Литкан А. Е
г. Москва,
12.09.43 г.

Изследование
по теории уравнений
с частными
производными
первого порядка
одной неизвестной
функции
Н. Н. Салтыкова

профессор Киевского политех-
нического института

Харьков

Изслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Н. Н. Салтыкова.

ГЛАВА I.

Образованіе производныхъ уравненій С. Ли и задача ихъ интегрированія.

1. Настоящее изслѣдованіе мы начнемъ съ изложенія начальныхъ понятій, которыя представляютъ основы классической теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Какъ извѣстно, дифференціальныя уравненія съ частными производными получаются при помощи исключенія произвольныхъ постоянныхъ величинъ или произвольныхъ функцій изъ функціональныхъ уравненій и ихъ производныхъ уравненій.

Пусть зависимая перемѣнная z обозначаетъ функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, которая опредѣляется слѣдующимъ равенствомъ

$$z = f(x, y).$$

Назовемъ черезъ p и q частныя производныя перваго порядка функціи z, соотвѣтственно по независимымъ перемѣннымъ x и y, т. е. положимъ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующая дифференціальная зависимость, равнозначная обоимъ предыдущимъ равенствамъ

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Пусть имѣемъ зависимость между разсматриваемыми перемѣнными z, x, y, которая опредѣляетъ семейство поверхностей, зависящее отъ двухъ различныхъ параметровъ a и b, и представляется уравненіемъ

$$z = f(x, y, a, b). \qquad (1)$$

Предположимъ, что послѣднее равенство и его два производныя уравненія перваго порядка

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (2)$$

образуютъ совмѣстно систему трехъ уравненій, которыя, по исключеніи параметровъ a и b, даютъ въ результатѣ одну зависимость слѣдующаго вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \qquad (3)$$

Послѣдиее полученное равенство (3) представляетъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка p и q одной неизвѣстной функціи z и характеризуетъ собой общія свойства всѣхъ поверхностей даннаго вида (1).

Рѣшеніе обратнаго вопроса, относительно разысканія функціональныхъ уравненій поверхностей, удовлетворяющихъ условіямъ, выраженнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ (3), представляетъ такъ называемую задачу интегрированія послѣдняго дифференціальнаго уравненія.

Всякое значеніе функціи z, въ перемѣнныхъ x и y, опредѣляющее какую-либо поверхность искомаго вида, и, стало-быть, совмѣстно со значеніями своихъ производныхъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ утождествляющее данное дифференціальное уравненіе (3), называется его *рѣшеніемъ*, или *интеграломъ*.

Полнымъ интеграломъ называется рѣшеніе уравненія (3), заключающее двѣ различныя произвольныя постоянныя величины, результатъ исключенія которыхъ изъ даннаго рѣшенія и его двухъ производныхъ уравненій перваго порядка, приводитъ къ одному только исходному дифференціальному уравненію (3).

Частнымъ интеграломъ называется рѣшеніе уравненія (3), получаемое изъ полнаго его интеграла сообщеніемъ частныхъ значеній произвольнымъ постояннымъ величинамъ, входящимъ въ этотъ полный интегралъ.

Наконецъ, *общимъ* и *особеннымъ* интегралами называются рѣшенія уравненія (3), опредѣляемыя геометрически какъ обертки семейства поверхностей (1), образованныя соотвѣтственно въ предположеніяхъ, что параметры a и b связаны, въ первомъ случаѣ одной произвольной зависимостью, а во второмъ случаѣ a и b независимы между собой.

Если остановиться на разсматриваемомъ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, то, относительно трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей, координаты x, y, z отмѣчаютъ въ пространствѣ точку поверхности, представленной уравненіемъ (1), а частныя производныя p и q опредѣляютъ положеніе касательной плоскости въ разсматриваемой точкѣ поверхности. Всѣ приведенныя понятія и опредѣленія распространяются безъ всякаго труда на случай произвольнаго числа независимыхъ перемѣнныхъ величинъ и на системы совокупныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по нѣсколькимъ независимымъ перемѣннымъ.

Послѣднія геометрическія представленія тѣсно связаны съ классической теоріей уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, созданной трудами Лагранжа, Коши и Якоби. На изложенномъ выше способѣ происхожденія разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій и на указанныхъ геометрическихъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ основаны всѣ приложенія названной теоріи къ цѣлому ряду вопросовъ геометріи и анализа.

Со времени созданія исчисленія безконечно-малыхъ величинъ до семидесятыхъ годовъ прошлаго столѣтія, теорія уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи развивалась, исходя изъ разсмотрѣнія изложенныхъ выше основныхъ понятій дифференціальнаго исчисленія, относительно частныхъ производныхъ зависимыхъ перемѣнныхъ по независимымъ перемѣннымъ. Затѣмъ С. Ли поставилъ дальнѣйшее развитіе изучаемой теоріи въ зависимость отъ изслѣдованія новыхъ перемѣнныхъ величинъ и новыхъ способовъ образованія особаго рода *производныхъ* уравненій, которыя замѣнили собой дифференціальныя уравненія съ частными производными, въ классическомъ смыслѣ этого слова.

Въ нашемъ сочиненіи мы имѣемъ въ виду критическое изслѣдованіе новыхъ ученій С. Ли, которое приведетъ насъ къ строгому различію между обоими типами указанныхъ уравненій,—съ частными производными классической теоріи и производныхъ уравненій С. Ли.

Поэтому мы начнемъ послѣдующее изложеніе съ разсмотрѣнія основныхъ понятій разсматриваемой теоріи.

2. Въ своихъ изслѣдованіяхъ по теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій С. Ли ввелъ новыя отличныя отъ предыдущихъ понятія, разсмотрѣнію которыхъ и посвящаются послѣдующія строки [1]).

[1]) *S. Lie.*—Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine classification derselben (Nachrichten vor der K. Gesellschaft der Wissenschaften u D. G. A. Universität. Göttingen, 1873, S. 473).

S. Lie.—Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen, Bd. IX, 1876. S. 250).

Пусть, согласно съ предыдущимъ, величины x, y, z обозначаютъ координаты нѣкоторой данной точки въ пространствѣ, а X, Y, Z представляютъ текущія координаты. Уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку (x, y, z), выражается слѣдующимъ равенствомъ

$$Z - z = p\ (X - x) + q\ (Y - y),$$

гдѣ значенія коэффиціентовъ p и q вполнѣ опредѣляютъ положеніе опредѣленной плоскости, которую условимся символически обозначать черезъ (p, q).

Такимъ образомъ координаты x, y, z и параметры p, q, отмѣчая опредѣленную точку въ пространствѣ и проходящую черезъ нее плоскость, вмѣстѣ съ тѣмъ вполнѣ опредѣляютъ нѣкоторый безконечно-малый криволинейный поверхностный элементъ, построенный въ разсматриваемой точкѣ (x, y, z) и совпадающій въ этой точкѣ съ построенной въ ней плоскостью (p, q).

Поэтому совокупность разсматриваемыхъ пяти величинъ

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q \tag{4}$$

С. Ли называетъ *поверхностнымъ элементомъ* (Flächenelement), или иногда, для краткости изложенія, *элементомъ* (Element).

Совокупность значеній поверхностныхъ элементовъ, связанныхъ между собой какими-либо условіями, или уравненіями, С. Ли называетъ *системой поверхностныхъ элементовъ* (Schar v. Flächenelementen). Такъ, напримѣръ, всякое уравненіе между перемѣнными величинами (4)

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0 \tag{5}$$

опредѣляетъ систему поверхностныхъ элементовъ, совершенно независимо отъ того, заключаетъ ли это уравненіе всѣ пять разсматриваемыхъ перемѣнныхъ величинъ, или только нѣкоторыя изъ нихъ.

S. Lie u. F. Engel.—Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen (Mathematiche Annalen, Bd. 59, S. 193).

S. Lie u. F. Engel.—Theorie der Transformationsgruppen, II Abschnitt, Leipzig, 1890. S. 77.

S. Lie u. G. Scheffers.—Geometrie der Berührungstransformationen. Erster Band, Leipzig. 1896. S. 481.

E. Goursat.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris 1891. p. 244.

E. v. Weber.—Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem. Leipzig 1900. S. 230.

F. Klein.—Conferences sur les Mathématiques faites au congrès de Mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago. Paris. 1898. p. 18.

F. Klein.—Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. 1891, p. 187).

Н. Цытовичъ.—Теорія Гамильтона—Якоби—Ли въ Механикѣ. С.-Петербургъ. 1899, стр. 54, 70.

Два смежныхъ безконечно близко расположенныхъ поверхностныхъ элемента называются *соединенными* (vereinigt), если точка одного элемента расположена въ плоскости другого.

Легко вывести аналитическое условіе, показывающее, что данный поверхностный элементъ (4) находится въ *соединеніи* съ безконечно близкимъ съ нимъ элементомъ

$$x + dx,\ y + dy,\ z + dz,\ p + dp,\ q + dq.$$

Подставляя для этого координаты точки послѣдняго элемента вмѣсто текущихъ координатъ въ уравненіе плоскости (p, q), получаемъ слѣдующее равенство

$$dz = pdx + qdy, \tag{6}$$

которое и представляетъ искомое условіе *соединенности* обоихъ разсматриваемыхъ поверхностныхъ элементовъ.

Наконецъ, система поверхностныхъ элементовъ, находящихся въ *соединеніи* со всѣми смежными съ ними безконечно-близко расположенными элементами, называется, согласно съ С. Ли, *собраніемъ* поверхностныхъ элементовъ *(Element-Verein,* или *Element-Mannigfaltigkeit)*.

Такимъ образомъ, при разсмотрѣніи собраній поверхностныхъ элементовъ, приходится разсматривать прежде всего условія, опредѣляющія данную систему элементовъ и затѣмъ—условія ихъ соединенности.

Легко видѣть, напримѣръ, что совокупность всѣхъ точекъ какой-либо поверхности и построенныхъ въ нихъ касательныхъ плоскостей къ этой поверхности представляетъ собраніе элементовъ, покрывающихъ сплошнымъ образомъ данную поверхность.

Второй примѣръ представляетъ система элементовъ, изъ всѣхъ точекъ какой-либо кривой линіи въ пространствѣ и плоскостей, проходящихъ черезъ касательныя прямыя, проведенныя въ точкахъ разсматриваемой кривой, которыя образуютъ собраніе элементовъ, расположенныхъ сплошнымъ образомъ вдоль нашей кривой линіи.

Наконецъ, третьяго вида собраніе образуется системой элементовъ, плоскости которыхъ проходятъ черезъ одну общую точку пространства.

Легко вообразить еще и другія собранія поверхностныхъ элементовъ, которыя получаются изъ послѣднихъ двухъ указанныхъ типовъ собраній, введеніемъ нѣкоторыхъ дополнительныхъ условій, относительно составляющихъ ихъ элементовъ, расположенныхъ вдоль кривой линіи или пересѣкающихся въ одной точкѣ.

Всѣ поверхностные элементы, которые составляютъ геометрическія собранія, построены въ безконечно-близко расположенныхъ между собой точкахъ простраиства, образующихъ поверхности, кривыя линіи или сливающихся въ одной точкѣ. Эти геометрическія формы, заполненныя сплошнымъ образомъ точками поверхностиыхъ элементовъ геометрическихъ собраній, мы будемъ называть *геометрическимъ мѣстомъ* разсматриваемаго собранія поверхностныхъ элементовъ. Такъ, по отношенію къ указаннымъ тремъ типамъ собраній поверхностныхъ элементовъ, покрывающихъ сплошнымъ образомъ поверхности, кривыя линіи или пересѣкающихся въ общей точкѣ, эти послѣднія: поверхность, кривая линія и точка, представляютъ геометрическія мѣста разсматриваемыхъ собраній.

3. Исходя изъ равенства (6), выражающаго условіе соединенности поверхностныхъ элементовъ, легко составить понятіе о всѣхъ возможныхъ собраніяхъ, которыя могутъ быть составлены изъ поверхностныхъ элементовъ и убѣдиться, что они исчерпываются перечисленными выше собраніями.

Условимся для этого прежде всего говорить, что дифференціальное равенство (6) *удовлетворяется*, на основаніи данныхъ функціональныхъ уравненій между перемѣнными x, y, z, p и q, если оно является алгебраическимъ слѣдствіемъ этихъ уравненій и ихъ производныхъ уравненій, т. е. когда дифференціальное соотношеіе (6) уничтожается тождественно, въ силу всѣхъ послѣднихъ зависимостей между перемѣнными величинами (4). Условимся далѣе называть удовлетворяющія послѣднимъ условіямъ функціональныя зависимости *рѣшеніемъ* уравненія (6). Изъ самаго понятія о рѣшеніи уравненія (6) непосредственно слѣдуетъ, что представляющія его функціональныя зависимости должны заключать явнымъ образомъ перемѣнную величину z, такъ какъ въ противномъ случаѣ невозможно получить изъ нихъ дифференціальныхъ соотношеній, заключающихъ дифференціалъ dz, слѣдствіемъ которыхъ являлось бы равенство (6). Поэтому необходимо предположить, на основаніи послѣдняго равенства, что существуетъ по меньшей мѣрѣ одна зависимость между перемѣнными величинами x, y, z, p и q, разрѣшимая относительно перемѣнной z.

Докажемъ кромѣ того, что, каково бы ни было число уравненій, представляющихъ рѣшеніе равенства (6), между ними всегда существуетъ одна зависимость, заключающая только три перемѣнныхъ x, y и z. Послѣднее предложеніе становится очевиднымъ, если число разсматриваемыхъ уравненій больше двухъ, ибо въ такомъ случаѣ изъ нихъ всегда возможно исключить двѣ перемѣнныя величины p и q и получить въ результатѣ, по меньшей мѣрѣ, одну искомую зависимость только между перемѣнными x, y и z.

Поэтому достаточно разсмотрѣть предположенія, что рѣшенія уравненія (6) представляются одной или двумя зависимостями между разсматриваемыми перемѣнными (4).

Начнемъ съ изслѣдованія перваго случая и предположимъ, что рѣшеніе равенства (6) представляется однимъ уравненіемъ, которое, на основаніи изложенныхъ соображеній, приводится къ слѣдующему виду

$$z = \varphi\,(x,\ y,\ p,\ q).$$

Стало-быть, равенство (6) должно быть тождественно слѣдующему дифференціальному уравненію

$$dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp + \frac{\partial\varphi}{\partial q}dq.$$

Изъ сравненія обоихъ равенсгвъ слѣдуютъ прежде всего тождества

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0,$$

которыя показываютъ, что функція φ зависитъ только отъ x, y и не заключаетъ перемѣнныхъ p и q, т. е. представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = \varphi\,(x,\ y).$$

Кромѣ того мы заключаемъ еще о существованіи двухъ равенствъ

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Такимъ образомъ, исходя изъ предположенія, что рѣшеніе уравненія (6) представляется однимъ только равенствомъ, мы приходимъ къ необходимости заключить о существованіи еще двухъ, при чемъ совокупность всѣхъ трехъ послѣднихъ равенствъ опредѣляетъ собой собраніе поверхностныхъ элементовъ, покрывающихъ собой поверхность, опредѣляемую первымъ изъ трехъ написанныхъ выше уравненій.

Аналогичное заключеніе получается также и во второмъ случаѣ, соотвѣтствующемъ предположенію, что рѣшеніе равенства (6) дается двумя уравненіями. При этомъ слѣдуетъ разсмотрѣть два случая, соотвѣтствующіе предположеніямъ, что уравненія изслѣдуемаго рѣшенія разрѣшимы относительно двухъ перемѣнныхъ z и p или относительно z и y, или, что то-же самое, относительно совокупностей перемѣнныхъ z и q, или z и x.

Пусть, напримѣръ, система равенствъ

$$z = \varphi\,(x,\ y,\ q),\ p = \psi\,(x,\ y,\ q)$$

представляетъ рѣшеніе уравненія (6). Въ такомъ случаѣ послѣднее уравненіе должно быть слѣдствіемъ данныхъ уравненій и ихъ производныхъ равенствъ

$$dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial q}dq,$$

$$dp = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial q}dq.$$

Поэтому, называя черезъ λ и μ два неопредѣленные коэффиціента мы должны имѣть тождество

$$dz - pdx - qdy =$$

$$\lambda\left(dz - \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial q}dq\right) +$$

$$+\mu\left(dp - \frac{\partial\psi}{\partial x}dx - \frac{\partial\psi}{\partial y}dy - \frac{\partial\psi}{\partial q}dq\right),$$

которое приводитъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$\lambda = 1,\ \mu dp = 0,$$

$$p = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad q = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial q} = 0.$$

Если предположить изъ второго равенства, что $dp = 0$, т. е. положить

$$p = C,$$

гдѣ C — произвольная постоянная величина, то къ первоначальнымъ уравненіямъ слѣдуетъ присоединить новое равенство

$$C = \psi\ (x,\ y,\ q),$$

такъ что въ результатѣ изслѣдуемое рѣшеніе уравненія (6) представляется тремя равенствами.

Если же предположить, что

$$\mu = 0,$$

то полученныя выше равенства становятся

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ q = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0,$$

т. е., во-первыхъ, функція φ не зависитъ отъ перемѣнной q и, во-вторыхъ, также въ разсматриваемомъ случаѣ рѣшеніе уравненія (6) заключаетъ три уравненія и, съ геометрической точки зрѣнія, представляетъ то же самое собраніе элементовъ, что и въ первомъ изслѣдованномъ случаѣ.

Наконецъ, если разсматриваемое рѣшеніе выражается двумя равенствами вида

$$z = \varphi\ (x,\ p,\ q),\ y = \psi\ (x,\ p,\ q),$$

то уравненіе (6) должно представлять слѣдствіе дифференціальныхъ равенствъ

$$dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp + \frac{\partial\varphi}{\partial q}dq,$$

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial p}dp + \frac{\partial\psi}{\partial q}dq.$$

Для этого должны имѣть мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = p + \frac{\partial\psi}{\partial x}q,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = q\frac{\partial\psi}{\partial p},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial q} = q\frac{\partial\psi}{\partial q}$$

Послѣднія два равенства приводятъ къ новому тождеству

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial p} & \frac{\partial\varphi}{\partial q} \\ \frac{\partial\psi}{\partial p} & \frac{\partial\psi}{\partial q} \end{vmatrix} = 0,$$

которое показываетъ, что обѣ перемѣнныя p и q исключаются изъ обоихъ уравненій, представляющихъ разсматриваемое рѣшеніе, такъ что также и въ этомъ случаѣ должна существовать одна зависимость между перемѣнными x, y, z, которая, согласно съ предыдущимъ, разрѣшима относительно z.

Такимъ образомъ изъ предыдущихъ разсужденій слѣдуетъ, что рѣшеніе уравненія (6) должно *заключать по меньшей мѣрѣ три равенства.*

Но, кромѣ двухъ разсмотрѣнныхъ при этомъ возможныхъ предположеній, слѣдуетъ принять во вниманіе еще третье очевидное рѣшеніе уравненія (6)

$$dx = 0,\ dy = 0,\ dz = 0.$$

Послѣднія равенства показываютъ, что перемѣнныя x, y, z должны имѣть постоянныя значенія, т. е. всѣ три уравненія рѣшенія равенства (6) заключаютъ только три перемѣнныя x, y и z. Соотвѣтствующее собраніе поверхностныхъ элементовъ представляетъ очевидно пучекъ плоскостей, проходящихъ черезъ данную точку.

Разсмотрѣнными тремя типами исчерпываются очевидно всѣ тѣ собранія элементовъ, которыя опредѣляются совокупностью трехъ уравненій между перемѣнными x, y, z, p, q и соотвѣтствуютъ различнымъ возможнымъ предположеніямъ относительно разрѣшимости этихъ уравненій относительно перемѣнныхъ x, y, z.

Кромѣ того ясно, что возможно предположить существованіе еще другихъ собраній элементовъ, которыя соотвѣтствуютъ рѣшеніямъ уравненія (6), представленнымъ болѣе чѣмъ тремя различными равенствами.

Если рѣшеніе равенства (6) заключаетъ пять различныхъ уравненій, то, на основаніи послѣднихъ, всѣ перемѣнныя x, y, z, p, q получаютъ вполнѣ опредѣленныя постоянныя значенія. Оставляя послѣдній случай безъ разсмотрѣнія, какъ не представляющій интереса, займемся изслѣдованіемъ рѣшеній равенства (6), образованныхъ системой четырехъ различныхъ уравненій. Результатъ исключенія изъ нихъ перемѣнныхъ величинъ p и q даетъ, по меньшей мѣрѣ, двѣ зависимости между остальными перемѣнными x, y, z; однако въ различныхъ частныхъ случаяхъ, число послѣднихъ зависимостей можетъ равняться и тремъ. Поэтому опредѣляемыя разсматриваемыми уравненіями *собранія* представляютъ соотвѣтственно системы поверхностныхъ элементовъ, расположенныхъ сплошнымъ образомъ по нѣкоторой кривой линіи или пересѣкающихся въ одной ихъ общей точкѣ. На послѣдующихъ строкахъ мы перейдемъ къ подробному разсмотрѣнію аналитическихъ выраженій всѣхъ указанныхъ собраній поверхностныхъ элементовъ.

4. Какъ слѣдуетъ изъ предыдущихъ разсужденій, собранія поверхностныхъ элементовъ опредѣляются аналитически системой уравненій слѣдующаго вида

$$\left.\begin{aligned} F_i(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0, \\ i = 1,\ 2, \ldots \nu, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

гдѣ ν принимаетъ одно изъ трехъ значеній 3, 4 или 5; при чемъ въ расчетъ принимается равенство (6). Разсматривая подобныя уравненія, мы всегда будемъ разумѣть опредѣленную область измѣненія перемѣнныхъ, внутри которой однѣ изъ разсматриваемыхъ перемѣнныхъ величинъ опредѣляются однозначно черезъ остальныя величины, входящія въ наши уравненія.

Если какая-либо перемѣнная величина получаетъ всѣ возможныя значенія, между предѣлами ея измѣненія, то С. Ли говоритъ, что разсматриваемая перемѣнная имѣетъ ∞, или ∞^1 различныхъ значеній. Если число разсматриваемыхъ перемѣнныхъ величинъ равняется n и онѣ связаны между собой m зависимостями, такъ что всѣ n перемѣнныя величины

являются, внутри нѣкоторой области ихъ измѣненія, функціями только $n-m$ различныхъ перемѣнныхъ величинъ, то наша система перемѣнныхъ величинъ, по обозначенію С. Ли, представляетъ ∞^{n-m} различныхъ значеній.

Въ силу послѣднихъ обозначеній, мы говоримъ, что уравненіе (5) опредѣляетъ систему ∞^4 поверхностныхъ элементовъ.

Аналогичнымъ образомъ собраніе поверхностныхъ элементовъ, выражаемое уравненіями (7), представляетъ $\infty^{5-\nu}$ поверхностныхъ элементовъ, т. е. ∞^2, или ∞^1, или ∞^0 поверхностныхъ элементовъ въ зависимости отъ числа 3, 4 или 5 уравненій (7), при чемъ послѣднему символическому обозначенію ∞^0 соотвѣтствуетъ всего одинъ только опредѣленный поверхностный элементъ.

Начнемъ съ болѣе подробнаго разсмотрѣнія собраній ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемыхъ системой слѣдующихъ трехъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} F_i(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0, \\ i = 1,\ 2,\ 3, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

и равенствомъ (6)-ымъ.

Согласно съ предыдущимъ, возможны три случая, соотвѣтствующіе предположеніямъ, что послѣдняя система уравненій даетъ одну, двѣ или три зависимости между перемѣнными x, y и z, т. е. геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія являются соотвѣтственно, или поверхность, или кривая линія, или точка.

Если предположимъ, что уравненія (8), по исключеніи изъ нихъ перемѣнныхъ p и q, даютъ одну только зависимость между перемѣнными x, y, z, которая выражается равенствомъ

$$z = f\ (x,\ y),$$

т. е. геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія служитъ поверхность, представленная послѣднимъ уравненіемъ, то становится ясно, что наше собраніе поверхностныхъ элементовъ опредѣляется аналитически совокупностью написаннаго уравненія и его двухъ производныхъ уравненій

$$p = \frac{\partial f}{\partial x},\ q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Такимъ образомъ въ разсматриваемой области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ величинъ, уравненія (8) равнозначны послѣднимъ тремъ уравненіямъ, на основаніи которыхъ утождествляется очевидно уравненіе (6)-ое.

Если уравненіе (8), по исключеніи изъ нихъ p и q, представляютъ двѣ зависимости между перемѣнными x, y, z, т. е. геометрическимъ мѣстомъ изслѣдуемаго собранія служитъ кривая линія, которая опредѣляется двумя уравненіями

$$z = \varphi(x),\ y = \psi(x),$$

то третье равенство, къ которому должны приводить уравненія (8) разсматриваемаго собранія поверхностныхъ элементовъ, получается изъ уравненія (6)-го подстановкой въ него значеній

$$dz = \varphi'(x)\,dx,\ dy = \psi'(x)dx.$$

Такъ какъ значеніе dx отлично отъ нуля, то искомое третье уравненіе разсматриваемаго собранія становится

$$\varphi'(x) = p + \psi'(x).q.$$

Наконецъ, если всѣ три уравненія (8) не зависятъ отъ перемѣнныхъ p и q, то соотвѣтствующее собраніе поверхностныхъ элементовъ представляетъ пучекъ поверхностей, пересѣкающихся въ данной точкѣ $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, и уравненія его геометрическаго мѣста, а вмѣстѣ съ тѣмъ и всего собранія, приводятся къ слѣдующему виду

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0.$$

Пусть имѣемъ собраніе ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемое системой (7), въ предположеніи $\nu = 4$, т. е. выражаемое четырмя различными уравненіями слѣдующаго вида

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0, \\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \end{array}\right\} \tag{9}$$

совмѣстно съ равенствомъ (6)-мъ.

Такъ какъ система четырехъ уравненій между пятью перемѣнными величинами x, y, z, p и q даетъ, или двѣ, или три зависимости между первыми тремя изъ этихъ перемѣнныхъ, то геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія можетъ быть кривая линія или точка. Кромѣ того легко убѣдиться, что въ обоихъ разсматриваемыхъ случаяхъ аналитическія выраженія разсматриваемыхъ собраній представляются совокупностью предыдущихъ трехъ уравненій, соотвѣтствующихъ собранію поверхностныхъ элементовъ (8), и одной новой зависимостью между перемѣнными p и q.

