Оглавление

SATURATED MODEL THEORY

Gerald E. Sacks
Massachusetts
Institute
of Technology

W. A. Benjamin, Inc.
ADVANCED BOOK
PROGRAM
1972 Reading, Massachusetts

Дж. Е. Сакс

ТЕОРИЯ НАСЫЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

Перевод
с английского
Л. Л. Максимовой и
Е. А. Палютина

Под редакцией
А. Д. Тайманова

Издательство
«Мир»
Москва
1976

УДК 517.11.517.12

Новая область математики — теория моделей получила интенсивное развитие в последние двадцать лет. В книге известного математика Дж. Сакса содержится тщательное изложение и классических, и новейших результатов теории; большой интерес представляют результаты о рангах формул и типов, о простых моделях, о насыщенных и однородных системах. Эта теория позволила решить многие задачи, казавшиеся ранее неприступными.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов математических факультетов университетов, а также высших учебных заведений, готовящих специалистов по прикладной математике.

Редакция литературы по математическим наукам

С $\frac{20203-010}{01(41)-76}$ — 10 — 76

ПРЕДИСЛОВИЕ

В математических теориях изучают объекты двух видов. Например, в теории групп изучают группы и высказывания о группах. Связь между этими видами объектов, связь между математическими структурами, с одной стороны, и высказываниями формального языка, определенными на этих структурах, с другой, изучается в теории моделей, возникшей в 30-х годах нашего столетия на стыке алгебры и математической логики.

Возникновение этой теории подготовлено развитием математики прошлого и первой четверти нашего века: к началу тридцатых годов сложилась математическая логика, возникли формализованные языки и возникла абстрактная алгебра, изучающая множество с определенными на нем операциями. В 1933 г. А. Тарский дал точное определение отношения истинностности высказывания формального языка в данной алгебраической системе и получил на этой основе важные результаты. Эти работы создали условия для изучения связи между абстрактными алгебраическими системами и высказываниями формального языка. Но соответствующая теория не развивалась.

Причин было две. Во-первых, не было мощного и при этом достаточно простого метода решения новых проблем, возникающих в этой области, и доказательства новых теорем, во-вторых, не было уверенности в актуальности новой проблематики.

Эти пробелы заполнил А. И. Мальцев в двух работах [1, 2]. В первой работе он создал новый метод, усилив

и переформулировав соответствующим образом теорему Гёделя о полноте, доказанную для счетного случая и для другой цели. При этом А. И. Мальцев впервые использовал в математической логике идею компактности, возникшую в теоретико-множественной топологии. Во второй работе в 1941 году он показал, что все локальные теоремы теории групп являются простыми следствиями его теоремы компактности, и показал, как получить с помощью его метода новые локальные теоремы в алгебре. Эта основополагающая работа А. И. Мальцева продемонстрировала перспективность применения методов математической логики в алгебре. Но развитие теории моделей в Советском Союзе задержалось на десятилетие, в основном из-за войны, унесшей целое поколение молодых математиков. Исследование в этой области в Советском Союзе возобновилось в 50-х годах, опять-таки благодаря научной и организаторской деятельности А. И. Мальцева.

В 1949 году американский математик Л. Генкин переоткрывает теорему Мальцева. А. Тарский находит применение теории моделей в теории алгоритмов и серией работ, ставших классическими, открывает новую главу теории моделей. Эта деятельность А. Тарского привела к бурному развитию теории моделей в США.

В первые послевоенные десятилетия преимущественно развивается теория моделей первого порядка, все результаты которой основывались на принципе Мальцева.

В последние годы появилось много работ по теории моделей языков не первого порядка. Но заметное продвижение получено там, где удается найти аналог локальной теоремы Мальцева. Вся история последних лет показывает, что теорема Мальцева является не простым усилением теоремы Гёделя, а принципиальным продвижением, и на ее основе возник удобный в применении и мощный метод доказательства теорем.

К сожалению, автор настоящей книги проф. Дж. Сакс не упоминает А. И. Мальцева в качестве автора обсуждаемой выше теоремы, хотя она широко известна во всем мире как теорема компактности Мальцева (см. Робинсон [3], Вот [2]).

Книга Сакса посвящена новому этапу в развитии теории моделей, который начинается с работы Морли, где доказана смелая гипотеза польского математика Лося о категоричных теориях. Наряду с идеей компактности Морли привлекает другую идею общей топологии —идею Кантора — Бендиксона.

Каждой алгебраической системе ставится в соответствие вполне несвязный бикомпакт — ее стоуновское пространство. При этом Морли в отличие от Кантора — Бендиксона рассматривает не одно стоуновское пространство, а категорию стоуновских пространств моделей теории. Точка бикомпакта называется изолированной, если все ее прообразы состоят из изолированных точек. При такой модификации определения изолированной точки и производного множества все точки стоуновского пространства, не лежащие в его совершенном ядре, получают трансфинитный индекс — индекс Морли. Если же стоуновские пространства моделей теории не содержат совершенных ядер, то теория называется тотально трансцендентной и в таких теориях можно доказывать теоремы индукцией по рангам Морли. Эта идея позволила Морли, Шелаху, Лахлану и другим получить глубокие теоремы о тотально трансцендентных теориях. Книга Сакса, в которой с большим мастерством изложены все эти результаты, знакомит читателя с новыми идеями, методами, конструкциями, возникшими в теории моделей за последние годы (кончая 1972 г.).

От читателя требуется знакомство с математической логикой и алгеброй в объеме университетских курсов.

Книгу можно рекомендовать студентам старших курсов университетов, педвузов и всем, кто интересуется приложениями методов математической логики к другим разделам математики.

Многочисленные неточности и опечатки, обнаруженные при переводе, уточнены и исправлены. Некоторые из них отмечены примечаниями редактора и переводчиков. Первые 25 параграфов переведены Л. Л. Максимовой, остальные — Е. А. Палютиным.

А. Д. Тайманов

Три греха внушают мне страх, ... они подстерегают всех пишущих, грозят спасению души и ведут к потере достоинства. Вот они: неведение истины, ложь по заблуждению или недомыслию и надменное стремление выдать предположение за действительность... . Признаюсь, что повинен во всех трех этих грехах.

Metalogicon Иоанна Солсберийского.

§ 0. ВВЕДЕНИЕ

Эта книга написана как ответ на вопрос: «Сумеет ли специалист по теории алгоритмов написать книгу по теории моделей?» Поэтому в ней в ряде мест отмечается (без доказательства) абсолютность (по Гёделю [1]) рассматриваемых теоретико-модельных понятий и используемых для их определения ординалов.

Например, понятие тотальной трансцендентности, введенное Морли, абсолютно, и для установления тотальной трансцендентности теории T требуются лишь ординалы, рекурсивные в T. В появлении этой книги отчасти повинен Б. Дребен, который однажды спросил со свойственной ему непосредственностью: «Имеет ли теория моделей хоть какое-нибудь отношение к логике?» Действительно, теория моделей обескураживает своим сходством с теорией множеств — с этой пленительной областью математики, которая почти не касается фундаментальных логических вопросов, и, в частности, с арифметикой ординалов и кардиналов. Но это сходство проявляется скорее в способе изложения, чем в идеях, поскольку центральные понятия теории моделей абсолютны, а абсолютность в отличие от мощности является логическим понятием. Вот почему теория моделей не разбивается о скалу неразрешимости теоретико-множественных проблем типа обобщенной проблемы континуума, и, в частности, разрешима следующая гипотеза Лося: если счетная теория категорична в некоторой несчетной мощности, то она категорична во всех несчет-

ных мощностях. (Теория называется категоричной в мощности $\varkappa$, если все ее модели мощности $\varkappa$ изоморфны.) Эта гипотеза доказана Морли (см. теорему 37.4). Свойство «теория T категорична во всех несчетных мощностях» является, конечно, абсолютным свойством теории T.

Для доказательства гипотезы Лося Морли ввел понятие ранга 1-типа. Имеются также доказательства, не использующие понятия ранга, но идеи, на которых они основаны, не применимы для доказательства, например, теоремы Шелаха о единственности (§ 36). Я взял понятие ранга в качестве центрального понятия этой книги, потому что оно является центральным в современной теории моделей. Приписывание ранга 1-типам, реализуемым элементами алгебраических систем, позволяет доказывать теоремы об этих системах индукцией по рангу. Не всякий 1-тип над подсистемой модели теории T обязан иметь ранг, если же все такие 1-типы имеют ранг, то теория T называется тотально трансцендентной. Понятие ранга, введенное Морли, навеяно классификацией Кантора — Бендиксона точек замкнутого подмножества компактного хаусдорфова пространства. Однако производная по Морли отличается от производной по Кантору — Бендиксону тем, что первая перестановочна с операцией взятия обратного предела. Производная Морли определяется в § 29 как оператор, действующий на некотором классе важных функторов теории моделей. Одним из преимуществ теоретико-категорного изложения ранга Морли является то, что оно применимо также и к другим понятиям ранга 1-типов (см., например, Шелах [1, 2]). В § 25 приведен обзор теоретико-категорных понятий, используемых в § 29.

Название этой книги не вполне точно отражает содержание. Теория насыщенных систем изложена здесь далеко не полно: например, не обсуждается важное понятие ультрапроизведения, которое используется для получения насыщенных расширений. Выбранное название означает лишь то, что мы предпочитаем ту часть теории моделей, в которой синтаксические вопросы сведены до минимума. Большая часть теории моделей осталась незатронутой отчасти из соображений краткости, а отчасти из-за вкусов автора. Я отдаю предпочтение новым конструкциям и тех-

нике, поэтому у меня не было желания включать даже важные теоремы, в доказательствах которых нет новизны. Конечно, ограничения, связанные с моими вкусами, не мешают мне повторять несколько моих излюбленных конструкций.

В книге мало примеров, и это не случайно. Как правило, авторы приводят примеры в надежде разъяснить общие понятия, однако все примеры общего понятия вводят в заблуждение, так как они неизбежно являются частными и носят отпечаток индивидуальности.

Примером тотально трансцендентной теории, менее всего вводящим в заблуждение, является теория дифференциально замкнутых полей характеристики 0 (DCF_0). Применение ранга Морли к DCF_0, предложенное Блюм, излагается в § 40 и 41. Есть много заслуживающих внимания применений теории моделей к алгебре и прежде всего к теории полей, однако Блюм была первой, кто использовал нечто большее, чем теорему компактности (следствие 7.2). (Одно из наиболее типичных применений теоремы компактности в теории полей, повлиявшее на развитие теории, принадлежит А. Робинсону.) Пусть F—предложение первого порядка теории полей, истинное в любом поле характеристики 0. Тогда существует такое число n, что F истинно в любом поле характеристики $p \geqslant n$. Блюм показала, что любое дифференциальное поле характеристики 0 имеет простое дифференциальное замыкание. Ее теорема следует из общего результата Морли (теорема 32.4), который справедлив для всех тотально трансцендентных теорий. Из столь же общего результата Шелаха следует единственность простого дифференциального замыкания (теорема 41.4).

Я не очень хорошо знаю историю теории моделей, поэтому вполне возможно, что мне не удалось отдать должное многим из тех, кто внес в нее вклад. Большинству утверждений приписаны в скобках имена, но наверняка многие теоремы были открыты независимо несколькими авторами (не все они мне известны), так как редко случается, чтобы многообещающая идея была исключительной привилегией одного ума. Я надеюсь, что никто не припишет мне злого умысла. Не обязательно быть историком теории моделей, чтобы понять, что этот пред-

мет обязан своим существованием усилиям одного человека — Альфреда Тарского.

Были приняты некоторые меры, чтобы сделать книгу доступной для тех, кто мало знает логику. В первых параграфах даются определения «алгебраической системы» и «предложения», в § 7 довольно подробно объясняются свойства отношения «логического следования». Это сделано для того, чтобы все читатели смогли понять доказательство основной теоремы существования.

В этой книге излагается содержание курса лекций, прочитанного в Йельском университете осенью 1970 года. Курс был основан на заметках, подготовленных С. Симпсоном, который записал лекции, прочитанные в Массачусетском технологическом институте весной 1969 года. Я очень обязан студентам, слушателям обоих моих курсов, которые неумолимо, хотя довольно редко успешно, настаивали, чтобы все доказательства были полными и корректными.

Весьма благодарен я моим коллегам по теории моделей: Л. Блюм, Г. Дж. Кейслеру, Г. Крайзелу, А. Лахлану, М. Морли, А. Робинсону, Ф. Ровботтому и С. Шелаху, чьи щедрые разъяснения открыли мне, вопреки моему первоначальному впечатлению, действительно захватывающий предмет.

Кеймбридж, Массачусетс,
15 марта 1972 года

§ 1. ОРДИНАЛЫ И ДИАГРАММЫ

Ординалы обозначаются через α, β, γ, δ, . . .; каждый *ординал* равен множеству всех меньших ординалов, таким образом, $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$. Через 0 обозначается пустое множество. Кардиналы обозначаются через $\varkappa$, ρ, μ,. . .; *кардиналом* называется ординал, который нельзя отобразить взаимно однозначно на меньший ординал. Бесконечные кардиналы образуют возрастающую последовательность $\omega_0 (= \omega)$, ω_1, ω_2, . . ., ω_α, ... Говорят, что множество имеет ***мощность*** $\varkappa$, если можно установить взаимно однозначное соответствие между ним и $\varkappa$. Мощность множества A обозначается через card A. Через $\varkappa^+$ обозначается наименьший кардинал, больший чем $\varkappa$. Множество называется ***счетным***, если оно конечно или имеет мощность ω. *Последователем* ординала α называется ординал $\alpha + 1$. Через λ обозначается ***предельный*** ординал, т. е. ординал, отличный от 0 и не являющийся последователем никакого другого ординала. Кардинал $\varkappa$ называется *сингулярным*, если он является объединением множества мощности, меньшей $\varkappa$, меньших чем $\varkappa$ кардиналов. Не сингулярный кардинал называется *регулярным*.

Часто придется писать утверждения типа:

для любых отображений f, g, $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, $g\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, обладающих свойством P, найдется такое отображение $h\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, обладающее свойством Q, что $f = hg$. Это утверждение можно выразить также следующим образом: каждая диаграмма такого вида:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"'] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

f и g обладают свойством P, h обладает свойством Q

может быть пополнена указанным на чертеже способом.

Утверждение, что любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "g"'] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd} \qquad g \text{ обладает свойством } P$$

может быть пополнена указанным на чертеже способом, означает следующее:

для каждого $g\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ со свойством P существуют система $\mathfrak{C}$ и отображения $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ и $h\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, такие, что $f = hg$.

Знак $\Leftrightarrow$ употребляется для сокращения выражения: «тогда и только тогда, когда».

Конец доказательства обозначается через $\square$.

§ 2. СИГНАТУРЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Самую простую классификацию алгебраических систем дают типы подобия. Пусть N — множество натуральных чисел. *Сигнатурой* или *типом подобия* τ называется пятерка

$$\langle I,\ J,\ K,\ \theta,\ \psi \rangle,$$

такая, что $\theta\colon I \to N$, $\psi\colon J \to N$. *Алгебраическая система* $\mathfrak{A}$ сигнатуры τ включает в себя:

(i) Непустое множество A, называемое *носителем* системы $\mathfrak{A}$.

(ii) Семейство $\{R_i^{\mathfrak{A}} \mid i \in I\}$, состоящее из $\theta\,(i)$-местных отношений $R_i^{\mathfrak{A}}$ на A для каждого $i \in I$. Под *n-местным отношением* (или *предикатом*) на A мы понимаем любое подмножество A^n (декартова произведения n экземпляров A). Если $a_1, \ldots, a_n \in A$, то будем писать $R\,(a_1, \ldots, a_n)$ вместо $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R$.

(iii) Семейство $\{f_j^{\mathfrak{A}} \mid j \in J\}$, такое, что $f_j^{\mathfrak{A}}$ есть $\psi(j)$-местная функция на A для каждого $j \in J$. Под *n-местной функцией* на A понимаем функцию из A^n в A.

(iv) Подмножество $\{c_k^{\mathfrak{A}} \mid k \in K\}$ множества A, называемое множеством его *выделенных элементов*.

Алгебраические системы будут обозначаться через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, . . ., а соответствующие носители — через A, B, C, . . .; для алгебраической системы $\mathfrak{A}$ удобно употреблять запись

$$\langle A;\ R_i^{\mathfrak{A}},\ f_j^{\mathfrak{A}},\ c_k^{\mathfrak{A}}\rangle_{i\in I,\ j\in J,\ k\in K}.$$

Возможен случай, когда $i \neq j$, но $R_i^{\mathfrak{A}} = R_j^{\mathfrak{A}}$, то же самое допускается для $f_j^{\mathfrak{A}}$ и $c_k^{\mathfrak{A}}$. *Мощностью* системы $\mathfrak{A}$ называется мощность ее носителя A.

Рассмотрим алгебраическую систему

$$\mathfrak{A} = \langle A;\ +,\ \cdot,\ -,\ ^{-1},\ 0,\ 1\rangle,$$

где $+$ и $\cdot$ являются двуместными функциями на A, $-$, $^{-1}$ являются одноместными функциями на A, а 0 и 1 — выделенными элементами множества A. Любое поле можно рассматривать как систему той же сигнатуры, что и эта система $\mathfrak{A}$. Однако $\mathfrak{A}$ может не быть полем, так как ее отношения, функции и выделенные элементы не обязательно удовлетворяют аксиомам поля.

§ 3. МОНОМОРФИЗМЫ И ПОДСИСТЕМЫ

Мономорфизмом m системы $\mathfrak{A}$ в систему $\mathfrak{B}$, символически

$$m\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B},$$

называется взаимно однозначное отображение m множества A на подмножество $m[A]$ множества B, удовлетворяющее условиям

(i) $R_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R_i^{\mathfrak{B}}(ma_1, \ldots, ma_n)$ для всех $i \in I$,

(ii) $mf_j^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f_j^{\mathfrak{B}}(ma_1, \ldots, ma_n)$ для всех $j \in J$,

(iii) $mc_k^{\mathfrak{A}} = c_k^{\mathfrak{B}}$ для всех $k \in K$.

При этом предполагается, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют одну и ту же сигнатуру. Как правило, две системы, о которых идет речь в одном рассуждении, имеют одну и ту же сигнатуру.

Мономорфизм между полями есть не что иное, как гомоморфизм.

Система $\mathfrak{A}$ называется *подсистемой* системы $\mathfrak{B}$, символически

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B},$$

если $A \subset B$ и тождественное *вложение* $i_A: A \to B$ есть мономорфизм ($i_A a = a$ для всех $a \in A$). Если $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, то говорят, что $\mathfrak{B}$ *расширяет* (или является *расширением*) $\mathfrak{A}$. *Изоморфизмом* называется мономорфизм «на» (т. е. $m[A] = B$). Изоморфизм обозначается через $m: \mathfrak{A} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$. Мономорфизм системы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ называется *эндоморфизмом*. Эндоморфизм системы $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$ называется *автоморфизмом*.

«Объектами» теории моделей являются алгебраические системы. «Морфизмами» теории моделей первого порядка являются не мономорфизмы, потому что они сохраняют лишь «атомные» свойства систем, а *элементарные мономорфизмы*, которые сохраняют все свойства первого порядка. Пусть Q — поле рациональных чисел, $\overline{Q}$ — поле алгебраических чисел. Тождественное вложение $i_Q: Q \to \overline{Q}$ является мономорфизмом, но не элементарным мономорфизмом, так как квадратный корень из -1 существует в $\overline{Q}$, но не существует в Q. В § 9 будет показано, что каждый мономорфизм между алгебраически замкнутыми полями является элементарным.

§ 4. ЯЗЫК ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Каждой сигнатуре τ сопоставляется *язык первого порядка* $\mathfrak{L}_\tau$. Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры τ, то каждое предложение языка $\mathfrak{L}_\tau$ имеет определенное истинностное значение в $\mathfrak{A}$. *Алфавит* языка $\mathfrak{L}_\tau$ состоит из следующих символов:

(i) переменные $x_1, x_2, x_3, \ldots$;

(ii) логические связки: $\neg$ (не), & (и), E (существует) и $=$ (равно);

(iii) $\theta(i)$-местные предикатные символы R_i для каждого $i \in I$;

(iv) $\psi(j)$-местные функциональные символы f_j для каждого $j \in J$;

(v) предметные константы c_k для каждого $k \in K$.

Термы языка $\mathfrak{L}_\tau$ строятся с помощью двух правил:

(i) все переменные и предметные константы являются термами;

(ii) если f_j есть n-местный функциональный символ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f_j(t_1, \ldots, t_n)$ — тоже терм.

Константным термом называется терм, не содержащий переменных.

Атомные формулы языка $\mathfrak{L}_\tau$ определяются следующим образом:

(i) если t_1 и t_2 — термы языка $\mathfrak{L}_\tau$, то $t_1 = t_2$ есть атомная формула, называемая равенством;

(ii) если R_i есть n-местный предикатный символ, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $R_i(t_1, \ldots, t_n)$ — атомная формула.

Формулы языка $\mathfrak{L}_\tau$ строятся с помощью таких правил:

(i) каждая атомная формула является формулой;

(ii) если F и G — формулы, то $\neg F$, $(F \& G)$ и $(\mathrm{E}x_i)\, F$ — тоже формулы.

Символы $\vee$ (или), $\rightarrow$ (влечет), $\leftrightarrow$ (эквивалентно), (x_i) (для всех x_i) используются для сокращения записи:

(i) $(F \vee G)$ для $\neg(\neg F \& \neg G)$;
(ii) $(F \rightarrow G)$ для $(\neg F \vee G)$;
(iii) $(F \leftrightarrow G)$ для $((F \rightarrow G) \& (G \rightarrow F))$;
(iv) $(x_i)\, F$ для $\neg(\mathrm{E}x_i)\, \neg F$.

Понятие *свободной переменной* в формуле определяется по индукции. Индукция ведется по числу шагов, используемых при построении формулы:

(i) если F — атомная формула и x_i входит в F, то x_i является свободной переменной в F;

(ii) если x_i — свободная переменная в формуле F и $j \neq i$, то x_i есть свободная переменная в $(\mathrm{E}x_j)\, F$;

(iii) если x_i — свободная переменная в формуле F, то x_i является свободной переменной в $\neg F$ и $(F \& G)$.

Короче говоря, единственный способ избавиться от свободной переменной x_i в F — это приписать слева к F приставку $(\mathrm{E}x_i)$.

Стандартное соглашение относительно свободных переменных состоит в следующем: запись $G(x_{i1}, \ldots, x_{in})$ означает, что любая свободная переменная формулы G есть одна из переменных $x_{i1}, \ldots, x_{in}$. Удобно также опускать нижние индексы и использовать $x, y, z, \ldots$ в качестве переменных.

Формула без свободных переменных называется *предложением*.

Формула называется *бескванторной*, если она не содержит выражений вида $(\mathrm{E}x)$ (существует x) или (y) (для всех y).

Мощностью языка $\mathfrak{L}_\tau$ называется мощность множества всех его формул. Ясно, что

$$\operatorname{card} \mathfrak{L}_\tau = \max(\omega, \operatorname{card} I, \operatorname{card} J, \operatorname{card} K).$$

Если $\mathfrak{A}$ есть система сигнатуры τ, то говорят, что язык $\mathfrak{L}_\tau$ *лежит в основе* системы $\mathfrak{A}$. Часто в тексте мы не будем различать язык $\mathfrak{L}_\tau$ и сигнатуру τ.

§ 5. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Пусть $\tau = \langle I, J, K, \theta, \psi \rangle$ — сигнатура системы $\mathfrak{A}$. Предположим, что $K \cap A = \varnothing$. Обозначим через τA сигнатуру

$$\langle I, J, K \cup A, \theta, \psi \rangle.$$

Язык $\mathfrak{L}_{\tau A}$ получается из языка $\mathfrak{L}_\tau$ добавлением новой предметной константы $\boldsymbol{a}$ для каждого $a \in A$. Любую систему $\mathfrak{B}$ сигнатуры τ можно расширить до системы $\langle \mathfrak{B}, b_a \rangle_{a \in A}$ сигнатуры τA, выбрав для каждого $a \in A$ элемент $b_a \in B$. Отображение $\sigma \boldsymbol{a} = a$ может быть единственным образом продолжено на множество всех константных термов языка $\mathfrak{L}_{\tau A}$:

(i) $\sigma \boldsymbol{a} = a$;

(ii) $\sigma \boldsymbol{c}_k = c_k^{\mathfrak{A}}$;

(iii) $\sigma f_j(t_1, \ldots, t_n) = f_j^{\mathfrak{A}}(\sigma t_1, \ldots, \sigma t_n)$, где t_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — константные термы.

Пусть H — предложение языка $\mathfrak{L}_{\tau A}$. Отношение $\mathfrak{A} \models H$ (читается: «H *истинно* в $\mathfrak{A}$») определяется индукцией по числу шагов, нужных для построения H:

(i) $\mathfrak{A} \models t_1 = t_2 \Leftrightarrow \sigma t_1 = \sigma t_2$;

(ii) $\mathfrak{A} \models R_i(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow R_i^{\mathfrak{A}}(\sigma t_1, \ldots, \sigma t_n)$;

(iii) $\mathfrak{A} \models F \& G \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models F$ и $\mathfrak{A} \models G$;

(iv) $\mathfrak{A} \models \neg F \Leftrightarrow$ неверно, что $\mathfrak{A} \models F$;

(v) $\mathfrak{A} \models (\mathrm{E}x_i) F(x_i) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models F(\boldsymbol{a})$ для некоторого $a \in A$.

Если предложение H не истинно в $\mathfrak{A}$, то оно называется *ложным* в $\mathfrak{A}$.

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — формула языка $\mathfrak{L}_\tau$, и пусть $a_1, \ldots, a_n \in A$. Говорим, что n-ка $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ *удовлетворяет* (или *реализует*) $F(x_1, \ldots, x_n)$ в $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A} \models F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$.

Универсальным замыканием формулы $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется формула $(x_1) \ldots (x_n) F(x_1, \ldots, x_n)$. Формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется *истинной* в $\mathfrak{A}$, если ее универсальное замыкание истинно в $\mathfrak{A}$.

Система $\mathfrak{A}$ называется *элементарно эквивалентной* системе $\mathfrak{B}$, символически

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B},$$

если $\mathfrak{A} \models F \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models F$ для любого предложения F языка $\mathfrak{L}_\tau$. Тарский высказал идею, что классификация алгебраических систем по элементарной эквивалентности предпочтительнее классификации по изоморфизму. В § 9 будет показано, что любые два алгебраически замкнутых поля одной и той же характеристики элементарно эквивалентны. Понятие элементарной эквивалентности абсолютно в смысле Гёделя [1], в то же время понятие изоморфизма абсолютным не является.

§ 6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МОНОМОРФИЗМЫ

Пусть m — отображение множества A в B. Говорят, что m есть *элементарный мономорфизм*, символически

$$m\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B},$$

если выполнено условие

$$\mathfrak{A} \models F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models F(m\boldsymbol{a}_1, \ldots, m\boldsymbol{a}_n)$$

для любой формулы $F(x_1, \ldots, x_n)$ языка $\mathfrak{L}_\tau$ и любой последовательности $a_1, \ldots, a_n \in A$. Заметим, что любой элементарный мономорфизм является мономорфизмом. (В § 9 будет показано, что каждый мономорфизм между алгебраически замкнутыми полями одной характеристики является элементарным, а в § 17 — что каждый мономорфизм между вещественно замкнутыми полями является элементарным.) Отметим, что m — элементарный мономорфизм тогда и только тогда, когда

$$\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A} \equiv \langle \mathfrak{B}, ma \rangle_{a \in A}.$$

Предложение 6.1. *Пусть* $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *и* $g\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$. (i) *Если* f *и* g *— элементарные мономорфизмы, то* gf *— элементарный мономорфизм.* (ii) *Если* g *и* gf *— элементарные мономорфизмы, то* f *— элементарный мономорфизм.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} \models F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$. Тогда $\mathfrak{C} \models F(\boldsymbol{gfa}_1, \ldots, \boldsymbol{gfa}_n)$, так как gf элементарен. Но тогда $\mathfrak{B} \models F(\boldsymbol{fa}_1, \ldots, \boldsymbol{fa}_n)$, так как g элементарен. □

Система $\mathfrak{A}$ называется *элементарной подсистемой* системы $\mathfrak{B}$, символически

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B},$$

если тождественное вложение $i_A\colon A \to B$ является элементарным мономорфизмом. Если $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B}$ называется *элементарным расширением* системы $\mathfrak{A}$. Расширение называется *собственным*, если $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$.

§ 7. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Пусть S — множество предложений некоторого языка $\mathfrak{L}_\tau$, и пусть F — формула языка $\mathfrak{L}_\tau$. Отношение «F есть логическое следствие S», символически

$$S \vdash F,$$

определяется следующим образом:

(i) если $F \in S$, то $S \vdash F$;

(ii) если F есть логическая аксиома, то $S \vdash F$;

(iii) если $S \vdash F_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и если F получается в результате применения некоторого логического правила к последовательности $F_1, \ldots, F_n$, то $S \vdash F$.

Аксиомы и правила логики первого порядка с равенством можно найти в любой стандартной книге по математической логике. Они согласованы со здравым смыслом, поэтому должно быть ясно, что они обладают всеми приводимыми ниже свойствами. Если $S \vdash F$, то $S_0 \vdash F$ для некоторого конечного подмножества $S_0 \subset S$. Финитарный характер отношения следования $\vdash$ неоднократно используется в доказательстве основной теоремы существования (7.1).

Множество S называется *совместным* или *непротиворечивым*, если среди его логических следствий нет ни одного предложения вида $F \& \neg F$. Система $\mathfrak{A}$ называется *моделью* для S, символически

$$\mathfrak{A} \models S,$$

если все члены S истинны в $\mathfrak{A}$. Если S имеет модель, то S совместно, так как каждое предложение, которое является логическим следствием S, истинно в любой модели для S.

Теорема 7.1. [1]) *Если S есть совместное множество предложений, то S имеет модель мощности* $\leqslant \max(\omega, \operatorname{card} S)$.

Доказательство (в стиле Генкина). Пусть $\varkappa = \max(\omega, \operatorname{card} S)$. Пусть $\{c_\delta \mid \delta < \varkappa\}$ — множество предметных констант, не входящих в формулы из множества S. Обозначим через $\mathfrak{L}$ язык, порожденный примитивными символами, входящими в формулы из S, и константами c_δ. Пусть $\{F_\delta(x) \mid \delta < \varkappa\}$ есть список всех формул языка $\mathfrak{L}$ с единственной свободной переменной x. Выберем функцию $h\colon \varkappa \to \varkappa$, такую, что

(i) $\gamma < \delta$ влечет $h\gamma < h\delta$;

(ii) $\gamma \leqslant \delta$ влечет, что $c_{h\delta}$ не входит в $F_\gamma(x)$.

Положим $S_\delta = S \cup \{(\mathrm{E}x)\, F_\gamma(x) \to F_\gamma(c_{h\gamma}) \mid \gamma < \delta\}$.

---

[1]) Теорема 7.1 для счетной теории доказана Гёделем в 1931 г. В самом общем виде она доказана в 1933 г. А. И. Мальцевым, который дал многочисленные применения этой теоремы в алгебре. Приведенное здесь доказательство предложено Генкином в 1946 г. Вопрос о роли теоремы 7.1 в теории моделей и о приоритете обсуждался в докладе Робинсона [3] на Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки в Станфорде (США) в 1960 г. и в работе Вота [2].— *Прим. ред.*

Заметим, что $c_{h\delta}$ не входит в S_δ. Совместность S_δ для каждого $\delta < \varkappa$ устанавливается трансфинитной индукцией. S_0 совместно, так как $S_0 = S$. Если λ — предельный ординал и S_δ совместно для каждого $\delta < \lambda$, то

$$S_\lambda = \bigcup \{S_\delta \mid \delta < \lambda\}$$

совместно благодаря финитарному характеру отношения следования $\vdash$. Зафиксируем δ и предположим, что $S_{\delta+1}$ не совместно. Докажем тогда, что S_δ не совместно:

$$S_{\delta+1} \vdash H \,\&\, \neg H,$$
$$S_\delta \vdash [(\mathrm{E}x)\, F_\delta(x) \to F_\delta(c_{h\delta})] \to [H \,\&\, \neg H],$$
$$S_\delta \vdash (\mathrm{E}x)\, F_\delta(x) \,\&\, \neg F_\delta(c_{h\delta}).$$

Так как $c_{h\delta}$ не входит в S_δ, то при выводе логических следствий из S_δ константу $c_{h\delta}$ можно заменить на любую переменную y, не участвующую в выводе. Таким образом,

$$S_\delta \vdash (\mathrm{E}x)\, F_\delta(x) \,\&\, \neg F_\delta(y).$$

Так как S_δ является множеством предложений, то универсальное замыкание любого следствия из S_σ также является следствием множества S_δ:

$$S_\delta \vdash (\mathrm{E}x) F_\delta(x) \,\&\, (y)\, \neg F_\delta(y).$$

Пусть $S_\varkappa = \bigcup \{S_\delta \mid \delta < \varkappa\}$. Тогда $S_\varkappa$ совместно, так как каждое S_δ совместно и $\varkappa$ есть предельный ординал. Пусть T — максимальное совместное множество предложений, содержащее $S_\varkappa$. Существование T следует из леммы Цорна и финитарного характера отношения $\vdash$. Пусть F — произвольное предложение языка $\mathfrak{L}$. Так как T совместно, то либо $T \cup \{F\}$, либо $T \cup \{\neg F\}$ также совместно. Так как T максимально, то $F \in T$ или $\neg F \in T$. Конечно, каждое следствие множества T принадлежит T.

Модель $\mathfrak{A}$ системы S строится с помощью множества T. Для каждой предметной константы c языка $\mathfrak{L}$ полагаем

$$[c] = \{d \mid c = d \in T\}.$$

Берем $\{[c] \mid c \in \mathfrak{L}\}$ в качестве носителя A системы $\mathfrak{A}$. Отношения, функции и выделенные элементы системы $\mathfrak{A}$ определяем следующим образом:

(i) $R_i^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) \Leftrightarrow R_i(c_1, \ldots, c_n) \in T$;

(ii) $f_j^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f_j(c_1, \ldots c_n) = c \in T;$

(iii) $c_k^{\mathfrak{A}} = [c_k]$.

Установим теперь, что $\mathfrak{A} \models S$. Для этого достаточно показать, что для любого предложения F языка $\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{A} \models F \Leftrightarrow F \in T.$$

Доказательство ведется индукцией по числу шагов в построении F.

(i). Пусть t — константный терм языка $\mathfrak{L}$. Для некоторого $\delta < \varkappa$ $F_\delta(x)$ есть $t = x$. Тогда $t = c_{h\delta} \in T$. Поэтому для каждого константного терма t_i языка $\mathfrak{L}$ существует предметная константа c_i языка $\mathfrak{L}$, такая, что $[t_i] = [c_i]$. Следовательно,

$\mathfrak{A} \models R_i(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow R_i^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R_i(c_1, \ldots, c_n) \in T \Leftrightarrow R_i(t_1, \ldots, t_n) \in T.$

(ii) $\mathfrak{A} \models \neg F \Leftrightarrow F \notin T \Leftrightarrow \neg F \in T.$

(iii) $\mathfrak{A} \models F \& G \Leftrightarrow [\mathfrak{A} \models F$ и $\mathfrak{A} \models G] \Leftrightarrow F \& G \in T.$

(iv) Допустим, что $\mathfrak{A} \models (\mathrm{E}x) F_\delta(x)$. Тогда $\mathfrak{A} \models F_\delta(c)$ для некоторого $[c] \in A$. Таким образом, $F_\delta(c) \in T$ и $(\mathrm{E}x) F_\delta(x) \in T$. Допустим теперь, что $(\mathrm{E}x) F_\delta(x) \in T$. Тогда $F_\delta(c_{h\delta}) \in T$, $\mathfrak{A} \models F_\delta(c_{h\delta})$ и $\mathfrak{A} \models (\mathrm{E}x) F_\delta(x)$. □

Теорема 7.1 объединяет результаты, принадлежащие главным образом [1]) Гёделю, Сколему, Тарскому. Доказательство теоремы 7.1 проведено здесь методом Генкина — методом, ставшим центральным в теории моделей. Возможно, это произошло потому, что способ построения модели по Генкину принимает в расчет окончательные следствия решений, полученных на промежуточных шагах построения.

Теорией T называется совместное множество предложений. Запись $T_1 \subset T_2$ означает, что каждое логическое следствие из T_1 является также логическим следствием из T_2. Запись $T_1 = T_2$ означает что $T_1 \subset T_2$ и $T_2 \subset T_1$. Теория T называется *полной*, если $T \vdash F$ или $T \vdash \neg F$ для любого предложения F в языке теории T. По теореме 7.1 теория T полна тогда и только тогда, когда все модели для T элементарно эквивалентны. *Теория системы* $\mathfrak{A}$,

[1]) См. примечание на стр. 21 .— *Прим. перев.*

обозначаемая через $T\mathfrak{A}$, — это множество всех предложений языка $\mathfrak{L}_\tau$, истинных в $\mathfrak{A}$, где τ — сигнатура системы $\mathfrak{A}$. Очевидно, $T\mathfrak{A}$ полна для любой системы $\mathfrak{A}$.

Следствие 7.2 (компактность)[1]. *Пусть S — такое множество предложений, что каждое конечное подмножество множества S имеет бесконечную модель. Тогда S имеет модель мощности $\varkappa$ для каждого $\varkappa \geqslant \max(\omega, \operatorname{card} S)$.*

Доказательство. Пусть $\{c_\delta \mid \delta < \varkappa\}$ — множество предметных констант, не входящих в предложения из S. Положим

$$W = S \cup \{c_\delta \neq c_\gamma \mid \delta < \gamma < \varkappa\}.$$

Если V — конечное подмножество в W, то оно совместно, так как $V \cap S$ имеет бесконечную модель. По теореме 7.1 W имеет модель $\mathfrak{A}$ мощности $\leqslant \varkappa$. Но мощность модели $\mathfrak{A}$ не может быть меньше, чем $\varkappa$, так как различным c_δ должны соответствовать различные элементы системы $\mathfrak{A}$. □

Следствие 7.3 (Сколем — Лёвенгейм). *Пусть $\mathfrak{A}$ — бесконечная система сигнатуры τ. Тогда $\mathfrak{A}$ имеет собственное элементарное расширение мощности $\varkappa$ для любого $\varkappa \geqslant \max(\operatorname{card} \mathfrak{A}, \operatorname{card} \mathfrak{L}_\tau)$.*

Доказательство. Пусть T — полная теория системы $\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A}$. Модели теории T совпадают с элементарными расширениями системы $\mathfrak{A}$. Возьмем предметную константу b, не входящую в T. Положим

$$S = T \cup \{b \neq a \mid a \in A\}.$$

Если $S_0 \subset S$ и S_0 конечно, то $\mathfrak{A}$ можно сделать моделью для S_0, сопоставляя константе b некоторый элемент множества A, не упоминавшийся в S_0. По 7.2 S имеет модель $\mathfrak{B}$ мощности $\varkappa$. Пусть $m\colon A \to B$ — такое отображение:

$$ma = a^{\mathfrak{B}}.$$

Тогда $m\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ элементарно и $b^{\mathfrak{B}} \in B - m[A]$. □

---

[1]) Это следствие впервые доказано А. И. Мальцевым.— *Прим. ред.*

Теоремы 7.1, 7.2 и 7.3 могут навести на мысль (но лишь того, кто склонен к поспешным заключениям), что методы теории моделей применимы только для построения алгебраических систем, допускающих простое описание. Кажется, что если требуется система со свойством P, то нужно сначала найти теорию T, все модели которой обладают свойством P, а затем применить теорему 7.1. Однако это предположение ошибочно. Теория моделей, несмотря на ее огромную общность, имеет более тонкие методы, чем прямое применение теоремы 7.1. Если бы это было не так, то предмет был бы слишком скучным. Один такой метод состоит в том, что многократно применяется теорема 7.3 для построения элементарной прямой системы (см. § 10), а затем используется теорема 10.3.

Теория полей (TF) состоит из следующих предложений:

(1) $(x)(y)(z)\ [(x + y) + z = x + (y + z)]$;
(2) $(x)\ [x + 0 = x]$;
(3) $(x)\ [x + (-x) = 0]$;
(4) $(x)\ (y)\ [x + y = y + x]$;
(5) $(x)\ (y)\ (z)\ [(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)]$;
(6) $(x)\ [x \cdot 1 = x]$;
(7) $(x)\ [x \neq 0 \rightarrow x \cdot x^{-1} = 1]$;
(8) $(x)\ (y)\ [x \cdot y = y \cdot x]$;
(9) $(x)\ (y)\ (z)\ [x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)]$;
(10) $0 \neq 1$.

Модель для TF — не что иное, как поле.

Упражнение 7.4 (Робинсон). Пусть F — предложение языка теории полей. Пусть F истинно в каждом поле характеристики 0. Показать, что существует такое число n, что F истинно в каждом поле большей, чем n, характеристики.

Упражнение 7.5. Пусть T — теория, не имеющая бесконечных моделей. Показать, что существует такое число n, что каждая модель для T имеет мощность меньше, чем n.

Упражнение 7.6 (Вот). Пусть T — счетная теория, не имеющая конечных моделей, и $\varkappa$ — бесконечный кардинал, такой, что любые две модели для T мощности $\varkappa$ изоморфны. Показать, что теория T полна.

Упражнение 7.7. Показать, что теория T полна тогда и только тогда, когда для любой пары $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ моделей для T существуют $\mathfrak{C}$, $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{C}$ и $g\colon \mathfrak{B} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{C}$.

Упражнение 7.8. Придумать элементарно эквивалентные линейные порядки $\langle A, \leqslant \rangle$ и $\langle B, \leqslant \rangle$, такие, что $\langle A, \leqslant \rangle$ — полный порядок, а $\langle B, \leqslant \rangle$ — нет.

Упражнение 7.9 (Артин). Пусть $\mathfrak{A}$ — поле характеристики 0, а $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — алгебраические расширения $\mathfrak{A}$. Допустим, что каждый многочлен от одной переменной с коэффициентами из $\mathfrak{A}$ имеет корень в $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда он имеет корень в $\mathfrak{C}$. Показать, что $\mathfrak{B}$ изоморфно $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$. (Допущение, что $\mathfrak{A}$ имеет характеристику 0, не является необходимым (Акс).)

§ 8. МОДЕЛЬНАЯ ПОЛНОТА

Понятие модельной полноты появилось в связи с теоремой Гильберта о нулях (9.2). Теория T называется *модельно полной* (Робинсон), если каждый мономорфизм между моделями для T является элементарным. Под *диаграммой* $D\mathfrak{A}$ системы $\mathfrak{A}$ мы понимаем множество всех атомных предложений и отрицаний атомных предложений, истинных в $\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A}$. (Если $\mathfrak{A}$ — мультипликативная группа, то $D\mathfrak{A}$ содержит ту же информацию, что и таблица умножения для $\mathfrak{A}$.) Класс моделей для $D\mathfrak{A}$ совпадает с классом расширений системы $\mathfrak{A}$. *Экзистенциальной формулой* называется формула вида

$$(\mathrm{E}y_1) \ldots (\mathrm{E}y_m)\, H,$$

где $m \geqslant 0$ и H не содержит кванторов.

Предложение 8.1. *Если $G(x_1, \ldots, x_n)$ — экзистенциальная формула, $\mathfrak{C} \models G(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ и $g\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, то $\mathfrak{D} \models G(g\boldsymbol{c}_1, \ldots, g\boldsymbol{c}_n)$.*

Доказательство. Пусть $G(x_1, \ldots, x_n)$ — формула

$$(\mathrm{E}y_1) \ldots (\mathrm{E}y_m)\, H(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

где H не содержит кванторов. Тогда

$$\mathfrak{C} \models H(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n, \boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_m)$$

для некоторых $d_1, \ldots, d_m \in C$. Но в этом случае

$$\mathfrak{D} \models H(\boldsymbol{gc}_1, \ldots, \boldsymbol{gc}_n, \boldsymbol{gd}_1, \ldots, \boldsymbol{gd}_m),$$

а значит,

$$\mathfrak{D} \models G(\boldsymbol{gc}_1, \ldots, \boldsymbol{gc}_n). \quad \square$$

Теорема 8.2 (Робинсон). *Для любой теории T следующие условия эквивалентны:*

(i) *T модельно полна;*

(ii) *$T \cup D\mathfrak{A}$ есть полная теория для каждой модели $\mathfrak{A}$ теории T;*

(iii) *для любой формулы F существует экзистенциальная формула G, такая, что $T \vdash F \leftrightarrow G$.*

Доказательство. Пусть T модельно полна и $\mathfrak{A} \models T$. Пусть $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — модели для $T \cup D\mathfrak{A}$. Покажем, что $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2$; из 7.1 тогда будет следовать, что $T \cup D\mathfrak{A}$ полна. Так как $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1,2)$ — модель для $T \cup D\mathfrak{A}$, существует мономорфизм $f_i: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$. Так как T модельно полна, f_i является элементарным. Следовательно,

$$\mathfrak{B}_1 \models F(\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_1\boldsymbol{a}_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B}_2 \models F(\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_2\boldsymbol{a}_n).$$

Предположим теперь, что выполнено условие (iii) и $g: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ — мономорфизм между моделями для T. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — формула в языке теории T. По условию (iii) существует экзистенциальная формула $G(x_1, \ldots, x_n)$, такая, что

$$T \vdash F(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow G(x_1, \ldots, x_n).$$

Допустим, что $\mathfrak{C} \models F(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$. Тогда $\mathfrak{C} \models G(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$, $\mathfrak{D} \models G(\boldsymbol{gc}_1, \ldots, \boldsymbol{gc}_n)$ по 8.1, поэтому $\mathfrak{D} \models F(\boldsymbol{gc}_1, \ldots, \boldsymbol{gc}_n)$. Таким образом, из (iii) следует, что T модельно полна.

Наконец, допустим, что выполнено (ii), и покажем, что выполняется также (iii). Пусть S получается из T добавлением следующих предложений:

(1) $F(\boldsymbol{c})$, где $\boldsymbol{c}$ не входит в T.

(2) $\neg K(\boldsymbol{c})$ для каждой экзистенциальной формулы $K(x)$, такой, что $T \vdash K(x) \to F(x)$.

Допустим для доказательства от противного, что S совместно. По 7.1 S имеет модель $\mathfrak{A}$. Ясно, что

$\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A} \models F(c)$ для некоторого $c \in A$. Из (ii) следует, что $T \cup D\mathfrak{A} \vdash F(c)$. Ввиду финитарного характера отношения $\vdash$ получаем

$$T \vdash Q(c, a_1, \ldots, a_m) \to F(c),$$

где $Q(c, a_1, \ldots, a_m)$ есть конъюнкция конечного числа предложений из $D\mathfrak{A}$. Так как $c, a_1, \ldots, a_m$ — предметные константы, не входящие в T, их можно заменить на переменные. Поэтому

$$T \vdash Q(x, x_1, \ldots, x_m) \to F(x),$$

где Q не содержит кванторов. Таким образом, $T \vdash K(x) \to F(x)$ и $\mathfrak{A} \models K(c)$, где $K(x)$ — экзистенциальная формула

$$(\mathrm{E}x_1) \ldots (\mathrm{E}x_m)\, Q(x, x_1, \ldots, x_m).$$

Но из определения S следует, что $\mathfrak{A} \models \neg K(c)$.

Несовместность S означает, что должны существовать экзистенциальные формулы $K_1(x), \ldots, K_n(x)$, такие, что

$$T \vdash K_i(x) \to F(x) \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

$$T \vdash F(x) \to K_1(x) \vee \ldots \vee K_n(x).$$

Пусть $G(x)$ есть $K_1(x) \vee \ldots \vee K_n(x)$. Тогда $T \vdash F(x) \leftrightarrow G(x)$, и $G(x)$ логически эквивалентна некоторой экзистенциальной формуле. □

Для интуитивного понимания последней части доказательства заметим следующее. Естественно было бы в качестве G взять «бесконечную дизъюнкцию» всех экзистенциальных формул, из которых вытекает F. Теорема 7.1 сводит «бесконечную дизъюнкцию» к конечной дизъюнкции. В случае возможности такого сведения бесконечного к конечному говорят о феномене компактности.

Упражнение 8.3 [1]). Пусть T — теория, F — предложение и $\{G_i \mid i \in I\}$ — множество предложений. Пусть для каждой модели $\mathfrak{A}$ для T существует такое $i \in I$, что $\mathfrak{A} \models F \to G_i$. Показать, что существует конечное подмножество $J \subset I$, такое, что $T \vdash F \to \bigvee \{G_i \mid i \in J\}$.

---

[1]) Результат А. И. Мальцева, см. примечание на стр. 21 .— *Прим. ред.*

Упражнение 8.4 (Робинсон). Пусть T модельно полна и имеет модель, вложимую в каждую модель для T. Показать, что T полна.

§ 9. МОДЕЛЬНАЯ ПОЛНОТА АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫХ ПОЛЕЙ

Теория алгебраически замкнутых полей (ACF) есть расширение теории полей (TF) с помощью требования, что каждый многочлен, не являющийся константой, имеет корень. Теория ACF получается из TF добавлением предложения

$$(y_1) \ldots (y_n)\,(\mathrm{E}x)\,[x^n + y_1x^{n-1} + \ldots \\ \ldots + y_{n-1}x + y_n = 0]$$

для каждого $n > 0$.

Теорема 9.1 (Робинсон). *Теория* ACF *модельно полна.*

Доказательство. Пусть $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — мономорфизм алгебраически замкнутых полей. По 7.3 существуют $g\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{A}_1$ и $h\colon \mathfrak{B} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B}_1$, такие, что card $\mathfrak{A}_1 =$ $=$ card $\mathfrak{B}_1 >$ card $\mathfrak{B}$. Если существует изоморфизм $k\colon \mathfrak{A}_1 \xrightarrow{\approx} \mathfrak{B}_1$, такой, что

$$kg = hf\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_1,$$

то мономорфизм f элементарен по 6.1. Можно считать, что f, g и h — тождественные вложения. Пусть U (соответственно V) — базис трансцендентности для $\mathfrak{A}_1$ (соответственно $\mathfrak{B}_1$) над $\mathfrak{A}$. Система $\mathfrak{B}$ бесконечна, значит, $\mathfrak{B}_1$ несчетна; следовательно, card $U =$ card V. Пусть $k\colon U \to$ $\to V$ — взаимно однозначное соответствие между U и V. Расширим k до

$$k_1\colon \mathfrak{A}\,(U) \to \mathfrak{A}\,(V)$$

так, что k_1 тождественно на $\mathfrak{A}$. Можно расширить k_1 до $k_2\colon \mathfrak{A}_1 \xrightarrow{\approx} \mathfrak{B}_1$. так как $\mathfrak{A}_1$ (соответственно $\mathfrak{B}_1$) есть алгебраическое замыкание поля $\mathfrak{A}\,(U)$ (соответственно $\mathfrak{A}\,(V)$). □

Приведенное выше доказательство использует тот довольно специальный факт, что любые два несчетных алгебраически замкнутых поля одной и той же мощности и характеристики изоморфны, поэтому мало надежды применить его в общей ситуации. В частности, его нельзя использовать для доказательства модельной полноты теории вещественно замкнутых полей. Модельная полнота этой теории будет доказана в § 17 фактически универсальным методом, использующим насыщенные алгебраические системы.

Следствие 9.2 (Гильберт). *Пусть S — конечная система полиномиальных уравнений и неравенств от нескольких неизвестных с коэффициентами из поля $\mathfrak{A}$. Если S имеет решение в некотором поле, расширяющем $\mathfrak{A}$, то она имеет решение в алгебраическом замыкании поля $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть τ — сигнатура системы $\mathfrak{A}$. Существует предложение H языка $\mathfrak{L}_{\tau A}$, такое, что для каждого поля $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ система S имеет решение в $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \models H$. По 9.1 каждое алгебраически замкнутое расширение $\mathfrak{A}$ является элементарным расширением алгебраического замыкания $\mathfrak{A}$. □

Формула F называется *универсально экзистенциальной*, если она имеет вид

$$(x_1) \ldots (x_m)\,(\mathrm{E}y_1) \ldots (\mathrm{E}y_n)\,G,$$

где $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ и G не содержит кванторов. Теория T называется *универсально экзистенциальной*, если существует теория W, такая, что $T = W$ и каждый член W является универсально экзистенциальным предложением. Теория ACF является универсально экзистенциальной; этот факт не кажется случайным, если взглянуть на него в свете утверждений 9.1 и 9.3.

Предложение 9.3 (Робинсон). *Если T модельно полна, то она универсально экзистенциальна* (ср. с упражнением 10.5).

Доказательство. Формула называется *пренексной нормальной формулой*, если она имеет вид

$$(Q_1x_1) \ldots (Q_nx_n)\,H,$$

где H не содержит кванторов, $n \geqslant 0$ и для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $(Q_i x_i)$ обозначает либо $(\mathrm{E}x_i)$, либо (x_i). *Рангом* пренексной нормальной формулы называется число перемен кванторов, входящих в ее кванторную приставку; под переменой кванторов понимается вхождение (x) $(\mathrm{E}y)$ или $(\mathrm{E}x)$ (y). Таким образом, приставка

$$(x_1)\ (x_2)\ (\mathrm{E}x_3)\ (\mathrm{E}x_4)\ (x_5)\ (\mathrm{E}x_6)$$

имеет три перемены кванторов.

Пусть W — множество всех универсально экзистенциальных предложений, доказуемых в T. Каждая формула логически эквивалентна пренексной нормальной формуле, поэтому достаточно показать следующее: если F — пренексная нормальная формула и $T \vdash F$, то $W \vdash F$. Доказательство ведется индукцией по рангу F. Допустим, что $T \vdash F$.

(i) F есть $(x_1) \ldots (x_n)\, G$, где G имеет меньший ранг, чем F. Тогда $T \vdash G$, $W \vdash G$ и $W \vdash F$.

(ii) F есть $(\mathrm{E}x_1) \ldots (\mathrm{E}x_n)\, G$, где G имеет меньший ранг, чем F. По 8.2 $T \vdash G \leftrightarrow K$ для некоторой экзистенциальной формулы K. Формула $G \leftrightarrow K$ логически эквивалентна конъюнкции двух пренексных нормальных формул, каждая из которых имеет тот же ранг, что и G, поэтому $W \vdash G \leftrightarrow K$. Тогда $T \vdash (\mathrm{E}x_1) \ldots (\mathrm{E}x_n) K$, $W \vdash (\mathrm{E}x_1) \ldots (\mathrm{E}x_n)\, K$ и $W \vdash F$.

(iii) F имеет ранг 0. Тогда F есть логическое следствие некоторого универсально экзистенциального предложения, принадлежащего W. □

Формула называется *универсальной*, если она имеет вид

$$(x_1) \ldots (x_n)\, H,$$

где $n \geqslant 0$ и H не содержит кванторов. Теория T называется *универсальной*, если существует такая теория W, что $T = W$ и каждый член W является универсальным предложением.

Упражнение 9.4 (Лось, Тарский). Показать, что теория T универсальна тогда и только тогда, когда любая подсистема любой модели для T также является моделью для T.

Упражнение 9.5. Показать, что теория алгебраически замкнутых полей характеристики 0 полна. (Тонкое место: для полноты требуется фиксированное рациональное значение для 0^{-1}.)

§ 10. ПРЯМЫЕ ПРЕДЕЛЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Операция взятия прямых пределов используется для построения новых алгебраических систем, например насыщенных моделей ω-стабильных теорий, существование которых не вытекает непосредственно из теоремы 7.1.

Под *направленным множеством* $\langle D, \leqslant \rangle$ мы понимаем множество D с частичным порядком $\leqslant$, такое, что для любых $i, j \in D$ существует $k \in D$ со свойством $i \leqslant k$ и $j \leqslant k$. *Прямой системой* $\{\mathfrak{A}_i, m_{ij}\}$ алгебраических систем и мономорфизмов называется совокупность, состоящая из направленного множества $\langle D, \leqslant \rangle$, семейства $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in D\}$ алгебраических систем и семейства $\{m_{ij}\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_j \mid i \leqslant j \in D\}$ мономорфизмов, удовлетворяющих условиям:

(a) $m_{ii}\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_i$ — тождественный мономорфизм,

(b) $m_{ik} = m_{jk} m_{ij}$, где $i \leqslant j \leqslant k$.

Пусть $A = \bigcup \{A_i \times \{i\} \mid i \in D\}$. Если $\langle a, i \rangle, \langle b, j \rangle \in A$, то считаем $\langle a, i \rangle \sim \langle b, j \rangle$, если $m_{ik} a = m_{jk} b$ для некоторого $k \in D$. Понятно, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Обозначим через A_∞ соответствующее множество всех классов эквивалентности, а через $[a, i]$ — класс эквивалентности, содержащий $\langle a, i \rangle$.

