимости от времени в уравнениях Гинзбурга и Ландау является в действительности довольно сложным, и получение уравнений в дифференциальной форме возможно лишь в некоторых особых случаях. Все предыдущие работы, содержащие такие попытки, либо справедливы лишь для очень высоких частот ( $\omega \gg \Delta$ ), либо вообще неверны. Последнее относится, в частности, к упоминаемой работе Сула. Поэтому все заключения, делаемые на основании этих работ, являются неоправданными. — *Прим. ред.*



инертной массой, члену, обусловленному затуханием. Последний был экспериментально получен в [7]. Для использованного образца из сплава Nb—50% Ta время релаксации меньше  $10^{-12}$  сек, так что коллективные моды колебаний наблюдать очень трудно.

## § 2. Скачки потока

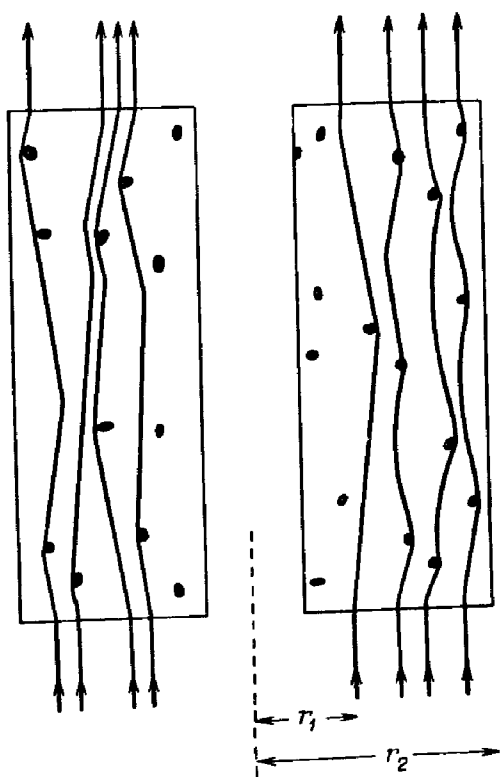
Быстрое движение потока внутри массивного сверхпроводника — явление хорошо известное. Оно наблюдается в кольцах как из сверхпроводников первого рода, находящихся в промежуточном состоянии<sup>1)</sup>, так и из сверхпроводников второго рода. Этот эффект наблюдали в искусственных нитевидных сверхпроводниках, образующихся при запрессовке ртути или свинца в поры выщелоченного стекла викор [24], а также в сплошных и полых цилиндрах и проволочных соленоидах из сверхпроводников второго рода.

Скачки потока можно рассматривать с помощью модели критического состояния потока в сверхпроводниках второго рода, предложенной в [5]. Трубочатый образец со случайным распределением центров пиннинга, находящийся в критическом состоянии во внешнем поле между  $H_{c1}$  и  $H_{c2}$ , изображен схематически на фиг. 91. Линии магнитного потока проникают в область  $r_1 < r < r_2$ , где каждый центр пиннинга закрепляет максимально возможное для него число линий; в область  $r < r_1$  поток не проникает. Образец при этом находится в таком состоянии, когда магнитное поле внутри него удовлетворяет зависимости, изображенной на фиг. 85. Поэтому эту кривую часто называют кривой критического состояния.

В этом состоянии любое увеличение внешнего поля будет вызывать уменьшение  $r_1$  и может привести к скачку потока. Скачок потока либо проявляется как разрыв кривой намагничивания образца, либо приводит к появлению импульса напряжения в навитой на образец измерительной катушке. Если скачок потока особенно велик, то в центре трубки неожиданно возникает

1) J. Corson, E. Thomas, частное сообщение.

магнитный поток, который можно наблюдать с помощью измерительной катушки или при помощи устройства для измерения поля с использованием эффекта Холла или по магнитному сопротивлению. Когда образец имеет форму проволоки, из которой намотан соленоид, то эта



Фиг. 91. Сверхпроводник второго рода в критическом состоянии.

обмотка сама становится измерительной катушкой, и скачки потока можно наблюдать, измеряя разность потенциалов на концах катушки.

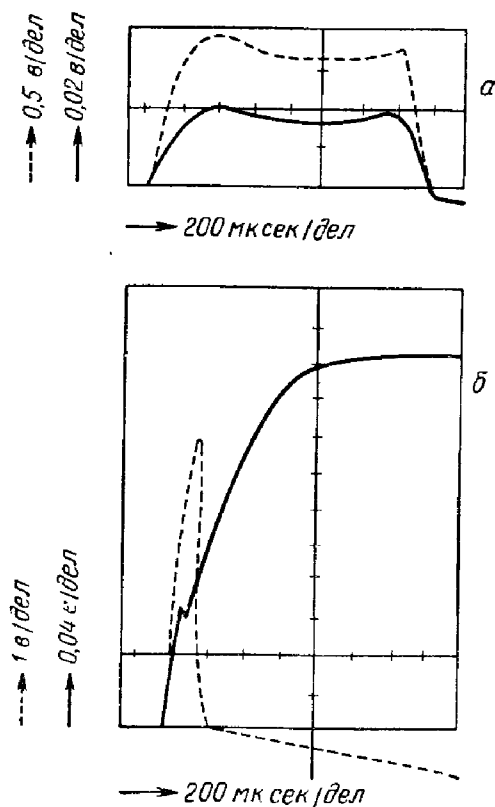
Начальное движение локализованного потока может быть вызвано внешними силами, упомянутыми уже в § 1. Если образец находится в критическом состоянии, скачок потока может произойти в результате изменения магнитного давления, изменения сил Лоренца (при изменении внешнего поля или тока) или в результате увеличения температуры. Силы вязкости и силы, связанные

с центрами пиннинга, не определяются внешними условиями и поэтому не играют никакой роли при возникновении скачка потока. Начальный скачок потока может быть также вызван механическим сотрясением образца. Линия магнитного потока обладает инерцией [22], так что удар вызывает сдвиг решетки относительно флюксоидов.

Первоначальное движение потока вызывает лишь небольшой его скачок. Процесс может продолжаться, вызывая лавинообразный скачок потока, или может затухнуть. Две эти возможности изображены на фиг. 92. При небольшом скачке потока разности потенциалов, наведенные между концами сверхпроводящей катушки и в наружной измерительной катушке, относительно малы. Разность потенциалов, возникающая в катушке, связана с движением потока (т. е. она имеет ту же форму, как и в измерительной катушке). Однако при резком скачке сигнал в измерительной катушке указывает на то, что поток уходит из образца очень быстро, и разность потенциалов в катушке остается даже после выхода потока, что связано с появлением нормальных областей. Если в катушке течет достаточно большой ток, вызываемое им джоулево тепло повысит температуру катушки выше критической температуры проволоки, несмотря на то что она находится в жидком гелии. Если же ток невелик, катушка снова охладится и разность потенциалов упадет до нуля.

Появление сопротивления в катушке является признаком того, что происходит большое движение потока, вызывающее нагрев. Это было показано непосредственно [25, 26] путем измерения температуры образца. При скачке потока происходило резкое увеличение температуры образца. Тепловая природа скачка потока проявляется также при исследовании пористых трубок из спеченного  $Nb_3Sn$ . Скачки потока в таких трубках происходят значительно реже, чем в образцах без пор: внутренняя часть пористого материала охлаждается лучше, так как жидкий гелий проникает в поры и предотвращает образование локальных горячих областей [27]. Если эти поры заполнить веществом с высокой теплопроводностью, таким, как серебро или медь, скачки

потока становятся более вероятными [28]. Охлаждение гелия ниже  $\lambda$ -точки, где теплопроводность жидкого гелия сильно возрастает, предотвращает возникновение



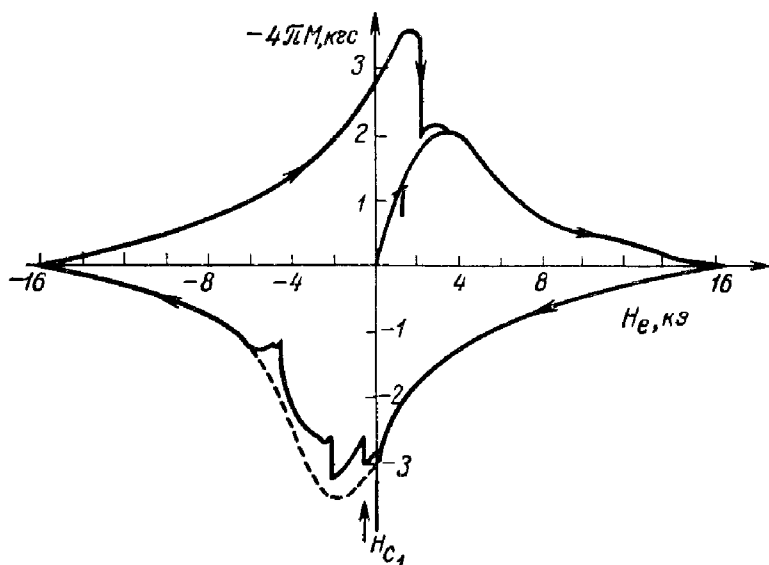
Фиг. 92. Осциллограмма, снятая при скачке потока в несущей ток проволоке из сплава Nb — 25% Zr [34].

*a* — некатастрофический скачок потока, *б* — катастрофический скачок потока; пунктирная линия — разность потенциалов в измерительной катушке, окружающей образец, показывает движение потока: сплошная линия — нескомпенсированная разность потенциалов, возникающая между концами сверхпроводящей катушки и представляющая собой сумму разностей потенциалов, возникающих в результате нормального сопротивления и в силу движения потока. Обратите внимание, что масштаб на фигуре *a* вдвое больше, чем на фигуре *б*. Ток в обоих случаях немного различен: *a* — 31 а, *б* — 25 а.

скачков потока в образцах Nb<sub>3</sub>Sn, пористость которых недостаточна, чтобы полностью исключить скачки потока при более высоких температурах [29].

Чтобы начальное движение потока перешло в большой скачок, нужно, чтобы по образцу распространилась

тепловая волна, достаточно большая для преодоления пиннинга. Возможность этого определяется удельной теплоемкостью и теплопроводностью сверхпроводника, а также скоростью выделения тепла в толще образца. Главным источником тепла для большинства образцов служит энергия диссипации, определяемая вязким движением вихревых нитей.



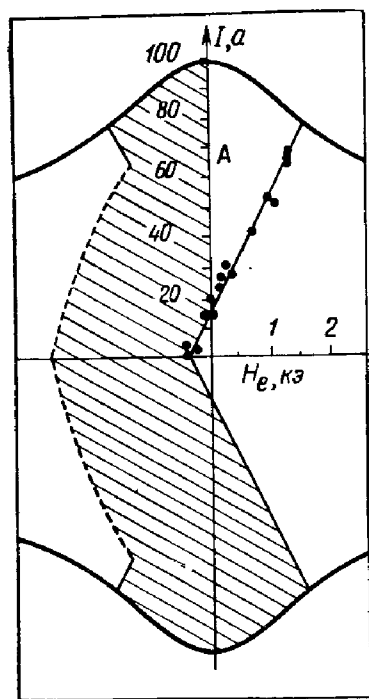
Фиг. 93а. Кривая намагничивания для эвтектики Рb — Vi при  $4,2^\circ\text{K}$ , показывающая скачки потока при  $-H_{c1}$  [30].

Пунктир показывает, какой была бы кривая намагничивания, если бы образец оставался в критическом состоянии.

Возможность дальнейшего выделения тепла в результате аннигиляции вихревых нитей противоположного знака видна из экспериментальной кривой, приведенной на фиг. 93а [30]. Существенных скачков потока нет, пока кривая намагничивания не достигает точки  $-H_{c1}$ , где начинается проникновение потока противоположного знака. Энергия, выделяющаяся при слиянии двух нитей, равна  $2(\Phi_0 H_{c1}/4\pi)$ , что эквивалентно возрастанию температуры при  $4^\circ\text{K}$  примерно на  $1^\circ\text{K}$ . Это дает нескольким соседним вихревым нитям энергию, достаточную, чтобы оторвать их от центров пиннинга.

После этого кулоновское взаимодействие<sup>1)</sup> заставляет нити противоположного знака двигаться вместе и аннигилировать с дальнейшим выделением тепла. Энергия оставшихся линий при их движении рассеивается при преодолении сил вязкости. Если имеется достаточное количество вихревых нитей с противоположными знаками, выделяющееся тепло ликвидирует пиннинг для всех вихревых нитей. Такой тип неустойчивости подтверждается вычислениями зависимости области неустойчивости от поля при протекании тока через образец [31].

Ток снижает намагниченность. Обнаружено очень хорошее согласие между теоретическими и экспериментально найденными значениями поля, при которых возникают скачки потока, для определенных значений тока. Это иллюстрируется фиг. 936, где теоретически найденная область неустойчивости представляет собой заштрихованную часть и область, обозначенную буквой А.



Фиг. 936. Область неустойчивости (заштрихованная часть и область А), вычисленная для плоского диска из сплава Nb—22% Zr [31].

Точками обозначены экспериментальные данные, соответствующие полю, при котором возникает неустойчивость для различных токов в образце.

Nb—25% Zr [32, 33]. Каждый раз, когда возрастало внешнее поле при постоянном токе или когда возрастал ток при постоянном внешнем поле, на концах катушки наблюдались импульсы напряжения.

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 287. — Прим. ред.

Можно ожидать, что в образцах с низкой удельной теплоемкостью, небольшой плотностью и низкой теплопроводностью скачки потока будут происходить часто, если не принимать специальных мер по охлаждению внутренних областей образцов. Возникновение скачков потока более вероятно также при увеличении скорости нагрева в образце. Это зависит частично от скорости изменения поля<sup>1)</sup>, а также от плотности центров пиннинга. Последняя зависимость подтверждается измерениями на облученных нейтронами образцах из  $Nb_3Sn$  [35]. До облучения образцы при равномерном изменении поля со скоростью 10 э/сек оставались в критическом состоянии во всей области полей и никаких скачков потока не наблюдалось. Однако после облучения потоком нейтронов плотностью порядка  $10^{18}$  нейтрон/см<sup>2</sup> образец очень редко достигал критического состояния, хотя кривая критического состояния сдвигалась в сторону несколько более высоких полей. Вместо этого в нем происходили большие скачки потока.

Трудно сделать какие-либо количественные оценки величины потока, перемещающегося при каждом скачке. Однако экспериментально было обнаружено [36], что в случае цилиндра из спеченного  $Nb_3Sn$  величина потока  $H_f$ , остающегося в цилиндре после скачка (когда температура образца опять сравнилась с температурой гелиевой ванны), связана с начальной скоростью изменения внешнего поля экспоненциальным законом

$$H_f \sim e^{\partial H_e / \partial t};$$

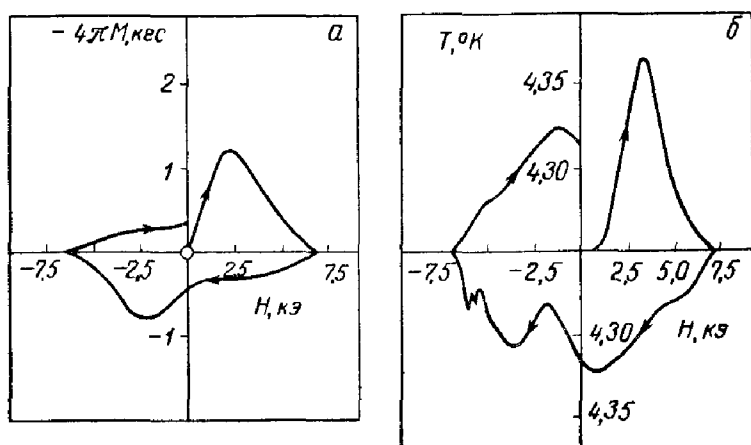
это справедливо в том случае, когда поле меняется со скоростью от 5 до 20 э/сек.

### § 3. Магнитно-тепловые эффекты

При движении линий магнитного потока в сверхпроводнике второго рода происходит диссипация энергии и выделяется тепло, в результате чего должен возникать магнитно-тепловой эффект. Это и наблюдалось

<sup>1)</sup> J. C o r s a n, частное сообщение.