Въ самомъ дѣлѣ, начнемъ съ разсмотрѣнія перваго случая, когда геометрическое мѣсто собранія представляетъ кривую линію. Очевидно, что въ этомъ случаѣ, въ разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ, уравненія (9) изслѣдуемаго собранія элементовъ должны приводиться къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{array}{l} z = \varphi(x),\ y = \psi(x), \\ p = \theta(x),\ \ q = \chi(x). \end{array}\right\} \tag{10}$$

Въ силу условія соединенности (6), должно имѣть мѣсто слѣдующее равенство

$$\varphi'(x) = \theta(x) + \psi'(x)\,\chi(x), \tag{11}$$

которое очевидно должно удовлетворяться тождественно, такъ какъ въ противномъ случаѣ послѣднее равенство представляло бы новое уравненіе и изслѣдуемое собраніе элементовъ опредѣлялось бы пятью различными уравненіями, противно первоначальному предположенію. Если же равенство (11) является тождествомъ, то, при помощи его, оба послѣднія уравненія (10) могутъ быть замѣнены двумя новыми эквивалентными имъ уравненіями, которыя составляются слѣдующимъ образомъ. Замѣняя въ тождествѣ (11) функціи $\theta(x)$ и $\chi(x)$ ихъ значеніями p и q, получаемъ равенство

$$\varphi'(x) = p + \psi'(x)\,q,$$

которое мы и возьмемъ въ расчетъ взамѣнъ одного изъ послѣднихъ двухъ уравненій (10). Совокупность полученнаго уравненія съ двумя первыми уравненіями (10) опредѣляетъ собой, какъ выше было указано собраніе ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ котораго служитъ кривая линія.

Что касается четвертаго дополнительнаго уравненія, то здѣсь слѣдуетъ отмѣтить два случая, когда, во-первыхъ, результатъ исключенія x, y, z изъ четырехъ уравненій (10) выражается однимъ равенствомъ, представляющимъ искомое уравненіе

$$p = \varphi(q), \tag{12}$$

и, во-вторыхъ, когда разсматриваемый результатъ исключенія представляется двумя уравненіями, т. е. обѣ величины p и q представляютъ постоянныя значенія:

$$p = a,\ q = b. \tag{13}$$

Въ первомъ предположеніи уравненію (12)-му соотвѣтствуетъ коническій пучекъ направленій p, q, -1 въ точкѣ $(x,\ y,\ z)$, который, совмѣстно съ первыми тремя уравненіями нашего собранія, опредѣляетъ единственный вполнѣ опредѣленный поверхностный элементъ въ каждой точкѣ кривой, представляющей геометрическое мѣсто разсматриваемаго собранія. Поэтому послѣднее представляется геометрически въ видѣ собраиія элементовъ, расположенныхъ на полосѣ, или лентѣ, вьющейся вдоль кривой линіи геометрическаго мѣста собранія.

Во второмъ предположеніи, въ силу равенствъ (13), тождество (11) принимаетъ видъ

$$\varphi'(x) = a + b\psi'(x)$$

и, благодаря интегрированію по x, даетъ слѣдующую зависимость между функціями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\varphi(x) = ax + b\psi(x) + c,$$

гдѣ c — новая произвольная постоянная величина. Поэтому уравненія геометрическаго мѣста разсматриваемаго собранія приводятся къ виду

$$z = ax + by + c, \quad y = \psi(x),$$

и представляютъ плоскую кривую. Слѣдовательно, разсматриваемое собраніе въ настоящемъ случаѣ представляется геометрически въ видѣ собранія элементовъ, расположенныхъ на плоской полосѣ, или лентѣ, расположенной вдоль геометрическаго мѣста собранія и въ его плоскости.

Такимъ образомъ различие обоихъ собраній ∞^1 и ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ служитъ кривая линія, состоитъ въ томъ, что первое собраніе представляется геометрической полосой, вьющейся вдоль послѣдней кривой, тогда какъ второе собраніе представляется пучкомъ безконечнаго числа такихъ полосъ, вьющихся вдоль кривой геометрическаго мѣста и произвольно переплетающихся между собой.

Наконецъ, если уравненія (9) даютъ, по исключеніи величинъ p и q, три зависимости между перемѣнными x, y, z, то изслѣдуемое собраніе представляетъ пучекъ поверхностныхъ элементовъ, пересѣкающихся въ одной общей точкѣ (x_0, y_0, z_0). Само собою разумѣется, что въ такомъ случаѣ равенства (9) приводятся къ слѣдующимъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} x = x_0, \; y = y_0, \; z = z_0, \\ p = \varphi(q). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Стало-быть и здѣсь разсматриваемое собраніе отличается также отъ соотвѣтствующаго собранія ∞^2 поверхностныхъ элементовъ послѣдней зависимостью между перемѣнными p и q. Какъ и выше легко видѣть, что, благодаря послѣдней зависимости, разсматриваемое собраніе выдѣляетъ изъ всѣхъ поверхностныхъ элементовъ, пересѣкающихся въ точкѣ

(x_0, y_0, z_0), только тѣ элементы, которые касаются конуса, опредѣляемаго послѣднимъ уравненіемъ (14); въ предѣльномъ случаѣ разсматриваемое собраніе приводится къ системѣ элементовъ, которые пересѣкаются между собой вдоль одной и той же прямой линіи.

Предыдущія формулы указываютъ, что *уравненія каждаго изъ собраній ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, т. е. и самыя собранія, опредѣляются вполнѣ уравненіями своего геометрическаго мѣста.*

Что же касается уравненій *собраній ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, то для ихъ опредѣленія необходимо прибавить къ уравненіямъ ихъ геометрическаго мѣста еще одно характеризующее данное собраніе равенство, устанавливающее зависимость между перемѣнными p и q.*

Всѣ приведенныя разсужденій и вычисленія показываютъ, къ какому частному виду должны преобразовываться написанныя нами въ общемъ видѣ уравненія (7) для того, чтобы опредѣлять собой собранія поверхностныхъ элементовъ того или другого рода. Весьма частный видъ, къ которому приводятся послѣднія уравненія, показываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что функціи F_i должны удовлетворять для этого особаго вида условіямъ.

Кромѣ приведенныхъ выше условныхъ обозначеній С. Ли ввелъ, для обозначенія собраній элементовъ, символы M_n^m съ двумя значками, указывающими соотвѣтственно: нижній—порядокъ собранія, т. е. порядокъ безконечности поверхностныхъ элементовъ, а верхній—порядокъ геометрическаго мѣста разсматриваемаго собранія.

Поэтому условныя обозначенія

$$M_2^2, \; M_2^1, \; M_2^0$$

представляютъ собранія ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ соотвѣтственно служатъ поверхность, кривая линія и точка.

Такимъ же образомъ символы

$$M_1^1, \; M_1^0$$

обозначаютъ собранія ∞^1 поверхностныхъ элементовъ съ геометрическими мѣстами, представляющими соотвѣтственно кривую линію и точку.

Наконецъ, условимся подъ обозначеніемъ

$$M_0^0$$

разумѣть собраніе, представленное одной только точкой и построенной въ ней одной опредѣленной плоскостью, которое аналитически выражается совокупностью пяти уравненій между разсматриваемыми пятью перемѣнными величинами (4).

5. Изложенное выше ученіе, относительно геометріи поверхностиыхъ элементовъ и ихъ собраній въ пространствѣ трехъ измѣреній, легко распространяется на обобщенныя понятія о пространствѣ многихъ измѣреній, число которыхъ больше трехъ.

Условимся называть совокупность значеній $2n+1$ перемѣнныхъ величинъ

$$x_1,\ x_2, \ldots\ x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots\ p_n \tag{15}$$

поверхностнымъ элементомъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній.

Совокупность значеній поверхностныхъ элементовъ, связанныхъ между собой какими-либо условіями, или уравненіями называется *системой поверхностныхъ элементовъ.*

Два поверхностныхъ элемента, напримѣръ, данный (15)-ый и безконечно близко расположенный съ нимъ элементъ

$$x_1+dx_1,\ x_2+dx_2, \ldots x_n+dx_n,\ z+dz,\ p_1+dp_1, \ldots p_n+dp_n$$

называются *соединенными*, если имѣетъ мѣсто слѣдующая зависимость

$$dz=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\ldots+p_n\,dx_n. \tag{16}$$

Наконецъ, система поверхностныхъ элементовъ, находящихся въ соединеніи со всѣми безконечно-близко расположенными съ ними элементами, т. е. удовлетворяющихъ равенству (16)-му, называется *собраніемъ поверхностныхъ элементовъ.*

Мы называемъ *рѣшеніемъ* равенства (16) конечныя функціональныя зависимости между перемѣнными (15), которыя, совмѣстно со своими производными уравненіями, отождествляютъ равенство (16).

Составляя рѣшеія послѣднго равенства, легко вывести уравненія, представляющія аналитическое выраженіе всѣхъ возможныхъ собраній поверхностныхъ элементовъ въ разсматриваемомъ пространствѣ $n+1$ измѣреній,

Замѣтимъ прежде всего, что существованіе равенства (16) приводитъ къ существованію, по меньшей мѣрѣ, одной функціональной зависимости, выражающей значеніе перемѣнной z въ видѣ функціи перемѣнныхъ $x_1,\ x_2, \ldots x_n$ слѣдующаго вида [1])

$$z=\varphi\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n). \tag{17}$$

[1]) Ср. Lie-Engel.—Theorie der Transformationsgruppen, zweiter Abschnitt, S.S. 42, 78. M. Elie Cartan.—Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1899).

Чтобы, на основаніи послѣдняго равенства, уравненіе (16) удовлетворялось тождественно, для этого должны имѣть мѣсто еще n слѣдующихъ уравненій

$$p_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\ i=1,\ 2, \ldots n, \tag{18}$$

которыя совмѣстно съ предыдущимъ уравненіемъ представляютъ рѣшеніе равенства (16).

Возможно сдѣлать еще другое предположеніе, что равенство (16) влечетъ существованіе между перемѣнными $z,\ x_1,\ x_2, \ldots x_n$, нѣсколькихъ зависимостей, число которыхъ обозначимъ черезъ $q+1$. Послѣднія всегда разрѣшимы относительно перемѣнной z и какихъ-либо q изъ остальныхъ перемѣнныхъ $x_1,\ x_2, \ldots x_n$. Не нарушая общности разсужденій, всегда можемъ представить разсматриваемыя равенства въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &z=\varphi\,(x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q}),\\ &x_{n-q+i}=\varphi_i\,(x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q}),\\ &\qquad i=1,\ 2, \ldots n-q, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Если существуетъ рѣшеніе равенства (16), которое заключаетъ эти уравненія, то подставляя послѣднія значенія $z,\ x_{n-q+1},\ x_{n-q+2}, \ldots x_n$ въ равенство (16), заключаемъ о непремѣнномъ существованіи еще $n-k$ слѣдующихъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} &p_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}p_{n-q+i},\\ &\qquad k=1,\ 2, \ldots n-q, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

которыя, совмѣстно съ предыдущими $q+1$ уравненіями (19), представляютъ рѣшеніе равенства (16).

Такъ какъ формулы (17), (18) заключаются въ послѣдиихъ формулахъ какъ частный случай, соотвѣтствующій предположенію $q=0$, то уравненія (19)—(20) мы будемъ разсматривать какъ представляющія общій видъ рѣшеній равенства (16)-аго.

С. Ли представляетъ уравненія (19)—(20) въ слѣдующемъ изящномъ видѣ. Вводя обозначеніе

$$H\equiv\sum_{i=1}^{q}\varphi_i p_{n-q+i}-\varphi,$$

напишемъ равенства (19)—(20) слѣдующимъ образомъ

$$z=\sum_{i=1}^{q}\varphi_i p_{n-q+i}-H,$$

$$x_{n-q+i}=\frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}},\quad p_\kappa=-\frac{\partial H}{\partial x_\kappa},$$

$$i=1,2,\ldots q,\quad k=1,2,\ldots n-q.$$

Кромѣ указанныхъ рѣшеній равенства (16)-аго, представленныхъ совокупностью $n+1$ уравненій, легко составить новыя рѣшенія, съ большимъ числомъ уравненій, присоединяя къ предыдущимъ еще новыя уравненія, алгебраически совмѣстныя съ ними.

На предыдущихъ формулахъ основывается аналитическое представленіе геометрическихъ собраній поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній.

Начнемъ съ предположенія, что разсматриваемое собраніе выражается совокупностью $n+1$ различныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} F_i\ (x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\ldots p_n)=0 \\ i=1,2,\ldots n+1, \end{array}\right\} \qquad (21)$$

которыя представляютъ рѣшеніе равенства (16). Каждое его рѣшеніе, на основаніи сказаннаго выше, заключаетъ по меньшей мѣрѣ одну зависимость между перемѣнными $z,\ x_1,\ x_2,\ldots x_n$. *Пусть уравненія (21) разсматриваемаго собранія заключаютъ $q+1$ послѣднихъ зависимостей.* Предположимъ далѣе, что, въ нѣкоторой области измѣненія перемѣнныхъ, уравненія (21) приводятъ къ—(19)-ымъ; въ такомъ случаѣ очевидно, что остальныя уравненія (21) должны приводиться къ виду (20)-ому, и для этого функціи F_i должны удовлетворять особымъ условіямъ.

Соотвѣтственно числу зависимостей между перемѣнными $x_1,\ x_2,\ldots x_n$, которыя въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными считаются независимыми, мы будемъ подраздѣлять разсматриваемыя собранія поверхностныхъ элементовъ на *классы*, относя послѣднее собраніе (21) къ *q-ому классу*, по числу q уравненій, представленныхъ формулами (19).

Такъ, напримѣръ, въ пространствѣ трехъ измѣреній мы разсматривали собранія поверхностныхъ элементовъ трехъ различныхъ классовъ: *нулевого, перваго и второго.* Къ *нулевому* классу, въ пространствѣ трехъ измѣреній, относятся собранія поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ является поверхность; наконецъ, къ *первому* и

второму классамъ, въ томъ же пространствѣ трехъ измѣреній, относятся собранія, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ служатъ соотвѣтственно кривая линія или точка.

Уравненія (19)-ыя мы условимся называть *геометрическимъ мѣстомъ* даннаго собранія поверхностныхъ элементовъ.

Отсюда легко видѣть, что *собраніе поверхностныхъ элементовъ, представленное въ пространствѣ $n+1$ измѣреній аналитически, при помощи такого же числа уравненій, вполнѣ опредѣляется своимъ геометрическимъ мѣстомъ, такъ что, при опредѣленіи такого собранія, совершенно достаточно задать его геометрическое мѣсто.*

Предположимъ далѣе, что мы имѣемъ дѣло съ собраніемъ поверхностныхъ элементовъ, представленнымъ системой $n+v+1$ различныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} F_s\ (x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\ldots p_n)=0, \\ s=1,\ 2,\ldots n+v+1,\ (v\leq n), \end{array}\right\} \qquad (22)$$

которыя должны опредѣлять рѣшеніе уравненія (16)-аго. При этомъ, если $v=n$, т. е. число уравненій (22) равно $2n+1$, то очевидно, что разсматриваемое собраніе приводится всего къ одному опредѣленному поверхностному элементу, занимающему опредѣленное положеніе и направленіе въ разсматриваемомъ пространствѣ $n+1$ измѣреній.

Само собою разумѣется, что уравненія (22), по исключеніи всѣхъ n перемѣнныхъ $p_1,\ p_2,\ldots p_n$, даютъ, по меньшей мѣрѣ, $v+1$ зависимостей между остальными перемѣнными. Предположимъ, для общности разсужденій, что система (22) приводитъ къ $\mu+1$ $(\mu>v)$ зависимостямъ между перемѣнными $z,\ x_1,\ x_2,\ldots x_n$, которыя представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{array}{c} z=\varphi\ (x_1,\ x_2,\ldots x_{n-\mu}), \\ x_{n-\mu+i}=\varphi_i\ (x_1,\ x_2,\ldots x_{n-\mu}), \\ i=1,2,\ldots\mu. \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Какъ указано выше, при разсмотрѣніи рѣшеній уравненія (16)-аго, существованіе $\mu+1$ послѣднихъ уравненій влечетъ за собой существованіе также слѣдующихъ равенствъ

$$\left.\begin{array}{c} p_\kappa=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\kappa}-\sum\limits_{i=1}^{\mu}\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_\kappa}p_{n-\mu+i}, \\ k=1,2,\ldots n-\mu. \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Поэтому система данныхъ уравненій (22) разсматриваемаго собранія *должна составляться изъ $n+1$ послѣднихъ уравненій (23)—(24), опредѣляющихъ собраніе поверхностныхъ элементовъ μ-аго класса, и кромѣ того изъ дополнительныхъ v уравненій, опредѣляющихъ частный характеръ разсматриваемаго собранія и выдѣляющихъ его такимъ образомъ изъ общаго вида собраній μ-аго класса.*

Распространяя прежнія обозначенія на разсматриваемое пространство $n+1$ измѣреній, можемъ сказать, что совокупность уравненій (19)—(20) опредѣляетъ собраніе ∞^n поверхностныхъ элементовъ, которое выражается условнымъ символомъ

$$M_n^q,$$

гдѣ показатель n обозначаетъ порядокъ собранія, а q—классъ его геометрическаго мѣста. Такимъ же образомъ уравненія (22) опредѣляютъ собраніе ∞^{n-v} поверхностныхъ элементовъ, обозначаемое условнымъ символомъ

$$M_{n-v}^{\mu}.$$

Послѣднія условныя обозначенія вполнѣ достаточны, чтобы, при помощи ихъ, возстановить общій видъ уравненій, представляющихъ аналитически разсматриваемыя собранія поверхностныхъ элементовъ.

6. Приведенныя опредѣленія позволяютъ составить понятіе о производныхъ уравненіяхъ С. Ли, ученіе о которыхъ представляетъ развитіе классической теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Начнемъ съ разсмотрѣнія пространства трехъ измѣреній.

Пусть уравненія, представляющія аналитическое выраженіе какого-либо собранія поверхностныхъ элементовъ, заключаютъ нѣсколько различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, число которыхъ меньше числа уравненій разсматриваемаго собранія. Исключивъ изъ послѣднихъ входящія въ нихъ постоянныя величины, получаемъ между перемѣнными x, y, z, p, q новыя зависимости, которыя мы и будемъ въ послѣдующемъ изложеніи называть *производными уравненіями С. Ли.*

Если мы имѣемъ собраніе поверхностныхъ элементовъ M_2^2, геометрическое мѣсто котораго представляется уравненіемъ семейства поверхностей, зависящимъ отъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, то соотвѣтствующее производное уравненіе С. Ли представляетъ ничто иное какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, которое получается исключеніемъ обоихъ параметровъ изъ даннаго уравненія поверхности и его двухъ частныхъ производныхъ уравненій перваго порядка. Эти послѣднія дифференціальныя уравненія мы изучали

выше, въ началѣ настоящей главы, и поэтому нѣтъ надобности больше на нихъ останавливаться.

Переходимъ къ разсмотрѣнію собранія поверхностныхъ элементовъ M_2^1. Пусть уравненія его геометрическаго мѣста заключаютъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины a, b и представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi\,(x,\ a,\ b), \\ y &= \psi\,(x,\ a,\ b). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Присоединяемъ къ послѣднимъ двумъ уравненіямъ третье равенство, которое вмѣстѣ съ предыдущими опредѣляетъ разсматриваемое собраніе

$$\varphi'\,(x,\ a,\ b) = p + \psi'\,(x,\ a,\ b)\ q. \tag{26}$$

Предположимъ, что результатъ исключенія параметровъ a и b изъ послѣднихъ трехъ равенствъ выражается однимъ уравненіемъ, которое въ общемъ видѣ напишется слѣдующимъ образомъ

$$F\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0,$$

и представляетъ такимъ образомъ *производное уравненіе С. Ли.*

Остановимся подробнѣе на тѣхъ значеніяхъ, которыя имѣетъ функція F въ обоихъ случаяхъ, исчерпывающихъ всѣ возможныя предположенія, соотвѣтствующія условіямъ, когда уравненія геометрическаго мѣста (25) разрѣшаются относительно постоянныхъ a и b, или не разрѣшимы относительно послѣднихъ. Въ первомъ предположеніи, внося изъ равенствъ (25) полученныя значенія a, b въ уравненіе (26), мы приходимъ къ производному уравненію С. Ли, которое въ настоящемъ случаѣ является линейнымъ уравненіемъ относительно перемѣнныхъ p и q слѣдующаго вида

$$Pp + Qq = R,$$

гдѣ P, Q и R представляютъ функціи перемѣнныхъ x, y и z. Во второмъ предположеніи параметры a и b исключаются изъ уравненій (25). Такъ какъ, въ силу первоначально поставленнаго условія, результатъ исключенія a и b изъ уравненій (25)—(26) долженъ представляться однимъ уравненіемъ, то, исключивъ a и b изъ системы (25)-ой, получимъ результатъ послѣдняго исключенія въ видѣ одной зависимости между перемѣнными x, y, z слѣдующаго вида

$$F\,(x,\ y,\ z) = 0,$$

къ которой вмѣстѣ съ тѣмъ приводится въ данномъ случаѣ разсматриваемое производное уравненіе С. Ли. Такимъ образомъ семейства изслѣдуемыхъ собраній M_2^1, зависящихъ отъ двухъ параметровъ, приводятъ къ производнымъ уравненіямъ С. Ли, которыя, или линейны относительно перемѣнныхъ p и q, или не зависятъ отъ нихъ.

Такъ, напримѣръ, пусть имѣемъ систему двухъ уравненій

$$z = ax + b,$$

$$y = bx.$$

Дополнительное уравненіе собранія поверхностныхъ элементовъ, соотвѣтствующее написанному геометрическому мѣсту, въ настоящемъ частномъ случаѣ становится

$$a = p + bq.$$

Подставляя въ послѣднее равенство значенія a и b, опредѣляемыя первыми двумя уравненіями, получаемъ искомое производное уравненіе С. Ли въ слѣдующемъ видѣ

$$p + \frac{y}{x} q = \frac{xz - y}{x^2},$$

или

$$x\ (xp + yq) + y = xz.$$

Для второго примѣра, возьмемъ геометрическое мѣсто собранія M_2^1, представленное системой уравненій

$$z = ax + b,$$

$$y = (ax + b)^2 + 2x.$$

Очевидно, что соотвѣтствующее производное уравненіе С. Ли представляетъ зависимость только между перемѣнными x, y, z въ слѣдующемъ видѣ

$$y = 2x + z^2.$$

Разсмотримъ, наконецъ, собраніе поверхностныхъ элементовъ M_2^0, уравненія геометрическаго мѣста котораго зависятъ также отъ двухъ параметровъ a и b

$$z = \varphi\ (a,\ b),$$

$$y = \psi\ (a,\ b),$$

$$x = \Theta\ (a,\ b),$$

при чемъ результатъ исключенія параметровъ изъ послѣднихъ уравненій приводитъ къ одной зависимости между разсматриваемыми перемѣнными. Само собою разумѣется, что въ этомъ случаѣ, производное уравненіе С. Ли представляетъ также зависимость только между перемѣнными x, y и z.

Если бы уравненія геометрическихъ мѣстъ изслѣдуемыхъ собраній, во всѣхъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ, заключали всего одинъ произвольный постоянный параметръ, то результатъ исключенія послѣдняго изъ уравненій собранія представлялъ бы систему двухъ производныхъ уравненій С. Ли.

Переходя къ собраніямъ ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, легко видѣть что представляющія его четыре уравненія могутъ зависѣть отъ трехъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ. Результатъ исключенія послѣднихъ приводитъ къ одному производному уравненію С. Ли. Если уравненія разсматриваемыхъ собраній заключаютъ два различныхъ или одинъ постоянный параметръ, то соотвѣтствующія производныя уравненія С. Ли представляютъ систему двухъ или трехъ совокупныхъ уравненій.

Наконецъ, если уравненія собранія M_0^0 заключаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины, то исключеніе ихъ приводитъ также къ одному производному уравненію С. Ли. Если число произвольныхъ постоянныхъ, въ уравненіяхъ разсматриваемаго собранія, меньше четырехъ, то результатъ ихъ исключенія изъ уравненій собранія приводитъ къ системѣ совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію производныхъ уравненій С. Ли въ пространствѣ $n+1$ измѣреній. Пусть имѣемъ собраніе поверхностныхъ элементовъ M_n^q, которое опредѣляется вполнѣ своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Предположимъ, что уравненія его заключаютъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ C_1, $C_2, \ldots C_{n-m+1}$ и представляются слѣдующимъ образомъ

$$z = \varphi\ (x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \ldots C_{n-m+1}),$$

$$x_{n-q+i} = \varphi_i\ (x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \ldots C_{n-m+1}),$$

$$i = 1,\ 2, \ldots q.$$

Составляемъ дополнительныя уравненія, которыя, совмѣстно съ послѣдними равенствами, выражаютъ аналитически разсматриваемое собраніе и имѣютъ, стало-быть, слѣдующій видъ

$$p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i-1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$

$$k = 1,\ 2, \ldots n-q.$$

Написанныя равенства вмѣстѣ съ $q+1$ предыдущими образуютъ систему $n+1$ уравненій. Предположимъ, что результатъ исключенія изъ нихъ всѣхъ параметровъ $C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}$ представляется совокупностью m уравненій слѣдующаго вида

$$F_i\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n) = 0,$$
$$i = 1,\ 2, \ldots m.$$

Полученныя такимъ образомъ уравненія, черезъ исключеніе произвольныхъ постоянныхъ параметровъ изъ функціональныхъ уравненій, опредѣляющихъ собраніе поверхностныхъ элементовъ, представляютъ *производныя* уравненія С. Ли.

Легко видѣть, что уравненія съ частными производными перваго порядка одной функціи классической теоріи представляютъ частный случай послѣдиихъ производныхъ уравненій, соотвѣтствующій тому предположенію, что геометрическое мѣсто разсматриваемаго собранія, принадлежитъ къ *нулевому* классу, т. е. представляетъ уравненіе семейства поверхностей въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, зависящее отъ $n - m + 1$ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Мы разсматривали до сихъ поръ собранія поверхностныхъ элементовъ типа M_n^q, опредѣляемыхъ своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Предположимъ теперь, что мы имѣемъ дѣло съ собраніями вида M_{n-v}^{μ}, гдѣ $v \leq n$, при чемъ уравненія, опредѣляющія аналитически послѣднее собраніе, зависятъ отъ нѣсколькихъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, число которыхъ должно удовлетворять единственному условію, быть меньше числа данныхъ уравненій разсматриваемаго собранія. Результатъ исключенія послѣднихъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, изъ уравненій разсматриваемаго собранія, представляетъ также *производныя уравненія С. Ли.*

Пусть имѣемъ, напримѣръ, слѣдующее геометрическое мѣсто собранія поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ четырехъ измѣреній, зависящее отъ трехъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ C_1, C_2, C_3,

$$z = (C_1\ x_1 + C_2)\ x_2 + C_3,$$
$$x_3 = C_1\ x_1\ x_2 + C_2.$$

Составляемъ слѣдующія два дополнительныя уравненія разсматриваемаго собранія

$$p_1 = C_1\ x_2 - C_1\ x_2\ p_3,$$
$$p_2 = C_1\ x_1 + C_2 - C_1\ x_1\ p_3.$$

Результатъ исключенія всѣхъ трехъ постоянныхъ величинъ C_1, C_2, C_3 изъ написанныхъ четырехъ уравненій приводитъ къ слѣдующему производному уравненію С. Ли

$$(1 - p_3)\ (x_2\ x_3 + x_1\ p_1 - x_2\ p_2) = x_1\ x_2\ p_1.$$

Для второго примѣра, возьмемъ собраніе поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ четырехъ измѣреній, зависящее отъ четырехъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ C_1, C_2, C_3, C_4, опредѣляемое геометрическимъ мѣстомъ

$$z = (C_1\ x_1 + C_2)\ x_2 + C_4,$$
$$x_3 = C_2\ x_1 + C_3$$

и слѣдующимъ дополнительнымъ равенствомъ

$$C_1\ C_2\ (x_2 + x_1\ p_3)^2 = C_4\ x_3.$$

Составляя оба дополнительныя уравненія собранія

$$p_1 = C_1\ x_2 - C_2\ p_3,$$
$$p_2 = C_1\ x_1 + C_2,$$

получаемъ въ результатѣ совокупность пяти уравненій. Исключая изъ нихъ всѣ четыре произвольныхъ постоянныхъ параметра, приходимъ къ искомому производному уравненію С. Ли

$$x_3\ (z - x_2\ p_2) + (x_1\ p_1 - x_2\ p_2)\ (p_1 + p_2\ p_3) = 0.$$

7. Мы занимались до сихъ поръ изученіемъ понятій о собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ, разсматривали ихъ аналитическія выраженія и составляли производныя уравненія С. Ли, соотвѣтствующія семействамъ собраній поверхностныхъ элементовъ, уравненія которыхъ зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Подобно тому какъ относительно дифференціальныхъ уравненій рѣшается задача объ ихъ интегрированіи, такъ совершенно аналогично въ теоріи С. Ли, изслѣдуемой на этихъ страницахъ, рѣшается слѣдующій вопросъ:

Даны производныя уравненія С. Ли; задача состоитъ въ составленіи соотвѣтствующихъ имъ функціональныхъ уравненій собраній поверхностныхъ элементовъ.