Прямым пределом прямой системы $\langle \mathfrak{A}_i, m_{ij} \rangle$ (он обозначается через $\varinjlim \mathfrak{A}_i$ или через $\mathfrak{A}_\infty$) называется алгебраическая система с носителем A_∞. Отношение

$$R^{\mathfrak{A}_\infty}([a_1, i_1], \ldots, [a_n, i_n])$$

выполняется тогда и только тогда, когда выполнено

$$R^{\mathfrak{A}_k}(m_{i_1 k} a_1, \ldots, m_{i_n k} a_n)$$

для некоторого k, такого, что $i_t \leqslant k$ для всех t $(1 \leqslant t \leqslant$

$\leqslant n$). Функции и выделенные элементы определяются подобным же образом.

Мономорфизм

$$m_{i\infty}\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_\infty$$

определяется равенством $m_{i\infty}a = [a, i]$. Очевидно, что $m_{j\infty}m_{ij} = m_{i\infty}$ при $i \leqslant j$.

Теорема 10.1 (Тарский, Вот). *Если $\{\mathfrak{A}_i, m_{ij}\}$ — прямая система алгебраических систем и элементарных мономорфизмов, то мономорфизм $m_{i\infty}\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_\infty$ является элементарным для всех i.*

Доказательство. Достаточно показать — индукцией по числу шагов, требуемых для построения $F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ из атомных формул языка $\mathfrak{L}_{\tau A_i}$, — что для всех i

$$\mathfrak{A}_i \models F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\infty \models F(\boldsymbol{m}_{i\infty}\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_{i\infty}\boldsymbol{a}_n).$$

Интересен единственный случай, когда $F(\boldsymbol{a})$ есть $(\mathrm{E}x)\, G(x, \boldsymbol{a})$. Предположим, что $\mathfrak{A}_\infty \models (\mathrm{E}x)\, G(x, \boldsymbol{m}_{i\infty}\boldsymbol{a})$. Тогда

$$\mathfrak{A}_\infty \models G(\boldsymbol{m}_{j\infty}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{m}_{i\infty}\boldsymbol{a})$$

для некоторого $j \in D$ и $b \in A_j$. Выберем $k \in D$, такое, что $i \leqslant k$ и $j \leqslant k$. Тогда

$$\mathfrak{A}_\infty \models G(\boldsymbol{m}_{k\infty}\boldsymbol{m}_{jk}\boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{m}_{k\infty}\boldsymbol{m}_{ik}\boldsymbol{a}).$$

По индуктивному предположению $\mathfrak{A}_k \models G(\boldsymbol{m}_{jk}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{m}_{ik}\boldsymbol{a})$, а значит, $\mathfrak{A}_k \models (\mathrm{E}x)\, G(x, \boldsymbol{m}_{ik}\boldsymbol{a})$. Но тогда $\mathfrak{A}_i \models (\mathrm{E}x)\, G(x, \boldsymbol{a})$, так как m_{ik} элементарно. □

В следующем предложении утверждается, что $\varinjlim \mathfrak{A}_i$ обладает свойством универсальности, относящимся к прямым пределам в общей ситуации параграфа 25.

Предложение 10.2. *Пусть $\{\mathfrak{A}_i, m_{ij}\}$ — прямая система алгебраических систем и мономорфизмов. Пусть $\mathfrak{B}$ — алгебраическая система и $\{f_i\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{B} \mid i \in D\}$ — семейство мономорфизмов, таких, что $f_j m_{ij} = f_i$ при $i \leqslant j$. Тогда существует единственный мономорфизм $f\colon \mathfrak{A}_\infty \to \mathfrak{B}$, такой, что $f m_{i\infty} = f_i$ для всех i.*

Доказательство. Определим f равенством $f([a, i]) = f_i a$. Предположим, что $g\colon \mathfrak{A}_\infty \to \mathfrak{B}$ удовлетворяет условию $gm_{i\infty} = f_i$ для всех i. Тогда $g([a, i]) = g(m_{i\infty}a) = f_i a$. □

Пусть γ — ординал, $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ — семейство алгебраических систем, таких, что $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathfrak{A}_\beta$ при $\alpha < \beta < \gamma$. Семейство $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ называется *цепью длины* γ. Это семейство можно рассматривать как прямую систему $\{\mathfrak{A}_\alpha, i_{\alpha\beta}\}$, где $\alpha < \beta$ и $i_{\alpha\beta}\colon \mathfrak{A}_\alpha \to \mathfrak{A}_\beta$ — мономорфизм вложения. Прямой предел $\mathfrak{A}_\infty$ системы $\{\mathfrak{A}_\alpha, i_{\alpha\beta}\}$ легко представить наглядно, так как A_∞ есть не что иное, как $\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$, и отношение $R^{\mathfrak{A}_\infty}$ есть просто $\bigcup\{R^{\mathfrak{A}_\alpha} \mid \alpha < \gamma\}$. Поэтому обычно называют $\mathfrak{A}_\infty$ *объединением* системы $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ и пишут

$$\mathfrak{A}_\infty = \bigcup\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha < \gamma\}.$$

Цепь $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ называется *элементарной*, если $i_{\alpha\beta}$ элементарен для всех $\alpha < \beta < \gamma$.

Следствие 10.3 (принцип элементарных цепей). *Объединение элементарной цепи является элементарным расширением каждого члена цепи.*

Доказательство. Непосредственно вытекает из 10.1. □

Теорема 10.4. *Теория T модельно полна тогда и только тогда, когда каждая диаграмма следующего вида:*

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[rr, "f"] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{A} \models T, \\ \mathfrak{B} \models T \end{array}$$

может быть дополнена указанным здесь способом.

Доказательство. Если T модельно полна, то полагаем $g = f$, $h = i_B$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. Предположим теперь, что $f_0\colon \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{B}_0$ — мономорфизм между моделями для T. Многократно используя указанное свойство пополнимости диаграмм, можно построить следующую бесконечную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}_0 \arrow[r, "k_{01}", "\equiv"'] \arrow[dr, "h_0"] & \mathfrak{B}_1 \arrow[r, "k_{12}", "\equiv"'] \arrow[dr, "h_1"] & \mathfrak{B}_2 \arrow[r, "k_{23}", "\equiv"'] & \cdots \\
\mathfrak{A}_0 \arrow[u, "f_0"] \arrow[r, "g_{01}", "\equiv"'] & \mathfrak{A}_1 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "g_{12}", "\equiv"'] & \mathfrak{A}_2 \arrow[u, "f_2"] \arrow[r, "g_{23}", "\equiv"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{A} \models T$,
$\mathfrak{B}_i \models T$.

Сначала выбираем h_0 и g_{01}, затем f_1 и k_{01} и так далее.

Полагаем $\mathfrak{A}_\infty = \varinjlim \mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_\infty = \varinjlim \mathfrak{B}_i$. По 10.1 мономорфизмы $g_{i\infty}\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_\infty$ и $k_{i\infty}\colon \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{B}_\infty$ являются элементарными для всех i. Построим изоморфизм $f_\infty\colon \mathfrak{A}_\infty \to \mathfrak{B}_\infty$, такой, что $f_\infty g_{0\infty} = k_{0\infty} f_0$, тогда из 6.1 будет следовать, что f_0 элементарен.

Предположим, что $a \in A_\infty$. Выберем i, такое, что $g_{i\infty} a_i = a$ для некоторого $a_i \in A_i$. Определим $f_\infty a = k_{i\infty} f_i a_i$. Чтобы показать, что определение f_∞ корректно, допустим, что $g_{i\infty} a_i = g_{j\infty} a_j = a$ и $i < j$. Тогда $g_{ij} a_i = a_j$ и

$$k_{i\infty} f_i a_i = k_{j\infty} k_{ij} f_i a_i = k_{j\infty} f_j g_{ij} a_i = k_{j\infty} f_j a_j.$$

Ясно, что f_∞ есть мономорфизм. Чтобы показать, что f_∞ — отображение на B_∞, зафиксируем $b \in B_\infty$. Выберем такое i, что $k_{i\infty} b_i = b$ для некоторого $b_i \in B_i$. Положим $a = g_{i+1,\,\infty} h_i b_i$. Тогда

$$f_\infty a = k_{i+1,\,\infty} f_{i+1} h_i b_i = k_{i+1,\,\infty} k_{i,i+1} b_i = b. \ \square$$

Критерий модельной полноты теорий, полученный в теореме 10.4, не слишком удобен для применения, так как требует построения элементарных мономорфизмов. Если T — некоторая теория полей, то имеющаяся инфор-

мация о моделях для T говорит много о мономорфизмах и очень мало об элементарных мономорфизмах. Понятие насыщенной модели даст нам возможность получить критерий (теорема 17.1) модельной полноты, аналогичный теореме 10.4, но не требующий построения элементарного мономорфизма.

Упражнение 10.5 (Чэн, Лось, Сушко). Теория T является универсально экзистенциальной тогда и только тогда, когда объединение любой цепи моделей для T есть также модель для T.

§ 11. СКОЛЕМИЗАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Сколемизация есть средство для разложения мономорфизмов на множители.

Пусть $\mathfrak{L}$ — язык. Расширим $\mathfrak{L}$ до $\mathfrak{L}^*$, добавив

(i) новую предметную константу c_F для каждой формулы $F(x_1)$ языка $\mathfrak{L}$;

(ii) новый n-местный функциональный символ f_F для каждой формулы $F(x_1, \ldots, x_{n+1})$ языка $\mathfrak{L}$.

Определим язык $\mathfrak{L}^s$, называемый *сколемизацией* $\mathfrak{L}$, следующим образом:

$$\mathfrak{L}^0 = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}^{m+1} = (\mathfrak{L}^m)^* \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}^s = \bigcup \{\mathfrak{L}^m \mid m < \omega\}.$$

Пусть T — теория в языке $\mathfrak{L}$. Сколемизация T^s теории T есть теория в языке $\mathfrak{L}^s$, полученная добавлением к T следующих аксиом Сколема:

(i) $(\mathrm{E}x_1)\, F(x_1) \to F(c_F)$;

(ii) универсальное замыкание формулы

$$(\mathrm{E}x_{n+1})\, F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \to \\ \to F(x_1, \ldots, x_n, f_F(x_1, \ldots, x_n))$$

для каждой формулы $F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ $(n > 0)$ языка $\mathfrak{L}^s$.

Говорят, что теория W допускает *элиминацию* кванторов, если для каждой формулы F (в языке теории W) существует бескванторная формула G, такая, что

$$W \vdash F \leftrightarrow G.$$

Предложение 11.1. *Теория T^s допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство проводится индукцией по числу шагов в построении $F(x_1, \ldots, x_n)$ из атомных формул языка $\mathfrak{L}^s$. Предположим, что $F(x_1, \ldots, x_n)$ есть $(\mathrm{E}\, x_{n+1})\, H(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$. Тогда

$$T^s \vdash (\mathrm{E} x_{n+1})\, H(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow H(x_1, \ldots, x_n, f_H(x_1, \ldots, x_n)).$$

По индуктивному предположению существует бескванторная формула $G(x_1, \ldots, x_n)$, такая, что

$$T^s \vdash H(x_1, \ldots, x_n, f_H(x_1, \ldots, x_n)) \leftrightarrow G(x_1, \ldots, x_n).$$

Но тогда

$$T^s \vdash F(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow G(x_1, \ldots, x_n). \ \square$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — модель для T. Систему $\mathfrak{A}$ можно расширить до модели $\mathfrak{A}^s$ теории T^s, выбирая сколемовские элементы c_F и сколемовские функции f_F так, чтобы выполнялись аксиомы Сколема. Система $\mathfrak{A}^s$ называется *сколемизацией* системы $\mathfrak{A}$. В общем случае для построения сколемизации системы $\mathfrak{A}$ необходима аксиома выбора. Если $\mathfrak{D}$ является моделью для T^s, то $\mathfrak{D}$ имеет единственное обеднение до некоторой модели $\mathfrak{A}$ теории T, оно получается удалением из $\mathfrak{D}$ сколемовских элементов и функций. Для любого $X \subset A$ назовем *сколемовской оболочкой* $\mathfrak{A}^s(X)$ наименьшую подсистему системы $\mathfrak{A}^s$, носитель которой содержит X. Носитель $\mathfrak{A}^s(X)$ есть замыкание относительно функций в $\mathfrak{A}^s$ множества X, объединенного с множеством выделенных элементов $\mathfrak{A}^s$.

Теорема 11.2 (по Сколему — Лёвенгейму). *Для каждого $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ существуют $g\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ и $h\colon \mathfrak{C} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B}$, такие, что $f = hg$ и* $\operatorname{card} \mathfrak{C} \leqslant \max(\operatorname{card} \mathfrak{L}_\tau, \operatorname{card} \mathfrak{A})$, *где τ есть сигнатура системы $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}^s$ есть сколемизация системы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — обеднение системы $\mathfrak{B}^s(f[A])$ до системы сигнатуры τ. По 11.1 $\mathfrak{B}^s(f[A]) \prec \mathfrak{B}^s$, поэтому $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$. $\square$

Упражнение 11.3 (Сколем). Пусть F — формула в языке теории T, такая, что $T^s \vdash F$. Показать, что $T \vdash F$.

§ 12. МОДЕЛЬНЫЕ ПОПОЛНЕНИЯ

Понятие модельной полноты, введенное Робинсоном, полезно для изучения теории полей и для решения вопросов, относящихся к разрешимости систем уравнений. Оно будет использоваться в § 40 для того, чтобы оправдать определение дифференциально замкнутых полей и вывести теорему Зейденберга о корнях для дифференциальных полей.

Пусть T и T_1 — теории одной и той же сигнатуры. Теория T_1 называется *модельным пополнением* теории T, если T_1 и T удовлетворяют условиям

(i) если $\mathfrak{A} \models T_1$, то $\mathfrak{A} \models T$;

(ii) если $\mathfrak{A} \models T$, то существует $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$, такая, что $\mathfrak{B} \models T_1$;

(iii) если $\mathfrak{A} \models T$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \models T_1$ и $\mathfrak{C} \models T_1$, то $\langle \mathfrak{B}, a \rangle_{a \in A} \equiv \langle \mathfrak{C}, a \rangle_{a \in A}$.

Если T_1 есть модельное пополнение T, то T_1 модельно полна. Может случиться, что T_1 и T удовлетворяют (i) и (ii), T_1 модельно полна, но не является модельным пополнением T.

Теорема 12.1 (Робинсон). *Если T_1 и T_2 — модельные пополнения T, то $T_1 = T_2$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольная модель для T_1; покажем что она является моделью для T_2. Определим цепь алгебраических систем $\{\mathfrak{A}_n \mid n < \omega\}$:

(i) $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$.

(ii) Предположим, что $\mathfrak{A}_{2n} \models T_1$; тогда $\mathfrak{A}_{2n} \models T$ и существует система $\mathfrak{A}_{2n+1} \supset \mathfrak{A}_{2n}$, такая, что $\mathfrak{A}_{2n+1} \models T_2$.

(iii) Предположим, что $\mathfrak{A}_{2n+1} \models T_2$; тогда $\mathfrak{A}_{2n+1} \models T$ и существует система $\mathfrak{A}_{2n+2} \supset \mathfrak{A}_{2n+1}$, такая, что $\mathfrak{A}_{2n+2} \models T_1$.

Положим $\mathfrak{A}_\infty = \bigcup \{\mathfrak{A}_{2n} \mid n < \omega\} = \bigcup \{\mathfrak{A}_{2n+1} \mid n < \omega\}$. Цепь $\{\mathfrak{A}_{2n} \mid n < \omega\}$ является элементарной цепью, так как T_1 модельно полна. Следовательно, $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_\infty$ по принципу элементарных цепей (10.3). Анало-

гично $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_\infty$. Таким образом, $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1$ по 6.1. Поэтому каждая модель для T_1 есть также модель для T_2; по симметрии, каждая модель для T_2 является моделью для T_1. Значит, $T_1 = T_2$ по 7.1. □

Теорема 12.2 (Робинсон). *Теория алгебраически замкнутых полей является модельным пополнением теории полей.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — поле, а $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — его алгебраически замкнутые расширения. Покажем, что $\langle \mathfrak{B}, a\rangle_{a\in A} \equiv \langle \mathfrak{C}, a\rangle_{a\in A}$. Пусть $\mathfrak{B}_1$ (соответственно $\mathfrak{C}_1$) — алгебраически замкнутое элементарное расширение $\mathfrak{B}$ (соответственно $\mathfrak{C}$), такое, что card $\mathfrak{B}_1 =$ $=$ card $\mathfrak{C}_1 >$ card $\mathfrak{A}$. Существование $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{C}_1$ следует из 7.3. Пусть U (соответственно V) есть базис трансцендентности для $\mathfrak{B}_1$ (соответственно для $\mathfrak{C}_1$) над $\mathfrak{A}$. Тогда card $U =$ card $V =$ card $\mathfrak{B}_1$. Существует взаимно однозначное отображение f из U на V. Продолжим f до

$$f_1\colon \mathfrak{A}(U) \to \mathfrak{A}(V)$$

так, что f_1 тождественно на $\mathfrak{A}$. Тогда можно расширить f_1 до $f_2\colon \mathfrak{B}_1 \xrightarrow{\approx} \mathfrak{C}_1$, так как $\mathfrak{B}_1$ (соответственно $\mathfrak{C}_1$) есть алгебраическое замыкание $\mathfrak{A}(U)$ (соответственно $\mathfrak{A}(V)$). По 6.1 $\langle \mathfrak{B}, a\rangle_{a\in A} \equiv \langle \mathfrak{C}, a\rangle_{a\in A}$. □

В § 17 будет показано, что теория вещественно замкнутых полей является модельным пополнением теории упорядоченных полей. Доказательство использует удобный критерий насыщенных систем для распознавания модельных пополнений.

Теория линейного порядка (LO) имеет три аксиомы:

a. $(x)(y)[x \leqslant y \vee y \leqslant x]$;

b. $(x)(y)(z)[x \leqslant y \,\&\, y \leqslant z \to x \leqslant z]$;

c. $(x)(y)[x \leqslant y \,\&\, y \leqslant x \to x = y]$.

Теория плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего элементов (DLO) получается добавлением к LO аксиом

d. $(x)(y)(\mathrm{E}z)[x < y \to x < z < y]$;

e. $(x)(\mathrm{E}y)(\mathrm{E}z)[y < x < z]$

($x < y$ есть сокращение для $x \leqslant y \,\&\, x \neq y$).

Теорема 12.3 (Робинсон). *Теория* DLO *есть модельное пополнение теории* LO.

Доказательство. Любой линейный порядок $\mathfrak{A}$ нетрудно расширить до плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего элементов, добавляя к $\mathfrak{A}$ элементы до тех пор, пока не заполнятся все «пробелы». Итак, предположим, что $\mathfrak{A} \models \mathrm{LO}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \models \mathrm{DLO}$ и $\mathfrak{C} \models \mathrm{DLO}$, но $\langle \mathfrak{B}, a\rangle_{a \in A} \not\equiv \langle \mathfrak{C}, a\rangle_{a \in A}$. Пусть $F(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ — предложение, такое, что $\mathfrak{B} \models F(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ и $\mathfrak{C} \models \neg F(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$. Возьмем конечную подсистему $\mathfrak{A}_0$ системы $\mathfrak{A}$ с носителем $\{a_0, \ldots, a_n\}$. По 11.2 (теореме Сколема — Лёвенгейма) существуют счетные системы $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{C}_1$, такие, что $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{C}_1 \prec \mathfrak{C}$. Очевидно,

$$\langle \mathfrak{B}_1, a_0, \ldots, a_n\rangle \not\equiv \langle \mathfrak{C}_1, a_0, \ldots, a_n\rangle.$$

Однако это невозможно, так как существует изоморфизм $f\colon \mathfrak{B}_1 \xrightarrow{\approx} \mathfrak{C}_1$, удовлетворяющий условию $fa_i = a_i$ для всех $i \leqslant n$. Можно построить такой f методом Кантора. Занумеруем B_1 и C_1:

$$B_1 = \{b_i \mid i < \omega\} \quad \text{и} \quad C_1 = \{c_i \mid i < \omega\},$$

где $a_i = b_i = c_i$ для всех $i \leqslant n$. Определим f индукцией по i.

Случай 1. $i \leqslant n$. Тогда $fb_i = c_i$.

Случай 2. $i > n$ и i четно. Пусть f уже определен на некотором конечном $B_0 \subset B_1$. Пусть b — элемент из $B_1 - B_0$, имеющий наименьший индекс. Множество B_1 линейно упорядочено, и элемент b расположен относительно элементов множества B_0 определенным образом. Тогда должен существовать элемент $c \in C_1$, который расположен относительно элементов множества $f[B_0]$ таким же образом, потому что $\mathfrak{C}$ есть плотный линейный порядок без наибольшего и наименьшего элементов и $f[B_0]$ конечно. Полагаем $fb = c$.

Случай 3. $i > n$ и i нечетно. Действуем так же, как в случае 2, поменяв ролями B_1 и C_1. Пусть множество

уже построенных значений f есть некоторое конечное подмножество $C_0 \subset C_1$. Пусть c — элемент из $C_1 - C_0$ с наименьшим индексом и т. д. □

§ 13. ПОДМОДЕЛЬНАЯ ПОЛНОТА

Теория T **называется** *подмодельно полной*, **если** $T \cup D\mathfrak{A}$ **является полной теорией для каждой подсистемы** $\mathfrak{A}$ **любой модели для** T.

Теорема 13.1. *Подмодельная полнота теории T эквивалентна каждому из следующих двух условий:*

(1) *T допускает элиминацию кванторов;*

(2) *каждая диаграмма следующего вида:*

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, dashed, "\equiv"] & & \mathfrak{C} \arrow[ul, dashed] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} \mathfrak{B} \models \\ \mathfrak{C} \models T \end{matrix},$$

может быть дополнена указанным здесь способом.

Доказательство. Предположим, что T подмодельно полна, и докажем (1). Пусть $F(x)$ — формула в языке теории T, а S — множество, состоящее из следующих предложений:

(i) T, $F(\boldsymbol{c})$, где $\boldsymbol{c}$ не входит в T;

(ii) $\neg K(\boldsymbol{c})$, где $K(x)$ — любая бескванторная формула, такая, что $T \vdash K(x) \to F(x)$.

Допустим, что S совместно. По 7.1 S имеет модель $\mathfrak{A}$. Пусть константа $\boldsymbol{c}$ интерпретируется элементом $c \in A$, и пусть $\mathfrak{C}$ — наименьшая подсистема алгебраической системы $\mathfrak{A}$, содержащая элемент $\boldsymbol{c}$. Тогда

$$T \cup D\mathfrak{C} \vdash F(\boldsymbol{c}),$$

так как $\mathfrak{A} \models F(\boldsymbol{c})$ и $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как модель полной теории $T \cup D\mathfrak{C}$. Каждый элемент множества C

является значением константного терма, построенного из $\boldsymbol{c}$, предметных констант и функций теории T. Таким образом,

$$T \vdash K(\boldsymbol{c}) \to F(\boldsymbol{c}),$$

где $K(x)$ — бескванторная формула и $\mathfrak{A} \models K(\boldsymbol{c})$. Так как $\boldsymbol{c}$ не входит в T, то

$$T \vdash K(x) \to F(x).$$

Но тогда $\mathfrak{A} \models \neg K(\boldsymbol{c})$ по определению S. Получили противоречие.

Так как S несовместно, то

$$T \vdash F(x) \to K(x)$$

для некоторой бескванторной формулы $K(x)$, такой, что $T \vdash K(x) \to F(x)$.

Теперь предположим (1) и докажем (2). Пусть

$$W = T(\langle \mathfrak{B}, b \rangle_{b \in B}) \cup D\mathfrak{C} \cup \{\boldsymbol{fa} = \boldsymbol{ga} \mid a \in A\}.$$

Если найдется такая алгебраическая система $\mathfrak{D}$, что $\mathfrak{D} \models W$, то $\mathfrak{D}$ дополняет диаграмму требуемым способом. Допустим, что W несовместно. Тогда существуют $F(x_1, x_2)$, $G(x_1, x_2)$, $a \in A$, $b \in B - f[A]$ и $c \in C - g[A]$, такие, что

(i) $\mathfrak{B} \models F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{fa})$;

(ii) $G(x_1, x_2)$ — бескванторная формула и $\mathfrak{C} \models G(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{ga})$;

(iii) $F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{fa}) \,\&\, G(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{ga}) \,\&\, \boldsymbol{fa} = \boldsymbol{ga}$ несовместна [1]).

По (1) существует бескванторная формула $H(x_2)$, такая, что

$$T \vdash (\mathrm{E}x_1)\, G(x_1, x_2) \leftrightarrow H(x_2).$$

Следовательно, $\mathfrak{C} \models H(\boldsymbol{ga})$, $\mathfrak{A} \models H(\boldsymbol{a})$ и $\mathfrak{B} \models H(\boldsymbol{fa})$. Но тогда

$$\mathfrak{B} \models F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{fa}) \,\&\, (\mathrm{E}x_1)\, G(x_1, \boldsymbol{fa}),$$

что невозможно в силу (iii).

---

[1]) Для простоты обозначений автор проводит доказательство для частного случая. Общий случай рассматривается аналогично.— *Прим. ред.*

Наконец, предположим (2) и покажем, что T подмодельно полна. Пусть $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_0$ и $g\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}_0$ — мономорфизмы и $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{C}_0$ являются моделями для T. Многократно применяя (2), получим следующую бесконечную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{B}_0 \arrow[r, "h_{01}", "\equiv"'] \arrow[dr, "j_{01}"] & \mathfrak{B}_1 \arrow[r, "h_{12}", "\equiv"'] \arrow[dr, "j_{12}"] & \mathfrak{B}_2 \arrow[r, "h_{23}", "\equiv"'] & \cdots \\
\mathfrak{A} \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & & & \\
 & \mathfrak{C}_0 \arrow[r, "t_{01}", "\equiv"'] \arrow[uur, "k_{01}"] & \mathfrak{C}_1 \arrow[r, "t_{12}", "\equiv"'] \arrow[uur, "k_{12}"] & \mathfrak{C}_2 \arrow[r, "t_{23}", "\equiv"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{B}_i \models T$,
$\mathfrak{C}_i \models T$.

Сначала выбираем h_{01} и k_{01}, затем t_{01} и j_{01} и так далее. Пусть $\mathfrak{B}_\infty = \varinjlim \mathfrak{B}_i$ и $\mathfrak{C}_\infty = \varinjlim \mathfrak{C}_i$. По 10.1 мономорфизмы $h_{i\infty}\colon \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{B}_\infty$ и $t_{i\infty}\colon \mathfrak{C}_i \to \mathfrak{C}_\infty$ являются элементарными для всех i. Как и в 10.4, можно найти такой изоморфизм

$$j_\infty\colon \mathfrak{B}_\infty \xrightarrow{\approx} \mathfrak{C}_\infty,$$

что $j_\infty h_{0\infty} f = t_{0\infty} g$. Тогда по 6.1

$$\langle \mathfrak{B}_0, fa \rangle_{a \in A} \equiv \langle \mathfrak{C}_0, ga \rangle_{a \in A}.$$

Таким образом, $T \cup D\mathfrak{A}$ полна. □

Теорема 13.2 (Робинсон). *Если T — универсальная теория и T^* — ее модельное пополнение, то T^* допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. Ввиду 13.1 достаточно показать, что T^* подмодельно полна. Пусть $\mathfrak{A}$ есть подсистема модели для T^*. Тогда каждое универсальное предложение, доказуемое в T^*, должно быть истинно в $\mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models T$, а значит, $T^* \cup D\mathfrak{A}$ полна. □

Следствие 13.3 (Тарский, Робинсон). *Теория алгебраически замкнутых полей* (ACF) *допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. Получается из 12.2 и 13.2.

Из следствия 13.3 немедленно вытекают некоторые результаты относительно алгебраических множеств и разрешимости конечных систем полиномиальных уравнений. Под n-мерным комплексным алгебраическим множеством понимают множество всех комплексных решений некоторой конечной системы полиномиальных уравнений от n неизвестных с комплексными коэффициентами. Из 13.3 следует, что проекция n-мерного комплексного алгебраического множества на m-мерное пространство есть конечное пересечение конечных объединений m-мерных комплексных алгебраических множеств и их дополнений.

Пусть S — конечная система полиномиальных уравнений и неравенств от нескольких неизвестных с коэффициентами $c_1, \ldots, c_n$. Утверждение, что S имеет решение, может быть выражено некоторым экзистенциальным предложением $F(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$. По 13.3 существует такая бескванторная формула $H(x_1, \ldots, x_n)$, что

$$\mathrm{ACF} \vdash F(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow H(x_1, \ldots, x_n).$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — любое алгебраически замкнутое поле, содержащее $c_1, \ldots, c_n$. Тогда S имеет решение в $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда

$$\mathfrak{A} \models H(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n).$$

Благодаря этому мы имеем «алгебраический» критерий разрешимости S, так как для нахождения истинностного значения $H(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ в $\mathfrak{A}$ требуется лишь вычислить значения конечного числа многочленов от $c_1, \ldots, c_n$ и выяснить, какие из них равны нулю, а какие нет.

§ 14. СОГЛАШЕНИЕ О СЧЕТНОСТИ СИГНАТУРЫ

С этого момента будем предполагать, что сигнатура

$$\tau = \langle I, J, K, \theta, \psi \rangle$$

является счетной, т. е. I, J и K — счетные множества. Поэтому любая алгебраическая система, рассматриваемая в следующих параграфах, будет иметь лишь счетное число предикатов, функций и выделенных элементов. Единствен-

ным исключением будут системы вида $\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y}$, где $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система счетной сигнатуры, а Y — несчетное подмножество в A. В дальнейшем любая теория T будет множеством предложений некоторого языка $\mathfrak{L}_\tau$, где τ — счетная сигнатура. (Если τ счетна, то $\mathfrak{L}_\tau$ счетно.) Исключением будут теории вида $T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$, где Y — несчетное подмножество в A.

Приведенное выше соглашение позволит упростить изложение многих результатов, сохранив их существенное содержание.

§ 15. ТИПЫ ЭЛЕМЕНТОВ

Для более тонкого изучения алгебраических систем потребуется понятие типа элемента.

Пусть T — полная теория. Для каждого $n > 0$ обозначим через $F_n T$ множество всех формул в языке теории T, не содержащих свободных переменных, отличных от $x_1, \ldots, x_n$. Две формулы F и G из $F_n T$ называются *эквивалентными*, если $T \vdash F \leftrightarrow G$. Пусть $[F]$ — класс эквивалентности формулы F. Обозначим через $B_n T$ булеву алгебру, состоящую из всех классов $[F]$, где F входит в $F_n T$. Булевы операции в $B_n T$ определяются следующими равенствами:

$$[F] \cup [G] = [F \vee G],$$
$$[F] \cap [G] = [F \,\&\, G],$$
$$c\,[F] = [\neg F].$$

Формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется *совместной* с T, если

$$T \vdash (\mathrm{E}x_1) \ldots (\mathrm{E}x_n)\, F(x_1, \ldots, x_n).$$

Множество $S \subset F_n T$ называется *совместным* с T, если конъюнкция любого конечного числа элементов из S совместна с T. Максимальное совместное подмножество p множества $F_n T$ называется *n-типом*. Если каждую формулу $F \in p$ заменить на $[F]$, то полученное подмножество множества $B_n T$, которое также обозначается через p, образует максимальный дуальный идеал. Таким образом,

(i) если $F \in p$ и $G \in p$, то $F \,\&\, G \in p$,

(ii) $F \in p \Leftrightarrow \neg F \notin p$.

Каждое совместное подмножество из F_nT можно дополнить до n-типа. Обозначим через S_nT множество всех n-типов теории T. (Конечно, S_nT есть стоуновское пространство алгебры B_nT; его топологические свойства будут использоваться в следующих параграфах.)

Пусть $\mathfrak{A} \models T$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$. Мы говорим, что последовательность $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ *реализует* n-тип $p \in S_nT$ в $\mathfrak{A}$, если

$$\mathfrak{A} \models F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

для каждой формулы $F \in p$, т. е. если $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ удовлетворяет в $\mathfrak{A}$ каждой формуле $F(x_1, \ldots, x_n) \in p$. Если $\mathfrak{B} \models T$ и $b_1, \ldots, b_n \in B$, то

$$\{F(x_1, \ldots, x_n) \mid \mathfrak{B} \models F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\}$$

есть n-тип, а именно тот n-тип, который $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ реализует в $\mathfrak{B}$.

Предложение 15.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — бесконечная алгебраическая система, $Y \subset A$.*

(1) *Если $p \in S_nT(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$, то существует система $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$, такая, что n-тип p реализуется в $\langle \mathfrak{B}, y \rangle_{y \in Y}$ и* $\operatorname{card} \mathfrak{B} = \operatorname{card} \mathfrak{A}$.

(2) *Существует система $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$, такая, что каждый n-тип $p \in S_nT(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$ реализуется в $\mathfrak{B}$ и* $\operatorname{card} \mathfrak{B} \leqslant \operatorname{card} \mathfrak{A} \times 2^{\max(\omega, \operatorname{card} Y)}$.

Доказательство. (1) Пусть $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ — предметные константы, не входящие в формулы из $T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$. Пусть S есть

$$T(\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A}) \cup \{F(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \mid F(x_1, \ldots, x_n) \in p\}.$$

Можно рассматривать $T(\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A})$ как расширение $T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$, если предположить, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$ для всех $a = y \in Y \subset A$. Тогда

$$(\mathrm{E}x_1) \ldots (\mathrm{E}x_n) F(x_1, \ldots, x_n) \in T(\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A})$$

для каждой формулы $F(x_1, \ldots, x_n) \in p$. Отсюда следует, что S совместно. По 7.1 S имеет такую модель $\mathfrak{B}$, что $\operatorname{card} \mathfrak{B} = \operatorname{card} \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ и p реализуется в $\mathfrak{B}$.

(2) следует из (1) и принципа элементарных цепей (10.3). Пусть $\varkappa = \operatorname{card} S_nT(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$. В силу соглашения

о счетности (§ 14) $\varkappa \leqslant 2^{\max(\omega, \operatorname{card} Y)}$. Пусть $\{p_\delta \mid \delta < \varkappa\}$ — полное упорядочение $S_n T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$. Определим по трансфинитной индукции элементарную цепь $\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta \leqslant \varkappa\}$:

(i) $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$.

(ii) Предположим, что $\mathfrak{A}_\delta$ уже определена и $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_\delta$. Тогда $\langle \mathfrak{A}_0, y \rangle_{y \in Y} \equiv \langle \mathfrak{A}_\delta, y \rangle_{y \in Y}$, поэтому p_δ, который является элементом $S_n T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$, можно рассматривать как элемент $S_n T(\langle \mathfrak{A}_\delta, y \rangle_{y \in Y})$. По 15.1 (1) существует система $\mathfrak{A}_{\delta+1} \succ \mathfrak{A}_\delta$, такая, что p_δ реализуется в $\mathfrak{A}_{\delta+1}$ и $\operatorname{card} \mathfrak{A}_{\delta+1} = \operatorname{card} \mathfrak{A}_\delta$.

(iii) Предположим, что $\mathfrak{A}_\delta$ уже определены для всех δ, меньших чем некоторый предельный ординал λ, и что $\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \lambda\}$ — элементарная цепь. Полагаем $\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \lambda\}$. Тогда $\mathfrak{A}_\lambda \succ \mathfrak{A}_\delta$ для всех $\delta < \lambda$ по 10.3.

Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_\varkappa$. Тогда p_δ реализуется в $\mathfrak{B}$, так как $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}_{\delta+1}$ и p_δ реализуется в $\mathfrak{A}_{\delta+1}$. С помощью трансфинитной индукции нетрудно показать, что $\operatorname{card} \mathfrak{A}_\delta \leqslant \operatorname{card} \mathfrak{A} \times \operatorname{card} \delta$ для всех $\delta \leqslant \varkappa$. □

§ 16. НАСЫЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Насыщенные системы используются при разработке теоретико-модельных вариантов синтаксических понятий (примером может служить характеризация модельно полных теорий, данная в 17.1), а также при изучении категоричности (например, характеризация ω-категоричности, полученная в 18.2).

Пусть $\mathfrak{A}$ — бесконечная алгебраическая система, $Y \subset A$. Система $\mathfrak{A}$ называется *насыщенной над* Y, если каждый тип $p \in S_1 T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$ реализуется в $\mathfrak{A}$ (более точно, в $\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y}$). Система $\mathfrak{A}$ называется *насыщенной*, если $\mathfrak{A}$ насыщена над каждым $Y \subset A$, таким, что $\operatorname{card} Y < \operatorname{card} A$. Пусть $\varkappa$ — бесконечный кардинал. Тогда $\mathfrak{A}$ называется *$\varkappa$-насыщенной*, если $\mathfrak{A}$ насыщена для каждого $Y \subset A$, такого, что $\operatorname{card} Y < \varkappa$. Понятие насыщенности не является абсолютным в смысле Гёделя [1].

Традиционные примеры насыщенных систем — множество рациональных чисел, рассматриваемое как плотный линейный порядок без наибольшего и наименьшего

элементов, и комплексные числа как алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ — линейный порядок, т. е модель для LO (§ 12). Порядок $\mathfrak{A}$ называется *$\varkappa$-плотным*, если для каждой пары множеств $X, Y \subset A$ мощности $< \varkappa$, такой, что

$$\mathfrak{A} \models (x)\,(y)\,[x \in X \;\&\; y \in Y \to x < y],$$

выполняется

$$\mathfrak{A} \models (\mathrm{E}z)\,[(x)\,(x \in X \to x < z) \;\&\; (y)\,(y \in Y \to z < y)].$$

Порядок $\mathfrak{A}$ называется *плотным*, если он *ω-плотный*.

Предложение 16.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — плотный линейный порядок без наибольшего и наименьшего элементов. Тогда система $\mathfrak{A}$ $\varkappa$-насыщена в том и только в том случае, когда она является $\varkappa$-плотным порядком.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ есть $\varkappa$-плотный линейный порядок, и пусть $Y \subset A$ имеет мощность $< \varkappa$. Возьмем $p \in S_1T\,(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$. По 12.3 и 13.2 теория DLO допускает элиминацию кванторов, поэтому можно предполагать, что каждая формула $F(x_1) \in p$ бескванторна. Следовательно, формулы из p определяют сечение в множестве Y, занятое элементом x_1. Таким образом, существуют A_1 и A_2, такие, что $Y = A_1 \cup A_2$ и p эквивалентно $\{a_1 < x_1 \mid a_1 \in A_1\} \cup \{x_1 < a_2 \mid a_2 \in A_2\}$. Тогда p должен быть реализуем в $\mathfrak{A}$, так как $\mathfrak{A}$ является $\varkappa$-плотным. □

Предложение 16.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраически замкнутое поле. Тогда оно является насыщенным в том и только в том случае, когда имеет бесконечную степень трансцендентности над своим простым подполем.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ алгебраически замкнуто и имеет бесконечную степень трансцендентности, и пусть $p \in S_1T\,(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$, где card $Y <$ card A. По 15.1 (1) тип p реализуется элементом b в некотором $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$. Если b является алгебраическим над Y, то $b \in A$. Предположим, что b трансцендентен над Y. Пусть

$\mathfrak{C}$ — наименьшее подполе поля $\mathfrak{A}$, содержащее Y. Выберем элемент $a \in A$, трансцендентный над Y; такой элемент a существует, так как card $Y <$ card A и card A совпадает со степенью трансцендентности поля $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{C}(a)}$ алгебраическое замыкание $\mathfrak{C}(a)$ в $\mathfrak{A}$. Пусть

$$h\colon \overline{\mathfrak{C}(a)} \to \mathfrak{B}$$

— мономорфизм, тождественный на $\mathfrak{C}$ и такой, что $ha = b$. По 9.1 h является элементарным, поэтому a реализует p в $\overline{\mathfrak{C}(a)}$. Но тогда a реализует p в $\mathfrak{A}$, так как вложение $\overline{\mathfrak{C}(a)} \subset \mathfrak{A}$ является элементарным. □

Из 16.2 следует, что любое несчетное алгебраически замкнутое поле насыщено. В § 37 будет показано, что если теория T счетна и для некоторого несчетного $\varkappa$ каждая модель для T мощности $\varkappa$ является насыщенной, то каждая несчетная модель для T насыщена.

Теорема 16.3 (Морли, Вот). *Если* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ — *насыщенные системы одной и той же мощности и* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, *то* $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$ (ср. с теоремой 20.4).

Доказательство. Пусть card $\mathfrak{A} = \varkappa$, $A = \{a_\delta \mid \delta < \varkappa\}$ и $B = \{b_\delta \mid \delta < \varkappa\}$. Определим с помощью трансфинитной индукции множество $\{\langle c_\delta, d_\delta\rangle \mid \delta < \varkappa\}$. Зафиксируем $\delta < \varkappa$ и предположим, что множество $\{\langle c_\gamma, d_\gamma\rangle \mid \gamma < \delta\}$ уже определено и

$$\langle \mathfrak{A}, c_\gamma\rangle_{\gamma<\delta} \equiv \langle \mathfrak{B}, d_\gamma\rangle_{\gamma<\delta}.$$

(Если $\delta = 0$, то это просто означает, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.)

Случай 1. δ четно. Пусть c_δ — элемент множества $A - \{c_\gamma \mid \gamma < \delta\}$ с наименьшим индексом. Полагаем

$$p = \{F(x_1) \mid \langle \mathfrak{A}, c_\gamma\rangle_{\gamma<\delta} \models F(c_\delta)\}.$$

Тогда $p \in S_1T(\langle \mathfrak{A}, c_\gamma\rangle_{\gamma<\delta})$. Пусть q получается из p в результате замены каждого вхождения c_γ в p на d_γ для всех $\gamma < \delta$. Тогда $q \in S_1T(\langle \mathfrak{B}, d_\gamma\rangle_{\gamma<\delta})$. Так как $\mathfrak{B}$ насыщена, то q реализуется в $\mathfrak{B}$ некоторым элементом b; полагаем $d_\delta = b$. Тогда

$$\langle \mathfrak{A}, c_\gamma, c_\delta\rangle_{\gamma<\delta} \equiv \langle \mathfrak{B}, c_\gamma, d_\delta\rangle_{\gamma<\delta}.$$

Случай 2. δ нечетно. Поступаем так же, как в случае 1, поменяв ролями $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Положим $hc_\delta = d_\delta$ для всех $\delta < \varkappa$. Приведенная конструкция гарантирует нам, что h устанавливает взаимно однозначное соответствие между A и B. Из соотношения

$$\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A} \equiv \langle \mathfrak{B}, ha \rangle_{a \in A}$$

вытекает, что h есть изоморфизм. □

Теорема 16.3 — соблазнительный результат относительно единственности для насыщенных систем. Она наводит на мысль, что проблему классификации алгебраических систем по элементарной эквивалентности можно свести к проблеме классификации насыщенных систем по типам изоморфизма. К сожалению, насыщенные системы редки. Теорема 16.4 дает самый сильный результат существования, возможный без допущений типа континуум-гипотезы. Есть два удобных способа обойти эту трудность. Первый состоит в рассмотрении частично насыщенных систем вместо насыщенных и является разумным компромиссом, так как теорема 16.4 обеспечивает изобилие частично насыщенных систем. Второй состоит в первоначальном допущении континуум-гипотезы с тем, чтобы элиминировать ее из окончательного результата с помощью результатов Гёделя, Леви и Шёнфилда об абсолютности.

Теорема 16.4. *Пусть система* $\mathfrak{A}$ *бесконечна. Тогда для каждого бесконечного кардинала* $\varkappa$ *существует* $\varkappa^+$*-насыщенная система* $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$, *такая, что* $\operatorname{card} \mathfrak{B} \leqslant (\operatorname{card} \mathfrak{A})^\varkappa$.

Доказательство. Проводится аналогично 15.1. Сначала рассмотрим более простую проблему элементарного расширения $\mathfrak{A}$ до $\mathfrak{A}^*$, такого, что $\mathfrak{A}^*$ реализует каждый тип $p \in S_1T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$ для любого $Y \subset A$ мощности не более $\varkappa$; пусть $\{Y_\delta \mid \delta < (\operatorname{card} A)^\varkappa\}$ есть перечисление всех таких Y. По индукции определяется элементарная цепь $\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < (\operatorname{card} A)^\varkappa\}$:

(i) $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$.

(ii) $\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup \{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \lambda\}$ для предельного ординала λ.

(iii) $\mathfrak{A}_{\delta+1} \succ \mathfrak{A}_\delta$; $\mathfrak{A}_{\delta+1}$ реализует каждый тип

$p \in S_1T(\langle \mathfrak{A}_\delta, y\rangle_{y\in Y\delta})$; card $\mathfrak{A}_{\delta+1} \leqslant$ card $\mathfrak{A}_\delta \times 2^\varkappa$. Существование такой системы $\mathfrak{A}_{\delta+1}$ следует из 15.1 (2).

Положим $\mathfrak{A}^* = \bigcup \{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < (\text{card } \mathfrak{A})^\varkappa\}$. Нетрудно показать по индукции, что card $\mathfrak{A}_\delta \leqslant (\text{card } \mathfrak{A})^\varkappa$ для всех $\delta < (\text{card } \mathfrak{A})^\varkappa$. Поэтому card $\mathfrak{A}^* \leqslant (\text{card } \mathfrak{A})^\varkappa$.

Теперь система $\mathfrak{B}$ может быть получена как предел элементарной цепи $\{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < \varkappa^+\}$, такой, что

$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}$,

$\mathfrak{B}_\lambda = \bigcup \{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < \lambda\}$,

$\mathfrak{B}_{\delta+1} = \mathfrak{B}_\delta^*$ и card $\mathfrak{B}_\delta^* \leqslant (\text{card } \mathfrak{A})^\varkappa$.

Из регулярности $\varkappa^+$ следует, что система $\mathfrak{B}$ $\varkappa^+$-насыщена: если $Y \subset B$ и card $Y \leqslant \varkappa$, то $Y \subset B_\delta$ для некоторого $\delta < \varkappa^+$, поэтому если $p \in S_1T(\langle \mathfrak{B}, y\rangle_{y\in Y})$, то тип p реализуется в $\mathfrak{B}_{\delta+1}$, а следовательно, в $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{B}_{\delta+1}$. □

Следующее утверждение потребуется для доказательства теоремы Чэна о двух кардиналах (§ 23).

Следствие 16.5. *Пусть $\varkappa$ — регулярный несчетный кардинал, причем $2^\rho \leqslant \varkappa$ для любого $\rho < \varkappa$. Пусть система $\mathfrak{A}$ бесконечна и имеет мощность не более $\varkappa$. Тогда существует насыщенная система $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ мощности $\varkappa$.*

Доказательство. В силу 7.3 можно предполагать, что card $\mathfrak{A} = \varkappa$. Если $\varkappa = \rho^+$ для некоторого $\rho < \varkappa$, то $\mathfrak{B}$ существует по 16.4. Предположим, что $\varkappa > \rho^+$ для каждого $\rho < \varkappa$. Пусть $\{\rho_\delta \mid \delta < \varkappa\}$ — строго возрастающая последовательность всех бесконечных кардиналов, меньших чем $\varkappa$. Тогда в качестве $\mathfrak{B}$ можно взять объединение элементарной цепи $\{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < \varkappa\}$, такой, что

(i) $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}$;

(ii) $\mathfrak{B}_\lambda = \bigcup \{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < \lambda\}$ для любого предельного ординала $\lambda < \varkappa$;

(iii) $\mathfrak{B}_{\delta+1} \succ \mathfrak{B}_\delta$, $\mathfrak{B}_{\delta+1}$ является ρ_δ^+-насыщенной, card $\mathfrak{B}_{\delta+1} \leqslant (\text{card } \mathfrak{B}_\delta)^{\rho_\delta}$.

Существование $\mathfrak{B}_{\delta+1}$ следует из 16.4. Из регулярности $\varkappa$ вытекает, что $\mathfrak{B}$ является $\varkappa$-насыщенной: если $Y \subset B$ и card $Y < \varkappa$, то $Y \subset B_\delta$ для некоторого такого δ, что $\rho_\delta \geqslant$ card Y; поэтому если $p \in S_1T(\langle \mathfrak{B}, y\rangle_{y\in Y})$, то он реализуется в $\mathfrak{B}_{\delta+1}$ и, следовательно, в $\mathfrak{B}$. Имеем $\varkappa^\rho \leqslant \varkappa$ для каждого $\rho < \varkappa$, так как $\varkappa$ регулярен и $2^\rho \leqslant \varkappa$ для

любого $\rho < \varkappa$. По индукции отсюда следует, что $\operatorname{card} \mathfrak{B}_\delta \leqslant \varkappa$ для любого $\delta < \varkappa$, значит, $\operatorname{card} \mathfrak{B} \leqslant \varkappa$. □

Теорема 16.6 *Пусть $\varkappa$ — несчетный кардинал. Система $\mathfrak{A}$ является $\varkappa$-насыщенной в том и только в том случае, когда каждая диаграмма следующего вида:*

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "g", "\equiv"'] \arrow[rr, "f", "\equiv"'] & & \mathfrak{C} \arrow[ul, dashed, "h", "\equiv"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \operatorname{card} \mathfrak{B} < \varkappa, \\ \operatorname{card} \mathfrak{C} \leqslant \varkappa \end{array}$$

может быть дополнена указанным здесь способом.

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathfrak{A}$ обладает указанным свойством пополнимости диаграмм. Пусть $Y \subset A$ имеет мощность меньше $\varkappa$. По теореме Сколема — Лёвенгейма (11.2) существует система $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, такая, что $Y \subset B$ и $\operatorname{card} \mathfrak{B} < \varkappa$. Пусть.

$$p \in S_1T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y}) = S_1T(\langle \mathfrak{B}, y \rangle_{y \in Y}).$$

По 15.1 (1) существует система $\mathfrak{C} \succ \mathfrak{B}$, такая, что $\operatorname{card} \mathfrak{C} < \varkappa$ и p реализуется в $\mathfrak{C}$ некоторым элементом c. Тогда hc реализует p в $\mathfrak{A}$.

Теперь предположим, что $\mathfrak{A}$ $\varkappa$-насыщена. Можно считать, что отображения f и g являются тождественными вложениями. Пусть $C - B = \{c_\delta \mid \delta < \varkappa\}$. Ограничение h на $\mathfrak{B}$ есть g. Определим hc_δ по индукции. Зафиксируем δ и предположим, что

$$\langle \mathfrak{C}, b, c_\gamma \rangle_{b \in B, \gamma < \delta} \equiv \langle \mathfrak{A}, b, hc_\gamma \rangle_{b \in B, \gamma < \delta}.$$

Положим $p = \{F(x) \mid \langle \mathfrak{C}, b, c_\gamma \rangle_{b \in B, \gamma < \delta} \models F(\boldsymbol{c}_\delta)\}$. Пусть q есть результат замены каждого вхождения $\boldsymbol{c}_\gamma$ в p на $\boldsymbol{hc}_\gamma$ для каждого $\gamma < \delta$. Так как $\mathfrak{A}$ $\varkappa$-насыщена, то q реализуется в $\mathfrak{A}$ некоторым a; полагаем $hc_\delta = a$. □

Упражнение 16.7. Показать, что ω-насыщенность системы $\mathfrak{A}$ эквивалентна следующему утверждению: если

$\mathfrak{B}$ — счетная система, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b_1, \ldots, b_n \in B$ и $\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_n \rangle$, то существует элементарный мономорфизм $f\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, для которого $fa_i = b_i$ $(i \leqslant n)$.

Упражнение 16.8. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ есть линейный порядок, мощность которого сингулярна. Показать, что $\mathfrak{A}$ не является насыщенной системой.

§ 17. ЭЛИМИНАЦИЯ КВАНТОРОВ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННО ЗАМКНУТЫХ ПОЛЕЙ

Одним из классических примеров применения теории моделей к алгебре является результат Тарского об элиминации кванторов для теории вещественно замкнутых полей. Доказательство Тарского было основано на расширении алгоритма Штурма. Приведенное ниже доказательство менее конструктивно, так как оно основано на критерии модельной полноты в терминах насыщенных моделей, однако оно дает алгебраические детали, которые могут быть использованы в других теориях полей.

Во всем этом параграфе мы предполагаем, что теория T не имеет конечных моделей.

Теорема 17.1. *Теория T модельно полна тогда и только тогда, когда каждая диаграмма следующего вида:*

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{B}^* & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & \mathfrak{C} \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C} \models T$,
$\mathfrak{B}^*$ является $(\mathrm{card}\ \mathfrak{C})^+$-насыщенной

может быть дополнена указанным здесь способом.

Доказательство. Предположим сначала, что T модельно полна. Тогда f и g элементарны, поэтому h существует по 16.6.

Теперь предположим, что T обладает указанным свойством пополнимости диаграмм. Из 16.4 следует, что тогда может быть дополнена каждая диаграмма следующего вида:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{U} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[rr, "f"] & & \mathfrak{C} \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{B} \models T, \\ \mathfrak{C} \models T. \end{array}$$

Тогда T модельно полна по 10.4. □

Теорема 17.1 получается из критерия модельной полноты, доказанного Коченом [1]. У Кочена вместо $\mathfrak{B}^*$ берется ультрастепень $\mathfrak{B}$. Для применений теории моделей в алгебре понятие частично насыщенных расширений представляется более подходящим, чем понятие ультрастепени. Теорема 17.2 дает самый прямой метод для установления полноты, модельной полноты и элиминации кванторов для различных теорий полей. Этот метод используется в § 40 для нахождения простых аксиом теории дифференциально замкнутых полей характеристики 0.

Через $\mathfrak{B}(c)$ обозначается простое расширение $\mathfrak{B}$, т. е. $\mathfrak{B}(c)$ есть наименьшая подсистема $\mathfrak{B}(c)$, носитель которой содержит $B \cup \{c\}$.

Теорема 17.2 (Блюм). *Пусть T и T^* — две теории одной и той же сигнатуры, такие, что $T \subset T^*$, T — универсальная теория и каждая модель для T может быть расширена до некоторой модели для T^*. Тогда T^* является модельным пополнением T в том и только в том случае, когда каждая диаграмма вида*

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{B}^* & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathfrak{B}(c) \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}(c) \models T$,
$\mathfrak{B}^* \models T^*$,
$\mathfrak{B}^*$ является $(\mathrm{card}\,\mathfrak{B})^+$-насыщенной

может быть дополнена указанным здесь способом.

Доказательство. Предположим сначала, что T^* является модельным пополнением T. Пусть $\mathfrak{D}$ — модель для T^*, которая является расширением $\mathfrak{B}(c)$. Положим

$$p = \{F(x) \mid \langle \mathfrak{D}, b \rangle_{b \in B} \models F(c)\}.$$

Тогда $T^* \cup D\mathfrak{B}$ полна и $p \in S_1(T^* \cup D\mathfrak{B})$. Из $(\mathrm{card}\,\mathfrak{B})^+$-насыщенности $\mathfrak{B}^*$ следует, что p реализуется в $\mathfrak{B}^*$ некоторым элементом b^*; полагаем $gc = b^*$.

Теперь предположим, что T^* обладает указанным свойством пополнимости диаграмм. Тогда T^* обладает более сильным свойством; каждая диаграмма следующего вида:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{B}^* & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & \mathfrak{C} \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \models T$,
$\mathfrak{B}^* \models T^*$,
$\mathfrak{B}^*$ является $(\mathrm{card}\mathfrak{B})^+$-насыщенной

может быть дополнена указанным здесь способом. Пусть $C - f[B] = \{c_\delta \mid \delta < \varkappa\}$. Определим цепь $\{C_\delta \mid \delta < \varkappa\}$ следующим образом:

$$C_0 = f[B], \quad C_{\delta+1} = C_\delta(c_\delta),$$

$$C_\lambda = \bigcup\{C_\delta \mid \delta < \lambda\} \text{ для предельного ординала } \lambda.$$

Тогда отображение h: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}^*$ определяется с помощью $\varkappa$ последовательных применений свойства пополнимости диаграммы.

Пусть $\mathfrak{B}$ — модель для T, а $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{B}$ — модели для T^*. По 16.4 существует $(\mathrm{card}\,\mathfrak{C})^+$-насыщенная система $\mathfrak{C}^* \succ \mathfrak{C}$. Если может быть дополнена диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{C}^* & \\
\mathfrak{C} \arrow[ur, "\equiv"] & & \mathfrak{D} \arrow[ul, dashed, "\equiv"'] \\
 & \mathfrak{B} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

то $T^* \cup D\mathfrak{B}$ полна, а, следовательно, T^* есть модельное пополнение T. Система $\mathfrak{D}$ является моделью для T, так как $T \subset T^*$. По более сильному свойству пополнимости диаграмм существует h, такое, что

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{C}^* & \\
\mathfrak{C} \arrow[ur, "\equiv"] & & \mathfrak{D} \arrow[ul, "h"'] \\
 & \mathfrak{B} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Из 17.1 и более сильного свойства пополнимости диаграмм следует, что T^* модельно полна, поэтому h является элементарным. □

Теория упорядоченных полей (OF) получается из теории полей (TF), если добавить к (TF) двуместный предикатный символ $<$ и следующие аксиомы:

(1) $(x)\ (x) \sim (x < x)$,
(2) $(x)\ (y)\ (z)\ [x < y \,\&\, y < z \to x < z]$,
(3) $(x)\ (y)\ [x < y \vee x = y \vee y < x]$,
(4) $(x)\ (y)\ [0 < x \,\&\, 0 < y \to 0 < x \cdot y]$,

(5) $(x)\,(y)\,(z)\,[x < y \to x + z < y + z]$. .