в [25] на образцах грязного ниобия. Изменение температуры образца в поле, возрастающем со скоростью порядка 1000 э/сек при  $4,2^\circ\text{K}$ , измеренное угольным термометром сопротивления, изображено на фиг. 94 вместе с кривой намагничивания образца. При нагреве образца благодаря пропусканию через него токового импульса происходило резкое повышение температуры с

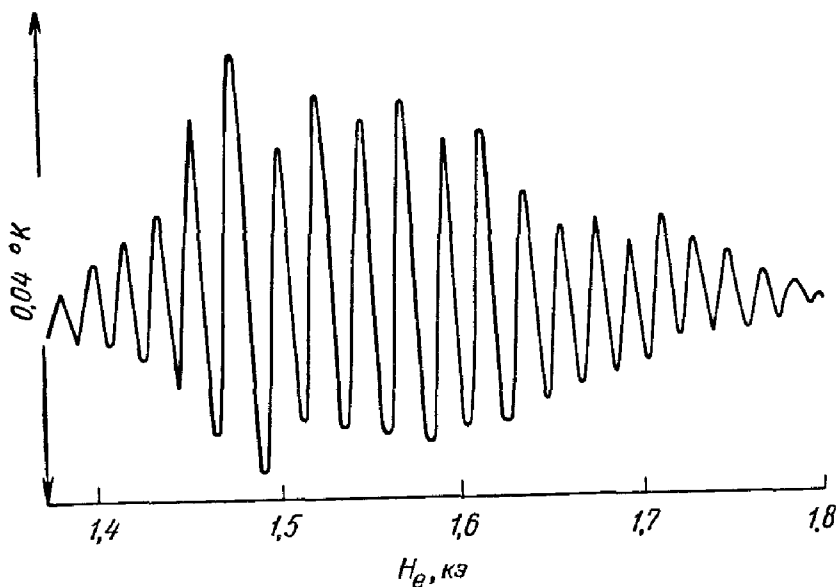
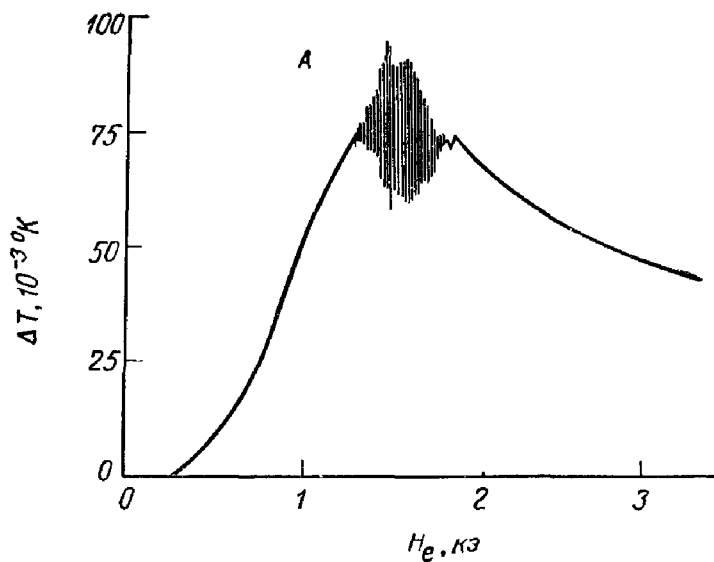


Фиг. 94. Зависимость намагниченности (а) и температуры (б) от поля для ниобиевого образца вблизи  $4,2^\circ\text{K}$  в переменном поле со скоростью изменения около 1000 э/сек [37].

Квадранты температурной кривой (б) соответствуют квадрантам кривой намагничивания (а). Температура образца не опускается ниже  $4,25^\circ\text{K}$ .

последующим экспоненциальным спадом с временем релаксации около 0,02 сек. Это означает, что тепло очень эффективно отводилось обменным газообразным гелием, окружающим образец, и поэтому полученная температурная кривая является равновесной. Видно, что поток не проникает в образец, пока поле не достигнет значения  $H_{c_1}$ , после чего температура продолжает возрастать почти до точки  $H_{c_2}$ . Однако, когда поле меняется в противоположном направлении, в третьем квадранте возникает необычная картина с очень резкими флуктуациями температуры вблизи конца цикла. Эти флуктуации соответствуют скачкам потока, которые наблюдают с помощью измерительной катушки. При  $4,2^\circ\text{K}$  полное количество выделившегося тепла во втором и

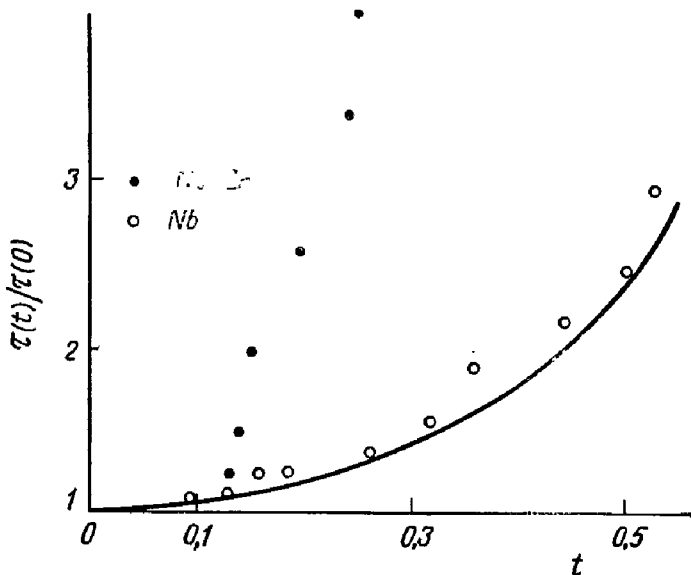




Ф и г. 95. Вверху — зависимость температуры образца для сплава Nb — 31% Zr от приложенного поперечного поля при 2,67°K в переменном поле 9,7 в/сек [26]; внизу — резонансные флуктуации, происходящие в области A [26].

третьем квадрантах в пределах точности эксперимента равно величине  $-\int MdH$  (в тех же квадрантах).

Аналогичные эксперименты на Nb и сплаве Nb—31% Zr были проведены в [26] при значительно более низких скоростях изменения поля (0,8—13,5 э/сек).



Фиг. 9б. Нормированный период магнитно-тепловых осцилляций  $\tau(t)/\tau(0)$  как функция температуры для образцов из Nb и из сплава Nb—31% Zr [26].

Сплошная линия — теоретическая кривая.

В этих экспериментах температура возрастала при  $H_c$ , с последующим спадом к  $H_{c2}$ , а также происходили резкие скачки температуры, связанные со скачками потока. Обнаруженные в этих экспериментах осцилляции температуры с периодом 1—10 сек, возникающие в области максимума кривой нагревания, изображены на фиг. 95, а. Увеличенный участок кривой, изображенный на фиг. 95, б, говорит о резонансном характере флуктуаций. Период флуктуаций быстро возрастает с повышением температуры. Температурную зависимость периода этих осцилляций флуктуаций можно сравнить с температурной зависимостью периода эллиптических коллек-

тивных колебаний, вычисленной в [21]<sup>1)</sup>. Дисперсионное соотношение для этих коллективных колебаний определяется выражением (9.7):

$$\omega \sim \frac{eB}{m^*c} k^2 \lambda d \quad (k \perp H).$$

Принимая  $k = \pi/L$ , где  $L$  — некоторая неизвестная характеристическая длина осциллирующей системы, и полагая для ниобия  $m^* \approx 50$  электронных масс,  $B \approx \approx 8700$  гс,  $\lambda \approx 10^{-5}$  см,  $\omega\tau(0) \approx 2,1$  сек<sup>-1</sup>, получаем  $L \approx 0,25$  см, что по порядку величины равно радиусу ниобиевого стержня. Температурная зависимость  $\tau = 2\pi/\omega$  следует из соотношений  $d \sim (1-t)^{-1/2}$ ,  $\lambda \sim (1-t^4)^{-1/2}$  и  $L \sim (1-t^2)^{-1}$ , где  $L$  — макроскопическая глубина проникновения Бина (см. гл. 8, § 2). В результате получаем

$$\tau(t) = \tau(0) \left[ \frac{1-t^4}{(1-t)(1-t^2)^4} \right]^{1/2}.$$

Сравнение этой зависимости с экспериментальными результатами для Nb и Nb—Zr приведено на фиг. 96. Только для образца из Nb получено вполне хорошее согласие теории с экспериментом. Для образца из Nb—Zr такого согласия не наблюдалось, что и можно было ожидать, поскольку теорию нельзя применять к сплавам с  $l \ll \xi_0$  и  $\omega_c\tau \ll 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. De Sorbo W., 7th International Conference on Low Temperature Physics, Toronto, 1957.
2. De Sorbo W., Healey W. A., Cryogenics, **4**, 257 (1964).
3. Gorter C. J., Phys. Lett., **1**, 69 (1962).
4. Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R., Phys. Rev. Lett., **9**, 306 (1962).
5. Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R., Phys. Rev., **131**, 2486 (1963).
6. Druyvesteyn W. F., Volger J., Phil. Res. Rep., **19**, 359 (1964).
7. Strnad A. R., Hempstead C. F., Kim Y. B., Phys. Rev. Lett., **13**, 794 (1964).
8. Anderson P. W., Phys. Rev. Lett., **9**, 309 (1962).

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 302. — Прим. ред.

9. Giaever I., Phys. Rev. Lett., **15**, 825 (1965).
10. Jones R. G., Rhoderick E. H., Rose-Innes A. C., Phys. Lett., **15**, 214 (1965).
11. Josephson B. D., Phys. Lett., **16**, 242 (1965).
12. Volger J., Staas F. A., Van Vijfeijken A. G., Phys. Lett., **9**, 303 (1964).
13. Tinkham M., Phys. Rev. Lett., **13**, 804 (1964).
- 14\*. Абрикосов А. А., Кемокладзе И. П., Халатников И. М., ЖЭТФ, **48**, 765 (1965).
15. Druyvesteyn W. F., диссертация, 1965, стр. 76.
16. Stephen M. J., Bardeen J., Phys. Rev. Lett., **14**, 112 (1965).
17. Reed W. A., Fawcett E., Kim Y. B., Phys. Rev. Lett., **14**, 790 (1965).
18. Niessen A. K., Staas F. A., Phys. Lett., **15**, 26 (1965).
19. Bardeen J., Phys. Rev. Lett., **13**, 747 (1964).
20. Staas F. A., Niessen A. K., Druyvesteyn W. F., Phys. Lett., **17**, 231 (1965).
21. De Gennes P. G., Matricon J., Rev. Mod. Phys., **36**, 45 (1964).
22. Suhl H., Phys. Rev. Lett., **14**, 226 (1965).
- 23\*. Горьков Л. П., Элиашберг Г. М., ЖЭТФ, **54**, 612 (1968); **56**, 1297 (1969).
24. Bean C. P., Doyle M. V., Journ. Appl. Phys., **33**, 3334 (1962).
25. Goedemoed S. H., Van Kolmeschate C., De Klerk D., Gorter C. J., Physica, **30**, 1225 (1964).
26. Zebouni N. H., Venkatararam A., Rao G. N., Grenier C. G., Reynolds J. M., Phys. Rev. Lett., **13**, 606 (1964).
27. Goldsmid H. J., Corsan J. M., Phys. Lett., **10**, 39 (1964).
28. Smith P. F., Spurway A. H., Lewin J. D., Brit. Journ. Appl. Phys., **16**, 947 (1965).
29. Lange F., Cryogenics, **5**, 143 (1965).
30. Evetts J. E., Campbell A. M., Dew-Hughes D., Phil. Mag., **10**, 339 (1964).
31. Beasley M. R., Fietz W. A., Rollins R. W., Silcox J., Webb W. W., Phys. Rev., **A137**, 1205 (1965).
32. Lubell M. S., Chandrasekhar B. S., Mallick G. T., Appl. Phys. Lett., **3**, 79 (1964).
33. Lubell M. S., Mallick G. T., Chandrasekhar B. S., Journ. Appl. Phys., **35**, 956 (1964).
34. Le Blanc M. A. R., Vernon F. L., Phys. Lett., **13**, 291 (1964).
35. McEvoy J. P., Decell R. F., Novak R. L., Appl. Phys. Lett., **4**, 43 (1964).
36. Corsan J. M., Phys. Lett., **12**, 85 (1964).

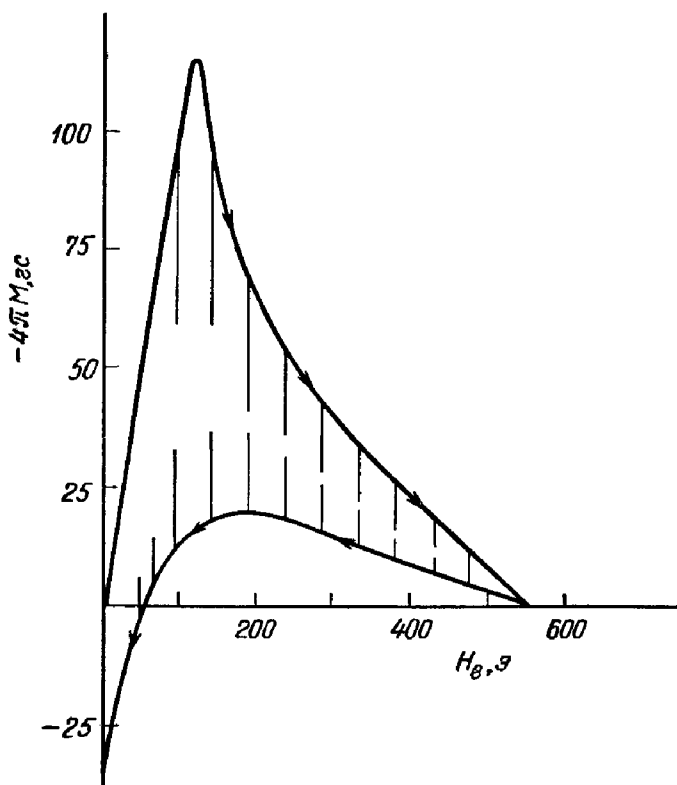
## ХАРАКТЕРИСТИКИ КРИТИЧЕСКОГО ТОКА

Свойства критического тока в сверхпроводниках второго рода хорошо изучены, хотя основной механизм переноса тока понят еще не полностью. Так же, как и в случае сверхпроводников первого рода, для сверхпроводников второго рода существует верхний предел плотности тока, выше которого сопротивление уже не равно нулю. Этот критический ток  $I_c$  зависит от внешнего поля и температуры. В случае чистых материалов с кристаллической решеткой, лишенной дефектов, переход из сверхпроводящего состояния в нормальное может быть очень резким и происходит при точно определенном значении тока. Сверхпроводниками второго рода, за исключением ниобия и ванадия, являются сплавы или соединения обычно со значительной плотностью дефектов, и для этих материалов сверхпроводящий переход, измеренный по сопротивлению, происходит постепенно в некоторой конечной области тока.

Для многих сверхпроводников второго рода точные измерения критического тока очень трудны, поскольку критический ток в образце диаметром 0,025 см может достигать 450 а. При пропускании тока по сверхпроводнику такого размера трудно избежать выделения большого количества тепла в токовых подводах и в местах контактов этих подводов с образцом. Если это тепло не отводится, температура образца растет, что уменьшает измеряемое значение критического тока. Эту трудность можно преодолеть, индуцируя ток в сверхпроводящем кольце [1]. При этом ни токовые подводы, ни контакты не требуются, но критический ток можно измерять только в присутствии магнитного поля, что также изменяет его значение. Критический ток уменьшается, кроме того, при слишком быстром увеличении тока [2, 31], поскольку

в этом случае возникает быстрое движение линий магнитного потока, что приводит к диссипации энергии и повышению температуры проводов.

В гл. 9 было отмечено, что в смешанном состоянии ток вызывает появление лоренцевских сил, действующих



Фиг. 97. Влияние тока на кривую намагничивания сверхпроводника второго рода (сплав  $\text{In} - 8,7\% \text{Pb}$ ) при  $2,65^\circ\text{K}$  [4].

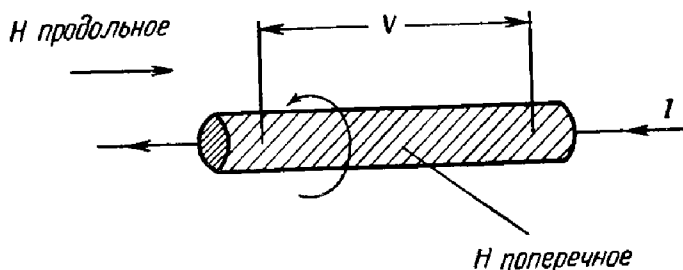
Непрерывная кривая соответствует намагничиванию при нулевом токе. При включении тока в постоянном поле кривая намагничивания идет вертикально.

на линии магнитного потока в толще материала. В частности, их действие можно наблюдать, измеряя намагниченность образца, когда по нему течет ток [3—5]. Поток, который первоначально был неподвижен (пиннинг), выталкивается из образца током, и намагничивание становится более обратимым. Это показано на фиг. 97, где сплошная линия — кривая намагничивания для сплава

$I_p$  — 8,7 ат. % РЬ до пропускания тока, а вертикальные линии показывают влияние увеличения тока при различных значениях поля [4]. Ток, необходимый для того, чтобы зависимость была почти обратимой, много меньше критического, так что его влияние на  $H_c$  невелико. Это влияние слишком мало, чтобы его можно было заметить на фиг. 97.

### § 1. Зависимость критического тока от поля

Критический ток в сверхпроводниках второго рода измеряют обычно хорошо известным потенциометрическим методом, при котором исключается эффект сопротивления контактов, возникающий на потенциальных

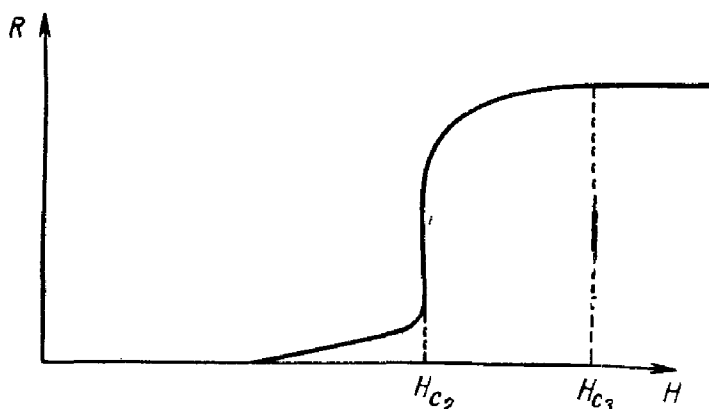


Фиг. 98а. Обычное расположение токовых и потенциальных вводов на образце для измерения критического тока в магнитном поле.