Пользуясь терминологіей теоріи дифференціальныхъ уравненій, мы называемъ рѣшеніе послѣдняго вопроса *задачей интегрированія производныхъ уравненій С. Ли.*

Начнемъ съ разсмотрѣнія производнаго уравненія С. Ли.

$$F\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0, \tag{27}$$

опредѣляющаго систему ∞^4 поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ трехъ измѣреній.

Если послѣднее уравненіе утождествляется, въ силу уравненій какого либо собранія элементовъ, то послѣднее называется *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ* (Integralgebilde) даннаго производнаго уравненія С. Ли (27)-го.

Если послѣднее рѣшеніе заключаетъ произвольныя постоянныя величины, результатъ исключенія которыхъ изъ этихъ уравненій представляетъ одно данное уравненіе (27), то мы будемъ называть такое рѣшеніе *полнымъ интегральнымъ собраніемъ* уравненія (27)-го.

Изъ предыдущихъ соображеній, относительно способа образованія производныхъ уравненій С. Ли, становится очевиднымъ, что полныя интегральныя собранія ∞^2 поверхностныхъ элементовъ уравненія (27) должны зависѣть отъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ; полныя интегральныя собранія ∞^1 элементовъ уравненій (27) заключаютъ три произвольныхъ постоянныхъ параметра; наконецъ, для того же уравненія (27) полное интегральное собраніе типа M_0^0 должно заключать четыре произвольныхъ постоянныхъ параметра. Изъ послѣднихъ полныхъ интегральныхъ собраній всѣ собранія типа M_2, т. е. составленныя изъ ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, мы условимся называть *полными интегральными собраніями С. Ли*, а ихъ геометрическія мѣста—*полными интегралами С. Ли* производнаго уравненія (27). Остальныя полныя интегральныя собранія типовъ M_1 и M_0, т. е. составленныя соотвѣтственно изъ ∞^1 и ∞^0 поверхностныхъ элементовъ, будемъ называть *полными интегральными собраніями Беклунда,* который первый сталъ заниматься ихъ изслѣдованіемъ [1]).

Порядокъ безконечности поверхностныхъ элементовъ трехъ разсматриваемыхъ типовъ полныхъ интегральныхъ собраній выражается соотвѣтственно числами

$$2,\ 1,\ 0;$$

вмѣстѣ съ тѣмъ произвольныя постоянныя входятъ въ нихъ соотвѣтственно въ числѣ

$$2,\ 3,\ 4.$$

Слѣдовательно, уравненія разсматриваемыхъ собраній зависятъ соотвѣтственно отъ

$$7,\ 8,\ 9$$

---

[1]) *Bäcklund*, A, V.—Ueber systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen, Bd. 11, S. 412—433).

E. v. Weber,—Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig. 1900. S. 598.

различныхъ величинъ, изъ которыхъ первыя пять являются перемѣнными x, y, z, p, q, а остальныя представляютъ произвольные постоянные параметры.

Поэтому, по отношенію къ данному производному уравненію (27), каждое изъ указанныхъ его полныхъ интегральныхъ собраній всѣхъ типовъ M_2, M_1, M_0 опредѣляетъ ∞^4 значеній всѣхъ входящихъ въ нихъ величинъ какъ перемѣнныхъ такъ и произвольныхъ постоянныхъ, разсматриваемыхъ совмѣстно. Такимъ образомъ задача розысканія указанныхъ полныхъ интегральныхъ собраній даннаго производнаго уравненія (27) приводится, по терминологіи С. Ли, къ *составленію изъ системы ∞^4 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемой равенствомъ (27)-ымъ, собраній элементовъ, представляющихъ ∞^4 значеній перемѣнныхъ и произвольныхъ постоянныхъ величинъ.*

Кромѣ понятій о полныхъ интегральныхъ собраніяхъ легко составить также понятія объ *общихъ и особенныхъ рѣшеніяхъ*, или *интегральныхъ собраніяхъ производныхъ уравненій С. Ли*, аналогично теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ послѣднія рѣшенія, измѣняя произвольныя постоянныя въ полныхъ интегральныхъ собраніяхъ, совершенно подобно классической теоріи уравненій съ частными производными [1]).

Пусть имѣемъ, напримѣръ, полное интегральное собраніе изслѣдуемаго уравненія (27) въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi\ (x,\ a,\ b), \\ y &= \psi\ (x,\ a,\ b), \\ p &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\ q. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Предполагаемъ, что параметры a и b измѣняются одновременно съ перемѣнными x, y, z. Дифференцируя въ этомъ предположеніи первыя два уравненія (28), получимъ

$$dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial a} da + \frac{\partial\varphi}{\partial b} db,$$

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial a} da + \frac{\partial\psi}{\partial b} db.$$

---

[1]) См. *Lie—Scheffers.*—Geometrie der Berührungstransformationen. Leipzig. 1896. S.S. 529—535.

Goursat, E.— Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. 1891, p. 234.

На основаніи послѣднихъ равенствъ, принимая во вниманіе третье уравненіе (28), составляемъ равенство

$$dz - pdx - qdy = Ada + Bdb, \tag{29}$$

гдѣ коэффиціенты A и B имѣютъ слѣдующія значенія

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \psi}{\partial a}\, q,$$

$$B = \frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \psi}{\partial b}\, q.$$

Чтобы система (28) не переставала представлять рѣшеніе изслѣдуемаго уравненія (27)-ого также и въ настоящемъ предположеніи, т. е. имѣло мѣсто равенство (6)-ое, для этого очевидно должна уничтожаться тождественно вторая часть равенства (29) и должно имѣть мѣсто равенство

$$Ada + Bdb = 0. \tag{30}$$

Послѣднее имѣетъ три слѣдующихъ различныхъ рѣшенія, которымъ соотвѣтствуютъ также различныя *рѣшенія* изслѣдуемаго уравненія (27)-ого:

1) Полагая

$$da = 0,\ db = 0,$$

т. е. давая a и b постоянныя значенія, мы получаемъ исходное *полное интегральное собраніе,* представленное системой уравненій (28).

2) Предполагая, что имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$A = 0,\ B = 0,$$

мы представляемъ рѣшеніе уравненія (27)-ого совокупностью равенствъ (28) и двухъ слѣдующихъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \psi}{\partial a}\, q = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \psi}{\partial b}\, q = 0.$$

Результатъ исключенія изъ нихъ параметровъ a и b представляетъ *особенное интегральное собраніе* производнаго уравненія (27).

3) Наконецъ, если a и b связаны произвольной зависимостью

$$a = \omega\ (b), \tag{31}$$

гдѣ ω представляетъ произвольную функцію, то уравненіе (30) удовлетворяется, на основаніи слѣдующаго равенства

$$A + B\ \omega'\ (b) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\,\omega' - \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial b}\,\omega'\right)\, q = 0, \tag{32}$$

гдѣ ω' обозначаетъ производную функцію ω, взятую по перемѣнной b. Результатъ исключенія параметровъ a и b изъ совокупности уравненій (28), (31), (32) представляетъ, относительно производнаго уравненія (27), *общее интегральное собраніе*, зависящее отъ одной произвольной функціи ω.

Интегральныя собранія трехъ указанныхъ родовъ получаются изъ каждаго полнаго интегральнаго собранія всѣхъ разсмотрѣнныхъ нами типовъ.

Наконецъ, давая какія-либо частныя значенія произвольнымъ постояннымъ или произвольнымъ функціямъ, входящимъ въ полныя или общія интегральныя собранія, мы получаемъ еще такъ называемыя *частныя интегральныя собранія* даннаго производнаго уравненія (27).

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію производныхъ уравненій въ пространствѣ $n+1$ измѣреній. Пусть имѣемъ одно производное уравненіе С. Ли

$$F\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n) = 0 \tag{33}$$

опредѣляющее систему ∞^{2n} поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній.

Если уравненіе (33) утождествляется, на основаніи уравненій какого-либо собранія поверхностныхъ элементовъ, то послѣднее называется *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ* даннаго производнаго уравненія С. Ли.

Рѣшеніе уравненія (33), зависящее отъ нѣсколькихъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, результатъ исключенія которыхъ изъ уравненій рѣшенія приводитъ къ одному только данному производному уравненію С. Ли (33), называется его *полнымъ рѣшеніемъ*, или *полнымъ интегральнымъ собраніемъ*.

Такъ какъ наименьшее число различныхъ уравненій, представляющихъ собраніе элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, равно $n+1$, то становится очевиднымъ, что число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ полнаго интегральнаго собранія даннаго производнаго уравненія (33) не можетъ быть меньше числа n. При этомъ мы будемъ различать два случая, когда послѣднее число равно n и больше него.

Если число произвольныхъ постоянныхъ величинъ полнаго рѣшенія уравненія (33) равняется n, то мы условимся называть послѣднее рѣшеніе *полнымъ интегральнымъ собраніемъ С. Ли* даннаго производнаго уравненія (33); если же число произвольныхъ постоянныхъ величинъ больше n, то разсматриваемое рѣшеніе будемъ называть *полнымъ интегральнымъ собраніемъ Беклунда*.

Наконецъ, какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго, полное интегральное собраніе С. Ли вполнѣ опредѣляется своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Мы условимся называть послѣднее *полнымъ интеграломъ С. Ли* даннаго производнаго уравненія (33) и различать эти полные интегралы по классамъ, соотвѣтственно классу представляемаго ими геометрическаго мѣста интегральнаго собранія даннаго производнаго уравненія.

Само собою разумѣется, что полный интегралъ С. Ли нулевого класса представляетъ ничто иное какъ полный интегралъ Лагранжа, по отношенію къ данному уравненію (33), разсматриваемому какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка p_1, $p_2, \dots p_n$ неизвѣстной функціи z соотвѣтственно по независимымъ перемѣннымъ x_1, $x_2, \dots x_n$. Въ этомъ случаѣ соотвѣтствующее полное интегральное собраніе представляется очевидно даннымъ полнымъ интеграломъ Лагранжа и его n производными дифференціальными уравненіями перваго порядка, составленными по правиламъ дифференціальнаго исчисленія.

Наконецъ, приведенныя понятія и опредѣленія распространяются безъ труда на системы совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ систему m послѣднихъ уравненій

$$\left. F_s\,(x_1,\, x_2, \dots x_n,\, z,\, p_1,\, p_2, \dots p_n) = 0\,, \quad s = 1, 2, \dots m. \right\} \tag{34}$$

Уравненія собранія поверхностныхъ элементовъ, утождествляющія данныя производныя уравненія (34), называются ихъ *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ*.

Рѣшеніе системы данныхъ уравненій (34), заключающее нѣсколько различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, результатъ исключенія которыхъ изъ уравненій рѣшенія приводитъ только къ данной системѣ (34), называется ея *полнымъ рѣшеніемъ*, или *полнымъ интегральнымъ собраніемъ*.

Наименьшее число различныхъ уравненій собранія поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній равно послѣднему числу $n+1$. Поэтому, если уравненія (34) сами по себѣ образуютъ систему совокупныхъ уравненій, то наименьшее число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ ихъ полнаго интегральнаго собранія должно равняться $n-m+1$. Если же уравненія (34) не представляютъ системы совокупныхъ уравненій, т. е. не совмѣстимы и не имѣютъ рѣшенія, но однако приводятся къ системѣ совмѣстныхъ совокупныхъ уравненій прибавленіемъ нѣкотораго числа k новыхъ производныхъ уравненій С. Ли, то въ такомъ случаѣ наименьшее число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ полнаго интегральнаго собранія равно $n-m-k+1$.

Въ обоихъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ указанныя полныя интегральныя собранія принадлежатъ одному и тому же типу собраній элементовъ

$$M_n,$$

которыя мы будемъ называть *полными интегральными собраніями* С. Ли. Каждое изъ нихъ вполнѣ опредѣляется уравненіями своего геометрическаго мѣста; послѣднее мы условимся называть *полнымъ интеграломъ С. Ли* данныхъ производныхъ уравненій.

Что касается всѣхъ остальныхъ полныхъ интегральныхъ собраній, въ которыхъ число произвольныхъ постоянныхъ больше указаннаго выше минимальнаго, то мы будемъ называть ихъ *полными интегральными собраніями Беклунда*. Если изслѣдуемыя уравненія (34) совмѣстны, то послѣднія полныя рѣшенія зависятъ отъ $n-m+v+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ и представляются собраніями поверхностныхъ элементовъ вида

$$M_{n-v}, \tag{35}$$

гдѣ число v получаетъ любое изъ значеній въ слѣдующихъ предѣлахъ

$$0 < v \leq n,$$

т. е. полныя рѣшенія Беклунда системы (34) выражаются системой $n+v+1$ различныхъ уравненій.

Если же уравненія (34) приводятся къ системѣ совмѣстныхъ совокупныхъ уравненій прибавленіемъ k различныхъ новыхъ производныхъ уравненій, то и въ этомъ случаѣ *полныя интегральныя собранія Беклунда* представляются собраніями поверхностныхъ элементовъ прежняго вида (35), уравненія которыхъ однако, въ настоящемъ случаѣ, зависятъ отъ $n-m-k+v+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Наконецъ, понятія объ особенныхъ, общихъ и частныхъ интегральныхъ собраніяхъ производныхъ уравненій С. Ли легко распространяются на пространство $n+1$ измѣреній [1]).

Пусть имѣемъ, напримѣръ, полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса для уравненій (34), разсматриваемыхъ какъ система совокупныхъ, совмѣстныхъ производныхъ уравненій.

---

[1]) См. *Goursat*, E.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. 1891, p. 234.

$$\left.\begin{aligned} &z=\varphi\,(x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ C_1,\ C_2,\dots C_{n-m+1}),\\ &x_{n-q+i}=\varphi_i\,(x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ C_1,\ C_2,\dots C_{n-m+1}),\\ &p_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}p_{n-q+i},\\ &i=1,2,\dots q,\quad k=1,2,\dots n-q. \end{aligned}\right\}\tag{36}$$

Дифференцируя первыя $q+1$ уравненій послѣдней системы въ предположеніи, что вмѣстѣ съ перемѣнными $z,\ x_1,\ x_2,\dots x_n$ измѣняются также величины $C_1,\ C_2,\dots C_{n-m+1}$, получаемъ

$$dz=\sum_{k=1}^{n-q}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\,dx_k+\sum_{r=1}^{n-m+1}\frac{\partial\varphi}{\partial C_r}\,dC_r,$$

$$dx_{n-q+i}=\sum_{k=1}^{n-q}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\,dx_k+\sum_{r=1}^{n-m+1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial C_r}\,dC_r,$$

$$i=1,2,\dots q.$$

На основаніи этихъ равенствъ и въ силу $n-q$ послѣднихъ уравненій системы (36), составляемъ новое равенство

$$dz-\sum_{s=1}^{n}p_s\ dx_s=\sum_{r=1}^{n-m+1}A_r\,dC_r,\tag{37}$$

гдѣ коэффиціенты A_r имѣютъ слѣдующія значенія

$$A_r=\frac{\partial\varphi}{\partial C_r}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial C_r}p_{n-q+i}.$$

Чтобы, при сдѣланномъ предположеніи относительно измѣняемости произвольныхъ постоянныхъ $C_1,\ C_2,\dots C_{n-m+1}$, уравненія (36) не переставали представлять рѣшеніе уравненій (34), для этого должно удовлетворяться условіе (16)-ое. Поэтому равенство (37) приводится къ слѣдующему

$$\sum_{r=1}^{n-m+1}A_r\,dC_r=0,\tag{38}$$

которому должны удовлетворять величины всѣхъ C.

Послѣднее уравненіе можетъ быть удовлетворено слѣдующими различными способами:

1) Равенство (38) удовлетворяется тождественно, если предположить, что всѣ величины C имѣютъ постоянныя значенія. Въ этомъ случаѣ мы возвращаемся къ исходному полному интегральному собранію.

2) Полагая равными нулю всѣ коэффиціенты A_r при dC_r въ равенствѣ (38), мы получаемъ систему $n-m+1$ уравненій

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C_r}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial C_r}p_{n-q+i}=0,$$

$$r=1,2,\dots n-m+1.$$

Результатъ исключенія всѣхъ C_r изъ уравненій (36), при помощи послѣднихъ равенствъ, представляетъ *особенное интегральное собраніе* системы производныхъ уравненій (34).

3) Предположимъ далѣе, что между $C_1,\ C_2,\dots C_{n-m+1}$ существуетъ l произвольныхъ зависимостей слѣдующаго вида

$$\left.\begin{aligned} &C_i=\omega_i\ (C_{l+1},\ C_{l+2},\dots C_{n-m+1}),\\ &i=1,2,\dots l, \end{aligned}\right\}\tag{39}$$

гдѣ всѣ ω_i представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ. Внося значенія всѣхъ C_i въ равенство (38), получаемъ новое равенство

$$\sum_{j=1}^{n-m-l+1}\left(A_{l+j}+\sum_{i=1}^{l}A_i\frac{\partial\omega_i}{\partial C_{l+j}}\right)dC_{l+j}=0,$$

которое уничтожается на основаніи слѣдующихъ зависимостей

$$\left.\begin{aligned} &A_{l+j}+\sum_{i=1}^{l}A_i\frac{\partial\omega_i}{\partial C_{l+j}}=0,\\ &j=1,2,\dots n-m-l+1. \end{aligned}\right\}\tag{40}$$

Результатъ исключенія, изъ уравненій (36), значеній всѣхъ $n-m+1$ величинъ $C_1,\ C_2,\dots C_{n-m+1}$, при помощи $n-m+1$ уравненій (39)—(40), представляетъ *общее интегральное собраніе* системы (34), заключающее l произвольныхъ функцій.

Наконецъ, мы называемъ *частными рѣшеніями*, или *частными интегральными собраніями* данной системы (34) рѣшенія ея, которыя получаются изъ полныхъ или общихъ интегральныхъ собраній, сообщеніемъ частныхъ значеній произвольнымъ постояннымъ параметрамъ и произвольнымъ функціямъ, которые входятъ въ эти собранія.

8. Изъ предыдущихъ разсужденій непосредственно вытекаетъ, что каждое уравненіе или систему уравненій, съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по нѣсколькимъ независимымъ перемѣннымъ, возможно разсматривать также и съ другой точки зрѣнія, какъ производныя уравненія С. Ли, происхожденіе которыхъ основано на разсмотрѣніи собраній поверхностныхъ элементовъ.

Обобщенныя представленія С. Ли о производныхъ уравненіяхъ и ихъ рѣшеніяхъ, какъ это представляется съ перваго взгляда, расширяютъ, съ формальной точки зрѣнія, предѣлы классической теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Дѣйствительно, въ изложенной выше теоріи собраній поверхностныхъ элементовъ, представленія объ уравненіяхъ съ частными производными и объ ихъ интегралахъ являются только въ видѣ одного частнаго случая. Въ самомъ дѣлѣ, останавливаясь на собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ нулевого класса, происходящихъ изъ нихъ производныхъ уравненіяхъ С. Ли и ихъ интегральныхъ собраніяхъ, мы получаемъ классическую теорію дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, которая представляетъ такимъ образомъ частный случай теоріи С. Ли.

Однако разсматривая одни и тѣ же уравненія, то съ точки зрѣнія дифференціальныхъ уравненій, то съ точки зрѣнія производныхъ уравненій С. Ли, мы вмѣстѣ съ тѣмъ должны видоизмѣнять соотвѣтственно каждый разъ и самый характеръ изслѣдуемыхъ уравненій, которыя сохраняютъ одинъ только внѣшній видъ, благодаря сохраненію обозначеній входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ. Въ самомъ дѣлѣ, смыслъ разсматриваемыхъ уравненій становится совершенно различный. С. Ли вводитъ цѣлый рядъ новыхъ рѣшеній изслѣдуемыхъ уравненій, которыя до него не разсматривались, при чемъ каждому классу новыхъ рѣшеній соотвѣтствуютъ также и новыя дополнительныя предположенія относительно входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ. Такъ, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots x_n$ считаются независимыми; что же касается рѣшеній С. Ли q-аго класса, то они вводятъ q различныхъ зависимостей между тѣми же перемѣнными $x_1, x_2, \ldots x_n$. Такимъ образомъ перемѣнныя, которыя считались независимыми въ классической теоріи, перестаютъ быть таковыми въ теоріи С. Ли. Вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, и перемѣнные параметры $p_1, p_2, \ldots p_n$ измѣняютъ свое первоначальное значеніе частныхъ производныхъ, въ теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Всѣ послѣднія обстоятельства пріобрѣтаютъ особенное значеніе, съ точки зрѣнія приложеній къ различнымъ вопросамъ анализа и геометріи. Само собою разумѣется, что рѣшенія С. Ли не могутъ давать искомаго отвѣта для тѣхъ задачъ, которыя приводятся къ дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными. Съ другой стороны могутъ существовать также такіе прикладные вопросы, которые требуютъ, для своего рѣшенія, разсмотрѣнія производныхъ уравненій С. Ли или разрѣшаются, какъ при помощи интеграловъ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, такъ и на основаніи интегральныхъ собраній производныхъ уравненій С. Ли. Въ виду изложенныхъ соображеній, мы считаемъ необходимымъ дѣлать существенное различіе между дифференціальными уравненіями классической теоріи, производными уравненіями С. Ли и между ихъ рѣшеніями различныхъ классовъ. Поэтому намъ кажется необходимымъ возражать и быть противъ изложенія нѣкоторыхъ трактатовъ по теоріи дифференціальныхъ уравненій, которыя смѣшиваютъ рѣшенія различныхъ классовъ. Такъ, напримѣръ, при изложеніи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, по такъ называемому способу характеристикъ Коши, многіе авторы [1]) удовлетворяются указаніями на полные интегралы С. Ли въ тѣхъ случаяхъ исключенія, когда излагаемый способъ Коши не приводитъ къ искомымъ полнымъ интеграламъ Лагранжа. Читатель не можетъ быть удовлетворенъ такимъ изложеніемъ, такъ какъ упомянутые авторы не даютъ отвѣта на поставленный вопросъ во всей полнотѣ и предлагаютъ въ различныхъ частныхъ случаяхъ удовлетворяться совершенно случайно полученными новыми рѣшеніями, которыя, какъ ясно видно, представляютъ существенное различіе съ первоначально поставленной задачей интегрированія. Совершенно аналогичнымъ образомъ насъ не удовлетворяетъ также интегрированіе производныхъ уравненій С. Ли, по такъ называемому обобщенному имъ способу характеристикъ Коши, который не даетъ возможности вычислять полные интегралы С. Ли заданнаго напередъ опредѣленнаго класса, но приводитъ совершенно непредвидѣннымъ образомъ, или къ нѣкоторому полному интегралу С. Ли какого-либо случайнаго класса, или даже къ полному интегралу Лагранжа. Такимъ образомъ разсматриваемый способъ С. Ли оставляетъ полную неопредѣленность въ рѣшеніи изслѣдуемой задачи, совершенно аналогично указанному выше способу Коши.

Всѣ отмѣченные вопросы теоріи характеристикъ находятся въ связи съ дальнѣйшимъ развитіемъ нашего изслѣдованія, и мы будемъ имѣть

---

[1]) *Jordan*, C.—Cours d' Analyse, t. III, Paris, 1887, p. 325.

Goursat, E.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. 1891, p. 119, p. 228.

случай къ нимъ далѣе возвратиться. Что же касается полныхъ интеграловъ С. Ли различныхъ классовъ, то задача ихъ разысканія зависитъ главнымъ образомъ отъ условій ихъ существованія для производныхъ уравненій С. Ли.

Если возьмемъ одно производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ трехъ измѣреній, то, какъ видно изъ предыдущаго изложенія (см. стр. 21—22), разсматриваемое уравненіе допускаетъ полныя интегральныя собранія M^1_2, M^0_2 только при условіи, что оно является линейнымъ относительно перемѣнныхъ p, q или не зависитъ отъ послѣднихъ, т. е. представляетъ функціональную зависимость между перемѣнными x, y, z. Изъ дальнѣйшаго изложенія будетъ слѣдовать, что и другія производныя уравненія С. Ли должны также представлять весьма частный видъ, для того чтобы допускать существованіе полныхъ интеграловъ С. Ли того или другого опредѣленнаго даннаго класса. Однако доказательство послѣдняго предложенія находится въ зависимости отъ общихъ свойствъ интегральныхъ собраній, къ изученію которыхъ мы и имѣемъ въ виду немедленно приступить. Наконецъ, въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи мы ограничимся разсмотрѣніемъ только полныхъ интеграловъ С. Ли его производныхъ уравненій, въ виду того что теорія ихъ находится въ тѣсной связи съ задачей интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частиыми производными.

ГЛАВА II.

Свойства полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли.

1. Пусть имѣемъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній производное уравненіе С. Ли слѣдующаго вида

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0. \tag{1}$$

Предположимъ, что данное уравненіе разрѣшимо относительно перемѣнной p_1, такъ что имѣетъ мѣсто условіе

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \gtreqless 0. \tag{2}$$

Пусть разсматриваемое уравненіе (1) допускаетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса, который представляется совокупностью слѣдующихъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} z - \varphi\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0, \\ x_{n-q+i} - \varphi_i\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0, \\ i = 1, 2, \ldots q. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Составляемъ дополнительныя уравненія, опредѣляющія, совмѣстно съ последними, полное интегральное собраніе поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній и представляющіяся въ слѣдующемъ видѣ

$$p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}.$$

$$k = 1, 2, \ldots n-q.$$

Введемъ слѣдующее условное обозначеніе

$$\psi_k \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$

$$k = 1, 2, \ldots n-q,$$

такъ что послѣднія $n-q$ уравненій разсматриваемаго полнаго интегральнаго собранія становятся

$$p_\kappa - \psi_\kappa = 0, \quad \kappa = 1, 2, \ldots n-q, \tag{4}$$

гдѣ функціи ψ_κ линейны относительно перемѣнныхъ $p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \ldots p_n$ и зависятъ кромѣ того только отъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_{n-q}$.