Теория вещественно замкнутых полей (RCF) получается из OF добавлением аксиом

(6) $(x)\,(\mathrm{E}y)\,[0 < x \to x = y \cdot y]$,

(7) $(x_1)\,\ldots\,(x_n)\,(\mathrm{E}y)\,[y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_n = 0]$

для каждого нечетного $n > 0$.

Теорема 17.3 (Робинсон). *Теория вещественно замкнутых полей является модельным пополнением теории упорядоченных полей.*

Доказательство. В силу 17.2 достаточно дополнить указанным способом следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{B}^* & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathfrak{B}(c) \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

Система $\mathfrak{B}$ есть упорядоченное поле, $\mathfrak{B}\,(c)$ — простое расширение $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$ является $(\mathrm{card}\,\mathfrak{B})^+$-насыщенным вещественно замкнутым расширением $\mathfrak{B}$. Нужно найти элемент $b^* \in \mathfrak{B}^*$ так, чтобы $\mathfrak{B}\,(b^*)$ было изоморфно $\mathfrak{B}\,(c)$ над $\mathfrak{B}$. Если c является алгебраическим над $\mathfrak{B}$, то такой элемент b^* существует, так как каждое простое алгебраическое (упорядоченное) расширение упорядоченного поля $\mathfrak{B}$ содержится в каждом вещественно замкнутом расширении $\mathfrak{B}$. Предположим, что c трансцендентен над $\mathfrak{B}$. Пусть B_1 и B_2 таковы, что $B = B_1 \cup B_2$ и $b_1 < c < b_2$ для всех $b_1 \in B_1$ и $b_2 \in B_2$. Возьмем следующее семейство формул S:

(i) $b_1 < x < b_2$ для любых $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$;

(ii) $f\,(x) \neq 0$ для каждого многочлена $f\,(x)$ с коэффициентами из B, отличного от тождественного нуля.

Семейство S совместно с $T\,(\langle \mathfrak{B}^*, b\rangle_{b \in B})$, так как каждое конечное подмножество множества S выполнимо в каждом вещественно замкнутом расширении $\mathfrak{B}$. Расширим S до некоторого $p \in S_1 T\,(\langle \mathfrak{B}^*, b\rangle_{b \in B})$. Тогда любая реализация p в $\mathfrak{B}^*$ может быть взята в качестве b^*. □

Следствие 17.4 (Тарский). *Теория вещественно замкнутых полей допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. По 13.2 и 17.3. □

В § 40 будет показано, что теория дифференциально замкнутых полей характеристики 0 допускает элиминацию кванторов. Схема доказательства аналогична доказательству 17.3 и 17.4.

Упражнение 17.5. Теория T допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда каждая диаграмма следующего вида:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{B}^* & \\
\mathfrak{B} \arrow[ur] & & \mathfrak{C} \arrow[ul, dashed] \\
 & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C} \models T$,
card $\mathfrak{C} \geqslant \omega$,
$\mathfrak{B}^*$ является $(\mathrm{card}\ \mathfrak{C})^+$-насыщенной

может быть дополнена указанным способом.

Упражнение 17.6 (Блюм). Пусть T — модельное пополнение некоторой универсальной теории. Показать, что существует теория $T^* = T$, такая, что каждый элемент T^* имеет вид

$$(x_1) \ldots (x_n)\,(\mathrm{E}y)\,F\,(x_1, \ldots, x_n, y),$$

где $F\,(x_1, \ldots, x_n, y)$ — бескванторная формула.

Упражнение 17.7 (Робинсон). Упорядоченная абелева группа с наименьшим положительным элементом (1), удовлетворяющая для всех $n > 0$ условию

$$(x)\,(\mathrm{E}y)\,(\mathrm{E}z)\,[x = ny + z \& 0 \leqslant z < n],$$

называется *Z-группой*. Показать, что теория Z-групп модельно полна.

Упражнение 17.8. Пусть F — предложение в языке линейного порядка (LO). Пусть F истинно на бесконечном

семействе конечных линейных порядков. Показать, что F истинно во всех конечных линейных порядках, за исключением конечного числа.

Упражнение 17.9. Показать, что теория конечных линейных порядков разрешима.

§ 18. ОПУСКАНИЕ ТИПА

Говорят, что система $\mathfrak{A}$ *опускает* n-тип p, если p не реализуется в $\mathfrak{A}$ никаким элементом из A^n. Результаты параграфа 17 были достаточно простыми ввиду большой легкости, с которой можно расширять системы, чтобы реализовать n-типы. Другой класс результатов, безусловно более глубоких, использует конструкции, в которых при расширении систем избранные n-типы опускаются. Ясно, что много сложнее опустить типы, чем их реализовать, так как для опускания необходимо больше беспокоиться о каждом элементе расширения. (Один не слишком известный специалист по теории моделей однажды заметил: «Любой глупец может реализовать тип, но только специалист по теории моделей может опустить его».) В этом и следующих параграфах будет развита разнообразная техника опускания типов.

Пусть теория T полна и $p \in S_nT$. Тип p называется *главным*, если существует такая формула $F(x_1, \ldots, x_n) \in p$, что

$$T \vdash F(x_1, \ldots, x_n) \to G(x_1, \ldots, x_n)$$

для всех $G(x_1, \ldots, x_n) \in p$; говорят, что $F(x_1, \ldots, x_n)$ порождает p. (Главные типы p из S_nT соответствуют изолированным точкам S_nT, рассматриваемого как стоуновское пространство булевой алгебры B_nT; порождающие главных типов p соответствуют атомам B_nT.) Так как T полна, каждая модель для T реализует каждый главный тип p.

Теорема 18.1 (Эренфойхт). *Если теория T счетна и $p \in S_nT$ — неглавный тип, то T имеет модель, которая опускает p* (ср. с теоремой 24.2).

Доказательство. Проводится по методу Генкина, примененному в 7.1. Для простоты считаем, что $n = 1$. Пусть $\{\boldsymbol{c}_i \mid i < \omega\}$ — последовательность предметных констант, не входящих в язык теории T. Все формулы с одной свободной переменной x (в языке теории T с добавленными константами $\boldsymbol{c}_i$) расположим в последовательность $\{G_j(x) \mid j < \omega\}$. Пусть $h\colon \omega \to \omega$ удовлетворяет условиям:

(i) $j < i$ влечет $hj < hi$;

(ii) если $j \leqslant i$, то $\boldsymbol{c}_{hi}$ не входит в $G_j(x)$.

Через H_i обозначается i-я аксиома Генкина, т. е.

$$(\mathrm{E}x)\, G_i(x) \to G_i(\boldsymbol{c}_{hi}).$$

По индукции определяется расширяющаяся последовательность теорий $\{T_i \mid i < \omega\}$, $T_0 = T$.

(1) Предположим, что T_{2i} совместно и $\boldsymbol{c}_{hi}$ не входит в T_{2i}. Полагаем $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{H_i\}$. Тогда T_{2i+1} совместно, как в доказательстве теоремы 7.1.

(2) Предположим, что T_{2i+1} совместно и

$$T_{2i+1} = T \cup \{K(\boldsymbol{c}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{c}_{in}, \boldsymbol{c}_i)\},$$

где $i \neq ij$ для $1 \leqslant j \leqslant n$. Если существует формула $F(x) \in p$, такая, что $T_{2i+1} \cup \{\neg F(\boldsymbol{c}_i)\}$ совместно, то полагаем $T_{2i+2} = T_{2i+1} \cup \{\neg F(\boldsymbol{c}_i)\}$ для некоторой такой $F(x)$. Покажем, что такая $F(x) \in p$ существует. Допустим, что $T_{2i+1} \cup \{\neg F(\boldsymbol{c}_i)\}$ несовместно для каждой формулы $F(x) \in p$. Тогда

$$T \vdash K(\boldsymbol{c}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{c}_{in}, \boldsymbol{c}_i) \to F(\boldsymbol{c}_i)$$

для каждой $F(x) \in p$. Так как $\boldsymbol{c}_{ij}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и $\boldsymbol{c}_i$ не входят в T, то

$$T \vdash (\mathrm{E}x_1,) \ldots (\mathrm{E}x_n)\, K(x_1, \ldots, x_n, x) \to F(x)$$

для каждой $F(x) \in p$. Если $(\mathrm{E}x_1) \ldots (\mathrm{E}x_n)\, K(x_1, \ldots, x_n, x) \notin p$, то $\neg (\mathrm{E}x_1) \ldots (\mathrm{E}\, x_n)\, K(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) \in p$,

$$T \vdash \neg (\mathrm{E}x_1) \ldots (\mathrm{E}x_n)\, K(x_1, \ldots, x_n, x)$$

и T_{2i+1} несовместно вопреки предположению. Если $(\mathrm{E}x_1) \ldots (\mathrm{E}x_n)\, K(x_1, \ldots, x_n, x) \in p$, то p является главным, что противоречит условию.

Положим $T_\infty = \bigcup\{T_i \mid i < \omega\}$. Конструкция Генкина заканчивается выбором некоторого максимального совместного расширения $S \supset T_\infty$. Как и в 7.1, S определяет модель для T, элементы которой являются классами эквивалентности вида $[\boldsymbol{c}_i]$. Никакое $[\boldsymbol{c}_i]$ не реализует p, так как $\neg F(\boldsymbol{c}_i) \in T_{2i+1} \subset S$ для некоторого $F(x) \in p$. □

Предположение о счетности в 18.1 является существенным.

Теория T называется *$\varkappa$-категоричной*, если все ее модели мощности $\varkappa$ изоморфны.

Следствие 18.2 (Рыль-Нардзевский). *Пусть T — счетная полная теория, не имеющая конечных моделей. Тогда T является ω-категоричной в том и только в том случае, когда S_nT конечно для любого n или, эквивалентно, каждая счетная модель для T насыщена.*

Доказательство. Допустим, что S_nT бесконечно. Тогда B_nT бесконечно. Каждая бесконечная булева алгебра $\mathfrak{B}$ имеет неглавный максимальный дуальный идеал. Поэтому S_nT содержит неглавный тип p. По 18.1 существует счетная модель для T, которая опускает p. По 15.1 существует счетная модель для T, которая реализует p. Поэтому T не является ω-категоричной.

Если каждая счетная модель для T насыщена, то T ω-категорична по 16.3.

Предположим, что S_nT конечно для любого n. Тогда каждый тип $p \in S_nT$ является главным для любого n. Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная модель для T. Тогда каждый n-тип, реализуемый в $\mathfrak{A}$, является главным. Зафиксируем

$$p \in S_1T\ (\langle \mathfrak{A}, a_i \rangle_{1 \leq i \leq n})$$

и покажем, что p реализуется в $\mathfrak{A}$. Положим

$$p^* = \{G(x_1, \ldots, x_n, x) \mid G(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, x) \in p\}.$$

Так как $p^* \in S_{n+1}T$, то p^* является главным; пусть $H(x_1, \ldots, x_n, x) \in p^*$ порождает p^*. Тогда $H(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, x) \in p$ и порождает p. Так как p — главный тип, он реализуется в каждой модели для T $(\langle \mathfrak{A}, a_i \rangle_{1 \leq i \leq n})$. □

В § 37 будет показано, что если счетная теория T является $\varkappa$-категоричной для некоторого несчетного $\varkappa$, то каждая несчетная модель для T насыщена. Доказательство этого факта требует опускания типов, много более сложного, чем в 18.1.

Предложение 18.3. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *насыщена*, $Y \subset A$, $\operatorname{card} Y < \operatorname{card} A$ *и* $p \in S_n T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$. *Тогда* p *реализуется в* $\mathfrak{A}$.

Доказательство проводится индукцией по n. Пусть $n > 1$ и $p_n \in S_n T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$. Положим

$$p_{n-1} = \{(\mathrm{E}x_n) F(x_1, \ldots, x_n) \mid F(x_1, \ldots, x_n) \in p_n\}.$$

Тогда $p_{n-1} \in S_{n-1} T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$, поэтому p_{n-1} реализуется в $\mathfrak{A}$ некоторой последовательностью $\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$. Рассмотрим

$$p_1 = \{F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, x) \mid F(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in p_n\}.$$

Тогда $p_1 \in S_1 T(\langle \mathfrak{A}, y, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle_{y \in Y})$, поэтому p_1 реализуется в $\mathfrak{A}$ некоторым a_n. Понятно, что $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ реализует p_n.

Лемма 18.4. *Пусть* T — *счетная полная теория, не имеющая конечных моделей. Тогда* T *обладает насыщенной моделью в том и только в том случае, когда* $S_n T$ *счетно для каждого* n.

Доказательство. Предположим сначала, что T имеет счетную насыщенную модель $\mathfrak{A}$. По 18.3 каждый n-тип $p \in S_n T$ реализуется в $\mathfrak{A}$. Тогда $S_n T$ (не более, чем) счетно, так как A^n счетно.

Теперь допустим, что $S_n T$ счетно для любого n. Тогда $S_n T(\langle \mathfrak{B}, y \rangle_{y \in Y})$ счетно для каждого n, любой модели $\mathfrak{B}$ для T и любого конечного подмножества $Y \subset B$. В самом деле, пусть $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Если $S_n T(\langle \mathfrak{B}, y \rangle_{y \in Y})$ несчетно, то $S_{m+n} T$ несчетно, так как существует однозначное отображение первого множества во второе, индуцированное переходом от $F(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m, x_1, \ldots, x_n)$ к $F(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_{m+n})$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — счетная модель для T, и пусть $\{Y_i \mid i < \omega\}$ — перечисление всех конечных подмножеств мно-

жества B. Определим элементарную цепь $\{\mathfrak{B}_i \mid i < \omega\}$:

(i) $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$.

(ii) $\mathfrak{B}_{i+1} \succ \mathfrak{B}_i$. В $\mathfrak{B}_{i+1}$ реализуется каждый тип $p \in S_1T(\langle \mathfrak{B}_i, y\rangle_{y \in Y_i})$. Она счетна. Существование $\mathfrak{B}_{i+1}$ следует из 15.1 и счетности $S_1T(\langle \mathfrak{B}_i, y\rangle_{y \in Y_i})$.

Положим $\mathfrak{C} = \bigcup \{\mathfrak{B}_i \mid i < \omega\}$. Тогда $\mathfrak{C} \succ \mathfrak{B}$ по 10.3; каждый n-тип $p \in S_1T(\langle \mathfrak{B}, y\rangle_{y \in Y})$ реализуется в $\mathfrak{C}$ для любого конечного подмножества $Y \subset B$, и $\mathfrak{C}$ счетна.

Требуемая счетная насыщенная модель $\mathfrak{A}$ есть предел элементарной цепи $\{\mathfrak{A}_i \mid i < \omega\}$, удовлетворяющей условиям

(iii) $\mathfrak{A}_0$ есть счетная модель для T.

(iv) $\mathfrak{A}_{i+1} \succ \mathfrak{A}_i$. Каждый $p \in S_1T(\langle \mathfrak{A}_i, y\rangle_{y \in Y})$ реализуется в $\mathfrak{A}_{i+1}$ для каждого конечного $Y \subset A_i$. $\mathfrak{A}_{i+1}$ счетно. □

§ 19. ω-СТАБИЛЬНЫЕ ТЕОРИИ

Через $S_1\mathfrak{A}$ обозначим $S_1T(\langle \mathfrak{A}, a\rangle_{a \in A})$. Пусть T — счетная теория, не имеющая конечных моделей. Она называется *ϰ-стабильной* (Морли), если $\operatorname{card} S_1\mathfrak{A} = \varkappa$ для любой модели $\mathfrak{A}$ мощности $\varkappa$ для T. Понятие ω-стабильности абсолютно; фактически это Π^1_1.

Лемма 19.1 (Морли). *Если T ω-стабильна, то она ϰ-стабильна для любого $\varkappa \geqslant \omega$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{A} \models T$ и $\operatorname{card} \mathfrak{A} < \operatorname{card} S_1\mathfrak{A}$. Пусть $p, q, \ldots \in S_1\mathfrak{A}$, $F(x)$, $G(x)$, ... — формулы в языке теории $T(\langle \mathfrak{A}, a\rangle_{a \in A})$. Назовем формулу $F(x)$ *обширной*, если

$$\operatorname{card}\{p \mid F(x) \in p\} > \operatorname{card} \mathfrak{A}.$$

(Другими словами, $F(x)$ определяет обширную окрестность стоуновского пространства $S_1\mathfrak{A}$.) Очевидно, $x = x$ — обширная формула. Допустим, что $F(x)$ обширна, и покажем, что существует такая формула $G(x)$, что обе формулы $G(x) \& F(x)$ и $\neg G(x) \& F(x)$ являются обширными. Пусть Q — множество всех таких p, что для некоторой формулы $H(x)$ выполнено условие

$$F(x) \& H(x) \in p \quad \text{и} \quad F(x) \& H(x) \text{ не обширна.}$$

Тогда $\operatorname{card} Q \leqslant (\operatorname{card} \mathfrak{A})^2 < \operatorname{card}\{p \mid F(x) \in p\}$. Выберем

$$q_1,\ q_2 \in \{p \mid F(x) \in p\} - Q$$

так, что $q_1 \neq q_2$. Выберем $G(x) \in q_1$ так, чтобы $\neg G(x) \in q_2$. Тогда обе формулы $F(x) \& G(x)$ и $F(x) \& \neg G(x)$ являются обширными.

По индукции определим последовательность $\{F_j^i \mid j < 2^i < \omega\}$ обширных формул. В качестве F_0^0 берем $x = x$. Допустим, что F_j^i уже определена. Выбираем $G(x)$ так, чтобы обе формулы $F_j^i \& G(x)$ и $F_j^i \& \neg G(x)$ были обширными. Берем $F_j^i \& G(x)$ в качестве F_{2j}^{i+1}, а $F_j^i \& \neg G(x)$ в качестве F_{2j+1}^{i+1}. Из 11.2 следует, что существует такая счетная система $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, что B содержит все элементы A, упоминавшиеся в каких-либо F_j^i. Пусть функция t: $\omega \to \omega$ удовлетворяет условиям $t(0) = 0$, $t(i+1) \in \{2t(i), 2t(i)+1\}$. Тогда $\{F_{t(i)}^i \mid i < \omega\}$ совместно с $T(\langle \mathfrak{B}, b \rangle_{b \in B})$ и может быть расширено до некоторого $p_t \in S_1\mathfrak{B}$. Если $t \neq t'$, то $p_t \neq p_{t'}$, так как существует формула $G(x)$, такая, что $G(x) \in p_t$ и $\neg G(x) \in p_{t'}$. Но тогда $S_1\mathfrak{B}$ несчетно. □

Из доказательства 19.1 следует более общий результат. Для любой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ обозначим через $S\mathfrak{B}$ ее стоуновское пространство, т. е. множество всех максимальных дуальных идеалов в $\mathfrak{B}$; если $S\mathfrak{C}$ счетно для каждой счетной системы $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$, то $\operatorname{card} S\mathfrak{B} = \operatorname{card}\mathfrak{B}$.

Можно дополнить лемму 19.1 следующим образом (см. Шелах [1]: пусть T не ω-стабильна, но $\varkappa$-стабильна для некоторого $\varkappa > \omega$; тогда множество всех таких $\varkappa$, что T является $\varkappa$-стабильной, есть либо $\{\varkappa \mid \varkappa^\omega = \varkappa\}$, либо $\{\varkappa \mid \varkappa \geqslant 2^\omega\}$.

Лемма 19.1 устанавливает один из наиболее важных фактов об ω-стабильных теориях. Мы используем его в этом параграфе, чтобы показать, что ω-стабильные теории имеют много насыщенных моделей. В § 35 лемма 19.1 используется для доказательства того, что несчетные модели ω-стабильных теорий содержат много неразличимых элементов. Простым, но вводящим в некоторое заблуждение примером ω-стабильной теории является теория алгебраически замкнутых полей характеристики 0 (ACF_0);

в заблуждение вводит тот факт, что (см. § 16) каждая несчетная модель для ACF_0 насыщена, в то время как существуют ω-стабильные теории с ненасыщенными моделями в каждой несчетной мощности. Точное определение неразличимости будет дано позже, но даже сейчас нетрудно уловить, что мы подразумеваем, говоря, что члены базиса трансцендентности для модели $\mathfrak{A}$ теории ACF_0 неразличимы в $\mathfrak{A}$.

Теория линейного порядка (LO) не является ω-стабильной, так как в порядке на рациональных числах существует несчетное число сечений Дедекинда. Теория LO является превосходным примером не ω-стабильной теории; в самом деле, в § 35 будет показано, что любая теория, обладающая моделью с определимым бесконечным линейным порядком, не является ω-стабильной по той же причине, что и LO. В этой книге наиболее содержательным примером ω-стабильной теории является теория дифференциально замкнутых полей характеристики 0 (DCF_0). В § 41 ω-стабильность DCF_0 будет использоваться для доказательства того, что каждое дифференциальное поле характеристики 0 имеет единственное простое дифференциальное замыкание.

Теорема 19.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ бесконечна и $T\mathfrak{A}$ ω-стабильна. Если ρ — регулярный кардинал и $\rho \leqslant \operatorname{card} \mathfrak{A}$, то существует ρ-насыщенная система $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ той же мощности, что и $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Определим элементарную цепь $\{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta \leqslant \rho\}$:

$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}$;

$\mathfrak{B}_{\delta+1}$ реализует каждый тип $p \in S_1\mathfrak{B}_\delta$;

$\mathfrak{B}_\lambda = \bigcup \{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < \lambda\}$ для предельного ординала λ.

Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\rho$. По 15.1 (2) и 19.1 можно выбрать $\mathfrak{B}_{\delta+1}$ так, что $\operatorname{card} \mathfrak{B}_{\delta+1} = \operatorname{card} \mathfrak{B}_\delta$, поэтому $\operatorname{card} \mathfrak{B} = \operatorname{card} \mathfrak{A}$. Из регулярности ρ следует, что $\mathfrak{B}$ ρ-насыщена. □

Следствие 19.3 (Морли). *Если T ω-стабильна и $\varkappa$ — регулярный кардинал, то T имеет насыщенную модель мощности $\varkappa$.*

В конце § 35 будет показано, что ω-стабильные теории имеют насыщенные модели во *всех* бесконечных мощностях.

Упражнение 19.4. Система $\mathfrak{A}$ называется *специальной моделью* для T, если существует элементарная цепь $\{\mathfrak{A}_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ насыщенных моделей, такая, что $\mathfrak{A} = \bigcup \{\mathfrak{A}_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$. Пусть T ω-стабильна и $\varkappa \geqslant \omega$. Показать, что T имеет специальную модель мощности $\varkappa$ (ср. с теоремой 35.10).

§ 20. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть система $\mathfrak{A}$ бесконечна, $X, Y \subset A$ и $f\colon X \to Y$ отображает X на Y. Отображение f называется *элементарным частичным автоморфизмом* системы $\mathfrak{A}$, если

$$\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X} \equiv \langle \mathfrak{A}, fx \rangle_{x \in X};$$

card f определяется как card X. Говорим, что f *непосредственно доопределимо*, если для любого $a \in A$ существует $b \in A$, такой, что

$$\langle \mathfrak{A}, x, a \rangle_{x \in X} \equiv \langle \mathfrak{A}, fx, b \rangle_{x \in X}.$$

Система $\mathfrak{A}$ называется *однородной*, если любой ее элементарный частичный автоморфизм, мощность которого меньше мощности $\mathfrak{A}$, непосредственно доопределим. Счетные однородные системы будут использоваться в § 22 для доказательства теоремы Вота о двух кардиналах.

Лемма 20.1. *Система $\mathfrak{A}$ однородна тогда и только тогда, когда каждый ее элементарный частичный автоморфизм мощности, меньшей, чем мощность $\mathfrak{A}$, можно расширить до автоморфизма системы $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — частичный автоморфизм системы $\mathfrak{A}$ и card $f <$ card $\mathfrak{A}$. Пусть $A - X = \{x_\delta \mid \delta <$ card $\mathfrak{A}\}$ и $A - Y = \{y_\delta \mid \delta <$ card $\mathfrak{A}\}$. Определим по индукции множество $\{\langle c_\delta, d_\delta \rangle \mid \delta <$ card $\mathfrak{A}\}$. Зафиксируем δ и допустим, что $\{\langle c_\gamma, d_\gamma \rangle \mid \gamma < \delta\}$ уже определено, причем выполняется условие

$$\langle \mathfrak{A}, x, c_\gamma \rangle_{x \in X, \gamma < \delta} \equiv \langle \mathfrak{A}, fx, d_\gamma \rangle_{x \in X, \gamma < \delta}.$$

Случай 1. δ четно. Пусть c_δ — элемент с наименьшим индексом в множестве $(A - X) - \{c_\delta \mid \gamma < \delta\}$. Так как $\mathfrak{A}$ однородна, то существует такой $y \in (A - Y)$ —

$- \{d_\gamma \mid \gamma < \delta\}$, что

$$\langle \mathfrak{A}, x, c_\gamma, c_\delta \rangle_{x \in X, \gamma < \delta} \equiv \langle \mathfrak{A}, fx, d_\gamma, y \rangle_{x \in X, \gamma < \delta}.$$

Полагаем $d_\delta = y$.

Случай 2. δ нечетно. Проводится аналогично случаю 1 с заменой X на Y: d_δ есть элемент с наименьшим индексом в множестве $(A - Y) - \{d_\gamma \mid \gamma < \delta\}$ и т. д.

Доопределяем $f: X \to Y$, полагая $fc_\delta = d_\delta$ для всех $\delta < \operatorname{card} \mathfrak{A}$. По построению f отображает $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$. При этом f является автоморфизмом, так как

$$\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A} \equiv \langle \mathfrak{A}, fa \rangle_{a \in A}. \ \square$$

Пусть система $\mathfrak{A}$ бесконечна. Она называется *универсальной*, если для любой системы $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, такой, что $\operatorname{card} \mathfrak{B} \leqslant \operatorname{card} \mathfrak{A}$, существует $f: \mathfrak{B} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{A}$.

Теорема 20.2 (Морли, Вот). *Система $\mathfrak{A}$ является насыщенной тогда и только тогда, когда она однородна и универсальна.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{A}$ насыщена. Покажем, что она однородна. Возьмем $f: X \to Y$, такое, что

$$\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X} \equiv \langle \mathfrak{A}, fx \rangle_{x \in X}$$

и $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathfrak{A}$. Пусть $a \in A$ и $p \in S_1 T(\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X})$ есть 1-тип, который реализуется в системе $\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X}$ элементом a. Тогда $p' \in S_1 T(\langle \mathfrak{A}, fx \rangle_{x \in X})$, где p' получается из p заменой x на fx, поэтому p' реализуется в $\langle \mathfrak{A}, fx \rangle_{x \in X}$ некоторым элементом b. Ясно, что

$$\langle \mathfrak{A}, x, a \rangle_{x \in X} \equiv \langle \mathfrak{A}, fx, b \rangle_{x \in X}.$$

Система $\mathfrak{A}$ универсальна по тем же соображениям, которые использованы для пополнения диаграмм в 16.6 и 16.7.

Теперь допустим, что $\mathfrak{A}$ универсальна и однородна. Покажем, что $\mathfrak{A}$ насыщена. Пусть $p \in S_1 T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$ для некоторого $Y \subset A$, такого, что $\operatorname{card} Y < \operatorname{card} \mathfrak{A}$. По 15.1(1) существует система $\mathfrak{C} \succ \mathfrak{A}$, удовлетворяющая условиям $\operatorname{card} \mathfrak{C} = \operatorname{card} \mathfrak{A}$, и p реализуется в $\langle \mathfrak{C}, y \rangle_{y \in Y}$ некоторым элементом c. Так как $\mathfrak{A}$ универсальна, суще-

ствует $f\colon \mathfrak{C} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{A}$. Поэтому

$$\langle \mathfrak{A},\ fy \rangle_{y \in Y} \equiv \langle \mathfrak{A},\ y \rangle_{y \in Y}$$

и fc реализует p в $\langle \mathfrak{A},\ fy \rangle_{y \in Y}$. Так как $\mathfrak{A}$ однородна, существует элемент $b \in A$, такой, что

$$\langle \mathfrak{A},\ fy,\ fc \rangle_{y \in Y} \equiv \langle \mathfrak{A},\ y,\ b \rangle_{y \in Y}.$$

Тогда b реализует p в $\langle \mathfrak{A},\ y \rangle_{y \in Y}$. □

Лемма 20.3. *Пусть* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, card $\mathfrak{A} \leqslant$ card $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{B}$ *однородна. Пусть для любого* n *и любого* $p \in S_n T\mathfrak{A}$ *из реализуемости* p *в* $\mathfrak{A}$ *следует реализуемость* p *в* $\mathfrak{B}$. *Тогда существует* $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть $X \subset A$. Покажем индукцией по card X, что

$$\langle \mathfrak{A},\ x \rangle_{x \in X} \equiv \langle \mathfrak{B},\ fx \rangle_{x \in X}$$

для некоторого $f\colon X \to B$. Если card $X < \omega$, то X реализует некоторый n-тип теории $T\mathfrak{A}$, который реализуется также в $\mathfrak{B}$. Предположим, что card $X \geqslant \omega$. Пусть $X = \{x_\delta \mid \delta < \text{card } X\}$. Определим индукцией по δ отображение $f\colon X \to B$. Зафиксируем $\delta <$ card X и допустим, что $f\colon \{x_\gamma \mid \gamma < \delta\} \to B$ уже определено, причем

$$\langle \mathfrak{A},\ x_\gamma \rangle_{\gamma < \delta} \equiv \langle \mathfrak{B},\ fx_\gamma \rangle_{\gamma < \delta}.$$

Так как card $\{x_\gamma \mid \gamma \leqslant \delta\} <$ card X, то по предположению индукции существует такой элемент g, что

$$\langle \mathfrak{A},\ x_\gamma \rangle_{\gamma \leqslant \delta} \equiv \langle \mathfrak{B},\ gx_\gamma \rangle_{\gamma \leqslant \delta}.$$

Так как $\mathfrak{B}$ однородна, существует $b \in \mathfrak{B}$ со свойством

$$\langle \mathfrak{B},\ gx_\gamma,\ gx_\delta \rangle_{\gamma < \delta} \equiv \langle \mathfrak{B},\ fx_\gamma,\ b \rangle_{\gamma < \delta}.$$

Полагаем $fx_\delta = b$. □

Пусть $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Говорим, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ *реализуют одинаковые* n*-типы*, если для всех $p \in S_n T\mathfrak{A}$ n-тип p реализуется в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда p реализуется в $\mathfrak{B}$.

Теорема 20.4 (Кейслер, Морли). *Если системы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *имеют одинаковую мощность, элементарно эквивалентны, однородны и реализуют одинаковые* n*-типы для любого* n, *то* $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_\delta \mid \delta < \varkappa\}$ и $B = \{b_\delta \mid \delta < \varkappa\}$. По индукции определим множество $\{\langle c_\delta, d_\delta\rangle \mid \delta < \varkappa\}$. Зафиксируем δ и предположим, что

$$\langle \mathfrak{A}, c_\gamma\rangle_{\gamma<\delta} \equiv \langle \mathfrak{B}, d_\gamma\rangle_{\gamma<\delta}.$$

Случай 1. δ четно. Пусть c_δ — элемент из $A - \{c_\gamma \mid \gamma < \delta\}$ с наименьшим индексом. По 20.3 существует такое f, что

$$\langle \mathfrak{A}, c_\gamma\rangle_{\gamma\leqslant\delta} \equiv \langle \mathfrak{B}, fc_\gamma\rangle_{\gamma\leqslant\delta}.$$

Так как система $\mathfrak{B}$ однородна, то существует такой элемент $d \in B$, что

$$\langle \mathfrak{B}, d_\gamma, d\rangle_{\gamma<\delta} \equiv \langle \mathfrak{B}, fc_\gamma, fc_\delta\rangle_{\gamma<\delta}.$$

Полагаем $d_\delta = d$.

Случай 2. δ нечетно. Рассмотрение проводится аналогично случаю 1 с заменой $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. □

Теорема 20.5 (Вот). *Пусть система $\mathfrak{A}$ счетна и бесконечна. Тогда существует счетная однородная система $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{C}$ — бесконечная система и $f\colon X \to Y$ — ее конечный частичный элементарный автоморфизм. Предположим, что $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{D}$; мы говорим, что f *непосредственно доопределим* в $\mathfrak{D}$, если для любого $c \in C$ существует $d \in D$, такой, что

$$\langle \mathfrak{C}, x, c\rangle_{x\in X} \equiv \langle \mathfrak{D}, fx, d\rangle_{x\in X}.$$

Несколько модифицируя доказательство 15.1 (2), можно показать, что если $\mathfrak{C}$ счетна, то существует счетная система $\mathfrak{D} \succ \mathfrak{C}$, такая, что каждый конечный элементарный частичный автоморфизм системы $\mathfrak{C}$ непосредственно доопределим в $\mathfrak{D}$. Определим теперь элементарную цепь $\{\mathfrak{A}_n \mid n < \omega\}$:

$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$;

$\mathfrak{A}_{n+1}$ счетна, и каждый конечный элементарный частичный автоморфизм системы $\mathfrak{A}_n$ непосредственно доопределим в $\mathfrak{A}_{n+1}$.

Тогда $\mathfrak{D} = \bigcup \{\mathfrak{A}_n \mid n < \omega\}$ есть счетное однородное элементарное расширение системы $\mathfrak{A}$. □

Следующее предложение используется в § 22 для опускания типов.

Предложение 20.6. *Пусть α — счетный ординал, и пусть $\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \alpha\}$ — элементарная цепь счетных изоморфных между собой однородных систем. Тогда* $\bigcup \{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \alpha\} \approx \mathfrak{A}_0$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_\alpha = \bigcup \{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \alpha\}$. Тогда $\mathfrak{A}_\alpha \succ \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_\alpha$ однородна и $\mathfrak{A}_\alpha$ и $\mathfrak{A}_0$ реализуют одинаковые n-типы. По 20.4 $\mathfrak{A}_\alpha \approx \mathfrak{A}_0$. □

Упражнение 20.7 (Эренфойхт). Взаимно однозначное отображение $g\colon X \to Y$ из X на Y называется *частичным изоморфизмом* между системами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ с одной сигнатурой, если $X \subset A$, $Y \subset B$ и для любых $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$, любого предикатного n-местного символа R и любого функционального n-местного символа f

$$\mathfrak{A} \models R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models R(gx_1, \ldots, gx_n),$$

$$\mathfrak{A} \models f(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models f(gx_1, \ldots, gx_n) = gx_{n+1}.$$

Говорим, что g *непосредственно доопределим*, если для любого $a \in A$ (соответственно $b \in B$) существует такой элемент $b \in B$ (соответственно $a \in A$), что отображение $g'\colon X \cup \{a\} \to Y \cup \{b\}$, где $g'x = gx$ для $x \in X$, $ga = b$, является частичным изоморфизмом.

Пусть каждый конечный частичный изоморфизм между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ непосредственно доопределим. Показать, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

§ 21. ЧИСЛО СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

В этом параграфе через T будет обозначаться полная счетная теория, не имеющая конечных моделей. Пусть $n(T)$ — число классов изоморфизма счетных моделей для T. Для каждого кардинала

$$\varkappa \in \{n \mid n \neq 2 \ \&\ 1 \leqslant n < \omega\} \cup \{\omega, 2^\omega\}$$

существует такая теория T, что $n(T) = \varkappa$. Вот [1] предполагал, что из $n(T) < 2^\omega$ следует $n(T) \leqslant \omega$. Морли [1] доказал, что из $n(T) < 2^\omega$ следует $n(T) \leqslant \omega_1$; его доказательство использует бесконечные логики. Лахлан

[1] показал, что если T ω-стабильна и $n(T) > 1$, то $n(T) \geqslant \omega$. В § 39 будет установлено, что если T ω_1-категорична и $n(T) > 1$, то $n(T) = \omega$. Весьма интересный результат Вота (21.5), что $n(T)$ всегда отлично от 2, является следствием теоремы 21.1.

Система $\mathfrak{A}$ называется *слабо насыщенной моделью для* T, если каждый n-тип $p \in S_nT$ реализуем в $\mathfrak{A}$ для любого n.

Теорема 21.1 (Розенштейн). *Если* $1 < n(T) < \omega$, *то* T *имеет счетную слабо насыщенную ненасыщенную модель* (ср. с упражнением 39.13).

Доказательство. Множество S_nT счетно для любого n, так как $n(T) \leqslant \omega$. По 18.4 T имеет счетную насыщенную модель $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ — счетные ненасыщенные модели для T. По 16.3 $n(T) = k + 1$. Допустим, что ни одна из систем $\mathfrak{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ не является слабо насыщенной. Выберем числа n_i и $p_i \in S_{n_i}T$ так, что p_i не реализуется в $\mathfrak{A}_i$.

Для любой формулы F обозначим через F^j результат прибавления j к индексу каждой свободной переменной этой формулы. Положим

$$q_i = \{F^{n_1+n_2+\cdots+n_{(i-1)}} \mid F \in p_i\}.$$

Тогда p_i и q_i имеют одинаковые реализации, но q_i и q_j при $i \neq j$ не имеют общих свободных переменных. Положим $q = \bigcup \{q_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Каждый тип q_i реализуется в $\mathfrak{A}$ по 18.3, поэтому q реализуется в $\mathfrak{A}$. Положим

$$T^* = T \cup \{F(c_1, \ldots, c_n) \mid F(x_1, \ldots, x_n) \in q\},$$

где $c_1, \ldots, c_n$ не входят в T и $n = \sum \{n_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — счетная модель для T^*. Тогда $\mathfrak{B}$ является моделью для T. Имеем $\mathfrak{B} \not\approx \mathfrak{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, так как $\mathfrak{B}$ реализует q_i. Поэтому $\mathfrak{B} \approx \mathfrak{A}$. Таким образом, каждая счетная модель для T^* состоит из $\mathfrak{A}$ и реализации q в $\mathfrak{A}$. По 20.2 $\mathfrak{A}$ является однородной, следовательно, T^* ω-категорична. По 18.2 S_nT^* конечно для всех n. Следовательно, S_nT конечно для всех n, так как каждый элемент S_nT можно расширить до некоторого элемента S_nT^* и различные элементы из S_nT имеют различные расшире-

ния. Но тогда $n(T) = 1$ по 18.2, что противоречит условию. □

Система $\mathfrak{A}$ называется *простой* моделью для T, если для любой модели $\mathfrak{B}$ для T существует $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B}$.

Система $\mathfrak{A}$ называется *атомной* моделью для T, если для любого n каждый n-тип $p \in S_nT$, реализуемый в $\mathfrak{A}$, является главным.

Лемма 21.2 (Вот). *Система $\mathfrak{A}$ является простой моделью для T тогда и только тогда, когда она есть счетная атомная модель для T.*

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{A}$ проста. Тогда она должна быть счетной, так как T имеет счетную модель. Допустим, что n-тип $p \in S_nT$ не является главным. По 18.1 существует такая модель $\mathfrak{B}$ для T, что p не реализуется в $\mathfrak{B}$. Так как существует $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B}$, то p не реализуем в $\mathfrak{A}$.

Предположим, что $\mathfrak{A}$ — атомная счетная модель, $A = \{a_i \mid i < \omega\}$ и $\mathfrak{B}$ — модель для T. По индукции определим $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B}$. Зафиксируем $n < \omega$ и допустим, что fa_i уже определено для любого $i < n$, причем выполнено условие

$$\langle \mathfrak{A}, a_i \rangle_{i<n} \equiv \langle \mathfrak{B}, fa_i \rangle_{i<n}.$$

Пусть $p \in S_{n+1}T$ есть $n+1$-тип, который реализуется в $\mathfrak{A}$ последовательностью $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$. Так как $\mathfrak{A}$ атомна, то p порождается некоторой формулой $F(x_0, \ldots, x_n)$. Тогда

$$\langle \mathfrak{A}, a_i \rangle_{i<n} \models (\mathrm{E}\, x)\, F(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, x),$$

и поэтому

$$\langle \mathfrak{B}, fa_i \rangle_{i<n} \models F(\boldsymbol{fa}_0, \ldots, \boldsymbol{fa}_{n-1}, \boldsymbol{b})$$

для некоторого $b \in B$. Полагаем $fa_n = b$. □

Теорема 21.3 (Вот). *Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — простые модели для T, то $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$.*

Доказательство. Вследствие 21.2 $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ атомные и счетные. Пусть $A = \{a_i \mid i < \omega\}$ и $B = \{b_i \mid i < \omega\}$. Определим по индукции множество

$\{\langle c_i, d_i\rangle \mid i < \omega\}$. Зафиксируем $n < \omega$ и предположим, что множество $\{\langle c_i, d_i\rangle \mid i < n\}$ уже определено так, что

$$\langle \mathfrak{A}, c_i\rangle_{i<n} \equiv \langle \mathfrak{B}, d_i\rangle_{i<n}.$$

Случай 1. n четно. Пусть c_n — элемент множества $A - \{c_i \mid i < n\}$ с наименьшим номером. Пусть $p \in S_{n+1}T$ есть $n+1$-тип, который реализуется последовательностью $\langle c_0, \ldots, c_n\rangle$ в $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}$ атомна, то p порождается некоторой формулой $F(x_0, \ldots, x_n)$. Тогда

$$\langle \mathfrak{A}, c_i\rangle_{i<n} \models (\mathrm{E}x)\, F(\boldsymbol{c}_0, \ldots, \boldsymbol{c}_{n-1}, x),$$

поэтому

$$\langle \mathfrak{B}, d_i\rangle_{i<n} \models F(\boldsymbol{d}_0, \ldots, \boldsymbol{d}_{n-1}, \boldsymbol{b})$$

для некоторого $b \in B$. Полагаем $d_n = b$.

Случай 2. n нечетно. Рассуждения проводятся так же, как в случае 1, с заменой $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Определим f, полагая $fc_n = d_n$. Тогда $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{B}$. □

Лемма 21.4 (Вот). *Если $\mathfrak{A}$ — простая модель для T, то она однородна.*

Доказательство. По 21.2 $\mathfrak{A}$ счетная и атомная. Допустим, что

$$\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, b_1, \ldots, b_{n-1}\rangle.$$

Пусть $a \in A$, и пусть $p \in S_nT$ есть n-тип, который реализуется последовательностью $\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, a\rangle$ в $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}$ атомна, то p порождается некоторой формулой $F(x_1, \ldots, x_n)$. Как и в 21.3,

$$\langle \mathfrak{A}, b_1, \ldots, b_{n-1}\rangle \models F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-1}, \boldsymbol{b})$$

для некоторого $b \in A$. Тогда

$$\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_{n-1}, a\rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, b_1, \ldots, b_{n-1}, b\rangle. \ \square$$

Следствие 21.5 (Вот). $n(T) \neq 2$.

Доказательство. Допустим, что $n(T) = 2$. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — счетные модели для T. Так как $n(T) \leqslant \omega$, то по 18.4 T имеет счетную насыщенную модель, например $\mathfrak{B}$. Тогда по 20.2 существует $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B}$. Из теоремы Лёвенгейма — Сколема (11.2) следует, что $\mathfrak{A}$ проста. Так как $n(T) \neq 1$, то ввиду 18.2 существует такое n, что

S_nT бесконечно. Как и в 18.4, некоторый тип $p \in S_nT$ не является главным. По 21.2 p не реализуем в $\mathfrak{A}$, поэтому $\mathfrak{A}$ не будет слабо насыщенной. Но по 21.1 она должна быть слабо насыщенной. □

Система $\mathfrak{A}$ называется *минимальной моделью* для T, если не существует такой модели $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$.

Теорема 21.6 (Вот). *Пусть T ω_1-категорична, но не ω-категорична. Если $\mathfrak{A}$ — простая модель для T, то она является также минимальной моделью для T.*

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{A}$ проста, но не минимальна. Тогда существует такая система $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B} \approx \mathfrak{A}$ по 21.3. Отсюда следует, что если $\mathfrak{C}$ — простая модель для T, то существует такая модель $\mathfrak{D}$, что $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{D}$, $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D} \approx \mathfrak{C}$. Определим элементарную цепь $\langle \mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \omega_1 \rangle$ счетных моделей для T:

(1) $\mathfrak{A}_0$ проста.

(2) Пусть $\mathfrak{A}_\delta$ проста; выберем $\mathfrak{A}_{\delta+1}$ так, что $\mathfrak{A}_\delta \prec \mathfrak{A}_{\delta+1}$, $\mathfrak{A}_{\delta+1} \neq \mathfrak{A}_\delta$, $\mathfrak{A}_{\delta+1} \approx \mathfrak{A}_\delta$.

(3) Положим $\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup \{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \lambda\}$ для предельного ординала λ. Если $\mathfrak{A}_\delta$ проста и, следовательно, атомна для всех $\delta < \lambda$, то $\mathfrak{A}_\lambda$ атомна и, следовательно, проста по 21.2.

Пусть $\mathfrak{C} = \bigcup \{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \omega_1\}$. Тогда $\mathfrak{C}$ есть атомная модель для T мощности ω_1. Так как T не является ω-категоричной, то по 18.2 для некоторого n существует неглавный n-тип $p \in S_nT$. Пусть $\mathfrak{D}$ — модель для T, которая реализует p и имеет мощность ω_1. Тогда T не является ω_1-категоричной. □

В § 38 будет показано, что каждая ω_1-категоричная теория имеет простую модель.

Упражнение 21.7. Мы говорим, что главные n-типы из S_nT *плотны* в S_nT, если для каждой формулы $F(x_1, \ldots, x_n)$, совместной с T, существует главный n-тип $p \in S_nT$, такой, что $F(x_1, \ldots, x_n) \in p$. Показать, что T имеет простую модель тогда и только тогда, когда главные n-типы из S_nT плотны в S_nT для любого n.

Упражнение 21.8. Пусть T ω-стабильна. Показать, что T имеет простую модель.

Упражнение 21.9. Пусть $n(T) > 1$ и каждая счетная модель для T однородна. Показать, что $n(T) \geqslant \omega$.

Упражнение 21.10. Пусть $n(T) > \omega$ и каждая счетная модель для T однородна. Показать, что $n(T) = 2^{\omega}$.

§ 22. ТЕОРЕМА ВОТА О ДВУХ КАРДИНАЛАХ

Пусть $\mathfrak{L}$ — счетный язык, и пусть $R(x)$ — выделенная формула языка $\mathfrak{L}$. Если $\mathfrak{A}$ — система той же сигнатуры, что и $\mathfrak{L}$, то ее *двухкардинальным типом* называется пара $\langle \varkappa, \rho \rangle$, где $\varkappa = \operatorname{card} \mathfrak{A}$, $\rho = \operatorname{card} R^{\mathfrak{A}}$ и $R^{\mathfrak{A}} = \{a \mid \mathfrak{A} \models R(a)\}$. (Обычно $R^{\mathfrak{A}}$ называют *выделенным подмножеством* $\mathfrak{A}$.) Выражение

$$\langle \varkappa, \rho \rangle \to \langle \varkappa', \rho' \rangle$$

означает, что для каждой системы $\mathfrak{A}$ типа $\langle \varkappa, \rho \rangle$ существует $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ типа $\langle \varkappa', \rho' \rangle$. Вот начал изучение теорем о двух кардиналах с доказательства того, что $\langle \varkappa, \rho \rangle \to \langle \omega_1, \omega \rangle$ (теорема 22.6) для всех $\varkappa > \rho \geqslant \omega$. Теорема 22.6 используется в § 38 и § 39 для развития понятия размерности моделей ω_1-категоричной теории. Как правило, теоремы о двух кардиналах доказываются при помощи опускания типов; иногда, как в следствии 24.5, они сами используются для опускания типов. В доказательстве теоремы о двух кардиналах опускается следующий тип: «x есть новый элемент выделенного подмножества». Таким образом, в доказательстве 22.4 система $\mathfrak{C}_\delta$ расширяется до $\mathfrak{C}_{\delta+1}$, и при этом выделенное подмножество не увеличивается.

Предложение 22.1. *Пусть* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, $\operatorname{card} \mathfrak{B} = \omega$, $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}}$, $b \in B - A$ *и* $p \in S_n T(\langle \mathfrak{B}, b_i \rangle_{i<m})$. *Тогда существуют системы* $\mathfrak{A}^*$ *и* $\mathfrak{B}^*$, *такие, что* $\mathfrak{A}^* \prec \mathfrak{B}^*$, $\operatorname{card} \mathfrak{B}^* = \omega$, $R^{\mathfrak{A}^*} = R^{\mathfrak{B}^*}$, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}^*$, $b \in B^* - A^*$ *и* p *реализуется в* $\mathfrak{B}^*$.

Доказательство. Пусть K — одноместный предикатный символ, не входящий в $\mathfrak{L}$. Пусть $\mathfrak{L}_A^K$ — язык, полученный добавлением к $\mathfrak{L}$ символа K и констант для всех элементов из A. Каждой формуле H языка $\mathfrak{L}_A^K$

сопоставляется формула H^K, которая определяется индукцией по длине H:

(i) если H не содержит кванторов, то H^K совпадает с H;

(ii) если H есть $(\mathrm{E}x)\,F$, то H^K есть $(\mathrm{E}\,x)\,(K\,(x)\ \&\ F)$.

Формула H^K называется ограничением H на K.

Обозначим через S следующее множество предложений:

(1) $T\,(\langle\mathfrak{B},\ b\rangle_{b\in B})$, $K\,(\boldsymbol{a})$ для всех $a \in A$;

(2) H^K для каждой формулы $H \in T\,(\langle\mathfrak{A},\ a\rangle_{a\in A})$;

(3) универсальное замыкание формулы

$$[H^K\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)\ \&\ K\,(x_1)\ \&\ \ \ldots\ \&\ K\,(x_n)] \to \\ \to H\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

для каждой формулы $H\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ языка $\mathfrak{L}$;

(4) $(x)\,[R\,(x) \to K\,(x)]$;

(5) $\neg\,K\,(\boldsymbol{b})$, где b — данный элемент из $B - A$.

(6) $G\,(\boldsymbol{c})$ для каждой $G\,(x) \in p$, где $\boldsymbol{c}$ — предметная константа, не входящая в (1) — (5). (Для простоты обозначений считаем $n = 1$ и $m = 0$.)

Множество S совместно, так как любое конечное подмножество из S выполняется в $\mathfrak{B}$, если интерпретировать $K\,(x)$ как „$x \in A$". Пусть $\mathfrak{B}^*$ — счетная модель для S. Положим

$$A^* = \{b \mid \mathfrak{B}^* \models K\,(\boldsymbol{b})\}.$$

Для любого n-местного предикатного символа J языка $\mathfrak{L}$ определим

$$J^{\mathfrak{A}^*} = J^{\mathfrak{B}^*} \cap (A^*)^n.$$

Функции и выделенные элементы в $\mathfrak{A}^*$ определяются аналогично. По (1) $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}^*$. По (1), (2) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}^*$. По (3) $\mathfrak{A}^* \prec \mathfrak{B}^*$. По (4) $R^{\mathfrak{A}^*} = R^{\mathfrak{B}^*}$. По (5) $b \in B^* - A^*$. Наконец, в силу (6) p реализуем в $\mathfrak{B}^*$. □

Предложение 22.2. *Пусть* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, card $\mathfrak{B} = \omega$, $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}}$, $b \in B - A$ *и* $p \in S_n T\,(\langle\mathfrak{A},\ a_i\rangle_{i<m})$. *Тогда существуют системы* $\mathfrak{A}^*$ *и* $\mathfrak{B}^*$, *такие, что* $\mathfrak{A}^* \prec \mathfrak{B}^*$, card $\mathfrak{B}^* = \omega$, $R^{\mathfrak{A}^*} = R^{\mathfrak{B}^*}$, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}^*$, $b \in B^* - A^*$ *и* p *реализуем в* $\mathfrak{A}^*$.

Доказательство проводится так же, как и для 22.1. Единственное изменение в пункте (6): $G\,(\boldsymbol{c})$ заменяется на $G\,(\boldsymbol{c})\ \&\ K\,(\boldsymbol{c})$. □

Лемма 22.3. *Пусть* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, card $\mathfrak{B} = \omega$, $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}}$ *и* $A \neq B$. *Тогда существуют системы* $\mathfrak{A}^*$ *и* $\mathfrak{B}^*$, *такие, что* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{A}^* \prec \mathfrak{B}^*$, $R^{\mathfrak{A}^*} = R^{\mathfrak{B}^*}$, $A^* \neq B^*$, $\mathfrak{B}^*$ *счетна*, $\mathfrak{A}^*$ *и* $\mathfrak{B}^*$ *однородны и* $\mathfrak{A}^* \approx \mathfrak{B}^*$.

Доказательство. Аналогично 20.5. По 22.1 и 22.2 существует диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{B}_0 & \prec & \mathfrak{B}_1 & \prec & \mathfrak{B}_2 & \prec & \cdots \\
\vee & & \vee & & \vee & & \\
\mathfrak{A}_0 & \prec & \mathfrak{A}_1 & \prec & \mathfrak{A}_2 & \prec & \cdots
\end{array}$$

удовлетворяющая условиям

(1) $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$;

(2) существует такое b, что $b \in B_i - A_i$ для всех i;

(3) $R^{\mathfrak{A}_i} = R^{\mathfrak{B}_i}$; $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ счетны;

(4) если $p \in S_n T$ реализуем в $\mathfrak{B}_{3i}$, то p реализуем в $\mathfrak{A}_{3i+1}$;

(5) каждый частичный автоморфизм системы $\mathfrak{B}_{3i+1}$ непосредственно доопределим в $\mathfrak{B}_{3i+2}$ (ср. с 20.5);

(6) каждый частичный автоморфизм системы $\mathfrak{A}_{3i+2}$ непосредственно доопределим в $\mathfrak{A}_{3i+3}$.

Положим $\mathfrak{B}^* = \bigcup \{\mathfrak{B}_i \mid i < \omega\}$ и $\mathfrak{A}^* = \bigcup \{\mathfrak{A}_i \mid i < \omega\}$. По 20.4 $\mathfrak{A}^* \approx \mathfrak{B}^*$. □

Лемма 22.4 (Вот). *Пусть* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, $A \neq B$, card $\mathfrak{B} = \omega$ *и* $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}}$. *Тогда существует такая система* $\mathfrak{C} \succ \mathfrak{B}$, *что* card $\mathfrak{C} = \omega_1$ *и* card $R^{\mathfrak{C}} \leqslant \omega$.

Доказательство. Вследствие 22.3 можно предполагать, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ однородны и изоморфны. Индукцией по δ определим элементарную цепь $\{\mathfrak{C}_\delta \mid \delta < \omega_1\}$:

(i) $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{A}$.

(ii) Допустим, что $\mathfrak{C}_\delta \approx \mathfrak{C}_0$. Выберем $\mathfrak{C}_{\delta+1}$ так, что $\mathfrak{C}_\delta \prec \mathfrak{C}_{\delta+1}$, $C_\delta \neq C_{\delta+1}$, $R^{\mathfrak{C}_\delta} = R^{\mathfrak{C}_{\delta+1}}$ и $\mathfrak{C}_\delta \approx \mathfrak{C}_{\delta+1}$. Система $\mathfrak{C}_{\delta+1}$ находится в том же отношении к $\mathfrak{C}_\delta$, что и $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{A}$.

(iii) Если λ — предельный ординал, то $\mathfrak{C}_\lambda =$

$= \bigcup \{\mathfrak{C}_\delta \mid \delta < \lambda\}$. Допустим, что $\mathfrak{C}_\delta \approx \mathfrak{C}_0$ для любого $\delta < \lambda$. По 20.6 $\mathfrak{C}_\lambda \approx \mathfrak{C}_0$.

Полагаем $\mathfrak{C} = \bigcup \{\mathfrak{C}_\delta \mid \delta < \omega_1\}$. □

Пару $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ назовем *парой Вота* для T, если существует такая формула $R(x)$, что $\mathfrak{A} \models T$, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, $A \neq B$, $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}}$ и $R^{\mathfrak{A}}$ бесконечно.

Следствие 22.5. *Если теория T ω_1-категорична, то она не имеет пар Вота.*

Доказательство. Пусть K — одноместный предикатный символ, не входящий в T. Для любой формулы H в языке теории T определим H^K, ограничение H на K, как в доказательстве 22.1. Обозначим через S следующее множество предложений:

(1) T;

(2) универсальное замыкание формулы

$$[H^K(x_1, \ldots, x_n) \,\&\, K(x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, K(x_n)] \to \\ \to H(x_1, \ldots, x_n)$$

для любой формулы $H(x_1, \ldots, x_n)$ в языке теории T;

(3) $(x)[R(x) \to K(x)]$;

(4) $\neg K(b)$, где b — предметная константа, не входящая в язык теории T.