вводах (фиг. 98а). Токковые контакты, проводящие ток силой 100 а и более, для многих образцов можно делать, напаяв индий на массивную медную проволоку, а для других материалов — плотно зажимая образец между медными пластинами. При включении магнитного поля ток повышается до тех пор, пока не появится сигнал на потенциальных вводах. Эта величина тока обычно принимается за критическую. Она зависит от чувствительности схемы, которая обычно имеет порядок  $10^{-7}$ — $10^{-6}$  в и является мерой первого вязкого движения потока в материале, которое можно измерить (см. гл. 9, § 1). Тем не менее этот критерий вполне пригоден для большинства измерений критического тока.

Изучение сверхпроводящего перехода, измеряемого по сопротивлению при увеличении тока, показывает, что

его форма зависит от температуры, тока в образце и от угла между током и полем. Довольно часто наблюдаемый вид зависимости сопротивления от магнитного поля в поле, параллельном току, изображен на фиг. 98б. Сравнивая кривую намагничивания образца с сопротивлением при сверхпроводящем переходе, находим значение поля, при котором кривая перехода вертикальна (измерение перехода производится при очень малом токе, так что собственное поле провода пренебрежимо



Фиг. 98б. Идеализированное изображение зависимости сопротивления от магнитного поля, параллельного измерительному току. От 0 до  $H_{c2}$  — область с потоком; от  $H_{c2}$  до  $H_{c3}$  — область поверхностного слоя; при полях, больших  $H_{c3}$  — область полностью нормального состояния.

мало). Это поле отождествляется с полем  $H_{c2}$  [6]. Небольшая разность потенциалов, появляющаяся при полях ниже  $H_{c2}$ , когда сверхпроводник находится в смешанном состоянии, объясняется упомянутым выше вязким движением потока в смешанном состоянии. Невозможность достичь полностью нормального состояния в полях выше  $H_{c2}$  связана с наличием на поверхности образца сверхпроводящего слоя (см. гл. 4), который существует при полях, меньших  $H_{c3}$ . Следовательно, в идеальном случае значения полей  $H_{c1}$ ,  $H_c$  и  $H_{c3}$  можно найти, рассматривая сверхпроводящий переход по сопротивлению и измеряя поле, при котором появляется первый сигнал на потенциальных выводах  $H_{c1}$ , поле крутой части кривой перехода  $H_c$  и поле, при котором исчезают последние признаки сверхпроводимости  $H_{c3}$ . Од-



нако на практике проникновение потока в сверхпроводник задерживается поверхностным барьером (гл. 8, § 3) до тех пор, пока внешнее поле не достигнет некоторого значения, превышающего  $H_{c1}$ . Кроме того, «хвост» сопротивления в области слабых полей может наложиться на область сильных полей, так что крутой подъем у кривой перехода исчезнет. Следовательно, только  $H_{c2}$  можно определять с уверенностью и то в продольном поле.

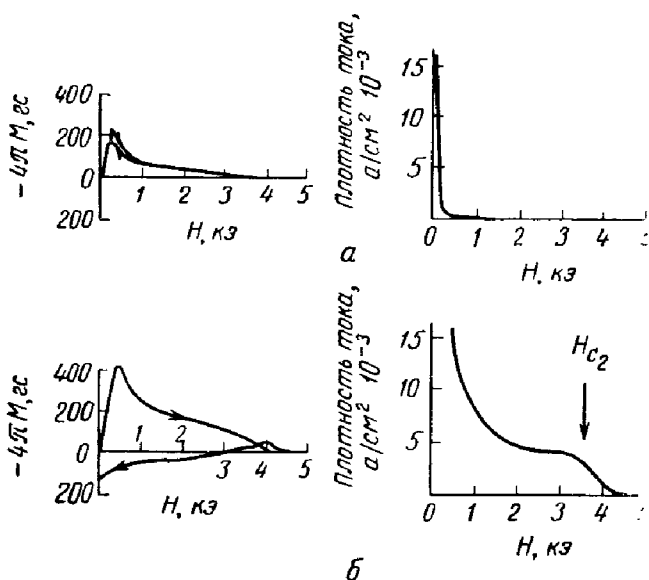
### 1. Критический ток в поперечном поле

Зависимость критического тока  $I_c$  от поперечного поля  $H_t$  была тщательно изучена для целого ряда материалов, так как она имеет большое значение при выборе жестких сверхпроводников для получения высоких магнитных полей (см. гл. 11, § 1). В этом случае наиболее важным качеством проволоки должна быть способность проводить большой ток в сильном магнитном поле, и поэтому свойства различных материалов можно сравнивать, непосредственно рассматривая соответствующие характеристики  $I_c(H_t)$ .

В гл. 1, § 8 было уже показано, что критический ток в сверхпроводниках второго рода, имеющих обратимую кривую намагничивания, очень мал. Это иллюстрируется фиг. 99, а, где приведены соответствующие характеристики для хорошо отожженной проволоки из сплава Nb—45% Ta [7]. Видно, что, если исключить «хвосты» кривых в области низких значений тока и учесть коэффициент размагничивания образца, критический ток будет ограничен полем  $H_{c1}$  (см. гл. 1, § 8). Высокие критические токи, найденные для некоторых сверхпроводников второго рода, обуславливаются наличием дефектов в кристаллической решетке. Это иллюстрируется кривой на фиг. 99, б, полученной для того же образца Nb—Ta после холодной прокатки, произведенной до отжига. В таком случае плотность тока остается большой вплоть до поля  $H_{c2}$ . Необратимость кривой намагничивания указывает на большую плотность дефектов.

Большинство работ, посвященных изучению влияния дефектов кристаллической решетки в жестких сверхпроводниках (сплавы Nb—Zr и соединения Nb<sub>3</sub>Sn, V<sub>3</sub>Ga и

$V_3Si$ ), характеризуется чисто эмпирическим подходом. По существу в них изучалась зависимость свойств материала от методики изготовления, например от времени и температуры реакции образования, а не от специфических дефектов структуры, поскольку все эти материалы имеют высокие точки плавления и регулировать металлургический процесс очень трудно.



Фиг. 99. Критический ток и кривые намагничивания для проводов из сплава Nb—45%Ta при 4,2°K, отожженных (а) и подвергшихся холодной обработке (б) [7].

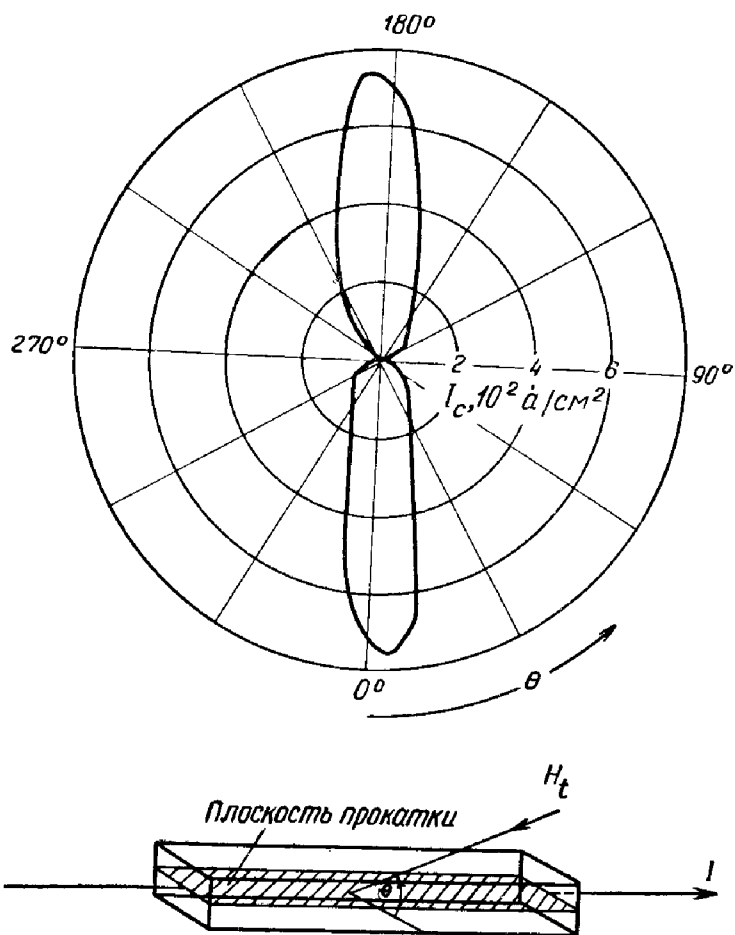
Было, однако, проведено систематическое изучение влияния кристаллических дефектов на зависимость критического тока от поперечного поля для ниобия, являющегося сверхпроводником второго рода [8]. Исходным материалом был монокристалл ниобия, полученный зонной плавкой с помощью электронного пучка [9], который затем отжигался в течение нескольких часов в вакууме  $5 \cdot 10^{-6}$  тор при 2300°С. Влияние определенного числа дислокаций можно изучать, изгибая кристалл до определенного радиуса кривизны и затем выпрямляя его. При изгибе, кроме дислокаций, могут образоваться вакансии, но они уничтожаются отжигом при 160°С. После отжига в кристалле остаются распределенные

случайным образом дислокации. При отжиге изогнутого кристалла при  $900^\circ\text{C}$  дислокации соединяются, образуя стенки, а в остальной части материала плотность дислокаций снижается (полигонизация). Влияние междоузельного кислорода изучалось путем добавления от  $5 \cdot 10^{-4}$  до  $1 \cdot 10^{-2}\%$  кислорода. И наконец, можно исследовать анизотропию критического тока, вращая поле вокруг монокристалла. Во всех этих случаях наличие дефектов в решетке должно увеличивать критический ток, а при добавлении кислорода должно также увеличиваться верхнее критическое поле. Для хорошо отожженных кристаллов не наблюдается существенной анизотропии, даже когда они деформированы на 50%. Однако в образцах, содержащих небольшое количество кислорода, наблюдаются максимум критического тока в направлениях  $[111]$  и  $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$  и минимум в направлениях  $[110]$  и  $[001]$  как в деформированных, так и в недеформированных образцах. В случае ниобия, который имеет объемноцентрированную кубическую решетку, эти направления являются направлениями самой плотной и наименее плотной упаковки соответственно. В настоящее время еще нет теории, объясняющей связь критического тока с направлением внешнего поля относительно решетки.

Измерения, проведенные на образцах ниобия после холодной прокатки, также указывают на существование заметной анизотропии зависимости  $I_c(H_t)$ , хотя образцы в этом случае не являются монокристаллами, и ориентация решетки не может оказать влияния на измерения [10]. Для таких образцов было найдено, что критический ток близок к максимуму, когда внешнее магнитное поле параллельно плоскости прокатки. Схематическое изображение образца и полярная диаграмма критического тока в поперечном поле даны на фиг. 100. Сдвиг максимумов относительно оси  $0-180^\circ$  может быть связан с несимметричным присоединением потенциальных зондов.

Анизотропия такого рода наблюдалась у большого числа различных сверхпроводников второго рода [11], однако у некоторых сплавов, как, например,  $\text{Ti}-6\% \text{Mo}$ ,  $\text{Ti}-9\% \text{Mo}$ ,  $\text{Ti}-20\% \text{Nb}$ , ее нет. Последнее можно

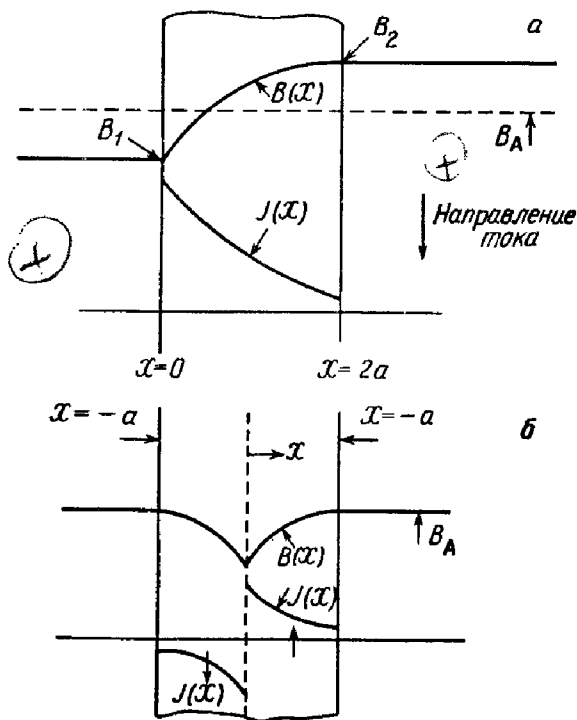
объяснить тем, что во время холодной прокатки происходит мартенситное фазовое превращение, которое нарушает структуру дефектов, образующуюся обычно после



Фиг. 100. Полярная диаграмма зависимости плотности критического тока от  $\theta$  — угла между поперечно приложенным полем и плоскостью прокатки для образца из сплава  $Ti-10\%Mo$  при  $1,2^\circ K$  в поле  $30 \text{ кэ}$  [11].

холодной прокатки. Измерения в нормальном состоянии, проведенные на образцах, обнаруживающих анизотропию, указывают на то, что происходит возрастание электрического сопротивления, т. е. возрастание плотности дефектов в образце в направлениях, соответствующих

ших направлениям поля, при которых наблюдаются максимумы критического тока. Можно поэтому предположить, что в результате холодной прокатки в образце возникает ориентированная структура дефектов, увели-



Фиг. 101. Распределение тока и поля в пластине при наличии тока, протекающего через пластину (а), и при отсутствии тока (б) [12].

Поле приложено перпендикулярно плоскости графика.

чивающая пиннинг потока при его движении перпендикулярно плоскости дефектов. Это увеличивает плотность критического тока, когда поле имеет такое же направление (см. ниже).

Для области полей, где на флюксонид действуют в основном силы Лоренца, можно провести простое вычисление зависимости критического тока в смешанном состоянии от поперечного поля. В этом случае

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} \sim \alpha,$$

а также

$$\nabla B = \mu J,$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость той части сверхпроводника, в которой течет ток. Рассматривая образец как тонкую полосу с равным нулю коэффициентом размагничивания, для случая односвязной геометрии (фиг. 101) получаем [12]

$$J(x) B(x) \sim \alpha$$

и

$$J(x) = \frac{1}{\mu} \frac{dB(x)}{dx}.$$

Подставляя  $J(x)$  и интегрируя, имеем

$$B^2(x) = 2\mu\alpha x + C. \quad (10.1)$$

Постоянная  $C$  определяется из граничных условий для образца при  $x = 0$ :

$$B(0) = B_1, \text{ так что } B^2(x) = 2\mu\alpha x + B_1^2, \quad (10.2)$$

$$B(2a) = B_2, \text{ так что } (B_2^2 - B_1^2) = 4\mu\alpha a. \quad (10.3)$$

Таким образом,

$$I_t = \int_0^{2a} J(x) dx = \alpha \int_0^{2a} \frac{dx}{B(x)}.$$

С помощью (10.2) и (10.3) получаем

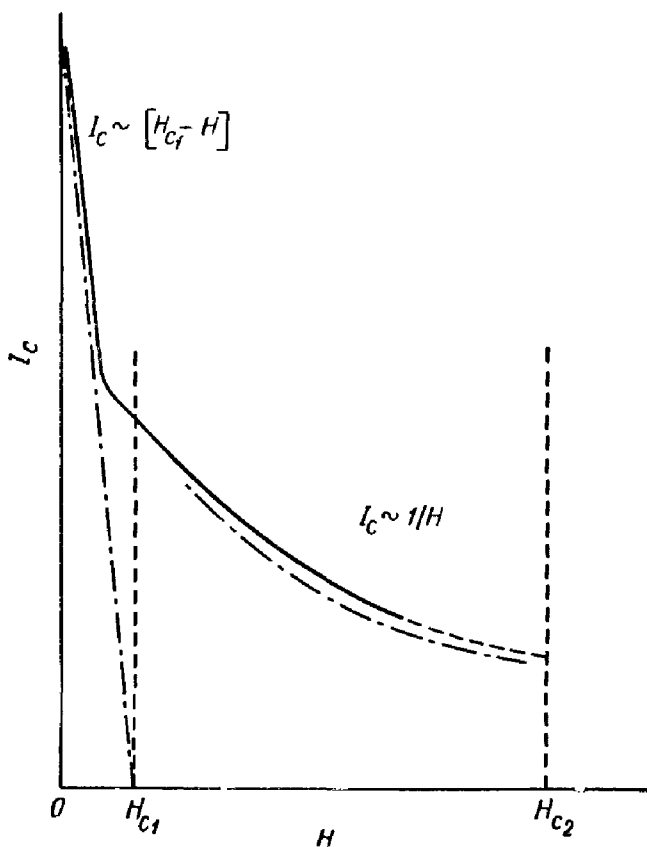
$$I_t = \frac{B_2 - B_1}{\mu}.$$

В силу симметрии  $B_1 + B_2 = 2B_A$ , где  $B_A$  — среднее поле пластины; поэтому из (10.3) следует

$$I_t = \frac{2a\alpha}{B_A}. \quad (10.4)$$

Дополнительно нужно учесть влияние тока типа Сильсби, текущего ниже  $H_{c1}$ , и вклад, связанный с поверхностными явлениями переноса (включая явления в слое Сан-Жама и Де Жана). Это будет рассмотрено ниже. Сумма первых двух вкладов изображена на фиг. 102, где видно, что разрыв в точке  $H_{c1}$  размывается и общая

форма кривой вплоть до окрестности  $H_{c2}$  находится в хорошем согласии с экспериментом.