Изученіе свойствъ полныхъ интеграловъ С. Ли мы начнемъ съ разсмотрѣнія собраній нулевого класса, т. е. приведемъ основныя свойства полныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій. Въ этомъ случаѣ уравненіе (1) разсматривается какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка, и совокупность соотвѣтствующихъ уравненій (3) — (4) становится

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi\ (x_1, x_2, \ldots x_n, C_1, C_2, \ldots C_n), \\ p_\kappa &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_\kappa}, \\ &\kappa = 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Чтобы, въ этомъ случаѣ, первое изъ уравненій (5) представляло дѣйствительно полный интегралъ даннаго уравненія (1), т. е. результатъ исключенія всѣхъ C изъ уравненій (5) представлялъ бы уравненіе (1), для этого, какъ хорошо извѣстно, достаточно неравенства нулю слѣдующаго функціональнаго опредѣлителя

$$D\left(\frac{\varphi, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \ldots \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}}{C_1, C_2, C_3 \ldots C_n}\right) \gtrless 0.$$

Легко видѣть, что, на основаніи послѣдняго неравенства, въ опредѣленной разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ величинъ, система уравненій (5) приводится къ слѣдующему виду

$$F\ (x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0,$$

$$F_s\ (x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = C_s, \quad s = 1, 2, \ldots n.$$

Такъ какъ опредѣляемыя послѣдними уравненіями значенія перемѣннаго z, $p_1, p_2 \ldots p_n$ выражаются равенствами (5), т. е. $p_1, p_2, \ldots p_n$ являются частными производными перваго порядка функціи z соотвѣт-

ственно по независимымъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, то послѣднія $n+1$ уравненій образуютъ *замкнутую систему*, т. е., *на основаніи перваго изъ этихъ уравненій, имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства*

$$[F_i, F_\kappa] = 0,$$

лѣвыя части которыхъ обозначаютъ скобки Вейлера [1]), *составленныя для всѣхъ значеній показателей i, κ, отъ 0 до n, при чемъ подъ F_0 разумѣется функція F.*

Какъ извѣстно изъ курсовъ теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій, имѣетъ мѣсто также слѣдующее обратное предложеніе:

Пусть имѣемъ совокупность n уравненій, съ n различными произвольными постоянными величинами $C_1, C_2, \ldots C_n$,

$$\Phi_s\ (x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots n,$$

разрѣшимыхъ относительно всѣхъ C и образующихъ, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (1)-ымъ, замкнутую систему $n+1$ дифференціальныхъ уравненій. Если послѣдняя разрѣшима относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$, а также опредѣляетъ значеніе перемѣнной z, функціей перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ и всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_n$, то послѣднее значеніе z представляетъ полный интегралъ даннаго уравненія (1)-аго.

Наконецъ, пусть полный интегралъ Лагранжа (5) представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = \varphi\ (x_1, x_2, \ldots x_n, C_1, C_n, \ldots C_{n-1}) + C_n, \tag{6}$$

гдѣ одна изъ произвольныхъ постоянныхъ, именно C_n, является такъ называемой придаточной. Если слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \ldots \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}}{C_1, C_2, \ldots C_{n-1}}\right)$$

отличенъ отъ нуля, то послѣднія $n-1$ производныхъ уравненій слѣдующей системы

$$\left. p_\kappa = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\kappa}, \quad \kappa = 1, 2, \ldots n, \right\} \tag{7}$$

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*, стр. 39.

разрѣшимы относительно постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$. Въ такомъ случаѣ результатъ ихъ исключенія изъ перваго производнаго уравненія послѣдней системы представляетъ наше дифференціальное уравненіе съ частными производными, которое очевидно не зависитъ отъ перемѣнной z и представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0. \tag{8}$$

Стало-быть, въ настоящемъ случаѣ, совокупность уравненій (6) и (7) приводится, внутри разсматриваемой области измѣненія перемѣнныхъ, къ системѣ, представляющей совокупность уравненія (8) и слѣдующихъ

$$F_s(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = C_s,$$

$$s = 1, 2, \ldots n-1,$$

$$z - F_n(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = C_n.$$

Предыдущее обратное предложеніе замѣняется, въ настоящемъ случаѣ, слѣдующимъ:

Пусть имѣемъ $n-1$ уравненій, съ $n-1$ различными произвольными постоянными величинами $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$,

$$\Phi_s(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n, C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots n-1,$$

разрѣшимыхъ относительно всѣхъ C и образующихъ, совмѣстно съ уравненіемъ (8), замкнутую систему n дифференціальныхъ уравненій. Если послѣдняя разрѣшима относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$, то полный интегралъ даннаго уравненія (8) опредѣляется при помощи квадратуры.

2. Всѣ приведенныя предложенія, характеризующія полныя интегральныя собранія С. Ли нулевого класса распространяются также на всѣ полныя интегральныя собранія С. Ли, общій видъ которыхъ представляется совокупностью равенствъ (3) и (4).

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы послѣднія уравненія дѣйствительно представляли полное интегральное собраніе производнаго уравненія С. Ли (1), результатъ исключенія всѣхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_n$, изъ уравненій (3) и (4), долженъ приводиться къ одному только уравненію (1). Для этого очевидно достаточно существованія слѣдующаго условія

$$D\left(\frac{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \ldots C_{q+1}, C_{q+2}, \ldots C_n}\right) \gtrless 0.$$

Дѣйствительно, если послѣднее неравенство имѣетъ мѣсто, то уравненія (3) и послѣднія $n-q-1$ уравненій (4) разрѣшимы относительно всѣхъ величинъ $C_1, C_2, \ldots C_n$, и результатъ ихъ исключенія, изъ перваго уравненія (4), приводится къ равенству, равносильному исходному уравненію (1). Поэтому, въ опредѣленной разсматриваемой области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, система уравненій (3)—(4) приводится къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) &= 0, \\ F_s(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) &= C_s, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$s = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ послѣднія n уравненій представляютъ результатъ рѣшенія указанныхъ выше уравненій относительно всѣхъ постоянныхъ C.

Чтобы приступить къ изученію свойствъ послѣднихъ уравненій, начнемъ съ распространенія понятій объ *инволюціи* и *замкнутости* производныхъ уравненій С. Ли. Аналогично теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка и обыкновенныхъ каноническихъ уравненій, мы условимся называть, также въ теоріи производныхъ уравненій С. Ли, величины

$$x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$$

каноническими перемѣнными, относя n первыя изъ нихъ къ *первому классу*, а остальныя n величинъ ко *второму классу каноническихъ перемѣнныхъ*. Составляя скобки Пуассона для двухъ функцій, зависящихъ отъ послѣднихъ перемѣнныхъ, или скобки Вейлера, если разсматриваемыя функціи заключаютъ еще новую $2n+1$-ую перемѣнную z, мы говоримъ, что эти функціи находятся въ *инволюціи*, если указанныя скобки уничтожаются тождественно. Наконецъ, мы говоримъ, что данныя уравненія образуютъ *систему въ инволюціи* или *замкнутую систему* въ зависимости отъ того, уничтожаются-ли тождественно скобки Пуассона и Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей данныхъ уравненій, или эти скобки уничтожаются, на основаніи послѣднихъ уравненій.

Наконецъ, само собою разумѣется, если какая-либо данная система производныхъ уравненій С. Ли-*замкнутая*, то и преобразованныя ея уравненія образуютъ также *замкнутую* систему.

Условившись въ предыдущихъ опредѣленіяхъ, докажемъ, что уравненія (3) и (4) образуютъ замкнутую систему.

Разсматривая всѣ величины ψ_k, какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \ldots p_n$, замѣтимъ прежде всего, что существуютъ слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_\kappa}{\partial p_{n-q+i}} \equiv -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\kappa},$$

$$\frac{\partial \psi_\kappa}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial \psi_j}{\partial x_\kappa},$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей k и j, отъ 1 до $n-q$, и показателей i, отъ 1 до q.

Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей уравненій (3) и (4), имѣютъ слѣдующія значенія

$$[z-\varphi,\ x_{n-q+i}-\varphi_i] \equiv 0,$$

$$\Big[z-\varphi,\ p_\kappa-\psi_\kappa\Big] \equiv -p_\kappa + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\kappa} +$$

$$+\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \psi_\kappa}{\partial p_{n-q+i}} p_{n-q+i} = 0,$$

$$\Big[x_{n-q+i}-\varphi_i,\ p-\psi_\kappa\Big] \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial \psi_\kappa}{\partial p_{n-q+i}} \equiv 0,$$

$$\Big[p_j-\psi_j,\ p_\kappa-\psi_\kappa\Big] \equiv -\frac{\partial \psi_\kappa}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_\kappa} \equiv 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній, которыя должны принимать показатели i, k и j; при этомъ разсматриваемыя равенства первой, третьей и четвертой строкъ удовлетворяются тождественно, тогда какъ равенство второй строки удовлетворяется на основаніи уравненій (4).

Полученныя равенства доказываютъ, что уравненія (3) и (4) образуютъ *замкнутую систему*. Слѣдовательно, уравненія (9), представляющія преобразованіе послѣднихъ, также образуютъ *замкнутую систему*.

Кромѣ того очевидно, что уравненія (9) заключаютъ $q+1$ зависимостей только между перемѣнными z, x_1, $x_2, \dots x_n$, такъ какъ разсматриваемое интегральное собраніе принадлежитъ къ q-ому классу.

Легко показать, что *оба послѣднія свойства вполнѣ опредѣляютъ аналитически уравненія, представляющія полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса даннаго уравненія (1).*

Дѣйствительно, пусть имѣемъ n уравненій, съ n различными произвольными постоянными величинами C_1, $C, \dots C_n$,

$$\left.\begin{matrix} \Phi_s\,(x_1,\ x_2, \dots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \dots p_n,\ C_1,\ C_2, \dots C_n) = 0, \\ {\scriptstyle s=1,\,2,\dots n,} \end{matrix}\right\} \quad (10)$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно всѣхъ постоянныхъ C и, съ другой стороны, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (1), опредѣляютъ z и q перемѣнныхъ, изъ числа x_1, $x_2, \dots x_n$, функціями остальныхъ $n-q$ изъ этихъ перемѣнныхъ и произвольныхъ постоянныхъ.

Если кромѣ того наши $n+1$ уравненій (1) и (10) образуютъ замкнутую систему, то, въ такомъ случаѣ, легко доказать, что они представляютъ полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, нетрудно убѣдиться прежде всего, что разсматриваемыя уравненія должны приводиться къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{matrix} z-\varphi'\,(x_1,\ x_2, \dots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \dots C_n) = 0, \\ x_{n-q+i}-\varphi_i'\,(x_1,\ x_2, \dots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \dots C_n) = 0, \\ p_\kappa-\psi_\kappa'\,(x_1,\ x_2, \dots x_{n-q},\ p_{n-q+1},\ p_{n-q+2}, \dots p_n,\ C_1,\ C_2, \dots C_n) = 0, \\ {\scriptstyle i=1,\,2,\dots q, \quad \kappa=1,\,2,\dots n-q,} \end{matrix}\right\} (11)$$

т. е. разрѣшаются относительно перемѣнныхъ x и p съ различными значками [1]). Для доказательства послѣдняго предложенія сдѣлаемъ противоположное допущеніе, а именно, что k-ое изъ $n-q$ послѣднихъ уравненій разрѣшается относительно перемѣнной p_{n-q+i} и приводится къ слѣдующему виду

$$p_{n-q+i}-\psi'(x_1,\ x_2, \dots x_{n-q},\ p_{n-q+1}, \dots p_{n-q+i-1},\ p_{n-q+i+1}, \dots p_n) = 0,$$

т. е. не должно зависѣть ни отъ одной изъ перемѣнныхъ p_κ, такъ какъ онѣ исключаются, согласно съ послѣднимъ сдѣланнымъ предположеніемъ. Вычисляя слѣдующія скобки Вейлера

$$[x_{n-q+i}-\varphi_i',\ p_{n-q+i}-\psi'],$$

видимъ, что онѣ обращаются тождественно въ единицу. Но по первоначально поставленному условію, относительно замкнутости системы данныхъ уравненій (1) и (10), необходимо, чтобы послѣднія скобки, или уничтожались, на основаніи послѣднихъ уравненій, или обращались тождественно въ нуль. Такимъ образомъ сдѣланное предположеніе, относительно разрѣшимости системы уравненій (1) и (10), приводитъ къ заключенію, противорѣчащему дѣйствительности, что и убѣждаетъ насъ въ справедливости первоначально сдѣланнаго допущенія относительно того, что разсматриваемая нами совокупность уравненій (1) и (10) приводится къ виду (11).

---

[1]) *S. Lie.* Mathematische Annalen. Bd. XI, S. 277.
S. Lie u. Engel. — Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt S. 94.

Само собою разумѣется, что, на основаніи послѣднихъ равенствъ, утождествляется данное уравненіе (1) и вмѣстѣ съ тѣмъ оно получается какъ единственный результатъ исключенія всѣхъ C изъ предыдущихъ равенствъ (11).

Кромѣ того послѣднія уравненія (11) образуютъ *замкнутую* систему, такъ какъ и исходныя уравненія представляютъ *замкнутую* систему. Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій (11) должны уничтожаться, въ силу послѣднихъ. Эти скобки имѣютъ слѣдующія значенія

$$\left[z-\varphi',\ p_\kappa-\psi_\kappa'\right]=-p_\kappa+\frac{\partial\varphi'}{\partial x_\kappa}+$$

$$+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\psi_\kappa'}{\partial p_{n-q+i}}p_{n-q+i},$$

$$\left[x_{n-q+i}-\varphi_i',\ p_\kappa-\psi_\kappa'\right]=\frac{\partial\varphi_i'}{\partial x_\kappa}+\frac{\partial\psi_\kappa'}{\partial p_{n-q+i}},$$

для всѣхъ значеній k, отъ 1 до $n-q$, и значеній i, отъ 1 до q. Такъ какъ правая часть послѣднихъ скобокъ не зависитъ отъ перемѣнныхъ

$$z,\ x_{n-q+1},\ x_{n-q+2},\dots x_n,\ p_1,\ p_2,\dots p_{n-q},$$

то она не можетъ уничтожаться, на основаніи уравненій (11), но должна быть равна нулю тождественно. Такимъ образомъ мы получаемъ тождества

$$\frac{\partial\varphi_i'}{\partial x_\kappa}+\frac{\partial\psi_\kappa'}{\partial p_{n-q+i}}\equiv 0,\ \text{или}\ \frac{\partial\psi_\kappa'}{\partial p_{n-q+i}}\equiv-\frac{\partial\varphi_i'}{\partial x_\kappa},$$

для всѣхъ значеній i, отъ 1 до q, и значеній k, отъ 1 до $n-q$. Что касается первыхъ скобокъ, то онѣ должны уничтожаться, на основаніи послѣднихъ $n-q$ уравненій (11). Поэтому, въ силу только что сейчасъ написанныхъ тождествъ, получаемъ новыя тождества

$$\psi_\kappa'\equiv\frac{\partial\varphi'}{\partial x_\kappa}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i'}{\partial x_\kappa}p_{n-q+i},$$

$$\kappa=1,\ 2,\dots n-q,$$

которыя и доказываютъ, что система (11) опредѣляетъ полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса.

Изъ доказаннаго предложенія вытекаетъ, что *совокупность уравненій (9) должна представлять замкнутую систему и кромѣ того разрѣ-*

шаться только относительно $n-q$ изъ ряда перемѣнныхъ $p_1,\ p_2,\dots p_n$, для того чтобы опредѣлять полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса производнаго уравненія (1).

Другими словами это второе условіе показываетъ, что *функціи*

$$F,\ F_1,\ F_2,\dots F_n$$

не должны быть различными относительно перемѣнныхъ $z,\ p_1,\ p_2,\dots p_n$, т. е. долженъ тождественно уничтожаться не только функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{F,\ F_1,\ F_2,\dots F_n}{z,\ p_1,\ p_2,\dots p_n}\right),$$

но также и всѣ его миноры, отъ перваго до q-аго порядка включительно.

Выведенное заключеніе является существеннымъ, характернымъ свойствомъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, которое, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущаго изложенія, находится въ числѣ необходимыхъ и достаточныхъ условій, опредѣляющихъ вполнѣ послѣднія собранія.

Остановимся далѣе на разсмотрѣніи того частнаго случая, когда полное интегральное собраніе какого-либо производнаго уравненія С. Ли представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned}z&=\varphi\ (x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ C_1,\ C_2,\dots C_{n-1})+C_n\\x_{n-q+i}&=\varphi_i\ (x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ C_1,\ C_2,\dots C_{n-1}),\\&\qquad i=1,\ 2,\dots q,\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

$$\left.\begin{aligned}p_\kappa&=\psi_\kappa,\\&\kappa=1,\ 2,\dots n-q,\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

при чемъ произвольная постоянная C_n является придаточной, которая не входитъ въ выраженія всѣхъ функцій φ, φ_i и ψ_κ.

Если слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{\varphi_1,\ \varphi_2,\dots\varphi_q,\ \psi_2,\ \psi_3,\dots\psi_{n-q}}{C_1,C_2,\dots C_q,C_{q+1},C_{q+2},\dots C_{n-1}}\right)\gtrless 0,$$

то очевидно, что система уравненій, составленная изъ q послѣднихъ (12) и $n-q-1$ послѣднихъ (13), разрѣшима относительно всѣхъ постоянныхъ $C_1,\ C_2,\dots C_{n-1}$. Результатъ исключенія послѣднихъ изъ перваго уравненія (13) приводитъ къ производному уравненію С. Ли, независящему отъ перемѣнной z, слѣдующаго вида

$$F\,(x_1\; x_2, \ldots x_n,\; p_1,\; p_2, \ldots p_n) = 0, \tag{14}$$

которое, въ разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ, разрѣшимо относительно перемѣнной p_1, такъ какъ первое уравненіе (13) представлено въ видѣ, разрѣшенномъ относительно послѣдней перемѣнной.

Поэтому, въ этой же области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ величинъ, система уравненій (12) и (13), аналогично дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными, представляется совокупностью уравненій (14)-аго и n слѣдующихъ

$$F_s\,(x_1,\; x_2, \ldots x_n,\; p_1,\; p_2, \ldots p_n) = C_s,$$
$$s=1,\,2,\ldots n-1,$$

$$z - F_n\,(x_1,\; x_2, \ldots x_n,\; p_1,\; p_2, \ldots p_n) = C_n.$$

Обратное предложеніе выражается слѣдующимъ образомъ:

Пусть имѣемъ $n-1$ уравненій, съ $n-1$ различными произвольными постоянными величинами $C_1,\; C_2, \ldots C_{n-1}$,

$$\Phi_s\,(x_1,\; x_2, \ldots x_n,\; p_1,\; p_2, \ldots p_n,\; C_1,\; C_2, \ldots C_{n-1}) = 0,$$
$$s=1,\,2,\ldots n-1,$$

разрѣшимыхъ относительно всѣхъ C и образующихъ, совмѣстно съ уравненіемъ (14), замкнутую систему n производныхъ уравненій. Если послѣдняя не разрѣшима относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_1,\; p_2, \ldots p_n$, то полный интегралъ С. Ли получается при помощи квадратуры.

Предположимъ, въ самомъ дѣлѣ, что наша замкнутая система n уравненій выдѣляетъ q зависимостей, не заключающихъ перемѣнныхъ $p_1,\; p_2, \ldots p_n$, и приводится къ виду

$$\left.\begin{aligned} x_{n-q+i} &= \varphi_i\,(x_1,\; x_2, \ldots x_{n-q},\; C_1,\; C_2, \ldots C_{n-1}),\\ p_k &= \Psi_k\,(x_1,\; x_2, \ldots x_{n-q},\; p_{n-q+1},\; p_{n-q+2}, \ldots p_n,\; C_1,\; C_2, \ldots C_{n-1}),\\ &\quad i=1,\,2,\ldots q,\quad k=1,\,2,\ldots n-q. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Чтобы доказать наше предложеніе, поступаемъ аналогично предыдущему. Такъ какъ послѣдняя система должна быть замкнутой, то составляя скобки Пуассона

$$(x_{n-q+i} - \varphi_i,\; p_k - \Psi_k),$$

которыя должны уничтожаться тождественно, получаемъ отсюда тождества

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_{n-q+i}} = 0,$$

для всѣхъ значеній i, отъ 1 до q, и значеній k, отъ 1 до $n-q$, которыя показываютъ, что функціи Ψ_k линейны относительно перемѣнныхъ p_{n-q+} и имѣютъ, стало—быть, слѣдующій видъ

$$\Psi_k = A_k\,(x_1,\; x_2, \ldots x_{n-q},\; C_1,\; C_2, \ldots C_{n-1}) - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$
$$k=1,\,2,\ldots n-q.$$

Далѣе, приравнивая нулю значенія скобокъ

$$(p_i - \Psi_i,\; p_k - \Psi_k),$$

получаемъ, совершивъ сокращенія, новыя тождества

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k},$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей i и k, отъ 1 до $n-q$. Послѣднія тождества показываютъ, что выраженіе

$$\sum_{k=1}^{n-q} A_k\, dx_k$$

представляетъ точный дифференціалъ [1]). Поэтому, выполнивъ квадратуру послѣдняго, легко видѣть, что уравненіе

$$z = \int \sum_{k=1}^{n-q} A_k\, dx_k + C_n,$$

совмѣстно съ системой (15)-ой, опредѣляетъ полное интегральное собраніе С. Ли даннаго производнаго уравненія (14).

3. Всѣ приведенныя соображенія, относительно одного производнаго уравненія (1) или (14), распространяются также на системы совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли, происхожденіе которыхъ мы разсматривали въ предыдущей главѣ.

Пусть имѣемъ систему m производныхъ уравненій С. Ли

---

[1]) См. моя статья: Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville (comptes rendus des Seances de l'Academie des Sciences, 17 août 1903).

$$F_i(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots m, \tag{16}$$

которая имѣетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса

$$\left.\begin{aligned} z - \varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}) = 0, \\ x_{n-q+i} - \varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}) = 0, \\ i = 1, 2, \ldots q. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Вводя аналогичное предыдущему обозначеніе функцій ψ_k, которыя въ настоящемъ случаѣ заключаютъ только $n - m + 1$ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, составляемъ дополнительныя уравненія, опредѣляющія, совмѣстно съ уравненіемъ геометрическаго мѣста (17), полное интегральное собраніе С. Ли данной системы (16)-ой

$$p_k - \psi_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n - q. \tag{18}$$

Чтобы система уравненій (17)—(18) представляла дѣйствительно полный интегралъ С. Ли данной системы уравненій (16), для этого результатъ исключенія всѣхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}$, изъ уравненій разсматриваемаго интегральнаго собранія, долженъ приводиться къ однимъ только исходнымъ уравненіямъ (16)-ымъ.

Предположимъ, что послѣднія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_m$, т. е. что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_m}{p_1, p_2, \ldots p_m}\right) \gtrless 0. \tag{19}$$

Въ такомъ случаѣ равенства, которыя представляютъ непосредственный результатъ исключенія всѣхъ значеній $C_1, C_2 \ldots C_{n-m+1}$ изъ уравненій нашего интегральнаго собранія (17)—(18), должны также быть разрѣшимы относительно величинъ $p_1, p_2, \ldots p_m$. Послѣднее условіе удовлетворяется, напримѣръ, когда уравненія (17) и послѣднія $n - q - m$ уравненій (18) разрѣшимы относительно всѣхъ C. Въ такомъ случаѣ, чтобы разсматриваемое интегральное собраніе опредѣляло полный интегралъ С. Ли данной системы (16), для этого достаточно неравенства нулю слѣдующаго функціональнаго опредѣлителя

$$D\left(\frac{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \ldots \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \ldots C_{q+1}, C_{q+2}, \ldots C_{n-m+1}}\right) \gtrless 0. \tag{20}$$

Если геометрическое мѣсто разсматриваемаго интегральнаго собранія представлено уравненіями

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_{n-m}) + C_{n-m+1},$$

$$x_{n-q+i} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, C_1, C_2, \ldots C_{n-m}),$$

$$i = 1, 2, \ldots q,$$

гдѣ произвольная постоянная C_{n-m+1} является придаточной, то система соотвѣтствующихъ производныхъ уравненій С. Ли не зависитъ явно отъ перемѣнной величины z. Поэтому, чтобы написанныя уравненія представляли полный интегралъ С. Ли для производныхъ уравненій, которыя получаются, исключеніемъ произвольныхъ постоянныхъ изъ предыдущихъ уравненій, для этого, напримѣръ, достаточно неравенства нулю слѣдующаго функціональнаго опредѣлителя

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \ldots \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \ldots C_q, C_{q+1}, \ldots C_{n-m}}\right) \gtrless 0.$$

Какъ легко видѣть, если $q = 0$, то мы имѣемъ дѣло съ полнымъ интеграломъ Лагранжа системы уравненій (16), разсматриваемыхъ какъ дифференціальныя уравненія съ частными производными. Въ этомъ случаѣ уравненія (17) и (18) опредѣляютъ полный интегралъ Лагранжа и его производныя уравненія, а предыдущее неравенство (20) представляетъ извѣстное условіе, которому удовлетворяютъ полные интегралы Лагранжа изслѣдуемыхъ уравненій.

Составляя непосредственно скобки Вейлера для лѣвыхъ частей уравненій (17) и (18), мы очевидно приходимъ къ заключенію, что послѣднія уравненія образуютъ замкнутую систему и, въ разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ, приводятся къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} F_i(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ F_{m+s}(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = C_s, \\ i = 1, 2, \ldots m, \quad s = 1, 2, \ldots n - m + 1, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

при чемъ слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_m, F_{m+1}, \ldots F_{n+1}}{z, p_1, \ldots p_{m-1}, p_m, \ldots p_n}\right) \tag{22}$$

уничтожается тождественно со всѣми своими минорами, отъ перваго до q-аго порядка включительно.

Отсюда вытекаетъ прежде всего слѣдующее весьма существенное заключеніе относительно условій, которымъ должны удовлетворять производныя уравненія С. Ли, чтобы составлять систему совокупныхъ уравненій, допускающихъ полныя интегральныя собранія С. Ли. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (21), представляя преобразованія равенствъ (17) и (18), образуютъ также замкнутую систему. Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя изъ функцій

$$F_1, F_2, \ldots F_m,$$

не зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}$, то эти скобки могутъ уничтожаться только въ силу первыхъ m уравнеий системы (21), которыя представляютъ систему данныхъ уравненій (16). Потому мы получаемъ слѣдующее предложеніе:

Чтобы имѣть полныя интегральныя собранія, совокупныя производныя уравненія С. Ли, необходимо должны представлять замкнутую систему, совершенно аналогично совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными перваго порядка, т. е. скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей разсматриваемыхъ уравненій, должны уничтожаться на основаніи этихъ уравненій.