Допустим, что T имеет пару Вота $\langle \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \rangle$, такую, что $R^{\mathfrak{C}} = R^{\mathfrak{D}}$ и $R^{\mathfrak{D}}$ бесконечно. Тогда множество S совместно, потому что $\mathfrak{D}$ можно рассматривать как модель для S, интерпретируя $K(x)$ как „$x \in C$". Пусть $\mathfrak{B}^*$ — счетная модель для S. Определим $\mathfrak{A}^*$ как в доказательстве 22.1. Тогда $\langle \mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \rangle$ есть пара Вота. По 22.4 T имеет такую модель $\mathfrak{C}^*$, что card $\mathfrak{C}^* = \omega_1$ и card $R^{\mathfrak{C}^*} = \omega$. В силу компактности T имеет модель $\mathfrak{D}^*$, такую, что card $\mathfrak{D}^* = \omega_1$ и card $R^{\mathfrak{D}^*} = \omega_1$. Понятно, что $\mathfrak{C}^* \not\approx \mathfrak{D}^*$. □

Теорема 22.6 (Вот). *Если $\varkappa > \rho \geqslant \omega$, то $\langle \varkappa, \rho \rangle \to \langle \omega_1, \omega \rangle$.*

Доказательство. Пусть card $\mathfrak{D} = \varkappa$ и card $R^{\mathfrak{D}} = \rho$. По теореме Лёвенгейма — Сколема (11.2) существует $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{D}$, такая, что $R^{\mathfrak{C}} = R^{\mathfrak{D}}$ и card $\mathfrak{C} = \rho$. Тогда $\langle \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \rangle$ есть пара Вота для $T\mathfrak{D}$. Как и в доказатель-

стве 22.5, $T\mathfrak{D}$ имеет модель $\mathfrak{D}^*$, такую, что card $\mathfrak{D}^* = \omega_1$ и card $R^{\mathfrak{D}^*} = \omega$. □

§ 23. ТЕОРЕМА ЧЭНА О ДВУХ КАРДИНАЛАХ

Пусть $\mathfrak{L}$ — счетный язык, и пусть $R(x)$ — выделенная формула этого языка. Допустим, что $\mathfrak{B}$ — система той же сигнатуры, что и $\mathfrak{L}$, и card $\mathfrak{B} >$ card $R^{\mathfrak{B}} \geqslant \omega$. По 22.6 существует такая система $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{B}$, что card $\mathfrak{C} = \omega_1$ и card $R^{\mathfrak{C}} = \omega$. Пусть $\varkappa$ — регулярный несчетный кардинал, такой, что $2^\rho \leqslant \varkappa$ для всех $\rho < \varkappa$. Мы докажем ниже, что существует такая система $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{B}$, что card $\mathfrak{C} = \varkappa^+$ и card $R^{\mathfrak{C}} = \varkappa$. Допущения относительно $\varkappa$ требуются, чтобы получить некоторые насыщенные системы мощности $\varkappa$. Эти системы будут использоваться для опускания типов, подобно тому как использовались в доказательстве 22.4 счетные однородные системы.

Предложение 23.1. *Пусть* card $\mathfrak{B} >$ card $R^{\mathfrak{B}} \geqslant \omega$. *Пусть* $\varkappa$ — *регулярный несчетный кардинал, такой, что* $2^\rho \leqslant \varkappa$ *для любого* $\rho < \varkappa$. *Тогда существуют изоморфные насыщенные системы* $\mathfrak{A}_0$ *и* $\mathfrak{A}_1$, *такие, что* $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_0 \neq \mathfrak{A}_1$, $R^{\mathfrak{A}_0} = R^{\mathfrak{A}_1}$ *и* card $\mathfrak{A}_0 =$ card $\mathfrak{A}_1 =$ card $R^{\mathfrak{A}_1} = \varkappa$.

Доказательство. Из теоремы 11.2 Лёвенгейма — Сколема следует, что существует $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, такая, что $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}}$ и card $R^{\mathfrak{A}} =$ card $\mathfrak{A}$. Выберем $b \in B - A$. Пусть K — одноместный предикатный символ, не входящий в $\mathfrak{L}$, и пусть $\mathfrak{L}^K$ получается добавлением к $\mathfrak{L}$ символа K. Определим H^K, как в доказательстве 22.1, и обозначим через S следующее множество предложений:

(1) $T\mathfrak{B}$;

(2) универсальное замыкание формулы

$$[H^K(x_1, \ldots, x_n) \,\&\, K(x_1), \ldots, \&\, K(x_n)] \to H(x_1, \ldots, x_n)$$

для любой формулы $H(x_1, \ldots, x_n)$ языка $\mathfrak{L}$;

(3) $(x)[R(x) \to K(x)]$;

(4) $\neg K(b)$, где b — выбранный элемент из $B - A$.

Множество S совместно, так как $\mathfrak{B}$ является моделью для S, если интерпретировать $K(x)$ как „$x \in A$". Пусть $\mathfrak{A}_1$ — насыщенная модель для S мощности $\varkappa$. Существование $\mathfrak{A}_1$ следует из 16.5. Положим

$$A_0 = \{a \mid a \in A_1 \ \& \ \mathfrak{A}_1 \models K(a)\}.$$

Предикаты и функции на $\mathfrak{A}_0$ определяются с помощью ограничения. Таким образом, для любого n-местного предикатного символа J языка $\mathfrak{L}$

$$J^{\mathfrak{A}_0} = J^{\mathfrak{A}_1} \cap (A_0)^n.$$

По (1) $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}_1$. По (2) $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1$. По (3) $R^{\mathfrak{A}_0} = R^{\mathfrak{A}_1}$. А в силу (4) $\mathfrak{A}_0 \neq \mathfrak{A}_1$. Из (1) следует, что card $R^{\mathfrak{A}_1} \geqslant \omega$. Так как $\mathfrak{A}_1$ насыщена, то card $R^{\mathfrak{A}_1} = \varkappa$. Покажем, что $\mathfrak{A}_0$ насыщена. Пусть $p \in S_1T(\langle \mathfrak{A}_0, x \rangle_{x \in X})$, где card $X < \varkappa$. Конъюнкция любого конечного подмножества из $p \cup \{K(x)\}$ выполнима в $\mathfrak{A}_1$, следовательно, p реализуется в $\mathfrak{A}_0$. По 16.3 $\mathfrak{A}_0 \approx \mathfrak{A}_1$. □

Пусть система $\mathfrak{A}$ такова, что card $R^{\mathfrak{A}} \geqslant \omega$. Система $\mathfrak{A}$ называется *R-насыщенной*, если каждый тип p со следующим свойством реализуется в $\mathfrak{A}$:

$$p \in S_1T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y}), \text{ card } Y < \text{card } \mathfrak{A} \text{ и } R(x) \in p.$$

Можно использовать R-насыщенные системы, чтобы обойти один недостаток насыщенных систем, а именно что объединение элементарной цепи насыщенных систем не обязано быть насыщенным. Если бы объединение всегда было насыщенным, то теорему Чэна о двух кардиналах можно было бы доказать следующим образом. Начать с пары систем $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, построенной в предложении 23.1. Построить с помощью индукции по δ элементарную цепь $\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \varkappa^+\}$.

(i) Зафиксировать $\delta > 1$ и предположить, что $\mathfrak{A}_\gamma$ изоморфна $\mathfrak{A}_0$ и, следовательно, насыщена для всех $\gamma < \delta$.

(ii) Если δ — предельный ординал, положить $\mathfrak{A}_\delta = \bigcup \{\mathfrak{A}_\gamma \mid \gamma < \delta\}$. Тогда (если бы объединение элементарной цепи насыщенных систем было всегда насыщенным) $\mathfrak{A}_\delta$ насыщена и, следовательно, изоморфна $\mathfrak{A}_0$.

(iii) Если δ — последователь некоторого ординала, то выбрать $\mathfrak{A}_\delta$ так, чтобы $\mathfrak{A}_\delta$ находилась в таком же отноше-

нии к $\mathfrak{A}_{\delta-1}$, в каком $\mathfrak{A}_1$ находится к $\mathfrak{A}_0$. Тогда $\mathfrak{A}_{\delta-1} \prec \mathfrak{A}_\delta$, $\mathfrak{A}_{\delta-1} \neq \mathfrak{A}_\delta$, $\mathfrak{A}_{\delta-1} \approx \mathfrak{A}_\delta$ и $R^{\mathfrak{A}_{\delta-1}} = R^{\mathfrak{A}_\delta}$.

Положить $\mathfrak{C} = \bigcup \{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \varkappa^+\}$. Тогда card $\mathfrak{C} = \varkappa^+$ и $R^{\mathfrak{C}} = R^{\mathfrak{A}_0}$. Хотя замечание в скобках в пункте (ii) ложно, можно доказать теорему Чэна таким путем, как указано в (i) — (iii), заменив насыщенные системы R-насыщенными. Чтобы превратить шаг (ii) в нечто правильное, требуется еще некоторое слабое предположение относительно $\mathfrak{A}_0$. Сигнатура системы $\mathfrak{A}_0$ должна содержать двуместный предикатный символ $N(y, x)$, такой, что формулы

(1) $N(y, x) \to R(y) \,\&\, R(x)$,

($2n$) $R(x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, R(x_n) \to$
$\to (\mathrm{E}y)(x)\,[N(y, x) \leftrightarrow x = x_1 \vee \ldots \vee x = x_n]$

истинны в $\mathfrak{A}_0$ для всех $n > 0$. Если в сигнатуре нет такого N, то можно его добавить. Система $\mathfrak{A}_0$ была получена по 23.1. В 23.1 предполагается, что существует система $\mathfrak{B}$, такая, что card $R^{\mathfrak{B}} \geqslant \omega$. Добавление подходящего $N^{\mathfrak{B}}$ к $\mathfrak{B}$ не более сложно, чем выбор одноднозначного соответствия между $R^{\mathfrak{B}}$ и конечными подмножествами в $R^{\mathfrak{B}}$. В результате добавления $N^{\mathfrak{B}}$ к $\mathfrak{B}$ каждое конечное подмножество $R^{\mathfrak{B}}$ получает «имя» в $R^{\mathfrak{B}}$.

Так как $\mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}_0$ насыщена, то результатом добавления $N^{\mathfrak{A}_0}$ является запас «имен» в $R^{\mathfrak{A}_0}$ для подмножеств из $R^{\mathfrak{A}_0}$ мощности, меньшей card $\mathfrak{A}_0$. Говорим, что $N^{\mathfrak{A}_0}$ — *называющее* отношение для $\mathfrak{A}_0$.

Лемма 23.2 (Чэн). *Пусть $\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \lambda\}$ — элементарная цепь R-насыщенных систем мощности $\varkappa$, таких, что $R^{\mathfrak{A}_\delta} = R^{\mathfrak{A}_0}$ для всех $\delta < \lambda$. Пусть $\lambda < \varkappa^+$ и $\mathfrak{A}_0$ имеет называющее отношение $N^{\mathfrak{A}_0}$. Тогда система*

$$\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup \{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \lambda\}$$

является R-насыщенной.

Доказательство. Пусть $p \in S_1 T(\langle \mathfrak{A}_\lambda, y\rangle_{y \in Y}$, card $Y <$ card $\mathfrak{A}_\lambda$ и $R(x) \in p$. Тогда

$$p = \{G_i(x) \mid i \in I\},$$

где card $I <$ card $\mathfrak{A}_\lambda$. Для любого конечного подмножества $J \subset I$ выберем $a_J \in R^{\mathfrak{A}_\lambda} = R^{\mathfrak{A}_0}$ так, чтобы выполнялось

$$\mathfrak{A}_\lambda \models G_i\,(\boldsymbol{a}_J) \text{ для всех } i \in J.$$

Пусть λ — предельный ординал. Зафиксируем $i \in I$; каждый элемент из A_λ, о котором упоминается в $G_i\,(x)$, входит в A_{δ_i} для некоторого $\delta_i < \lambda$, такого, что card $I <$ $<$ card $\mathfrak{A}_{\delta_i}$. Теперь нужно найти $b_i \in R^{\mathfrak{A}_0}$ со с ойствами

(a) $\mathfrak{A}_{\delta_i} \models (x)\,[N\,(\boldsymbol{b}_i,\ x) \to G_i\,(x)]$;

(b) $\mathfrak{A}_{\delta_i} \models N\,(\boldsymbol{b}_i,\ \boldsymbol{a}_J)$ для всех J, таких, что $i \in J$.

Элемент b_i будет служить «именем» для некоторого подмножества множества

$$\{a \mid \mathfrak{A}_{\delta_i} \models G_i\,(\boldsymbol{a})\},$$

которое включает в себя все a_J для $J \ni i$. Так как все a_J принадлежат $R^{\mathfrak{A}_0}$, то каждое конечное множество тех a_J, которые удовлетворяют $G_i\,(x)$, имеет «имя» в $R^{\mathfrak{A}_0}$. Следовательно, существование b_i вытекает из R-насыщенности системы $\mathfrak{A}_{\delta_i}$.

Выберем $q \in S_1T\,(\langle \mathfrak{A}_0,\ b_i \rangle_{i \in I})$, такое, что

$$q \supset \{N\,(\boldsymbol{b}_i,\ x) \mid i \in I\}.$$

Такое q существует, потому что для любого конечного $J \subset I$ конъюнкция $\{N\,(\boldsymbol{b}_i,\ x) \mid i \in J\}$ выполняется при $x = a_J$. Любая реализация для q в $\mathfrak{A}_0$ есть реализация для p в $\mathfrak{A}_\lambda$. Но q реализуем в $\mathfrak{A}_0$, так как $\mathfrak{A}_0$ R-насыщена. □

Лемма 23.3. *Пусть* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, card $\mathfrak{A} =$ card $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ *насыщена и* $\mathfrak{A}$ *R-насыщена. Тогда существует такое* $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B}$, *что* $f\,[R^{\mathfrak{A}}] = R^{\mathfrak{B}}$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_\delta \mid \delta < \varkappa\}$ и $R^{\mathfrak{B}} = \{b_\delta \mid \delta <$ card $R^{\mathfrak{B}}\}$. Индукцией по δ определим множество $\{\langle a^*_\delta,\ b^*_\delta \rangle \mid \delta < \varkappa\}$. Зафиксируем δ и допустим, что

$$\langle \mathfrak{A},\ a^*_\gamma \rangle_{\gamma<\delta} \equiv \langle \mathfrak{B},\ b^*_\gamma \rangle_{\gamma<\delta}.$$

Случай 1. δ четно. Пусть a^*_δ — элемент множества $A - \{a^*_\gamma \mid \gamma < \delta\}$ с наименьшим индексом. Пусть

p есть

$$\{F(x) \mid \langle \mathfrak{A}, a_\gamma^* \rangle_{\gamma<\delta} \models F(a_\delta^*)\}.$$

Так как $\mathfrak{B}$ насыщена, p реализуется в $\mathfrak{B}$ некоторым элементом b; полагаем $b_\delta^* = b$.

Случай 2. δ нечетно и $\delta < \operatorname{card} R^{\mathfrak{B}}$. Пусть b_δ^* — элемент множества $R^{\mathfrak{B}} - \{b_\gamma^* \mid \gamma < \delta\}$ с наименьшим индексом. Пусть q есть

$$\{F(x) \mid \langle \mathfrak{B}, b_\gamma^* \rangle_{\gamma<\delta} \models F(b_\delta^*)\}.$$

Ясно, что $R(x) \in q$. Так как система $\mathfrak{A}$ R-насыщена, то q реализуется в $\mathfrak{A}$ некоторым элементом $a \in R^{\mathfrak{A}}$; полагаем $a_\delta^* = a$.

Определим $f\colon A \to B$, полагая $fa_\delta^* = b_\delta^*$. По случаю 1 область определения f есть A. По случаю 2 f отображает $R^{\mathfrak{A}}$ на $R^{\mathfrak{B}}$. □

Теорема 23.4 (Чэн). *Если $\mu' > \mu \geqslant \omega$ и $\varkappa$ — регулярный несчетный кардинал, такой, что $2^\rho \leqslant \varkappa$ для всех $\rho < \varkappa$, то*

$$\langle \mu', \mu \rangle \to \langle \varkappa^+, \varkappa \rangle.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ имеет двухкардинальный тип $\langle \mu', \mu \rangle$. Допустим, что $\mathfrak{B}$ обладает называющим отношением $N^{\mathfrak{B}}$. По 23.1 существуют насыщенные системы $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ мощности $\varkappa$, такие, что $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_0 \neq \mathfrak{A}_1$ и $R^{\mathfrak{A}_0} = R^{\mathfrak{A}_1}$. Индукцией по δ определим элементарную цепь $\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \varkappa^+\}$.

(i) Зафиксируем $\delta > 1$ и допустим, что системы $\mathfrak{A}_\gamma$ R-насыщены, $\operatorname{card} \mathfrak{A}_\gamma = \varkappa$ и $R^{\mathfrak{A}_\gamma} = R^{\mathfrak{A}_0}$ для всех $\gamma < \delta$.

(ii) Если δ — предельный ординал, то полагаем $\mathfrak{A}_\delta = \bigcup \{\mathfrak{A}_{\delta'} \mid \delta' < \delta\}$. Тогда $\mathfrak{A}_\delta$ является R-насыщенной системой по 23.2.

(iii) Если δ — последователь некоторого ординала, то по 23.3 существует такое $f\colon \mathfrak{A}_{\delta-1} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{A}_0$, что $f[R^{\mathfrak{A}_{\delta-1}}] = R^{\mathfrak{A}_0}$. Выберем $\mathfrak{A}_\delta$ так, чтобы система $\mathfrak{A}_\delta$ находилась в том же отношении к $\mathfrak{A}_{\delta-1}$, в каком $\mathfrak{A}_1$ находится к $f[\mathfrak{A}_{\delta-1}]$. Тогда $\mathfrak{A}_\delta \succ \mathfrak{A}_{\delta-1}$, $\mathfrak{A}_\delta \neq \mathfrak{A}_{\delta-1}$, $R^{\mathfrak{A}_\delta} = R^{\mathfrak{A}_{\delta-1}}$ и $\mathfrak{A}_\delta$ R-насыщена.

Положим $\mathfrak{C} = \bigcup \{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \varkappa^+\}$. Тогда $\operatorname{card} \mathfrak{C} = \varkappa^+$ и $R^{\mathfrak{A}_0} = R^{\mathfrak{C}}$. □

Заключительное замечание о роли насыщенных систем в доказательстве теоремы Чэна о двух кардиналах: Условие R-насыщенности системы $\mathfrak{A}_0$ означает, что любое возможное добавление к $R^{\mathfrak{A}_0}$ уже было реализовано в $\mathfrak{A}_0$. Поскольку $R^{\mathfrak{A}_0}$ столь богато, то кажется правдоподобным, что $\mathfrak{A}_0$ можно расширить, не реализуя типа «x есть новый элемент R».

Йенсен показал, что если имеет место аксиома конструктивности ($V = L$) Гёделя, то

$$\langle \mu', \mu \rangle \to \langle \varkappa^+, \varkappa \rangle,$$

где $\mu' > \mu \geqslant \omega$ и $\varkappa \geqslant \omega$. Его доказательство для сингулярного $\varkappa$ использует идеи, изложенные после 23.2 и 24.3.

§ 24. ТЕОРЕМА КЕЙСЛЕРА О ДВУХ КАРДИНАЛАХ

Еще один метод опускания типов дает теорема полноты (24.2) для ω-логики.

С данной сигнатурой τ связан язык первого порядка $\mathfrak{L}_\tau$, определенный в § 4. Можно также связать с τ язык ω-логики $\mathfrak{L}_\tau^\omega$, который получается добавлением к $\mathfrak{L}_\tau$ одноместного предикатного символа N и множества $\{\boldsymbol{n} \mid n < \omega\}$ предметных констант. Предполагается, что N и константы $\boldsymbol{n}$, где $n < \omega$, не входят в $\mathfrak{L}_\tau$. Термы и формулы языка $\mathfrak{L}_\tau^\omega$ определяются, как в § 4.

Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *ω-системой*, если $\{n \mid n < \omega\} \subset A$. Если $\mathfrak{A}$ есть ω-система сигнатуры τ, то ее можно обогатить до системы $\mathfrak{A}^\omega$, в которой все предложения языка $\mathfrak{L}_\tau^\omega$ имеют определенные истинностные значения. Система $\mathfrak{A}^\omega$ есть $\mathfrak{A}$ с добавленным одноместным предикатом

$$N^{\mathfrak{A}} = \{n \mid n < \omega\}$$

и множеством $\{n \mid n < \omega\}$ выделенных элементов. Пусть $H(x_1, \ldots, x_n)$ — формула языка $\mathfrak{L}_\tau^\omega$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$. Тогда мы считаем, что $\mathfrak{A} \models H(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, если $\mathfrak{A}^\omega \models$

$\models H(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ в смысле § 5, когда $\boldsymbol{n}$ интерпретируется как n, а $N(x)$ — как „$x \in N^{\mathfrak{A}_\omega}$".

Язык $\mathfrak{L}_\tau^\omega$ имеет значительно больше выразительных средств, чем $\mathfrak{L}_\tau$. Например, каждая модель для формулы $(x)(\mathrm{E}y)(x = y \& N(y))$ счетна.

Пусть S — множество предложений языка $\mathfrak{L}_\tau^\omega$, включающее в себя $\{\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{n} \mid m \neq n\} \cup \{N(\boldsymbol{n}) \mid n \in \omega\}$. Множество S называется *ω-совместным*, если оно совместно (в смысле § 7) и если для любого предложения языка $\mathfrak{L}_\tau^\omega$ вида $(\mathrm{E}x)[N(x) \& F(x)]$ из совместности множества

$$S \cup \{(\mathrm{E}x)[N(x) \& F(x)]\}$$

следует совместность множества $S \cup \{F(\boldsymbol{n})\}$ для некоторого n. Понятие ω-совместности не является финитарным, т. е. может случиться, что каждое конечное подмножество $S_0 \subset S$ ω-совместно, а все S — нет. Тем не менее понятие ω-совместности абсолютно.

Предложение 24.1. *Пусть S есть ω-совместное множество предложений ω-логики, и пусть G — предложение той же сигнатуры, что и S. Если $S \cup \{G\}$ совместно, то $S \cup \{G\}$ ω-совместно.*

Доказательство. Пусть $S \cup \{G, (\mathrm{E}x)[N(x) \& F(x)]\}$ совместно. Тогда $S \cup \{(\mathrm{E}x)[G \& N(x) \& F(x)]\}$ совместно, так как G есть предложение. Но тогда для некоторого n множество

$$S \cup \{G \& F(\boldsymbol{n})\}$$

также совместно. □

Теорема 24.2 (Орей). *Если S — счетное ω-совместное множество предложений ω-логики, то S имеет модель* (ср. с упражнением 24.7).

Доказательство аналогично доказательству Генкина для теоремы 7.1; существенно используется счетность S. Пусть $\{\boldsymbol{c}_i \mid i < \omega\}$ — последовательность предметных констант, не входящих в S. Пусть $\{F_i(x) \mid i < \omega\}$ — пересчет всех формул (в языке множества S с добавленными $\boldsymbol{c}_i$), не содержащих свободных переменных, отличных от x. Определим индукцией по i последо-

вательность $\{T_i \mid i < \omega\}$ совместных множеств предложений. Построение будет гарантировать, что $T_\omega = \bigcup \{T_i \mid i < \omega\}$ ω-совместно и что каждое предложение или его отрицание принадлежит T_ω.

Положим $T_0 = S$. Зафиксируем $i \geqslant 0$. Допустим, что T_i уже определено так, что оно совместно и получено добавлением к S конечного числа предложений.

Случай 1. Переменная x входит свободно в $F_i(x)$. Выберем константу c_k, которая не входит ни в T_i, ни в $F_i(x)$. Положим

$$T_{i+1} = T_i \cup \{(\mathrm{E}x)\, F_i(x) \to F_i(c_k)\}.$$

Тогда T_{i+1} совместно, так как T_i совместно; доказательство то же, что и для 7.1.

Случай 2. $F_i(x)$ есть предложение, обозначим его через F_i.

Случай 2a. F_i не имеет вида $(\mathrm{E}x)\,[N(x) \,\&\, H(x)]$. Если $T_i \cup \{F_i\}$ совместно, положим $T_{i+1} = T_i \cup \{F_i\}$, в противном случае $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg F_i\}$. Как и в 7.1, T_{i+1} совместно.

Случай 2b. F_i имеет вид $(\mathrm{E}\,x)\,[N(x) \,\&\, H(x)]$.

Случай 2b (i). Множество $T_i \cup \{(\mathrm{E}x)\,[N(x) \,\&\, H(x)]\}$ не совместно. Положим $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg F_i\}$.

Случай 2b (ii). Множество $T_i \cup \{(\mathrm{E}\,x)\,[N(x) \,\&\, H(x)]\}$ совместно. По 24.1 существует такое n, что

$$T_i \cup \{N(n) \,\&\, H(n)\}$$

совместно, так как T_i отличается от S конечным числом формул. Положим

$$T_{i+1} = T_i \cup \{F_i,\ N(n),\ H(n)\}.$$

Пусть $T_\omega = \bigcup \{T_i \mid i < \omega\}$. По случаю 2 каждое предложение или его отрицание входит в T_ω. Так как каждое T_i совместно, то T_ω тоже совместно. Чтобы показать, что T_ω ω-совместно, допустим, что $T_\omega \cup \{(\mathrm{E}x)\,[N(x) \,\&\, H(x)]\}$ совместно. Из случая 2b следует, что

$$T_\omega \cup \{N(n) \,\&\, H(n)\}$$

совместно для некоторого n. Теперь модель $\mathfrak{A}$ для S можно построить из T_ω тем же способом, что в 7.1. Элементами множества A являются классы эквивалентности констант-

ных термов, входящих в T_ω. Свойство ω-совместности множества T_ω требуется, чтобы показать, что $\mathfrak{A} \models F$ тогда и только тогда, когда $F \in T_\omega$, где F — любое предложение ω-логики сигнатуры T_ω. □

Пусть $\mathfrak{B}$ — система, в сигнатуре которой содержится одноместный предикатный символ R и двуместный предикатный символ $\leqslant$. Пусть $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ — линейный порядок на B без наибольшего элемента. Пусть $F(y, z)$ — формула в языке системы $\langle \mathfrak{B}, b \rangle_{b \in B}$. Говорят, что $\mathfrak{B}$ обладает свойством $K_{F(y, z)}$, если $\mathfrak{B} \models$ (i) → (ii), где (i) есть

$$(u)\,(\mathrm{E}y)\,(\mathrm{E}z)\,[u \leqslant y \;\&\; R(z) \;\&\; F(y, z)],$$

а (ii) есть

$$(\mathrm{E}z)\,(u)\,(\mathrm{E}y)\,[u \leqslant y \;\&\; R(z) \;\&\; F(y, z)].$$

Говорим, что $\mathfrak{B}$ обладает *свойством* K, если она обладает свойством $K_{F(y, z)}$ для любой формулы $F(y, z)$ в языке системы $\langle \mathfrak{B}, b \rangle_{b \in B}$. Интуитивный смысл свойства K следующий: если f есть сколемовская функция на $\mathfrak{B}$, такая, что $fy \in R^{\mathfrak{B}}$ для как угодно больших y, то существует $z \in R^{\mathfrak{B}}$, такой, что $fy = z$ для произвольно больших y.

Лемма 24.3 (Кейслер). *Пусть система $\mathfrak{B}$ счетна и обладает свойством K. Тогда существует счетная система $\mathfrak{C} \succ \mathfrak{B}$, такая, что $C \neq B$ и $R^{\mathfrak{C}} = R^{\mathfrak{B}}$.*

Доказательство. Если $R^{\mathfrak{B}}$ конечно, то лемма следует из 7.3. Предположим, что $R^{\mathfrak{B}}$ бесконечно и

$$\{b \mid b \in R^{\mathfrak{B}}\} = \{n \mid n < \omega\}.$$

Пусть S — следующее семейство предложений ω-логики:

(i) $T(\langle \mathfrak{B}, b \rangle_{b \in B})$;

(ii) $\{b < c \mid b \in B\}$, где c — предметная константа, не входящая в (i);

(iii) $(x)\,[R(x) \leftrightarrow N(x)]$.

Любая счетная модель для S может быть взята в качестве $\mathfrak{C}$, поэтому по 24.2 достаточно убедиться, что S ω-совместно. Любое конечное подмножество из S выполнимо в $\mathfrak{B}$, так как порядок $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ не имеет наибольшего элемента; следовательно, S совместно. Пусть $F(y, z)$ — такая фор-

мула в языке системы $\langle\mathfrak{B}, b\rangle_{b\in B}$, что

$$S \cup \{(\mathrm{E}\, z)\, [R\,(z)\ \&\ F\,(c, z)]\}$$

совместно. Так как S включает в себя $T\,(\langle\mathfrak{B}, b\rangle_{b\in B})$ и c интуитивно является произвольно большим элементом множества B, то

$$(u)\,(\mathrm{E}y)\,(\mathrm{E}z)\,[u \leqslant y\ \&\ R\,(z)\ \&\ F\,(y, z)]$$

истинно в $\mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B}$ обладает свойством $K_{F(y,\,z)}$, то существует такое n, что

$$(u)\,(\mathrm{E}y)\,[u \leqslant y\ \&\ R\,(n)\ \&\ F\,(y, n)\ ]$$

истинно в $\mathfrak{B}$. Но тогда

$$S \cup \{\, R\,(n)\ \&\ F\,(c, n)]$$

совместно, так как $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ не имеет наибольшего элемента. □

Теорема 24.4 (Кейслер). *Пусть* card $\mathfrak{A} >$ card $R^{\mathfrak{A}} \geqslant \omega$. *Тогда существуют системы* $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{C}$, *такие, что* card $\mathfrak{B} = \omega$, card $\mathfrak{C} = \omega_1$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ *и* $R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{C}}$.

Доказательство. По теореме Лёвенгейма — Сколема (11.2) можно предполагать, что

$$\text{card}\ \mathfrak{A} = (\text{card}\ R^{\mathfrak{A}})^{+}.$$

Добавим к сигнатуре системы $\mathfrak{A}$ двуместный предикатный символ $\leqslant$ и определим на $\mathfrak{A}$ отношение $\leqslant^{\mathfrak{A}}$, являющееся полным порядком на A, изоморфным полному порядку ординалов, меньших, чем card $\mathfrak{A}$. Так как кардинал card $\mathfrak{A}$ регулярен и больше, чем card $R^{\mathfrak{A}}$, то $\mathfrak{A}$ обладает свойством K.

Выберем счетную систему $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$. Ясно, что $\mathfrak{B}$ обладает свойством K. Индукцией по δ определим элементарную цепь $\{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < \omega_1\}$:

(i) $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$.

(ii) Если δ — предельный ординал, то $\mathfrak{B}_\delta = \bigcup\{\mathfrak{B}_\alpha \mid \alpha < \delta\}$. Система $\mathfrak{B}_\delta$ обладает свойством K, так как $\mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_\delta$ и $\mathfrak{B}_0$ обладает свойством K.

(iii) Допустим, что $\mathfrak{B}_\delta$ обладает свойством K. Тогда по 24.3 существует счетная система $\mathfrak{B}_{\delta+1} \succ \mathfrak{B}_\delta$, такая, что $B_{\delta+1} \neq B_\delta$ и $R^{\mathfrak{B}_{\delta+1}} = R^{\mathfrak{B}_\delta}$.

Полагаем $\mathfrak{C} = \bigcup\{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < \omega_1\}$. □

Доказательство теоремы 24.4 выявляет потенциальные возможности выразимости языка первого порядка. Система $\mathfrak{A}$ обладает свойством K по следующим причинам: card $\mathfrak{A}$ регулярен, card $\mathfrak{A} >$ card $R^{\mathfrak{A}}$ и $\leqslant^{\mathfrak{A}}$ есть полный порядок на A, изоморфный порядку на card $\mathfrak{A}$. Свойство K — свойство первого порядка, т. е. если $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B}$ обладает свойством K, то $\mathfrak{C}$ тоже обладает свойством K. Однако понятие полной упорядоченности не выразимо в языке первого порядка. (Существуют линейные порядки $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, такие, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ вполне упорядочено, а $\mathfrak{B}$ — нет.) Таким образом, K есть только остаток первого порядка от свойства $\mathfrak{A}$ второго порядка, но этого достаточно для доказательства опускания типа (24.3), использованного в 24.4.

Следующий результат является одним из наиболее типичных примеров применения теоремы о двух кардиналах для опускания типа.

Следствие 24.5 (Кейслер). *Пусть T — счетная теория, такая, что каждая модель для T мощности ω_1 однородна. Тогда каждая несчетная модель для T однородна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — несчетная модель для T. Допустим, что существует элементарный частичный автоморфизм g системы $\mathfrak{A}$, мощность которого меньше, чем мощность $\mathfrak{A}$, и который не является непосредственно доопределимым. Таким образом,

$$\langle \mathfrak{A}, u \rangle_{u \in U} = \langle \mathfrak{A}, gu \rangle_{u \in U},$$

но для некоторого $c \in A$

$$\langle \mathfrak{A}, u, c \rangle_{u \in U} \not\equiv \langle \mathfrak{A}, gu, b \rangle_{u \in U}$$

для любого $b \in A$. Добавление некоторых отношений и функций к $\mathfrak{A}$ дает возможность выразить указанное выше нарушение однородности единственным предложением ω-логики. Пусть $G^{\mathfrak{A}}$ — двуместный предикат, такой, что

$$\langle a_1, a_2 \rangle \in G^{\mathfrak{A}} \leftrightarrow ga_1 = a_2.$$

Допустим, что $\{n \mid n < \omega\} \subset A$. Пусть $t^{\mathfrak{A}}$ — трехместная функция, такая, что для любой последовательности $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n$ существует $a \in A$ со свойством

$$t^{\mathfrak{A}}(a, n, i) = a_i$$

для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Функция $t^{\mathfrak{A}}$ позволяет ввести кванторы по конечным последовательностям элементов из A. Поэтому формулу

$$(\mathrm{E}x_1) \ldots (\mathrm{E}x_n)\, Q(x_1, \ldots, x_n)$$

можно заменить на

$$(\mathrm{E}x)\, Q(t(x, n, 1), \ldots, t(x, n, n)).$$

Пусть $S^{\mathfrak{A}}$ — трехместный предикат, такой, что для всех n, $e < \omega$: $\langle n, e, a \rangle \in S^{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда e есть гёделевский номер формулы $F(x_1, \ldots, x_n)$ и

$$\mathfrak{A} \models F(t(a, n, 1), \ldots, t(a, n, n)).$$

Пусть $\mathfrak{A}^*$ есть обогащение $\mathfrak{A}$ с помощью $G^{\mathfrak{A}}$, $t^{\mathfrak{A}}$ и $S^{\mathfrak{A}}$. Тогда тот факт, что g не является непосредственно доопределимым в $\mathfrak{A}$, можно выразить единственным предложением ω-логики, истинным в $\mathfrak{A}^*$.

По 24.4, существуют системы $\mathfrak{B}^*$ и $\mathfrak{C}^*$, такие, что $\mathfrak{B}^* \prec \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^* \prec \mathfrak{C}^*$, $G^{\mathfrak{B}^*} = G^{\mathfrak{C}^*}$, card $\mathfrak{B}^* = \omega$ и card $\mathfrak{C}^* = \omega_1$. (Функция $t^{\mathfrak{A}}$ позволяет рассматривать $G^{\mathfrak{A}}$ как одноместный предикат.) Тогда $G^{\mathfrak{C}^*}$ есть график счетного элементарного частичного автоморфизма системы $\mathfrak{C}^*$, который не является непосредственно доопределимым в $\mathfrak{C}^*$, поэтому $\mathfrak{C}^*$ — неоднородная модель для T мощности ω_1. □

Шелах получил более сильное утверждение: в условиях предложения 24.5 каждая несчетная модель для T насыщена.

Упражнение 24.6. Пусть T — счетная теория, такая, что каждая модель для T мощности ω_1 насыщена. Показать, что каждая несчетная модель для T насыщена.

Упражнение 24.7. Пусть S — счетное множество предложений ω-логики. Допустим, что S имеет модель. Является ли S ω-совместным?

§ 25. КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ

В § 27 начинается классификация 1-типов по Морли. Ее основные свойства могут быть выражены в языке категорий и функторов; поэтому не удивительно, что аналогичные классификации 1-типов (см. Шелах [1], [2]) имеют подобные свойства. Производная Морли определяется в § 29 как операция, заданная на некоторых контравариантных функторах. В настоящем параграфе представлен обзор всех теоретико-категорных понятий, используемых в § 29.

Категория $\mathscr{K}$ состоит из объектов $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ и морфизмов $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $g\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}, \ldots$. Каждой паре морфизмов

$$f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \quad g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$$

сопоставляется морфизм $gf\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, называемый *композицией* морфизмов f и g. Каждому объекту $\mathfrak{A}$ сопоставляется морфизм $1_{\mathfrak{A}}\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, называемый *тождественным на* $\mathfrak{A}$. Композиция и тождество подчиняются двум аксиомам:

(i) $h(gf) = (hg)f$, где $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$; $g\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ и $h\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$.

(ii) $1_{\mathfrak{B}} f = f$ и $g 1_{\mathfrak{B}} = g$, где $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $g\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$.

Говорят, что $\mathscr{K}$ *допускает фильтрацию*, если для любой пары $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ объектов из $\mathscr{K}$ существуют объект $\mathfrak{C}$ и морфизмы $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ и $g\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$.

Говорят, что $\mathscr{K}$ допускает фильтрацию *с объединением*, если для любой пары $j\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{A}$, $k\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ морфизмов из $\mathscr{K}$ существуют объект $\mathfrak{C}$ и морфизмы $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ и $g\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, такие, что $fj = gk$.

В § 10 были определены направленные множества. Прямая система $\{\mathfrak{A}_i, f_{ij}\}$ в $\mathscr{K}$ состоит из направленного множества $\langle D, \leqslant \rangle$, семейства $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in D\}$ объектов из $\mathscr{K}$ и семейства $\{f_{ij}\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_j \mid i \leqslant j\}$ морфизмов из $\mathscr{K}$, таких, что

(a) $f_{ii} = 1_{\mathfrak{A}_i}$,

(b) $f_{ik} = f_{jk} \cdot f_{ij}$, где $i \leqslant j \leqslant k$.

Прямой предел в $\mathscr{K}$ прямой системы $\{\mathfrak{A}_i, f_{ij}\}$ состоит из объекта $\mathfrak{A}$ категории $\mathscr{K}$ и семейства $\{f_i\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A} \mid i \in D\}$ морфизмов категории $\mathscr{K}$, удовлетворяющих условиям:

(c) $f_j f_{ij} = f_i$ при $i \leqslant j$;

(d) пусть $\mathfrak{B}$ — любой объект из $\mathscr{K}$ и $\{g_i\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{B} \mid i \in D\}$ — любое семейство морфизмов из $\mathscr{K}$, такое, что $g_j f_{ij} = g_i$ при $i \leqslant j$; тогда существует в $\mathscr{K}$ единственный морфизм $g\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, такой, что $gf_i = g_i$ для всех i.

Из (d) следует свойство универсальности прямых пределов: все прямые пределы системы $\{\mathfrak{A}_i, f_{ij}\}$ (если они существуют в $\mathscr{K}$) изоморфны. Прямой предел системы $\{\mathfrak{A}_i, f_{ij}\}$ обозначается через $\varinjlim \mathfrak{A}_i$ или через $\mathfrak{A}_\infty$. Говорят, что $\mathscr{K}$ *допускает прямые пределы*, если любая прямая система в $\mathscr{K}$ имеет прямой предел в $\mathscr{K}$. Теорема 10.1 и предложение 10.2 утверждают, что категория всех алгебраических систем и всех элементарных мономорфизмов допускает прямые пределы.

Обратная система в $\mathscr{K}$ состоит из направленного множества $\langle D, \leqslant\rangle$, семейства $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in D\}$ объектов из $\mathscr{K}$ и семейства $\{f_{ji}\colon \mathfrak{A}_j \to \mathfrak{A}_i \mid i \leqslant j\}$ морфизмов из $\mathscr{K}$, удовлетворяющих условиям:

(1) $f_{ii} = 1_{\mathfrak{A}_i}$;

(2) $f_{ki} = f_{ji} f_{kj}$ при $i \leqslant j \leqslant k$.

Обратный предел в $\mathscr{K}$ обратной системы $\{\mathfrak{A}_i, f_{ji}\}$ состоит из объекта $\mathfrak{A}$ категории $\mathscr{K}$ и семейства $\{f_i\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_i \mid i \in D\}$ морфизмов категории $\mathscr{K}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(3) $f_{ji} f_j = f_i$ при $i \leqslant j$;

(4) пусть $\mathfrak{B}$ — любой объект из $\mathscr{K}$ и $\{g_i\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}_i \mid i \in D\}$ — семейство морфизмов из $\mathscr{K}$, таких, что $f_{ji} g_j = g_i$ при $i \leqslant j$; тогда существует в $\mathscr{K}$ единственный морфизм $g\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, такой, что $f_i g = g_i$ для всех i.

Из (4) следует свойство универсальности обратных пределов: все обратные пределы системы $\{\mathfrak{A}_i, f_{ji}\}$, если они существуют в $\mathscr{K}$, изоморфны. Обратный предел системы $\{\mathfrak{A}_i, f_{ji}\}$ обозначается через $\varprojlim \mathfrak{A}_i$ или через $\mathfrak{A}_\infty$. Говорят, что $\mathscr{K}$ *допускает обратные пределы*, если любая обратная система в $\mathscr{K}$ имеет обратный предел в $\mathscr{K}$. В § 26 будет

показано, что категория компактных хаусдорфовых пространств и непрерывных отображений «на» допускает обратные пределы.

Пусть $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ — две категории. *Контравариантным функтором* $F\colon \mathscr{K}_1 \to \mathscr{K}_2$ называется отображение, сопоставляющее каждому объекту $\mathfrak{A}$ из $\mathscr{K}_1$ объект $F\mathfrak{A}$ из $\mathscr{K}_2$, а каждому морфизму $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ из $\mathscr{K}_1$ — морфизм $Ff\colon F\mathfrak{B} \to F\mathfrak{A}$ из $\mathscr{K}_2$, причем выполнены условия:

(i) $F1_{\mathfrak{A}} = 1_{F\mathfrak{A}}$;

(ii) $Fgf = FfFg$, где $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $g\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$. Если $\{\mathfrak{A}_i, f_{ij}\}$ — прямая система в $\mathscr{K}_1$, то $\{F\mathfrak{A}_i, Ff_{ij}\}$ — обратная система в $\mathscr{K}_2$. Говорят, что F *сохраняет пределы*, если выполнены условия:

(a) $\{F\mathfrak{A}_i, Ff_{ij}\}$ имеет обратный предел в $\mathscr{K}_2$, если $\{\mathfrak{A}_i, f_{ij}\}$ имеет прямой предел в $\mathscr{K}_1$.

(b) Пусть прямой предел системы $\{\mathfrak{A}_i, f_{ij}\}$ состоит из $\mathfrak{A}_\infty$ и $\{f_i\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_\infty\}$, а обратный предел системы $\{F\mathfrak{A}_i, Ff_{ij}\}$ состоит из $\varprojlim F\mathfrak{A}_i$ и $\{g_i\colon \varprojlim F\mathfrak{A}_i \to F\mathfrak{A}_i\}$. Пусть

$$g\colon F\,\mathfrak{A}_\infty \to \varprojlim F\mathfrak{A}_i$$

— единственный морфизм, такой, что $g_i g = Ff_i$ для всех i. Тогда g — изоморфизм.

Категория $\mathscr{K}^*$ называется *подкатегорией* категории $\mathscr{K}$, если выполнены условия

(a) Каждый объект из $\mathscr{K}^*$ является объектом из $\mathscr{K}$.

(b) Каждый морфизм из $\mathscr{K}^*$ является морфизмом из $\mathscr{K}$.

(c) Если $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $g\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ принадлежат $\mathscr{K}^*$, то композиция f и g в $\mathscr{K}^*$ совпадает с композицией f и g в $\mathscr{K}$.

Подкатегория $\mathscr{K}^*$ называется *полной* подкатегорией категории $\mathscr{K}$, если $g\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ принадлежит $\mathscr{K}^*$, как только $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ принадлежат $\mathscr{K}^*$ и g принадлежит $\mathscr{K}$.

§ 26. ОБРАТНЫЕ СИСТЕМЫ КОМПАКТНЫХ ХАУСДОРФОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Классификация множества 1-типов, предложенная Морли, тесно связана с понятием обратного предела. Основным свойством производной Морли, которое будет уста-

новлено в § 29, является ее перестановочность с операцией обратного предела.

Пусть $\mathscr{H}$ — категория всех компактных хаусдорфовых пространств и всех непрерывных отображений на. Пусть $f\colon A \to B$ — некоторое отображение. Если $x \in B$, то $\{a \mid a \in A \ \&\ fa = x\}$ обозначаем через $f^{-1}x$. Если $U \subset B$, то $\{a \mid a \in A \ \&\ fa \in U\}$ обозначаем через $f^{-1}[U]$.

Предложение 26.1. *$\mathscr{H}$ допускает обратные пределы.*

Доказательство. Пусть $\{X_i, f_{ji}\}$ — обратная система в $\mathscr{H}$ с направленным множеством $\langle D, \leqslant\rangle$. Пусть X_∞ — множество $\{x \mid x \in \prod_{i \in D} X_i$ и $f_{ji}x_j = x_i$ для всех $j \geqslant i\}$, где x_i есть i-я координата x. Определим на $\prod_i X_i$ топологию произведения. Тогда X_∞ будет замкнутым, а следовательно, компактным подмножеством в $\prod_i X_i$. Зададим на X_∞ топологию подпространства. Определим

$$f_{\infty i}\colon X_\infty \to X_i$$

так: $f_{\infty i}\, x = x_i$. Ясно, что $f_{\infty i}$ непрерывно. Тот факт, что $f_{\infty i}$ является отображением на, следует из компактности $\prod_i X_i$. Базис открытых подмножеств X_∞ состоит из $f_{\infty j}^{-1}[U]$, где U пробегает базис открытых подмножеств пространства X_j.

Чтобы показать, что $\{X_\infty, f_{\infty i}\}$ — обратный предел системы $\{X_i, f_{ji}\}$, достаточно проверить свойство универсальности для $\{X_\infty, f_{\infty i}\}$. Предположим, что Y — компактное хаусдорфово пространство, а $\{g_i\colon Y \to X_i\}$ — семейство таких непрерывных отображений на, что $f_{ji}g_j = g_i$ для всех $j \geqslant i$. Определим $g\colon Y \to X_\infty$ при помощи равенства $(gy)_i = g_i y$. Из компактности Y следует, что g является отображением на. Ясно, что $f_{\infty i}g = g_i$ для всех $i \in D$. Предположим, что $f_{\infty i}h = g_i$ для всех $i \in D$, где $h\colon Y \to X_\infty$. Тогда $h = g$. □

Предложение 26.2. *Если $\{X_i, f_{ji}\}$ — обратная система в $\mathscr{H}$, то следующие условия эквивалентны:*

(i) *x является изолированной точкой в $\varprojlim X_i$;*

(ii) *существует такой i, что $f_{\infty i}x$ является изолирован-*

ной точкой в X_i и $f_{ji}^{-1}f_{\infty i}x$ состоит из одного элемента для всех $j \geqslant i$.

Доказательство. Предположим, что $\{x\}$ открыто. Тогда существует такой i и такое открытое подмножество $U \subset X_i$, что $\{x\} = f_{\infty i}^{-1}[U]$. Следовательно, $U = \{f_{\infty i}x\}$ и $f_{ji}^{-1}f_{\infty i}x = \{f_{\infty j}x\}$ для всех $j \geqslant i$.

Предположим, что справедливо (ii). Тогда $\{f_{\infty i}x\}$ открыто, $f_{\infty i}^{-1}f_{\infty i}x = \{x\}$ и $\{x\}$ открыто. □

Предложение 26.3. *Если отображение $f\colon X \to Y$ принадлежит $\mathscr{H}$ и является взаимно однозначным, то оно будет гомеоморфизмом.*

Доказательство. Предположим, что $U \subset X$ открыто. Пусть $\{V_i\}$ — открытое покрытие $Y - f[U]$. Тогда $\{f^{-1}[V_i]\}$ — открытое покрытие $X - U$. Так как $X - U$ компактно, то конечное число V_i покрывает $Y - f[U]$. Таким образом, $Y - f[U]$ компактно и $f[U]$ открыто. □

§ 27. ПОДХОД МОРЛИ К КЛАССИФИКАЦИИ 1-ТИПОВ

Пусть T — подмодельно полная теория и $\mathscr{K}(T)$ — категория всех подсистем всех моделей для T и всех мономорфизмов. Предположим, что $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \in \mathscr{K}(T)$. Система $\mathfrak{B}$ называется *простым расширением* системы $\mathfrak{A}$, если существует такой элемент $b \in B$, что $\mathfrak{B}$ есть наименьшая подсистема $\mathfrak{B}$, носитель которой содержит $A \cup \{b\}$, символически $\mathfrak{A}(b) = \mathfrak{B}$. Два простых расширения $\mathfrak{A}(b)$ и $\mathfrak{A}(c)$ системы $\mathfrak{A}$ *изоморфны над* $\mathfrak{A}$, если существует такой изоморфизм

$$f\colon \mathfrak{A}(b) \xrightarrow{\approx} \mathfrak{A}(c),$$

что $f \mid A = 1_A$ и $fb = c$. Если $\mathfrak{A}(b)$ и $\mathfrak{A}(c)$ изоморфны над $\mathfrak{A}$, то говорят, что b и c *изоморфны над* $\mathfrak{A}$. Существует не более одного такого $f\colon \mathfrak{A}(b) \xrightarrow{\approx} \mathfrak{A}(c)$, что $f \mid A = 1_A$ и $fb = c$, так как для каждого $a \in \mathfrak{A}(b)$ имеем $a = t(b)$, где $t(x)$ — терм сигнатуры $T \cup D\mathfrak{A}$.

Классификация Морли 1-типов дает классификацию типов изоморфизма простых расширений системы $\mathfrak{A}$. Эта классификация, в частности, устанавливает различие между алгебраическими и трансцендентными элементами. Наиболее интересной она является в случае ω-стабильной теории T. Обозначим через $S\mathfrak{A}$ множество $S_1(T \cup D\mathfrak{A})$. Так как T подмодельно полна, $T \cup D\mathfrak{A}$ — полная теория. Если $p \in S\mathfrak{A}$, то существует такое простое расширение $\mathfrak{A}(b)$, что b реализует p в любой модели T, расширяющей $\mathfrak{A}(b)$. Если b и c реализуют p, то существует единственный изоморфизм $f\colon \mathfrak{A}(b) \xrightarrow{\approx} \mathfrak{A}(c)$, для которого $f \mid A = 1_A$ и $fb = c$. Обратно, если b и c изоморфны над $\mathfrak{A}$, то они реализуют один и тот же 1-тип из $S\mathfrak{A}$. Таким образом, подмодельная полнота позволяет отождествлять 1-типы множества $S\mathfrak{A}$ и типы изоморфизма простых расширений системы $\mathfrak{A}$.

Каждая формула $F(x)$ сигнатуры $T \cup D\mathfrak{A}$ порождает подмножество

$$U_{F(x)} = \{p \mid F(x) \in p\}$$

множества $S\mathfrak{A}$. Совокупность всех таких подмножеств $S\mathfrak{A}$ возьмем в качестве базиса топологии $S\mathfrak{A}$. Тогда $S\mathfrak{A}$ станет стоуновским пространством, т. е. компактным хаусдорфовым пространством, у которого открыто-замкнутые множества образуют базис его топологии. (Множество называется открыто-замкнутым, если оно является открытым и замкнутым.) Компактность пространства $S\mathfrak{A}$ является непосредственным следствием 7.2.

Предположим, что $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ принадлежит $\mathscr{K}(T)$. Тогда

$$Sf\colon S\mathfrak{B} \to S\mathfrak{A}$$

определяется следующим образом:

$$F(a_1, \ldots, a_n, x) \in (Sf)\, q \Leftrightarrow F(fa_1, \ldots, fa_n, x) \in q.$$

Ясно, что Sf является непрерывным отображением на. Пусть

$$S\colon \mathscr{K}(T) \to \mathscr{B}$$

— контравариантный функтор, который ставит в соответствие системе $\mathfrak{A}$ из $\mathscr{K}(T)$ компактное хаусдорфово пространство $S\mathfrak{A}$ из $\mathscr{B}$, а каждому отображению

$f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ из $\mathscr{K}(T)$ — непрерывное отображение $Sf\colon S\mathfrak{B} \to S\mathfrak{A}$ из $\mathscr{H}$.

Предложение 27.1. (i) *Если T — подмодельно полная теория, то категория $\mathscr{K}(T)$ допускает прямые пределы и фильтрации с объединением, а контравариантный функтор $S\colon \mathscr{K}(T) \to \mathscr{H}$ сохраняет пределы.* (ii) *Если T полна, то $\mathscr{K}(T)$ допускает фильтрации.*

Доказательство. (i) Категория $\mathscr{K}(T)$ допускает фильтрации с объединением в силу 13.1, а прямые пределы — в силу 10.2. Пусть $\{\mathfrak{A}_i, f_{ij}\}$ — прямая система в $\mathscr{K}(T)$. Тогда $\{S\mathfrak{A}_i, Sf_{ij}\}$ — обратная система в $\mathscr{H}$. По 26.1 $\varprojlim S\mathfrak{A}_i$ существует. Пусть $g_i\colon \varprojlim S\mathfrak{A}_i \to S\mathfrak{A}_i$ таково, что $(Sf_{ij})\, g_j = g_i$, если $i \leqslant j$. Пусть $\mathfrak{A}_\infty = \varinjlim \mathfrak{A}_i$ и $f_{i\infty}\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_\infty$. Существует единственное отображение

$$h\colon S\mathfrak{A}_\infty \to \varprojlim S\mathfrak{A}_i,$$

такое, что $g_i h = Sf_{i\infty}$ для всех i. Если h взаимно однозначно, то по 26.3 оно является гомеоморфизмом. Предположим, что $hp = hq$. Тогда $g_i hp = g_i hq$, откуда $Sf_{i\infty}p = Sf_{i\infty}q$ для всех i. Следовательно, $p = q$.

(ii) $\mathscr{K}(T)$ допускает фильтрации в силу 7.7. □

§ 28. ПРОИЗВОДНАЯ КАНТОРА—БЕНДИКСОНА

Производная Морли является улучшенным вариантом производной Кантора — Бендиксона (в каком смысле «улучшенным», будет уточнено в начале § 29).

Пусть $X \in \mathscr{H}$. Точка x *изолирована* в X, если $\{x\}$ является открытым подмножеством X. Точка x является *предельной*, если она не изолирована. *Производной Кантора — Бендиксона* dX пространства X называется множество всех его предельных точек. Ясно, что $dX \in \mathscr{H}$. Для каждого ординала α по индукции определяется α-я производная Кантора — Бендиксона:

$$d^0X = X$$
$$d^{\alpha+1}X = d\,(d^\alpha X),$$
$$d^\lambda X = \bigcap \{d^\alpha X \mid \alpha < \lambda\}.$$

Для каждого α пространство $d^\alpha X$ принадлежит $\mathcal{HB}$. *Рангом Кантора — Бендиксона* α_X пространства X называется наименьший ординал α, для которого $d^\alpha X$ не имеет изолированных точек. Если $x \in X$ и для некоторого, а значит, единственного α имеем $x \in d^\alpha X - d^{\alpha+1}X$, то говорят, что x имеет *ранг Кантора — Бендиксона, равный* α. *Совершенным ядром* пространства X называется множество всех $x \in X$, не имеющих ранга Кантора — Бендиксона.

Теорема 28.1 (Кантор, Бендиксон). *Пусть* $X \in \mathcal{HB}$. (1) *Если* X *имеет счетный базис, то* $\alpha_X < \omega_1$. (2) *Если* X *счетно, то каждая его точка имеет ранг Кантора — Бендиксона.* (3) *Если каждая точка пространства* X *имеет ранг Кантора — Бендиксона, то множество его изолированных точек плотно в нем.*

Доказательство. (1) Пусть X имеет счетный базис. Для каждого $\alpha < \alpha_X$ выбираем $x_\alpha \in X$ и такое открытое множество U_α базиса, что $d^\alpha X \cap U_\alpha = \{x_\alpha\}$. Тогда $\alpha < \beta < \alpha_X$ влечет $x_\beta \notin U_\alpha$ и $U_\alpha \neq U_\beta$. Следовательно, α_X — счетный ординал.

(2) Предположим, что совершенное ядро пространства X, обозначим его через X_0^0, не пусто. Таким образом, X_0^0 — непустое замкнутое подмножество в X без изолированных точек. Зафиксируем $i \geqslant 0$ и $j < 2^i$. Пусть X_j^i — непустое замкнутое подмножество X без изолированных точек и $x, y \in X_j^i$ — различные точки. Так как $X \in \mathcal{HB}$, то X нормально, т. е. его непересекающиеся замкнутые подмножества можно отделить его непересекающимися открытыми подмножествами. Следовательно, существуют такие непересекающиеся замкнутые подмножества X_{2j}^{i+1}, $X_{2j+1}^{i+1} \subset X_j^i$, что $x \in X_{2j}^{i+1}$, $y \in X_{2j+1}^{i+1}$ и как X_{2j}^{i+1}, так и X_{2j+1}^{i+1} не имеют изолированных точек.