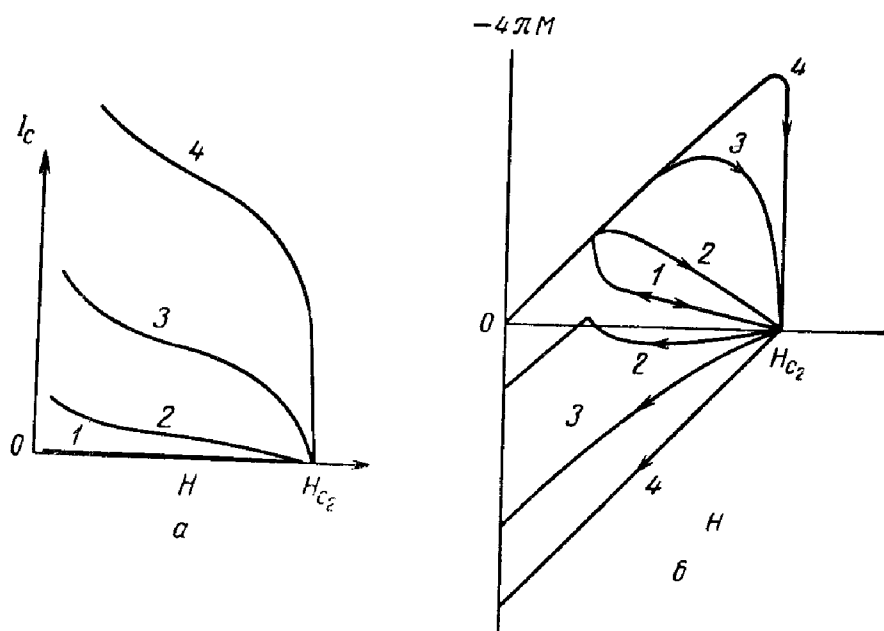
Ф и г. 102. Зависимость критического тока от поля.

В полях, меньших  $H_{c1}$ , соблюдается правило Сильсби. В смешанном состоянии критический ток определяется действием силы Лоренца. Непрерывная кривая, сглаженная вблизи  $H_{c1}$ , отражает действие обоих механизмов. Предполагается, что коэффициент размагничивания образца равен нулю.

Из выражения (10.4) можно сделать два вывода: максимальный ток возрастает с увеличением  $\alpha$  (максимальная сила пиннинга, увеличивающаяся с ростом плотности дефектов)<sup>1)</sup> и с увеличением толщины ленты.

<sup>1)</sup> Недавно было показано [13], что этот вывод справедлив для критического тока *поверхностного слоя*, так же как и для критических токов материала в смешанном состоянии.

На фиг. 103 изображено влияние  $\alpha$  на зависимость плотности критического тока от поперечного поля и на соответствующее изменение кривой намагничивания. Увеличение  $\alpha$  также вызывает увеличение гистерезиса,



Фиг. 103. Рост критического тока (а) и эквивалентный рост намагниченности (б) от 1 до 4 при увеличении плотности дефектов в материале.

Увеличение гистерезиса кривой  $M(H)$  происходит при увеличении диаметра образца, а также при увеличении плотности дефектов.

но этот эффект не сопровождается соответствующим увеличением плотности критического тока. Распределение поля по всему поперечному сечению образца (см. фиг. 101) означает, что ток течет не только около поверхности материала, как в случае сверхпроводников первого рода, а протекает также в толще образца. Из этой теории следует, что распределение тока в пластине в области сильных полей будет приблизительно однородно, но при этом не учитывается роль поверхностного слоя, который, как будет показано ниже, оказывает большое влияние в области сильных полей.



Тесная связь между критическим током и кривой намагничивания иллюстрируется также фиг. 103. Намагниченность можно найти из распределения поля в образце в отсутствие тока. Используя обозначения, указанные на фиг. 101, б, имеем

$$-4\pi M = 2B_A a - \int_{-a}^{+a} B(x) dx,$$

откуда

$$-4\pi M = 2B_A a - \alpha \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{J(x)},$$

где  $J(x)$  — плотность тока, наведенного в образце в присутствии внешнего поля. Это соотношение справедливо только в области полей, где преобладает действие сил Лоренца.

Зависимость критического тока от поперечного поля была вычислена в предположении, что сверхпроводник представляет собой сетку из прямых нитей сверхпроводника первого рода, причем диаметр каждой нити много меньше глубины проникновения [14]<sup>1)</sup>. Эта теория согласуется с экспериментальными результатами, полученными на образцах из сплава Pb — 6,6% In [15].

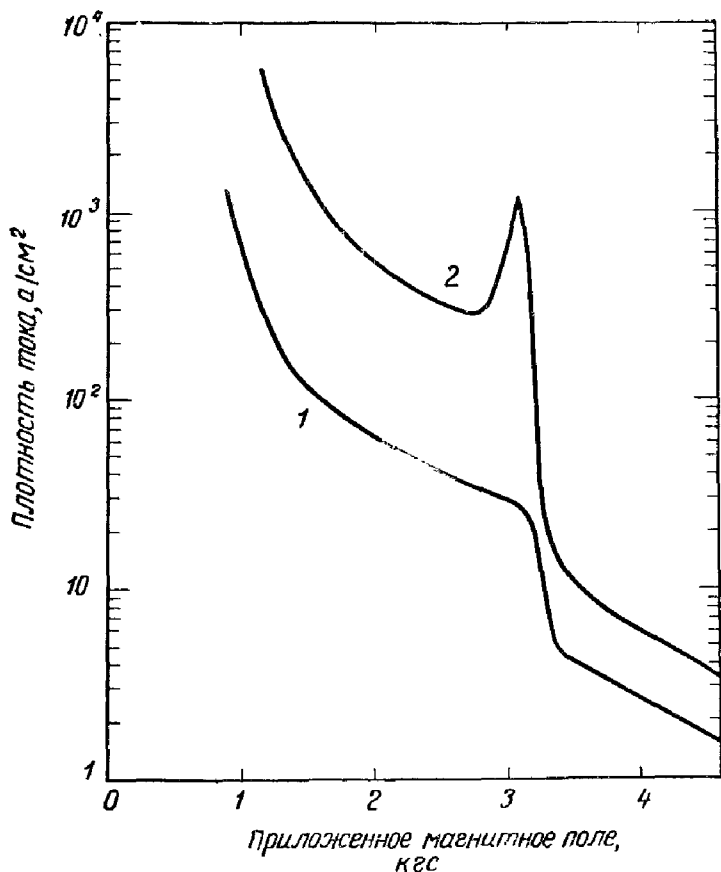
Критический ток можно оценить также, предполагая, что ток протекает в образце по ряду тонких слоев [16]. Отсюда получаем зависимость вида

$$\frac{I_c(H)}{I_c(0)} = 1 - \left( \frac{H}{H_{c2}} \right)^{1/3},$$

где  $I_c(0)$  — критический ток в нулевом поле. Эта зависимость хорошо согласуется с экспериментом для ряда материалов с высокими значениями  $\kappa$ .

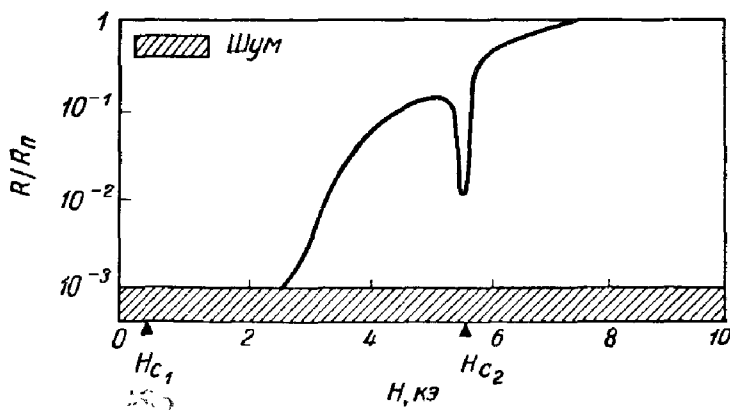
Во всех перечисленных выше случаях  $I_c(H_t)$  монотонно убывает при увеличении внешнего поля. Однако в противоположность этому общему свойству характеристики  $I_c(H_t)$ , измеренные для ниобия [8, 10, 17], сплавов

<sup>1)</sup> Следует заметить, что если нить состоит из сверхпроводника первого рода, т. е.  $\lambda < \xi_0$ , и толщина нити меньше  $\lambda$ , то она ведет себя как сверхпроводник второго рода с  $\kappa \sim \lambda/d \gg 1$ , где  $d$  — диаметр нити (см. гл. 4). — *Прим. ред.*



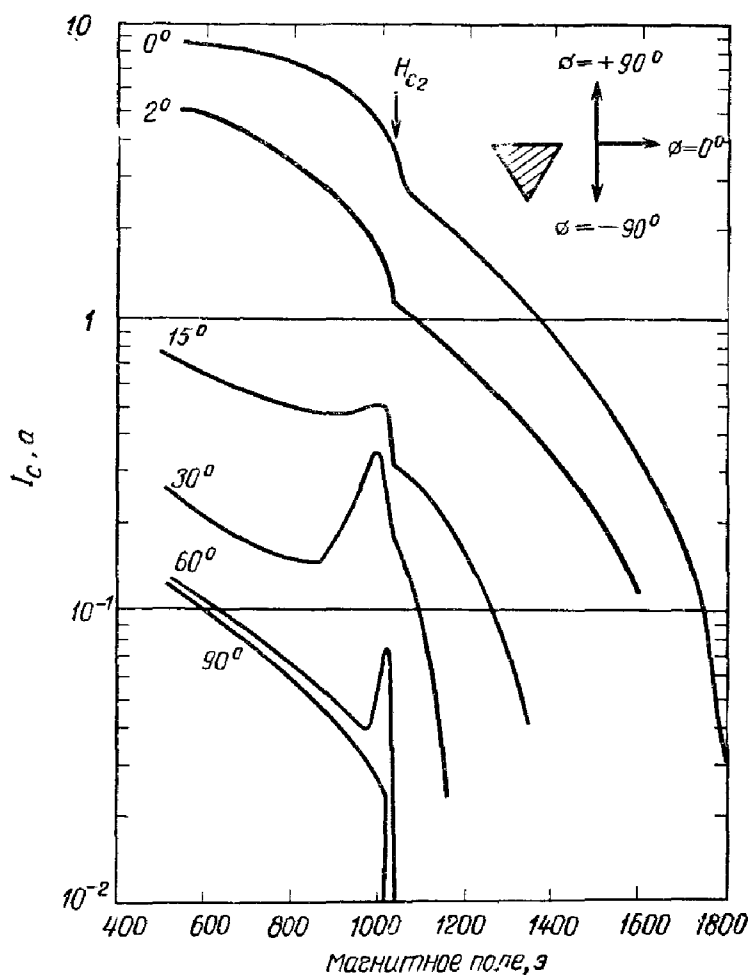
Фиг. 104. Влияние пластической деформации на зависимость плотности критического тока от поля для монокристалла ниобия при  $4,2^\circ\text{K}$  [8].

1 — недеформированный образец, 2 — образец, деформированный на 50%.



Фиг. 105. Зависимость сопротивления от магнитного поля для ниобиевой проволоки при  $4,2^\circ\text{K}$ , несущей ток плотностью  $450 \text{ a/cm}^2$  [30].

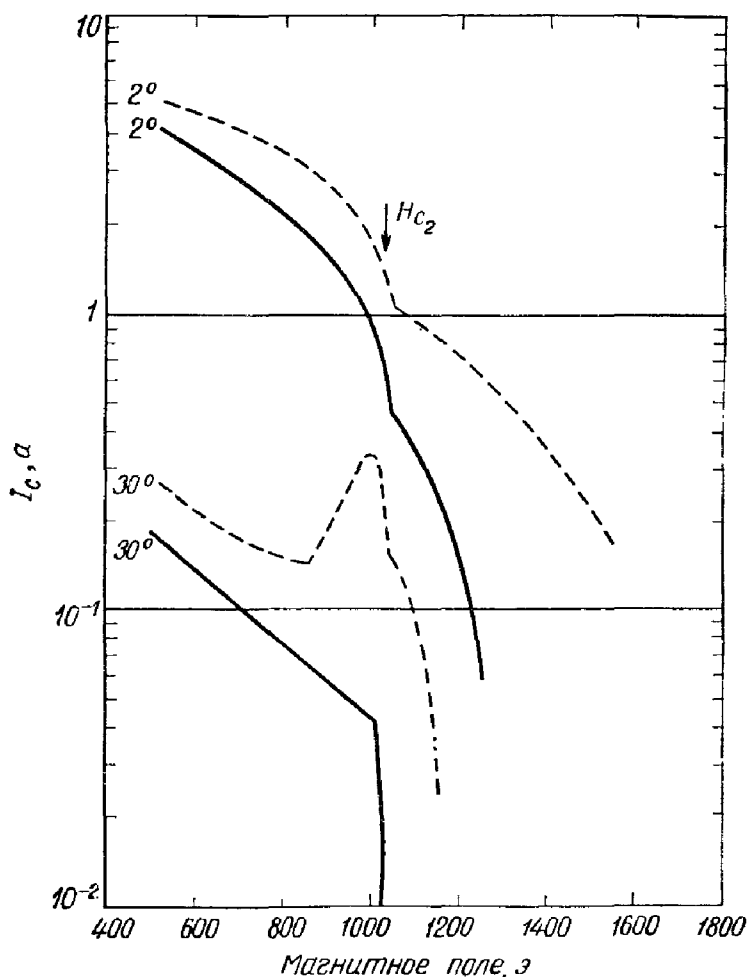
Nb — Zr [18], Mo — Re [19] и Pb — Tl [20], показывают, что в области более сильных полей на кривой 2 критического тока возникает пик (фиг. 104); он имеет место



Ф и г. 106а. Зависимость критического тока от поля для призмы из сплава Pb — 5% Tl с треугольным сечением при 4,2°K для различных направлений поперечного поля (см. схему в углу фигуры) [20].

как при увеличении, так и при уменьшении поля. Этот пик воспроизводится при повторных измерениях, и ему соответствует резкий минимум сопротивления в поперечном поле (фиг. 105).

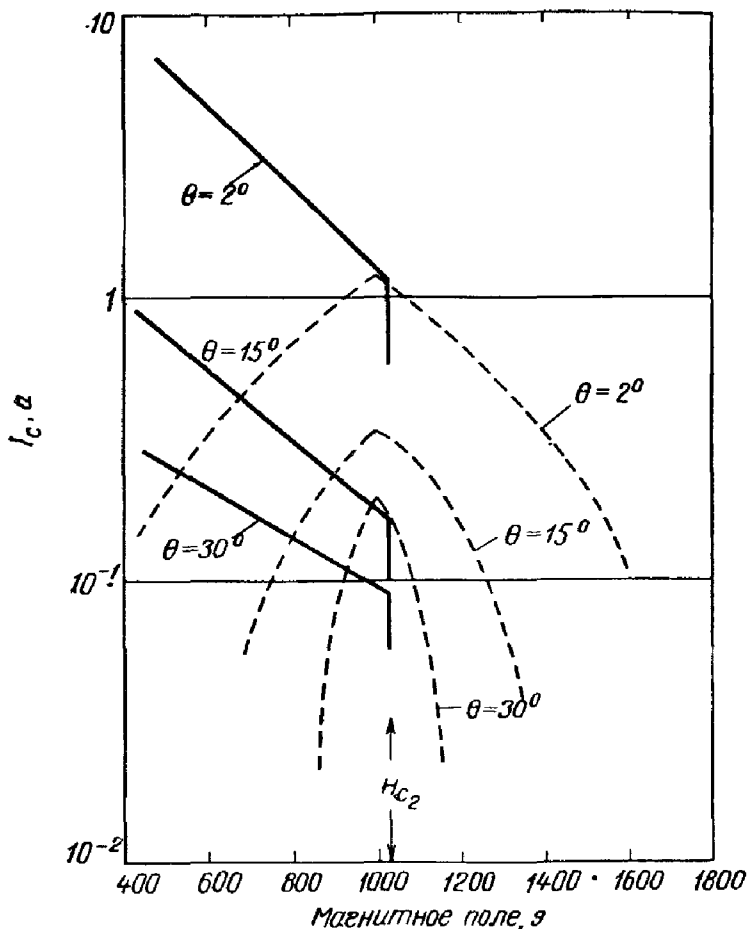
Этот пик связан с дефектами структуры в сверхпроводниках второго рода. На фиг. 104 показано, что пластическая деформация, вызывающая появление дисло-



Фиг. 1066. Зависимость критического тока от поля для отожженной призмы из сплава Рb—5%Тl с треугольным сечением [20]. Сплошная линия—после гальванического покрытия медью, пунктир—до покрытия

каций вблизи поверхности, приводит к образованию пика вблизи  $H_{c2}$  и к увеличению плотности тока в области более слабых полей. Наличие пика объясняется также влиянием поверхности образца. Это хорошо видно

при измерениях критического тока в призме с треугольным поперечным сечением. Результаты измерений приведены на фиг. 106а, где углы характеризуют различные



Фиг. 107. Два семейства кривых критического тока для хорошо отожженного сплава РЬ — 5%Тl [20].

Если кривые сложить, то получим семейство кривых, почти совпадающих с кривыми, изображенными на фиг. 106а. Сплошная линия — механизм А, пунктир — механизм В.