Само собою разумѣется, если данныя уравненія (16) не удовлетворяютъ условію замкнутости, то для разысканія ихъ рѣшеній должно поступать совершенно такъ, какъ поступаютъ въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій. Такъ, если скобки Вейлера, составленныя для двухъ какихъ либо функцій, напримѣръ, F_i и F_k не уничтожаются, на основаніи данныхъ уравненій (16), то, приравнивая составленныя скобки нулю, присоединяемъ вновь полученное уравненіе къ предыдущимъ исходнымъ уравненіямъ. Продолжая поступать такимъ образомъ и далѣе, относительно каждой пары разсматриваемыхъ уравненій, мы, или придемъ, въ концѣ концовъ, къ замкнутой системѣ производныхъ уравненій, или получаемъ такую систему, число уравненій которой больше $2n+1$; въ послѣднемъ случаѣ, или всѣ перемѣнныя величины получаютъ постоянныя значенія, или разсматриваемыя уравненія несовмѣстимы.

Совершенно аналогично тому какъ мы доказывали по отношенію къ одному уравненію, такъ и здѣсь, для системы производныхъ уравненій С. Ли, также легко убѣдиться, что отмѣченныя выше свойства, характеризующія полныя интегральныя собранія С. Ли, являются *не только необходимыми, но вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточными условіями, чтобы система уравненій, вида (21), опредѣляла полный интегралъ С. Ли, а именно послѣднія уравненія должны образовать замкнутую систему и соотвѣтствующій имъ функціональный опредѣлитель, вида (22), долженъ уничтожаться тождественно со всѣми своими минорами, отъ перваго порядка до q-аго включительно, если соотвѣтствующій полный интегралъ принадлежитъ q-ому классу.*

Здѣсь слѣдуетъ отмѣтить значеніе, которое представляетъ опредѣлитель (22), для опредѣленія класса полнаго нитеграла, представляемаго системой (21). Для полнаго интеграла нулевого класса, т. е. интеграла Лагранжа уравненій (16), разсматриваемыхъ какъ дифференціальныя уравненія съ частными производными, функціональный опредѣлитель (22) долженъ быть отличенъ отъ нуля. Что же касается полныхъ интеграловъ С. Ли, то соотвѣтствующій имъ функціональный опредѣлитель (22) долженъ уничтожаться тождественно со всѣми своими минорами до порядка, равнаго классу разсматриваемаго интеграла.

4. Послѣднія доказанныя предложенія устанавливаютъ однообразную точку зрѣнія на задачи о разысканіи полныхъ интеграловъ Лагранжа и С. Ли. Эта точка зрѣнія вытекаетъ изъ идеи, лежащей въ основаніи извѣстнаго второго способа Якоби интегрированія уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, изложеннаго въ знаменитомъ мемуарѣ: *Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi* [1]).

Развитіе идей, изложенныхъ въ этомъ сочиненіи, позволитъ намъ представить въ новомъ видѣ указанныя выше свойства полныхъ интегральныхъ собраній. Начнемъ съ разсмотрѣнія случая одного уравненія (1)

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, p_3, \ldots p_n) = 0. \tag{1}$$

Сущность разсматриваемаго способа Якоби состоитъ въ разысканіи обладающихъ опредѣленными свойствами $n+1$ интеграловъ линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной функціи f перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$, разсматриваемыхъ какъ независимыя перемѣнныя, слѣдующаго вида

$$[F, f] = 0. \tag{23}$$

Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя попарно изъ $n+1$ функцій

$$F, F_1, F_2, \ldots F_n, \tag{24}$$

опредѣляющихъ полное интегральное собраніе (9) даннаго уравненія (1), не зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_n$, то эти скобки

---

[1]) *Jacobi.* Journal fur reine und angewandte Mathematik, Bd. 60, p. 1—181, Gesammelte Werke, Bd. V, S. 1—189.

должны уничтожаться вообще въ силу даннаго уравненія (1). Въ частности, чтобы уравненія (9) составляли замкнутую систему, достаточно, чтобы функціи (24) находились въ инволюціи между собой.

Поэтому выведенное выше условіе, характеризующее полныя интегральныя собранія С. Ли одного производнаго уравненія, формулируется также слѣдующимъ образомъ:

Чтобы уравненія (9) опредѣляли полное интегральное собраніе даннаго уравненія (1), для этого достаточно, чтобы функціи

$$F_1,\ F_2, \ldots F_n$$

представляли систему n интеграловъ въ инволюціи линейнаго уравненія (23). Классъ послѣдняго собранія, само собою разумѣется, опредѣляется, на основаніи свойствъ функціональнаго опредѣлителя

$$D\left(\frac{F,\ F_1, \ldots F_n}{z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n}\right).$$

Послѣднее предложеніе легко представить еще другимъ образомъ.

Предположимъ, что данное производное уравненіе не зависитъ явнымъ образомъ отъ перемѣнной величины z, т. е. мы имѣемъ дѣло съ производнымъ уравненіемъ (14), которое, будучи разрѣшимымъ относительно перемѣнной p_1, приводится къ виду

$$p_1 + H\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n) = 0. \tag{25}$$

Легко видѣть, что уравненія разсмотрѣннаго въ n^0 2-омъ полнаго интегральнаго собранія уравненія (14)-аго преобразовываются въ систему уравненій (25)-аго и слѣдующихъ

$$\left.\begin{array}{c} F_s\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n) = C_s, \\ {\scriptstyle s=1,\,2,\ldots n-1,} \\ z - F_n\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n) = C_n. \end{array}\right\} \tag{26}$$

Эти уравненія имѣютъ мѣсто для какого угодно класса изслѣдуемаго собранія, въ виду предложенія, которое мы доказали въ концѣ n^0 2-ого, при чемъ здѣсь функціи F_s и F_n не зависятъ отъ перемѣнной p_1.

Очевидно, что уравненіе (25) и первыя $n-1$ уравненій (26) находятся въ инволюціи, такъ какъ соотвѣтствующія имъ скобки Пуассона не зависятъ, ни отъ перемѣнной p_1, ни отъ величинъ $C_1,\ C_2, \ldots C_{n-1}$.

Слѣдовательно, *первыя $n-1$ уравненій (26) представляютъ интегралы въ инволюціи канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ производному уравненію (25),*

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_k},\ \frac{dp_k}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$${\scriptstyle k=1,\,2,\ldots n.}$$

Наконецъ, послѣднее уравненіе (26) получается при помощи квадратуры, составленной извѣстнымъ образомъ, на основаніи предыдущихъ интеграловъ.

Возвращаясь къ первоначальному уравненію (1), разрѣшаемъ его также относительно перемѣнной p_1 и получаемъ

$$p_1 + H\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n) = 0. \tag{27}$$

Само собою разумѣется, что преобразованная система (9) опредѣляетъ полное интегральное собраніе послѣдняго уравненія (27)-ого, представленное послѣднимъ уравненіемъ и слѣдующими

$$\left.\begin{array}{c} F_s\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n) = C_s, \\ {\scriptstyle s=1,\,2,\ldots n,} \end{array}\right\} \tag{28}$$

при чемъ функціи F_s не заключаютъ болѣе перемѣнной p_1, и классъ послѣдняго собранія остается тотъ же, что и собранія (9)-аго.

Такъ какъ уравненія (27) и (28) образуютъ замкнутую систему, то очевидно, что скобки Вейлера

$$[p_1 + H,\ F_s],$$

какъ зависящія отъ перемѣнной p_1 и не заключающія величинъ C_s, должны уничтожаться, на основаніи уравненія (27), и мы получаемъ слѣдующія тождества

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1} - \frac{\partial F_s}{\partial z} H + \Big[H,\ F_s\Big] = 0,$$

гдѣ послѣднія скобки Вейлера распространяются только на перемѣнныя величины

$$x_2,\ x_3, \ldots x_n,\ z,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n.$$

Стало-быть, *уравненія (28) представляютъ систему интеграловъ въ инволюціи слѣдующей обобщенной канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій* [1])

$$\frac{dx_k}{dx_1}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \frac{dp_k}{dx_1}=-\frac{dH}{dx_k},$$

$$\frac{dz}{dx_1}=\sum_{i=1}^{n-1} p_{i+1}\frac{\partial H}{\partial p_{i+1}}-H,$$

$$k=2,3,\ldots n.$$

Изложенныя предложенія распространяются безъ всякаго труда на системы совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли.

Пусть имѣемъ систему слѣдующихъ производныхъ уравненій

$$\left.\begin{matrix} F_i\,(x_1,\,x_2,\ldots x_n,\,z,\,p_1,\,p_2,\ldots p_n)=0, \\ i=1,2,\ldots m, \end{matrix}\right\} \tag{29}$$

которая имѣетъ полное интегральное собраніе, представленное уравненіями (21).

Предположимъ, что данныя уравненія (29) представляютъ систему въ *инволюціи.*

Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя изъ всѣхъ $n+1$ функцій F попарно, не зависятъ отъ величинъ $C_1,\ C_2,\ldots C_{n-m+1}$, то эти скобки уничтожаются вообще, на основаніи данныхъ уравненій (29), или уничтожаются иногда тождественно, т. е., въ этомъ послѣднемъ случаѣ, всѣ функціи F находятся въ инволюціи между собой. Чтобы система (21) представляла полное интегральное собраніе для этого *достаточно* одного послѣдняго условія, т. е. чтобы имѣли мѣсто тождества

$$\left.\begin{matrix} [F_i,\ F_{m+s}]=0, \\ i=1,2,\ldots m, \end{matrix}\right\} \tag{30}$$

для всѣхъ значеній указателя s, отъ 1 до $n-m+1$.

Составляемъ слѣдующія линейныя уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи f по перемѣннымъ

$$x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\ldots p_n,$$

разсматриваемымъ какъ независимыя,

[1]) Ср. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи,* стр. 69.

$$\left.\begin{matrix} [F_i,\ f]=0, \\ =1,2,\ldots m. \end{matrix}\right\} \tag{31}$$

Извѣстное тождество Майера [1]), которому удовлетворяютъ скобки Вейлера, составленныя для трехъ функцій F_i, F_k и f представляется равенствомъ

$$\Big[F_i,\,[F_k,\,f]\Big]+\Big[F_k,\,[f,\,F_i]\Big]+\Big[f,\,[F_i,\,F_k]\Big]=$$

$$=\frac{\partial F_i}{\partial z}\Big[F_k,\,f\Big]+\frac{\partial F_k}{\partial z}\Big[f,\,F_i\Big]+\frac{\partial f}{\partial z}\Big[F_i,\,F_k\Big].$$

Такъ какъ данныя уравненія (29) находятся въ инволюціи, то скобки $[F_i,\ F_k]$ уничтожаются тождественно, и предыдущее равенство даетъ новое равенство

$$\Big[F_i,\,[F_k,\,f]\Big]-\Big[F_k,\,[F_i,\,f]\Big]=$$

$$=\frac{\partial F_i}{\partial z}\Big[F_k,\,f\Big]-\frac{\partial F_k}{\partial z}\Big[F_i,\,f\Big],$$

которое показываетъ, что линейныя уравненія (31) образуютъ замкнутую систему и, стало-быть, въ опредѣленной области измѣненія перемѣнныхъ, допускаютъ существованіе $2n-m+1$ различныхъ интеграловъ. На основаніи тождествъ (30), мы заключаемъ, что функціи

$$F_{m+1},\ F_{m+2},\ldots F_{n+1} \tag{32}$$

представляютъ различные интегралы системы (31), которые, согласно съ предыдущимъ, находятся между собой въ инволюціи.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію:

Чтобы уравненія (21) представляли полное интегральное собраніе С. Ли системы производныхъ уравненій (29) въ инволюціи для этого достаточно, чтобы функціи (32) служили интегралами въ инволюціи замкнутой системы линейныхъ уравненій съ частными производными (31).

Наконецъ, предположимъ, что уравненія (29) представляютъ *замкнутую систему* и функціональный опредѣлитель

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи,* стр. 39.

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots F_m}{p_1, p_2, \dots p_m}\right)$$

отличенъ отъ нуля. Въ такомъ случаѣ уравненія (29) приводятся къ слѣдующему виду

$$\left. p_k + H_k(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n) = 0, \quad k=1, 2, \dots m, \right\} \qquad (33)$$

и ихъ полное интегральное собраніе С. Ли представляется совокупностью послѣднихъ уравненій (33) и $n-m+1$ слѣдующихъ

$$\left. F_{m+s}(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n) = C_s, \quad s=1, 2, \dots n-m+1, \right\} \qquad (34)$$

которыя получаются изъ $n-m+1$ послѣднихъ уравненій (21), исключеніемъ изъ нихъ значеній $p_1, p_2, \dots p_m$, опредѣляемыхъ совокупностью уравненій (33).

Легко видѣть, что послѣдніе значенія функцій F_{m+1} представляютъ интегралы слѣдующей якобіевской системы линейныхъ уравненій [1])

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial z} H_k + \left[H_k, f\right] = 0, \quad k=1, 2, \dots m,$$

гдѣ скобки Вейлера распространяются только на перемѣнныя величины

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n.$$

Другими словами *уравненія (34) представляютъ интегралы обобщенной канонической системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ*

$$dx_{m+r} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+r}} dx_k,$$

$$dp_{m+r} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{dH_k}{dx_{m+r}} dx_k,$$

1) См. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 69.

$$dz = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k \right) dx_k,$$

$$r=1, 2, \dots n-m.$$

Итакъ, изъ изложенныхъ соображеній вытекаетъ, что *для опредѣленія полнаго интегральнаго собранія С. Ли его производныхъ уравненій, достаточно составить удовлетворяющіе указаннымъ условіямъ замкнутости интегралы соотвѣтствующихъ линейныхъ уравненій съ частными производными.*

Если данныя производныя уравненія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ p, то уравненія, опредѣляющія, совмѣстно съ данными производными уравненіями, ихъ полное интегральное собраніе, представляютъ интегралы въ инволюціи каноническихъ уравненій, соотвѣтствующихъ разрѣшеннымъ производнымъ уравненіямъ.

Такимъ образомъ устанавливается полная аналогія между классической теоріей дифференціальныхъ уравненій съ частными производными и теоріей производныхъ уравненій С. Ли. Въ обоихъ случаяхъ изслѣдуемыя полныя рѣшенія, какъ тѣхъ такъ и другихъ уравненій, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, представляются замкнутыми системами $n+1$ уравненій. При этомъ все различіе заключается въ разрѣшимости послѣднихъ уравненій относительно перемѣнной z и каноническихъ перемѣнныхъ второго класса. Относительно послѣднихъ перемѣнныхъ изслѣдуемая замкнутая система разрѣшима, для дифференціальныхъ уравненій; что же касается производныхъ уравненій С. Ли, то соотвѣтствующая замкнутая система не разрѣшается относительно каноническихъ перемѣнныхъ одного и того же класса. Эти условія разрѣшимости характеризуются значеніями извѣстнаго функціональнаго опредѣлителя и его миноровъ.

Останавливаясь на подробномъ разсмотрѣніи послѣднихъ опредѣлителей, легко составить болѣе ясное представленіе относительно изслѣдуемыхъ собраній.

Если система (28), совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (27), представляетъ его полный интегралъ q-аго класса, то мы должны имѣть тождество

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots F_n}{z, p_2, \dots p_n}\right) = 0,$$

при чемъ уничтожаются тождествеино также и всѣ миноры опредѣлителя, первой части послѣдняго равенства, отъ перваго до q-аго порядка включительно. Предположимъ, что первымъ отличнымъ отъ нуля является слѣдующій функціональный опредѣлитель — миноръ $q+1$-аго порядка

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2,\ldots F_{n-q-1}}{p_2,\ p_3,\ldots p_{n-q}}\right) \gtrless 0. \qquad (35)$$

Въ такомъ случаѣ становится очевиднымъ, что всѣ функціи

$$F_{n-q},\ F_{n-q+1},\ldots F_n$$

не зависятъ непосредственно отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса, но являются функціями послѣднихъ только черезъ посредство остальныхъ функцій

$$F_1,\ F_2,\ldots F_{n-q-1}.$$

Слѣдовательно, между разсматриваемыми функціями должны существовать слѣдующія зависимости

$$\left.\begin{array}{c} F_{n-q+i} \equiv \Phi_{i+1}\ (x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ z,\ F_1,\ F_2,\ldots F_{n-q-1}), \\ i=0,\ 1,\ 2,\ldots q. \end{array}\right\} \qquad (36)$$

Аналогичное заключеніе распространяется также на уравненія (34), представляющія, совмѣстно съ замкнутой системой производныхъ уравненій (33), ея полное интегральное собраніе С. Ли. Если послѣднее принадлежитъ q-ому классу, то

$$D\left(\frac{F_{m+1},\ F_{m+2},\ldots F_{n+1}}{z,\ p_{m+1},\ldots p_n}\right) = 0$$

и всѣ миноры функціональнаго опредѣлителя, первой части послѣдняго равенства, также уничтожаются тождественно, отъ перваго до q-аго порядка включительно. Предполагая отличнымъ отъ нуля опредѣлитель—миноръ

$$D\left(\frac{F_{m+1},\ F_{m+2},\ldots F_{n-q}}{p_{m+1},\ p_{m+2},\ldots p_{n-q}}\right) \gtrless 0, \qquad (37)$$

получаемъ зависимости между функціями F_{m+s} слѣдующаго вида

$$\left.\begin{array}{c} F_{n-q+i} \equiv \Phi_i\ (x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ z,\ F_{m+1},\ F_{m+2},\ldots F_{n-q}), \\ i=1,\ 2,\ldots q+1. \end{array}\right\} \qquad (38)$$

Что касается полныхъ интегральныхъ собраній нулевого класса, то опредѣляющія ихъ функціи независимы между собой относительно перемѣнной z и каноническихъ перемѣнныхъ второго класса.

Такимъ образомъ только что отмѣченное существенное различіе между дифференціальными уравненіями съ частными производными и производными уравненіями С. Ли формулируется слѣдующими словами:

Интегралы обыкновенныхъ каноническихъ уравненій, опредѣляющіе полные интегралы соотвѣтствующихъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, независимы между собой относительно перемѣнной z и каноническихъ перемѣнныхъ второго класса; что же касается аналогичныхъ интеграловъ каноническихъ уравненій, соотвѣтствующихъ производнымъ уравненіямъ С. Ли, то они связаны между собой зависимостями, число которыхъ равно классу разсматриваемаго интегральнаго собранія, увеличенному на единицу.

Какъ хорошо извѣстно, изъ теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, эти уравненія всегда имѣютъ, въ опредѣленной области измѣненія перемѣнныхъ, послѣдніе указанные интегралы [1]). Что касается производныхъ уравненій С. Ли, то вопросъ о существованіи разсматриваемыхъ интеграловъ соотвѣтствующихъ каноническихъ уравненій долженъ послужить для насъ предметомъ дальнѣйшихъ изслѣдованій.

5. Мы разсматривали выше происхожденіе производныхъ уравненій С. Ли, въ пространствѣ трехъ измѣреній, изъ семействъ собраній поверхностныхъ элементовъ типовъ M_2^1, M_2^0, (см. стр. 20—23).

Получаемыя производныя уравненія вида

$$F\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0 \qquad (39)$$

представляютъ результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ изъ уравненій соотвѣтствующаго полнаго интегральнаго собранія. Какъ было доказано, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ изъ полныхъ интегральныхъ собраній вида M_2^1, M_2^0, внутри опредѣленной области измѣненія перемѣнныхъ, можетъ представляться только, или въ видѣ линейнаго уравненія относительно перемѣнныхъ p и q, или въ видѣ функціональной зависимости между перемѣнными x, y и z. Поэтому *въ пространствѣ трехъ измѣреній полные интегралы С. Ли перваго и второго классовъ существуютъ только для двухъ родовъ производныхъ уравненій, вида (39), которыя, или линейны относительно перемѣнныхъ p и q, или отъ нихъ не зависятъ.* Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное, мы пришли бы къ невозможному заключенію, что, въ разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ, изъ уравненій упомянутыхъ собраній, представляется также уравненіями, отличными отъ указанныхъ выше линейныхъ и функціональныхъ.

Точно такъ же легко убѣдиться, что производное уравненіе (1) допускаетъ полныя интегральныя собранія С. Ли $n-1$ или n класса, представляемыя символами M_n^1 и M_n^0, только при условіи, что изслѣдуемое уравненіе (1) является, или линейнымъ относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2,\ldots p_n$, или

[1]) См. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 73.

представляетъ функціональную зависимость только между перемѣнными $x_1, x_2, \ldots x_n, z$.

Дѣйствительно, пусть имѣемъ полное интегральное собраніе $n-1$-аго класса, представленное слѣдующими уравненіями

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi\ (x_1,\ C_1,\ C_2, \ldots C_n), \\ x_{i+1} &= \varphi_i\ (x_1,\ C_1,\ C_2, \ldots C_n), \\ & \scriptstyle i=1,\ 2, \ldots n-1, \\ p_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\, p_{i+1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Согласно съ понятіемъ о полныхъ интегральныхъ собраніяхъ даннаго уравненія (1), послѣднее должно получаться какъ результатъ исключенія всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1,\ C_2, \ldots C_n$ изъ послѣднихъ $n+1$ написанныхъ уравненій. При этомъ возможны два слѣдующихъ различныхъ случая, которые находятся въ зависимости отъ того, разрѣшаются ли, внутри нашей области измѣненія перемѣнныхъ, n первыхъ уравненій нашей системы (40) относительно всѣхъ C, или нѣтъ. Если эти уравненія даютъ тамъ значенія $C_1,\ C_2, \ldots C_n$ функціями перемѣнныхъ $x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z$, то подставляя полученныя значенія C въ послѣднее уравненіе (40), *находимъ искомый результатъ исключенія, въ видѣ линейнаго уравненія относительно перемѣнныхъ* $p_1,\ p_2, \ldots p_n$. Если же первыя n уравненій (40) неразрѣшимы относительно всѣхъ C, то очевидно они даютъ одну зависимость, между перемѣнными $x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z$, которая и представляетъ искомый результатъ исключенія. Стало-быть, *въ этомъ случаѣ производное уравненіе С. Ли не зависитъ отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса.*

Наконецъ, пусть уравненіе (1) имѣетъ полный интегралъ С. Ли n-аго класса, который представляется совокупностью слѣдующихъ уравненій

$$z = \varphi\ (C_1,\ C_2, \ldots C_n),$$

$$x_i = \varphi_i\ (C_1,\ C_2, \ldots C_n),$$

$$\scriptstyle i=1,\ 2, \ldots n.$$

Очевидно результатъ исключенія всѣхъ C, изъ послѣднихъ уравненій, представляется зависимостью только между перемѣнными $x_1, x_2, \ldots x_n,\ z$.

Слѣдовательно, *полные интегралы $n-1$ класса существуютъ только для производнаго уравненія С. Ли, или линейнаго относительно*

перемѣнныхъ $p_1,\ p_2, \ldots p_n$, или независимаго отъ послѣднихъ. Полные интегралы n-аго класса существуютъ только для уравненій, не заключающихъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса.

Предположимъ, что изслѣдуемое производное уравненіе (1) имѣетъ полное интегральное собраніе С. Ли q-аго класса; преобразовываемъ данное уравненіе (1) къ виду (27), и пусть разсматриваемое его рѣшеніе представляется совокупностью уравненій (27)—(28). Такъ какъ послѣднее принадлежитъ q-ому классу, то существуютъ $q+1$ равенствъ (36). Поэтому система уравненій (28), въ разсматриваемой области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, замѣняется слѣдующими уравненіями

$$\left.\begin{aligned} & F_r\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n) = C_r, \\ & \scriptstyle r=1,\ 2, \ldots n-q-1, \\ & \Phi_{i+1}\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ F_1,\ F_2, \ldots F_{n-q-1}) = C_{n-q+i}, \\ & \scriptstyle i=0,\ 1,\ 2, \ldots q. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Въ силу неравенства (35), первыя $n-q-1$ уравненій послѣдней системы, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (27), разрѣшаются относительно перемѣнныхъ $p_1,\ p_2,\ p_3, \ldots p_{n-q}$ и даютъ ихъ значенія въ слѣдующемъ видѣ

$$p_k = \psi'_k\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_{n-q+1},\ p_{n-q+2}, \ldots p_n,\ \ C_1,\ C_2, \ldots C_{n-q-1}),$$

$$\scriptstyle k=1,\ 2,\ 3, \ldots n-q.$$

Остальныя $q+1$ уравненій предыдущей системы (41) должны въ такомъ случаѣ, на основаніи послѣднихъ уравненій, приводиться къ слѣдующему виду, какъ это слѣдуетъ изъ условія замкнутости уравненій интегральнаго собранія,

$$z = \varphi'\ (x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \ldots C_n),$$

$$x_{n-q+i} = \varphi'_i\ (x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ C_1,\ C_2, \ldots C_n),$$

$$\scriptstyle i=1,\ 2, \ldots q.$$

Прилагая въ настоящемъ случаѣ разсужденія, которыми мы уже имѣли случай раньше пользоваться (см. стр. 44, 47), приходимъ къ заключенію, что функціи

$$\psi'_1,\ \psi'_2,\ \psi'_3, \ldots \psi'_{n-q}$$

линейны относительно перемѣнныхъ $p_{n-q+1},\ p_{n-q+2}, \ldots p_n$.

Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующій выводъ:

Чтобы производное уравненіе (27) имѣло полный интегралъ С. Ли q-аго класса, для этого соотвѣтствующая ему обобщенная система канонических обыкновѣнныхъ дифференціальныхъ уравненій должна имѣть $n-q-1$ интеграловъ, которые, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ, въ опредѣленной области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, приводятся къ системѣ $n-q$ линейныхъ уравненій. относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса.

Накоиецъ, пусть имѣемъ *замкнутую* систему производныхъ уравненій (29). Нетрудно убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ заключеній:

Если перемѣнныя $p_1, p_2, \ldots p_n$ не исключаются изъ послѣдней системы, то для нея не существуетъ полныхъ интеграловъ С. Ли, классъ которыхъ былъ бы больше числа $n-m$; если для данной системы (29) существуютъ полные интегралы С. Ли класса $n-m+t$, то въ такомъ случаѣ уравненія (29) должны заключать t уравненій, не зависящихъ отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса. Наконецъ, если система уравненій (29) допускаетъ полный интегралъ С. Ли $n-m$-аго класса, то разсматриваемая система должна, или состоять изъ линейныхъ уравненій, или заключать, по меньшей мѣрѣ, одно уравненіе, не зависящее отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса, при чемъ остальныя уравненія, въ такомъ случаѣ, могутъ быть какими угодно. Всѣ эти заключенія непосредственно вытекаютъ изъ разсмотрѣнія общаго вида полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, изъ которыхъ производныя уравненія получаются путемъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Разсмотримъ въ заключеніе общій случай, когда данная замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли выражается въ видѣ (33)-емъ и имѣетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса, представленный совокупностью уравненій (33) и (34). Принимая во вниманіе условія (37) и (38), которыя при этомъ должны имѣть мѣсто, мы приходимъ путемъ разсужденій, аналогичныхъ предыдущимъ, къ слѣдующему заключенію:

Чтобы замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли (33) имѣла полный интегралъ q-аго класса, для этого соотвѣтствующая обобщенная система каноническихъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ должна имѣть $n-m-q$ интеграловъ, которые, совмѣстно съ уравненіями данной системы, въ опредѣленной области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, приводятся къ системѣ $n-q$ линейныхъ уравненій относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса.