Пусть t: $\omega \to \omega$ — функция, для которой $t(0) = 0$ и $t(i+1) \in \{2t(i), 2t(i)+1\}$. Для каждой такой функции t множество

$$\bigcap \{X_{t(i)}^i \mid i \in \omega\}$$

не пусто. При этом эти множества для различных t не пересекаются. Следовательно, X несчетно.

(3) Предположим, что каждая точка пространства X имеет ранг Кантора — Бендиксона. Пусть U — непустое открытое подмножество в X. Выберем $x \in U$ с наименьшим рангом. Существует такое открытое множество V, что $\{x\} = V \cap d^{\alpha}X$, где α — ранг x. Тогда $\{x\} = U \cap V$. □

Предложение 28.2. *Пусть f: $Y \to X$ принадлежит $\mathscr{H}$. Тогда $f[dY] \supset dX$.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in X$. Предположим, что $f^{-1}x$ не содержит предельных точек пространства Y. Тогда $f^{-1}x$ открыто и $Y - f^{-1}x$ — компакт. Следовательно, $X - \{x\}$ — компакт и $\{x\}$ открыто. □

Упражнение 28.3. Предположим, что $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ и $\mathfrak{A}(b) = \mathfrak{A}(c)$. Пусть 1-тип $q \in S\mathfrak{A}$ (соответственно $r \in S\mathfrak{A}$) реализуется элементом b (соответственно c). Показать, что q и r имеют один и тот же ранг Кантора — Бендиксона, если один из них имеет ранг Кантора — Бендиксона.

§ 29. ПРОИЗВОДНАЯ МОРЛИ

Производная Кантора — Бендиксона d несовершенна в том смысле, что в предложении 28.2 нельзя утверждать, что $f[dY] = dX$. Производная Морли D определена так, что $f[DY] = DX$ всякий раз, как f: $Y \to X$ принадлежит $\mathscr{H}$.

Пусть F: $\mathscr{K} \to \mathscr{H}$ — контравариантный функтор, обладающий всеми свойствами, установленными для S: $\mathscr{K}(T) \to \mathscr{H}$ в 27.1 в случае, когда T — подмодельно полная теория. Таким образом, $\mathscr{K}$ допускает прямые пределы и фильтрации с объединением и F сохраняет пределы. Пусть $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}$. Тогда $x \in DF\mathfrak{A}$ в том и только том случае, когда $x \in F\mathfrak{A}$ и для некоторого f: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ из $\mathscr{K}$ множество $(Ff)^{-1}x$ содержит предельную точку. Для каждого f: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ из $\mathscr{K}$ определим DFf как ограничение Ff на $DF\mathfrak{B}$.

Предложение 29.1. *DF: $\mathscr{K} \to \mathscr{H}$ является контравариантным функтором, сохраняющим пределы.*

Доказательство. Предположим, что f: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ принадлежит $\mathscr{K}$. Для того чтобы показать, что DF —

контравариантный функтор, достаточно показать, что DFf отображает $DF\mathfrak{B}$ на $DF\mathfrak{A}$. Зафиксируем $y \in DF\mathfrak{B}$. Для некоторого $g\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ множество $(Fg)^{-1}y$ содержит предельную точку. Но тогда $(Fgf)^{-1}Ffy$ содержит предельную точку и $DFfy \in DF\mathfrak{A}$.

Зафиксируем $x \in DF\mathfrak{A}$ и будем искать такой элемент $y \in DF\mathfrak{B}$, что $DFfy = x$. Выберем такое отображение $g\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, что $(Fg)^{-1}x$ содержит предельную точку. Так как $\mathscr{K}$ допускает фильтрации с объединением, следующая диаграмма может быть дополнена указанным способом:

$$\begin{tikzcd}
 & F\mathfrak{D} \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\
F\mathfrak{B} \arrow[dr, "Ff"'] & & F\mathfrak{C} \arrow[dl, "Fg"] \\
 & F\mathfrak{A} &
\end{tikzcd}$$

По 28.2 x имеет прообраз z, который является предельной точкой в $F\mathfrak{D}$. Образ z в $F\mathfrak{B}$, обозначим его через y, принадлежит $DF\mathfrak{B}$ и $DFfy = x$.

Пусть $\{\mathfrak{A}_i, f_{ij}\}$ — прямая система в $\mathscr{K}$, прямой предел которой состоит из $\mathfrak{A}_\infty$ и $\{f_i\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_\infty\}$. Пусть обратный предел системы $\{F\mathfrak{A}_i, Ff_{ij}\}$ состоит из $\varprojlim F\mathfrak{A}_i$ и $\{g_i\colon \varprojlim F\mathfrak{A}_i \to F\mathfrak{A}_i\}$. Так как F сохраняет пределы, единственное отображение

$$g\colon F\mathfrak{A}_\infty \to \varprojlim F\mathfrak{A}_i,$$

такое, что $g_i g = Ff_i$ для всех i, является гомеоморфизмом. Пусть обратный предел системы $\{DF\mathfrak{A}_i, DFf_{ij}\}$ состоит из $\varprojlim DF\mathfrak{A}_i$ и $\{h_i\colon \varprojlim DF\mathfrak{A}_i \to DF\mathfrak{A}_i\}$. Допустим, что

$$h\colon DF\mathfrak{A}_\infty \to \varprojlim DF\mathfrak{A}_i$$

— единственное отображение, такое, что $h_i h = DFf_i$ для всех i. Если h взаимно однозначно, то по 26.3 h является гомеоморфизмом. Пусть $hx = hy$. Тогда для всех i имеем

$DFf_ix = DFf_iy$, $Ff_ix = Ff_iy$ и $g_igx = g_igy$. Следовательно, $gx = gy$. Так как g — гомеоморфизм, то $x = y$. □

Определим α-ю производную Морли $D^\alpha F$ по индукции:

$$D^0F = F,$$
$$D^{\alpha+1}F = D\,(D^\alpha F),$$
$$D^\lambda F\mathfrak{A} = \bigcap \{D^\alpha F\mathfrak{A} \mid \alpha < \lambda\}.$$

Если $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ принадлежит $\mathscr{K}$, то $D^\lambda Ff$ является ограничением Ff на $D^\lambda F\mathfrak{B}$.

Лемма 29.2. *Для каждого ординала α $D^\alpha F\colon \mathscr{K} \to \mathscr{B}$ является контравариантным функтором, сохраняющим пределы.*

Доказательство. Индукция по α. Если утверждение леммы выполняется для α, то по 29.1 оно выполняется для $\alpha + 1$. Предположим, что лемма верна для всех $\alpha < \lambda$. Если $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ принадлежит $\mathscr{K}$, то из компактности $F\mathfrak{B}$ следует, что $D^\lambda Ff$ отображает $D^\lambda F\mathfrak{B}$ на $D^\lambda F\mathfrak{A}$.

Пусть $\{\mathfrak{A}_i, f_{ij}\}$ — прямая система в $\mathscr{K}$, прямой предел которой состоит из $\mathfrak{A}_\infty$ и $\{f_i\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_\infty\}$. Пусть обратный предел системы $\{D^\lambda F\mathfrak{A}_i, D^\lambda Ff_{ij}\}$ состоит из $\varprojlim D^\lambda F\mathfrak{A}_i$ и $\{h_i\colon \varprojlim D^\lambda F\mathfrak{A}_i \to D^\lambda F\mathfrak{A}_i\}$. Существует единственное отображение

$$h\colon D^\lambda F\mathfrak{A}_\infty \to \varprojlim D^\lambda F\mathfrak{A}_i,$$

такое, что $h_ih = D^\lambda Ff_i$ для всех i. Если h взаимно однозначно, то по 26.3 h — гомеоморфизм. Допустим, что $hx = hy$. Тогда $D^\lambda Ff_ix = D^\lambda Ff_iy$ для всех i. Выберем такой ординал $\alpha < \lambda$, что $x, y \in D^\alpha F\mathfrak{A}_\infty$. Тогда $D^\alpha Ff_ix = D^\alpha Ff_iy$ для всех i. Пусть обратный предел системы $\{D^\alpha F\mathfrak{A}_i, D^\alpha Ff_{ij}\}$ состоит из $\varprojlim D^\alpha F\mathfrak{A}_i$ и $\{g_i\colon \varprojlim D^\alpha F\mathfrak{A}_i \to D^\alpha F\mathfrak{A}_i\}$. Так как $\alpha < \lambda$, то единственное отображение

$$g\colon D^\alpha F\mathfrak{A}_\infty \to \varprojlim D^\alpha F\mathfrak{A}_i,$$

такое, что $g_i g = D^\alpha F f_i$ для всех i, является гомеоморфизмом. Следовательно, $g_i gx = g_i gy$ для всех i, $gx = gy$ и $x = y$. □

Допустим, существует такой ординал α (обязательно единственный), что $x \in D^\alpha F\mathfrak{A} - D^{\alpha+1}F\mathfrak{A}$. Тогда x называем *рангованной* (по Морли) *точкой* пространства $F\mathfrak{A}$ *ранга* α и обозначаем это так: $\operatorname{rank} x = \alpha$.

Предложение 29.3 (правило ранга). *Пусть $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ принадлежит $\mathscr{K}$ и x — рангованная точка пространства $F\mathfrak{A}$. Если $Ffy = x$, то y — рангованная точка пространства $F\mathfrak{B}$ и* $\operatorname{rank} y \leqslant \operatorname{rank} x$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rank} x = \alpha$. Тогда $x \in D^\alpha F\mathfrak{A} - D^{\alpha+1}F\mathfrak{A}$. По 29.2 Ff отображает $D^{\alpha+1}F\mathfrak{B}$ на $D^{\alpha+1}F\mathfrak{A}$, следовательно, $y \notin D^{\alpha+1}F\mathfrak{B}$. □

Предложение 29.4. *Пусть $x \in F\mathfrak{A} - DF\mathfrak{A}$. Тогда существует такое положительное число n, что для всех $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ из $\mathscr{K}$ мощность $(Ff)^{-1}x$ не превосходит n.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Определим прямую систему $\{\mathfrak{A}_n \mid n < \omega\}$ индукцией по n. Положим $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$. Допустим, что

$$\mathfrak{A}_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{A}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} \mathfrak{A}_n$$

уже определены. Выберем $f\colon \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{B}$ так, чтобы мощность $(Ff)^{-1}x$ была не меньше n. Так как $\mathscr{K}$ допускает фильтрации с объединением, следующая диаграмма может быть дополнена указанным способом:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_0 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{A}_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathfrak{A}_n \arrow[r, dashed, "f_n"] & \mathfrak{A}_{n+1} \\
& \mathfrak{B} \arrow[urr, dashed] & & &
\end{tikzcd}$$

Ясно, что мощность $(Ff_n \dots f_1 f_0)^{-1}x$ не меньше n. Пусть $\mathfrak{A}_\infty = \varinjlim \mathfrak{A}_i$. Тогда $(Ff_{0\infty})^{-1}x$ бесконечно и должно содержать предельную точку. Следовательно, $x \in DF\mathfrak{A}$. □

Пусть x — рангованная точка из $F\mathfrak{A}$ ранга α. Предложение 29.4 справедливо для каждого функтора F: $\mathscr{K} \to \mathscr{B}$, сохраняющего пределы, и, в частности, для $D^\alpha F$ в силу 29.2. Следовательно, существует такое n, что для всех f: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ мощность $(D^\alpha Ff)^{-1} x$ не превосходит n. Наименьшее такое n назовем *степенью* x и обозначим через $\deg x$.

Предложение 29.5 (правило степени). *Если x — рангованная точка из $F\mathfrak{A}$ и f: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, то*

$$\deg x = \sum \{\deg y \mid Ffy = x \ \&\ \operatorname{rank} y = \operatorname{rank} x\}.$$

Доказательство. В силу 29.2 можно предполагать, что $\operatorname{rank} x = 0$. Возьмем такой морфизм g: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, что мощность $(Fg)^{-1} x$ равна $\deg x$. Так как $\mathscr{K}$ допускает фильтрации с объединением, то следующая диаграмма может быть дополнена указанным способом:

$$\begin{tikzcd}
 & F\mathfrak{C} \arrow[dl, "Fg"'] & \\
F\mathfrak{A} & & F\mathfrak{D} \arrow[ul, dashed, "Fh"'] \arrow[dl, dashed, "Fk"] \\
 & F\mathfrak{B} \arrow[ul, "Ff"] &
\end{tikzcd}$$

Тогда $\deg x = \operatorname{card} (Fhg)^{-1} (x) = \sum \{\deg y \mid Ffy = x\}$. □

Предложение 29.6. *Пусть $D^\alpha F\mathfrak{A} = 0$ для некоторого ординала α и $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}$. Если $\mathscr{K}$ допускает фильтрации, то $D^\alpha F\mathfrak{B} = 0$ для всех $\mathfrak{B} \in \mathscr{K}$.*

Доказательство. Существуют объект $\mathfrak{C}$ и морфизмы f: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, g: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$. В силу 29.2 $D^\alpha F\mathfrak{B} = (D^\alpha Fg)\,(D^\alpha Ff)^{-1}\, D^\alpha F\mathfrak{A}$. □

Функтор F называется *тотально трансцендентным*, если существует такой ординал α, что $D^\alpha F\mathfrak{B} = 0$ для всех $\mathfrak{B} \in K$. Если F тотально трансцендентен, то правила ранга и степени очень полезны при изучении $x \in F\mathfrak{A}$

Правило ранга говорит, что никакой из прообразов x не имеет большего, чем x, ранга. Пусть $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ принадлежит $\mathscr{K}$. Из правил ранга и степени следует, что если $\deg x = 1$, то x имеет единственный прообраз в $F\mathfrak{B}$ того же ранга и степени, что и x. Последний факт является центральным местом в доказательстве теоремы 35.6.

Упражнение 29.7. Пусть T — полная подмодельно полная теория. Пусть $S\colon \mathscr{K}(T) \to \mathscr{Ab}$ — контравариантный функтор, определенный в § 27. Предположим, что S тотально трансцендентен. Показать, что существует такой счетный ординал α, что $D^\alpha S\mathfrak{A} = 0$ для всех $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$.

Упражнение 29.8. Пусть $S\colon \mathscr{K}(\mathrm{ACF}_0) \to \mathscr{Ab}$. Показать, что S тотально трансцендентен.

§ 30. АВТОНОМНЫЕ ПОДКАТЕГОРИИ

На протяжении этого параграфа $\mathscr{K}$ будет некоторой категорией, допускающей прямые пределы и фильтрации с объединением, а $F\colon \mathscr{K} \to \mathscr{Ab}$ — контравариантным функтором, сохраняющим пределы. Зафиксируем $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}$. Вычисление α-й производной Морли $D^\alpha F\mathfrak{A}$ на практике довольно затруднительно, так как в ее определении участвуют все члены $\mathscr{K}$. В этом и следующем параграфах будут даны условия, при которых значение $D^\alpha F\mathfrak{A}$ зависит лишь от некоторой малой полной подкатегории $\mathscr{K}^*$ категории $\mathscr{K}$, содержащей $\mathfrak{A}$. Редукция $\mathscr{K}$ к $\mathscr{K}^*$ подсказана теоремой Лёвенгейма — Сколема. Наиболее сильной будет редукция в § 31, в котором будет показано, что для многих $\mathfrak{A}$ α-я производная Морли множества $S\mathfrak{A}$ равна α-й производной Кантора — Бендиксона множества $S\mathfrak{A}$. Пусть в дальнейшем $\mathscr{K}^*$ будет полной подкатегорией $\mathscr{K}$. Функтор $F^*\colon \mathscr{K}^* \to \mathscr{Ab}$ является ограничением $F\colon \mathscr{K} \to \mathscr{Ab}$ на $\mathscr{K}^*$. Подкатегорию $\mathscr{K}^*$ назовем *автономной*, если $(DF)^* = D(F^*)$ для каждого $F\colon \mathscr{K} \to \mathscr{Ab}$.

Предложение 30.1. *Если $\mathscr{K}^*$ автономна, то $(D^\alpha F)^* = D^\alpha(F^*)$ для всех α.*

Доказательство. Индукция по α. Пусть $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}^*$. Допустим $(D^\alpha F)^* = D^\alpha(F^*)$. Тогда $(D^{\alpha+1}F)^*\mathfrak{A} =$

$= D((D^{\alpha}F)\mathfrak{A}) = D((D^{\alpha}F)^*\mathfrak{A}) = D^{\alpha+1}(F^*)\mathfrak{A}$. Предположим, что $(D^{\alpha}F)^* = D^{\alpha}(F^*)$ для всех $\alpha < \lambda$. Тогда $(D^{\lambda}F)^*\mathfrak{A} = D^{\lambda}F\mathfrak{A} = \bigcap\{D^{\alpha}F\mathfrak{A} \mid \alpha < \lambda\} = \bigcap\{D^{\alpha}(F^*)\mathfrak{A} \mid \alpha < \lambda\} = D^{\lambda}(F^*)\mathfrak{A}$. □

Пусть $\{X_i \mid i \in D\}$ — обратная система в $\mathscr{H}$ с направленным множеством $\langle D, \leqslant\rangle$. Допустим $\langle E, \leqslant\rangle \subset \langle D, \leqslant\rangle$ и $\{X_i \mid i \in E\}$ — обратная система с направленным множеством $\langle E, \leqslant\rangle$. Пусть обратный предел $\{X_i \mid i \in E\}$ состоит из $\varprojlim \{X_i \mid i \in E\}$ и отображений

$$f^E_{\infty i}\colon \varprojlim \{X_i \mid i \in E\} \to X_i.$$

Существует единственное отображение

$$f^{DE}\colon \varprojlim \{X_i \mid i \in D\} \to \varprojlim \{X_i \mid i \in E\}$$

со свойством $f^E_{\infty i} f^{DE} = f^D_{\infty i}$ для всех $i \in E$.

Предложение 30.2. *Пусть $\{X_i \mid i \in D\}$ — обратная система в $\mathscr{H}$ с направленным множеством $\langle D, \leqslant\rangle$. Пусть x — предельная точка пространства $\varprojlim \{X_i \mid i \in D\}$. Тогда существует такое счетное подмножество $E \subset D$, что $f^{DE}x$ является предельной точкой в $\varprojlim \{X_i \mid i \in E\}$.*

Доказательство. Определим по индукции последовательность $i_0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots$ элементов D. Элемент i_0 выбираем произвольно. Рассмотрим $k \geqslant 0$. Если $f^D_{\infty i_k}x$ — предельная точка в X_{i_k}, то берем $i_{k+1} \geqslant i_k$. Если $f^D_{\infty i_k}x$ — изолированная точка X_{i_k}, то выбираем $i_{k+1} \geqslant i_k$ так, чтобы

$$f^{-1}_{i_{k+1}i_k}(f^D_{\infty i_k}x)$$

имело по крайней мере два элемента из $X_{i_{k+1}}$; если бы такой выбор нельзя было осуществить, то x был бы изолированной точкой. Пусть $E = \{i_k \mid k < \omega\}$. Предположим, что $f^{DE}x$ — изолированная точка. Тогда по 26.2 существовало бы такое k, что $f^D_{\infty i_k}x$ изолирована и $f^{-1}_{i_{k+1}i_k}(f^D_{\infty i_k}x)$ имеет лишь один элемент. □

Предыдущее предложение напоминает теорему Лёвенгейма — Сколема о понижении мощности.

Будем говорить, что прямая система $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in D\}$ в $\mathscr{K}$ *счетна*, если D — счетное множество. Будем говорить, что $\mathscr{K}^*$ *замкнута относительно пределов в* $\mathscr{K}$ *счетных прямых систем*, если каждая счетная прямая система в $\mathscr{K}^*$ имеет прямой предел в $\mathscr{K}^*$, изоморфный ее прямому пределу в $\mathscr{K}$. Подкатегорию $\mathscr{K}^*$ назовем *плотной в* $\mathscr{K}$, если для каждого $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, такого, что $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}^*$ и $\mathfrak{B} \in \mathscr{K}$, существует такая прямая система $\{\mathfrak{B}_i\}$ в $\mathscr{K}^*$, что $\mathfrak{B}$ $(=\mathfrak{B}_\infty)$ является прямым пределом в $\mathscr{K}$ системы $\{\mathfrak{B}_i\}$, и для некоторого j $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_j$ и $f = f_{j\infty}$.

Теорема 30.3 (Симпсон). *Пусть* $\mathscr{K}^*$ *замкнута относительно пределов в* $\mathscr{K}$ *счетных прямых систем. Если* $\mathscr{K}^*$ *плотна в* $\mathscr{K}$, *то она автономна.*

Доказательство. Рассмотрим $F\colon \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ и $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}^*$. Ясно, что $D(F^*)\,\mathfrak{A} \subset (DF)^*\,\mathfrak{A}$. Пусть $y \in (DF)^*\,\mathfrak{A} = DF\mathfrak{A}$. Тогда для некоторого $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ в $\mathscr{K}$ существует предельная точка x из $DF\mathfrak{B}$, для которой $Ffx = y$. Возьмем такую прямую систему $\{\mathfrak{B}_i \mid i \in D\}$ в $\mathscr{K}^*$, что $\mathfrak{B}$ является прямым пределом в $\mathscr{K}$ системы $\{\mathfrak{B}_i\}$ и $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_j$ и $f = f_{j\infty}$ для некоторого $j \in D$. В силу 30.2 существует счетное подмножество $E \subset D$ и такая предельная точка

$$z \in \varprojlim \{F\mathfrak{B}_i \mid i \in E\},$$

что отображение

$$f^E_{\infty j}\colon \varprojlim \{F\mathfrak{B}_i \mid i \in E\} \to F\mathfrak{B}_j$$

переводит z в y. Так как $\varprojlim \{F\mathfrak{B}_i \mid i \in E\}$ принадлежит $\mathscr{K}^*$, то $y \in D(F^*)\,\mathfrak{A}$. □

Пусть T — подмодельно полная теория. Для каждого несчетного кардинала $\varkappa$ обозначим через $\mathscr{K}_\varkappa(T)$ категорию всех подсистем моделей теории T мощности, меньшей чем $\varkappa$, и всех соответствующих мономорфизмов.

Следствие 30.4. *Если* $\varkappa > \omega$, *то* $\mathscr{K}_\varkappa(T)$ — *автономная подкатегория категории* $\mathscr{K}(T)$.

Доказательство. Так как объединение автономных подкатегорий автономно, то можно считать, что $\varkappa$ — регулярный кардинал. Из несчетности и регулярности $\varkappa$ непосредственно следует, что $\mathscr{K}_\varkappa(T)$ замкнута относительно пределов в $\mathscr{K}(T)$ счетных прямых систем. Для того чтобы показать, что $\mathscr{K}_\varkappa(T)$ плотна в $\mathscr{K}(T)$, зафиксируем такую систему $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, что $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}_\varkappa(T)$ и $\mathfrak{B} \in \mathscr{K}(T)$, и пусть $\{\mathfrak{B}_i\}$ — множество всех таких $\mathfrak{D} \in \mathscr{K}_\varkappa(T)$, что $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}$. Множество $\{\mathfrak{B}_i\}$ будет прямой системой относительно теоретико-множественного включения. Тогда $\mathfrak{B} = \varinjlim \{\mathfrak{B}_i\}$. □

Можно показать, что для каждой счетной теории T категория $\mathscr{K}(T)$ имеет счетную автономную подкатегорию. Все необходимое для доказательства этого факта можно найти в следующем параграфе.

§ 31. ГРАНИЦА ДЛЯ РАНГОВ 1-ТИПОВ

На протяжении этого параграфа T будет полной подмодельно полной теорией. Пусть S: $\mathscr{K}(T) \to \mathscr{H}$ — контравариантный функтор Стоуна, определенный в § 27. Для каждой подсистемы $\mathfrak{A}$ некоторой модели для T $S\mathfrak{A}$ является стоуновским пространством, точки которого соответствуют типам изоморфизма над $\mathfrak{A}$ простых расширений системы $\mathfrak{A}$. Для каждого ординала α определяем, как в § 29, α-ю производную Морли $D^\alpha S$ функтора S. Если существует α, для которого $p \in D^\alpha S\mathfrak{A} - D^{\alpha+1}S\mathfrak{A}$, то p — рангованная точка пространства $S\mathfrak{A}$ ранга α. В обозначениях: $\operatorname{rank} p = \alpha$. Если p — рангованная точка, то она имеет степень, которая обозначается через $\deg p$ и была определена в § 29. Теорема 31.5, доказательство которой по существу является доказательством теоремы Лёвенгейма — Сколема о понижении мощности, показывает, что $\operatorname{rank} p < \omega_1$.

Пусть $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{O} \in \mathscr{K}(T)$. Система $\mathfrak{N}$ *конечно порождена*, если существует такое конечное подмножество $Y \subset N$, что $\mathfrak{N}$ является наименьшей подсистемой в $\mathfrak{N}$, носитель которой содержит Y. Пусть $x \in D^\alpha S\mathfrak{N}$ и $i: \mathfrak{N} \to \mathfrak{O}$ — отображение вложения. Говорим, что x *расщепляется* в $D^\alpha S\mathfrak{O}$, если $(D^\alpha Si)^{-1} x$ имеет по крайней мере два элемента.

Систему $\mathfrak{M}$ назовем *универсальной областью* для T, если для каждого α, каждой конечно порожденной подсистемы $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ и каждой изолированной точки $x \in D^\alpha S\mathfrak{N}$ выполняется следующее условие: если x расщепляется в $D^\alpha S\mathfrak{O}$ для некоторой системы $\mathfrak{O} \in \mathscr{K}(T)$, то x расщепляется в $D^\alpha S\mathfrak{O}^*$ для некоторой конечно порожденной системы $\mathfrak{O}^* \subset \mathfrak{M}$.

Если $\mathfrak{M}$ ω-насыщена, то она является универсальной областью, но не наоборот. Теория T может не иметь счетной ω-насыщенной модели, но в силу 31.2 она обязана иметь счетную универсальную область.

Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{O}^* \in \mathscr{K}(T)$. Система $\mathfrak{O}^*$ *конечно порождена над* $\mathfrak{N}$, если существует такое конечное подмножество $Y \subset \mathfrak{O}^*$, что $\mathfrak{O}^*$ является наименьшей подсистемой системы $\mathfrak{O}^*$, носитель которой содержит $N \cup Y$. В обозначениях: $\mathfrak{O}^* = \mathfrak{N}(Y)$ или $\mathfrak{O}^* = \mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_n)$, где $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Предложение 31.1. *Если $x \in D^\alpha S\mathfrak{N}$ и x расщепляется в $D^\alpha S\mathfrak{O}$ для некоторой системы $\mathfrak{O} \in \mathscr{K}(T)$, то x расщепляется в $D^\alpha S\mathfrak{O}^*$ для некоторой системы $\mathfrak{O}^*$, конечно порожденной над $\mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{N}_i\}$ — множество всех $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{O}$, конечно порожденных над $\mathfrak{N}$. Относительно теоретико-множественного включения $\{\mathfrak{N}_i\}$ является прямой системой. Тогда $\mathfrak{O} = \varinjlim \mathfrak{N}_i$. В силу 29.2 $D^\alpha S\mathfrak{O} = \varprojlim D^\alpha S\mathfrak{N}_i$. Из 26.2 получаем, что x расщепляется в $D^\alpha S\mathfrak{N}_i$ для некоторого i. □

Предложение 31.2. *Если $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ бесконечна, то существует универсальная область $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{A}$, для которой* $\operatorname{card} \mathfrak{M} = \operatorname{card} \mathfrak{A}$.

Доказательство. Мы воспользуемся теоремой 31.5, доказательство которой не зависит от этого предложения. Пусть $\varkappa = \operatorname{card} \mathfrak{A}$. Определим цепь $\{\mathfrak{M}_n \mid n < \omega\}$ индукцией по n. Положим $\mathfrak{M} = \bigcup\{\mathfrak{M}_n \mid n < \omega\}$.

1. $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{A}$.

2. Для каждого ординала α, каждой конечно порожденной подсистемы $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_n$ и каждой изолированной

точки $x \in D^\alpha S\mathfrak{N}$, используя 31.1, выбираем систему $\mathfrak{B}^{\mathfrak{N}}_{\alpha, x}$, конечно порожденную над $\mathfrak{N}$ со следующим свойством: если x расщепляется в $D^\alpha S\mathfrak{B}$ для некоторой системы $\mathfrak{B} \in \mathscr{K}(T)$, то x расщепляется в $D^\alpha S\mathfrak{B}^{\mathfrak{N}}_{\alpha, x}$. Пусть $\mathfrak{M}_{n+1}$ — наименьшая система из $\mathscr{K}(T)$, носитель которой содержит M_n и $B^{\mathfrak{N}}_{\alpha, x}$ для всех конечно порожденных $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_n$ и всех $\alpha < \operatorname{rank} x$, если x — изолированная точка в $D^\alpha S\mathfrak{N}$ и имеет ранг, и $\alpha = \omega_1$, если x не имеет ранга и является изолированной точкой в $D^\beta S\mathfrak{N}$ для некоторого β.

По 31.5 $D^{\omega_1}S\mathfrak{N} \subset D^\alpha S\mathfrak{N}$ для любого α. Следовательно, любой тип, не имеющий ранга, изолированный в некотором пространстве $D^\alpha S\mathfrak{N}$, изолирован и в $D^{\omega_1}S\mathfrak{N}$ и расщепляется в $D^\alpha S\mathfrak{B}^{\mathfrak{N}}_{\omega_1, x}$ для любого α. Допустим $\operatorname{card} \mathfrak{M}_n = \varkappa$. Покажем, что $\operatorname{card} \mathfrak{M}_{n+1} = \varkappa$. Мощность множества $\{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_n$ и $\mathfrak{N}$ конечно порождена$\}$ не превосходит $\varkappa$. Зафиксируем конечно порожденную систему $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_n$. Пусть x — изолированная точка в $D^\alpha S\mathfrak{N}$ и $\alpha(x)$ — наименьший такой ординал α. Выберем открытое множество $U^x \subset S\mathfrak{N}$ из базиса, для которого

$$\{x\} = D^{\alpha(x)} S\mathfrak{N} \cap U^x.$$

Тогда $U^x \neq U^y$, если $x \neq y$. Так как $\mathfrak{N}$ конечно порождена, то число базисных открытых подмножеств пространства $S\mathfrak{N}$ не превосходит ω. Следовательно, число точек x, изолированных в $D^\alpha S\mathfrak{N}$ для некоторого α, не больше ω. Если x имеет ранг, то по 31.5 $\operatorname{rank} x < \omega_1$, следовательно, число конечно порожденных систем $\mathfrak{B}^{\mathfrak{N}}_{\alpha, x}$, которые участвуют в построении $\mathfrak{M}_{n+1}$ из $\mathfrak{M}_n$, не превосходит $\varkappa$. □

Лемма 31.3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — универсальная область для T. Тогда разложение Морли пространства $S\mathfrak{M}$ совпадает с разложением Кантора — Бендиксона, т. е. для каждого α*

$$D^\alpha S\,\mathfrak{M} = d^\alpha S\mathfrak{M}.$$

Доказательство. Индукция по α. Допустим, что $D^\alpha S\,\mathfrak{M} = d^\alpha S\mathfrak{M}$. Ясно, что $D^{\alpha+1}S\mathfrak{M} \supset d^{\alpha+1}S\mathfrak{M}$.

Пусть $x \in D^{\alpha+1}S\mathfrak{M}$. Покажем, что $x \in d^{\alpha+1}S\mathfrak{M}$. Ясно, что $x \in D^{\alpha}S\mathfrak{M}$. Предположим, что x — изолированная точка пространства $D^{\alpha}S\mathfrak{M}$, так как в противном случае $x \in d^{\alpha+1}S\mathfrak{M}$. Тогда существует такая система $\mathfrak{D} \in \mathscr{K}(T)$, что x расщепляется в $D^{\alpha}S\mathfrak{D}$. Пусть $\{\mathfrak{N}_i\}$ — прямая система всех конечно порожденных подсистем системы $\mathfrak{M}$

$$\begin{tikzcd}
D^{\alpha}S\mathfrak{M} \arrow[d, "D^{\alpha}Sf_i"'] \arrow[dr] & D^{\alpha}S\mathfrak{D} \arrow[l] \arrow[dl] \\
D^{\alpha}S\mathfrak{N}_i & D^{\alpha}S\mathfrak{D}^* \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

относительно включения. В силу 29.2 $D^{\alpha}S\mathfrak{M} = \varprojlim \{D^{\alpha}S\mathfrak{N}_i\}$. Используя 26.2, выбираем такие f_i, $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{M}$, что $D^{\alpha}Sf_ix$ — изолированная точка в $D^{\alpha}S\mathfrak{N}_i$ и $D^{\alpha}Sf_ix$ не расщепляется в $D^{\alpha}S\mathfrak{M}$. Так как $D^{\alpha}Sf_ix$ расщепляется в $D^{\alpha}S\mathfrak{D}$ и так как $\mathfrak{M}$ является универсальной областью, то существует такая конечно порожденная система $\mathfrak{D}^* \subset \mathfrak{M}$, что $D^{\alpha}Sf_ix$ расщепляется в $D^{\alpha}S\mathfrak{D}^*$. Тогда $D^{\alpha}Sf_ix$ расщепляется в $D^{\alpha}S\mathfrak{M}$. □

Рангом Морли α_T теории T называется такой наименьший ординал α, что $D^{\alpha}S\mathfrak{A} = D^{\alpha+1}S\mathfrak{A}$ для всех конечно порожденных $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$.

Предложение 31.4. $D^{\alpha_T}S\mathfrak{A} = D^{\alpha_T+1}S\mathfrak{A}$ *для всех* $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$.

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{A}_i\}$ — прямая система всех конечно порожденных подсистем системы $\mathfrak{A}$ относительно включения. Тогда по 29.2 $D^{\alpha}S\mathfrak{A} = \varprojlim D^{\alpha}\mathfrak{A}_i$. □

Теорема 31.5 (Лахлан). (i) *Если* $p \in S\mathfrak{A}$ — *рангованный 1-тип, то* $\operatorname{rank} p < \omega_1$. (ii) $\alpha_T \leqslant \omega_1$.

Доказательство. (ii) является непосредственным следствием (i). В силу 16.4 и 29.2 достаточно дока-

зать теорему, когда $\mathfrak{A}$ — ω-насыщенная модель T. Если (i) не выполняется, то, так как $\mathfrak{A}$ — универсальная область, существует $p \in S\mathfrak{A}$, для которого $\operatorname{rank} p = \omega_1$. Пусть $F(x)$ — формула сигнатуры $T \cup D\mathfrak{A}$, для которой $U_{F(x)} \cap D^{\omega_1}S\mathfrak{A} = \{p\}$. Тогда для любого ординала $\alpha < \omega_1$ существует формула $G^\alpha(x)$ сигнатуры $T \cup D\mathfrak{A}$, для которой $U_{F(x)\,\&\,G^\alpha(x)} \cap D^\alpha S\mathfrak{A} \neq 0$ и $U_{F(x)\,\&\,G^\alpha(x)} \cap D^\alpha S\mathfrak{A} \neq 0$. Так как T — счетная теория, а ω_1 — регулярный кардинал, то можно считать, что все $G^\alpha(x)$ получаются из одной формулы $G_1(y_1, \ldots, y_{n_1}, x)$ сигнатуры T подстановкой вместо $y_1, \ldots, y_{n_1}$ символов для констант из A. По той же причине существует такая формула $G_2(y_1, \ldots, y_{n_2}, x)$, что для любых $\alpha < \beta < \omega_1$ существуют элементы $a_1, \ldots, a_{n_2} \in A$, для которых множества

$$U_{F(x)\,\&\,H^\beta(x)\,\&\,G_2(a_1, \ldots, a_{n_2}, x)} \cap D^\alpha S\mathfrak{A},$$

$$U_{F(x)\,\&\,H^\beta(x)\,\&\,\neg G_2(a_1, \ldots, a_{n_2}, x)} \cap D^\alpha S\mathfrak{A}$$

непустые, где $H^\beta(x)$ — любая из формул $G^\beta(x)$ и $\neg G^\beta(x)$. Продолжая этот процесс ω шагов, применяя теорему компактности и ω-насыщенность $\mathfrak{A}$, получим такую последовательность $\{G_i(x) \mid 1 \leqslant i < \omega\}$ формул сигнатуры $T \cup D\mathfrak{A}$, что все формулы вида $H(x) = F(x)\,\&\,H_1(x)\,\&\ldots\,\&\,H_n(x)$, где $H_i(x)$ — любая из формул $G_i(x)$, $\neg G_i(x)$, выполнимы в $\mathfrak{A}$. Тогда формула $H(x)$ содержится в 2^ω элементах из $S\mathfrak{B}$ для счетной $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$. Так как $S\mathfrak{B} - D^\alpha S\mathfrak{B}$ счетно для любого ординала $\alpha < \omega_1$, то $H(x)$ содержится в некотором элементе из $D^\alpha S\mathfrak{B}$ для любого $\alpha < \omega_1$. По компактности $S\mathfrak{B}$ формула $H(x)$ содержится в некотором элементе из $D^{\omega_1}S\mathfrak{B}$. Тогда множество $U_F \cap D^{\omega_1} S\mathfrak{A}$ бесконечно. Противоречие. □

Существует следующий эффективный вариант утверждения 31.5 (i), доказательство которого (см. Сакс [1]) является точным отражением абсолютности ранга Морли: если $p \in S\mathfrak{A}$ имеет ранг и система $\mathfrak{A}$ счетна, то ранг Морли типа p является ординалом, рекурсивным в $\mathfrak{A}$. (Так как $\mathfrak{A}$ счетна, то ее диаграмму можно закодировать действительным числом $\mathfrak{A}^e$. Ординал является *рекурсивным* в $\mathfrak{A}$, если он изоморфен некоторому полному порядку на ω, рекурсивному в $\mathfrak{A}^e$.) Если $0 < \alpha \leqslant \omega_1$, то существует

теория T, для которой $\alpha = \alpha_T$. Балдуин [1] [1]) показал, что $\alpha_T < \omega$ для каждой категоричной в несчетной мощности теории T. Результат Балдуина не является неожиданным в силу теоремы 39.8. Если $0 < n < \omega$, то существует ω_1-категоричная теория T, для которой $\alpha_T = n$.

Теория T называется *тотально трансцендентной*, если функтор S: $\mathscr{K}(T) \to \mathscr{B}$ является тотально трансцендентным (§ 29).

Теорема 31.6 (Морли). *Теория T тотально трансцендентна тогда и только тогда, когда она ω-стабильна.*

Доказательство. Пусть T тотально трансцендента и $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ счетна. Для каждого $p \in S\mathfrak{A}$ выбираем такое открытое базисное множество $U_p \subset S\mathfrak{A}$, что $\{p\} = D^\alpha S\mathfrak{A} \cap U_p$ для некоторого α. Если $p \neq q$, то $U_p \neq U_q$. Так как $S\mathfrak{A}$ имеет счетный базис, то $S\mathfrak{A}$ счетно.

Допустим, что T ω-стабильна. По 31.2 существует счетная универсальная область $\mathfrak{M}$ для T. В силу 28.1 (2) каждый элемент из $S\mathfrak{M}$ имеет ранг Кантора — Бендиксона, который равен по 31.3 рангу Морли. Из 29.6 и 27.1 (ii) получаем, что T тотально трансцендентна. □

Важность теоремы 31.6 и других теорем такого типа (см. Шелах [2]) трудно переоценить. Предположим, что T ω-стабильна. Тогда 31.6 утверждает, что каждому простому расширению каждой подсистемы любой модели для T можно приписать ранг. Правила ранга и степени (§ 29) позволяют, если ранг определен для каждого типа, доказывать теоремы о моделях для T индукцией по рангу, например так доказывается теорема Шелаха о единственности (36.2). Даже если T не ω-стабильна, то рангованных типов часто бывает достаточно много, чтобы индукция по рангу давала полезный метод изучения T. Теория T называется *квазитотально трансцендентной* (к. т. т.), если для любой системы $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ множество рангованных точек пространства $S\mathfrak{A}$ образует в нем плотное подмножество. Многие теоремы (например, 36.2), первоначально доказанные для тотально трансцендентных теорий,

---

[1]) См. также Зильбер Б. И., *Матем. заметки*, 15, № 2 (1974), и М. Еримбетов, *Алгебра и логика*, 14, № 3 (1975).— *Прим. ред.*

оказались верными также для к. т. т. теорий. Понятие квазитотальной транцендентности является абсолютным.

Допустим T — к. т. т. теория. *Порядком плотности* d_T (Блюм) теории T называется наименьший ординал γ со следующим свойством: для каждой системы $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ точки из $S\mathfrak{A}$ ранга Морли $<\gamma$ плотны в $S\mathfrak{A}$. Существует к. т. т. теория T, для которой $\alpha_T = \omega_1$, но тем не менее d_T счетен для любой к. т. т. теории T. (На самом деле d_T рекурсивно в T (Сакс [1]).)

Предложение 31.7 (Морли). *Если T тотально трансцендентна, то $\alpha_T < \omega_1$.*

Доказательство. В силу 31.6 T ω-стабильна. Следствие 19.3 дает счетную насыщенную модель $\mathfrak{A}$ теории T. По 28.1 (1) имеем $\alpha_{S\mathfrak{A}} < \omega_1$. В силу 31.3 $\alpha_{S\mathfrak{A}} = \alpha_T$. □

Рассуждения, основанные на абсолютности, упомянутые в замечании к 31.5, приводят к эффективной версии предложения 31.7: если T тотально трансцендентна, то α_T рекурсивен в T (Сакс [1]).

Для каждого $\alpha < \omega_1$ существует тотально трансцендентная теория T, для которой $\alpha_T = \alpha + 1$. Самым интересным известным примером тотально трансцендентной теории является теория дифференциально замкнутых полей характеристики 0 (DCF_0). Как будет показано в § 41, ранг DCF_0 равен $\omega + 1$.

Лахлан [2] показал, что если $\mathfrak{A}$ — модель теории T и $p \in S\mathfrak{A}$ имеет ранг, то степень p равна 1. Этот результат нужен для доказательства следующей теоремы: если теория T ω-стабильна и не ω-категорична, то она имеет бесконечное число счетных моделей (Лахлан [1]). (Ср. с предложением 35.6.)

Упражнение 31.8 (Леман). Пусть $\mathfrak{M}$ — универсальная область для T и $p \in S\,\mathfrak{M}$ — рангованный тип. Показать, что степень p равна 1.

Упражнение 31.9. Пусть T — тотально трансцендентная теория. Показать, что α_T — не предельный ординал.

Упражнение 31.10. Пусть $\mathfrak{A}$ — поле характеристики 0. Показать, что $\mathfrak{A}$ — универсальная область для ACF_0 тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ алгебраически замкнуто.

Упражнение 31.11. Будем говорить, что T *имеет конечный базис*, если для каждого $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ и каждого множества S атомных формул сигнатуры $T \cup D\mathfrak{A}$ с единственной свободной переменной x существует конечная конъюнкция элементов множества S, которая влечет (в теории $T \cup D\mathfrak{A}$) любой элемент из S. Допустим, что T имеет конечный базис. Показать, что T тотально трансцендентна.

§ 32. ПРОСТЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ

В этом параграфе T будет полной подмодельно полной теорией. Пусть $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$. Алгебраическая система $\mathfrak{B}$ называется *простым модельным расширением* $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ — модель теории T, и следующую диаграмму можно дополнить указанным способом всякий раз, когда $\mathfrak{C}$ является моделью для T:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B} \arrow[r, dashed] & \mathfrak{C} \\
\mathfrak{A} \arrow[u, "\subset"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Пусть $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$ — расширения $\mathfrak{A}$. Говорят, что системы $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ *изоморфны над* $\mathfrak{A}$, если существует такой изоморфизм f: $\mathfrak{B}_0 \xrightarrow{\approx} \mathfrak{B}_1$, что $f \mid A = 1_A$. В некоторых случаях система $\mathfrak{A}$ может иметь два простых модельных расширения $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$, не изоморфных над $\mathfrak{A}$. Однако это невозможно, когда T — тотально трансцендентная теория (следствие 36.2). Один из результатов этого параграфа состоит в том, что при некотором условии, более слабом, чем тотальная трансцендентность T, каждая система $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ имеет простое модельное расширение. Из 32.12 следует, что свойство «каждая система $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ имеет простое модельное расширение» является абсолютным свойством теории T.

Предложение 32.1 (Морли). *Пусть* $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}(T)$. (i) *Если* $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{A} \models T$, *то* 1-*типы из* $S\mathfrak{B}$, *которые реализуются в* $\mathfrak{A}$, *образуют плотное подмножество в* $S\mathfrak{B}$. (ii) *Если* 1-*типы из* $S\mathfrak{A}$, *которые реализуются в* $\mathfrak{A}$, *образуют плотное подмножество в* $S\mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{A} \models T$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models T$ и

$$N_{F(x,\, b)} = \{p \mid F(x,\, b) \in p\}$$

— непустая окрестность пространства $S\mathfrak{B}$. Тогда из полноты $T \cup D\mathfrak{B}$ следует, что $\mathfrak{A} \models F(a,\, b)$ для некоторого $a \in A$. Пусть $p \in S\mathfrak{B}$ — тип, который реализуется в $\mathfrak{A}$ элементом a. Тогда $p \in N_{F(x,\, b)}$.

Допустим, что типы из $S\mathfrak{A}$, реализуемые в $\mathfrak{A}$, образуют плотное подмножество в $S\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}$ — модель для T и F — предложение сигнатуры системы $\langle \mathfrak{A},\, a \rangle_{a \in A}$. Индукцией по длине F показываем

$$\mathfrak{A} \models F \Leftrightarrow \mathfrak{C} \models F.$$

Предположим, что F имеет вид $(\mathrm{E}x)\, G(x)$. Если $\mathfrak{A} \models (\mathrm{E}x)\, G(x)$, то $\mathfrak{A} \models G(a)$ для некоторого $a \in A$; по индуктивному предложению $\mathfrak{C} \models G(a)$. Допустим, что $\mathfrak{C} \models (\mathrm{E}x)\, G(x)$. Тогда $N_{G(x)} = \{p \mid G(x) \in p\}$ является непустой окрестностью $S\mathfrak{A}$ и, следовательно, содержит некоторый тип p, реализуемый некоторым $a \in A$. Но тогда $\mathfrak{A} \models G(a)$. □

Предложение 32.2 (Морли). *Если* T *квазитотально трансцендентна, то для любой системы* $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}(T)$ *изолированные точки пространства* $S\mathfrak{A}$ *образуют в нем плотное подмножество.*

Доказательство. Пусть U — непустая окрестность $S\mathfrak{A}$. Выберем рангованный тип $p \in U$ с минимальным среди рангованных типов $q \in U$ рангом. Существует такая окрестность V, что $\{p\} = D^{\alpha} S\mathfrak{A} \cap V$, где $\alpha = \operatorname{rank} p$. Тогда $\{p\} = U \cap V$. □

Теорема 32.3 (Морли). *Если изолированные точки пространства* $S\mathfrak{A}$ *плотны в нем для каждой системы* $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}(T)$, *то любая система* $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}(T)$ *имеет простое модельное расширение.*

Доказательство. Определим индукцией по δ цепь $\{\mathfrak{A}_\delta\}$ алгебраических систем и последовательность $\{p_\delta\}$ 1-типов:

1. $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$.
2. $\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup \{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \lambda\}$.
3. Если $\mathfrak{A}_\delta \models T$, то $\mathfrak{A}_{\delta+1} = \mathfrak{A}_\delta$.
4. Допустим, $\mathfrak{B}_\delta$ не является моделью T. В силу 32.1 (ii) существует изолированный тип $p_\delta \in S\mathfrak{A}_\delta$, который не реализуется в $\mathfrak{A}_\delta$. Пусть $\mathfrak{A}_{\delta+1} = \mathfrak{A}_\delta(a_\delta)$, где a_δ реализует p_δ.

Для некоторого δ система $\mathfrak{A}_\delta$ является простым модельным расширением системы $\mathfrak{A}$. Покажем это. Рассмотрим вложение f: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ системы $\mathfrak{A}$ в некоторую модель $\mathfrak{C}$ теории T. Определим последовательность $\{f_\delta\colon \mathfrak{A}_\delta \subset \mathfrak{C}\}$ индукцией по δ:

1*. $f_0 = f$.
2*. $f_\lambda = \bigcup\{f_\delta \mid \delta < \lambda\}$.
3*. Если $\mathfrak{A}_{\delta+1} = \mathfrak{A}_\delta$, то $f_{\delta+1} = f_\delta$.
4*. Пусть $\mathfrak{A}_{\delta+1} = \mathfrak{A}_\delta(a_\delta)$, как в п. 4, приведенном выше. Таким образом, a_δ реализует $p_\delta \in S\mathfrak{A}_\delta$ и p_δ изолирован. По 32.1 (i) p_δ реализуется некоторым $c \in C$. Полагая $f_{\delta+1}a_\delta = c$, расширяем f_δ до $f_{\delta+1}$: $\mathfrak{A}_\delta(a_\delta) \subset \mathfrak{C}$.

Так как $\mathfrak{C}$ — множество и каждое f_δ взаимно однозначно, то существует такой δ, что $f_{\delta+1} = f_\delta$. Но тогда должен существовать такой δ, что $\mathfrak{A}_{\delta+1} = \mathfrak{A}_\delta$; пусть γ — наименьший из таких δ. Тогда $\mathfrak{A}_\gamma \models T$ и $\mathfrak{A}_\gamma$ проста над $\mathfrak{A}$, так как для любой модели $\mathfrak{C}$ теории T существует f_γ: $\mathfrak{A}_\gamma \subset \mathfrak{C}$. □

Следствие 32.4. *Если T квазитотально трансцендентна и $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$, то $\mathfrak{A}$ имеет простое модельное расширение.*

Доказательство. Используем 32.2 и 32.3. □

Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \in \mathscr{K}(T)$. Система $\mathfrak{B}$ называется *атомным расширением* $\mathfrak{A}$ (или *атомной над* $\mathfrak{A}$), если для любого $n > 0$ и $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in B^n$ n-ка $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ реализует главный n-тип из $S_n(T \cup D\mathfrak{A})$.

Предложение 32.5. *Если $\mathfrak{C}$ атомна над $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}$ атомна над $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{C}$ атомна над $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \in C^n$ реализует главный n-тип из $S_n(T \cup D\mathfrak{B})$, порожденный формулой

$$F(b_1, \ldots, b_m, x_1, \ldots, x_n),$$

где $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle \in B^m$. Из полноты $T \cup D(\mathfrak{A}(b_1, \ldots, b_m))$ следует, что $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ реализует главный n-тип из

$$S_n(T \cup D(\mathfrak{A}(b_1, \ldots, b_m))),$$

порожденный формулой $F(b_1, \ldots, b_m, x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$ реализует главный m-тип из $S_m(T \cup D\mathfrak{A})$, порожденный $G(y_1, \ldots, y_m)$. Тогда $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ реализует главный n-тип из $S_n(T \cup D\mathfrak{A})$, порожденный формулой

$$(Ey_1) \ldots (Ey_m)\,[G(y_1, \ldots, y_m)\ \&$$
$$\&\, F(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)]. \quad \square$$

Теорема 32.6. *Предположим, что для всех $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}(T)$ множество изолированных точек пространства $S\mathfrak{A}$ плотно в $S\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — простое модельное расширение системы $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{B}$ — ее атомное расширение.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{B}$ проста над $\mathfrak{A}$, то достаточно найти некоторое атомное модельное расширение $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{D}$ — модельное расширение, построенное в доказательстве 32.3. Таким образом, $\mathfrak{D} = \bigcup\{\mathfrak{D}_\delta \mid \delta < \gamma\}$, $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}_\lambda = \bigcup\{\mathfrak{D}_\delta \mid \delta < \lambda\}$ и $\mathfrak{D}_{\delta+1} = \mathfrak{D}_\delta(d_\delta)$, где d_δ реализует изолированную точку пространства $S\mathfrak{D}_\delta$. Система $\mathfrak{D}_{\delta+1}$ является атомной над $\mathfrak{D}_\delta$, так как каждый элемент из $\mathfrak{D}_{\delta+1}$ представим в виде $t(d_\delta)$ для некоторого терма $t(x)$ сигнатуры теории $T \cup D\mathfrak{D}_\delta$. Индукцией по δ, используя 32.5, получаем, что $\mathfrak{D}$ — атомное расширение $\mathfrak{A}$. $\square$

Предложение 32.7. *Пусть $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{C}$ атомна над $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ конечно порождена над $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{C}$ атомна над $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(b_1, \ldots, b_n)$. Достаточно рассмотреть случай $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}(c_1, \ldots, c_m)$. Предложение будем доказывать индукцией по n. Поэтому можно считать, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(b)$. В силу 32.5 при фикси-

рованном $\mathfrak{B}$ можно вести индукцию по m, т. е. считать, что $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}(c)$.

Пусть $F(x, y)$ порождает главный 2-тип из $S_2(T \cup D\mathfrak{A})$, который реализуется парой $\langle b, c \rangle$. Пусть c реализует 1-тип $q \in S_1(T \cup D\mathfrak{B})$. Ясно, что $F(b, y) \in q$. Для того чтобы показать, что $F(b, y)$ порождает q, предположим, что

$$T \cup D\mathfrak{C} \vdash H(c),$$

где $H(y)$ — формула сигнатуры теории $T \cup D\mathfrak{B}$. Тогда $H(y) = H(b, y)$, где $H(x, y)$ — формула сигнатуры теории $T \cup D\mathfrak{A}$ и

$$T \cup D\mathfrak{A} \vdash F(x, y) \to H(x, y),$$

$$T \cup D\mathfrak{B} \vdash F(b, y) \to H(y). \quad \square$$

Пусть $\mathfrak{C}$ — простое модельное расширение $\mathfrak{A}$. Предположим, что $\mathfrak{C} = \bigcup\{\mathfrak{C}_\delta \mid \delta < \gamma\}$, где $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}_\lambda = \bigcup\{\mathfrak{C}_\delta \mid \delta < \lambda\}$, $\mathfrak{C}_{\delta+1} = \mathfrak{C}_\delta(c_\delta)$ и c_δ реализует главный 1-тип из $S\mathfrak{C}_\delta$. В этом случае будем говорить, что $\mathfrak{C}$ — *простое расширение Морли* системы $\mathfrak{A}$ (или $\mathfrak{C}$ *проста по Морли над* $\mathfrak{A}$). Простое модельное расширение, построенное в 32.3, является простым расширением Морли.

Предложение 32.8. *Пусть* $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$. *Если* $\mathfrak{C}$ *проста по Морли над* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *конечно порождена над* $\mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{C}$ *проста по Морли над* $\mathfrak{B}$.

Доказательство. По условию $\mathfrak{C} = \bigcup\{\mathfrak{C}_\delta \mid \delta < \gamma\}$, где $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}_\lambda = \bigcup\{\mathfrak{C}_\delta \mid \delta < \lambda\}$, $\mathfrak{C}_{\delta+1} = \mathfrak{C}_\delta(c_\delta)$ и c_δ реализует главный 1-тип из $S\mathfrak{C}_\delta$. Определим

$$\mathfrak{C}_0^* = \mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{C}_\lambda^* = \bigcup\{\mathfrak{C}_\delta^* \mid \delta < \lambda\},$$

$$\mathfrak{C}_{\delta+1}^* = \mathfrak{C}_\delta^*(c_\delta).$$

Ясно, что $\mathfrak{C} = \bigcup\{\mathfrak{C}_\delta^* \mid \delta < \gamma\}$. Для того чтобы показать, что $\mathfrak{C}_{\delta+1}^*$ атомна над $\mathfrak{C}_\delta^*$, выбираем $\rho < \gamma$, для которого $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}_\rho$. Если $\delta \geqslant \rho$, то $\mathfrak{C}_\delta^* = \mathfrak{C}_\delta$ и поэтому $\mathfrak{C}_{\delta+1}^*$ атомна над $\mathfrak{C}_\delta^*$. Пусть $\delta < \rho$. Тогда $\mathfrak{C}_\rho^* = \mathfrak{C}_\rho$ и по 32.5 $\mathfrak{C}_\rho^*$ является атомной над $\mathfrak{C}_\delta$. В силу 32.7 $\mathfrak{C}_\rho^*$ и, следовательно, $\mathfrak{C}_{\delta+1}^*$ являются атомными над $\mathfrak{C}_\delta^*$. $\square$

Пусть $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ атомна над $\mathfrak{A}$. Система $\mathfrak{C}$ может не быть атомной над $\mathfrak{B}$. В этом случае по 32.7 $\mathfrak{B}$ не является конечно порожденной над $\mathfrak{A}$. Следующий результат дает некоторое достаточное условие для того, чтобы $\mathfrak{C}$ была атомной над $\mathfrak{B}$. Он используется в § 36 в доказательстве теоремы Шелаха о единственности и был доказан вначале Шелахом для тотально трансцендентных теорий.

Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{C} \in \mathscr{K}(T)$. Будем говорить, что система $\mathfrak{B}$ *нормальна над* $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{C}$, когда для любого $p \in S\mathfrak{A}$ выполняется следующее условие: если некоторый элемент $\mathfrak{C}$, реализующий p в $\mathfrak{C}$, принадлежит $\mathfrak{B}$, то все элементы $\mathfrak{C}$, реализующие p в $\mathfrak{C}$, принадлежат $\mathfrak{B}$.