ориентации поля вокруг образца [20]. В этом случае пик на кривой критического тока появляется, когда поле параллельно одной из сторон призмы. Этот пик связан с поверхностным слоем Сан-Жама и Де Жена, в чем легко убедиться, если на образец нанести медное покрытие.

Металлическая пленка уменьшает роль поверхностного слоя, и пик при этом уменьшается (фиг. 106б).

Все это говорит о существовании двух механизмов поверхностного тока в сверхпроводниках второго рода, находящихся в смешанном состоянии в области сильных полей, с зависимостью от поля, изображенной на фиг. 107.

Ток, соответствующий механизму *A*, уменьшается примерно экспоненциально с резким обрывом при  $H = H_c$ . Предположительно такой ток обусловлен ориентированными дефектами, расположенными параллельно каждой поверхности и образовавшимися при изготовлении призмы (этот эффект уже упоминался выше). Механизм *B*, исчезающий после покрытия поверхности призмы медным слоем толщиной 1000 Å, можно связать уже более уверенно с поверхностным слоем Сан-Жама и Де Жена. Если сложить оба семейства кривых критических токов, изображенных на фиг. 107, получается ряд кривых, почти идентичных кривым, изображенным на фиг. 106а.

## 2. Критический ток в продольном поле

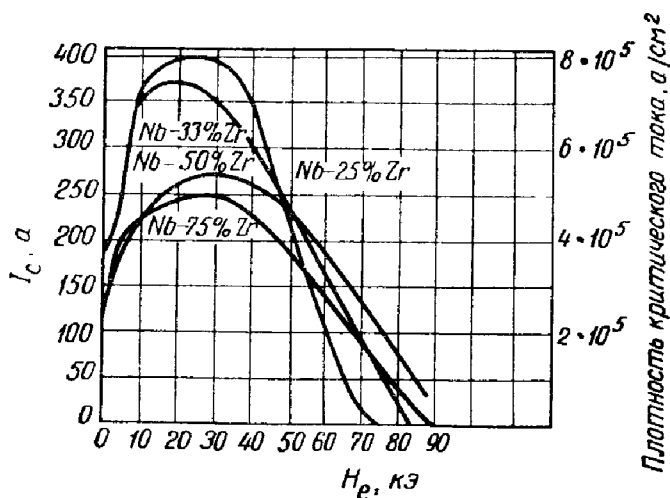
Большинство экспериментов по определению критического тока было проведено в поперечном поле. Некоторые эксперименты, однако, были выполнены в продольном поле на образцах из  $Nb_3Sn$  [21] и из сплавов  $Nb - Ta$  [7],  $Pb - In$  [15],  $Pb - Bi$  [22],  $Mo - Re$  и  $Ta - Ti$  [23]. Кривые критических токов для четырех образцов, полученных холодной прокаткой, из сплавов  $Nb - Zr$  изображены на фиг. 108а. Как и для всех других материалов, токовые характеристики для  $Nb - Zr$  имеют широкий максимум и похожи по форме друг на друга. На приведенных кривых высота пика зависит от содержания циркония. Нужно подчеркнуть, что наличие пика в данном случае нельзя объяснить теми же причинами, что и для кривой критического тока в поперечном поле.

Предполагая, что материал обладает ламинарной структурой, состоящей из сверхпроводящих нитей, заключенных в нормальную матрицу, можно прийти к следующим выводам [24]. Если ток при протекании вдоль образца образует бессилую конфигурацию, т. е.

течет по винтовой линии, то плотность продольного критического тока  $J_l$  связана с внешним полем  $H_e$  соотношением:  $4\pi J_l = c_s H_e$ , где  $c_s$  — постоянная. В этом случае условие равновесия задается следующими параметрическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{2I_l}{aH_c} &= \left(\frac{q}{A}\right)^{1/2} J_1(c_s a), \\ \frac{H_e}{H_c} &= \left(\frac{q}{A}\right)^{1/2} J_0(c_s a), \\ c_s \lambda &= \left(\frac{A}{q} - \text{th}^2 p\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

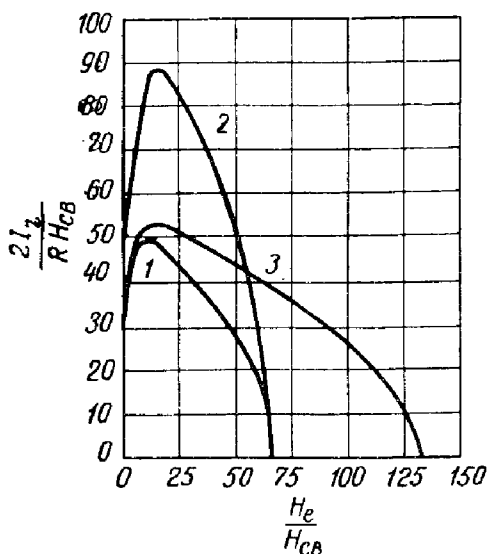
Здесь  $I_l$  — критический ток в поле, параллельном проволоке,  $a$  — радиус проволоки,  $H_c$  — термодинамическое



Фиг. 108а. Зависимость критического тока от продольного поля для четырех различных сплавов Nb — Zr при 4,2°К [23].

критическое поле,  $q = \Delta/\lambda$  ( $\lambda$  — лондоновская глубина проникновения, а энергия, связанная с единицей площади поверхности нити, равна  $\Delta H_c^2/8\pi$ ),  $A = q(H_c/H_e)^2$ ,  $p = d/2\lambda$ ,  $d$  — толщина сверхпроводящего слоя, а  $J_0$  и  $J_1$  — функция Бесселя нулевого и первого порядка соответственно. Несколько типичных кривых, построенных на основе этих соотношений, приведены на фиг. 108б.

Форма кривых хорошо согласуется с экспериментальной. Была сделана попытка совместить эти кривые с экспериментальной кривой для сплава Nb—25% Zr (пренебрегая «хвостом» кривой в области сильных полей, который, вероятно, связан с поверхностным слоем, не учтенным в данных вычислениях). Значение  $\lambda$ , которое



Ф и г. 108б. Нормированные кривые зависимости критического тока от продольного поля, полученные из (10.5) [24].

Кривая	$q$	$a/\lambda$
1	0,01	10
2	0,01	20
3	0,005	10

нужно принять, чтобы кривые совпали, слишком велико, но хорошего количественного согласия с экспериментом и нельзя было ожидать. Свободная энергия слоистой структуры (см. гл. 2, § 5) больше свободной энергии структуры из трубкообразных нитей, и поэтому исходное выражение для свободной энергии слоистой структуры в данном случае не вполне справедливо.

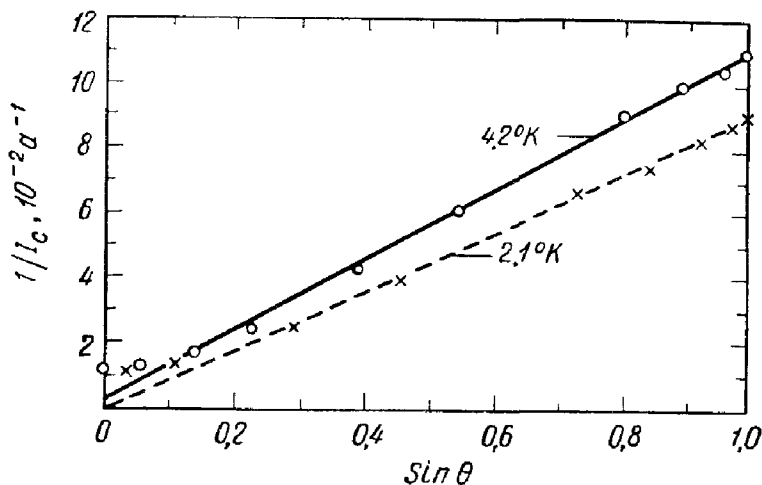
Для структуры, состоящей из сверхпроводящих нитей, закрепленных в нормальной среде, была вычислена зависимость критического тока от продольного поля [14]. Эти вычисления согласуются с экспериментом только



в области полей вблизи  $H_c$ , где нитевидная структура стабилизируется кулоновским отталкиванием между флюксоидами<sup>1)</sup>).

### 3. Критические токи в области промежуточных углов между током и полем

Критический ток в смешанном состоянии в области промежуточных углов определяется из условия постоян-



Фиг. 109. Величина, обратная критическому току для ленты из сплава  $\text{Nb}_3\text{Sn}$ , как функция угла между осью ленты и полем при 4,2 и 2,1°К в поле 7,4 кэ [21].

Другие данные показывают, что величина  $1/I_c$  линейно зависит от тока до  $\sim 100$  кэ (наибольшее приложенное поле).

ства сил Лоренца в соответствующей области полей

$$\mathbf{J} \times (\mathbf{H} + \mathbf{B}_0) = \text{const.}$$

Это условие можно записать в виде

$$I_c \sim \frac{1}{H \sin \theta + B'_0},$$

где  $\theta$  — угол между полем и током и  $B'_0 = B_0 \sin \theta$ . Результаты, полученные для ленточных образцов из  $\text{Nb}_3\text{Sn}$

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 287. — *Прим. ред.*

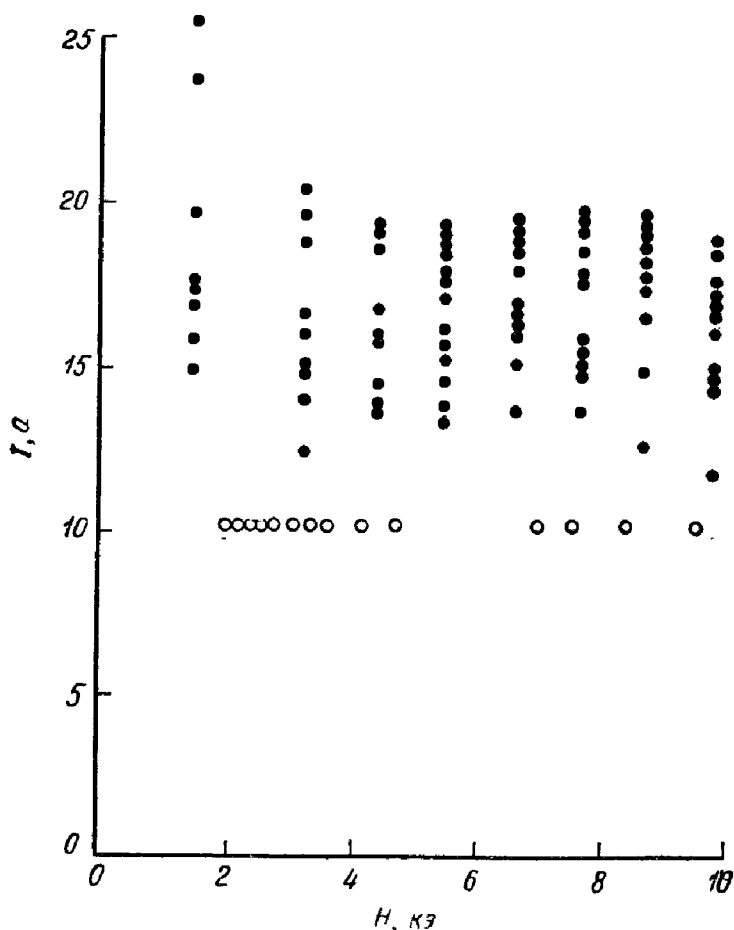
в постоянном поле при двух различных температурах, изображены на фиг. 109. Видно, что теоретические кривые хорошо согласуются с экспериментальными данными, за исключением области малых углов  $\theta$ . Аналогичные результаты были получены для сплавов Pb — Tl [20].

## § 2. Тренировка

Критический ток в поперечном поле зависит от предыстории образца в процессе эксперимента [2]. В частности, было обнаружено, что, если увеличить критический ток до исчезновения сверхпроводимости, затем убавить ток до нуля и снова увеличить, разрушение сверхпроводимости второй раз произойдет при больших значениях тока. Такой процесс, который носит название *тренировки*, иллюстрируется фиг. 110 для катушки из проволоки Mo — 49% Re при  $1,5^\circ \text{K}$ . Темные кружки соответствуют переходам, происходящим, когда образец находится в постоянном поперечном поле и переходит в нормальное состояние при увеличении тока. Отличительной чертой всех этих переходов является последовательное повышение плотности критического тока до тех пор, пока ее значение не достигает максимума. Было также обнаружено, что это увеличение критического тока достигается и без перехода проволоки в нормальное состояние, а лишь при достаточно медленном увеличении тока. Проволоку можно также тренировать, поддерживая постоянный ток и каждый раз увеличивая поле, начиная с нуля, после очередного разрушения сверхпроводимости (светлые кружки на фиг. 110).

Можно производить тренировку (или «снимать» ее) для проволочного соленоида [25]. Поведение соленоида зависит от наличия в сверхпроводящей проволоке захваченного магнитного потока, направленного антипараллельно собственному полю соленоида. Поток противоположного знака может образоваться в проволоке в результате или переключения внешнего поля, или переключения поля самой катушки в режиме  $0 \rightarrow -H \rightarrow 0$ . При наличии антипараллельного потока скачков потока в катушке не наблюдается до тех пор, пока не происходит основной скачок при токе, величина которого равна

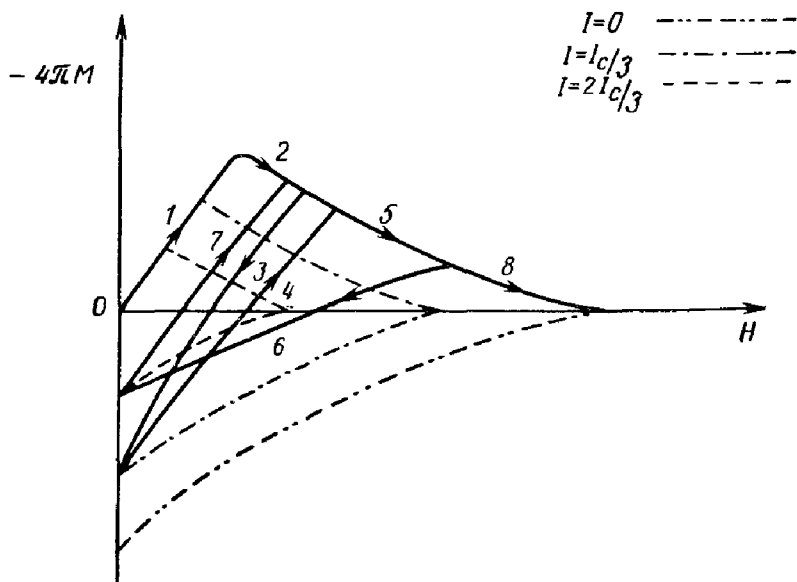
примерно половине окончательной величины критического тока. Это вызывает полное исчезновение сверхпроводимости. Измерения критического тока, следующие



Фиг. 110. Тренировка неотожженной проволоки из сплава Mo — 49%Re при 1,5° K [2].

один за другим, свидетельствуют о постепенном небольшом увеличении критического тока, пока не достигается его максимальное значение. При увеличении тока в соленоиде, работающем в режиме поля  $0 \rightarrow +H \rightarrow 0$ , происходит ряд небольших скачков потока без эффекта тренировки, в силу чего катушка переходит в нормальное состояние всегда при одном и том же значении тока.

Эти результаты можно объяснить, рассматривая движение потока внутри сверхпроводящей проволоки. Когда поток движется в проволоке соленоида под влиянием силы Лоренца, происходят мелкие скачки потока, в результате которых в образце выделяется лишь небольшое



Фиг. 111. Возможная кривая намагничивания для проволоки в катушке во время тренировки.

Максимальный ток достигается в этом случае только при двух скачках потока.

количество тепла. Если, однако, в проволоке присутствует поток противоположного знака, то при значении поля, при котором поток, созданный током, сравнивается с потоком захваченных в проволоке флюксоидов противоположного знака, происходит их взаимная аннигиляция с локальным выделением большого количества тепла. Это вызывает катастрофический скачок потока, приводящий к разрушению сверхпроводимости катушки.

Эффект тренировки можно объяснить следующим образом. Образец переходит в нормальное состояние с намагниченностью, соответствующей отсутствию поля, когда в нем протекает ток. В силу этого захваченный поток, направленный противоположно полю катушки, будет меньше, чем в предыдущем цикле. При возрастании

тока в катушке теперь будет достигаться более сильное поле, чем при предыдущем переходе, и в силу наличия возросшего тока антипараллельный захваченный поток еще больше уменьшится. Кривая намагничивания для циклической нагрузки катушки изображена на фиг. 111. В каждом последующем цикле ток при переходе в нормальное состояние снижает величину антипараллельного потока, пока наконец ток не достигает своего максимального значения.