Всѣ разсмотрѣнные случаи отмѣчаютъ частный видъ, который должны представлять производныя уравненія С. Ли для того, чтобы допускать полные интегралы С. Ли того или другого класса. Послѣднее

обстоятельство является весьма характернымъ для производныхъ уравненій С. Ли, значительно отличающимъ послѣднія уравненія отъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, которыя всѣ безъ исключенія, внутри опредѣленной области измѣненія перемѣнныхъ, имѣютъ полные интегралы Лагранжа.

6. Выведенное заключеніе, относительно частнаго характера производныхъ уравненій С. Ли, допускающихъ полные интегралы, отличные отъ нулевого класса, является весьма существеннымъ для установленія правильной точки зрѣнія на разсматриваемую теорію С. Ли. Въ самомъ дѣлѣ, въ теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій установилось воззрѣніе, считающее полные интегралы С. Ли обобщеніемъ интеграловъ классической теоріи. Выше мы указывали уже (см. стр. 34—36) на существенную разницу между уравненіями дифференціальными и производными С. Ли. Теперь, при болѣе близкомъ разсмотрѣніи вопроса, когда, отъ общихъ геометрическихъ соображеній о собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ, мы переходимъ къ постановкѣ аналитической задачи о разысканіи интеграловъ С. Ли, тогда оказывается, что видъ производныхъ уравненій, допускающихъ существованіе послѣднихъ интеграловъ, ограниченъ болѣе узкими условіями, чѣмъ видъ дифференціальныхъ уравненій классической теоріи. Послѣднее обстоятельство заслуживаетъ того, чтобы на немъ остановиться подробнѣе тѣмъ болѣе, что связанные съ нимъ вопросы очень мало затронуты въ литературѣ изслѣдуемой теоріи.

Свои новыя понятія о производныхъ уравненіяхъ и ихъ полныхъ рѣшеніяхъ, основанныя на геометрической теоріи поверхностныхъ элементовъ, С. Ли далъ впервые въ 1872 году [1]). Послѣ этого тѣ же самыя понятія были приведены Ф. Клейномъ въ его извѣстной *Ерлангенской Программѣ* [2]) и легли затѣмъ въ основаніе мемуара С. Ли: Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, въ IX томѣ Mathematische Annalen, откуда и перешли въ большую часть трактатовъ, относительно разсматриваемыхъ уравненій. Слѣдуетъ однако замѣтить, что, ни С. Ли, ни другіе авторы не занимались подробнымъ изученіемъ идеи новыхъ введенныхъ понятій [3]). Лишь только отчасти связанные съ ними вопросы были затронуты Беклундомъ [4]), относительно про-

1) Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität Göttingen. S 473.

2) *F. Klein.* - Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 1891, p. 187).

3) *F. Engel.*—Zur Erinnerung an Sophus Lie (Berichte über die Verhandlungen d. K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Allgemeiner Theil 1899. S. XXXI).

4) Mathematische Annalen, Bd. 17, S. 285.

изводныхъ уравненій С. Ли въ пространствѣ четырехъ измѣреній, и С. Ли [1]) въ одномъ изъ послѣднихъ своихъ мемуаровъ. Въ своемъ сообщеніи [2]) Парижской Академіи Наукъ: *Sur les intégrales de S. Lie*, мы указали рядъ критическихъ соображеній относительно теоріи С. Ли.

Факты, которые вызываютъ необходимость критическаго разсмотрѣнія выведенныхъ С. Ли понятій, достаточно выяснены выше, и наша задача приводится къ тому, чтобы установить соотвѣтствіе между точкой зрѣнія относительно общности рѣшеній С. Ли, высказываемой нѣкоторыми авторами, и частнымъ характеромъ тѣхъ условій, которымъ должны удовлетворять разсматриваемыя уравненія, чтобы допускать полные интегралы С. Ли.

Легко убѣдиться, что если интегральныя собранія С. Ли и являются обобщеніемъ интеграловъ Лагранжа дифференціальныхъ уравненій, то только съ чисто формальной стороны.

Возьмемъ, напримѣръ, формулы (3) и (4), опредѣляющія полный интегралъ С. Ли q-аго класса производнаго уравненія (1)-аго. Полагая въ этихъ формулахъ q равнымъ нулю, мы получаемъ формулы (5), которыя представляютъ полный интегралъ Лагранжа уравненія (1), разсматриваемаго какъ дифференціальное, и заключаются такимъ образомъ какъ частный случай въ общихъ формулахъ (3) и (4). Но, удовлетворяясь последнимъ толкованіемъ, мы становимся на формальную точку зрѣнія и только ограничиваемся разсмотрѣніемъ внѣшняго вида формулъ, не останавливаясь на значеніи разрѣшаемыхъ ими задачъ.

Между тѣмъ способы образованія *производныхъ* уравненій С. Ли и свойства ихъ интегральныхъ собраній показываютъ, что необходимо разсматривать эти уравненія какъ совершенно различныя, въ зависимости отъ класса геометрическаго мѣста собранія поверхностныхъ элементовъ, изъ которыхъ происходятъ разсматриваемыя производныя уравненія. Это различіе между производными уравненіями различныхъ классовъ особенно наглядно обнаруживается при сравненіи собраній нулевого класса съ собраніями другихъ классовъ, порядокъ которыхъ отличенъ отъ нуля, т. е. при сравненіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными классической теоріи съ производными уравненіями С. Ли. Какъ раньше мы уже отмѣчали (см. стр. 34), каноническія перемѣнныя перваго класса разсматриваются, въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, какъ независимыя перемѣнныя. Наоборотъ теорія С. Ли исходитъ изъ предположеній, что послѣднія перемѣнныя связаны между собой нѣкоторымъ числомъ q уравненій. Предполагая послѣднее число q равнымъ ну-

---

[1]) *S. Lie.*—Ueber Berührungstausformationen und Differentialgleichungen (Leipzig. Berichte. Jahrg. 1898, S. 113—180).

[2]) Comptes rendus des Seances de l'Academie des Sciences. 3 août 1903.

лю, мы получаемъ формулы классической теоріи и можемъ считать поэтому, съ формальной точки зрѣнія, что дифференціальныя уравненія и ихъ интегралы Лагранжа представляютъ частный случай производныхъ уравненій и полныхъ интеграловъ С. Ли.

Послѣднее заключеніе вытекаетъ изъ разсмотрѣнія однихъ только опредѣленій и понятій. Поэтому было бы слишкомъ поспѣшно, прежде чѣмъ сравнить вопросы и задачи, которые разсматриваются въ обоихъ теоріяхъ, заключать предварительно, что и вся теорія С. Ли представляетъ обобщеніе классической. Достаточно для этого возвратиться къ отмѣченнымъ выше случаямъ существованія полныхъ интеграловъ различныхъ классовъ.

Остановимся, напримѣръ, на пространствѣ трехъ измѣреній, гдѣ существуетъ шесть различныхъ семействъ собраній поверхностныхъ элементовъ, представляемыхъ слѣдующими символами

$$M_2^2,\ M_2^1,\ M_2^0,$$

$$M_1^1,\ M_1^0,$$

$$M_0^0.$$

Всѣ эти собранія представляютъ настолько различные геометрическіе образы, что трудно ожидать *a priori*, чтобы каждая система ∞^4 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемая уравненіемъ

$$F\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0,$$

могла быть собрана въ любое изъ этихъ шести собраній. И дѣйствительно, какъ мы видѣли выше, для существованія каждаго изъ указанныхъ полныхъ интегральныхъ собраній, написанное производное уравненіе должно удовлетворять своимъ особеннымъ частнымъ условіямъ.

Послѣднее обстоятельство, съ научной, философской точки зрѣнія, находится въ полномъ соотвѣтствіи съ мыслями, которыя высказалъ С. Ли, относительно представленія геометрическихъ формъ пространства, въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ: *Ueber Complexe insbesondere Linien-und Kugel-Complexe, mit Anwendungen auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen* [1]). Указывая, что возможно принимать за основные элементы различные геометрическіе образы, какъ точка, согласно съ Декартомъ, или прямая, вмѣстѣ съ Плюкеромъ, С. Ли прибавляетъ: Da aber hierdurch ein Geraden-System—ein Plücker' scher Linien-Complex—ausgezeichnet

---

[1]) Mathematische Annalen. Bd. 5, S. 145.

wird, so ist es einleuchtend, dass eine bestimmte Repräsentation der angegebenen Art nur eine begrenzte Anwendung finden kann. Wenn man sich indessen mit einem Studium des Raumes hinsichtlich eines Linien—Complexes beschäftigt, so kann es sehr vortheilhaft sein, die Linien dieses Complexes als Raumelemente zu benutzen [1]).

Совершенно аналогичныя соображенія примѣняются къ области перемѣнныхъ величинъ, представляемой системой поверхностныхъ элементовъ, которая опредѣляется однимъ даннымъ или системой данныхъ производныхъ уравненій С. Ли. Какъ вытекаетъ изъ предыдущаго изложенія, въ зависимости отъ характера данной системы поверхностныхъ элементовъ, послѣдніе могутъ быть собраны въ полныя интегральныя собранія С. Ли одного или другого опредѣленнаго класса.

Такимъ образомъ, указанныя выше условія существованія интегральныхъ собраній С. Ли представляютъ достаточное основаніе, чтобы утверждать, *что разсматриваемые интегралы, внутри извѣстной, опредѣленной области измѣненія перемѣнныхъ, существуютъ въ исключительныхъ случаяхъ только для производныхъ уравненій С. Ли, особаго частнаго вида.*

Здѣсь однако необходимо сдѣлать нѣсколько замѣчаній относительно изслѣдованій С. Ли, къ которымъ мы возвратимся подробнѣе въ дальнѣйшемъ изложеніи. Какъ въ своемъ доказательствѣ существованія полныхъ интегральныхъ собраній [2]), такъ и во всѣхъ своихъ изслѣдованіяхъ, по интегрированію производныхъ уравненій, С. Ли все время остается на чисто формальной точкѣ зрѣнія, ограничиваясь разсмотрѣніемъ общихъ формулъ. При этомъ С. Ли не дѣлаетъ различія между интегралами различныхъ классовъ и не даетъ способовъ разысканія полныхъ интеграловъ одного даннаго опредѣленнаго класса. Такая постановка изслѣдованія не можетъ удовлетворять читателя, оставляя не выясненнымъ вопросъ о взаимномъ отношеніи теорій дифференціальныхъ уравненій и производныхъ уравненій С. Ли.

Мы указали уже въ первой главѣ настоящаго изслѣдованія (см. n⁰ 8) существенное различіе въ опредѣленіи дифференціальныхъ уравненій и производныхъ уравненій С. Ли; кромѣ того, на предыдущихъ страницахъ, отмѣчено также различіе между тѣми и другими уравненіями, относительно существованія ихъ рѣшеній, и указано, что полные интегралы С. Ли существуютъ только для уравненій исключительнаго вида.

Въ виду послѣднихъ изложенныхъ соображеній, являются вопросы, относительно условій, при которыхъ существуютъ интегралы С. Ли, относительно разысканія производныхъ уравненій, допускающихъ интегралы С. Ли опредѣленнаго класса, и, наконецъ, относительно того значенія, которое представляютъ производныя уравненія С. Ли и ихъ интегральныя собранія.

[1]) Loc. cit. S. 150.
[2]) Mathematische Annalen, Bd. 9, S. 261.

Кромѣ общаго научнаго интереса, который представляетъ всякая математическая теорія, значеніе интеграловъ С. Ли, для теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, выясняется въ достаточной мѣрѣ изъ ихъ разсмотрѣннаго свойства, представлять систему интеграловъ въ инволюціи каноническихъ уравненій, соотвѣтствующихъ даннымъ производнымъ уравненіямъ. Этимъ послѣднимъ свойствомъ интеграловъ С. Ли намъ придется воспользоваться въ дальнѣйшемъ изложеніи, при интегрированіи изслѣдуемыхъ дифференціальныхъ уравненій.

Что же касается условій существованія интеграловъ С. Ли и вычисленія производныхъ уравненій, допускающихъ полные интегралы различныхъ классовъ, то, для рѣшенія возникающихъ при этомъ вопросовъ, намъ придется интегрировать нѣкоторыя системы уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ функцій. Съ изученія этихъ послѣднихъ уравненій мы и имѣемъ въ виду начать наши дальнѣйшія изслѣдованія.

ГЛАВА III.

Объ интегрированіи нѣкоторыхъ уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ неизвѣстныхъ функцій.

1. Уравненія, которыя служатъ предметомъ изслѣдованія настоящей главы, представляютъ обобщеніе уравненій, проинтегрированныхъ Якоби въ его мемуарѣ: *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* [1]) и къ которымъ приводятся многіе вопросы анализа. Теорія интегрированія изслѣдуемыхъ уравненій была опубликована мною на страницахъ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* за 1897 годъ въ мемуарѣ: *Etude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* [2]).

Интегрируя на послѣдующихъ страницахъ наши обобщенныя уравненія, мнѣ придется вмѣстѣ съ тѣмъ подвергнуть и интегралы упомянутыхъ уравненій Якоби болѣе подробному изученію, чѣмъ это дѣлалъ знаменитый геометръ въ своихъ изслѣдованіяхъ.

Обозначимъ черезъ $z_1, z_2, \ldots z_n$ неизвѣстныя функціи $m+p$ независимыхъ перемѣнныхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots x_{m+p}$.

Уравненія, которыя мы имѣемъ въ виду интегрировать, представляются слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} - X^{hr} = 0, \\ &h=1,2,\ldots m, \quad r=1,2,\ldots n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

при чемъ коэффиціенты X_k^h, X^{hr} представляютъ функціи всѣхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_{m+p}, z_1, z_2, \ldots z_n$, и значекъ p имѣетъ нѣкоторое цѣлое численное значеніе.

Въ частномъ случаѣ, когда значекъ p тождественно равенъ нулю, то всѣ коэффиціенты X_k^h исчезаютъ, и изслѣдуемая система приводится къ извѣстной системѣ уравненій

[1]) Jacobi.—Gesammelte Werke, Band IV, S. 7.

[2]) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. III, 5-e série, p. 423.

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_h} = X^{hr},$$
$$h=1,2,\ldots m, \quad r=1,2,\ldots n,$$

соотвѣтствующихъ уравненіямъ въ полныхъ дифференціалахъ, при чемъ функціи X^{hr} должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ точности дифференціаловъ.

Если значекъ n равенъ 1, то разсматриваемыя уравненія представляютъ систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Наконецъ, если показатель m равенъ 1, то наши уравненія принимаютъ видъ упомянутой выше системы уравненій Якоби [1]), обобщеніе которой представляетъ предметъ настоящей главы нашего изслѣдованія. Въ этомъ случаѣ число уравненій n равно числу неизвѣстныхъ функцій и, стало-быть, соотвѣтствующія уравненія Якоби допускаютъ всегда, въ извѣстной области измѣненія перемѣнныхъ, существованіе интеграловъ, какъ это слѣдуетъ, на основаніи изслѣдованій Коши и Ковалевской.

Если показатель m больше 1, т. е. число уравненій превышаетъ число заключающихся въ нихъ неизвѣстныхъ функцій, то, какъ извѣстно, существованіе интеграловъ послѣднихъ уравненій требуетъ выполненія нѣкоторыхъ дополнительныхъ условій, формальнаго характера. Объ этихъ послѣднихъ легко судить по частнымъ случаямъ, отмѣченнымъ выше, когда $p=0$ или когда $n=1$. Въ первомъ случаѣ, для существованія интеграловъ разсматриваемыхъ уравненій, должны удовлетворяться условія точности дифференціаловъ; во-второмъ же случаѣ изслѣдуемая система уравненій должна быть якобіевской, т. е. должны уничтожаться тождественно составленныя извѣстнымъ образомъ скобки Пуассона изъ лѣвыхъ частей разсматриваемыхъ уравненій.

Ниже мы составимъ, въ самомъ общемъ видѣ, условія, которымъ должны удовлетворять изслѣдуемыя уравненія (1), для того чтобы допускать существованіе интеграловъ. Эти условія явятся слѣдствіемъ зависимости между уравненіями (1) и нѣкоторой якобіевской системой линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по всѣмъ перемѣннымъ величинамъ $x_1, x_2, \ldots x_{m+p}$, $z_1, z_2, \ldots z_n$, разсматриваемымъ какъ независимыя перемѣнныя.

2. Предположимъ, что слѣдующая система n различныхъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} &f_i(x_1, x_2, \ldots x_{m+p}, z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\ &i=1,2,\ldots n, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[1]) Въ Journal Crelle (Bd. 100, S. 404, Bd. 110, S. 171) Гамбургеръ два раза возвращался, въ своихъ изслѣдованіяхъ, къ этимъ уравненіямъ.

разрѣшимыхъ относительно перемѣнныхъ величинъ $z_1, z_2, \dots z_n$, представляетъ рѣшеніе изслѣдуемой системы дифференціальныхъ уравненій (1). Дифференцируя уравненія (2) по всѣмъ независимымъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \dots x_n$, получаемъ рядъ слѣдующихъ производныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_h}+\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial x_h}=0,\\ h=1,2,\dots m,\end{array}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}+\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial x_k}=0,\\ k=m+1,\ m+2,\dots m+p,\end{array}\right\} \qquad (4)$$

при чемъ значекъ i принимаетъ всѣ различныя значенія, отъ 1 до n.

Умножаемъ равенства (4) соотвѣтственно на X^h_k и сумму ихъ складываемъ съ уравненіемъ (3), соотвѣтствующимъ значку h. Такимъ образомъ мы получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ равенствъ

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_h}+\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+p}X^h_k\frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial z_r}{\partial x_h}+\sum_{k=m+1}^{m+p}X^h_k\frac{\partial z_r}{\partial x_k}\right)\frac{\partial f_i}{\partial z_r}=0,\\ h=1,2,\dots m,\qquad i=1,2,\dots n.\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Такъ какъ уравненія (2) даютъ рѣшенія данной системы (1), то для опредѣляемыхъ равенствами (2) значеній функцій $z_1, z_2, \dots z_n$ имѣютъ мѣсто тождества

$$\begin{array}{c}\dfrac{\partial z_r}{\partial x_h}+\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+p}X^h_k\frac{\partial z_r}{\partial x_k}=X^{hr},\\ h=1,2,\dots m,\qquad r=1,2,\dots n.\end{array}$$

Подставляя, въ предыдущія равенства (5), правыя части послѣднихъ написанныхъ равенствъ, вмѣсто ихъ лѣвыхъ частей, получаемъ слѣдующія новыя равенства

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_h}+\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+p}X^h_k\frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\sum_{r=1}^{n}X^{hr}\frac{\partial f_i}{\partial z_r}=0,\\ h=1,2,\dots m,\qquad i=1,2,\dots n.\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію: *чтобы опредѣляемыя уравненіями (2) функціи $z_1, z_2, \dots z_n$ удовлетворяли данной системѣ (1), для этого равенства (6) необходимо должны быть слѣдствіемъ уравненій (2).* Такъ какъ лѣвыя части полученныхъ равенствъ (6) представляютъ функціи всѣхъ перемѣнныхъ x и z, то мы говоримъ, что, въ общемъ случаѣ, равенства (6) должны уничтожаться на основаніи уравненій (2). Въ частности равенства (6) могутъ также уничтожаться тождественно, были бы только для этого подобраны соотвѣтствующимъ образомъ функціи

$$f_1, f_2, \dots f_n.$$

Наконецъ, равенства (6) должны представлять тождества еще и въ томъ случаѣ, когда въ правыхъ частяхъ уравненій (2), вмѣсто нулей, поставить соотвѣтственно произвольныя постоянныя величины $C_1, C_2, \dots C_n$.

3. Благодаря выведеннымъ равенствамъ (6), устанавливается зависимость между изслѣдуемой системой дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ неизвѣстныхъ функцій $z_1, z_2, \dots z_n$ (1) и системой линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи f по всѣмъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \dots x_{m+p}, z_1, z_2, \dots z_n$, разсматриваемымъ какъ независимыя перемѣнныя,

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial f}{\partial x_h}+\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+p}X^h_k\frac{\partial f}{\partial x_k}+\sum_{r=1}^{n}X^{hr}\frac{\partial f}{\partial z_r}=0,\\ h=1,2,\dots m.\end{array}\right\} \qquad (7)$$

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что послѣдняя система уравненій (7) интегрируема и имѣетъ n интеграловъ $f_1, f_2, \dots f_n$, различныхъ относительно перемѣнныхъ $z_1, z_2, \dots z_n$, такъ что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \dots f_n}{z_1, z_2, \dots z_n}\right) \gtrless 0. \qquad (8)$$

Легко доказать въ такомъ случаѣ, что *слѣдующія уравненія*

$$f_i=0,\ i=1,\ 2,\dots n. \qquad (9)$$

опредѣляютъ рѣшеніе системы данныхъ уравненій (1).

Дѣйствительно, поступая съ уравненіями (9) совершенно аналогично тому, какъ мы дѣлали это въ началѣ предыдущаго n^0 2-го съ уравненіями (2), мы получаемъ слѣдующія равенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X^h_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X^h_k \frac{\partial z_r}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f_i}{\partial z_r} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots n,$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателя h, отъ 1 до m.

Такъ какъ, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ, функціи f_i представляютъ интегралы системы уравненій (7), то, стало-быть, имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X^h_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n} X^{hr} \frac{\partial f_i}{\partial z_r} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots n,$$

для всѣхъ значеній h, отъ 1 до m.

Поэтому, на основаніи послѣднихъ равенствъ, предыдущія становятся

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z} \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X^h_k \frac{\partial z_r}{\partial x_k} - X^{hr} \right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots n,$$

для всѣхъ значеній h, отъ 1 до m. Въ виду неравенства (8), система n послѣднихъ тождествъ приводитъ къ n слѣдующимъ новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X^h_k \frac{\partial z_r}{\partial x_k} - X^{hr} = 0,$$

$$r = 1, 2, \dots n,$$

которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній показателя h, отъ 1 до n, и доказываютъ такимъ образомъ справедливость нашего предложенія.

4. Итакъ, чтобы изслѣдуемая система уравненій (1) имѣла рѣшенія, для этого достаточно, чтобы уравненія (7) имѣли n различныхъ интеграловъ. Поэтому условія, которымъ для этого должна удовлетворять послѣдняя система (7), представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ условія интегрируемости данныхъ уравненій (1).

Предположимъ, что коэффиціенты послѣднихъ уравненій X^h_k, X^{hr} таковы, что m уравненій (7) образуютъ *якобіевскую* систему, обладающую $p+n$ различными рѣшеніями.

Соотвѣтствующая система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ имѣетъ слѣдующій видъ

$$dx_k = \sum_{h=1}^{m} X^h_k \, dx_h,$$

$$k = m+1, \ m+2, \dots m+p,$$

$$dz_r = \sum_{h=1}^{m} X^{hr} \, dx_h,$$

$$r = 1, 2, \dots n.$$

Въ частномъ случаѣ, когда мы имѣемъ дѣло съ системой уравненій (1) Якоби, т. е. при $m=1$, тогда послѣдняя система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ обращается въ систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, которая можетъ быть представлена также въ слѣдующемъ видѣ, какъ изображаетъ ее Якоби,

$$dx_1 = \frac{dx_k}{X_k} = \frac{dz_r}{X^r},$$

$$k = 2, 3, \dots p+1, \quad r = 1, 2, \dots n,$$

при чемъ второй значекъ коэффиціентовъ X^r мы опускаемъ, какъ излишній.

Пусть функціи

$$f_1, \ f_2, \dots f_{p+n}$$

представляютъ систему $p+n$ различныхъ интеграловъ уравненій (7). Такъ какъ произвольная функція послѣднихъ интеграловъ представляетъ также рѣшеніе системы (7), то, на основаніи теоремы, доказанной въ предыдущемъ n^0 3-емъ, слѣдующія формулы

$$\left. \begin{array}{c} \Pi_r \ (f_1, \ f_2, \dots f_{p+n}) = 0, \\ r = 1, 2, \dots n, \end{array} \right\} \tag{10}$$

представляютъ рѣшеніе данныхъ уравненій (1), при чемъ $\Pi_1, \ \Pi_2, \dots \Pi_n$ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Легко доказать, что уравненія (10) представляютъ *общій интегралъ* системы (1), т. е. всякое рѣшеніе послѣднихъ уравненій

$$\left. \begin{array}{c} z_r = \psi_r \ (x_1, \ x_2, \dots x_{m+p}), \\ r = 1, 2, \dots n, \end{array} \right\} \tag{11}$$

заключается въ формулахъ (10), при условіи, что всѣ значенія перемѣнныхъ x и z, удовлетворяющія зависимостямъ (11), находятся внутри области измѣненія перемѣнныхъ величинъ, для которой якобіевская система (7) интегрируема [1]).

Въ самомъ дѣлѣ, для каждаго значенія показателя h, мы имѣемъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial \psi_r}{\partial x_k} - X^{hr} = 0,$$

$$r = 1, 2, \ldots n,$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_s}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n} X^{hr} \frac{\partial f_s}{\partial z_r} = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots p+n.$$

Подставляя въ нихъ значенія функцій $z_1, z_2, \ldots z_n$, опредѣляемыя уравненіями (11)-ыми и исключая изъ полученныхъ такимъ образомъ тождествъ значенія n величинъ X^{hr}, соотвѣтствующія показателямъ $r = 1, 2, \ldots n$, находимъ новыя тождества

$$\left. \begin{array}{c} Dx_h\, f_s + \sum\limits_{k=m+1}^{m+p} X_k^h\, Dx_k f_s = 0, \\ s = 1, 2, \ldots p+n, \end{array} \right| \qquad (12)$$

гдѣ введены слѣдующія условныя обозначенія

$$Dx_i\, f_s = \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial z_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i}.$$

Изъ полученныхъ равенствъ (12) исключаемъ p величинъ X_k^h, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ $k = m+1, m+2, \ldots m+p$. Такъ какъ число всѣхъ уравненій равно $p+n$, то въ результатѣ исключенія мы получаемъ n новыхъ тождествъ, независящихъ отъ величинъ X_k^h, которыя мы представляемъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\Delta_{h\sigma} = 0,$$

$$\sigma = p+1, p+2, \ldots p+n.$$

Введенное здѣсь выраженіе

$$\Delta_{h\sigma}$$

[1]) Ср. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій....* Стр. 26.