Лемма 32.9 (Харрингтон). *Пусть множество изолированных точек пространства $S\mathfrak{A}$ плотно в нем для любого $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$. Если $\mathfrak{C}$ — атомное модельное расширение $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ нормальна над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{C}$, то $\mathfrak{C}$ атомна над $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Предположим, для того чтобы прийти к противоречию, что $q \in S_n(T \cup D\mathfrak{B})$ — предельная точка, реализуемая в $\mathfrak{C}$. Чтобы не загромождать изложение обозначениями, будем считать $n = 1$. Пусть $c \in C$ реализует q. Следующее рассуждение, похожее на доказательство теоремы Лёвенгейма — Сколема, позволяет считать системы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ счетными, а тогда можно применять методы § 21. Определим $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ и $\mathfrak{C}_n$ индукцией по n.

1. Пусть $F(x, a_1, \ldots, a_m)$ порождает главный 1-тип p, который реализуется элементом c над $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}_0$ — наименьшая подсистема в $\mathfrak{A}$, порожденная элементами $a_1, \ldots, a_m$. Тогда если $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$, то c реализует изолированную точку пространства $S\mathfrak{A}^*$, порожденную формулой $F(x, a_1, \ldots, a_m)$. Ясно, что q является прообразом p, т. е. $p = (Si)\, q$, где i: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ — отображение тождественного вложения.

2. Расширяем $\mathfrak{A}_0$ до такой счетной системы $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$, чтобы p имел более одного прообраза в $S\mathfrak{B}_0$. Если бы такой системы $\mathfrak{B}_0$ не существовало, то по 26.2 q была бы изолированной точкой $S\mathfrak{B}$.

3. Расширяем $\mathfrak{B}_0(c)$ до счетной системы $\mathfrak{C}_0 \prec \mathfrak{C}$.

4. Зафиксируем $n > 0$. Пусть $\mathfrak{A}_{n-1} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{n-1} \subset \mathfrak{B}_{n-1} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_{n-1}(c) \subset \mathfrak{C}_{n-1} \prec \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}_{n-1}$ счетна. Как на шаге 1, расширяем $\mathfrak{C}_{n-1}$ до такой счетной системы $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}$, что для каждого l и каждой l-ки $\langle d_1, \ldots, d_l \rangle \in C^l_{n-1}$ изолированная точка из $S_l(T \cup D\mathfrak{A})$, которая реализуется l-кой $\langle d_1, \ldots, d_l \rangle$, порождается формулой, предметные константы которой принадлежат $\mathfrak{A}_n$. Такая формула существует, так как $\mathfrak{C}$ атомна над $\mathfrak{A}$.

5. Расширяем $\mathfrak{A}_n \cup \mathfrak{B}_{n-1}$ до такой счетной системы $\mathfrak{B}^*_{n-1} \subset \mathfrak{B}$, что если $d_1, d_2 \in C_{n-1}$ реализуют один и тот же тип над $\mathfrak{A}_n$ и $d_1 \in \mathfrak{B}_{n-1}$, то $d_2 \in \mathfrak{B}^*_{n-1}$. Чтобы показать, что такая система $\mathfrak{B}^*_{n-1}$ существует, достаточно показать, что условия, наложенные на d_1 и d_2, влекут $d_2 \in B$. Система $\mathfrak{A}_n$ была выбрана на шаге 4 таким образом, что d_1 и d_2 реализуют один и тот же главный тип над $\mathfrak{A}$, если они реализуют один и тот же тип над $\mathfrak{A}_n$. Так как $\mathfrak{B}$ нормальна над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{C}$, то d_2 принадлежит $\mathfrak{B}$.

6. Так же как на шаге 2, расширяем $\mathfrak{B}^*_{n-1}$ до такой счетной системы $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}$, что тип p элемента c над $\mathfrak{B}^*_{n-1}$ расщепляется в $S\mathfrak{B}_n$. Расширяем $\mathfrak{B}_n \cup \mathfrak{C}_{n-1}$ до счетной системы $\mathfrak{C}_n \prec \mathfrak{C}$.

Пусть $\mathfrak{A}_\infty = \bigcup\{\mathfrak{A}_n\}$, $\mathfrak{B}_\infty = \bigcup\{\mathfrak{B}_n\}$ и $\mathfrak{C}_\infty = \bigcup\{\mathfrak{C}_n\}$. Тогда $\mathfrak{C}_\infty \supset \mathfrak{B}_\infty \supset \mathfrak{A}_\infty$, $\mathfrak{C}_\infty$ является атомным модельным расширением $\mathfrak{A}_\infty$ в силу построения, выполненного на шаге 4, $\mathfrak{B}_\infty$ нормальна над $\mathfrak{A}_\infty$ в $\mathfrak{C}_\infty$ в силу 5 и $c \in C_\infty$ не может реализовать изолированную точку пространства $S\mathfrak{B}_\infty$ в силу 6.

Чтобы последнее условие на c привело нас к противоречию, рассмотрим тип $r \in S\mathfrak{A}_\infty$, реализуемый элементом c. Так как r изолирован и множество изолированных точек из $S\mathfrak{B}_\infty$ плотно в $S\mathfrak{B}_\infty$, то r имеет изолированный прообраз $r^* \in S\mathfrak{B}_\infty$. Так как $\mathfrak{C}_\infty \models T$, то в силу 32.1 (i) некоторый $c^* \in C_\infty$ реализует r^*. Из счетности C_∞, 21.2 и 21.4 следует, что $\mathfrak{C}_\infty$ — однородная модель теории $T \cup D\mathfrak{A}_\infty$. Пусть $f\colon \mathfrak{C}_\infty \xrightarrow{\approx} \mathfrak{C}_\infty$ — такой автоморфизм, что $fc = c^*$ и $f \mid A_\infty = 1_{A_\infty}$. Так как $\mathfrak{B}_\infty$ нормальна над $\mathfrak{A}_\infty$ в $\mathfrak{C}_\infty$, то $f[B_\infty] = B_\infty$. Тогда из того, что c^* реализует изолированный тип, получаем, что c реализует изолированную точку $S\mathfrak{B}_\infty$. □

Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}$ — модель для T. Тогда $\mathfrak{B}$ называется *минимальным модельным расширением* системы $\mathfrak{A}$ (или *минимальной* над $\mathfrak{A}$), если не существует такой модели $\mathfrak{C}$ теории T, что $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{B}$. Бывают случаи, когда $\mathfrak{A}$ имеет простое модельное расширение, которое не является минимальным.

Предложение 32.10. *Предположим, что точки пространства $S\mathfrak{A}$ ранга (Морли) 0 образуют плотное подмножество в $S\mathfrak{A}$ для каждой системы $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$. Тогда каждая система $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ имеет минимальное простое модельное расширение.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$. Система $\mathfrak{B}$ называется *алгебраической над* $\mathfrak{A}$, если каждый элемент $b \in B$ реализует точку пространства $S\mathfrak{A}$ ранга (Морли) 0. Если $\mathfrak{C}$ — алгебраическая над $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебраическая над $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{C}$ — алгебраическая над $\mathfrak{A}$. Это утверждение следует из 32.13. Вспомним конструкцию простого модельного расширения системы $\mathfrak{A}$, приведенную в 32.3: $p_b \in S\mathfrak{A}_b$ возьмем ранга (Морли) 0. Следовательно, $\mathfrak{A}$ имеет простое модельное расширение $\mathfrak{B}$, алгебраическое над $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — модель T. Ясно, что $\mathfrak{C}$ алгебраическая над $\mathfrak{A}$. Система $\mathfrak{C}_1$ называется алгебраически замкнутой, если каждый $p \in S\mathfrak{C}_1$ ранга Морли 0 реализуется в $\mathfrak{C}_1$. В силу 32.1 система $\mathfrak{C}$ алгебраически замкнута. Отсюда следует, что каждое ее алгебраическое расширение, в частности $\mathfrak{B}$, равно $\mathfrak{C}$. □

Упражнение 32.11. Пусть $\mathfrak{B}$ — модель для T и $J(x)$ — формула сигнатуры теории $T \cup D\mathfrak{B}$. Тогда множество элементов, реализующих $J(x)$ в $\mathfrak{B}$, конечно в том и только том случае, когда каждый элемент множества $\{q \mid J(x) \in q \in S\mathfrak{B}\}$ имеет ранг 0.

Упражнение 32.12. Предположим, что каждая счетная система $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ имеет простое модельное расширение. Доказать, что каждая система $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ имеет простое модельное расширение.

Упражнение 32.13. Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) b алгебраический над $\mathfrak{A}$;

(ii) существует такая формула $F(x)$ сигнатуры теории $T \cup D\mathfrak{A}$, что b реализует $F(x)$ и число элементов, реализующих $F(x)$ в любом модельном расширении $\mathfrak{A}$, конечно.

Упражнение 32.14 (Рессер). Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — простые расширения Морли системы $\mathfrak{A}$. Показать, что $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ изоморфны над $\mathfrak{A}$.

§ 33. ПРОСТЫЕ РАСШИРЕНИЯ ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫХ ЦЕПЕЙ

Морли доказал теорему 33.1 для того, чтобы опустить некоторый тип, но для этого оказалось достаточным следствия 32.4. Кажется вполне вероятным, что теорема 33.1 когда-нибудь найдет важное применение. Даже если этого не произойдет, существование этой теоремы оправдано ее внутренней красотой.

Пусть T — полная подмодельно полная теория. Пусть $\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \alpha\}$ — вполне упорядоченная цепь элементов из $\mathscr{K}(T)$, т. е. $\mathfrak{A}_\gamma \subset \mathfrak{A}_\delta$, если $\gamma < \delta$. *Модельным расширением* цепи $\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \alpha\}$ назовем такую цепь $\{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < \alpha\}$ моделей для T, что имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathfrak{B}_\delta \arrow[r] & \mathfrak{B}_{\delta+1} \arrow[r] & \cdots \\
\mathfrak{A}_0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & \mathfrak{A}_\delta \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{A}_{\delta+1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Цепь $\{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < \alpha\}$ назовем *простым модельным расширением* цепи $\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \alpha\}$, если $\mathfrak{B}_\delta$ является простым модельным расширением $\mathfrak{A}_\delta$ для всех $\delta < \alpha$.

Теорема 33.1 (Морли). *Если теория квазитотально трансцендентна, то каждая вполне упорядоченная цепь подсистем моделей этой теории имеет простое модельное расширение.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \alpha\}$ — цепь элементов из $\mathscr{K}(T)$. Предположим, что $\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \lambda\}$ для каждого предельного ординала $\lambda < \alpha$. Если это не так, то вставим в цепь дополнительные системы, чтобы добиться этого свойства. Предположим, что α — предельный ординал, и определим $\mathfrak{A}_\alpha$ как $\bigcup\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \alpha\}$. Индукцией по β определяем последовательность $\{\mathfrak{A}_\delta^\beta \mid \delta \leqslant \alpha\}$:

1. $\mathfrak{A}_\delta^0 = \mathfrak{A}_\delta$.
2. $\mathfrak{A}_\delta^\lambda = \bigcup\{\mathfrak{A}_\delta^\beta \mid \beta < \lambda\}$.
3. Если $\mathfrak{A}_\delta^\beta \models T$, то $\mathfrak{A}_\delta^{\beta+1} = \mathfrak{A}_\delta^\beta$.
4. Допустим, что $\mathfrak{A}_\delta^\beta$ не является моделью для T, но $\mathfrak{A}_\gamma^\beta \models T$ для всех $\gamma < \delta$. Последовательность $\{p_\gamma^\beta \mid \delta \leqslant \gamma \leqslant \alpha\}$ изолированных точек определяем индукцией по γ. В силу 32.1 и 32.2 некоторый изолированный тип $p \in S\mathfrak{A}_\delta^\beta$ не реализуется в $\mathfrak{A}_\delta^\beta$. Пусть таким p будет p_δ^β. Зафиксируем $\gamma \leqslant \alpha$. Пусть p_γ^β — изолированная точка пространства $S\mathfrak{A}_\gamma^\beta$. Тогда множество всех прообразов точки p_γ^β в $S\mathfrak{A}_{\gamma+1}^\beta$ открыто. Допустим, что $p_{\gamma+1}^\beta$ является прообразом наименьшего ранга и имеет наименьшую степень среди прообразов с этим рангом. Как и в доказательстве 32.2, $p_{\gamma+1}^\beta$ является изолированной точкой в $S\mathfrak{A}_{\gamma+1}^\beta$.

Зафиксируем $\lambda \leqslant \alpha$. Допустим, что для всех $\gamma < \lambda$ точка $p_{\gamma+1}^\beta$ является прообразом p_γ^β наименьшего ранга и наименьшей степени среди прообразов с этим рангом. Предположим, далее, что p_γ^β — изолированная точка из $S\mathfrak{A}_\gamma^\beta$ для всех $\gamma < \lambda$ и p_σ^β — прообраз p_τ^β, если $\tau < \sigma < \lambda$. Определим p_λ^β как $\bigcup\{p_\gamma^\beta \mid \gamma < \lambda\}$. Чтобы показать, что тип p_λ^β изолирован, заметим, что существует $\mu < \lambda$, для которого

$$\operatorname{rank} p_\gamma^\beta = \operatorname{rank} p_\lambda^\beta \quad \text{и} \quad \deg p_\gamma^\beta = \deg p_\lambda^\beta,$$

если $\mu \leqslant \gamma \leqslant \lambda$. Существование такого μ следует из правил ранга и степени (29.3 и 29.5). В самом деле, когда γ приближается к λ, ранг p_γ^β может лишь уменьшаться. Так как ранг может уменьшаться только конечное число

раз, то с некоторого места он остается постоянным; после этого степень может уменьшаться конечное число раз. Если $\mu \leqslant \gamma < \lambda$, то p_γ^β является единственным прообразом p_μ^β в $S\mathfrak{A}_\gamma^\beta$, так как любой другой прообраз должен иметь меньший ранг или степень, что невозможно. Из 26.2 следует, что p_λ^β изолирован в $S\mathfrak{A}_\lambda^\beta$.

5. Пусть δ и $\{p_\gamma^\beta \mid \delta \leqslant \gamma \leqslant \alpha\}$ — такие же, как в п. 4. Допустим, что p_γ^β реализуется в $\mathfrak{A}_\gamma^\beta$ для некоторого $\gamma > \delta$. Пусть γ^0 — наименьший из таких γ. Выбираем $a \in A_{\gamma^0}^\beta$, который реализует $p_{\gamma^0}^\beta$. Определяем $\mathfrak{A}_\gamma^{\beta+1} = \mathfrak{A}_\gamma^\beta(a)$ для всех $\gamma \geqslant \delta$ и $\mathfrak{A}_\gamma^{\beta+1} = \mathfrak{A}_\gamma^\beta$ для всех $\gamma < \delta$.

6. Допустим, что p_γ^β не реализуется в $\mathfrak{A}_\gamma^\beta$ ни для какого $\gamma > \delta$. Возьмем такой элемент a, что a реализует p_γ^β. Определяем $\mathfrak{A}_\gamma^{\beta+1} = \mathfrak{A}_\gamma^\beta(a)$ для всех $\gamma \geqslant \delta$ и $\mathfrak{A}_\gamma^{\beta+1} = \mathfrak{A}_\gamma^\beta$ для всех $\gamma < \delta$.

Заметим, что на шагах 5 и 6 a реализует изолированную точку пространства $S\mathfrak{A}_\gamma^\beta$, а именно p_γ^β для всех $\gamma \geqslant \delta$. Следовательно, доказательство 32.3 показывает, что $\bigcup\limits_\beta \mathfrak{A}_\gamma^\beta$ является простым расширением Морли системы $\mathfrak{A}_\gamma$ для всех $\gamma \leqslant \alpha$. □

Не известно, можно ли условие 33.1 заменить более слабым условием 32.3.

§ 34. УПОРЯДОЧЕННО НЕРАЗЛИЧИМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Пусть T — теория, имеющая бесконечные модели. Естественно возникает кажущийся на первый взгляд довольно простым вопрос: имеет ли теория T бесконечные модели с нетривиальными автоморфизмами? Мостовский и Эренфойхт дали положительный ответ на этот вопрос. Их доказательство было основано на понятии неразличимости. Позднее Морли обнаружил, что понятие неразличимых элементов можно применить, чтобы опустить некоторый тип, как, например, в доказательстве 37.2. Неразличимые элементы можно использовать для того, чтобы построить некоторые изоморфизмы, как в доказательстве

36.1, и для того, чтобы определить понятие размерности для моделей ω_1-категоричных теорий, как в параграфах 38 и 39. В настоящем параграфе неразличимость используется, чтобы показать, что каждая теория, категоричная в несчетной мощности, ω-стабильна.

Пусть $\langle I, < \rangle$ — линейный порядок и $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система, для которой $I \subset A$. Элементы множества I называются *упорядоченно неразличимыми в* $\mathfrak{A}$, а само I — *упорядоченно неразличимым* в $\mathfrak{A}$, если

$$\mathfrak{A} \models F(\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n) \leftrightarrow F(\boldsymbol{i}'_1, \ldots, \boldsymbol{i}'_n),$$

где $i_1 < \ldots < i_n$ и $i'_1 < \ldots < i'_n$ — произвольные упорядоченные n-ки из $\langle I, < \rangle$ и $F(x_1, \ldots, x_n)$ — формула сигнатуры системы $\mathfrak{A}$.

Теорема 34.1 (Мостовский, Эренфойхт). *Пусть T — теория с бесконечными моделями и $\langle I, < \rangle$ — некоторый линейный порядок. Тогда существует такая модель $\mathfrak{A}$ теории T, что элементы из I упорядоченно неразличимы в $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Расширяем сигнатуру теории T, добавляя предметную константу $\boldsymbol{i}$ для каждого $i \in I$. Расширяем T до теории T^*, добавляя:

(a) $\{\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{i}' \mid i, i' \in I, i \neq i'\}$,

(b) все предложения вида

$$F(\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n) \leftrightarrow F(\boldsymbol{i}'_1, \ldots, \boldsymbol{i}'_n),$$

где $i_1 < \ldots < i_n$, $i'_1 < \ldots < i'_n$ и $F(x_1, \ldots, x_n)$ — формула сигнатуры теории T.

Каждую модель теории T^* можно взять в качестве требуемой системы $\mathfrak{A}$. Покажем, что T^* совместна. Рассмотрим бесконечную модель $\mathfrak{B}$ теории T. Будем использовать знаменитый комбинаторный результат Рамсея, чтобы показать, что каждое конечное подмножество множества $T^* - T$ выполняется в $\mathfrak{B}$.

Пусть для любого множества G через $G^{(n)}$ обозначается множество всех n-элементных подмножеств в G.

Теорема Рамсея. *Пусть G — бесконечное множество и $G^{(n)} = H_1 \cup \ldots \cup H_m$ — разбиение $G^{(n)}$ на m непересе-*

кающихся множеств. Тогда существует бесконечное подмножество $K \subset G$ и такое j, что $K^{(n)} \subset H_j$.

Рассмотрим конечное множество предложений

$$\text{(b1)}\ F_1(i_{1,1}, \ldots, i_{1,n_1}) \leftrightarrow F_1(i'_{1,1}, \ldots, i'_{1,n_1});$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{(bd)}\ F_d(i_{d,1}, \ldots, i_{d,n_d}) \leftrightarrow F_d(i'_{d,1}, \ldots, i'_{d,n_d}).$$

Пусть $<^*$ — произвольный линейный порядок на B. Применяя теорему Рамсея, получаем такое бесконечное множество $B_1 \subset B$, что

$$\mathfrak{B} \models F_1(b_1, \ldots, b_{n_1}) \leftrightarrow F_1(b'_1, \ldots, b'_{n_1})$$

для всех упорядоченных n_1-ок $b_1 <^* \ldots <^* b_{n_1}$ и $b'_1 <^* \ldots <^* b'_{n_1}$ из $\langle B_1, <^* \rangle$. Второй раз применяя теорему Рамсея, получаем такое бесконечное множество $B_2 \subset B_1$, что

$$\mathfrak{B} \models F_2(b_1, \ldots, b_{n_2}) \leftrightarrow F_2(b'_1, \ldots, b'_{n_2})$$

для всех упорядоченных n_2-ок $b_1 <^* \ldots <^* b_{n_2}$ и $b'_1 <^* \ldots <^* b'_{n_2}$ из $\langle B_2, <^* \rangle$. Применяя последовательно d раз теорему Рамсея, получаем такое бесконечное множество $B_d \subset \ldots \subset B_1 \subset B$, что система $\mathfrak{B}$ с $\langle B_d, <^* \rangle$, играющим роль $\langle I, < \rangle$, является моделью для T, (a), (b1), ..., (bd). □

Теорема 34.2 (Мостовский, Эренфойхт). *Пусть T — теория с бесконечными моделями и $\langle I, < \rangle$ — линейный порядок. Тогда существует такая модель $\mathfrak{B}$ теории T, что $I \subset B$ и каждый эндоморфизм (соответственно автоморфизм) $\langle I, < \rangle$ можно продолжить до элементарного эндоморфизма (соответственно автоморфизма) системы $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Пусть T^s — сколемизация T, определенная в § 11. В силу 34.1 существует такая модель $\mathfrak{A}^s$ теории T^s, что элементы из I упорядоченно неразличимы в $\mathfrak{A}^s$. Пусть $\mathfrak{B}^s$ — сколемовская оболочка I в $\mathfrak{A}^s$. Тогда $\mathfrak{B}$ будет требуемой моделью для T. Так как $\mathfrak{B}^s \prec \mathfrak{A}^s$, то элементы из I являются упорядоченно неразличимыми в $\mathfrak{B}^s$.

Пусть f: $\langle I, < \rangle \to \langle I, < \rangle$ — эндоморфизм. Элемент b системы $\mathfrak{B}^s$ представим в виде $t(i_1, \ldots i_n)$, где t есть

n-местная сколемовская функция системы $\mathfrak{A}^s$, а $i_1 < \ldots < i_n$ есть n-ка из $\langle I, <\rangle$. Определяем естественное продолжение отображения f с I на $\mathfrak{B}^s$ следующим образом:

$$\tilde{f}b = \tilde{f}(t(i_1, \ldots, i_n)) = t(fi_1, \ldots, fi_n).$$

Значение $\tilde{f}b$ не зависит от выбора представления b, так как I упорядоченно неразличимо в $\mathfrak{B}^s$ и f — сохраняющий порядок эндоморфизм I: если $t_1(i_1) = t_2(i_2)$ и $i_1 < i_2$, то $fi_1 < fi_2$ и $t_1(fi_1) = t_2(fi_2)$. По аналогичной причине $\tilde{f}$ является эндоморфизмом. Так как T^s модельно полна, то $\tilde{f}$ — элементарный эндоморфизм. Если f отображает I на I, то $\tilde{f}$ отображает $\mathfrak{B}^s$ на $\mathfrak{B}^s$. □

Если теория T тотально трансцендентна, то в силу упражнения 35.11 для каждого бесконечного кардинала $\varkappa$ существует модель $\mathfrak{B}$ теории T и такое множество $I \subset \mathfrak{B}$, что $\operatorname{card} I = \operatorname{card} \mathfrak{B} = \varkappa$ и каждое взаимно однозначное отображение множества I в I можно продолжить до автоморфизма алгебраической системы $\mathfrak{B}$.

Теорема 34.3 (Морли). *Пусть T — теория с бесконечными моделями и $\varkappa$ — бесконечный кардинал. Тогда существует такая модель $\mathfrak{B}$ теории T мощности $\varkappa$, что для каждого счетного подмножества $Y \subset B$ лишь счетное число 1-типов из $S_1T(\langle\mathfrak{B}, y\rangle\, y \in Y)$ реализуется в $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Свойство «ω-стабильности» системы $\mathfrak{B}$ над каждым счетным подмножеством $Y \subset B$ будет следовать из того факта, что существует лишь счетное число сечений в любом счетном вполне упорядоченном множестве. (Сечением в линейно упорядоченном множестве $\langle J, <\rangle$ является такое множество $K \subset J$, что $x \in K$ и $y \in J - K$ влекут $x < y$.)

Пусть $\langle I, <\rangle$ — полный порядок на ординалах, меньших $\varkappa$. Пусть I, $\mathfrak{A}^s$ и $\mathfrak{B}^s$ — те же самые, что и в доказательстве 34.2, а Y — счетное подмножество в $\mathfrak{B}^s$. Можно предполагать, что Y — сколемовская оболочка некоторого счетного подмножества $J \subset I$, так как в противном случае можно расширить Y до такой оболочки. Элементы системы $\mathfrak{B}^s$ представимы в виде $t(i_1, \ldots, i_n)$, где t есть n-местная функция Сколема системы $\mathfrak{A}^s$, а $i_1 < \ldots < i_n$

есть n-ка из $\langle I, <\rangle$. Тип из $S_1T(\langle\mathfrak{B}^s, y\rangle_{y\in Y})$, который реализует элемент $t(i_1, \ldots, i_n)$, определяется функцией t и положением $i_1, \ldots, i_n$ в $\langle I, <\rangle$ относительно множества J, так как элементы множества I упорядоченно неразличимы в $\mathfrak{B}^s$. Например, допустим, что $y = sj$ для некоторой функции Сколема s и некоторых $j \in J$, $i < j$ и $i' < j$. Тогда

$$\mathfrak{B}^s \models F(y, ti) \leftrightarrow F(y, ti').$$

Существует лишь счетное число сколемовских функций t. Выбор же положения $i_1, \ldots, i_n$ относительно J равносилен выбору конечного числа сечений в J. □

Следствие 34.4 (Морли). *Если теория T категорична в некоторой несчетной мощности, то она ω-стабильна.*

Доказательство. Допустим $\mathfrak{A}$ — такая счетная модель для T, что множество $S_1T(\langle\mathfrak{A}, a\rangle_{a\in A})$ несчетно. Из 15.1 и 10.3 следует, что существует такая система $\mathfrak{C} \succ \mathfrak{A}$, для которой card $\mathfrak{C} = \omega_1$ и несчетное число типов из $S_1T(\langle\mathfrak{A}, a\rangle_{a\in A})$ реализуется в $\mathfrak{C}$. Пусть $\varkappa$ — такой несчетный кардинал, что все модели для T мощности $\varkappa$ изоморфны. Пусть $\mathfrak{D}$ — элементарное расширение системы $\mathfrak{C}$ мощности $\varkappa$. Тогда в $\mathfrak{D}$ реализуется несчетное число типов над $\mathfrak{A}$. Это невозможно, так как $\mathfrak{D}$ изоморфна системе $\mathfrak{B}$ из 34.3. □

Следствие 34.5 (Морли). *Пусть $\varkappa > \omega$ и теория T $\varkappa$-категорична. Тогда каждая ее модель мощности $\varkappa$ насыщена.*

Доказательство. В силу 34.4 T ω-стабильна. Пусть $\mathfrak{A}$ — модель для T мощности $\varkappa$. Если $\varkappa$ — регулярный кардинал, то $\mathfrak{A}$ насыщена по 19.3. Пусть $\varkappa$ сингулярен и ρ — регулярный кардинал, меньший $\varkappa$. По 19.2 существует ρ-насыщенная система $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ мощности $\varkappa$. Так как $\mathfrak{B} \approx \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ ρ-насыщена. □

Упражнение 34.6 (Морли). Пусть $\varkappa > \omega$ и каждая модель для T мощности $\varkappa$ ω_1-насыщена. Тогда T ω-стабильна.

§ 35. НЕРАЗЛИЧИМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ω-СТАБИЛЬНОСТЬ

Элементы множества I называются *неразличимыми* в $\mathfrak{A}$, а само I — *неразличимым в* $\mathfrak{A}$, если $I \subset A$ и

$$\mathfrak{A} \models F(i_1, \ldots, i_n) \leftrightarrow F(i'_1, \ldots, i'_n)$$

для любых n-элементных подмножеств $\{i_1, \ldots, i_n\}$, $\{i'_1, \ldots, i'_n\}$ множества I и любой формулы $F(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — несчетная модель некоторой ω-стабильной теории. Тогда для каждого регулярного кардинала $\varkappa \leqslant \operatorname{card} \mathfrak{A}$ система $\mathfrak{A}$ содержит множество неразличимых элементов мощности $\varkappa$ (в силу 35.7 и 31.6). Если $\mathfrak{A}$ — простое модельное расширение системы $\mathfrak{B}$, то по 35.9 каждое неразличимое множество в $\langle \mathfrak{A}, b \rangle_{b \in B}$ счетно. Доказательства 35.9 и 35.10 показывают, насколько мощна техника ранга и степени, развитая в § 29.

Теорема 35.1 (Морли). *Пусть I — бесконечное упорядоченно неразличимое в $\mathfrak{A}$ множество. Если теория $T\mathfrak{A}$ ω-стабильна, то I — неразличимое в $\mathfrak{A}$ множество.*

Доказательство. Обозначим через P_n группу всех подстановок множества $\{1, \ldots, n\}$. Зафиксируем формулу $F(x_1, \ldots, x_n)$ и $i_1 < \ldots < i_n \in I$. Пусть P_n^+ — множество всех $s \in P_n$, для которых

$$\mathfrak{A} \models F(i_{s1}, \ldots, i_{sn}).$$

Если $P_n^+ = P_n$ или $P_n^+ = 0$ для всех F, то теорема доказана. Пусть $s \in P_n^+$ и $t \in P_n - P_n^+$. Подстановки s и t отличаются на произведение транспозиций. (Транспозиция $(k, k+1)$ переставляет элементы k и $k+1$, оставляя остальные элементы множества $\{1, \ldots, n\}$ на месте.) Значит, существуют такие $s \in P_n^+$ и $t \in P - P_n^+$, что

$$t = (k, k+1) \cdot s$$

для некоторого k. Обозначим через $G(x_1, \ldots, x_n)$ формулу $F(x_{s1}, \ldots, x_{sn})$. Тогда

(1) $\mathfrak{A} \models G(i_1, \ldots, i_n)$,

(2) $\mathfrak{A} \models \neg G(i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_k, i_{k+2}, \ldots, i_n)$.

Заметим, что (1) и (2) остаются справедливыми, если $i_1 < \ldots < i_n$ заменить на $i'_1 < \ldots < i'_n \in I$, так как элементы I упорядоченно неразличимы в $\mathfrak{A}$. Пусть

$\langle R, <\rangle$ — естественный порядок на действительных числах. Из теоремы компактности следует, что существует система $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, для которой $R \subset B$ и

$$\mathfrak{B} \models G(r_1, \ldots, r_n),$$
$$\mathfrak{B} \models \neg G(r_1, \ldots, r_{k-1}, r_{k+1}, r_k, r_{k+2}, \ldots, r_n)$$

для всех $r_1 < \ldots < r_n \in R$. Теорему компактности здесь можно применять, так как I бесконечно.

Пусть $r < r' \in R$. Существуют такие рациональные числа $\{q_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n \,\&\, i \neq k\}$, что

$$q_1 < \ldots < q_{k-1} < r < q_{k+1} < r' < q_{k+2} < \ldots < q_n.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{B} \models G(q_1, \ldots, q_{k-1}, r, q_{k+1}, \ldots, q_n),$$
$$\mathfrak{B} \models \neg G(q_1, \ldots, q_{k-1}, r', q_{k+1}, \ldots, q_n).$$

Таким образом, различные элементы из R реализуют в $\mathfrak{B}$ различные 1-типы над множеством рациональных чисел. Тогда теория $T\mathfrak{A}$ не является ω-стабильной. □

Пусть A — множество, а R есть n-местное отношение на A и $I \subset A$. Отношение R называется *связанным* (*антисимметричным*) над I, если для каждого n-элементного подмножества $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ существует такая перестановка s множества $\{1, \ldots, n\}$, что $R(i_{s1}, \ldots, i_{sn})$ истинно (ложно).

Отношение R *определимо* в $\mathfrak{A}$, если существует такая формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры теории $T\mathfrak{A}$, что

$$R(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models F(a_1, \ldots, a_n)$$

для всех $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A^n$.

Теорема 35.2. *Если теория $T\mathfrak{A}$ ω-стабильна, то никакое определимое в $\mathfrak{A}$ отношение не является одновременно связанным и антисимметричным над бесконечным множеством $I \subset A$.*

Доказательство подобно доказательству 35.1. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ определяет отношение на $\mathfrak{A}$, являющееся связанным и антисимметричным над некоторым бесконечным подмножеством $I \subset A$. Пусть $<$ — произвольный порядок на I. Как и в доказательстве 34.1, конеч-

ное число последовательных применений теоремы Рамсея дает бесконечное подмножество $J \subset I$, элементы которого упорядоченно неразличимы в $\mathfrak{A}$ по отношению ко всем формулам, полученным из $F(x_1, \ldots, x_n)$ перестановками переменных. Так как отношение, определенное формулой $F(x_1, \ldots, x_n)$, связанно и антисимметрично над J, то элементы из J не являются неразличимыми относительно $F(x_1, \ldots, x_n)$. Далее продолжаем, как в 35.1. □

Шелах [1] доказал утверждение, обратное к несколько видоизмененной форме теоремы 35.2.

Следствие 35.3. *Если $\mathfrak{A}$ имеет бесконечный определимый линейный порядок, то теория $T\mathfrak{A}$ не является ω-стабильной.*

Пусть $\langle I, < \rangle$ — линейный порядок, а $\mathfrak{A}$ — система, для которой $I \subset A$ и $Y \subset A$. Элементы из I называются *упорядоченно неразличимыми над Y в $\mathfrak{A}$*, если они упорядоченно неразличимы в $\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y}$. Элементы из I называются *неразличимыми над Y в $\mathfrak{A}$*, если они неразличимы в $\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y}$.

Соглашение о подсистемах. Пусть T — подмодельно полная теория, $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ и $Y \subset A$. Пусть $\mathfrak{B}$ — наименьшая подсистема в $\mathfrak{A}$, содержащая Y. Элементы из B имеют вид $t(y_1, \ldots, y_n)$, где $t(x_1, \ldots, x_n)$ — терм сигнатуры теории T и $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Оказывается удобным игнорировать разницу между Y и $\mathfrak{B}$. Так, под „$p \in SY$" будет подразумеваться „$p \in S\mathfrak{B}$", а „$Y(a)$" будет обозначать „$\mathfrak{B}(a)$". Будем говорить, что „$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ реализует атом над Y" вместо „$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ реализует атом над $\mathfrak{B}$".

Теорема 35.4. *Пусть I — бесконечное упорядоченно неразличимое над Y в $\mathfrak{A}$ множество. Предположим, что 1-тип $p \in SY$ реализуется всеми элементами из I в $\mathfrak{A}$. Если p имеет ранг (Морли), то I неразличимо над Y в $\mathfrak{A}$.*

Доказательство представляет собой слегка измененное доказательство 35.1. Пусть $G(x_1, \ldots, x_n)$ — формула сигнатуры теории $T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$, такая, как в 35.1, т. е.

$$\mathfrak{A} \models G(i_1, \ldots, i_n),$$

$$\mathfrak{A} \models \neg G(i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_k, i_{k+2}, \ldots, i_n),$$

где $i_1 < \ldots < i_n \in I$. Пусть $\mathfrak{B}$ — такая же система, как и в 35.1, за исключением дополнительного требования, что каждый $r \in R$ реализует p. Тогда различные элементы из R реализуют различные 1-типы над $Y \cup Q$, где Q — множество рациональных чисел, и, следовательно, p имеет несчетное число прообразов в $S(Y \cup Q)$. Так как лишь конечное число элементов из Y входит в $G(x_1, \ldots, x_n)$, то можно считать, что Y конечно. Однако тогда (как в 31.6) p имеет лишь счетное число прообразов в $S(Y \cup Q)$, так как каждый прообраз p имеет ранг, а $S(Y \cup Q)$ имеет счетную базу. □

Пусть T — полная подмодельно полная теория, $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$, $Y \subset A$ и $\{a_\delta \mid \delta < \alpha\} \subset A$. Для каждого $\delta < \alpha$ пусть p_δ есть 1-тип, реализуемый элементом a_δ над $Y \cup \{a_\gamma \mid \gamma < \delta\}$. Предположим, что p_0 имеет ранг (Морли). Последовательность $\{a_\delta \mid \delta < \alpha\}$ называется *последовательностью Морли* над Y в $\mathfrak{A}$, если для всех $\gamma < \delta$ p_δ является прообразом p_γ того же ранга и степени, что и p_γ. *Рангом* и *степенью* $\{a_\delta \mid \delta < \alpha\}$ назовем ранг и степень p_0.

Лемма 35.5. *Каждая бесконечная последовательность Морли над Y в $\mathfrak{A}$ является неразличимым множеством над Y в $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. В силу 35.4 достаточно показать, что

$$\mathfrak{A} \models F(a_{\delta_1}, \ldots, a_{\delta_n}) \leftrightarrow F(a_{\gamma_1}, \ldots, a_{\gamma_n})$$

для всех $\delta_1 < \ldots < \delta_n$, $\gamma_1 < \ldots < \gamma_n$ и формул $F(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры теории $T(\langle \mathfrak{A}, y \rangle_{y \in Y})$. Если $n = 1$, то это следует из того факта, что все a_δ реализуют тип p_0. Зафиксируем $n > 1$. По индуктивному предположению существует такой изоморфизм j, что

$$\begin{tikzcd}
Y(a_{\delta_1}, \ldots, a_{\delta_{n-1}}) \arrow[rr, "\approx", "j"'] & & Y(a_{\gamma_1}, \ldots, a_{\gamma_{n-1}}) \\
& Y \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

и $ja_{\delta_i} = a_{\gamma_i}$ для $1 \leqslant i < n$. Пусть p (соответственно q) есть 1-тип, реализуемый элементом a_{δ_n} (соответственно a_{γ_n}) над Y $(a_{\delta_1}, \ldots, a_{\delta_{n-1}})$ (соответственно над Y $(a_{\gamma_1}, \ldots, a_{\gamma_{n-1}})$. Достаточно показать, что $(Sj)\, q = p$.

Ясно, что p — прообраз p_0 и p_{δ_n} — прообраз p. По правилу ранга (29.3) $\operatorname{rank} p_0 \geqslant \operatorname{rank} p \geqslant \operatorname{rank} p_{\delta_n}$. Так как $\{a_\delta \mid \delta < \alpha\}$ — последовательность Морли, то $\operatorname{rank} p_0 = \operatorname{rank} p_{\delta_n}$ и, следовательно, $\operatorname{rank} p = \operatorname{rank} p_0$. Аналогичное применение правила степени (29.5) показывает, что $\deg p = \deg p_0$ и p является единственным прообразом p_0 в SY $(a_{\delta_1}, \ldots, a_{\delta_{n-1}})$ того же ранга и степени, что и p_0. Те же самые рассуждения проходят для q, следовательно, q — единственный прообраз p_0 в SY $(a_{\gamma_1}, \ldots, a_{\gamma_n})$ того же ранга и степени, что и p_0. Отсюда следует, что $(Sj)\, q = p$, так как Sj, будучи гомеоморфизмом, сохраняет ранг и степень и так как $(Sg)\,(Sj) = Sf$. □

Предложение 35.6. *Каждая последовательность Морли над Y в $\mathfrak{A}$ степени 1 является неразличимым множеством над Y в $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. В силу 35.5 нужно рассмотреть лишь конечные последовательности Морли. Пусть $\{a_i \mid i \leqslant n\}$ — последовательность Морли над Y степени 1. Тогда a_n реализует p_n над Y $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ и $\deg p_n = 1$. По правилу степени (29.5) p_n имеет единственный прообраз, обозначим его через p_{n+1}, в SY $(a_0, \ldots, a_n)$ того же ранга и степени, что и p_n. Возьмем a_{n+1}, который реализует p_{n+1}. Продолжая эту процедуру далее, последовательность $\{a_i \mid i \leqslant n\}$ можно продолжить до последовательности Морли $\{a_i \mid i < \omega\}$ над Y. Теперь применяем 35.5. (Заметим, что, возможно, потребуется выйти за пределы $\mathfrak{A}$, для того чтобы выбрать a_i, $i > n$.) □

Теорема 35.7 (Морли). *Пусть теория T тотально трансцендентна, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}(T)$, $Z \subset A$, $\operatorname{card} Z < \operatorname{card} A$ и $\operatorname{card} \mathfrak{A}$ — несчетный регулярный кардинал. Тогда существует множество I, элементы которого неразличимы над Z в $\mathfrak{A}$ и $\operatorname{card} I = \operatorname{card} \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть Y обозначает такое подмножество в A, что $Z \supset Y$ и card $Y <$ card A. Назовем $p \in SY$ *максимальным*, если множество элементов, реализующих p в $\mathfrak{A}$, имеет ту же мощность, что и $\mathfrak{A}$. В силу 31.6 и 19.1 card $SY <$ card A. Так как card A регулярен, то существует максимальный $p \in SY$. Для каждого Y выберем максимальный тип $p^Y \in SY$ наименьшего ранга и наименьшей степени при этом ранге. Выберем такое Y^0, что p^{Y^0} имеет наименьший ранг и наименьшую степень при этом ранге.

Пусть $Y \supset Y^0$. Ясно, что p^{Y^0} имеет максимальный прообраз в SY, пусть q — такой прообраз. Тогда rank $q =$ $=$ rank p^{Y^0} по определению Y^0 и rank $q \leqslant$ rank p^{Y^0} по правилу ранга. Аналогично deg$q =$ deg p^{Y^0} по правилу степени. Таким образом, максимальный прообраз p^{Y^0} имеет тот же ранг и ту же степень, что и p^{Y^0}. Следовательно, по правилу степени p^{Y^0} имеет единственный максимальный прообраз в SY.

Определим последовательность Морли $\{a_\delta \mid \delta <$ card $\mathfrak{A}\}$ индукцией по δ.

1. $p_0 = p^{Y^0}$.
2. a_δ реализует p_δ.
3. Предположим, что $p_\delta \in S\,(Y^0 \cup \{a_\gamma \mid \gamma < \delta\})$ — максимальный прообраз p_0. Пусть $p_{\delta+1} \in S\,(Y^0 \cup \{a_\gamma \mid \gamma \leqslant \delta\}$ — максимальный прообраз p_δ.
4. Пусть $p_\lambda = \bigcup\{p_\delta \mid \delta < \lambda\}$. Предположим, что p_δ является максимальным прообразом p_0 для каждого $\delta < \lambda$. Допустим, что $b \in A$ реализует p_0 и не реализует p_δ. Тогда b реализует некоторый немаксимальный тип $q \in S\,(Y \cup \{a_\gamma \mid \gamma < \delta\})$, так как p_δ — единственный максимальный прообраз p_0 в $S\,(Y \cup \{a_\gamma \mid \gamma < \delta\})$. Следовательно, p_λ является максимальным прообразом p_0.

Пусть $I = \{a_\delta \mid \delta <$ card $\mathfrak{A}\}$. По 35.5 элементы из I неразличимы над Y в $\mathfrak{A}$. □

Лемма 35.8 (Шелах). *Пусть T тотально трансцендентна, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{C} \in \mathcal{K}\,(T)$, $\mathfrak{B}$ конечно порождена над $\mathfrak{A}$ и I — неразличимое множество над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{C}$. Тогда существует такое конечное подмножество $J \subset I$, что $I - J$ неразличимо над $B\,(J)$ в $\mathfrak{C}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(b)$. Возьмем такое конечное подмножество $J \subset I$, что ранг и степень типа p_J, реализуемого элементом b над $\mathfrak{A}(J)$, равны рангу и степени типа p_I, реализуемого элементом b над $\mathfrak{A}(I)$. Множество J существует по 29.2, так как $\mathfrak{A}(I)$ — прямой предел своих подсистем, являющихся конечно порожденными над $\mathfrak{A}$.

Пусть I_1 и I_2 — конечные подмножества в $I - J$ одной и той же мощности. Пусть f отображает I_1 взаимно однозначно на I_2. Так как I неразличимо над $\mathfrak{A}$, f можно продолжить до изоморфизма

$$f\colon \mathfrak{A}(J)(I_1) \xrightarrow{\approx} \mathfrak{A}(J)(I_2),$$

для которого $f \mid A(J) = 1_{A(J)}$. Пусть p_1 (соответственно p_2) — тип, реализуемый элементом b над $\mathfrak{A}(J)(I_1)$ (соответственно над $\mathfrak{A}(J)(I_2)$). Достаточно показать, что $Sfp_2 = p_1$. Типы p_2 и p_1 являются образами p_I и прообразами p_J. Из определения p_J и правил ранга и степени следует, что p_1 и p_2 имеют тот же самый ранг и степень, что и p_J.

$$\begin{tikzcd}
 & S\mathfrak{A}(I) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
S\mathfrak{A}(J)(I_1) \arrow[dr] & & S\mathfrak{A}(J)(I_2) \arrow[ll, "Sf"'] \arrow[dl] \\
 & S\mathfrak{A}(J) &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, p_1 — единственный прообраз p_J в $S\mathfrak{A}(J)(I_1)$ того же ранга и степени, что и p_J. Так как Sf — гомеоморфизм, то Sfp_2 также является прообразом p_J того же ранга и степени, что и p_J. □

Лемма 35.9 (Шелах). *Пусть T тотально трансцендентна, $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ и $\mathfrak{B}$ — простое модельное расширение системы $\mathfrak{A}$. Тогда каждое неразличимое множество над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ счетно.*

Доказательство. Пусть I — бесконечное неразличимое множество над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ и $F(x)$ — формула сиг-

натуры теории $T \cup D\mathfrak{B}$. По 35.8 существует такое конечное подмножество $J \subset I$, что или $\mathfrak{B} \models F(\boldsymbol{i})$ для всех $i \in I - J$, или $\mathfrak{B} \models \neg F(\boldsymbol{i})$ для всех $i \in I \models J$. Положим

$$p^I = \{F(x) \mid \mathfrak{B} \models F(\boldsymbol{i}) \text{ для всех, за исключением конечного числа, } i \in I\}.$$

В силу 35.8 $p^I \in S\mathfrak{B}$. (p^I является «усредненным» типом множества I в $\mathfrak{B}$.)

Для того чтобы прийти к противоречию, предположим, что I — такое несчетное множество неразличимых элементов над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, что p^I имеет наименьший возможный ранг и наименьшую степень при этом ранге. По 29.2 существует система $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$, которая конечно порождена над $\mathfrak{A}$ и такова, что тип $p^I_{\mathfrak{C}}$, являющийся проекцией p^I на $S\mathfrak{C}$, имеет тот же ранг и ту же степень, что и p^I. Тогда для любой системы $\mathfrak{D}$, такой, что $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}$, тип $p^I_{\mathfrak{D}}$ имеет тот же ранг (скажем, α) и степень (скажем, m), что и p^I.

По 35.8 существует такое конечное подмножество $J \subset I$, что $K = I - J$ неразличимо над $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{B}$. Определяем последовательности $\{p_n \mid n < \omega\}$ и $\{i_n \mid n < \omega\}$ по индукции.

1. $p_0 \in S\mathfrak{C}$, и каждый элемент $i \in K$ реализует p_0.
2. $i_n \in K$, и i_n реализует p_n.
3. В силу 35.8 все, за исключением конечного числа, $i \in K$ реализуют один и тот же тип над $\mathfrak{C}(i_0, \ldots, i_n)$; пусть p_{n+1} — этот тип. Заметим, что $p_n = p^I_{\mathfrak{C}(i_0, \ldots, i_n)}$ и, следовательно, имеет ранг α и степень m в силу выбора $\mathfrak{C}$.

Согласно 32.3, можно предполагать, что система $\mathfrak{B}$ проста по Морли над $\mathfrak{A}$. Тогда по 32.8 $\mathfrak{B}$ является простой над $\mathfrak{C}$. Пусть $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$ — простое модельное расширение $\mathfrak{C}(i_n \mid n < \omega)$. Так как $\mathfrak{B}$ проста над $\mathfrak{C}$, существует отображение

$$f\colon \mathfrak{B} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B}^*,$$

для которого $f \mid C = 1_C$. Пусть $K^* = f[K]$. Тогда K^* неразличимо над $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{B}^*$. Пусть p^*_n — тип, реализуемый всеми, за исключением конечного числа, $i \in K^*$ над

$\mathfrak{C}(i_0, \ldots, i_{n-1})$. Ясно, что $p_0 = p_0^*$. Индукцией по n покажем, что для всех $k < \omega$ $p_k = p_k^*$. Предположим, что $p_n = p_n^*$. Тогда $\operatorname{rank} p_n^* = \operatorname{rank} p_n = \operatorname{rank} p^I_{\mathfrak{C}} = \alpha$. По правилу ранга $\operatorname{rank} p^*_{n+1} \leqslant \alpha$. Пусть p^{K^*} —«усредненный» тип K^* в $\mathfrak{B}$. Так как элементы из K^* неразличимы над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, то в силу выбора I $\operatorname{rank} p^{K^*} \geqslant \operatorname{rank} p^I = \alpha$. С другой стороны, $\operatorname{rank} p^*_{n+1} = \operatorname{rank} p^{K^*}_{\mathfrak{C}(i_0, \ldots, i_n)} \geqslant \operatorname{rank} p^{K^*}$. Таким образом, $\operatorname{rank} p^*_{n+1} = \operatorname{rank} p_{n+1} = \alpha$. Тогда по правилу степени $p_{n+1} = p^*_{n+1}$, так как p_{n+1} и p^*_{n+1} являются прообразами p_n того же ранга, что и p_n, и так как $\deg p_{n+1} = \deg p_n = m$.

Пусть $p_\omega = \bigcup\{p_n \mid n < \omega\} = \bigcup\{p_n^* \mid n < \omega\}$. Так как K^* несчетно, то в силу 35.8 существует $i^* \in K^*$, который реализует p_ω. По 32.6 p_ω — изолированная точка в $S\mathfrak{C}(i_n \mid n < \omega)$. Пусть $F(x, i_0, \ldots, i_n) \in p_{n+1}$ порождает p_ω. Тогда из $i^* \neq i_{n+1}$ получаем

$$T \cup D(\mathfrak{C}(i_n \mid n < \omega)) \vdash F(x, i_0, \ldots, i_n) \to x \neq i_{n+1}.$$

Однако это невозможно, потому что i^* и i_{n+1} неразличимы над $\mathfrak{C}(i_0, \ldots, i_n)$. □

Теорема 35.10 (Шелах). *Если T тотально трансцендентна и $\varkappa \geqslant \omega$, то T имеет насыщенную модель мощности $\varkappa$.*

Доказательство. По 19.4 и 31.6 T имеет специальную модель $\mathfrak{A}$ мощности $\varkappa$. Таким образом, $\mathfrak{A} = \bigcup\{\mathfrak{A}_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$, где $\{\mathfrak{A}_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ — элементарная цепь насыщенных моделей. Пусть $Y \subset A$ и $\operatorname{card} Y < \varkappa$. Зафиксируем $p \in SY$ и покажем, что p реализуется в $\mathfrak{A}$. Пусть $q \in S\mathfrak{A}$ — прообраз p. Из 29.2 следует, что существует такая конечно порожденная система $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, что проекция $q_{\mathfrak{C}}$ типа q на $S\mathfrak{C}$ имеет тот же ранг и степень, что и q. Тогда для каждой системы $\mathfrak{D}$, такой, что $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D} \subset \mathfrak{A}$, тип $q_{\mathfrak{D}}$ имеет тот же ранг и степень, что и q.

Предположим, что α — предельный ординал; если это не так, то $\mathfrak{A}$ насыщена. Тогда $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}_\gamma$ для некоторого $\gamma < \alpha$. Предположим, что $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}_0$ и $\operatorname{card} \mathfrak{A}_{\gamma_1} < \operatorname{card} \mathfrak{A}_{\gamma_2}$,

если $\gamma_1 < \gamma_2 < \alpha$. Определим последовательность Морли $\{i_\delta \mid \delta < \varkappa\}$ индукцией по $\delta < \varkappa$.

1. Пусть $q_\delta \in S\mathfrak{C}(i_\rho \mid \rho < \delta)$ — проекция q. Тогда q_δ имеет тот же ранг и степень, что и q.

2. Предположим, что существует такой ординал $\gamma < \alpha$, что $\mathfrak{C}(i_\rho \mid \rho < \delta) \subset \mathfrak{A}_\gamma$ и $\operatorname{card} \mathfrak{A}_\gamma > \max(\omega, \operatorname{card} \delta)$; пусть γ_δ — наименьший из таких γ. Возьмем $i_\delta \in A_{\gamma\delta}$, который реализует q_δ; такой элемент существует, так как $\mathfrak{A}_{\gamma\delta}$ насыщена.

Возьмем $\varkappa^+$-насыщенную систему $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$, чтобы расширить $\{i_\delta \mid \delta < \varkappa\}$ до последовательности Морли $\{i_\delta \mid \delta < 2\varkappa\} \subset B$.

3. Пусть $q_\varkappa = q \in S\mathfrak{A}$. В силу 31.8 $\deg q_\varkappa = 1$.

4. Пусть $\varkappa \leqslant \delta < 2\varkappa$. Возьмем $i_\delta \in B$, который реализует q_δ. Предполагаем, что $\deg q_\delta = 1$. Пусть $q_{\delta+1} \in S\mathfrak{A}(i_\rho \mid \rho \leqslant \delta)$ — единственный прообраз q_δ того же ранга и степени, что и q_δ. Так как $\deg q_\delta = 1$, то по правилу степени тип $q_{\delta+1}$ существует.

5. Пусть $q_\lambda = \bigcup \{q_\delta \mid \delta < \lambda\}$, если λ — предельный ординал.

Проверим, что $\{i_\delta \mid \delta < 2\varkappa\}$ — последовательность Морли. Обозначим через $r_\delta \in S\mathfrak{C}(i_\rho \mid \rho < \delta)$ тип, который реализуется элементом i_δ. Если $\delta < \varkappa$, то $r_\delta = q_\delta$. Если $\varkappa \leqslant \delta < 2\varkappa$, то $r_{\delta+1}$ — прообраз r_δ, так как $q_{\delta+1}$ — прообраз как $r_{\delta+1}$, так и r_δ. Индукцией по δ легко показать, что r_δ имеет тот же ранг и степень, что и r_0, для всех $\delta < 2\varkappa$. В силу 35.5 элементы $I = \{i_\delta \mid \delta < 2\varkappa\}$ неразличимы над $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{B}$. Из 35.8 следует, что существует такое $J \subset I$, что $\operatorname{card} J < \varkappa$ и $I - J$ неразличимо над Y в $\mathfrak{B}$. Пусть $i^* \in \{i_\delta \mid \varkappa \leqslant \delta < 2\varkappa\} - J$. Так как $q_\varkappa$ — прообраз p, то i^* реализует p в $\mathfrak{B}$. Возьмем $i \in \{i_\delta \mid \delta < \varkappa\} - J$. Тогда i реализует p в $\mathfrak{A}$, так как i и i^* неразличимы над Y. □

Упражнение 35.11 (Шелах). Пусть T тотально трансцендентна и $\varkappa \geqslant \omega$. Показать, что существует модель $\mathfrak{A}$ теории T и такое множество $I \subset A$, что $\operatorname{card} I = \operatorname{card} \mathfrak{A} = \varkappa$ и любое взаимно однозначное отображение I в I можно продолжить до автоморфизма системы $\mathfrak{A}$.

§ 36. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ШЕЛАХА

Пусть T тотально трансцендентна, $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ и $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ — простые модельные расширения $\mathfrak{A}$. В силу теоремы 36.2 $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ изоморфны над $\mathfrak{A}$. Существование изоморфизма между $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ следует главным образом из леммы 35.9, которая утверждает, что никакое простое модельное расширение системы $\mathfrak{A}$ не содержит несчетного множества неразличимых элементов над $\mathfrak{A}$. Изоморфизм строится индукцией по некоторому рангу, являющемуся небольшим изменением ранга Морли.

Пусть H — замкнутое подмножество в $S\mathfrak{A}$. *Ординальным рангом* H называется наименьшее $\gamma \geqslant \operatorname{rank} p$ для каждого $p \in H$. Из компактности $S\mathfrak{A}$ следует, что если ординальный ранг H равен α, то существует $p \in H$ ранга α и число таких p конечно. Пусть n — наибольшая степень точек $p \in H$ ранга α и d — число точек $p \in H$ ранга α и степени n. *Рангом* H называется тройка $\langle \alpha, n, d \rangle$. Тройка $\langle \alpha_1, n_1, d_1 \rangle$ считается меньше тройки $\langle \alpha_2, n_2, d_2 \rangle$, если $\alpha_1 < \alpha_2$, или $\alpha_1 = \alpha_2$ и $n_1 < n_2$, или $\alpha_1 = \alpha_2$, $n_1 = n_2$ и $d_1 < d_2$. Если $F(x)$ — формула сигнатуры теории $T \cup D\mathfrak{A}$, то $\{p \mid p \in S\mathfrak{A} \,\&\, F(x) \in p\}$ — замкнутое множество $S\mathfrak{A}$. Назовем *A-рангом* $F(x)$ ранг множества $\{p \mid p \in S\mathfrak{A} \,\&\, F(x) \in p\}$.