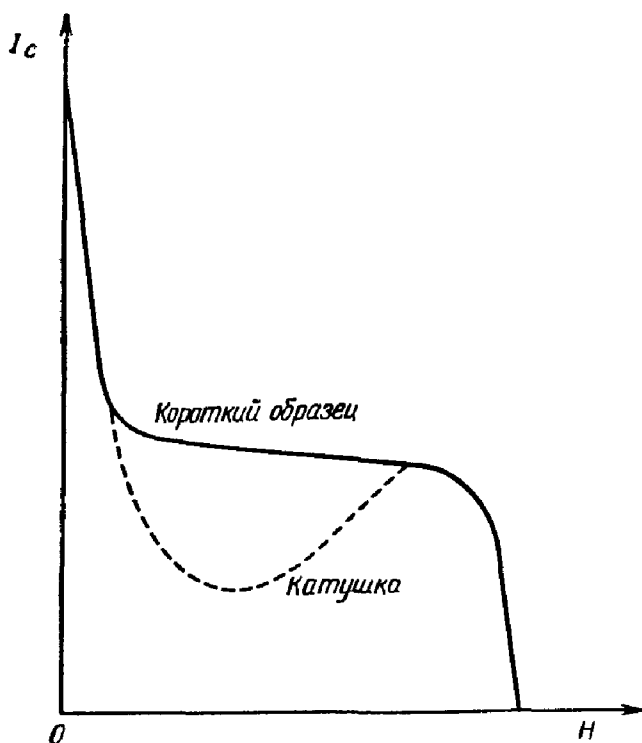
Покрывание проволоки медью сильно снижает эффект тренировки и может даже снять его совсем. Нет оснований предполагать, что поверхностный слой играет какую-либо роль в тренировке, и поэтому можно предположить, что медный слой служит поглотителем тепла, находящимся в хорошем тепловом контакте с гелиевой ванной. Тепло, выделяющееся в результате движения линий потока, отводится, и температура проволоки не поднимается выше своего критического значения.

### § 3. Деградация

При изготовлении катушки из проволочного сверхпроводника второго рода зачастую оказывается, что критический ток в катушке ниже критического тока короткого куска той же проволоки (фиг. 112). Этот эффект называют *деградацией* [26]. Эффект деградации различен для разных материалов: в  $Nb_3Sn$  деградация незначительна, а в случае сплавов  $Nb-Zr$  она выражена особенно сильно — критический ток в катушке по сравнению с коротким образцом может быть меньше в 50 раз. Снятие токовой характеристики короткого образца обычно производится либо при включении определенного магнитного поля с последующим увеличением тока вплоть до критического, либо при увеличении внешнего поля вплоть до появления разности потенциалов на образце, по которому течет постоянный ток.

Речь, таким образом, идет о *последовательном* включении тока и поля. В катушке же ток и поле увеличиваются одновременно. Было обнаружено, что если в коротком образце также одновременно увеличивать ток и поле (метод *моделирования катушки*), то наблюдается

деградация [27]. Это видно на фиг. 113, где кружочки относятся к короткому образцу, исследованному методом моделирования (соответственно линии 1—4), а сплошная линия соответствует наилучшей характеристике катушки из того же материала. Согласие вполне хорошее,

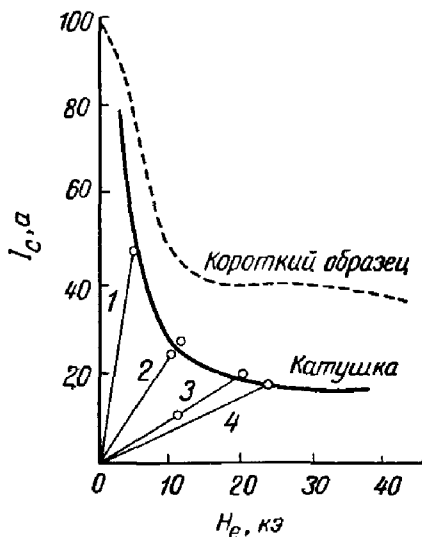


Фиг. 112. Зависимость критического тока от поперечного поля для короткого образца из проволоки и для катушки.

Когда проволока намотана на катушку, происходит деградация.

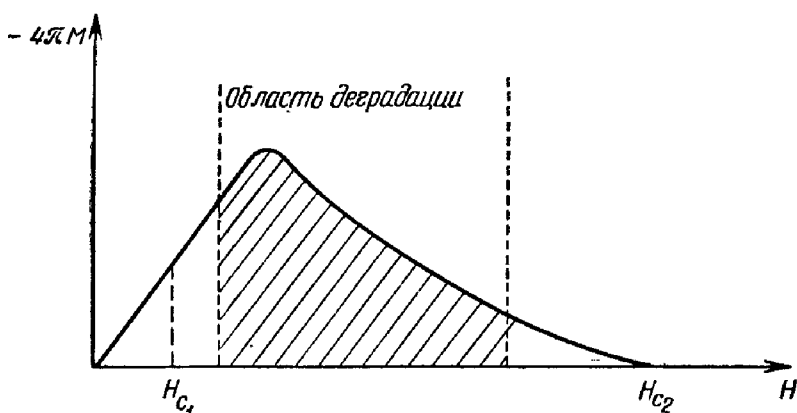
и полученная таким образом характеристика сильно отличается от характеристики для короткого образца при последовательном включении тока и поля. Было также обнаружено, что при моделировании катушки происходит тренировка. При моделировании катушек, изготовленных из материалов, обладающих лишь небольшой деградацией (например,  $Nb_3Sn$ ), тренировка незаметна. Очевидно, что тренировка постепенно изменяет величину критического тока от деградированного значения до значения, соответствующего короткому образцу.

Эффект деградации был исследован с помощью измерения разности потенциалов в катушке с фиксированным током при изменении внешнего поля [28]. В случае небольших катушек, изготовленных из проволоки Nb—25% Zr и несущих небольшой ток (в данном случае меньше  $2 \text{ а}$ ), при включении и выключении поля на концах катушки возникает ряд узких, равномерно распределенных импульсов напряжения, соответствующих скачкам потока, вызванным действием силы Лоренца. Однако катушка не переходит в нормальное состояние вплоть до максимального приложенного поля ( $35 \text{ кэ}$ ). Когда ток превышает  $2 \text{ а}$ , соленоид всегда переходит в нормальное состояние при полном поле (приложенное поле плюс собственное поле катушки), превышающем примерно  $6 \text{ кэ}$ . Эти данные говорят о том, что преждевременное разрушение сверхпроводимости проволоки, из которой изготовлена катушка (что приводит к деградации), связано со скачками потока в присутствии тока. Скачки потока приводят к рассеянию тепла в проволоке и, если количество этого тепла достаточно велико, к образованию нормальных областей. Исчезнет такая нормальная область или увеличится, зависит от скорости выделения тепла в проволоке и скорости, с которой это тепло отводится в окружающую гелиевую ванну. Появление катастрофического скачка потока наиболее вероятно в катушке, в которой скачок потока в одном витке будет оказывать действие и на ряд других витков и в которой охлаждение затруднено наличием соседних витков. Очевидно, поэтому деградация возрастает при увеличении толщины стенки соленоида.



Фиг. 113. Зависимость критического тока от поперечного поля для коротких проволок из сплава Nb—25% Zr при  $4,2^\circ \text{ К}$  [27].

Деградация происходит только в области промежуточных полей. Причину этого легко видеть из кривой намагничивания, изображенной на фиг. 114. До поля  $H_c$ , никакой деградации не наблюдается, поскольку линии потока не проникают в материал, и сила Лоренца не играет никакой роли. При  $H > H_c$ , начинается проникновение линий потока, но деградация все еще не возникает, поскольку энергия, рассеиваемая движущимися



Фиг. 114. Кривая намагничивания.

В области, где происходит деградация, намагниченность больше.

линиями потока, пропорциональна квадрату скорости линии, а вблизи  $H_c$ , сила Лоренца, а следовательно, и скорость линии мала. Однако это компенсируется большим числом линий потока (на что указывает большая величина  $M$  на фиг. 114), принимающих участие в движении, и довольно близко от  $H_c$  выделяется достаточное количество тепла для возникновения деградации. Сначала эффект растет с увеличением поля. Однако в более сильных полях, несмотря на то что скорость линий продолжает возрастать, уменьшение  $M$  (и соответственно уменьшение числа линий потока) приводит к уменьшению полной рассеянной энергии. В конце концов критический ток в катушке в области сильных полей приближается снова к величине, соответствующей короткому образцу.



Уменьшение энергии центров пиннинга в проволоке снижает тенденцию материала к деградации. Хотя скачки потока при этом будут происходить чаще, они будут меньше, и их превращение в катастрофические скачки менее вероятно. Уменьшение энергии центров пиннинга будет снижать критический ток короткого образца. Тем не менее во многих случаях в целом критический ток возрастает.

Этот эффект наблюдался в небольших катушках из проволоки Nb — 65% Zr [29] при увеличении температуры катушки. То, что увеличение температуры понижает энергию центров пиннинга, было показано в результате непосредственных измерений этой энергии при различных температурах с помощью крутильного метода, описанного в гл. 8, § 4. Оказалось, что при повышении температуры катушки при токах выше критических катушка не обнаруживает признаков деградации, а переходит в нормальное состояние при значении тока, соответствующем короткому образцу при этой же температуре.

Для предотвращения деградации, ограничивающей максимальный ток катушки, применяются два метода. Можно использовать два концентрических сверхпроводящих магнита, намотанных из различных проволок. Материал для наружной катушки не должен деградировать (хотя это может привести к более низкому значению критического тока в коротком образце). Внутренняя катушка делается из материала с высоким критическим током, но с деградацией. Внешняя катушка устроена так, что при ее возбуждении материал внутренней катушки переходит в область полей, где нет деградации, так что скачки потока происходят во внутренней катушке при отсутствии в ней результирующего тока. Теперь внутреннюю катушку можно возбудить для получения сильного поля. Другой способ избежать деградации заключается в нагреве катушки выше ее «критической температуры деградации» с последующим возбуждением до поля, находящегося выше области деградации. Если затем катушку охладить, то критический ток в ней увеличивается, и катушка может работать в области, отвечающей этому более высокому значению критического тока.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kamper R. A., Phys. Lett., **5**, 9 (1963).
2. Le Blanc M. A. R., IBM Journ. Res. Developm., **6**, 122 (1962).
3. Yasukochi K., Ogasawara T., Usui N., Ushio S., Journ. Phys. Soc. Japan., **19**, 1649 (1964).
4. Druyvesteyn W. F., Phys. Lett., **14**, 275 (1965).
5. Le Blanc M. A. R., Phys. Rev. Lett., **11**, 149 (1963).
6. Druyvesteyn W. F., диссертация, 1965.
7. Heaton J. W., Rose-Innes A. C., Cryogenics, **4**, 85 (1964).
8. Tedmon C. S., Rose R. M., Wulff J., Journ. Appl. Phys., **36**, 829 (1965).
9. Calverley A., Davis M., Lever R. F., Journ. Sci. Instr., **34**, 142 (1957).
10. Le Blanc M. A. R., Little W. A., Proceedings of the 7th International Conference on Low Temperature Physics, (ed. G. M. Graham, A. C. Hollis-Hallett), Toronto, 1960, p. 362.
11. Hake R. R., Leslie D. H., Journ. Appl. Phys., **34**, 270 (1963).
12. Riemersma H., Journ. Appl. Phys., **35**, 1802 (1964).
13. Hart H. R., Jr., Swartz P. S., Phys. Rev., **156**, 403 (1967).
14. Blaisse B. S., De Jong L. N. J., Physica, **31**, 326 (1965).
15. Druyvesteyn W. F., Van Ooijen D. J., Berben T. J., Rev. Mod. Phys., **36**, 58 (1964).
16. El Bindari A., Litvak M. M., Rev. Mod. Phys., **36**, 98 (1964).
17. De Sorbo W., Rev. Mod. Phys., **36**, 90 (1964).
18. Berlincourt T. G., Hake R. R., Leslie D. H., Phys. Rev. Lett., **6**, 671 (1961).
19. Hauser J. J., Treuting R. G., Journ. Phys. Chem., Solids, **24**, 371 (1963).
20. Swartz P. S., Hart H. R., Phys. Rev., **A137**, 818 (1965).
21. Cody G. D., Cullen G. W., McEvoy J. P., Rev. Mod. Phys., **36**, 95 (1964).
22. Grassman P., Rinderer L., Helv. Phys. Acta, **27**, 309 (1954).
23. Sekula S. T., Boom R. W., Bergeron C. J., Appl. Phys. Lett., **2**, 102 (1963).
24. Bergeron C. J., Appl. Phys. Lett., **3**, 63 (1963).
25. Lubell M. S., Mallick G. T., Appl. Phys. Lett., **4**, 206; **5**, 39 (1964).
26. Donadieu L. J., Rose D. J., High Magnetic Fields, Wiley (1961).
27. Rosner C. H., Schadler H. W., Journ. Appl. Phys., **34**, 2107 (1963).
28. Lubell M. S., Chandrasekhar B. S., Mallick G. T., Appl. Phys. Lett., **3**, 79 (1963).
29. Meyerhof R. W., Heise B. H., Journ. Appl. Phys., **36**, 137 (1965).
30. Autler S. H., Rosenblum E. S., Gooen K. H., Phys. Rev. Lett., **9**, 489 (1962).
31. Lesensky L., Neurath P. W., Journ. Appl. Phys., **34**, 710 (1963).

---

## Глава 11

### ПРИМЕНЕНИЯ

#### § 1. Сильные магниты

Магнитные поля, превышающие 30 кэ, получают обычно, пропуская сильный электрический ток через охлаждаемый водой медный или алюминиевый соленоид. Этот способ был очень усовершенствован за последние 30 лет, и его можно улучшать и дальше [1]. Трудности при создании магнитных полей с помощью обычных проводников возрастают, по-видимому, пропорционально квадрату максимального требуемого поля. Мощность  $P$  (мегаватты), необходимая для создания поля  $H$  (килоэрстеды) с помощью соленоида с водяным охлаждением и с внутренним диаметром  $D$  (сантиметры), определяется выражением

$$P \approx 3,94 \cdot 10^{-5} D H^2.$$

Очевидно, что для создания поля 100 кэ в отверстии диаметром 2,5 см потребуется мощность порядка мегаватта. Большая часть входной мощности выделяется в катушке в виде джоулева тепла, и для бесперебойной работы магнита необходимо предусмотреть способы отвода этого тепла. Но ни большой входной мощности, ни специального отвода тепла не нужно, если сопротивление катушки равно нулю, т. е. если она изготовлена из сверхпроводящей проволоки. В случае сверхпроводящего магнита затрата энергии требуется лишь на поддержание низкой температуры катушки (чтобы проволока оставалась сверхпроводящей), на компенсирование небольшой энергии, рассеиваемой в нормальных вводах, и на образование магнитного поля.

Как только устанавливается требуемое магнитное поле, оба конца катушки можно соединить с помощью сверхпроводящей перемычки (теперь магнит работает в *незатухающем режиме*), и поле будет сохраняться, даже

если выключить внешний источник питания. Теперь для поддержания поля необходима лишь затрата энергии на охлаждение соленоида, которая в случае сильных полей на несколько порядков величины меньше энергии, требуемой для поддержания такого же поля в обычном соленоиде с сопротивлением. Технические требования к электропитанию небольшого сверхпроводящего магнита скромны (источник питания, дающий ток 30 а, при нагрузке 0,1 ом, часто используемый в лабораторных условиях, достаточен для получения полей до 60 кэ в рабочем пространстве диаметром 1,2 см). Ток магнита при этом можно относительно легко выключать или модулировать. Устройство источника питания на батареях с предохранительной схемой, обеспечивающей размыкание токовой цепи при переходе магнита в нормальное состояние, описано в работе [2]. Другое преимущество сверхпроводящего магнита состоит в том, что в незатухающем режиме витки катушки образуют сверхпроводящее кольцо, так что любые паразитные изменения поля вне кольца компенсируются изменениями текущего по проволоке тока, что приводит к постоянству магнитного потока внутри катушки. Таким образом, влияние изменений внешнего магнитного поля сильно снижается, и внутренняя область почти полностью освобождается от шумов. Отсутствие больших насосов, необходимых для циркуляции охлаждающей жидкости в обычных электромагнитах, приводит также к отсутствию акустических шумов, что весьма существенно при эксплуатации магнита.

Существенное снижение требований к источнику питания и простота охлаждения приводят к существенному уменьшению стоимости получения сильных магнитных полей. Теперь сильные магнитные поля можно получать в любой лаборатории. Для получения более сильных полей в больших объемах магнит изготавливается из многожильного кабеля, содержащего много меди [3], так как это приводит к большей *стабильности* магнита (переход в нормальное состояние менее вероятен). Тогда в связи с увеличением площади поперечного сечения кабеля могут уже понадобиться токи питания до 200 а. Это приводит к существенному повышению стоимости,

а также вносит дополнительные трудности, связанные с вводом тока в низкотемпературную область катушки.

Использование сверхпроводящих магнитов впервые было предложено Камерлинг-Оннесом, но сверхпроводимость материалов, известных в то время, разрушалась в полях, меньших 1 кэ. Де-Гааз и Вогд [4] обнаружили, что некоторые сплавы Рb—Вi сохраняют сверхпроводимость в полях, превышающих 20 кэ. Последующие измерения показали, однако, что плотности тока в этих сплавах очень низки, и для получения высоких полей потребовалось бы недоступное количество сверхпроводящей проволоки. Газообразного гелия тогда было мало, ожигать его было трудно, а упомянутые сплавы давали возможность получать поля, уже доступные с помощью обычных электромагнитов. Естественно, что в то время эта идея не получила дальнейшего развития. Прошло 24 года, прежде чем Интема [5] продемонстрировал возможность использования сверхпроводящих магнитов для создания сильных полей, создав магнит из ниобиевой проволоки, допускающей плотности тока до  $10^5$  а/см<sup>2</sup> в полях до 5 кэ.

Большим шагом вперед в использовании сверхпроводящих магнитов для создания сильных полей было открытие того, что Nb<sub>3</sub>Sn может проводить ток больше  $10^5$  а/см<sup>2</sup> в полях до 88 кэ [6].