обозначаетъ функціональный опредѣлитель, составленный изъ функцій

$$f_1, f_2, \ldots f_p, f_\sigma,$$

относительно перемѣнныхъ величинъ

$$x_h, x_{m+1}, \ldots x_{m+p},$$

при чемъ перемѣнныя величины $z_1, z_2, \ldots z_n$ разсматриваются какъ функціи (11) всѣхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_{m+p}$, такъ что мы имѣемъ

$$\Delta_{h\sigma} \equiv \begin{vmatrix} Dx_h\, f_1 & Dx_{m+1}\, f_1 \ldots & Dx_{m+p}\, f_1 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \\ Dx_h\, f_p & Dx_{m+1}\, f_p \ldots & Dx_{m+p}\, f_p \\ Dx_h\, f_\sigma & Dx_{m+1}\, f_\sigma \ldots & Dx_{m+p}\, f_\sigma \end{vmatrix}.$$

Тождества

$$\Delta_{h\sigma} = 0,$$

$$h = 1, 2, \ldots m,$$

показываютъ, что разсматриваемыя значенія функцій

$$f_1, f_2, \ldots f_p, f_\sigma$$

связаны между собой одной зависимостью.

Давая значку σ всѣ n значеній отъ $p+1$ до $p+n$, мы заключаемъ, на основаніи послѣднихъ тождествъ, что, подставляя рѣшеніе (11) данныхъ уравненій (1) въ функціи

$$f_1, f_2, \ldots f_p, f_{p+1}, \ldots f_{p+n},$$

получаемъ ихъ значенія, которыя оказываются связанными n различными зависимостями.

Отсюда и слѣдуетъ искомое заключеніе, что *уравненія (10) представляютъ общій интегралъ данной системы дифференціальныхъ уравненій (1).*

Приведенное доказательство представляетъ обобщеніе извѣстныхъ доказательствъ, данныхъ для случаевъ одного линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи и для якобіевскихъ системъ послѣднихъ уравненій [1]).

[1]) Ср. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій....* гл. II, стр. 11 и слѣд. и статью: *Sur la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction. (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3 série,* t. XVIII).

Само собою разумѣется, что разсматриваемое доказательство ограничивается только указанной областью интегрируемости разсматриваемыхъ уравненій. Если послѣднюю область мы ограничимъ, напримѣръ, условіями однозначности коэффиціентовъ X^h_k, X^{hr} и существованія ихъ конечныхъ и непрерывныхъ первыхъ частныхъ производныхъ по входящимъ въ нихъ перемѣннымъ величинамъ, то рѣшенія уравненій (1), не удовлетворяющія послѣднимъ условіямъ, не могутъ заключаться въ указанномъ общемъ интегралѣ изслѣдуемыхъ уравненій, который принадлежитъ разсматриваемой области интегрированія. Въ самомъ дѣлѣ, если имѣетъ мѣсто послѣдній случай, то нѣкоторые изъ разсматриваемыхъ функціональныхъ опредѣлителей

$$\Delta_{h\sigma}$$

могутъ принимать неопредѣленныя или безконечно большія значенія, и наше доказательство не приводитъ болѣе къ желаемому результату.

Возьмемъ, напримѣръ, слѣдующую систему уравненій съ частными производными двухъ функцій z_1 и z_2 по независимымъ перемѣннымъ x и y:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = 1 + \sqrt{z_1 - x}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = \left(z_2 - xy\right)\sqrt{z_1 - x},$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial y} = x + \left(z_2 - xy\right)\left(x - 2\sqrt{z_1 - x}\right).$$

Внутри области однозначности коэффиціентовъ данныхъ уравненій, ихъ общій интегралъ, согласно съ изложенной теоріей, имѣетъ слѣдующее значеніе

$$z_1 = x + \left[\frac{1}{2}x - C_1 \, tang\,(C_1 y + C_2)\right]^2,$$

$$z_2 = xy - 2\,C_1^2 \, séc^{\,2}(C_1 y + C_2),$$

гдѣ C_1 и C_2 обозначаютъ двѣ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины. Разсматриваемыя уравненія имѣютъ очевидно также слѣдующее рѣшеніе

$$z_1 = x, \; z_2 = xy,$$

которое однако, какъ легко видѣть, не заключается въ предыдущихъ формулахъ и не можетъ быть изъ нихъ получено, такъ какъ для опредѣляемыхъ послѣднимъ рѣшеніемъ значеній перемѣнныхъ z_1, z_2, x, y коэффиціенты данныхъ уравненій перестаютъ быть однозначными.

ГЛАВА IV.

Разысканіе производныхъ уравненій С. Ли, допускающихъ полные интегралы С. Ли даннаго класса.

1. Исходя изъ разсмотрѣнія свойствъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, мы имѣли уже случай отмѣтить, во второй главѣ нашего изслѣдованія, нѣсколько общихъ условій, которымъ должны удовлетворять производныя уравненія С. Ли для того, чтобы существовали для нихъ разсматриваемые интегралы даннаго опредѣленнаго класса. Наши дальнѣйшія вычисленія будутъ основываться на доказанномъ выше, въ n^0 4-омъ второй главы, свойствѣ разсматриваемыхъ интегральныхъ собраній, представлять интегралы въ инволюціи канонической системы, которые связаны между собой указанными выше зависимостями.

Начнемъ съ изслѣдованія простѣйшаго случая, представляемаго однимъ производнымъ уравненіемъ, не заключающимъ перемѣнной z,

$$p_1 + H\,(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) = 0. \tag{1}$$

Какъ было доказано, въ n^0 2-мъ второй главы, полный интегралъ С. Ли послѣдняго уравненія опредѣляется при помощи квадратуры, послѣ того какъ извѣстны $n-1$ уравненій нашего интегральнаго собранія, независящихъ отъ перемѣнной z. Поэтому, возвращаясь къ первымъ $n-1$ уравненіямъ (26) второй главы, легко видѣть, совершенно аналогично разсмотрѣнному общему случаю, когда исходное производное уравненіе заключаетъ перемѣнную z, что функціи

$$F_1, F_2, \ldots F_{n-1}$$

должны удовлетворять слѣдующимъ q зависимостямъ

$$F_{n-q+i} \equiv \Phi_{i+1}\,(x_1, x_2, \ldots x_n, F_1, F_2, \ldots F_{n-q-1}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots q-1, \tag{2}$$

для того, чтобы упомянутыя уравненія (26) опредѣляли полный интегралъ С. Ли q-аго класса даннаго уравненія (1).

Для выясненія сущности дальнѣйшихъ вычисленій, займемся прежде всего простѣйшимъ случаемъ существованія полныхъ интеграловъ С. Ли $n-1$ класса, который былъ изслѣдованъ выше, въ n^0 5-омъ второй главы, исходя изъ основныхъ понятій о происхожденіи производныхъ уравненій С Ли.

Если данное уравненіе (1) имѣетъ полный интегралъ С. Ли $n-1$-аго класса, то очевидно, что всѣ функціи F_s зависятъ только отъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, и равенства (2) должны выражаться слѣдующимъ образомъ

$$F_s \equiv \Phi_s\,(x_1,\, x_2, \ldots x_n),$$
$$s=1,\, 2, \ldots n-1.$$

Такъ какъ послѣднія функціи не заключаютъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса, то всѣ функціи Φ_s находятся въ инволюціи. Наконецъ, соотвѣтствующее разсматриваемому уравненію (1) линейное уравненіе съ частными производными, которому удовлетворяютъ функціи Φ_s, становится

$$\left(p_1+H,\ \Phi\right) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0. \qquad (3)$$

Искомые интегралы послѣдняго уравненія

$$\Phi_1,\ \Phi_2, \ldots \Phi_{n-1} \qquad (4)$$

не должны зависѣть отъ перемѣнныхъ $p_2, p_3, \ldots p_n$. Поэтому имѣютъ мѣсто тождества

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_s\, \partial p_k} = 0,$$

для всѣхъ значеній указателей s и k, отъ 1 до n. Слѣдовательно, производныя, взятыя по перемѣннымъ p_k отъ предыдущихъ уравненій (3), должны также уничтожаться тождественно.

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующія новыя уравненія, которымъ должны удовлетворять искомыя функціи (4),

$$\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s\, \partial p_k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$
$$k=2,\, 3, \ldots n.$$

Такъ какъ число всѣхъ различныхъ требуемыхъ интеграловъ уравненія (3) равно $n-1$, то полученныя послѣднія $n-1$ уравненій должны уничтожаться тождественно, каждое въ отдѣльности, т. е. имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\, \partial p_k} = 0, \qquad (5)$$

для всѣхъ значеній s и k, отъ 2 до n. Интегрируя эти послѣднія равенства, мы получаемъ слѣдующія зависимости

$$\frac{\partial H}{\partial p_{i+1}} = X_i,$$
$$i=1,\, 2, \ldots n-1,$$

гдѣ всѣ X_i представляютъ произвольныя функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Интегрируя вновь полученныя равенства еще одинъ разъ, получаемъ искомое значеніе функціи H

$$H = \sum_{i=1}^{n} X_i p_{i+1} + X,$$

при чемъ X обозначаетъ новую произвольную функцію. Такимъ образомъ, мы получаемъ прежній результатъ: *чтобы данное уравненіе (1) допускало полное рѣшеніе С. Ли $n-1$-аго класса, оно должно приводиться къ линейному уравненію относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2 \ldots p_n$ слѣдующаго вида*

$$p_1 + X_1 p_2 + X_2 p_3 + \ldots + X_{n-1} p_n + X = 0,$$

гдѣ коэффиціенты $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$, X являются функціями перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$.

То же самое предложеніе имѣетъ мѣсто и для производныхъ уравненій С. Ли, заключающихъ перемѣнную величину z. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ однако всѣ искомыя функціи, число которыхъ теперь становится равнымъ n,

$$\Phi_1,\ \Phi_2, \ldots \Phi_n \qquad (6)$$

зависятъ также отъ перемѣнной z и опредѣляются слѣдующимъ уравненіемъ (см. n^0 4, глава II)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \left(\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_s} p_s - H\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Такъ какъ функціи Φ_s не должны зависѣть отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса, то искомые интегралы (6) послѣдняго уравненія удовлетворяютъ также уравненіямъ, которыя получаются дифференцированіемъ послѣдняго по всѣмъ перемѣннымъ $p_2, p_3, \ldots p_n$. Получаемыя такимъ образомъ уравненія, послѣ приведенія, принимаютъ слѣдующій видъ

$$\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \, \partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \sum_{s=2}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \, \partial p_k} p_s \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$$k = 2, 3, \ldots n.$$

Отсюда, при помощи разсужденій аналогичныхъ предыдущимъ, получаются тѣ же уравненія (5). Поэтому мы приходимъ къ прежнему заключенію, что *производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, допускающее полные интегралы С. Ли $n-1$-аго класса, должно быть линейнымъ относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса, при чемъ коэффиціенты этого уравненія зависятъ отъ каноническихъ перемѣнныхъ перваго класса и перемѣнной z.*

2. Наши дальнѣйшія изслѣдованія начнемъ съ разсмотрѣнія нѣкоторыхъ простѣйшихъ частныхъ случаевъ. Пусть имѣемъ производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ четырехъ измѣреній, независящее отъ перемѣнной z,

$$p_1 + H(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = 0. \tag{7}$$

Такъ какъ данное уравненіе представлено въ видѣ, разрѣшенномъ относительно перемѣнной p_1, т. е. заключаетъ каноническія перемѣнныя второго класса, то, согласно съ предыдущимъ (см. $n^0 5$, глава II), разсматриваемое уравненіе (7) не имѣетъ полнаго интеграла С. Ли третьяго класса. Чтобы имѣть полные интегралы С. Ли второго класса, разсматриваемое уравненіе, на основаніи только что доказаннаго предложенія, должно быть линейнымъ относительно перемѣнныхъ величинъ p_1, p_2, p_3.

Остается, наконецъ, изслѣдовать третій возможный случай, когда существуетъ полный интегралъ С. Ли перваго класса даннаго уравненія (7).

Составляемъ соотвѣтствующее ему линейное уравненіе

$$(p_1 + H, F) = 0.$$

Чтобы существовалъ искомый интегралъ уравненія (7), послѣднее линейное уравненіе должно имѣть два интеграла F_1 и F_2 такихъ, чтобы совокупность уравненій (7)-ого и двухъ слѣдующихъ

$$F_1(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = C_1,$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = C_2,$$

опредѣляла полный интегралъ С. Ли перваго класса даннаго производнаго уравненія (7), гдѣ C_1 и C_2—двѣ произвольныя постоянныя. Для этого должны существовать слѣдующія равенства

$$(p_1 + H, F_1) = 0, \tag{8}$$

$$(p_1 + H, F_2) = 0, \; (F_1, F_2) = 0, \tag{9}$$

и кромѣ того функція F_2 должна быть связана съ функціей F_1 зависимостью

$$F_2 = \Phi(x_1, x_2, x_3, F_1).$$

Оба уравненія (9) преобразовываемъ слѣдующимъ образомъ. Предполагая

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \gtrless 0,$$

принимаемъ F_1 за новую перемѣнную вмѣсто p_2. Такъ какъ, въ силу предыдущей зависимости между F_2 и F_1, функція F_2 выражается въ новыхъ перемѣнныхъ только черезъ величины x_1, x_2, x_3 и F_1, то формулы преобразованія уравненій (9) къ новымъ перемѣннымъ становятся

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_i},$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_s} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial p_s},$$

$$s = 2, 3.$$

Поэтому преобразованныя уравненія (9), въ силу уравненія (8), принимаютъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{3} X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sum_{s=2}^{3} Y_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

при чемъ коэффиціенты X_s, Y_s представляютъ функціи перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, F_1 и p_3, которыя получаются соотвѣтственно изъ выраженій производныхъ

$$\frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_s},$$

замѣной въ нихъ значенія прежней перемѣнной p_2 черезъ новую перемѣнную F_1.

Такъ какъ искомое значеніе функціи Φ не зависитъ отъ перемѣнной p_3, то очевидно функція Φ должна удовлетворять также слѣдующимъ уравненіямъ, которыя получаются изъ уравненій (10) дифференцированіемъ ихъ по перемѣнной p_3,

$$\sum_{s=2}^{3} \frac{\partial X_s}{\partial p_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$$\sum_{s=2}^{3} \frac{\partial Y_s}{\partial p_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0.$$

Въ виду того, что система (10) допускаетъ всего одинъ только интегралъ, отличный отъ F_1, то послѣднія два уравненія должны представлять слѣдствія уравненій (10). Поэтому имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$\left.\frac{\frac{\partial X_2}{\partial p_3}}{Y_2} = \frac{\frac{\partial X_3}{\partial p_3}}{Y_3}, \quad \frac{\frac{\partial Y_2}{\partial p_3}}{Y_2} = \frac{\frac{\partial Y_3}{\partial p_3}}{Y_3}.\right\} \tag{11}$$

Послѣднее изъ этихъ двухъ равенствъ (11) даетъ слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial}{\partial p_3} lg \frac{Y_2}{Y_3} = 0,$$

интегрированіе котораго показываетъ, что отношеніе $\frac{Y_2}{Y_3}$ представляетъ произвольную функцію перемѣнныхъ величинъ x_1, x_2, x_3 и F_1, независящую отъ перемѣнной p_3. Такимъ образомъ получается зависимость

$$Y_2 = \varphi\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ F_1)\ Y_3, \tag{12}$$

гдѣ φ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ. Поэтому, на основаніи послѣдняго равенства (12), первое уравненіе (11) приводится къ слѣдующему виду

$$Y_3 \left(\frac{\partial X_2}{\partial p_3} - \varphi \frac{\partial X_3}{\partial p_3} \right) = 0.$$

Если предположить, что первый множитель послѣдняго равенства обращается въ нуль, тогда, въ силу уравненія (12), получаемъ

$$Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0.$$

Послѣднія равенства приводятъ къ заключенію, что функція F_1, внутри нашей области измѣненія перемѣнныхъ, не зависитъ отъ перемѣнныхъ p_2 и p_3, что противно введенному выше условію $\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \gtrless 0$.

Отбрасывая поэтому сдѣланное предположеніе, приравниваемъ нулю второй множитель разсматриваемаго равенства и получаемъ слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial X_2}{\partial p_3} - \varphi \frac{\partial X_3}{\partial p_3} = 0,$$

которое приводится къ виду

$$\frac{\partial}{\partial p_3} (X_2 - \varphi\, X_3) = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, заключаемъ, что выраженіе въ скобкахъ представляетъ произвольную функцію перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3 и F_1, т. е.

$$X_2 - \varphi\, X_3 = \psi\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ F_1), \tag{13}$$

при чемъ ψ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ.

Въ силу неравенства $Y_3 \gtrless 0$, разрѣшая уравненія (10) относительно производныхъ $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$ и принимая во вниманіе равенства (12)—(13), приводимъ уравненія (10) къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ F_1) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \varphi\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ F_1) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Такъ какъ послѣдняя система уравненій должна быть нормальной, то отсюда слѣдуетъ, что функціи ψ и φ удовлетворяютъ условію

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \tag{15}$$

Возвращаясь въ уравненіяхъ (12) и (13) къ прежнимъ перемѣннымъ, т. е. совершая обратную замѣну перемѣнной F_1 черезъ p_2, мы должны разсматривать въ послѣднихъ уравненіяхъ величину F_1 какъ функцію перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, p_2, p_3; подставляя, наконецъ, значенія выраженій X_s Y_s, мы получаемъ систему слѣдующихъ двухъ уравненій, опредѣляющихъ функціи H и F_1:

$$\frac{\partial H}{\partial p_2} - \varphi\ (x_1, x_2, x_3, F_1)\frac{\partial H}{\partial p_3} = \psi\ (x_1, x_2, x_3, F_1),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} - \varphi\ (x_1, x_2, x_3, F_1)\frac{\partial F_1}{\partial p_3} = 0.$$

Послѣднія уравненія принадлежатъ къ якобіевскому виду, представляющему частный случай дифференціальныхъ уравненій, теорія которыхъ изложена въ третьей главѣ настоящаго изслѣдованія. Соотвѣтствующая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, къ интегрированію которой приводятся предыдущія уравненія, становится

$$dp_2 = \frac{dp_3}{-\varphi} = \frac{dH}{\psi} = \frac{dF_1}{0}.$$

Система трехъ различныхъ интеграловъ послѣднихъ уравненій выражается слѣдующимъ образомъ

$$F_1 = C_1,\ H - \psi p_2 = C_2,$$

$$p_3 + \varphi p_2 = C_3$$

гдѣ C_1, C_2 и C_3 обозначаютъ три произвольныя постоянныя величины. Поэтому искомыя значенія функцій H и F_1 опредѣляются уравненіями

$$H = \psi p_2 + \Pi\ (x_1, x_2, x_3, p_3 + \varphi p_2),$$

$$F_1 = \Pi_1\ (x_1, x_2, x_3, p_3 + \varphi p_2), \tag{16}$$

гдѣ Π и Π_1 обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ, при чемъ выраженіе H зависитъ отъ значенія функціи F_1, черезъ посредство функцій ψ и φ.

Кромѣ того обѣ функціи H и F_1 удовлетворяютъ уравненію (8). Послѣднее мы можемъ разсматривать какъ уравненіе, служащее для опредѣленія произвольной функціи Π_1.

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующему выводу:

Производное уравненіе (7), для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли перваго класса, имѣетъ слѣдующій видъ

$$p_1 + \psi p_2 + \Pi\ (x_1, x_2, x_3, p_3 + \varphi p_2) = 0,$$

при чемъ функціи ψ, φ связаны уравненіемъ (15), а функція F_1 опредѣляется уравненіями (8)-ымъ и (16)-ымъ. Искомый полный интегралъ опредѣляется функціей F_1 и интеграломъ системы (14).

Возьмемъ слѣдующій примѣръ. Предположимъ, что функціи ψ и φ не зависятъ отъ функціи F_1 и имѣютъ слѣдующія значенія, удовлетворяющія условію (15)-ому,

$$\psi = 0,\ \varphi = 1.$$

Если дать функціи Π значеніе $x_2\ (p_2 + p_3)^2$, то соотвѣтствующее производное уравненіе С. Ли становится

$$p_1 + x_2\ (p_2 + p_3)^2 = 0. \tag{17}$$

Соотвѣтствующее равенство (8) даетъ, для опредѣленія функціи Π_1, представляющей значеніе функціи F_1, слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} + 2x_2 u\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} + 2x_2 u\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_3} - u_2\frac{\partial \Pi_1}{\partial u} = 0,$$

гдѣ перемѣнная величина u имѣетъ значеніе

$$u = p_2 + p_3.$$

Поэтому общій видъ функціи F_1 выражается слѣдующей формулой

$$F_1 = \Pi_1\ [x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3},\ x_2\ (p_2 + p_3)^2,\ x_3 - x_2],$$

при чемъ Π_1 представлиетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ. Наконецъ, уравненія (14) опредѣляютъ слѣдующимъ образомъ функцію Φ

$$\Phi = \Pi_2\ (x_3 - x_2, F_1),$$

гдѣ Π_2—также произвольная функція входящихъ въ нее аргументовъ.

Прировнявъ двумъ различнымъ произвольнымъ постояннымъ величинамъ функціи F_1 и Φ, мы получаемъ, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (17), систему, опредѣляющую искомый полный интегралъ С. Ли. Однако для этого достаточно ограничиться разсмотрѣніемъ какихъ-либо двухъ различныхъ частныхъ значеній произвольныхъ функцій Π_1 и Π_2. Такъ, напримѣръ, послѣднія два уравненія замѣнимъ слѣдующими двумя равенствами

$$x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3} = C_1, \quad x_3 - x_2 = C_2,$$

гдѣ C_1 и C_2 двѣ различныя произвольныя постоянныя величины. Послѣднія два уравненія, совмѣстно съ даннымъ (17)-ымъ, приводятся къ виду

$$x_3 = x_2 + C_2,$$

$$p_1 = -\frac{x_2}{(x_1 - C_1)^2}, \quad p_2 = \frac{1}{x_1 - C_1} - p_3.$$

Поэтому послѣднее четвертое уравненіе искомаго интегральнаго собранія опредѣляется интегрированіемъ точнаго дифференціала

$$dz = -\frac{x_2\, dx_1}{(x_1 - C_1)^2} + \frac{dx_2}{x_1 - C_1},$$

которое приводитъ къ искомому уравненію

$$z = \frac{x_2}{x_1 - C_1} + C_3,$$

гдѣ C_3 обозначаетъ новую произвольную постоянную величину. Такимъ образомъ совокупность послѣдняго уравненія, совмѣстно съ тремя предыдущими, представляетъ искомое полное интегральное собраніе С. Ли перваго класса даннаго производнаго уравненія (17).

3. Пусть имѣемъ производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ пяти измѣреній

$$p_1 + H\,(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2, p_3, p_4) = 0. \tag{18}$$

Такъ какъ послѣднее уравненіе заключаетъ каноническія перемѣнныя второго класса, то, слѣдовательно, не допускаетъ полнаго интеграла С. Ли четвертаго класса.

Для того, чтобы имѣть полные интегралы третьяго класса, разсматриваемое уравненіе (18), какъ хорошо извѣстно, должно быть линейнымъ относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса.

Такимъ образомъ остается изслѣдовать только два случая, когда для даннаго уравненія (18) существуютъ полные интегралы С. Ли второго и перваго классовъ.

Искомый интегралъ второго класса опредѣляется, очевидно тремя функціями

$$F_1, \; F_2, \; F_3,$$

удовлетворяющими слѣдующимъ условіямъ

$$\left.\begin{aligned} &(p_1 + H,\, F_i) = 0, \\ &\quad i = 1, 2, 3, \\ &(F_1,\, F_r) = 0, \\ &\quad r = 2, 3, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

при чемъ функціи F_2 и F_3 находятся въ инволюціи и связаны слѣдующимъ образомъ съ F_1

$$F_{k+1} \equiv \Phi_k\,(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1), \quad k = 1, 2.$$

Изъ послѣднихъ значеній функцій Φ_1 и Φ_2 становится очевиднымъ, что условіе инволюціи обоихъ функцій F_2 и F_3 удовлетворяется тождественно.

Пусть имѣемъ неравенство

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \gtreqless 0. \tag{20}$$

Принимая въ такомъ случаѣ F_1 за новую перемѣнную величину вмѣсто p_2, выводимъ изъ равенства (19) слѣдующую систему линейныхъ уравненій съ частными производными одной неизвѣстной функціи Φ, для опредѣленія обѣихъ функцій Φ_1 и Φ_2,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{4} X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sum_{s=2}^{4} Y_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Коэффиціенты послѣднихъ уравненій X_s, Y_s имѣютъ слѣдующія значенія

$$X_s = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right), \quad Y_s = \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_s}\right),$$

при чемъ скобками обозначается результатъ указанной замѣны перемѣнной p_2 черезъ F_1.

Искомые интегралы Φ_1 и Φ_2 системы (21) не должны зависѣть отъ перемѣнныхъ p_3 и p_4. Поэтому должны существовать слѣдующія равенства, которыя получаются дифференцированіемъ уравненій (21) по перемѣннымъ p_3 и p_4,

$$\sum_{s=2}^{4} \frac{\partial X_s}{\partial p_k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_s}=0, \quad \sum_{s=2}^{4} \frac{\partial Y_s}{\partial p_k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_s}=0,$$

$$k=3,\ 4.$$

Легко видѣть, что послѣднія равенства не могутъ представлять новыхъ уравненій, которыя служили-бы, совмѣстно съ системой (21), для опредѣленія искомыхъ функцій. Поэтому только-что полученныя четыре равенства должны представлять слѣдствія уравненій (21), и, слѣдовательно, должны имѣть мѣсто равенства

$$\left.\begin{aligned} \frac{\frac{\partial X_2}{\partial p_k}}{Y_2}=\frac{\frac{\partial X_3}{\partial p_k}}{Y_3}=\frac{\frac{\partial X_4}{\partial p_k}}{Y_4}, \\ \frac{\frac{\partial Y_2}{\partial p_k}}{Y_2}=\frac{\frac{\partial Y_3}{\partial p_k}}{Y_3}=\frac{\frac{\partial Y_4}{\partial p_k}}{Y_4}, \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

$$k=3,\ 4.$$

Равенства послѣдней строки даютъ слѣдующія уравненія

$$\frac{\partial}{\partial p_k} lg \frac{Y_3}{Y_2}=0, \quad \frac{\partial}{\partial p_k} lg \frac{Y_4}{Y_2}=0,$$

$$k=3,\ 4.$$

Интегрируя систему послѣднихъ четырехъ уравненій, находимъ

$$\left.\begin{aligned} Y_3=\varphi_1\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ F_1)\ Y_2, \\ Y_4=\varphi_2\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ F_1)\ Y_2, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

гдѣ φ_1 и φ_2 обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ.