Теорема 36.1 (Шелах). *Пусть T тотально трансцендентна, $\mathfrak{A}$ (соответственно $\mathfrak{A}^*$) принадлежит $\mathscr{K}(T)$, $\mathfrak{B}$ (соответственно $\mathfrak{B}^*$) — атомное модельное расширение системы $\mathfrak{A}$ (соответственно $\mathfrak{A}^*$) и $f\colon A \to A^*$ — такое отображение на, что*

$$\langle \mathfrak{B}, a \rangle_{a \in A} \equiv \langle \mathfrak{B}^*, fa \rangle_{a \in A}.$$

Предположим далее, что каждое множество неразличимых элементов над $\mathfrak{A}$ (соответственно $\mathfrak{A}^*$) в $\mathfrak{B}$ (соответственно $\mathfrak{B}^*$) счетно. Пусть $F(x)$ — формула сигнатуры теории $T \cup D\mathfrak{A}$. Определим

$$C = A \cup \{b \mid b \in B \,\&\, \mathfrak{B} \models F(b)\},$$
$$C^* = A^* \cup \{b \mid b \in B^* \,\&\, \mathfrak{B}^* \models F(b)\}.$$

Тогда f можно продолжить до такого отображения $g\colon C \to C^*$ на, что

$$\langle \mathfrak{B}, c \rangle_{c \in C} \equiv \langle \mathfrak{B}^*, gc \rangle_{c \in C}.$$

Доказательство индукцией по A-рангу $F(x)$. Сначала предположим, что этот ранг равен $\langle \alpha, n, d \rangle$, где $d > 1$. Возьмем $p \in S\mathfrak{A}$, для которого $F(x) \in p$, $\operatorname{rank} p = \alpha$ и $\deg p = n$. Выберем такую формулу $G(x)$, что (i) $G(x) \in p$ и (ii) из $G(x) \in q$ следует $q = p$ или $\operatorname{rank} q < \alpha$. Пусть

$$D = A \cup \{b \mid b \in B \ \& \ \mathfrak{B} \models F(b) \ \& \ \neg G(b)\},$$
$$D^* = A \cup \{b \mid b \in B^* \ \& \ \mathfrak{B}^* \models F(b) \ \& \ \neg G(b)\}.$$

Так как A-ранг $F(x) \ \& \ \neg G(x)$ равен $\langle \alpha, n, d-1 \rangle$, то f можно продолжить до такого отображения h: $D \to D^*$, что

$$\langle \mathfrak{B}, d \rangle_{d \in D} \equiv \langle \mathfrak{A}^*, hd \rangle_{d \in D}.$$

Из правил ранга и степени § 29 следует, что D-ранг формулы $F(x) \ \& \ G(x)$ меньше, чем A-ранг $F(x)$. Следовательно, h можно продолжить до такого отображения g: $C \to C^*$ на, что

$$\langle \mathfrak{B}, c \rangle_{c \in C} \equiv \langle \mathfrak{B}^*, gc \rangle_{c \in C}.$$

Предположим теперь, что A-ранг $F(x)$ равен $\langle \alpha, n, 1 \rangle$. Тогда существует единственный тип $p \in S\mathfrak{A}$, такой, что $F(x) \in p$, $\operatorname{rank} p = \alpha$ и $\deg p = n$. Определим последовательности $\{p_\delta \mid \delta \leqslant \delta_0\}$ и $\{b_\delta \mid \delta < \gamma_0\}$ по индукции.

1. $p_0 = p$.

2. Возьмем в качестве b_δ элемент из $C - A$, реализующий p_δ. Если такого нет, то $\gamma_0 = \delta = \delta_0$.

3. Пусть $p_\delta \in S\mathfrak{A}(b_\gamma \mid \gamma < \delta)$. В качестве $p_{\delta+1}$ возьмем элемент $S\mathfrak{A}(b_\gamma \mid \gamma \leqslant \delta)$ того же ранга и степени, что и p_δ. Если такого $p_{\delta+1}$ нет, то $\delta_0 = \delta$ и $\gamma_0 = \delta + 1$.

4. $p_\lambda = \bigcup \{p_\delta \mid \delta < \lambda\}$.

Если $\delta_0 \geqslant \omega$, то по 35.5 элементы $\{b_\delta \mid \delta < \gamma_0\}$ неразличимы над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Следовательно, γ_δ счетный. Если $b \in C - A$ реализует p, то из максимальности $\{b_\delta \mid \delta < \gamma_0\}$ следует, что b реализует некоторый 1-тип из $S\mathfrak{A}(b_\delta \mid \delta < \gamma_0)$ меньшего ранга или степени, чем p. Таким образом, $\{b_\delta \mid \delta < \gamma_0\}$ — счетный «базис трансцендентности» для реализаций типа p в $B - A$. Перенумеруем элементы b_δ так, что $\{b_\delta \mid \delta < \gamma_0\} = \{b_m \mid m < \alpha_0\}$ для некоторого $\alpha_0 \leqslant \omega$. Кардинал α_0 является «размерностью» p в $\mathfrak{B}$.

Заметим, что каждый $b \in C$ реализует 1-тип из $S\mathfrak{A}$ $(b_m \mid m < \alpha_0)$ ранга $<\alpha$ или степени $<n$.

Пусть $p^* = (Sf)^{-1} p \in S\mathfrak{A}^*$. Повторив конструкцию, приведенную выше, с заменой $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и p на $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ и p^*, получим $\{b_m^* \mid m < \alpha_0^*\}$. Если $j < \omega$ и $\alpha_0 \geqslant j$, то $\alpha_0^* \geqslant j$, потому что $\mathfrak{B}$ атомна над $\mathfrak{A}$ и $\langle \mathfrak{B}, a \rangle_{a \in A} \equiv \langle \mathfrak{B}^*, fa \rangle_{a \in A}$. Из аналогичных соображений $\alpha_0^* \geqslant j$ влечет $\alpha_0 \geqslant j$. Следовательно, $\alpha_0 = \alpha_0^*$.

Определим $g = \bigcup\{g_m \mid m < \omega\}$ индукцией по m. Пусть $g_0 = f$. Зафиксируем $m \geqslant 0$. Предположим, что g_m определено так, что область определения g_m лежит в C, область значений g_m лежит в C^*, $\mathfrak{B}$ (соответственно $\mathfrak{B}^*$) атомна над $\operatorname{dom} g_m$ (соответственно $\operatorname{range} g_m$) и

$$\langle \mathfrak{B}, c \rangle_{c \in \operatorname{dom} g_m} \equiv \langle \mathfrak{B}^*, g_m c \rangle_{c \in \operatorname{dom} g_m}.$$

Случай 0. Пусть $m + 1 = 3k$. В этом случае добавим b_k к множеству $\operatorname{dom} g_{m+1}$. Если $k \geqslant \alpha_0$ или $b_k \in \operatorname{dom} g_m$, то $g_{m+1} = g_m$. Допустим $k < \alpha_0$ и $b_k \notin \operatorname{dom} g_m$. Из предположения относительно g_m следует, что существует такой элемент $c^* \in C^*$, что

$$\langle \mathfrak{B}, c, b_k \rangle_{c \in \operatorname{dom} g_m} \equiv \langle \mathfrak{B}^*, g_m c, c^* \rangle_{c \in \operatorname{dom} g_m}.$$

Продолжаем g_m до g_{m+1} так, что $g_{m+1} b_k = c^*$. По 32.7 $\mathfrak{B}$ (соответственно $\mathfrak{B}^*$) атомна над $\operatorname{dom} g_{m+1}$ (соответственно над $\operatorname{range} g_{m+1}$).

Случай 1. Пусть $m + 1 = 3k + 1$. Поступаем как в случае 0 с заменой b_k, $\operatorname{dom} g_{m+1}$ на b_k^*, $\operatorname{range} g_{m+1}$.

Случай 2. Пусть $m + 1 = 3k + 2$. В этом случае будем продолжать g_m до g_{m+1} так, чтобы $\operatorname{dom} g_{m+1}$ (соответственно $\operatorname{range} g_{m+1}$) содержала каждый элемент $b \in C$ (соответственно $b \in C^*$), который реализует 1-тип $q \in S(\operatorname{dom} g_m)$ (соответственно $S(\operatorname{range} g_m)$) меньшего ранга или степени, чем p. (Напомним, что каждый $b \in C$ реализует 1-тип из $S\mathfrak{A}$ $(b_m \mid m < \alpha_0)$ меньшего ранга или степени, чем p.) Пусть последовательность $\{q_\gamma \mid \gamma < \rho_0\}$ нумерует все $q \in S(\operatorname{dom} g_m)$ меньшего ранга или степени, чем p, которые реализуются элементами из C. Так как $\mathfrak{B}$ атомна над $\operatorname{dom} g_m$, то каждый q_γ является изолированной точкой в $S(\operatorname{dom} g_m)$. Пусть $F_\gamma(x)$ —

формула сигнатуры теории $T \cup D$ (dom g_m), которая порождает тип q_γ. Так как rank $q_\gamma <$ rank p, то (dom g_m)-ранг формулы $F_\gamma(x)$ меньше, чем A-ранг формулы $F(x)$.

Пусть $q_\gamma^* = (Sg_m)^{-1} g_\gamma \in S$ (range g_m). Тогда последовательность $\{g_\gamma^* \mid \gamma < \rho_0\}$ нумерует все $q \in S$ (dom g_m) меньшего ранга или степени, чем p, которые реализуются элементами из C^*. Аналогично определяется формула $F_\gamma^*(x)$.

Определяем $g_{m+1} = \bigcup \{g_{m+1}^\gamma \mid \gamma < \rho_0\}$ по индукции.

1. $g_{m+1}^0 = g_m$.

2. Допустим, что g_{m+1}^γ определено так, что $\mathfrak{B}$ (соответственно $\mathfrak{B}^*$) атомна над dom g_{m+1}^γ (соответственно range g_{m+1}^γ) и

$$\langle \mathfrak{B}, b \rangle_{b \in \operatorname{dom} g_{m+1}^\gamma} \equiv \langle \mathfrak{B}^*, g_{m+1}^\gamma b \rangle_{b \in \operatorname{dom} g_{m+1}^\gamma}.$$

Ясно, что (dom g_{m+1}^γ)-ранг $F_\gamma(x)$ меньше, чем A-ранг $F(x)$. Следовательно, g_{m+1}^γ можно продолжить до $g_{m+1}^{\gamma+1}$ так, что

$$\operatorname{dom} g_{m+1}^{\gamma+1} = \operatorname{dom} g_{m+1}^\gamma \cup \{b \mid \mathfrak{B} \models F_\gamma(b)\},$$
$$\operatorname{range} g_{m+1}^{\gamma+1} = \operatorname{range} g_{m+1}^\gamma \cup \{b \mid \mathfrak{B}^* \models F_\gamma^*(b)\},$$
$$\langle \mathfrak{B}, c \rangle_{c \in \operatorname{dom} g_{m+1}^{\gamma+1}} \equiv \langle \mathfrak{B}^*, g_{m+1}^{\gamma+1} c \rangle_{c \in \operatorname{dom} g_{m+1}^{\gamma+1}}.$$

Так как dom $g_{m+1}^{\gamma+1}$ — нормальное расширение dom g_{m+1}^γ, то по 32.9 $\mathfrak{B}$ является атомной над dom $g_{m+1}^{\gamma+1}$. По той же причине $\mathfrak{B}^*$ является атомной над range $g_{m+1}^{\gamma+1}$.

3. Пусть $g_{m+1}^\lambda = \bigcup \{g_{m+1}^\gamma \mid \gamma < \lambda\}$. Область определения g_{m+1}^λ является нормальным расширением в $\mathfrak{B}$ области определения g_{m+1}, следовательно, в силу 32.9 атомна над g_{m+1}^γ. □

Следствие 36.2 (Шелах). *Если T тотально трансцендентна и $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}(T)$, то любые два простых модельных расширения системы $\mathfrak{A}$ изоморфны над $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^*$ — простые модельные расширения $\mathfrak{A}$. По 35.9 каждое множество неразличимых элементов над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ (соответственно $\mathfrak{B}^*$) счетно. По 32.2 и 32.6 $\mathfrak{B}$ (соответственно $\mathfrak{B}^*$) атомна

над $\mathfrak{A}$. Из 36.1 следует, что тождественное отображение A на A можно продолжить до изоморфизма между $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^*$ (нужно взять в качестве $F(x)$ формулу $x = x$). □

Заключение следствия 36.2 остается справедливым, если потребовать от T лишь квазитотальную трансцендентность (упражнение 36.6). Остается ли оно верным, если от T потребовать лишь следующее: изолированные точки пространства $S\mathfrak{A}$ плотны в нем для каждой системы $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$?

Пусть T тотально трансцендентна и $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$. По теореме 32.3 существует некоторое простое модельное расширение системы $\mathfrak{A}$. Следствие 36.2 позволяет говорить о вполне определенном простом модельном расширении $\mathfrak{A}$. Утверждения 32.3 и 36.2 используются в § 41 для определения дифференциального замыкания дифференциального поля характеристики 0.

Следствие 36.3. *Пусть T — тотально трансцендентная теория, $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ и $\mathfrak{C}$ — простое модельное расширение системы $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}$ атомна над $\mathfrak{B}$, то каждый автоморфизм $\mathfrak{B}$ можно продолжить до автоморфизма $\mathfrak{C}$.*

Следствие 36.4 (Шелах). *Пусть T — тотально трансцендентная теория, $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ и $\mathfrak{B}$ — модельное расширение системы $\mathfrak{A}$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(i) *$\mathfrak{B}$ проста над $\mathfrak{A}$,*

(ii) *$\mathfrak{B}$ атомна над $\mathfrak{A}$, и каждое множество неразличимых элементов над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ счетно.*

Доказательство. Условие (ii) следует из (i) в силу 32.2, 32.6 и 35.9. По 36.1 (i) следует из (ii). □

Следствие 36.5 (Шелах). *Пусть T — тотально трансцендентная теория, $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ и $\mathfrak{B}$ — модельное расширение $\mathfrak{A}$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(i) *$\mathfrak{B}$ минимальна над $\mathfrak{A}$,*

(ii) *$\mathfrak{B}$ атомна над $\mathfrak{A}$, и каждое множество неразличимых элементов над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ конечно.*

Доказательство. Пусть (i) справедливо. Тогда по 32.4 $\mathfrak{B}$ проста над $\mathfrak{A}$, следовательно, в силу 32.6 атомна над $\mathfrak{A}$. Предположим, что I — бесконечное множество

неразличимых над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ элементов. Зафиксируем $i \in I$. Пусть $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ — простое модельное расширение системы $\mathfrak{A}(I - \{i\})$. Так как $\mathfrak{B}$ минимальна над $\mathfrak{A}$, то $i \in C$. Кроме того, i реализует изолированный тип $p \in S\mathfrak{A}(I - \{i\})$, потому что $\mathfrak{C}$ является атомной над $\mathfrak{A}(I - \{i\})$. Пусть $F(x)$ порождает p и J — конечное подмножество элементов из $I - \{i\}$, встречающихся в $F(x)$. Возьмем $j \in (I - \{i\}) - J$. Тогда

$$T \cup D\mathfrak{A}(I - \{i\}) \vdash F(x) \to x \neq j,$$

$$T \cup D\mathfrak{A}(I - \{i\}) \vdash \neg F(j).$$

Однако $\mathfrak{B} \models F(j)$ следует из $\mathfrak{B} \models F(i)$, так как j и i неразличимы над $\mathfrak{A}(J)$.

Предположим теперь, что (ii) выполняется, а (i) — нет. По 36.4 $\mathfrak{B}$ проста над $\mathfrak{A}$. Тогда существует такая система $\mathfrak{B}^* \succ \mathfrak{B}$, что $\mathfrak{B}^* \neq \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{B}$ изоморфны над $\mathfrak{A}$. Определим по индукции элементарную цепь $\{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < (\operatorname{card} \mathfrak{A})^+\}$, для того чтобы получить бесконечное неразличимое множество над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

1. $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$.

2. Допустим, что $\mathfrak{B}_\delta$ изоморфна над $\mathfrak{A}$ системе $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{B}_{\delta+1}$ находится в таком же отношении к $\mathfrak{B}_\delta$, как $\mathfrak{B}^*$ к $\mathfrak{B}$. Таким образом, $\mathfrak{B}_{\delta+1} \succ \mathfrak{B}_\delta$, $\mathfrak{B}_{\delta+1} \neq \mathfrak{B}_\delta$ и $\mathfrak{B}_{\delta+1}$, $\mathfrak{B}_\delta$ изоморфны над $\mathfrak{A}$.

3. Пусть $\mathfrak{B}_\lambda = \bigcup\{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < \lambda\}$. Допустим, что $\mathfrak{B}_\delta$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны над $\mathfrak{A}$ для каждого $\delta < \lambda$. Тогда $\mathfrak{B}_\lambda$ атомна над $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{B}_\lambda$ имеет несчетное множество неразличимых элементов над $\mathfrak{A}$, то для некоторого $\delta < \lambda$ система $\mathfrak{B}_\delta$, а значит и $\mathfrak{B}$, имеет бесконечное множество неразличимых элементов над $\mathfrak{A}$. Если каждое множество неразличимых элементов над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ счетно, то по 36.4 $\mathfrak{B}_\lambda$ изоморфна над $\mathfrak{A}$ системе $\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathfrak{C} = \bigcup\{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < (\operatorname{card} \mathfrak{A})^+\}$. По 35.7 существует несчетное множество неразличимых элементов над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{C}$. Однако тогда для некоторого $\delta < (\operatorname{card} \mathfrak{A})^+$ система $\mathfrak{B}_\delta$, а следовательно, и $\mathfrak{B}$ имеет бесконечное множество неразличимых элементов над $\mathfrak{A}$. □

Упражнение 36.6. Пусть T — квазитотально трансцендентная теория и $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$. Показать, что любые два простых модельных расширения $\mathfrak{A}$ изоморфны над ней.

§ 37. КАТЕГОРИЧНОСТЬ В НЕКОТОРОЙ НЕСЧЕТНОЙ МОЩНОСТИ

Теорема Морли о категоричности (37.4) следует из леммы об опускании некоторого типа (37.2), основанной на результате (37.1) типа теоремы Сколема — Лёвенгейма о понижении мощности.

Предложение 37.1 (Морли). *Пусть T — тотально трансцендентная теория, имеющая несчетную ненасыщенную модель. Тогда существует счетная модель $\mathfrak{A}$ теории T, $Y \subset A$, $p \in SY$ и $I \subset A$, такие, что p не реализуется в $\mathfrak{A}$ и I — бесконечное неразличимое над Y в $\mathfrak{A}$ множество.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — несчетная ненасыщенная модель для T. Возьмем такое $Z \subset B$ и $q \in SZ$, что $\operatorname{card} Z < \operatorname{card} \mathfrak{B}$ и q не реализуется в $\mathfrak{B}$. Из 35.7 следует, что существует счетное бесконечное неразличимое множество I над Z в $\mathfrak{B}$.

Определим по индукции возрастающую последовательность $\{\mathfrak{A}_n \mid n < \omega\}$ счетных подсистем системы $\mathfrak{B}$.

1. $\mathfrak{B}_0$ — наименьшая подсистема в $\mathfrak{A}$, носитель которой содержит I.

2. Предположим, что $\mathfrak{A}_{2n} \subset \mathfrak{B}$ счетна. Ясно, что q не реализуется в $\mathfrak{A}_{2n}$. Тогда для каждого $a \in A_{2n}$ существует такая формула $F_a(x) \in q$, что $\mathfrak{B} \models \neg F_a(a)$. Следовательно, можно выбрать такую счетную систему $\mathfrak{A}_{2n+1}$, что $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}_{2n+1} \supset \mathfrak{A}_{2n}$ и никакой элемент $a \in A_{2n}$ не реализует $q_{2n+1} \in S(Z \cap A_{2n+1})$, где q_{2n+1} — проекция $q \in SZ$. Для каждого $a \in A_{2n}$ элементы из Z, встречающиеся в $F_a(x)$, принадлежат $Z \cap A_{2n+1}$.

3. Предположим, что $\mathfrak{A}_{2n+1} \subset \mathfrak{B}$ счетна. В силу 11.2 можно выбрать такую счетную систему $\mathfrak{A}_{2n+2}$, что $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}_{2n+2} \supset \mathfrak{A}_{2n+1}$.

Пусть $\mathfrak{A} = \bigcup\{\mathfrak{A}_n \mid n < \omega\}$. Из 6.1 и 10.3 получаем $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Пусть $Y = Z \cap A$, а $p \in SY$ — проекция q. Если бы p реализовывался в $\mathfrak{A}$ элементом $a \in A_{2n}$, то q_{2n+1} реализовывался бы в $\mathfrak{A}_{2n}$. Если бы множество I не было неразличимым над Y в $\mathfrak{A}$, то I не было бы неразличимым над Z в $\mathfrak{B}$. □

Лемма 37.2 (Морли). *Пусть T — тотально трансцендентная теория, $\mathfrak{A} \models T$, $Y \subset A$, $p \in SY$, p не реали-*

зуется в $\mathfrak{A}$ и I — бесконечное неразличимое множество над Y в $\mathfrak{A}$. Если $\varkappa \geqslant \operatorname{card} \mathfrak{A}$, то T имеет такую модель $\mathfrak{C}$ мощности $\varkappa$, что $Y \subset C$ и p не реализуется в $\mathfrak{C}$.

Доказательство. Из теоремы компактности получаем такие $\mathfrak{B}$ и J, что $\mathfrak{B} \models T$, $Y \subset \mathfrak{B}$, $I \subset J \subset B$, J неразличимо над Y в $\mathfrak{B}$ и $\operatorname{card} J = \varkappa$. Пусть $\mathfrak{C}$ — простое модельное расширение $Y \cup J$, существующее по 32.4. Допустим, что c реализует p в $\mathfrak{C}$. По 32.6 c является атомным над $Y \cup J$ и, следовательно, является атомным над $Y \cup J^*$ для некоторого конечного подмножества $J^* \subset J$. Из 32.1 (i) и 32.2 следует, что p реализуется в каждом модельном расширении $Y \cup J^*$, следовательно, в каждом модельном расширении $Y \cup I$, а значит, и в $\mathfrak{A}$. □

Понятие морлизации теории показывает, что требование подмодельной полноты не является существенным для рассматриваемых здесь результатов. *Морлизация* T^{M} теории T получается добавлением к T следующих новых отношений и аксиом. Для каждой формулы $F(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры теории T добавляем символ отношения R_F и аксиому

$$(x_1) \ldots (x_n) (R_F(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow F(x_1, \ldots, x_n)).$$

Предложение 37.3. *Каждая формула сигнатуры теории T^{M} эквивалентна в T^{M} некоторой формуле сигнатуры T. Теория T^{M} подмодельно полна. Теория T полна точно тогда, когда полна T^{M}. Теория T ω-стабильна точно тогда, когда T^{M} тотально трансцендентна.*

Доказательство проводится индукцией по длине формулы. □

Теории T и T^{M} имеют по существу одни и те же модели. Каждая модель T (T^{M}) имеет единственное обогащение (обеднение), являющееся моделью T^{M} (T), которое получается добавлением (удалением) подходящих отношений. Однако T и T^{M} содержат совершенно различные концепции понятия подсистемы модели.

Теорема 37.4 (Морли). *Пусть T — полная счетная теория, удовлетворяющая одному из следующих двух условий для некоторого несчетного кардинала $\varkappa$:*

(i) *T $\varkappa$-категорична,*

(ii) *каждая модель для T мощности $\varkappa$ ω_1-насыщена.*

Тогда каждая несчетная модель для T насыщена и, следовательно, T категорична в любой несчетной мощности.

Доказательство. В силу 37.3 можно считать, что T подмодельно полна. По 34.4, 34.6 и 31.6 она тотально трансцендентна. Если бы T имела несчетную ненасыщенную модель, то в силу 37.1 и 37.2 она имела бы не ω_1-насыщенную модель мощности $\varkappa$, что невозможно по 34.5. По 16.3 T категорична в каждой несчетной мощности. □

Следствие 37.5 (Харник, Рессейр). *Пусть T категорична в некоторой несчетной мощности, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \in \mathscr{K}(T)$ и $S\mathfrak{A}$ бесконечно. Если $\mathfrak{B}$ является простым модельным расширением системы $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$ — минимальное модельное расширение $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $p \in S\mathfrak{A}$ — предельная точка. Так как из 32.6 следует атомность $\mathfrak{B}$ над $\mathfrak{A}$, то p не реализуется в $\mathfrak{B}$. Допустим, что $\mathfrak{B}$ не минимальна над $\mathfrak{A}$. По 36.5 существует бесконечное неразличимое множество над $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Тогда в силу 37.2 существует несчетная ненасыщенная модель T, что невозможно по 37.4. □

Упражнение 37.6. Доказать 37.5, не используя результаты § 36.

§ 38. МИНИМАЛЬНЫЕ ПОРОЖДАЮЩИЕ И ω_1-КАТЕГОРИЧНОСТЬ

Понятие минимального порождающего лежит в основе теории размерности моделей ω_1-категоричных теорий. (Понятие минимального порождающего является переформулировкой введенного Маршем понятия минимальной формулы (Марш [1]).) В следующем параграфе будет показано, что каждая модель $\mathfrak{A}$ любой ω_1-категоричной теории имеет размерность, хорошо определенную в том смысле, что в случае алгебраически замкнутых полей она совпадает с мощностью базиса трансцендентности. Теорема Вота о двух кардиналах играет главную роль при определении размерности системы $\mathfrak{A}$.

Предложение 37.3 позволяет предполагать, что T подмодельно полна. Для того чтобы приписать каждому элементу из S_1T ранг и степень Морли, добавим к $\mathscr{K}(T)$ объект $\varnothing$ (который назовем *нулевой системой*). Для каждой системы $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(T)$ добавим к $\mathscr{K}(T)$ отображение тождественного включения $\varnothing \subset \mathfrak{A}$. Пусть $S\varnothing$ будет S_1T и определим проекцию $S\mathfrak{A} \to S\varnothing$ при помощи ограничения: образ $q \in S\mathfrak{A}$ в $S\varnothing$ является результатом удаления из q всех формул, сигнатура которых отлична от сигнатуры теории T. *Минимальным порождающим* для T называется такой элемент $p \in S_1T$ $(=S\varnothing)$, ранг и степень которого равны 1. Теория ACF_0 имеет единственный минимальный порождающий.

Пусть $\{c_i \mid i < \omega\}$ — последовательность предметных констант, не входящих в сигнатуру теории T. Теория T^* называется *конечно порожденным расширением* T, если T^* есть

$$T \cup \{F(c_1, \ldots, c_n) \mid F(x_1, \ldots, x_n) \in q\}$$

для некоторого $q \in S_nT$. Обозначение $T^* = T \cup q$.

Лемма 38.1 (Марш). *Если теория T тотально трансцендентна, то некоторое ее конечно порожденное расширение имеет минимальный порождающий.*

Доказательство. По 31.2 T имеет бесконечную универсальную область $\mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}$ бесконечна, то пространство $S\mathfrak{M}$ имеет по крайней мере одну предельную точку. Из тотальной трансцендентности T получаем, что $S\mathfrak{M}$ имеет точку ненулевого ранга. Тогда из 31.3 и 31.8 получаем, что существует такая точка $p \in S\mathfrak{M}$, для которой $\operatorname{rank} p = 1$ и $\deg p = 1$. Пусть $\mathfrak{C} = \varnothing(c_1, \ldots, c_n)$ обозначает такую конечно порожденную подсистему в $\mathfrak{M}$, для которой ранг и степень проекции p в $S\mathfrak{C}$ равны 1. Пусть $q \in S_nT$ есть n-тип, реализуемый n-кой $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$. Тогда проекция p в $S\mathfrak{C}\,(=S_1(T \cup q))$ будет минимальным порождающим для $T \cup q$. □

Пусть $\mathfrak{A} \models T$, $a \in A$ и $X \subset A$. Элемент a называется *алгебраическим над* X, если a реализует 1-тип из SX ранга 0. Заметим, что a является алгебраическим над X тогда и только тогда, когда существует такая формула $F(x)$ сигнатуры теории $T \cup DX$, что $\mathfrak{A} \models F(a)$ и лишь

конечное число элементов из $\mathfrak{A}$ выполняет $F(x)$. Множество X называется *алгебраически независимым*, если никакой элемент $x \in X$ не является алгебраическим над $X - \{x\}$.

Предложение 38.2. *Пусть $\mathfrak{A} \models T$, p — минимальный порождающий для T и $X \subset A$ — алгебраически независимое множество элементов, реализующих p. Тогда*

(i) *элементы из X неразличимы в $\mathfrak{A}$;*

(ii) *если a реализует p в $\mathfrak{A}$ и a не является алгебраическим над X, то множество $\{a\} \cup X$ алгебраически независимо.*

Доказательство. Пусть $\{x_\delta \mid \delta < \alpha\}$ — пересчет множества X. Из правил ранга и степени следует, что $\{x_\delta \mid \delta < \alpha\}$ — последовательность Морли степени 1. Тогда (i) следует из 35.6. Пусть $x_\alpha = a$. В этом случае $\{x_\delta \mid \delta \leqslant \alpha\}$ является последовательностью Морли, следовательно, элементы из $X \cup \{a\}$ неразличимы в $\mathfrak{A}$. Тогда ни один элемент $b \in X \cup \{a\}$ не является алгебраическим над остальными, так как в противном случае a был бы алгебраическим над X. □

Предположим, что T имеет минимальный порождающий p и $\mathfrak{A} \models T$. Множество X называется *p-базисом* для $\mathfrak{A}$, если X — максимальное алгебраически независимое множество элементов, реализующих p в $\mathfrak{A}$.

Лемма 38.3 (Марш). *Пусть T имеет минимальный порождающий p и $\mathfrak{A} \models T$. Если X и Y являются p-базисами для $\mathfrak{A}$, то* $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$. Лемму докажем для всех T, всех p и всех $\mathfrak{A}$ индукцией по $\operatorname{card} X$. Предположим сначала, что $\operatorname{card} X \geqslant \omega$. По 38.2 (ii) получаем, что каждый элемент из Y алгебраичен над X. Тогда из счетности T получаем

$$\operatorname{card} Y \leqslant \max(\omega, \operatorname{card} X) = \operatorname{card} X.$$

Предположим теперь, что $\operatorname{card} X < \omega$. Возьмем $y \in Y$. По 38.2 (ii) y алгебраичен над X. Так как y не является алгебраическим над $Y - \{y\}$, то существует $x \in X$, не являющийся алгебраическим над $Y - \{y\}$. Пусть $q \in$

$\in S\{x\}$ — единственный прообраз p, ранг и степень которого равны 1. Тогда q — минимальный порождающий для $T \cup p$ и $\langle \mathfrak{A}, x \rangle \models T \cup p$. Множество $X - \{x\}$ является q-базисом для $\langle \mathfrak{A}, x \rangle$ и $Y - \{y\}$ можно расширить до некоторого q-базиса Y^* для $\langle \mathfrak{A}, x \rangle$. По индуктивному предположению $\operatorname{card}(X - \{x\}) = \operatorname{card} Y^* \geqslant \operatorname{card}(Y - \{y\})$ и, следовательно, $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$. □

Пусть T имеет минимальный порождающий p и $\mathfrak{A} \models T$. Назовем $\operatorname{card} X$ *p-размерностью* системы $\mathfrak{A}$, где X — любой p-базис для $\mathfrak{A}$. Обозначение: $p\text{-}\dim \mathfrak{A} = \operatorname{card} X$.

Теорема 38.4 (Марш). *Пусть T ω_1-категорична и имеет минимальный порождающий p. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — модели для T. Тогда*

(i) *если X есть p-базис для $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ минимальна и атомна над X;*

(ii) *модель $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда изоморфна $\mathfrak{B}$, когда $p\text{-}\dim \mathfrak{A} = p\text{-}\dim \mathfrak{B}$.*

Доказательство. (i) Пусть $F(x) \in p$ — такая формула, что для любого $q \in S_1 T$ $F(x) \in q$ влечет $q = p$ или $\operatorname{rank} q = 0$. Так как $\operatorname{rank} p = 1$, то такая формула существует. Допустим, что $X \subset C$ и $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{A}$. Пусть $F^{\mathfrak{C}} = \{c \mid c \in C \,\&\, \mathfrak{C} \models F(c)\}$. Множество $F^{\mathfrak{C}}$ бесконечно, так как $\mathfrak{C} \models T$ и p имеет ненулевой ранг. Ясно, что $F^{\mathfrak{C}} \subset F^{\mathfrak{A}}$. Пусть $a \in F^{\mathfrak{A}}$. Если a реализует некоторый тип $q \in S\varnothing$ ранга 0, то $a \in F^{\mathfrak{C}}$, потому что все модели для T алгебраически замкнуты и $\mathfrak{C} \models T$. Если a реализует p, то a алгебраичен над X. Таким образом, $F^{\mathfrak{C}} = F^{\mathfrak{A}}$ и по 22.5 $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$. В силу 32.4 и 32.6 $\mathfrak{A}$ является атомной над X.

(ii) Если $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$, то по 38.3 $p\text{-}\dim \mathfrak{A} = p\text{-}\dim \mathfrak{B}$. Предположим, что $p\text{-}\dim \mathfrak{A} = p\text{-}\dim \mathfrak{B}$. Пусть X есть p-базис для $\mathfrak{A}$, а Y есть p-базис для $\mathfrak{B}$. Пусть $f\colon Y \to X$ — взаимно однозначное отображение на. Тогда

$$\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X} \equiv \langle \mathfrak{B}, fx \rangle_{x \in X}.$$

В силу 38.4 (i) и 32.3 система $\mathfrak{A}$ является простой над X, следовательно, f можно продолжать до $g\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Таким образом, $Y \subset g[A]$ и $g[\mathfrak{A}] \prec \mathfrak{B}$. Тогда по 38.4 (i) $g[\mathfrak{A}] = \mathfrak{B}$. □

Следствие 38.5 (Марш). *Если T ω_1-категорична, $\mathfrak{A}$ — насыщенная модель для T и $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B}$ насыщена.*

Доказательство. По 38.1 существует конечно порожденное расширение $T \cup q$ теории T, имеющее минимальный порождающий p. Пусть $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ реализует q в $\mathfrak{A}$. Тогда $\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n \rangle$ и $\langle \mathfrak{B}, a_1, \ldots, a_n \rangle$ — модели теории $T \cup q$. Так как $\mathfrak{A}$ насыщена, то система $\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n \rangle$ имеет бесконечную p-размерность. Тогда $\langle \mathfrak{B}, a_1, \ldots, a_n \rangle$ также имеет бесконечную p-размерность. Если card $\mathfrak{B} = \omega$, то по 38.4 (ii) $\mathfrak{B}$ насыщена. Если card $\mathfrak{B} > \omega$, то по 37.4 $\mathfrak{B}$ насыщена. □

Система $\mathfrak{A}$ является собственным элементарным расширением $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A} \succ \mathfrak{B}$ и $A \neq B$. Систему $\mathfrak{A}$ назовем *простым* собственным элементарным расширением $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A}$ — собственное элементарное расширение $\mathfrak{B}$ и следующую диаграмму можно дополнить указанным способом для любого $\mathfrak{C}$, являющегося собственным элементарным расширением $\mathfrak{B}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{B} \arrow[r, phantom, "\prec"] \arrow[ur, phantom, "\prec"] & \mathfrak{A} \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

Лемма 38.6 (Морли). *Если $T\mathfrak{B}$ ω_1-категорична, то $\mathfrak{B}$ имеет простое собственное элементарное расширение.*

Доказательство. Выберем $q \in S\mathfrak{B}$ с наименьшим ненулевым рангом. Тогда существует такая формула $F(x) \in q$, что если $p \neq q$ и $F(x) \in p$, то rank $p = 0$. Пусть a реализует q и $\mathfrak{A}$ — простое модельное расширение $\mathfrak{B}(a)$. Пусть $\mathfrak{C}$ — собственное элементарное расширение $\mathfrak{B}$. Достаточно показать, что q реализуется в $\mathfrak{C}$. Пусть $F^{\mathfrak{B}} = \{b \mid b \in B \ \& \ \mathfrak{B} \models F(b)\}$. Ясно, что $F^{\mathfrak{B}} \subset F^{\mathfrak{C}}$. Множество $F^{\mathfrak{B}}$ бесконечно, так как $\mathfrak{B} \models T$ и q имеет ненулевой ранг. Из 22.5 следует, что $F^{\mathfrak{B}} \neq F^{\mathfrak{C}}$. Пусть

$c \in F^{\mathfrak{C}} - F^{\mathfrak{B}}$. Тогда c реализует q, так как в противном случае c реализовал бы некоторый тип $p \in S\mathfrak{B}$ нулевого ранга и, следовательно, принадлежал бы $\mathfrak{B}$. □

Морли показал, что система $\mathfrak{A}$, построенная в доказательстве 38.6, минимальна над $\mathfrak{B}$, т. е. не существует такой системы $\mathfrak{D}$, что $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{D} \prec \mathfrak{A}$, $B \neq D$ и $D \neq A$. Доказательство этого факта будет приведено в § 39.

Следствие 38.7 (Морли). *Теория T тогда и только тогда ω_1-категорична, когда любая ее счетная модель имеет простое собственное элементарное расширение.*

Доказательство. Допустим, что счетные модели теории T обладают свойством, сформулированным в следствии. Построим некоторую модель T мощности ω_1 как предел элементарной цепи. Предположим, что T имеет простую модель $\mathfrak{A}_0$. Тогда $\mathfrak{A}_{\delta+1}$ будет простым собственным расширением системы $\mathfrak{A}_\delta$ и $\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \lambda\}$. Пусть

$$\mathfrak{A} = \bigcup\{\mathfrak{A}_\delta \mid \delta < \omega_1\}.$$

Допустим, что $\mathfrak{B} \models T$ и $\operatorname{card} \mathfrak{B} = \omega_1$. Для того чтобы показать, что $\mathfrak{B} \approx \mathfrak{A}$, разложим $\mathfrak{B}$ в элементарную цепь $\{\mathfrak{B}_\delta \mid \delta < \omega_1\}$ счетных моделей. Определим функцию $g\colon \omega_1 \to \omega_1$ и цепь

$$\{f_\delta\colon \mathfrak{A}_{g\delta} \to \mathfrak{B}_\delta \mid 0 < \delta < \omega_1\}$$

изоморфизмов индукцией по δ:

1. $g0 = 0$ и $f_0\colon \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{B}_0$.
2. $g\lambda = \bigcup\{g\delta \mid \delta < \lambda\}$ и $f_\lambda = \bigcup\{f_\delta \mid \delta < \lambda\}$.
3. $f_{\delta+1}$ равна объединению цепи $\{f_\delta^\gamma \mid \gamma \leqslant \rho\}$, которая определяется индукцией по γ.
4. $f_{\delta+1}^0 = f_\delta$, $f_{\delta+1}^\lambda = \bigcup\{f_{\delta+1}^\gamma \mid \gamma < \lambda\}$.
5. Предположим, что $f^\gamma{}_1\colon \mathfrak{A}_{g\delta+\gamma} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B}_{\delta+1}$. Если $f_{\delta+1}^\gamma$ — отображение на, то $\rho = \gamma$. В противном случае в силу простоты $\mathfrak{A}_{g\delta+\gamma+1}$ можно продолжить $f_{\delta+1}^\gamma$ до $f_{\delta+1}^{\gamma+1}$: $\mathfrak{A}_{g\delta+\gamma+1} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{B}_{\delta+1}$.
6. $g(\delta+1) = g\delta + \rho$.

Ясно, что $f = \bigcup\{f_\delta \mid \delta < \omega_1\}$ отображает изоморфно $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Остается показать, что T имеет простую модель.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная счетная модель для T. Предыдущая конструкция показывает, что $T \cup D\mathfrak{A}$ ω_1-категорична. По 34.4 она ω-стабильна. Тогда T также ω-стабильна и по 31.6 и 32.4 имеет простую модель. □

Из 38.7 следует, что ω_1-категоричность теории является Π^1_2-свойством (и следовательно, абсолютным свойством). Из результатов § 37 следует, что ω_1-категоричность является Π^1_1-свойством.

Теорема 38.8 (Марш, Морли). *Пусть T ω_1-категорична, но не ω-категорична и имеет минимальный порождающий p. Тогда существует такая элементарная цепь $\{\mathfrak{A}_i \mid i \leqslant \omega\}$ счетных моделей теории T, что*

(i) $\mathfrak{A}_i \not\approx \mathfrak{A}_j$, *если* $i < j \leqslant \omega$;

(ii) *для любой счетной модели $\mathfrak{B}$ теории T существует такое j, что $\mathfrak{B} \approx \mathfrak{A}_j$;*

(iii) *существует такое k, что p-dim $\mathfrak{A}_i = k + i$ для всех $i \leqslant \omega$;*

(iv) *все $\mathfrak{A}_i$, $i \leqslant \omega$, однородны;*

(v) *$\mathfrak{A}_\omega$ насыщена и $\mathfrak{A}_\omega = \bigcup\{\mathfrak{A}_i \mid i < \omega\}$;*

(vi) *$\mathfrak{A}_{i+1}$ — минимальное простое собственное расширение $\mathfrak{A}_i$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_0$ — простая модель теории T. Так как T не ω-категорична, то по 18.2 $\mathfrak{A}_0$ не насыщена. Следовательно, по 38.4 (ii) p-dim $\mathfrak{A}_0 < \omega$. Пусть $k = p$-dim $\mathfrak{A}_0$. Зафиксируем $i < \omega$, и пусть $\mathfrak{A}_i$ определена так, что p-dim $\mathfrak{A}_i = k + i$. Пусть $q \in S\mathfrak{A}_i$ — единственный прообраз p ранга 1 и степени 1. Пусть b реализует q и $\mathfrak{A}_{i+1}$ проста над $\mathfrak{A}_i(b)$. Ясно, что p-dim $\mathfrak{A}_{i+1}$ не меньше $k + i + 1$. Предположим, что p-dim $\mathfrak{A}_{i+1}$ строго больше $k + i + 1$. Тогда существует $X \subset A_i$ и $c \in A_{i+1} - A_i(b)$, для которых $X \cup \{b, c\}$ — алгебраически независимое множество элементов, реализующих p. Кроме того, 1-тип $r \in S\mathfrak{A}_i(b)$, который реализуется элементом c, является изолированным в силу 32.6. Пусть $V \subset S\mathfrak{A}_i$ — открыто-замкнутое множество, элементами которого являются 1-типы ранга 0 и q. Множество V бесконечно, так как в противном случае q был бы изолированным типом, который реализуется в $\mathfrak{A}_i$ и имеет ранг 0. Пусть V_r — прообраз V в $S\mathfrak{A}_i(b)$. Рассмотрим

$V_r - \{r\}$. Это множество замкнуто, так как r — изолированный тип, бесконечно, так как V бесконечно, и содержит лишь точки ранга 0. Таким образом, $V_r - \{r\}$ — замкнутое бесконечное множество без предельных точек, следовательно, $\dim \mathfrak{A}_{i+1} = k + i + 1$.

Пусть $\mathfrak{A}_\omega = \bigcup\{\mathfrak{A}_i \mid i < \omega\}$. Тогда $p\text{-}\dim \mathfrak{A}_\omega = \omega$, следовательно, $\mathfrak{A}_\omega$ насыщена в силу 38.4 (ii).

Для того чтобы показать, что $\mathfrak{A}$ однородна, предположим, что она является моделью для T конечной p-размерности. Пусть $f\colon X \to Y$ — взаимно однозначное отображение, для которого

$$\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X} \equiv \langle \mathfrak{A}, fx \rangle_{x \in X}.$$

Обозначим $T \cup DX$ через T_1. Пусть $q \in SX$ — единственный прообраз p ранга 1 и степени 1. Тогда q — минимальный порождающий для T_1. Пусть Y есть q-базис для $\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X}$, а Z есть q-базис для $\langle \mathfrak{A}, fx \rangle_{x \in X}$. Пусть $\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} Z$. Пусть $g\colon Y \to Z$ — взаимно однозначное отображение. Система $\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X}$ в силу 38.4 (i) и 32.3 проста над Y, следовательно, g можно продолжить до $h\colon \langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X} \xrightarrow{\equiv} \langle \mathfrak{A}, fx \rangle_{x \in X}$. Таким образом, f можно продолжить до $h\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{A}$. Пусть $W \subset h[A]$ есть p-базис для $h[\mathfrak{A}]$. Тогда W является также p-базисом для $\mathfrak{A}$ в силу 38.3, потому что $h[\mathfrak{A}]$ и $\mathfrak{A}$ имеют одинаковую размерность и любой p-базис для $h[\mathfrak{A}]$ можно расширить до p-базиса $\mathfrak{A}$. Тогда по 38.4 (i) $h[A] = A$. (Заметим, что в предыдущем доказательстве строгое неравенство $\operatorname{card} X < \operatorname{card} A$ не используется.)

Предположим, что $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$ и $\omega > p\text{-}\dim \mathfrak{B} = 1 + p\text{-}\dim \mathfrak{A}$. Тогда $p\text{-}\dim \mathfrak{C} = p\text{-}\dim \mathfrak{B}$ или $p\text{-}\dim \mathfrak{C} = p\text{-}\dim \mathfrak{A}$. Следовательно, из 38.4 (i) получаем $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$. □

В следующем параграфе все утверждения 38.8, за исключением (iii), будут доказаны без предположения, что теория T имеет минимальный порождающий.

Упражнение 38.9. Пусть T_1 есть ω_1-категоричная теория с минимальным порождающим, $\mathfrak{A}$ — ненасыщенная модель T и $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{A}$. Показать, что f является отображением на. (Ср. с упражнением 39.14.)

Упражнение 38.10. Пусть $T\mathfrak{A}$ ω_1-категорична. Показать, что $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда насыщена, когда $\mathfrak{A}$ содержит бесконечное неразличимое множество.

§ 39. ТЕОРЕМА БАЛДУИНА—ЛАХЛАНА

Пусть T^* — конечно порожденное расширение T, определенное в § 38 [1]). Теория T^* называется *главным расширением* теории T, если $T^* = T \cup q$, где q — главный n-тип. Следующая лемма необходима для развития теории размерности ω_1-категоричных теорий, не имеющих минимальных порождающих.

Лемма 39.1 (Балдуин, Лахлан). *Если T ω_1-категорична, то некоторое главное конечно порожденное расширение T имеет минимальный порождающий.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — простая модель для T и $p \in S\mathfrak{A}$ имеет наименьший ненулевой ранг и наименьшую степень при этом ранге. Если $\operatorname{rank} p = 1$ и $\deg p = 1$, то проекция p в $S\mathfrak{D}$ имеет ранг 1 и степень 1 для некоторой конечно порожденной системы $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{D} = \varnothing(e_1, \ldots, e_n)$ и $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ реализует главный n-тип $q \in S_nT$ и $T \cup q$ имеет минимальный порождающий.

Предположим, что $\operatorname{rank} p > 1$ или $\deg p > 1$, и покажем, что в этом случае T не может быть ω_1-категоричной. Тогда существует такая система $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$, что p имеет два различных прообраза p_1 и p_2 ненулевого ранга в $S\mathfrak{B}$. Пусть $F(x)$ — такая формула сигнатуры теории $T \cup D\mathfrak{A}$, что $F(x) \in p$ и для любого $q \in S\mathfrak{A}$ из $F(x) \in q$ следует $q = p$ или $\operatorname{rank} q = 0$. Формула $F(x)$ существует, так как никакой тип $q \in S\mathfrak{A}$ не имеет меньшего положительного ранга, чем p. Пусть $G(x)$ — такая формула сигнатуры теории $T \cup D\mathfrak{B}$, что $G(x) \in p_1$, и $\neg G(x) \in p_2$. В силу 32.11 $G(x) \,\&\, F(x)$ реализуется бесконечным числом элементов в $\mathfrak{B}$, так как в противном случае ранг p_1 был бы равен нулю. По той же причине $\neg G(x) \,\&\, F(x)$ реализуется в $\mathfrak{B}$ бесконечным числом элементов. Для упрощения

[1]) Здесь, как и в § 38, предполагается, что T — подмодельно полная теория. В силу 37.3 это не ограничивает общности.— *Прим. перев.*

обозначений предположим, что b — единственный элемент из $B - A$, содержащийся в формуле $G(x)$, т. е. $G(x)$ равна $G(x, b)$. Из 32.11 следует, что для каждого $a \in A$ одна из формул

$$G(x, a) \& F(x), \quad \neg G(x, a) \& F(x)$$

должна иметь лишь конечное число реализаций в $\mathfrak{A}$, так как существует лишь один тип $q \in S\mathfrak{A}$ ненулевого ранга, а именно p, для которого $F(x) \in q$.

Если существует такое число n, что для каждого $a \in A$ одна из формул

$$G(x, a) \& F(x), \quad \neg G(x, a) \& F(x)$$

реализуется не более чем n элементами в $\mathfrak{A}$, то в силу того, что $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$, формула $G(x) \& F(x)$ или формула $\neg G(x) \& F(x)$ реализуется не более чем n элементами в $\mathfrak{B}$. Противоречие. Значит, существует такая формула $H(x, y)$ (равная $G(x, y) \& F(x)$ или $\neg G(x, y) \& F(x)$), что для любого числа n существует такой элемент $a \in A$, для которого число реализаций $H(x, a)$ в $\mathfrak{A}$ не меньше n, но конечно. Заметим, что существование $H(x, y)$ следует из возможности в $S\mathfrak{A}$ «аппроксимировать» расщепление p в $S\mathfrak{B}$. Эта возможность следует из того, что $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Так же как в доказательстве 22.1, можно записать аксиомы Q, которые описывают такие пары систем $\langle \mathfrak{D}, \mathfrak{C} \rangle$, что

(i) $\mathfrak{C} \models T$, $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{D}$;

(ii) $K^{\mathfrak{C}} = K^{\mathfrak{D}}$, где формула $K(x)$ равна $H(x, c)$ и c — предметная константа, не входящая в (i);

(iii) $c \in \mathfrak{C}$;

(iv) для каждого n формула $H(x, c)$ имеет не менее n реализаций в $\mathfrak{C}$.

Каждое конечное подмножество аксиом Q выполняется на паре $\langle \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \rangle$: возьмем $c \in A$, такое, что $H(x, c)$ имеет достаточно большое конечное число реализаций в $\mathfrak{A}$; тогда $K^{\mathfrak{B}} = K^{\mathfrak{A}}$, так как $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ и $K^{\mathfrak{A}}$ конечно. В силу 22.5 теория T не является ω_1-категоричной. Противоречие. □

Будем говорить, что теория T *имеет неглавный минимальный порождающий*, если T имеет минимальный порождающий p, не являющийся изолированной точкой в S_1T.

Лемма 39.2. *Если теория T ω_1-категорична, но не ω-категорична, то некоторое ее главное конечно порожденное расширение имеет неглавный минимальный порождающий.*

Доказательство. По 39.1 существуют $n \in \omega$, главный тип $q \in S_n T$ и некоторый тип $p \in S_1(T \cup q)$, для которых $\operatorname{rank} p = 1$ и $\deg p = 1$. Теория $T \cup q$ не ω-категорична, так как q реализуется в любой модели теории T [1]). Пусть $\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n \rangle$ — простая модель для $T \cup q$. По 38.8 $\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n \rangle$ имеет конечную p-размерность. Пусть $\{x_1, \ldots, x_k\}$ есть p-базис для $\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n \rangle$ и $r \in S_{n+k} T$ — изолированная точка, которая реализуется набором $\langle a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_k \rangle$ в $\mathfrak{A}$ [2]). Пусть p^* — единственный прообраз p в $S\varnothing(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_k)$ ранга 1 и степени 1. Тогда p^* — минимальный порождающий для $T \cup r$. Тип p^* не изолирован в $S_1(T \cup r)$, так как в противном случае он реализовывался бы в $\mathfrak{A}$ и множество $\{x_1, \ldots, x_k\}$ не было бы p-базисом для $\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n \rangle$. □

Пусть T есть ω_1-категоричная, но не ω-категоричная теория. Лемма 39.2 позволяет определить следующее понятие размерности для моделей теории T. Возьмем число n, главный тип $q \in S_n T$ и некоторый тип $p \in S_1(T \cup q)$, такие, что p является неглавным минимальным порождающим для $T \cup q$. Пусть $\mathfrak{A}$ — модель для T. Так как q главный, то существуют $a_1, \ldots, a_n \in A$, для которых $\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n \rangle$ является моделью теории $T \cup q$. Определим

$$p \pmod{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle}\text{-}\textit{размерность} \text{ модели } \mathfrak{A}$$

как p-размерность модели $\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n \rangle$. Если $p \pmod{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle}$-размерность не изменяется, когда $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ пробегает все реализации типа q в $\mathfrak{A}$, то назовем ее $p \pmod q$-*размерностью* модели $\mathfrak{A}$ и будем говорить, что $p \pmod q$-размерность *правильно определена*. Если $\mathfrak{A}$ насыщена, то $p \pmod q$-размерность $\mathfrak{A}$ правиль-

---

[1]) В силу 18.2 и полноты теории T теория $T \cup q$ не ω-категорична для любого $q \in S_n T$.— *Прим. перев.*

[2]) Случай, когда p-базис $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)$ пуст, не вносит существенных изменений в рассуждения автора.— *Прим. перев.*

но определена и равна card $\mathfrak{A}$. С помощью теоремы Вота о двух кардиналах будет показано, что p (mod q)-размерность правильно определена для любой модели $\mathfrak{A}$ теории T. Тогда можно будет провести доказательство 38.8 без предположения, что T имеет минимальный порождающий.

Предложение 39.3. *Пусть T имеет неглавный минимальный порождающий p и $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}(T)$. Пусть $q \in S\mathfrak{C}$ — единственный прообраз p ранга 1 и степени 1. Тогда q — неглавный минимальный порождающий для $T \cup D\mathfrak{C}$.*

Доказательство. Пусть $U \subset S_1T$ — открыто-замкнутая окрестность точки p, которая содержит лишь p и точки ранга 0. Так как p — неглавный тип, то U бесконечна. Пусть $V \subset S\mathfrak{C}$ — прообраз U. По правилу ранга и степени q является единственным элементом в V ненулевого ранга. Если q был бы изолированным, то $V - \{q\}$ было бы бесконечным замкнутым множеством без предельных точек. □

Следующие три предложения используются при доказательстве теоремы 39.8.

Предложение 39.4. *Пусть T — теория с неглавным минимальным порождающим p. Если b реализует p или является алгебраическим (т. е. реализует тип $p \in S_1T$ ранга 0) и c реализует главный 1-тип теории T, то c реализует атом над b.*

Доказательство. Сначала предположим, что b алгебраический. Тогда b реализует атом над c, по 32.5 $\langle b, c\rangle$ реализует главный 2-тип теории T и, следовательно, c реализует атом над b.

Пусть теперь b реализует p. Тогда b не может реализовывать атом над c, так как в противном случае пара $\langle b, c\rangle$ реализовывала бы главный 2-тип теории T и p был бы главным. По правилам ранга и степени b реализует 1-тип q над c ранга 1 и степени 1. Пусть $H(c, x)$ — такая формула, что из $H(c, x) \in q$ и $H(c, x) \in r$ следует $r = q$ или rank $r = 0$. Пусть $F(x)$ порождает главный 1-тип теории T, реализуемый элементом c. Тип из S_2T, который реализует пара $\langle c, b\rangle$, полностью описывается следующими

условиями: $F(c)$, $H(c, b)$ и b — не алгебраический элемент над c. Отсюда следует, что 1-тип s, реализуемый элементом c над b, определяется условиями: $F(x)$, $H(x, b)$ и b — не алгебраический элемент над x. Чтобы показать, что s порождается формулой $F(x) \& H(x, b)$, достаточно заметить, что не существует c^*, для которого истинно $F(c^*)$ и b — алгебраический элемент над c^*. Если бы такой элемент c^* существовал, то пара $\langle b, c^* \rangle$ реализовала бы главный 2-тип T и p был бы главным. □

Предложение 39.5. *Пусть T — теория с неглавным минимальным порождающим p. Если каждый элемент из $\{b_1, \ldots, b_m\}$ реализует p или является алгебраическим, а $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ реализует главный n-тип теории T, то $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ реализует атом над $\{b_1, \ldots, b_m\}$.*

Доказательство. Индукция по n. В случае $n = 1$ проводим индукцию по m. Пусть c реализует главный 1-тип теории T. По предположению индукции c реализует атом над $\{b_1, \ldots, b_{m-1}\}$. Пусть $p_m \in S\varnothing(b_1, \ldots, b_{m-1})$ — единственный прообраз p ранга 1 и степени 1. По 39.3 p_m является минимальным порождающим для $T \cup D\varnothing(b_1, \ldots, b_{m-1})$. Элемент b_m является алгебраическим над $\{b_1, \ldots, b_{m-1}\}$ или реализует p_m. Следовательно, в силу 39.4 c реализует атом над $b_1, \ldots, b_m$.