С того времени, как уже упоминалось в гл. 10, § 1, п. 1, было исследовано большое число сплавов, и особенно сплавов, имеющих структуру β-вольфрама, как и Nb<sub>3</sub>Sn. В будущем могут оказаться полезными V<sub>3</sub>Ga ( $H_{c_2} \approx 350$  кэ) и V<sub>3</sub>Si ( $H_{c_2} \approx 150$  кэ). При отсутствии полной и подробной теории сверхпроводимости второго рода поиски новых материалов носили в основном эмпирический характер; они основывались на правилах Маттиаса [7], утверждавших, что сверхпроводимость свойственна только металлическим элементам с числом валентных электронов от 2 до 8 и что из этих элементов наиболее высокие критические температуры (а следовательно, вероятно, и сильные поля) имеют элементы с 3, 5 или 7-валентными электронами на атом (фиг. 115). Из всех исследованных материалов только сплавы Nb—Zr и Nb—Ti с критическими полями порядка 100 кэ

достаточно пластичны, и из них легко изготовить катушки. Были сделаны попытки преодолеть хрупкость  $Nb_3Sn$  с помощью запрессовки порошка из ниобия и олова в ниобиевую трубку с последующим прокаливанием, так что соединение образовывалось уже после изготовления катушки, в то время как пластичный  $Nb_3Sn$  можно получить при напылении его в виде тонкой



Ф и г. 115. Зависимость критической температуры сверхпроводника от числа валентных электронов на атом.

пленки [8]. Были предложены и другие методы производства пластичного  $Nb_3Sn$ . Тонкие пленки из чистых материалов, разделенные слоями изоляторов, можно получить с помощью испарения, а тонкие нити получают методом Бина (гл. 8, § 2) (запрессовкой материала в пористую матрицу). Для изготовления магнитов были также предложены материалы, содержащие тонкую структуру перемежающихся сверхпроводящих и несверхпроводящих металлов [9].

Одна из проблем при конструировании магнитов — сокращение длины проволоки, необходимой для создания максимального однородного поля, так как цена проволоки является важнейшим фактором при разработке конструкции магнита. Метод создания соленоидов с прямоугольным поперечным сечением был детально рассмотрен в работе [10]. В работе [11] были получены две

кривые, позволяющие очень легко определить оптимальную форму и минимальную длину требуемой проволоки. Вопросы конструирования сверхпроводящих катушек Гельмгольца были рассмотрены в статье [12]. Те, кто хотят создать собственные сверхпроводящие магниты, могут получить подробное описание конструирования соленоидов у фирмы Supersol<sup>1)</sup>, производящей сверхпроводящие материалы для изготовления магнитов.

Несмотря на то что на поддержание низкой температуры магнита требуется относительно небольшая мощность, она все же может оказаться значительной, и необходимо принять меры для ее уменьшения. Чтобы уменьшить утечку тепла из криостата, нужны вводы небольшого диаметра, но для уменьшения нагрева вводов джоулевым теплом необходимы вводы с низким сопротивлением (т. е. большого диаметра). Эта дилемма была, наконец, разрешена в лабораторных масштабах с помощью «накачки» магнитного потока в соленоид [13]. Принцип работы простого магнитного насоса изображен на фиг. 116. Концы сверхпроводящей катушки подсоединены к сверхпроводящей пластине. На вращающейся рукоятке подвешивается магнит, достаточно сильный для разрушения сверхпроводимости той части сверхпроводящей пластины, которая находится непосредственно под ним. При каждом повороте рукоятки магнитный поток в соленоиде разрушается, и к нему добавляется дополнительная порция потока, что приводит к росту тока, индуцированного в проволоке. Такой усовершенствованный магнитный насос индуцирует 175 а (соответствующее поле составляет в данном случае 25 кэ) в катушке из проволоки Nb — 25% Zr [44].

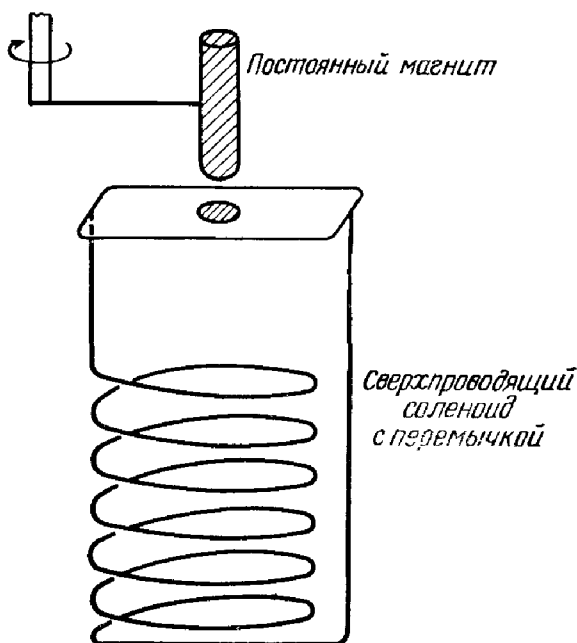
Наличие движущихся частей не очень удобно в случае криостата, так как при их движении выделяется тепло. Поток в соленоид можно вводить с помощью схемы с тепловыми выключателями [15]. Этот метод вполне приемлем, но тепловые выключатели тоже приносят в криостат излишнее тепло. Тепловые потери существенно уменьшаются, если движущийся магнитный поток

---

<sup>1)</sup> Norton International Inc., 9 Eric Drive NATICK Massachusetts, 01760.

создавать с помощью переменного тока [16]. Изменив обмотки статора трехфазного двигателя (типа «беличьего колеса»), можно заставить магнитный поток вращаться без механического вращения в жидком гелии.

Во всех используемых до сих пор методах накачки магнитного потока в каждом цикле запасается очень



Ф и г. 116. Принцип действия простого магнитного насоса.

Постоянный магнит вращается на стержне. Каждый раз, когда он проходит над сверхпроводящей лентой, маленькая область под магнитом переходит в нормальное состояние, магнитная цепь в соленоиде размыкается и к ней добавляется новая «порция» магнитного потока.

небольшое количество энергии. Их применение поэтому ограничено небольшими магнитами, поскольку для возбуждения («запитки») большого магнита потребовалось бы слишком много времени.

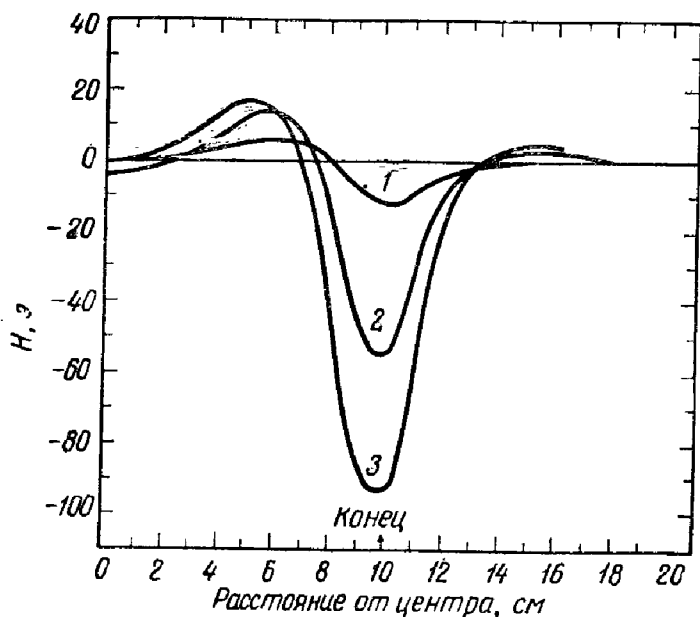
Как уже упоминалось, в схему питания сверхпроводящего магнита необходимо включить специальное устройство, прерывающее ток при разрушении сверхпроводимости соленоида. Несмотря на это, тепло, выделяющееся в витках катушки при большом токе во время перехода, может приводить к серьезным повреждениям.



Существует несколько способов защиты витков от разрушения: можно включить параллельно с катушкой низкое сопротивление, которое будет отводить большую часть тока при разрушении сверхпроводимости катушки; к витку можно подсоединить катушку индуктивности; можно разделить катушку на секции. Анализ различных схем [17] показал, что для катушек с индуктивностью меньше 1 гн при скорости разрушения сверхпроводимости  $10^3$  ом/сек температура катушки не поднимается выше  $500^\circ\text{K}$ , что, по-видимому, не должно приводить ни к каким повреждениям. Следовательно, маленькие катушки не нуждаются в защите, а один из способов улучшить защиту больших сверхпроводящих магнитов — компоновать их из небольших соленоидов каждый с индуктивностью 1 гн или меньше. Для катушек с большей индуктивностью защита может быть обеспечена наилучшим образом при прослойке сверхпроводящих витков большим количеством медной ленты [18] или при намотке катушек многожильным кабелем, состоящим из сверхпроводящих и медных проводов. Скачки потока становятся тогда слабее, и вероятность того, что они разрушат сверхпроводимость катушки, уменьшается. Добавка меди увеличивает время перехода и поглощает часть выделяющейся энергии. В этом случае магнит может быть полностью стабильным, т. е. часть витков может перейти в нормальное состояние, не вызывая катастрофического перехода всего магнита. Можно комбинировать все три способа защиты катушки, хотя высокое напряжение, возникающее при переходе, может повредить внешний шунт, и поэтому такой способ редко применяют.

Использование сверхпроводящих магнитов для создания сильных магнитных полей не лишено некоторых неудобств по сравнению с обычными электромагнитами. Вероятно, основной трудностью является необходимость охлаждать магнит до температур жидкого гелия, хотя это теперь не проблема для многих лабораторий. Целый ряд других недостатков при использовании сверхпроводящих магнитов связан с присутствием в проволоке центров пиннинга потока. Центры пиннинга затрудняют движение потока по проволоке и являются причиной

неравномерного роста поля катушки даже при очень плавном увеличении тока. Но в катушках, содержащих большое количество меди (т. е. весьма стабилизированных), неравномерность поля очень мала. (Эти нерегулярные изменения поля могут также быть несколько сглажены



Фиг. 117. Остаточное осевое магнитное поле в длинном (20 см) сверхпроводящем соленоиде [31].

Кривые, симметричные относительно центра, были получены при магнитных полях: 1 — 2,5 кэ, 2 — 5,6 кэ и 3 — 12,5 кэ.

токами, индуцированными в металлическом каркасе, на котором намотаны витки катушки.) Более существенно то обстоятельство, что скачки потока могут оказаться достаточно большими и вызвать переход магнита в нормальное состояние при поле, меньшем критического. Центры пиннинга приводят также к захвату потока в проволоке, и при полном выключении тока в магните остается остаточное поле. Величина остаточного поля в центре соленоида будет зависеть от максимального поля, достигнутого магнитом. На фиг. 117 изображены кривые, дающие некоторое представление об остаточном поле для соленоида длиной 20 см при трех различ-

ных максимальных полях. Из фигуры видно, что остаточное поле в центре магнита в этом случае невелико даже после цикла с наивысшим достигнутым полем, но центральное поле растет с уменьшением длины катушки. Далее благодаря присутствию захваченного потока при изменении направления тока (для изменения направления поля) и при отсутствии надежной стабилизации в магните произойдет большой скачок потока (см. гл. 9, § 2). Однако все эти трудности относительно невелики, и во многих случаях ими можно пренебречь. В настоящее время промышленность изготавливает сверхпроводящие магниты, создающие поля 100 кэ и более в зазоре 1,25 см.

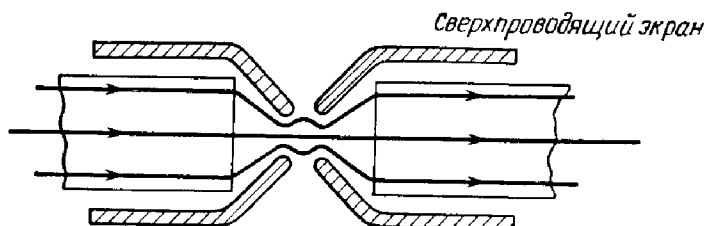
## § 2. Другие применения магнитного поля

### 1. Захват потока и экранирование

Если цилиндрический сверхпроводник второго рода, находящийся в магнитном поле, охладить или если включить магнитное поле, а затем его выключить, то, если магнитное поле достаточно велико, чтобы проникнуть в цилиндр, в стенках цилиндра индуцируется незатухающий ток и произойдет захват магнитного поля в кольце. Зависимость поля внутри трубки из жесткого сверхпроводника от внешнего поля была детально обсуждена в гл. 9, § 1. В отверстии небольшого полого цилиндра (с толщиной стенки около 0,5 см) из достаточно хорошо приготовленного  $Nb_3Sn$  происходит захват поля, превышающего 50 кэ. Поле внутри цилиндра остается постоянным до тех пор, пока цилиндр находится в сверхпроводящем состоянии, и поэтому этот цилиндр можно использовать как очень сильный постоянный магнит. Поле в отверстии цилиндра, соответствующее моменту его перехода в сверхпроводящее состояние, остается постоянным до тех пор, пока внешнее поле не достигнет очень большого значения. Следовательно, если сверхпроводящий цилиндр с достаточно большим критическим полем охладить в нулевом поле, то внешнее поле не может проникнуть в его отверстие вплоть до величины по крайней мере 50 кэ.

## 2. Концентрация потока

Поле, захваченное в сверхпроводящем цилиндре при увеличении и уменьшении внешнего поля, зависит от максимального значения, достигаемого внешним полем. Некоторые цилиндры способны захватывать поле, гораздо большее этого максимального значения. Более сильные поля можно создать в цилиндре, уже содержащем захваченный поток, если ввести в отверстие цилиндра сверхпроводящий сердечник [19]. В этом случае поток



Ф и г. 118. «Концентратор» магнитного потока.

Магнитный поток не может пройти в сверхпроводник и скапливается в области, размеры которой определяются диаметром отверстия в экране. Для первоначального запуска потока в цилиндр необходима узкая щель (на фигуре не показана).

сжимается в части отверстия, не занятой сердечником, и поле увеличивается. Однако с увеличением внутреннего поля увеличиваются потери потока в стенках цилиндра, так что отношение величины конечного поля к величине первоначального поля уменьшается [20], что накладывает определенные ограничения на степень сжатия потока. Поле магнита с железным сердечником также можно сконцентрировать, установив сверхпроводящие экраны вокруг магнитных полюсов. Принципиальная схема такого устройства изображена на фиг. 118.

## 3. Магнитные подшипники

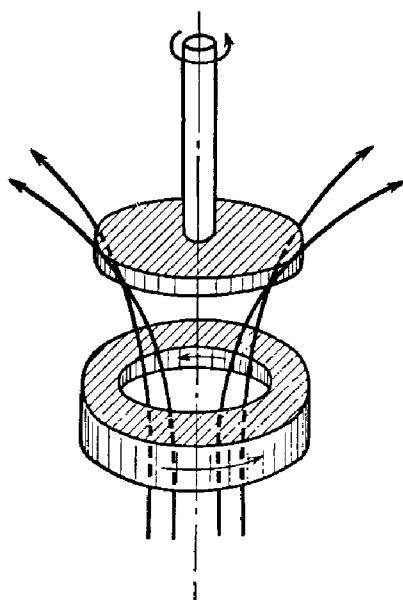
Возможность захвата и вытеснения потока позволяет предполагать, что сверхпроводящий цилиндр и диск можно использовать в качестве магнитного подшипника [21]. Принципиальная схема такого устройства изображена на фиг. 119. Подшипник ограничен в своем попе-

речном движении, но может вращаться на упругой подушке из потока. Если выбрать материал движущейся части подшипника таким образом, чтобы поток в него не проникал, то единственным трением в подшипнике будет трение, связанное с вязкостью окружающей среды, которое можно сделать очень малым.

#### 4. Хранение энергии

Сверхпроводящие катушки можно использовать в качестве аккумулятора энергии [22]. Захваченное поле напряженностью  $H$  эрстед имеет энергию  $H^2/8\pi$  эрг/см<sup>3</sup>, так что захваченное поле 100 кэ соответствует запасу энергии около  $10^8$  эрг/см<sup>3</sup>.

В обычной батарее конденсаторов можно запастись энергией  $10^6$  эрг/см<sup>3</sup>. Однако быстро получить электроэнергию из сверхпроводящего энергетического аккумулятора трудно, поскольку индуктивность катушки может быть велика, а это приводит к большой временной постоянной на выходе. Рассмотрение этого вопроса, а также обзор факторов, оказывающих влияние на временную постоянную, приводятся в работе [23].



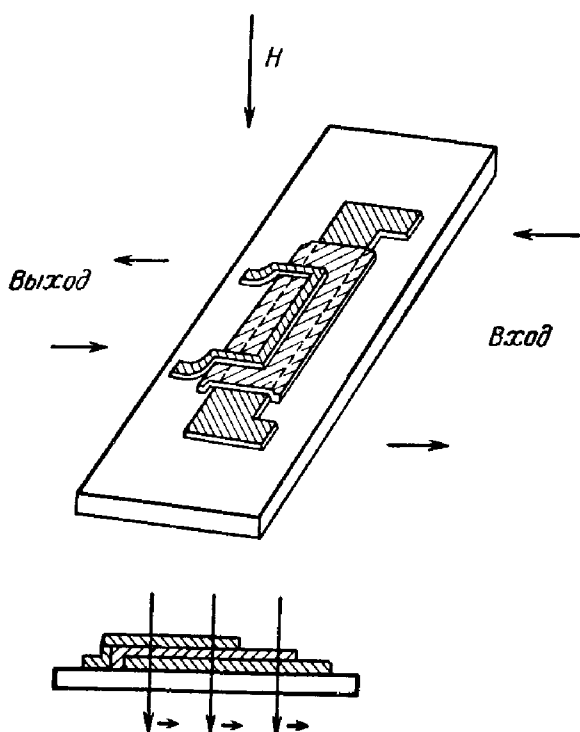
Ф и г. 119. Сверхпроводящий подшипник.

Сверхпроводящие области заштрихованы.

#### 5. Трансформатор постоянного тока

Устройство трансформатора постоянного тока с использованием тонких пленок сверхпроводника второго рода изображено на фиг. 120. В присутствии тока линии магнитного потока движутся так же, как под действием силы Лоренца (см. гл. 9, § 1). Если вокруг аппарата установить магнитное поле, а входное напряжение

приложить к более широкой пластине, то магнитные линии первичного контура при движении пересекают вторичный контур (см. схему), в результате чего на выходе появляется разность потенциалов [24]. Эффективность трансформатора составляет лишь 10%, но снимаемое



Фиг. 120. Трансформатор постоянного тока из тонких пленок сверхпроводника второго рода.

напряжение можно увеличить, увеличив число ячеек из тонкой пленки, на которые подается входное напряжение. В таком устройстве для изготовления пленок можно использовать не только сверхпроводники второго рода, но и сверхпроводники первого рода, так как магнитный поток, проникая в пленку из сверхпроводника первого рода, находящуюся в промежуточном состоянии, взаимодействует с током так же, как в случае сверхпроводника второго рода в смешанном состоянии.

### § 3. Передача энергии на постоянном токе

В сверхпроводящем кабеле нет тепловых потерь, и на первый взгляд кажется, что для передачи энергии на постоянном токе предпочтительно применять сверхпроводящие кабели. Однако при использовании такого кабеля много энергии терялось бы на выпрямление переменного тока, поступающего от генераторов, а также на поддержание низкой температуры кабеля. Потери мощности в обычных кабелях весьма невелики ( $\sim 10\%$ ), так что при существующих материалах и стоимости выпрямления тока и охлаждения кабеля передача энергии на постоянном токе с помощью сверхпроводников представляется пока экономически невыгодной. Однако стоимость охлаждения понижается, и в тех случаях, когда постоянный ток уже используется, как, например, в некоторых отраслях химической промышленности, скоро может наступить то время, когда стоимость сверхпроводящих и обычных кабелей сравняется.

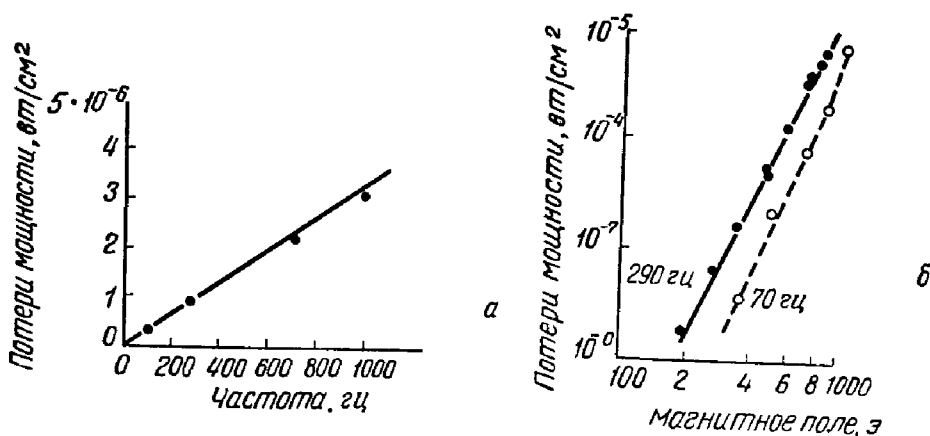
### § 4. Применения сверхпроводников на переменном токе

#### 1. Токовые характеристики

В сверхпроводниках первого рода не должно возникать потерь, пока частота  $\nu$  переменного тока не настолько высока, чтобы снабдить электроны энергией  $h\nu$ , необходимой для преодоления энергетической щели. Эта частота для большинства сверхпроводников имеет порядок  $10^{13}$  гц. Эксперименты со сверхпроводниками второго рода показали, что в них потери возникают на значительно более низких частотах и могут быть очень велики. Зависимость потерь мощности от частоты в постоянном поле и от поля при постоянной частоте для ниобия изображена на фиг. 121 [25]. Калориметрический метод, с помощью которого производились измерения, очень чувствителен, и можно было наблюдать потери мощности даже в случае хорошо отожженного очень чистого свинца с плотностью тока ниже критической.

Зависимость критического переменного тока от размеров образца для тороидального образца из эвтектики Pb—Bi была исследована в работе [26]. Оказалось, что

до частоты 100 гц потери не зависят от частоты. Аналогичные измерения проводились на проволоках из сплава Nb — 25% Zr разных размеров, которые подвергались предварительно одинаковой холодной прокатке [27]. В этих опытах было найдено логарифмическое уменьшение среднеквадратичной плотности тока с толщиной проволоки для всех частот, а также логарифмическое уменьшение тока с частотой в том случае, когда из проволоки



Фиг. 121. Зависимость потери мощности от частоты в ниобии в постоянном поле 300 э (а) и в переменных полях 70 и 290 гц (б) [22].

намотана катушка. Из опытов следует, что критическая плотность переменного тока при различных частотах соответствует одной и той же мощности.

Для объяснения происхождения энергетических потерь на переменном токе были предложены две физические модели. В работе [28] было предположено, что потери возникают из-за несовершенства поверхности и прилегающих областей. Эти дефекты захватывают поток, проникающий в сверхпроводник, в результате чего при включении переменного поля или тока возникает гистерезис. Проверка правильности этой модели проводилась с помощью вычисления изменений разности потенциалов в измерительной катушке, намотанной на сверхпроводящий блок. Экспериментальные кривые по форме совпали с теоретическими. Был также проведен анализ по-



ть энергии в сверхпроводнике второго рода для случая, когда приложенное поле параллельно пластине [29].

Когда линия потока движется в сверхпроводнике второго рода, энергия рассеивается в виде тепла (см. гл. 9, § 1). Следовательно, во всех сверхпроводниках второго рода, находящихся в смешанном состоянии, протекание переменного тока приводит к выделению тепла.

## 2. Передача энергии

Высокая стоимость выпрямления тока приводит к мысли о передаче энергии по сверхпроводящему кабелю на переменном токе. Однако как было показано выше (см. п. 1), использование таких кабелей привело бы к значительным энергетическим потерям, так что передача мощности на переменном токе не дает никаких преимуществ. И в этом случае стоимость кабеля определяется стоимостью изоляции и охлаждения. Но хотя в настоящее время использование сверхпроводящих кабелей для передачи мощности на переменном токе неэкономично, не исключено, что наступит время, когда их применение будет существенно выгоднее применения обычных кабелей.

## 3. Силовые трансформаторы и машины

Использование сверхпроводников для силовых трансформаторов и тяжелого электромашиностроения привело бы к уменьшению потребности в меди и вследствие этого к существенному снижению эксплуатационной стоимости, а также к уменьшению веса и размера установок. Мощность токового генератора ограничивается размерами электромашины. Электромашина должна транспортироваться по дороге от завода к месту эксплуатации, и размер ее поэтому ограничен шириной дороги. Проведенные расчеты [30] указывают на то, что при наличии сверхпроводящей тонкой пленки, способной проводить большие токи в сильных полях, ее использование для обмоток силовых трансформаторов привело бы к снижению веса, а следовательно, и размера обмотки и сердечника почти на 40%. Всем преимуществам

использования сверхпроводников в тяжелом машиностроении противостоит одно весьма существенное неудобство — необходимость поддерживать очень низкую температуру. Для передачи энергии и для изготовления тяжелых электромашин и силовых трансформаторов стоимость непрерывного охлаждения может пока свести на нет все остальные выгоды. Однако снижение стоимости получения сильных магнитных полей с помощью сверхпроводящих соленоидов свидетельствует о том, что использование сверхпроводников может принести большую пользу и в других случаях. Не исключено, что применение сверхпроводящих магнитов окажется очень выгодным в некоторых установках, например в термоядерных реакторах и магнитогидродинамических генераторах. Более эффективная изоляция, уменьшение стоимости охлаждения и, возможно, создание высокотемпературных сверхпроводников — все это приведет к расширению области применения сверхпроводников второго рода.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bitter F., Brit. Journ. Appl. Phys., **14**, 759 (1963).
2. McAvoy B. R., Rev. Sci. Instr., **32**, 200 (1963).
3. Laverick C., Cryogenics, **5**, 152 (1965).
4. De Haas W. J., Voogd J., Leiden Comm., **212C** (1931).
5. Yntema G. B., Phys. Rev., **98**, 1197 (1955).
6. Kunzler J. E., Buehler E., Hsu F. S. L., Wernick J. H., Phys. Rev. Lett., **6**, 89 (1961).
7. Matthias B. T., Progress in Low Temperature Physics, ed. C. J. Gorter, vol. II, 1957, p. 138.
8. Heraeus W. C., брит. пат. 1008132.
9. Berlincourt T. G., Brit. Journ. Appl. Phys., **14**, 749 (1963).
10. Boom R. W., Livingston R. S., Proc. IEEE, **50**, 274 (1962).
11. Thomas E. J., Bright C. D., Cryogenics, **6**, 10 (1966).
12. Day J. D. A., Journ. Sci. Instr., **40**, 583 (1963).
13. Goedemoed S. H., Van Kolmeschate C., Metseelaar J. W., De Klerk D., Physica, **31**, 573 (1965).
14. Van Beelen H., Gorter C. J., Physica, **29**, 896 (1963).
15. Laquer H. L., Cryogenics, **3**, 27 (1963).
16. Van Houwelingen D., Admiraal P. S., Van Suchtelen J., Phys. Lett., **8**, 310 (1964).
17. Smith P. F., Rev. Sci. Instr., **34**, 368 (1963).
18. Kantarowicz A. R., Stekley J. Z. Z., Appl. Phys. Lett., **6**, 56 (1965).
19. Swartz P. S., Rosner C. H., Journ. Appl. Phys., **33**, 2292 (1962).

20. Goldsmid H. J., Corsan J. M., Phys. Lett., 10, 39 (1964).
21. Buchhold T. A., Sci. Amer., 202(3), 74 (1960).
22. Wiederhold P. R., Ameen D. L., Конференция по сильным магнитным полям, Оксфорд, 1963.
23. Ameen D. L., Wiederhold P. R., Rev. Sci. Instr., 35, 733 (1964).
24. Giaever I., Phys. Rev. Lett., 15, 825 (1965).
25. Buchhold T. A., Molenda P. J., Cryogenics, 2, 344 (1962).
26. Kamper R. A., Phys. Lett., 2, 290 (1962).
27. Young F. J., Schenk H. L., Journ. Appl. Phys., 35, 980 (1964).
28. Buchhold T. A., Cryogenics, 3, 141 (1963).
29. London H., Phys. Lett., 6, 162 (1963).
30. Wilkinson K. J. R., Proc. IEE, 110, 2271 (1963).
31. Anderson A. C., Sarwinski R. J., Rev. Sci. Inst., 34, 298 (1963).

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Из предисловия авторов . . . . .	8

### ЧАСТЬ I.

#### ОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ (Д. САН-ЖАМ И Г. САРМА)

<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Введение в сверхпроводимость . . . . .	9
§ 2. Эффект Мейсснера. Диамагнетизм . . . . .	10
§ 3. Некоторые соображения о переходе из нормального в сверхпроводящее состояние . . . . .	11
§ 4. Уравнение Лондонов . . . . .	14
§ 5. Длина когерентности и энергетическая щель . . . . .	17
§ 6. Классификация сверхпроводников . . . . .	21
§ 7. Магнитные и термодинамические свойства сверхпроводников второго рода . . . . .	23
§ 8. Идеальные сверхпроводники второго рода и жесткие сверхпроводники . . . . .	29
Литература . . . . .	31
<b>Глава 2. Феноменологическая теория Гинзбурга—Ландау . . . . .</b>	<b>33</b>
§ 1. Свободная энергия и уравнения Гинзбурга—Ландау . . . . .	33
§ 2. Две характеристические длины $\xi(T)$ и $\lambda(T)$ и справедливость схемы Гинзбурга—Ландау . . . . .	38
§ 3. Параметр Гинзбурга—Ландау $\kappa(T)$ . . . . .	42
§ 4. Поверхностная энергия . . . . .	44
§ 5. Ламинарная модель и нитевидная структура . . . . .	51
Литература . . . . .	55
<b>Глава 3. Магнитные свойства сверхпроводников второго рода. Структура вихревых нитей . . . . .</b>	<b>56</b>
§ 1. Введение . . . . .	56
§ 2. Возникновение сверхпроводимости. Критическое поле $H_{c2}$ . . . . .	57
§ 3. Структура смешанного состояния . . . . .	59
§ 4. Основные свойства структуры вихревых нитей. Кривая намагничивания . . . . .	82
§ 5. Экспериментальное наблюдение структуры вихревых нитей . . . . .	91
Приложение . . . . .	98
Литература . . . . .	102

<b>Глава 4. Поверхностная сверхпроводимость</b> . . . . .	103
§ 1. Образование зародышей в полубесконечной среде. Поле $H_{c3}$ . . . . .	103
§ 2. Образование зародышей в пластине . . . . .	115
§ 3. Угловая зависимость критического поля образования зародышей . . . . .	126
§ 4. Устойчивость поверхностного слоя ниже $H_{\parallel}$ . . . . .	136
§ 5. Сверхпроводник, покрытый нормальным металлом . . . . .	147
Литература . . . . .	151
<b>Глава 5. Микроскопическая теория</b> . . . . .	153
§ 1. Введение . . . . .	153
§ 2. Основные положения микроскопической теории. Купе- ровские пары . . . . .	154
§ 3. Формулировка микроскопической теории. Самосо согласо- ванный метод . . . . .	158
§ 4. Вывод уравнений Гинзбурга — Ландау. Различие ме- жду чистыми и грязными сверхпроводниками . . . . .	168
§ 5. Выводы и обсуждение результатов . . . . .	192
Литература . . . . .	196
<b>Глава 6. Различные свойства сверхпроводников второго рода       в сильных полях</b> . . . . .	198
А. Парамагнитный эффект . . . . .	198
§ 1. Введение . . . . .	198
§ 2. Вычисление различных ядер . . . . .	203
§ 3. Состояние Фульде и Феррелла . . . . .	206
§ 4. Поле $H_{c2}$ в случае грязного сверхпроводника . . . . .	215
§ 5. Экспериментальные данные. Эффект спин-орбитального рассеяния . . . . .	221
Б. Бесщелевая сверхпроводимость . . . . .	226
§ 6. Введение . . . . .	226
§ 7. Параметр упорядочения и спектр возбуждения . . . . .	227
§ 8. Заключение . . . . .	243
Литература . . . . .	244
<b>Глава 7. Тепловые свойства</b> . . . . .	246
§ 1. Удельная теплоемкость . . . . .	246
§ 2. Теплопроводность . . . . .	250
Литература . . . . .	262

## ЧАСТЬ II. НЕОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ (Е. Д. ТОМАС)

<b>Глава 8. Захват потока и необратимые характеристики процес-       сов намагничивания</b> . . . . .	263
§ 1. Наблюдение захваченного потока . . . . .	264
§ 2. Захват потока в нитевидной структуре . . . . .	267
§ 3. Захват потока в односвязной системе . . . . .	271

§ 4. Центры пиннинга . . . . .	275
§ 5. Зависимость захваченного потока от температуры . . . . .	283
Литература . . . . .	285
<b>Глава 9. Движение потока внутри сверхпроводников второго рода . . . . .</b>	<b>287</b>
§ 1. Стационарное движение линий потока . . . . .	287
§ 2. Скачки потока . . . . .	303
§ 3. Магнитно-тепловые эффекты . . . . .	309
Литература . . . . .	313
<b>Глава 10. Характеристики критического тока . . . . .</b>	<b>315</b>
§ 1. Зависимость критического тока от поля . . . . .	317
§ 2. Тренировка . . . . .	336
§ 3. Деградация . . . . .	339
Литература . . . . .	344
<b>Глава 11. Применения . . . . .</b>	<b>345</b>
§ 1. Сильные магниты . . . . .	345
§ 2. Другие применения магнитного поля . . . . .	353
§ 3. Передача энергии на постоянном токе . . . . .	357
§ 4. Применения сверхпроводников на переменном токе . . . . .	357
Литература . . . . .	360

*Д. Сан-Жам, Г. Сарма, Е. Томас*

### СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ ВТОРОГО РОДА

Редактор О. Глебов

Художник Л. Ларский  
Технический редактор И. Дерва

Художественный редактор П. Некундэ

Корректор И. Соколова

Сдано в производство 11/III 1970 г. Подписано к печати 19/VIII 1970 г.  
Бумага тип. № 1, формат 84×108<sup>1/32</sup>=5,72 бум. л. 19,22 уся. печ. л., в т/ч вкл. .  
Уч.-изд. л. 16,31, Изд. № 2/5093. Цена 1 р. 82 к. Зак. 544.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Пискаревский проспект, 29