Пусть $n > 1$. Рассмотрим единственный прообраз $p_n \in S\varnothing(c_n)$ типа p, имеющий ранг 1 и степень 1. По 39.3 p_n является минимальным порождающим для $T \cup D\varnothing(c_n)$. Каждый элемент из $\{b_1, \ldots, b_m\}$ или является алгебраическим над c_n, или реализует p_n. В силу 32.7 $\langle c_1, \ldots, c_{n-1} \rangle$ реализует главный $(n-1)$-тип теории $T \cup D\varnothing(c_n)$. По предположению индукции $\langle c_1, \ldots, c_{n-1} \rangle$ реализует атом над $\{c_n, b_1, \ldots, b_m\}$ и c_n реализует атом над $\{b_1, \ldots, b_m\}$. Следовательно, в силу 32.5 $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ реализует атом над $\{b_1, \ldots, b_m\}$. □

Предложение 39.6. *Пусть T — теория с неглавным минимальным порождающим p. Пусть каждый элемент из B реализует p или является алгебраическим. Если $B \subset C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ и каждый элемент $c_i \in C - B$ реализует атом над $\{c_j \mid j < i\}$, то $C - B$ реализует атом над B.*

Доказательство проводится индукцией по card $(C - B)$. Пусть c_k — элемент из $C - B$, такой, что $c_j \in B$ для всех $j > k$. По условию c_k реализует атом над $\{c_0, \ldots, c_{k-1}\}$. Пусть $p_k \in S\varnothing(c_0, \ldots, c_{k-1})$ — единственный прообраз p ранга 1 и степени 1. По 39.3 p_k является неглавным минимальным порождающим для $T \cup D\varnothing(c_0, \ldots, c_{k-1})$. Каждый элемент из $\{c_j \mid k < j \leqslant \leqslant m\}$ реализует p_k или является алгебраическим над $\{c_0, \ldots, c_{k-1}\}$. Из 39.5 следует, что c_k реализует атом над $C - \{c_k\}$. По предположению индукции $(C - B) - \{c_k\}$ реализует атом над B. Тогда из 32.5 следует, что $C - B$ реализует атом над B. □

Пусть $F(x)$ — формула сигнатуры теории T. Пара алгебраических систем $\langle \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \rangle$ называется *парой Вота для* $(T, F(x))$, если $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models T$, $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$, $F^{\mathfrak{A}}$ бесконечно и $F^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{B}}$. В силу 22.5 $(T, F(x))$ не может иметь пары Вота, если T ω_1-категорична. Легко придумать такое множество предложений K, что множество $T \cup K$ совместно тогда и только тогда, когда $(T, F(x))$ имеет пару Вота. Однако требуются более тонкие рассуждения, чтобы найти такое множество предложений K, которое объясняло бы (наподобие теоремы Эрбрана) с точки зрения теории доказательств, как получается, что $(T, F(x))$ имеет пару Вота. Множество K используется для доказательства интересного явления компактности, выраженного в 39.8.

Пусть $c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ — последовательность различных предметных констант, ни одна из которых не принадлежит сигнатуре теории T. Построение K основано на доказательстве Генкина теоремы 7.1. Пусть $\{G_i(x)\}$ — перечисление всех формул (сигнатуры теории T и константных символов $c, c_0, c_1, \ldots$), не содержащих свободных переменных, отличных от x. Пусть $h\colon \omega \to \omega$ — строго возрастающая функция, для которой $k < hi$, если $j \leqslant i$ и c_k входит в $G_j(x)$. Константами Генкина будут $\{c_{hi} \mid i < \omega\}$. Аксиомой Генкина, соответствующей константе c_{hi}, является

$$(\mathrm{E}x)\, G_i(x) \to G_i(c_{hi}).$$

Пусть A, B и C — непересекающиеся множества констант Генкина, которые удовлетворяют сформулированным ниже условиям (a), (b) и (c). Множество $A \cup B \cup C$ будет носителем некоторой модели $\mathfrak{B}_1$ теории T, $A \cup B$ — носителем некоторой системы $\mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1$, а A будет множеством $F^{\mathfrak{B}_0}$.

(a) $c_{hi} \in A$, если $G_i(x)$ имеет вид

$$F(x) \,\&\, [(\mathrm{E}x)(F(x) \,\&\, H(x)) \to H(x)],$$

где предметные константы формулы $H(x)$ принадлежат $T \cup \{c\} \cup A \cup B \cup C$.

(b) $c_{hi} \in B$, если $G_i(x)$ имеет вид

$$\neg F(x) \,\&\, [(\mathrm{E}x)(\neg F(x) \,\&\, H(x)) \to H(x)],$$

где предметные константы, входящие в $H(x)$, принадлежат $T \cup A \cup B$.

(c) $c_{hi} \in C$, если $G_i(x)$ имеет тот же вид, что и в (b), предметные константы, входящие в $H(x)$, принадлежат $T \cup \{c\} \cup A \cup B \cup C$ и некоторая предметная константа из $\{c\} \cup C$ входит в $H(x)$.

Пусть Δ — множество аксиом Генкина, соответствующих элементам множества $A \cup B \cup C$. Тогда в качестве K возьмем множество

$$\Delta \cup \{\neg F(c)\} \cup \{c \neq c_{hi} \mid c_{hi} \in B\}.$$

Лемма 39.7. *Пусть T — теория, для которой $F^{\mathfrak{A}}$ бесконечно, если $\mathfrak{A} \models T$. Тогда $(T, F(x))$ имеет пару Вота тогда и только тогда, когда множество $T \cup K$ совместно.*

Доказательство. Предположим, что $\langle \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_0 \rangle$ — пара Вота для $(T, F(x))$. Индукцией по n припишем константам из $\{c\} \cup A \cup B \cup C$ значения из $\mathfrak{B}_1$. Пусть значением c является любой элемент $c \in B_1 - B_0$. Зафиксируем $c_{hi} \in A \cup B \cup C$ и предположим, что константам c_{hj}, $j < i$, из $A \cup B \cup C$ значения уже приписаны. В частности, уже приписаны значения константам из $G_i(x)$. Возьмем в качестве c_{hi} элемент, удовлетворяющий в $\mathfrak{B}_1$ аксиоме Генкина, соответствующей c_{hi}, кроме того, c_{hi} должен принадлежать B_0, если $c_{hi} \in A \cup B$. Это можно

сделать, так как $F^{\mathfrak{B}_1} = F^{\mathfrak{B}_0}$ и $\mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1$. Тогда $\langle \mathfrak{B}_1, c, c_{hi} \rangle_{i<\omega}$ является моделью для $T \cup K$.

Предположим теперь, что $T \cup K$ совместно. Пусть $\langle \mathfrak{D}, c, c_{hi} \rangle_{i<\omega}$ — модель для $T \cup K$. Определим $B_0 = \{c_{hi} \mid c_{hi} \in A \cup B\}$ и $B_1 = \{c_{hi} \mid c_{hi} \in A \cup B \cup C\}$. Отношения и функции на $\mathfrak{B}_i$ $(i = 0, 1)$ определим как ограничения отношений и функций системы $\mathfrak{D}$ на B_i. Если все предметные константы, входящие в $G_i(x)$, имеют значения в $\mathfrak{B}_1$, а аксиома Генкина для $G_i(x)$ истинна в $\mathfrak{D}$, то она истинна в $\mathfrak{B}_1$. Тогда из доказательства 11.2, использующего сколемовскую оболочку, получим $\mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{D}$.

Аналогично получаем $\mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1$. Каждый элемент из $F^{\mathfrak{B}_1}$ является значением некоторой константы из A, следовательно, $F^{\mathfrak{B}_0} = F^{\mathfrak{B}_1}$. Так как c является значением некоторой константы из C, то $c \in B_1$. Элемент c не является значением никакой константы из $A \cup B$, потому что в $\mathfrak{D}$ истинны $\neg F(c)$ и $c \neq c_{hi}$ для всех $c_{hi} \in B$. Следовательно, $B_1 \neq B_0$. □

Пусть T удовлетворяет условию теоремы 39.8. Пусть $\mathfrak{D}$ — модель для T, X есть p-базис для $\mathfrak{D}$ и $c \in D$. Тогда по 38.4(i) c реализует атом над X. Значит, c реализует атом над некоторым конечным множеством $Y \subset X$. Определим *ранг* c в $\mathfrak{D}$ как наименьшее значение card Y, когда X пробегает все базисы для $\mathfrak{D}$. (Если T — теория алгебраически замкнутых полей характеристики 0, то ранг c в $\mathfrak{D}$ не превосходит 1, так как c является либо алгебраическим элементом, либо входит в некоторый базис трансцендентности для $\mathfrak{D}$.) Теорема 39.8 показывает, что ранг c в $\mathfrak{D}$, когда $\mathfrak{D}$ пробегает все модели теории T, а c пробегает все элементы из D, ограничен некоторым конечным n. Существование такого n является одним из наиболее поразительных явлений компактности в теории моделей.

Теорема 39.8 (Балдуин, Лахлан). *Пусть теория T ω_1-категорична и имеет неглавный минимальный порождающий p. Тогда существует число n со следующим свойством: для любой модели $\mathfrak{D}$ теории T и любого $c \in D$ существует такой p-базис X модели $\mathfrak{D}$, что c реализует атом над некоторым подмножеством из X мощности, не превосходящей n.*

Доказательство. Пусть $F(x) \in p$ — такая формула, что из $F(x) \in q \in S_1T$ следует $q = p$ или $\operatorname{rank} q = 0$. В силу 22.5 и 39.7 $T \cup K$ несовместно. Возьмем такое n, что множество K_n несовместно и содержит следующие формулы:

(i) T;

(ii) аксиомы Генкина, соответствующие c_{hi} для $i < n$;

(iii) $\neg F(c)$;

(iv) $c \neq c_{hi}$ для $i < n$ и $c_{hi} \in B$.

Для того чтобы построить множество X, припишем константам $\{c\} \cup \{c_{hi} \mid i < n\}$ значения в $\mathfrak{D}$.

(1) Значением c является c.

(2) Зафиксируем $i < n$ и предположим, что значения c_{hj} уже определены для всех $j < i$. Таким образом, каждой константе из $G_i(x)$ уже приписано значение. Возьмем в качестве c_{hi} элемент, удовлетворяющий в $\mathfrak{D}$ аксиоме Генкина, соответствующей c_{hi}. Пусть $I_i = \{c_{hj} \mid j < i \;\&\; c_{hj} \in A \cup B\}$. Если $c_{hi} \in B$, то пусть, кроме того, c_{hi} реализует атом над I_i. Такой элемент c_{hi} существует по 32.1 (i) и 32.2, потому что каждый c_{hj}, входящий в $G_i(x)$, входит также в I_i, если $c_{hi} \in B$.

Пусть $Y = \{c_{hi} \mid c_{hi} \in A \;\&\; i < n\}$ и $Z = \{c_{hi} \mid c_{hi} \in B \;\&\; i < n\}$. Ясно, что каждый элемент из Y удовлетворяет $F(x)$ и поэтому реализует p или является алгебраическим. Из 39.6 и условий, наложенных на c_{hi}, когда $c_{hi} \in B$, следует, что Z реализует атом над Y. Пусть X_0 — максимальное множество алгебраически независимых реализаций типа p в Y. Тогда по 38.2 (ii) и 32.5 Z реализует атом над X_0. Так как K_n несовместно, то $c \in Z$ или c удовлетворяет $F(x)$ в $\mathfrak{D}$. В любом случае c реализует атом над алгебраически независимым множеством реализаций типа p мощности, не превосходящей n. □

Следствие 39.9. *Пусть T есть ω_1-категоричная теория, имеющая неглавный минимальный порождающий p. Тогда существует число n со следующим свойством: для любой модели $\mathfrak{D}$ теории T и любого кортежа $\langle d_1, \ldots, d_s\rangle \in D^s$ существует такой p-базис X для $\mathfrak{D}$, что $\langle d_1, \ldots, d_s\rangle$ реализует атом над некоторым подмножеством из X мощности, не превосходящей $n \cdot s$.*

Доказательство проводится индукцией по s. Рассмотрим множество формул K_n, как в доказательстве 39.8. Предположим, что $s > 1$. Тогда по предположению индукции существует такое множество Y алгебраически независимых реализаций типа p, что $\langle d_1, \ldots, d_{s-1}\rangle$ реализует атом над Y и $\operatorname{card} Y \leqslant n(s-1)$. Пусть $T^* = T \cup q$, где $q \in S_{s-1}T$ — тип, реализуемый $\langle d_1, \ldots, d_{s-1}\rangle$ в $\mathfrak{D}$. Пусть $p^* \in S_1(T \cup q)$ — единственный прообраз p ранга 1 и степени 1. Тогда в силу 39.3 p^* — неглавный минимальный порождающий для T^*. Пусть $F(x)$ — формула, указанная в начале доказательства 39.8. Тогда $F(x) \in p^*$ и из $F(x) \in r \in S_1T^*$ следует $r = p^*$ или $\operatorname{rank} r = 0$. Ясно, что множество $T^* \cup K_n$ несовместно.

Далее нужно повторить доказательство 39.8 со следующими изменениями: в качестве значения c берется d_s; если $c_{hi} \in B$, то c_{hi} должен реализовывать атом над $I_i \cup \{d_1, \ldots, d_{s-1}\}$. Тогда d_s реализует атом над $X \cup \{d_1, \ldots, d_{s-1}\}$, где X — множество алгебраически независимых реализаций p^* и $\operatorname{card} X \leqslant n$. В силу 39.5 d_s реализует атом над $Y \cup X \cup \{d_1, \ldots, d_{s-1}\}$ и $\langle d_1, \ldots, d_{s-1}\rangle$ реализует атом над $Y \cup X$. Таким образом, $\langle d_1, \ldots, d_s\rangle$ реализует атом над $Y \cup X$. □

Следствие 39.10. *Пусть T есть ω_1-категоричная теория, q — главный m-тип T и p — неглавный минимальный порождающий теории $T \cup q$. Тогда каждая модель для T имеет правильно определенную $p \pmod q$-размерность.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — модель теории T и $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ — такие реализации q в $\mathfrak{A}$, что

$$p = \dim \langle \mathfrak{A}, \langle a\rangle\rangle < p\text{-}\dim \langle \mathfrak{A}, \langle b\rangle\rangle^{1)}.$$

Обе из предыдущих размерностей конечны, так как в противном случае система $\mathfrak{A}$ была бы насыщенной по 38.8 и, следовательно, имела бы правильно определенную $p \pmod q$-размерность, равную $\operatorname{card} \mathfrak{A}$.

Пусть меньшая из указанных двух размерностей равна i, а большая j. Так как p—неглавный тип, то простая модель теории $T \cup q$ имеет p-размерность 0. Система $\langle \mathfrak{A}, \langle b\rangle\rangle$ является моделью для $T \cup q$ p-размерности j.

---

[1]) Для простоты обозначений вместо кортежа $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ автор пишет $\langle a\rangle$.— *Прим. перев.*

Из 38.8 следует, что существует система $\mathfrak{A}_0$, такая, что $\langle \mathfrak{A}_0, \langle b \rangle \rangle \prec \langle \mathfrak{A}, \langle b \rangle \rangle$ и p-размерность $\langle \mathfrak{A}_0, \langle b \rangle \rangle$ равна i. Так как $\langle \mathfrak{A}_0, \langle b \rangle \rangle$ и $\langle \mathfrak{A}, \langle a \rangle \rangle$ — модели для $T \cup q$ одинаковой p-размерности, то $\langle \mathfrak{A}_0, \langle b \rangle \rangle \approx \langle \mathfrak{A}, \langle a \rangle \rangle$. Так как $p \pmod{\langle b \rangle}$-размерность $\mathfrak{A}_0$ меньше, чем $p \pmod{\langle b \rangle}$-размерность $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}_0 \neq \mathfrak{A}$.

Таким образом, $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0 \approx \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_0 \neq \mathfrak{A}$. Простая индукция показывает, что для каждого t существует реализация $\langle c \rangle$ типа q в $\mathfrak{A}$, для которой $p \pmod{\langle c \rangle}$-размерность $\mathfrak{A}$ не меньше t. В самом деле, зафиксируем t, и пусть справедливо предыдущее утверждение. Так как $\mathfrak{A}_0 \approx \mathfrak{A}$, то существует реализация $\langle c_0 \rangle$ типа q в $\mathfrak{A}_0$, для которой $p \pmod{\langle c_0 \rangle}$-размерность $\mathfrak{A}_0$ не меньше t. Из $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_0 \neq \mathfrak{A}$ получаем, что $p \pmod{\langle c_0 \rangle}$-размерность $\mathfrak{A}$ не меньше $t + 1$.

Пусть $\langle c \rangle$ — такая реализация q в $\mathfrak{A}$, что p-размерность $\langle \mathfrak{A}, \langle c \rangle \rangle$ не меньше $1 + n(i + m)$, где n — число, существование которого доказано в 39.9 для теории $T \cup q$. Пусть Y есть p-базис для $\langle \mathfrak{A}, \langle a \rangle \rangle$. В силу 39.9 существует такой p-базис X для $\langle \mathfrak{A}, \langle c \rangle \rangle$, что $Y \cup \langle a \rangle$ реализует атом (в $\langle \mathfrak{A}, \langle c \rangle \rangle$) над некоторым подмножеством $X_0 \subset X$ мощности, не превосходящей $n(i + m)$. Система $\mathfrak{A}$ является атомной над $Y \cup \langle a \rangle$ в силу 38.4 (i), следовательно, $\mathfrak{A}$ атомна над $X_0 \cup \langle c \rangle$. Тогда p-размерность $\langle \mathfrak{A}, \langle c \rangle \rangle$ не превосходит $n(i + m)$. □

Следствие 39.11 (Балдуин, Лахлан). *Если T ω_1-категорична, но не ω-категорична, то число счетных моделей для T равно ω.*

Доказательство. По 39.2 существуют число m, главный тип $q \in S_m T$ и неглавный тип $p \in S_1(T \cup q)$, такие, что p является минимальным порождающим для $T \cup q$. Так как T не ω-категорична, то $T \cup q$ тоже не ω-категорична. Из 38.8 получаем, что число счетных моделей теории $T \cup q$ равно ω и любые две ее неизоморфные модели имеют различные размерности. В силу 39.10 любые две неизоморфные модели теории $T \cup q$ являются неизоморфными моделями для T. □

Следствие 39.10 позволяет приписать определенную размерность каждой модели ω_1-категоричной теории T.

Допустим, что $\mathfrak{A} \models T$. Если $\mathfrak{A}$ насыщена, то ее размерность равна card $\mathfrak{A}$. Пусть T имеет ненасыщенную модель. Тогда T не ω-категорична. Выберем число m, главный тип $q \in S_m T$ и неглавный тип $p \in S_1(T \cup q)$, такие, что p является минимальным порождающим для $T \cup q$. Пусть $\mathfrak{A}$ — ненасыщенная модель для T. Тогда в силу 39.10 она имеет правильно определенную конечную p (mod q)-размерность. Значение p (mod q)-размерности модели $\mathfrak{A}$ не зависит от выбора $\langle m, q, p \rangle$. Любой выбор этой тройки порождает некоторую ω-башню счетных моделей, как описано в 38.8. Каждая такая башня начинается с простой модели T; индукцией по i показывается, что все такие башни имеют одни и те же модели на i-м уровне. Индукция основывается на том факте, что $(i+1)$-я модель в каждой башне является минимальным собственным модельным расширением i-й модели этой башни. Таким образом, можно определить dim $\mathfrak{A}$ как p (mod q)-размерность $\mathfrak{A}$ для любого выбора $\langle m, q, p \rangle$.

Следствие 39.12 (Балдуин, Лахлан). *Если теория T ω_1-категорична, то каждая ее модель однородна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — модель для T и $f\colon X \to Y$ — такое отображение на, что

$$\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X} \equiv \langle \mathfrak{A}, fx \rangle_{x \in X}.$$

Предположим, что $\mathfrak{A}$ — ненасыщенная модель. По 39.2 существует число m, главный тип $q \in S_m(S \cup DX)$ и неглавный тип $p \in S_1(T \cup DX \cup q)$, такие, что p является минимальным порождающим теории $T \cup DX \cup q$. Продолжим f так, чтобы $\langle a \rangle$ реализовало q в $\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in X}$ и $\langle fa \rangle$ реализовало q в $\langle \mathfrak{A}, fx \rangle_{x \in X}$. Пусть Y есть p-базис для $\langle \mathfrak{A}, x, \langle a \rangle \rangle_{x \in X}$, а Z есть p-базис для $\langle \mathfrak{A}, fx, \langle fa \rangle \rangle_{x \in X}$. Предположим, что card $Y \leqslant$ card Z. Пусть g — взаимно однозначное отображение Y в Z. В силу 38.4 (i) и 32.3 система $\langle \mathfrak{A}, x, \langle a \rangle \rangle_{x \in X}$ является простой над Y, следовательно, g можно продолжить до

$$h\colon \langle \mathfrak{A}, x, \langle a \rangle \rangle_{x \in X} \xrightarrow{\equiv} \langle \mathfrak{A}, fx, \langle fa \rangle \rangle_{x \in X}.$$

Ясно, что h продолжает f и $h\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{A}$.

По 39.2 существует число m^*, главный тип $q^* \in S_{m^*}T$ и неглавный тип $p^* \in S_1(T \cup q^*)$, такие, что p^* является минимальным порождающим для $T \cup q^*$. Пусть $\langle b \rangle$ реализует q^* в $\mathfrak{A}$ и $W \subset h[A]$ есть p^*-базис для $\langle h[\mathfrak{A}], \langle hb \rangle \rangle$. Так как $\mathfrak{A}$ не насыщена, то W конечно. По 39.10 $h[\mathfrak{A}]$ и $\mathfrak{A}$ имеют одну и ту же конечную p^* (mod q^*)-размерность, следовательно, W является также p^*-базисом для $\langle \mathfrak{A}, \langle hb \rangle \rangle$. Тогда в силу 38.4 (i) $h[A] = A$. □

Лахлан [1] усилил 39.11, доказав, что если теория T тотально трансцендентна и не ω-категорична, то она имеет бесконечно много счетных моделей. Из этого утверждения следствие 39.12 не выводится [1]).

Упражнение 39.13. Пусть T есть ω_1-категоричная, но не ω-категоричная теория. Зафиксируем $n > 0$. Показать, что T имеет ненасыщенную модель, которая реализует каждый n-тип T.

Упражнение 39.14. Пусть $T\mathfrak{A}$ ω_1-категорична, $\mathfrak{A}$ не насыщена и $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\equiv} \mathfrak{A}$. Показать, что f — изоморфизм.

Упражнение 39.15. Пусть $T\mathfrak{D}$ ω_1-категорична, $c \in D$ и $\mathfrak{D}$ проста над $\{c\}$. Пусть c реализует 1-тип $q \in S_1T$. Показать, что $\operatorname{rank} q \geqslant \dim \mathfrak{D}$.

§ 40. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ 0

Сигнатура дифференциальных полей состоит из сигнатуры полей и дополнительного символа 1-местной операции D. Теория дифференциальных полей характеристики 0 (DF_0) содержит аксиомы полей характеристики 0 и две дополнительные аксиомы, относящиеся к производной D:

$$D(x + y) = Dx + Dy,$$
$$D(x \cdot y) = x \cdot Dy + y \cdot Dx.$$

Теория DF_0 является универсальной, следовательно, можно попытаться доказать ее модельную полноту, используя

[1]) Следствие 39.12 не верно для тотально трансцендентных теорий.— *Прим. перев.*

критерий Блюм (17.2), примененный в § 17 для теории упорядоченных полей. Понятие дифференциального поля идет от Ритта [1], но теория дифференциально замкнутых полей (DCF_0) является недавней находкой Робинсона [1]. Робинсон доказал (довольно сложно), что DF_0 имеет модельное пополнение, и тогда определил DCF_0 как единственное (по 12.1) модельное пополнение DF_0. Впоследствии Блюм [1] нашла простые аксиомы для DCF_0, простые в том смысле, что в них упоминаются лишь дифференциальные многочлены от не более чем одного переменного.

Пусть $\mathfrak{A}$ — дифференциальное поле характеристики 0. Обозначим через $D^j x$ j-ю производную x: $D^0 x = x$, $D^{j+1} x = D(D^j x)$. *Дифференциальным многочленом* над $\mathfrak{A}$ от переменных x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ называется многочлен над $\mathfrak{A}$ от переменных $D^j x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ j \leqslant n_i)$. Пусть $f(x)$ — дифференциальный многочлен над $\mathfrak{A}$ от одного переменного. Будем рассматривать только многочлен $f(x)$ следующего вида:

$$(D^n x)^d + g_1(x)(D^n x)^{d-1} + \ldots + g_d(x),$$

где $g_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ — рациональные функции над $\mathfrak{A}$ от переменных $D^j x$ $(j < n)$. Число n называется *порядком* $f(x)$ и обозначается через $\operatorname{ord} f(x)$, d называется *степенью* $f(x)$, при этом $n \geqslant 0$ и $d > 0$. Пусть $\mathfrak{B}$ — дифференциальное поле, являющееся расширением $\mathfrak{A}$. Пусть $b \in B - A$. Элемент b называется *дифференциально алгебраическим* над $\mathfrak{A}$, если b — корень некоторого дифференциального многочлена $f(x)$ над $\mathfrak{A}$; в противном случае b называется *дифференциально трансцендентным* над $\mathfrak{A}$. Элемент b называется *общим решением* $f(x)$ над $\mathfrak{A}$, если b является корнем $f(x)$ и не является корнем никакого дифференциального многочлена над $\mathfrak{A}$ меньшей степени. Следующее предложение содержит всю необходимую алгебраическую информацию, нужную для применения критерия Блюм (17.2) к DF_0.

Предложение 40.1 (Зейденберг [1]). *Пусть $\mathfrak{A}$ — дифференциальное поле характеристики* 0.

(i) *Пусть b — дифференциально алгебраический над $\mathfrak{A}$ элемент. Тогда существует такой полином $f(x)$, что b*

является общим решением $f(x)$ над $\mathfrak{A}$ и все общие решения $f(x)$ над $\mathfrak{A}$ изоморфны над $\mathfrak{A}$.

(ii) *Если $f(x)$ — дифференциальный многочлен над $\mathfrak{A}$, то в некотором дифференциальном поле, являющемся расширением $\mathfrak{A}$, существует общее решение b многочлена $f(x)$ над $\mathfrak{A}$.*

(iii) *Дифференциальное поле $\mathfrak{A}$ имеет простое дифференциально трансцендентное расширение. Все такие расширения изоморфны над $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. (i) Пусть n является максимальным j, для которого $b, Db, \ldots, D^{j-1}b$ алгебраически независимы над $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}^*$ — поле (не дифференциальное), которое получается добавлением к $\mathfrak{A}$ элементов $b, Db, \ldots, D^{n-1}b$. Тогда D^nb — алгебраический элемент над $\mathfrak{A}^*$ и требуемым многочленом $f(x)$ будет

$$D^nx)^d + g_1(x, \ldots, D^{n-1}x)(D^nx)^{d-1} + \ldots \\ \ldots + g_d(x, \ldots, D^{n-1}x),$$

для которого $f(b) = 0$ и многочлен

$$y^d + g_1(b, \ldots, D^{n-1}b)\, y^{d-1} + \ldots + g_d(b, \ldots, D^{n-1}b)$$

неприводим над $\mathfrak{A}^*$.

(ii) Пусть $\operatorname{ord} f(x) = n$ и $b, b_1, \ldots, b_{n-1}$ алгебраически независимы над $\mathfrak{A}$. Определим $D^jb = b_j$ для $0 < j < n$. Возьмем такое b_n, что

$$(b_n)^d + g_1(b_1, \ldots, b_{n-1})(b_n)^{d-1} + \ldots \\ \ldots + g_d(b, \ldots, b_{n-1}) = 0.$$

Определим $D^nb = b_n$. □

Аксиомы Блюм для теории дифференциально замкнутых полей (DCF_0) состоят из аксиом DF_0 и еще двух схем:

(1) если $\operatorname{ord} f(x) > \operatorname{ord} g(x)$, то система $(f(x) = 0, g(x) \neq 0)$ имеет решение,

(2) если $\operatorname{ord} f(x) = 0$, то $f(x)$ имеет решение.

Ясно, что DCF_0 является универсально-экзистенциальной теорией. Пусть $\mathfrak{A}$ — модель DCF_0, т. е. дифференциально замкнутое поле характеристики 0. По (2) $\mathfrak{A}$ алгебраически замкнуто. В силу 40.1 (ii) $f(x)$ имеет общее решение в некотором простом расширении $\mathfrak{A}$. Однако по (1) $f(x)$ имеет «как угодно близкие» конечные аппрокси-

мации общего решения в $\mathfrak{A}$. Если b — общее решение $f(x)$, то b удовлетворяет системе $\{f(x) = 0\} \cup \{g(x) \neq 0 \mid \operatorname{ord} g(x) < \operatorname{ord} f(x)\}$. По (1) любая система вида $\{f(x) = 0\} \cup \{g_i(x) \neq 0 \mid i < n \;\&\; \operatorname{ord} g_i(x) < \operatorname{ord} f(x)\}$ имеет решения в $\mathfrak{A}$.

Теорема 40.2 (Робинсон). *Теория* DCF_0 *является модельным пополнением* DF_0.

Доказательство (по Блюм). Из 40.1 (ii) следует, что каждое дифференциальное поле характеристики 0 имеет дифференциально замкнутое расширение. В силу 17.2 достаточно показать, что каждая диаграмма следующего вида:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A}^* & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[rr] & & \mathfrak{A}(b) \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{A} \models \mathrm{DF}_0$,
$\mathfrak{A}^* \models \mathrm{DCF}_0$,
$\mathfrak{A}^*$ $(\operatorname{card} \mathfrak{A})^+$-насыщена

может быть дополнена указанным способом. Предположим, что b дифференциально трансцендентен над $\mathfrak{A}$ и $\{g_i(x) \mid i \in I\}$ — произвольная конечная система дифференциальных многочленов над $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}^* \models \mathrm{DCF}_0$, то существует такой элемент $c \in A^*$, что $g_i(c) \neq 0$ для всех $i \in I$. Тогда из $(\operatorname{card} \mathfrak{A})^+$-насыщенности $\mathfrak{A}^*$ следует, что существует дифференциально трансцендентный над $\mathfrak{A}$ элемент $c^* \in A^*$. Так как по 40.1 (iii) поле $\mathfrak{A}(b)$ изоморфно над $\mathfrak{A}$ полю $\mathfrak{A}(c^*)$, то можно положить $hb = c^*$.

Допустим, что b—дифференциально алгебраический над $\mathfrak{A}$ элемент. Пусть $f(x)$ — дифференциальный многочлен из 40.1 (i). Таким образом, b — общее решение $f(x)$ над $\mathfrak{A}$ и все общие решения $f(x)$ над $\mathfrak{A}$ изоморфны над $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}^* \models \mathrm{DCF}_0$, то существуют «как угодно близкие» конечные аппроксимации общего решения $f(x)$ в $\mathfrak{A}^*$. Тогда в силу $(\operatorname{card} \mathfrak{A})^+$-насыщенности $\mathfrak{A}^*$ существует общее решение $f(x)$ в $\mathfrak{A}$. □

Следствие 40.3 (Робинсон). *Теория* DCF_0 *допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. По 13.2. □

Следствие 40.4 (Зейденберг). *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— дифференциально замкнутое поле характеристики* 0 *и* S *— конечная система дифференциальных полиномиальных равенств и неравенств от нескольких переменных над* $\mathfrak{A}$. *Если* S *имеет решение в некотором дифференциальном поле, являющемся расширением* $\mathfrak{A}$, *то* S *имеет решение в* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть S имеет решение в $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$. В силу 40.1 (ii) можно считать, что $\mathfrak{B}$ дифференциально замкнуто. Тогда по 40.2 $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$. □

Из следствия 40.3 следует существование алгоритма для определения того, имеет ли некоторая конечная система S дифференциальных полиномиальных равенств и неравенств от нескольких переменных над дифференциально замкнутым полем $\mathfrak{A}$ решение в $\mathfrak{A}$. (Такой алгоритм впервые был получен Зейденбергом при помощи теории исключений.) Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — элементы из $\mathfrak{A}$, входящие в S. Утверждение о том, что S имеет решение, можно выразить при помощи экзистенциального предложения $F(a_1, \ldots, a_n)$ сигнатуры $T \cup D\mathfrak{A}$. По 40.3 предложение $F(a_1, \ldots, a_n)$ эквивалентно некоторой бескванторной формуле $G(a_1, \ldots, a_n)$. Таким образом, S имеет решение в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{A} \models G(a_1, \ldots, a_n).$$

Пусть $\varnothing(a_1, \ldots, a_n)$ — наименьшее дифференциальное поле характеристики 0, содержащее $a_1, \ldots, a_n$. Для того чтобы узнать, истинно ли $G(a_1, \ldots, a_n)$ в $\mathfrak{A}$, достаточно вычислить значения конечного числа дифференциальных многочленов над $\varnothing(a_1, \ldots, a_n)$ и определить, какие из этих значений равны нулю, а какие — нет.

Теорема 40.2 дает эффективный метод преобразования формулы $F(a_1, \ldots, a_n)$ в эквивалентную ей бескванторную формулу $G(a_1, \ldots, a_n)$. Пусть $\mathfrak{Q}$ — поле рациональных чисел с тривиальной производной, т. е. $Da = 0$ для всех $a \in Q$. Тогда $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{A}$ для любого дифференциального

поля $\mathfrak{A}$ характеристики 0. По 40.2 $\mathrm{DCF}_0 \cup D\mathfrak{A}$ — полная теория. Тогда по 40.3 существует такая бескванторная формула $G(x_1, \ldots, x_n)$, что

$$\mathrm{DCF}_0 \cup D\mathfrak{A} \models F(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow G(x_1, \ldots, x_n).$$

Так как теория $\mathrm{DCF}_0 \cup D\mathfrak{A}$ рекурсивно аксиоматизируема, то $G(x_1, \ldots, x_n)$ можно найти, рекурсивно перечисляя все доказательства.

Упражнение 40.4 (Капланский). Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — дифференциальные поля характеристики 0. Показать, что существует такое дифференциальное поле $\mathfrak{D}$, что следующая диаграмма может быть дополнена указанным способом:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{D} & \\
\mathfrak{B} \arrow[ur, dashed] & & \mathfrak{C} \arrow[ul, dashed] \\
 & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 40.5 (Вуд). Сигнатура теории дифференциальных полей характеристики p (DF_p) состоит из сигнатуры DF_0 и дополнительного символа 1-местной операции $\frac{1}{p}$. Ее аксиомами будут: аксиомы полей характеристики p; две аксиомы для производной D, входящие в DF_0, и

$$Dx = 0 \to (x^{\frac{1}{p}})^p = x,$$

$$Dx \neq 0 \to x^{\frac{1}{p}} = 0.$$

(Предостережение: $x^{\frac{1}{p}}$ не обозначает обычный корень степени p из элемента x; последняя аксиома означает, что функция $x^{\frac{1}{p}}$ тождественна на элементах с ненулевой производной, без этой аксиомы теория DF_p не имела бы

модельного пополнения.) Показать, что DF_p имеет модельное пополнение (известное как теория дифференциально замкнутых полей характеристики p (DCF_p)). (Ср. 41.2 и 41.8.)

Не известно, имеет ли каждое дифференциальное поле характеристики p (определенное выше) простое дифференциальное замкнутое расширение? [1])

§ 41. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ЗАМЫКАНИЕ

Технику Морли рангов и степеней можно непосредственно применить к теории дифференциально замкнутых полей характеристики 0 (DCF_0), потому что по 40.2 последняя полна и модельно полна.

Предложение 41.1 (Блюм). *Пусть* $\mathfrak{A} \models DF_0$, $f(x)$ — *дифференциальный многочлен над* $\mathfrak{A}$ *порядка* n *и* b — *общее решение* $f(x)$ *над* $\mathfrak{A}$. *Пусть* $q_b \in S\mathfrak{A}$ *есть* 1-*тип, реализуемый элементом* b. *Тогда*

(i) *ранг Кантора — Бендиксона* q_b *не превышает* n;

(ii) *если в* $\mathfrak{A}$ *есть решение* $D^i x = j$ *для всех* i *и* $j \geqslant 0$ *и если* $f(x)$ *равен* $D^n x$, *то ранг Кантора — Бендиксона типа* q_b *равен* n.

Доказательство. Оба утверждения доказываются индукцией по n.

(i) По 40.1 (i) существует такой многочлен $h(x)$ порядка n, что b является общим решением $h(x)$ над $\mathfrak{A}$ и все общие решения $h(x)$ изоморфны над $\mathfrak{A}$. Пусть $p \in S\mathfrak{A}$, $p \neq q_b$ и равенство $h(x) = 0$ принадлежит p. Тогда каждая реализация p является общим решением некоторого дифференциального многочлена порядка, меньшего n. По предположению индукции ранг Кантора — Бендиксона типа p меньше n. Следовательно, ранг Кантора — Бендиксона типа q_b не превосходит n, потому что формула $h(x) = 0$ определяет открытое подмножество в $S\mathfrak{A}$, отличные от q_b элементы которого имеют ранг, меньший n.

---

[1]) Шелах и Вуд независимо положительно ответили на этот вопрос (*NAMS*, 20, № 4 (1973), 444—445).—*Прим. перев.*

(ii) Из доказательства 40.1 получаем, что q_b полностью определяется условиями: $D^n x = 0$; x, Dx, ..., $D^{n-1}x$ алгебраически независимы над $\mathfrak{A}$. Для каждого $m > 0$ пусть r_m — 1-тип, который полностью описывается условиями: $D^{n-1}x = m$; x, Dx, ..., $D^{n-2}x$ алгебраически независимы над $\mathfrak{A}$. Возьмем $a_m \in \mathfrak{A}$, для которого $D^{n-1}a_m = m$. Тогда r_m полностью определяется условиями: $D^{n-1}(x - a_m) = 0$; $(x - a_m)$, $D(x - a_m)$, ..., $D^{n-2}(x - a_m)$ алгебраически независимы над $\mathfrak{A}$. По 28.3 r_m имеет тот же самый ранг Кантора — Бендиксона, что и 1-тип, реализуемый общим решением $D^{n-1}x$. Тогда по предположению индукции ранг Кантора — Бендиксона r_m равен $n - 1$. Следовательно, ранг Кантора — Бендиксона q_b равен n, потому что формула $D^n x = 0$ определяет открытое подмножество $S\mathfrak{A}$, которое содержит лишь q_b и элементы ранга, меньшего чем n, причем бесконечное число элементов этого подмножества имеют ранг $n - 1$. □

Очень правдоподобно, хотя еще не доказано, что неравенство из 41.1 (i) превращается в равенство, если $\mathfrak{A} \models \mathrm{DCF}_0$.

Лемма 41.2 (Блюм). *Теория* DCF_0 *тотально трансцендентна. Ее ранг Морли равен* $\omega + 1$.

Доказательство. Из 40.1 получаем, что DCF_0 ω-стабильна. По 31.6 теория DCF_0 тотально трансцендентна.

Пусть $\mathfrak{A}$ — универсальная область для DCF_0, являющаяся моделью этой теории. Такая система $\mathfrak{A}$ существует по 16.4. В силу 31.3 достаточно показать, что ранг Кантора — Бендиксона пространства $S\mathfrak{A}$ равен $\omega + 1$. Из 41.1 (ii) следует, что ранг Кантора — Бендиксона $S\mathfrak{A}$ не меньше ω. Тогда по 41.1 (i), 40.1 (i) и 40.1 (iii) он равен $\omega + 1$. □

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — дифференциальные поля характеристики 0. Поле $\mathfrak{B}$ называется *простым* дифференциально замкнутым расширением $\mathfrak{A}$, если следующая диаграмма может быть дополнена указанным способом для любого дифференциально замкнутого поля $\mathfrak{C}$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B} \arrow[r, dashed] & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Теорема 41.3 (Блюм). *Каждое дифференциальное поле характеристики* 0 *имеет простое дифференциально замкнутое расширение.*

Доказательство. По 41.2 и 32.4. □

Теорема 41.4. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *дифференциальное поле характеристики* 0. *Тогда любые два его простых дифференциальных расширения изоморфны над ним.*

Доказательство. По 41.2 и 32.4. □

Для дифференциального поля $\mathfrak{A}$ характеристики 0 пусть $\overline{\mathfrak{A}}$ обозначает его единственное простое дифференциально замкнутое расширение, которое существует в силу 41.3 и 41.4. Поле $\overline{\mathfrak{A}}$ называется *дифференциальным замыканием* $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ — два дифференциальных поля. Поле $\mathfrak{B}$ называется *атомным над* $\mathfrak{A}$, если для любого $n > 0$ и любой n-ки $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in B^n$ существует конечное множество S дифференциальных полиномиальных равенств и неравенств от n переменных над $\mathfrak{A}$ со следующими свойствами:

(1) $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ — решение S;

(2) все решения S изоморфны над $\mathfrak{A}$.

Теорема 41.5. *Дифференциальное поле* $\overline{\mathfrak{A}}$ *является атомным над* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. По 41.2, 32.2 и 32.6. □

Из 41.5 следует, что $\overline{\mathfrak{A}}$ — дифференциально алгебраическое расширение $\mathfrak{A}$. Назовем дифференциальный много-

член $f(x)$ *неприводимым над* $\mathfrak{A}$, если все общие решения $f(x)$ над $\mathfrak{A}$ изоморфны над $\mathfrak{A}$. Дифференциальное поле $\mathfrak{B}$ называется *нормальным расширением* $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset \subset \overline{\mathfrak{A}}$ и выполняется следующее условие: если некоторое общее решение произвольного неприводимого над $\mathfrak{A}$ дифференциального многочлена $f(x)$ в $\overline{\mathfrak{A}}$ принадлежит $\mathfrak{B}$, то все его общие решения $f(x)$ в $\overline{\mathfrak{A}}$ принадлежат $\mathfrak{B}$. (Возможен случай, когда $f(x)$ неприводим над $\mathfrak{A}$ и не имеет общих решений в $\overline{\mathfrak{A}}$.)

Теорема 41.6. *Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — нормальные расширения поля $\mathfrak{A}$. Тогда любой изоморфизм $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$ можно продолжить до автоморфизма $\overline{\mathfrak{A}}$.*

Доказательство следует из 36.1, потому что из 32.9 вытекает атомность $\overline{\mathfrak{A}}$ над $\mathfrak{B}$ и над $\mathfrak{C}$. □

Дифференциальное замыкание $\overline{\mathfrak{A}}$ называется *минимальным над* $\mathfrak{A}$, если не существует такого дифференциально замкнутого поля $\mathfrak{B}$, для которого $\overline{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}} \neq \mathfrak{B}$. Не известно, когда $\overline{\mathfrak{A}}$ является минимальным над $\mathfrak{A}$. Наиболее интересным открытым вопросом здесь является случай, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}$, где $\mathfrak{Q}$ — поле рациональных чисел с тривиальной производной [1]). Л. Харрингтон показал, что $\overline{\mathfrak{Q}}$ $(= \langle \overline{Q}, +, \cdot, D \rangle)$ имеет вычислимое представление, т. е. существует взаимно однозначное отображение $\overline{Q}$ на ω, которое переводит $+$, $\cdot$ и D в вычислимые функции. Доказательство Харрингтона является комбинацией конструкции $\overline{\mathfrak{Q}}$ в стиле Генкина с теоремой о конечном базисе для радикальных дифференциально полиномиальных идеалов.

Упражнение 41.7. Пусть $\mathfrak{A}$ — дифференциальное поле характеристики 0. Пусть $\mathfrak{B}$ — нормальное расширение $\mathfrak{A}$ в $\overline{\mathfrak{A}}$. Показать, что $\overline{\mathfrak{B}}$ изоморфно $\overline{\mathfrak{A}}$ над $\mathfrak{B}$.

---

[1]) Шелах анонсировал в (*NAMS*, 20, № 4 (1973), стр. 444) теорему, которая утверждает, что $\overline{\mathfrak{Q}}$ не является минимальным над $\mathfrak{Q}$.— *Прим. перев.*

Упражнение 41.8. Показать, что теория DCF_p (определенная в упражнении 40.5) не является тотально трансцендентной.

Упражнение 41.9. Показать, что $S\overline{\mathfrak{Q}}$ имеет изолированные точки как угодно большого конечного ранга.

§ 42. ДРУГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Наиболее перспективной областью теории моделей, не затронутой в этой книге, является бесконечная логика и, в частности, $\mathfrak{L}_{\omega_1\omega}$. Формулы $\mathfrak{L}_{\omega_1\omega}$ образуются согласно правилам § 4 и одному дополнительному правилу: если $\{F_i \mid i \in \omega\}$ — последовательность формул, то $\& \{F_i \mid i < \omega\}$ — формула. Хотя в $\mathfrak{L}_{\omega_1\omega}$ допускаются бесконечные счетные конъюнкции и дизъюнкции, но в ней запрещается навешивать бесконечную кванторную приставку. (Отсюда следует, что некоторые формулы в $\mathfrak{L}_{\omega_1\omega}$ не имеют эквивалентных формул, находящихся в пренексной нормальной форме.) Аксиомами и правилами вывода в $\mathfrak{L}_{\omega_1\omega}$ являются упомянутые в § 7 аксиомы и правила, дополненные бесконечным правилом: если F_i является следствием множества формул S для всех $i < \omega$, то $\& \{F_i \mid i < \omega\}$ является следствием S.

Теорема полноты для $\mathfrak{L}_{\omega_1\omega}$ выглядит так: если предложение F совместно (при применении аксиом и правил вывода логики $\mathfrak{L}_{\omega_1\omega}$), то F имеет модель. Доказательство теоремы полноты проводится методом Генкина, и его непосредственными предшественниками можно считать доказательства 18.1 и 24.2. Большое число применений логики $\mathfrak{L}_{\omega_1\omega}$ обязано абсолютности понятия совместности в $\mathfrak{L}_{\omega_1\omega}$. Наилучшим изложением результатов по бесконечной логике является книга Кейслера [1].

Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная алгебраическая система. Скотт [1] построил такое предложение логики $\mathfrak{L}_{\omega_1\omega}$ (сигнатуры $\mathfrak{A}$), что для любой счетной алгебраической системы $\mathfrak{B}$ сигнатуры $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{B} \models F \Leftrightarrow \mathfrak{B} \approx \mathfrak{A}.$$

Построение такого предложения можно проводить с помощью некоторого канонического процесса, однозначный результат которого обозначается через $F_{\mathfrak{A}}$. *Ранг* $\mathfrak{A}$ опре-

деляется как наименьшее число шагов, необходимых для получения $F_{\mathfrak{A}}$ из атомных формул. (Оказывается, что ранг $\mathfrak{A}$ не превосходит наименьшего ординала, не рекурсивного относительно любого действительного числа, являющегося кодом системы $\mathfrak{A}$.)

Пусть $n(T)$ обозначает число счетных моделей счетной теории T, и пусть $n(\beta, T)$ обозначает число счетных моделей для T ранга β. Морли [1] доказал, что если $n(T) < 2^{\omega}$, то $n(\beta, T) \leqslant \omega$ для любого $\beta < \omega_1$. В работе Сакса [2] показано, что если $n(\beta, T) < \omega$ для всех $\beta < \omega_1$, то $n(T) \leqslant \omega$. Последний результат является следствием теоремы компактности Барвайса [1]. Пусть A — счетное допустимое множество, как в работе Платека [1]. Формулами в $\mathfrak{L}_{A,\omega}$ являются те формулы из $\mathfrak{L}_{\omega_1\omega}$, которые образуются внутри A. Теорема компактности Барвайса гласит: если S есть A-рекурсивно перечислимое множество предложений из $\mathfrak{L}_{A,\omega}$ и каждое A-конечное подмножество в S имеет модель, то S имеет модель. (A-рекурсивная перечислимость обозначает Σ_1-свойство над A, а A-конечность обозначает принадлежность A.) Доказательство Барвайса [1] с устранениями сечений раскрывает факт абсолютности, являющийся отправной точкой этого доказательства, однако Кейслер [1] дал более прямое доказательство теоремы Барвайса, использующее метод Генкина.

Следствием (см. Сакс [1]) теоремы компактности Барвайса является эффективность ранга Морли: если T — тотально трансцендентная теория, то ранг Морли T является ординалом, рекурсивным в T.

Много фактов о стабильности и ранге можно найти у Шелаха [1]. Полная счетная теория T называется *стабильной*, если она $\varkappa$-стабильна для некоторого бесконечного $\varkappa$. Теория T называется *суперстабильной*, если она $\varkappa$-стабильна для любого $\varkappa \geqslant 2^{\omega}$. Шелах доказал такой факт: если T $\varkappa$-стабильна для некоторого $\varkappa$, такого, что $\varkappa^{\omega} > \varkappa$, то T или суперстабильна, или тотально трансцендентна. Его доказательство сочетает технику расщепления из леммы 19.1 с умелым использованием теоремы компактности. Лахлан [1] показал, что если T суперстабильна и $n(T) > 1$, то $n(T) \geqslant \omega$. (Его доказательство обобщает технику размерности § 39.) Много известных

результатов теории моделей доказывается с помощью нахождения такого понятия ранга, при котором относящиеся к рассматриваемому вопросу 1-типы имеют ранг. Никакое понятие ранга, по-видимому, нельзя применять, если не выполняются правила ранга и степени, аналогичные соответствующим правилам из § 29. Шелах в [2] мастерски использует ранг для доказательства следующего факта: если теория T бесконечной мощности $\varkappa$ категорична в некоторой мощности, большей $\varkappa$, то T категорична в каждой мощности, большей $\varkappa$. Это доказательство использует некоторый факт об абсолютности, для того чтобы решить один вопрос об опускании типов с помощью теоремы Чэна о двух кардиналах.

Неравенство Лахлана для $n(T)$, когда T суперстабильна, отчасти объясняется следующей леммой (Лахлан [2]): если $\mathfrak{A}$ — модель теории T и $p \in S\mathfrak{A}$ имеет ранг Морли, то степень p равна 1.

Доказательство Балдуина теоремы о том, что ранг ω_1-категоричной теории конечен, помогает понять значение теорем § 39.

Обозначим через $\mathrm{VF}_{(p,0)}$ теорию p-нормированных полей характеристики 0. Ее модель состоит из поля F характеристики 0, Z-группы G (определенной в 17.7) с наименьшим положительным элементом 1, нормирования ord: $F \to G$, выделенного элемента $r \in F$ и сечения χ: $G \to F$, для которого $\mathrm{ord}(\chi g) = g$ и $\chi 1 = r$. При этом поле классов вычетов F по модулю G изоморфно Z_p, полю вычетов целых чисел по модулю p. Теорией $H_{(p,0)}$ p-адических гензелевых полей называется теория $\mathrm{VF}_{(p,0)}$ вместе с леммой Гензеля. Ясно, что $\mathrm{VF}_{(p,0)}$ является универсальной теорией. Акс и Кочен [1] доказали, что $H_{(p,0)}$ является модельным пополнением $\mathrm{VF}_{(p,0)}$ [1]). Их результат можно получить с помощью критерия Блюм (теорема 17.2), следуя общей схеме доказательства теоремы 17.3. Как было проверено Робинсоном [2], все необходимые факты можно найти у Капланского [1].

Идеи доказательства результата предыдущего абзаца сохраняются и при более широких условиях. Так, поле

---

[1]) Этот результат независимо получен Ю. Л. Ершовым [1].— *Прим. перев.*

Z_p может быть заменено полем K характеристики 0. Переход к K позволил Аксу и Кочену [2] доказать асимптотическую форму гипотезы Артина, более прямое доказательство которой содержится в работе Робинсона [2]. Ю. Л. Ершов [2, 3] распространил результат предыдущего абзаца с Z-групп на произвольные группы нормирований.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — элементарно эквивалентные алгебраические системы. Кейслер [2] показал, что при обобщенной гипотезе континуума (ОГК) существует ультрастепень $\mathfrak{A}^*$ системы $\mathfrak{A}$ и ультрастепень $\mathfrak{B}^*$ системы $\mathfrak{B}$, для которых $\mathfrak{A}^* \approx \mathfrak{B}^*$. Недавно Шелах придумал другое доказательство этого факта без ОГК, однако его доказательство менее каноническое, чем у Кейслера: Кейслер сначала построил ультрафильтр D, а затем изоморфизм между $\mathfrak{A}^I/D$ и $\mathfrak{B}^I/D$; Шелах строит ультрафильтр и изоморфизм одновременно. Самое лучшее изложение теории ультрапроизведений содержится в книге Кейслера и Чэна [1].

Шелах доказал, что если T — тотально трансцендентная теория, не являющаяся ω_1-категоричной, то число $n(\omega_\alpha, T)$ моделей теории T мощности ω_α не меньше card $(\alpha + 1)$ для всех $\alpha > 0$. (Кейслер и Морли сформулировали гипотезу, что $n(\omega_\alpha, T)$ — неубывающая функция от α, если $\alpha > 0$.) Короткое доказательство теоремы Шелаха нашел Розенталь [1], который сначала принимает ОГК (чтобы получить некоторый ультрафильтр), а затем освобождается от этой гипотезы с помощью некоторых фактов об абсолютности, главным из которых является абсолютность понятия тотальной трансцендентности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Акс, Кочен (Ax J., Kochen S.)

[1] Diophantine problems over local fields, III, *Ann. of Math.*, 83 (1966), 437—456.

[2] Diophantine problems over local fields, I and II, *Amer. Jour. Math.*, 87 (1965 and 1966), 605—630, 631—648.

Балдуин (Baldwin J. T.)

[1] Ph. D. Thesis, Simon Fraser University, 1971.

Барвайс (Barwise K. J.)

[1] Infinitary logic and admissible sets, *Jour. Symb. Log.*, 34 (1969), 226—254.

Блюм (Blum L.)

[1] Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1968.

Вот (Vaught R.)

[1] Denumerable models of complete theories, Infinitistic Methods, Pergamon Press, 1961, 303—321. (Vaught R.)

[2]*Model theory before 1945, Proceedings of symposia in pure mathematics, AMS, 25, 153—172.

Гёдель (Gödel K).

[1] The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory, Princeton Univ. Press, 1940. [Русский перевод: Гёдель К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, *УМН*, 8 (1948), вып. 1, 96—149.]

Ершов Ю. Л.

[1] Об элементарных теориях локальных полей, *Алгебра и логика*, 4, № 2 (1965), 5—30.

[2] Об элементарной теории максимальных нормированных полей, *Алгебра и логика*, 4, № 3 (1965), 31—70.

[3]*Об элементарной теории максимальных нормированных полей, II, *Алгебра и логика*, 5, № 1 (1966), 5—40.

Зейденберг (Seidenberg A.)

[1] An elimination theory for differential algebra, Univ. of Calif., 1956, 31—66.

Капланский (Kaplansky I.)

[1] Maximal fields with valuations, *Duke Math. Jour.* (1942), 313—321.

Кейслер (Keisler H. J.)

[1] Model Theory for Infinitary Logic, North-Holland, 1971.

[2] Ultraproducts and elementary classes, *Indag. Math.*, 23 (1961), 477—495.

Кейслер, Чэн (Chang C. C., Keisler H. J.)
[1] Theory of models, North-Holland, 1973. [Готовится к печати русский перевод.]
Кочен (Kochen S.)
[1] Ultraproducts in the theory of models, *Ann. of Math.*, 74 (1962), 221—261.
Лахлан (Lachlan A. H.)
[1] The number of countable models of a countable superstable theory, Proc. of the Inter. Congress in Logic, Methodology and Philosophy of Science, Bucharest, 1971, 45—56.
[2] A property of stable theories, *Fund. Math.*, 77, № 1 (1972), 9—20.
Мальцев А. И.
[1]*Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik; *Матем. сб.*, 1 (43), 323—336.
[2]*Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп, Иваново, *Уч. зап. пед. ин-та*, Т. 1, 3—9.
Марш (Marsh W.)
[1] Ph. D. Thesis, Dartmouth College, 1966.
Морли (Morley M.)
[1] The number of countable models, *Jour. Symb. Log.*, 35 (1970), 14—18.
Платек (Platek R.)
[1] Ph. D. Thesis, Stanford University, 1966.
Ритт (Ritt J. F.)
[1] Differential Algebra, Amer. Math. Soc. Publication, 1950.
Робинсон (Robinson A.)
[1] On the concept of a differentially closed field, *Bull. Res. Council of Israel* (1959), 113—128.
[2] Problems and methods of model theory, Centro Internazionale Matematico Estivo, Varenna 1968.
[3] Recent developments in model theory, Proceedings of the Inter. Congress in Logic, Methodology and Philosophy of Science, Stanford, 1960, 60—79. (Русский перевод: Робинсон А., Последние достижения в теории моделей, в сб. «Математическая логика и ее применения», «Наука», М., 1963, 65—89.)
Розенталь (Rosenthal J.)
[1] A new proof of a theorem of Shelah, *Jour. Symb. Log.*, 37, № 1 (1972), 133—134.
Сакс (Sacks G. E.)
[1] Effective bounds on Morley rank, to appear.
[2] On the number of countable models, to appear.
Скотт (Scott D.)
[1] Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers, The Theory of Models, North-Holland, 1965.
Шелах (Shelah S.)
[1] Stability, the finite cover property and superstability, *Ann. of Math. Logic*, 3, № 3 (1971), 271—362.
[2] Los conjecture for uncountable languages, Proceedings of symposia in pure mathematics, AMS, v. 25.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Дж. Е. Сакс

ТЕОРИЯ НАСЫЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

Редактор Г. М. Цукерман
Художник Е. И. Волков
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор З. И. Резник

Сдано в набор 26/VIII 1975 г.
Подписано к печати 15/I 1976 г.
Бумага кн. журн. 84×108 1/32=3 бум. л.
10,08 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 8,72. Изд. № 1/8194
Цена 60 коп. Зак. 01005

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9