Принимая во вниманіе, что, внутри разсматриваемой области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, существуетъ неравенство $Y_2 \gtrless 0$, получаемъ изъ первой строки равенствъ (22), на основаніи (23), слѣдующія уравненія

$$\frac{\partial X_3}{\partial p_k}-\varphi_1\frac{\partial X_2}{\partial p_k}=0, \quad \frac{\partial X_4}{\partial p_k}-\varphi_2\frac{\partial X_2}{\partial p_k}=0,$$

$$k=3,\ 4,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\ (X_3-\varphi_1 X_2)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\ (X_4-\varphi_2 X_2)=0,$$

$$k=3,\ 4.$$

Интегрированіе послѣднихъ уравненій приводитъ къ слѣдующимъ зависимостямъ

$$\left.\begin{aligned} X_3-\varphi_1 X_2=\psi_1\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ F_1), \\ X_4-\varphi_2 X_2=\psi_2\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ F_1), \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

при чемъ ψ_1 и ψ_2 представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ.

На основаніи полученныхъ равенствъ (23) и (24), система уравненій (21) приводится къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}+\psi_1\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}+\psi_2\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}=0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}+\varphi_1\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}+\varphi_2\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}=0. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Такъ какъ написанныя уравненія должны представлять нормальную систему, то мы получаемъ слѣдующія уравненія, для опредѣленія функцій $\psi_1,\ \psi_2,\ \varphi_1,\ \varphi_2$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\psi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}+\psi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4}=\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}+\varphi_1\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}+\varphi_2\frac{\partial \psi_1}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}+\psi_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}+\psi_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4}=\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}+\varphi_1\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}+\varphi_2\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4}. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Если возвратиться къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, т. е. замѣнить перемѣнную F_1 ея значеніемъ въ прежней перемѣнной p_2, то уравненія (23) и (24) даютъ слѣдующую систему, служащую для опредѣленія функцій H и F_1,

$$\frac{\partial H}{\partial p_3} - \varphi_1 \frac{\partial H}{\partial p_2} = \psi_1, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial p_3} - \varphi_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_4} - \varphi_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} = \psi_2, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial p_4} - \varphi_2 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} = 0.$$

Полученныя уравненія представляютъ систему, принадлежащую къ типу разсмотрѣнныхъ нами въ предыдущей главѣ. Соотвѣтствующія имъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ имѣютъ слѣдующій видъ

$$dp_2 = -\varphi_1 dp_3 - \varphi_2 dp_4,$$

$$dH = \psi_1 dp_3 + \psi_2 dp_4,$$

$$dF_1 = 0.$$

Общій интегралъ послѣдней системы представляется равенствами

$$F_1 = C_1,$$

$$H - \psi_1 p_3 - \psi_2 p_4 = C_2,$$

$$p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4 = C_3,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 обозначаютъ три различныя произвольныя постоянныя величины. Поэтому, внутри разсматриваемой области измѣненія перемѣнныхъ, функціи H и F_1 опредѣляются слѣдующими уравненіями

$$H = \psi_1 p_3 + \psi_2 p_4 + \Pi\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4),$$

$$F_1 = \Pi_1\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4), \tag{27}$$

гдѣ Π и Π_1 обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Для того, чтобы выполнить всѣ требованія нашей задачи, функція Π_1 должна удовлетворять первому уравненію (19), а функціи φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 системѣ уравненій (26).

Поэтому мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Производное уравненіе (18), для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли второго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \psi_1 p_3 + \psi_2 p_4 + \Pi\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4) = 0,$$

гдѣ Π—произвольная функція, а остальныя функціи ψ_1, ψ_2, φ_1, φ_2 и F_1 опредѣляются указаннымъ выше образомъ, при помощи перваго уравненія (19) и уравненій (26)—(27). Искомый полный интегралъ опредѣляется функціей F_1 и двумя различными интегралами системы уравненій (25).

Разсмотримъ, наконецъ, условія существованія полнаго интеграла С. Ли перваго класса даннаго уравненія (18). Этотъ интегралъ опредѣляется тремя функціями

$$F_1,\ F_2,\ F_3,$$

удовлетворяющими слѣдующимъ условіямъ

$$\left.\begin{aligned} &(p_1 + H,\ F_i) = 0, \\ &\quad i = 1,\ 2,\ 3, \\ &(F_1,\ F_2) = 0, \\ &(F_k,\ F_3) = 0, \\ &\quad k = 1,\ 2, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

при чемъ функція F_3 связана слѣдующимъ образомъ съ F_1 и F_2

$$F_3 \equiv \Phi\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ F_1,\ F_2).$$

Пусть имѣемъ неравенство

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_2,\ p_3}\right) \gtrless 0. \tag{29}$$

Принимая F_1 и F_2 за новыя независимыя перемѣнныя вмѣсто p_2 и p_3, выводимъ изъ равенствъ (28) слѣдующую систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, для опредѣленія функціи Φ,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{4} X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sum_{s=2}^{4} Y_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sum_{s=2}^{4} Z_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

гдѣ введены обозначенія

$$X_s = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right),\quad Y_s = \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_s}\right),\quad Z_s = \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_s}\right),$$

при чемъ скобки показываютъ результатъ произведенной замѣны перемѣнныхъ.

Такъ какъ функція Φ не зависитъ отъ перемѣнной p_4, то существуютъ еще слѣдующія равенства

$$\sum_{s=2}^{4} \frac{\partial X_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \quad \sum_{s=2}^{4} \frac{\partial Y_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$$\sum_{s=2}^{4} \frac{\partial Z_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0.$$

Послѣднія равенства не должны давать новыхъ уравненій, отличныхъ отъ (30)-ыхъ, и представляютъ, стало-быть, слѣдствіе послѣднихъ уравненій. Поэтому получаются слѣдующія равенства, опредѣляющія функціи X_s, Y_s, Z_s,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial p_4} & \frac{\partial X_3}{\partial p_4} & \frac{\partial X_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_2}{\partial p_4} & \frac{\partial Y_3}{\partial p_4} & \frac{\partial Y_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_2}{\partial p_4} & \frac{\partial Z_3}{\partial p_4} & \frac{\partial Z_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Всѣ опредѣлители первыхъ частей написанныхъ равенствъ отличаются другъ отъ друга только элементами первой строки. Поэтому соотвѣтствующіе послѣднимъ опредѣлители-миноры имѣютъ одни и тѣ же значенія, которыя назовемъ соотвѣтственно черезъ

$$A, \ B, \ C,$$

вводя слѣдующія обозначенія

$$A = Y_3 Z_4 - Y_4 Z_3,$$

$$B = Y_4 Z_2 - Y_2 Z_4,$$

$$C = Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2.$$

Въ силу послѣднихъ обозначеній, предыдущія три равенства представляются соотвѣтственно въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial X_2}{\partial p_4} + B\frac{\partial X_3}{\partial p_4} + C\frac{\partial X_4}{\partial p_4} = 0, \\ A\frac{\partial Y_2}{\partial p_4} + B\frac{\partial Y_3}{\partial p_4} + C\frac{\partial Y_4}{\partial p_4} = 0, \\ A\frac{\partial Z_2}{\partial p_4} + B\frac{\partial Z_3}{\partial p_4} + C\frac{\partial Z_4}{\partial p_4} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

На основаніи свойствъ опредѣлителей, мы имѣемъ два тождества

$$\left.\begin{aligned} AY_2 + BY_3 + CY_4 = 0, \\ AZ_2 + BZ_3 + CZ_4 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Дифференцируя послѣднія по перемѣнной p_4, получаемъ новыя тождества, на основаніи которыхъ послѣднія два уравненія (31) преобразовываются въ слѣдующія

$$Y_2 \frac{\partial A}{\partial p_4} + Y_3 \frac{\partial B}{\partial p_4} + Y_4 \frac{\partial C}{\partial p_4} = 0,$$

$$Z_2 \frac{\partial A}{\partial p_4} + Z_3 \frac{\partial B}{\partial p_4} + Z_4 \frac{\partial C}{\partial p_4} = 0.$$

Въ силу введенныхъ выше обозначеній A, B, C. черезъ величины всѣхъ Y_s и Z_s, легко вывести слѣдующія два уравненія изъ двухъ предыдущихъ

$$\frac{\frac{\partial A}{\partial p_4}}{A} = \frac{\frac{\partial B}{\partial p_4}}{B} = \frac{\frac{\partial C}{\partial p_4}}{C}.$$

Эти два уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial}{\partial p_4} lg \frac{A}{C} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p_4} lg \frac{B}{C} = 0.$$

Интегрируя написанныя уравненія, находимъ

$$\left.\begin{aligned} A = \varphi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2).C, \\ B = \varphi_2 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2).C, \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

гдѣ φ_1 и φ_2 обозначаютъ двѣ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ.

Такъ какъ, въ силу неравенства (29), опредѣлитель C отличенъ отъ нуля, то, на основаніи полученныхъ равенствъ (33), первое уравненіе (31) становится

$$\varphi_1 \frac{\partial X_2}{\partial p_4} + \varphi_2 \frac{\partial X_3}{\partial p_4} + \frac{\partial X_4}{\partial p_4} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_4}(\varphi_1 X_2 + \varphi_2 X_3 + X_4) = 0.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія представляетъ новое равенство

$$\varphi_1 X_2 + \varphi_2 X_3 + X_4 = \psi(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2), \tag{34}$$

гдѣ ψ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее перемѣнныхъ величинъ.

Наконецъ, на основаніи уравненій (33) и условія $C \gtrless 0$, равенства (32) даютъ слѣдующія уравненія

$$\left.\begin{aligned} Y_4 + \varphi_1 Y_2 + \varphi_2 Y_3 = 0, \\ Z_4 + \varphi_1 Z_2 + \varphi_2 Z_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Исключая выраженія X_4, Y_4, Z_4, опредѣляемыя уравненіями (34) и (35), изъ системы (30), преобразовываемъ ее къ новому виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right) X_2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right) X_3 = 0,$$

$$Y_2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right) + Y_3\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right) = 0,$$

$$Z_2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right) + Z_3\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right) = 0.$$

Въ силу неравенства нулю опредѣлителя C, выраженія, въ послѣднихъ двухъ уравненіяхъ, коэффиціентами при которыхъ служатъ Y_2 и Z_2, Y_3 и Z_3, тождественно равны нулю, и мы получаемъ такимъ образомъ систему уравненій, для опредѣленія искомой функціи Φ,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Такъ какъ послѣднія уравненія должны представлять нормальную систему, то функціи ψ, φ_1 и φ_2 должны удовлетворять тремъ условіямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi}{\partial x_{k+1}} + \varphi_k \frac{\partial \psi}{\partial x_4} = 0, \\ k = 1, 2, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Наконецъ, для опредѣленія значеній функцій H, F_1 и F_2, обращаемся къ уравненіямъ (34) и (35). Возвращаясь къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ p_2 и p_3 и внося значенія всѣхъ X_s, Y_s и Z_s, получаемъ изъ послѣднихъ уравненій слѣдующую систему якобіевскаго вида, разсмотрѣннаго въ предыдущей главѣ,

$$\frac{\partial H}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial H}{\partial p_3} = \psi,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial F_1}{\partial p_3} = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial F_2}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial F_2}{\partial p_3} = 0.$$

Соотвѣтствующая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій становится

$$dp_4 = \frac{dp_2}{\varphi_1} = \frac{dp_3}{\varphi_2} = \frac{dH}{\psi} = \frac{dF_1}{0} = \frac{dF_2}{0}.$$

Интегралы послѣдней системы представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad H - \psi p_4 = C_3,$$

$$p_2 - \varphi_1 p_4 = C_4, \quad p_3 - \varphi_2 p_4 = C_5,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 обозначаютъ пять произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Поэтому искомыя функціи H, F_1 и F_2 выражаются слѣдующимъ образомъ

$$H = \psi p_4 + \Pi\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 - \varphi_1 p_4,\ p_3 - \varphi_2 p_4),$$

$$F_1 = \Pi_1\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 - \varphi_1 p_4,\ p_3 - \varphi_2 p_4),$$

$$F_2 = \Pi_1\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 - \varphi_1 p_4,\ p_3 - \varphi_2 p_4),$$

гдѣ Π, Π_1 и Π_2 обозначаютъ три произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Кромѣ того, чтобы выполнять всѣ требованія разсматриваемой задачи, функціи Π_1 и Π_2 должны удовлетворять первому, второму и четвертому уравненіямъ системы (28), а функціи ψ, φ_1, φ_2 уравненіямъ (37)

Итакъ, *производное уравненіе (18), для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли перваго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ*

$$p_1 + \psi p_4 + \Pi\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_2 - \varphi_1 p_4,\ p_3 - \varphi_2 p_4) = 0,$$

гдѣ Π—произвольная функція, а остальныя функціи опредѣляются указанными выше уравненіями. Искомый полный интегралъ опредѣляется обѣими функціями F_1, F_2 и интеграломъ системы линейныхъ уравненій (36).

4. Приведенныя выше вычисленія легко распространяются на производныя уравненія С. Ли въ пространствѣ сколькихъ угодно измѣреній и позволяютъ составить общій видъ уравненій, допускающихъ полные интегралы того или другого класса.

Пусть имѣемъ, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, производное уравненіе С. Ли

$$p_1 + H\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n) = 0. \tag{38}$$

Полный интегралъ С. Ли q-аго класса послѣдняго уравненія опредѣляется $n-1$ функціями въ инволюціи

$$F_1,\ F_2, \ldots F_{n-1},$$

удовлетворяющими слѣдующимъ условіямъ

$$(p_1 + H_1, F_k) = 0,$$
$$k = 1,\ 2, \ldots n-1,$$

и связанными между собой зависимостями слѣдующаго вида

$$F_{n-q+i-1} \equiv \Phi_i\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ F_1,\ F_2, \ldots F_{n-q-1}),$$
$$i = 1,\ 2, \ldots q.$$

Предположимъ, что существуетъ неравенство

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2, \ldots F_{n-q-1}}{p_2,\ p_3, \ldots p_{n-q}}\right) \gtrless 0. \tag{39}$$

Принимая величины F_1, $F_2, \ldots F_{n-q-1}$ за новыя независимыя перемѣнныя вмѣсто p_2, $p_3, \ldots p_{n-q}$, составляемъ слѣдующую систему линейныхъ уравненій, для опредѣленія всѣхъ функцій Φ_i,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{n} X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sum_{s=2}^{n} Y_{\sigma s} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sigma = 1,\ 2, \ldots n-q-1, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$X_s \equiv \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right),\quad Y_{\sigma s} \equiv \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s}\right),$$

при чемъ скобки показываютъ результатъ выполненной замѣны перемѣнныхъ.

Такъ какъ функціи Φ_i не зависятъ отъ перемѣнныхъ величинъ

$$p_{n-q+1},\ p_{n-q+2}, \ldots p_n,$$

то дифференцируя предыдущія равенства по послѣднимъ перемѣннымъ, находимъ

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial X_s}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial Y_{\sigma s}}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ &\sigma = 1,\ 2, \ldots n-q-1, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

для всѣхъ значеній i, отъ 1 до q.

Послѣднія равенства не должны давать новыхъ уравненій, для опредѣленія функціи Φ. Поэтому каждое изъ этихъ равенствъ должно являться слѣдствіемъ послѣднихъ $n-q-1$ уравненій (40).

Начнемъ съ преобразованія послѣднихъ уравненій. Назовемъ черезъ $\triangle$ слѣдующій опредѣлитель

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} Y_{12} & Y_{13} & \ldots Y_{1,\,n-q} \\ Y_{22} & Y_{23} & \ldots Y_{2,\,n-q} \\ . & . & \ldots. \\ . & . & \ldots. \\ Y_{n-q-1,\,2} & Y_{n-q-1,\,3} & \ldots Y_{n-q-1,\,n-q} \end{vmatrix}$$

и черезъ $\triangle_{rk}$ обозначимъ опредѣлитель, который получается изъ послѣдняго замѣной его элементовъ r-аго столбца соотвѣтственно слѣдующими величинами

$$Y_{1,\,n-q+k},\ Y_{2,\,n-q+k}, \ldots Y_{n-q-1,\,n-q+k}.$$

Благодаря введеннымъ обозначеніямъ, послѣднія $n-q-1$ уравненій (40), принимая во вниманіе неравенство (39), или $\triangle \gtrless 0$, преобразовываются къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} = -\sum_{k=1}^{q} \frac{\triangle_{rk}}{\triangle} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}},$$
$$r=1,\,2,\ldots n-q-1.$$

Такъ какъ равенства (41) должны представлять слѣдствія послѣднихъ уравненій, то мы получаемъ слѣдующія равенства, которымъ удовлетворяютъ функціи X_s и $Y_{\sigma s}$,

$$\left.\begin{aligned} &\triangle \frac{\partial X_{n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \triangle_{rk} \frac{\partial X_{r+1}}{\partial p_{n-q+i}} = 0, \\ &\triangle \frac{\partial Y_{\sigma,\,n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \triangle_{rk} \frac{\partial Y_{\sigma,\,r+1}}{\partial p_{n-q+i}} = 0, \\ &k=1,\,2,\ldots q, \quad \sigma=1,\,2,\ldots n-q-1, \\ &i=1,\,2,\ldots q. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Въ силу свойствъ опредѣлителей, существуютъ тождества

$$\triangle Y_{\sigma,\,n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \triangle_{rk} Y_{\sigma,\,r+1} = 0, \tag{43}$$

для всѣхъ значеній σ, отъ 1 до $n-q-1$, и значеній k, отъ 1 до q.

Дифференцируя послѣднія тождества по перемѣннымъ

$$p_{n-q+1},\ p_{n-q+2}, \ldots p_n,$$

получаемъ рядъ новыхъ тождествъ, на основаніи которыхъ уравненія второй строки системы (42) преобразовываются въ слѣдующія

$$\left.\begin{aligned} &Y_{\sigma,\,n-q+k} \frac{\partial \triangle}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q+1} Y_{\sigma,\,r+1} \frac{\partial \triangle_{rk}}{\partial p_{n-q+i}} = 0, \\ &\sigma=1,\,2,\ldots n-q-1, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

при чемъ k принимаетъ значенія, отъ 1 до q, и i, отъ 1 до $n-q-1$.

Система $n-q-1$ уравненій (44) линейна относительно $n-q-1$ величинъ

$$\frac{\partial \triangle_{1k}}{\partial p_{n-q+i}},\ \frac{\partial \triangle_{2k}}{\partial p_{n-q+i}}, \ldots \frac{\partial \triangle_{n-q-1,\,k}}{\partial p_{n-q+i}}.$$

Опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при послѣднихъ величинахъ въ разсматриваемыхъ уравненіяхъ равенъ $\triangle$ и, стало-быть, отличенъ отъ нуля. Поэтому уравненія (44) даютъ

$$\frac{\partial \triangle_{rk}}{\partial p_{n-q+i}} = \frac{\triangle_{rk}}{\triangle} \frac{\partial \triangle}{\partial p_{n-q+i}},$$
$$r=1,\,2,\ldots n-q-1,$$

при чемъ k принимаетъ всѣ значенія, отъ 1 до q, и i, отъ 1 до $n-q-1$. Изъ послѣднихъ уравненій выводятся слѣдующія

$$\frac{\partial}{\partial p_{n-q+i}} lg \frac{\triangle_{rk}}{\triangle} = 0,$$
$$i=1,\,2,\ldots q,$$

для всѣхъ значеній r, отъ 1 до $n-q-1$, и k, отъ 1 до q.

Интегрируя послѣднія уравненія, находимъ

$$\left.\begin{aligned} &\triangle_{rk} = \varphi_{rk}\,(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ F_1,\ F_2, \ldots F_{n-q+1})\,\triangle, \\ &r=1,\,2,\ldots n-q, \quad k=1,\,2,\ldots q, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

гдѣ φ_{rk} представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Поэтому уравненія первой строки системы (42) становятся

$$\frac{\partial X_{n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}}-\sum_{r=1}^{n-q-1}\varphi_{rk}\frac{\partial X_{r+1}}{\partial p_{n-q+i}}=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_{n-q+k}}\left(X_{n-q+k}-\sum_{r=1}^{n-q-1}\varphi_{rk}X_{r+1}\right)=0,$$

$$i=1,\,2,\ldots q,\quad k=1,\,2,\ldots q.$$

Интегрируя послѣднія уравненія, получаемъ

$$\left.\begin{array}{c} X_{n-q+k}-\sum\limits_{r=1}^{n-q-1}\varphi_{rk}X_{r+1}=\psi_k\,(x_1,\,x_2,\ldots x_n,\,F_1,\,F_2,\ldots F_{n-q-1}),\\ k=1,\,2,\ldots q,\end{array}\right\}\tag{46}$$

при чемъ ψ_k обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ величинъ.

Наконецъ, равенства (43), на основаніи полученныхъ выше уравненій (45), даютъ новыя зависимости

$$\left.\begin{array}{c} Y_{\sigma,\,n-q+k}-\sum\limits_{r=1}^{n-q-1}\varphi_{rk}Y_{\sigma,\,r+1}=0,\\ \sigma=1,\,2,\ldots n-q-1,\quad k=1,\,2,\ldots q.\end{array}\right\}\tag{47}$$

На основаніи полученныхъ уравненій (46) и (47), система уравненій (40) приводится къ такому виду

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\sum_{k=1}^{q}\psi_k\frac{\partial\Phi}{\partial x_{n-q+k}}+\sum_{r=1}^{n-q-1}X_{r+1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_{r+1}}+\sum_{k=1}^{q}\varphi_{rk}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{n-q+k}}\right)=0,$$

$$\sum_{r=1}^{n-q+1}Y_{\sigma,\,r+1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_{r+1}}+\sum_{k=1}^{q}\varphi_{rk}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{n-q+k}}\right)=0,$$

$$\sigma=1,\,2,\ldots n-q-1.$$

Такъ какъ опредѣлитель $\triangle$ отличенъ отъ нуля, то очевидно, что эта система $n-q$ уравненій преобразовывается въ слѣдующую

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\sum\limits_{k=1}^{q}\psi_k\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_{n-q+k}}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_{r+1}}+\sum\limits_{k=1}^{q}\varphi_{rk}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_{n-q+k}}=0,\\ r=1,\,2,\ldots n-q-1.\end{array}\right\}\tag{48}$$

Вслѣдствіе нормальности послѣдней системы, функціи ψ_k, φ_{rk} удовлетворяютъ слѣдущимъ условіямъ

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial\varphi_{ri}}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\psi_i}{\partial x_{r+1}}+\sum\limits_{k=1}^{q}\left(\psi_k\dfrac{\partial\varphi_{ri}}{\partial x_{n-q+k}}-\varphi_{rk}\dfrac{\partial\psi_i}{\partial x_{n-q+k}}\right)=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_{\sigma i}}{\partial x_{r+1}}-\dfrac{\partial\varphi_{ri}}{\partial x_{\sigma+1}}+\sum\limits_{k=1}^{q}\left(\varphi_{rk}\dfrac{\partial\varphi_{\sigma i}}{\partial x_{n-q+k}}-\varphi_{\sigma k}\dfrac{\partial\varphi_{ri}}{\partial x_{n-q+k}}\right)=0,\\ i=1,\,2,\ldots q,\end{array}\right\}\tag{49}$$

при чемъ r и σ принимаютъ всѣ возможныя, одновременно различныя значенія, отъ 1 до $n-q-1$.

Подставляя далѣе значенія всѣхъ функцій X_s и $Y_{\sigma,s}$ въ уравненія (46) и (47) и возвращаясь къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, мы получаемъ, для опредѣленія функцій H, F_1, $F_2,\ldots F_{n-q-1}$, слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій, принадлежащихъ къ типу уравненій, изслѣдованныхъ въ предыдущей третьей главѣ,

$$\frac{\partial H}{\partial p_{n-q+k}}-\sum_{r=1}^{n-q-1}\varphi_{rk}\frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}=\psi_k,$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-q+k}}-\sum_{r=1}^{n-q-1}\varphi_{rk}\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{r+1}}=0,$$

$$k=1,\,2,\ldots q,\qquad \sigma=1,\,2,\ldots n-q-1.$$

Соотвѣтствующія линейныя уравненія съ частными производными одной функціи f имѣютъ видъ

$$\frac{\partial f}{\partial p_{n-q+k}}-\sum_{r=1}^{n-q-1}\varphi_{rk}\frac{\partial f}{\partial p_{r+1}}+\psi_k\frac{\partial f}{\partial H}=0,$$

$$k=1,\,2,\ldots q,$$

и образуютъ очевидно якобіевскую систему, такъ какъ эти уравненія не зависятъ отъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial F_\sigma}$, а коэффиціенты уравненій не заключаютъ перемѣнныхъ, по которымъ взяты частныя производныя функціи f. Поэтому изслѣдуемая задача интегрированія приводится къ системѣ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dp_{r+1} = -\sum_{k=1}^{q} \varphi_{rk}\, dp_{n-q+k},$$

$$dH = \sum_{k=1}^{q} \psi_k\, dp_{n-q+k},$$

$$r = 1, 2, \dots n-q-1,$$

$$dF_\sigma = 0, \ \sigma = 1, 2, \dots n-q-1.$$

Полная система интеграловъ послѣднихъ уравненій выражается слѣдующимъ образомъ

$$F_\sigma = C_\sigma, \ \sigma = 1, 2, \dots n-q-1,$$

$$H - \sum_{k=1}^{q} \psi_k p_{n-q+k} = C_{n-q},$$

$$p_{r+1} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{rk}\, p_{n-q+k} = C_{n-q+r},$$

$$r = 1, 2, \dots n-q-1.$$

Слѣдовательно, искомыя функціи имѣютъ значенія

$$H = \sum_{k=1}^{q} \psi_k p_{n-q+k} + \Pi(x_1, x_2, \dots x_n, p_2 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{1k} p_{n-q+k},$$

$$p_3 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \dots p_{n-q} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{n-q-1,\,k} p_{n-q+k}),$$

$$F_\sigma = \Pi_\sigma(x_1, x_2, \dots x_n, p_2 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{1k} p_{n-q+k}, p_3 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \dots$$

$$\dots p_{n-q} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{n-q-1,\,k} p_{n-q+k}),$$

$$\sigma = 1, 2, \dots n-q-1,$$

гдѣ $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_{n-q-1}$ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Чтобы удовлетворить требованіямъ задачи функціи Π_σ должны выполнять всѣ указанныя выше условія инволюціи, а всѣ функціи φ и ψ должны опредѣляться системой (49)-ой.

Такимъ образомъ получается слѣдующій результатъ:

Производное уравненіе (38), для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \sum_{k=1}^{q} \psi_k p_{n-q+k} + \Pi(x_1, x_2, \dots x_n, p_2 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{1k} p_{n-q+k},$$

$$p_3 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \dots p_{n-q} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{n-q-1,\,k} p_{n-q+k}) = 0,$$

гдѣ Π представляетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ, а остальныя функціи опредѣляются указанными выше уравненіями. Искомый полный интегралъ выражается при помощи функцій $F_1, F_2, \dots F_{n-q-1}$ и q различныхъ интеграловъ системы уравненій (48).

5. Пусть имѣемъ, наконецъ, систему производныхъ уравненій въ инволюціи

$$\left. \begin{array}{c} p_k + H_k(x_1, x_2, \dots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \dots m. \end{array} \right\} \tag{50}$$

Полный интегралъ С. Ли q-аго класса, при условіи, что $q < n-m$ (см. стр. 62), опредѣляется $n-m$ функціями въ инволюціи

$$F_1, F_2, \dots F_{n-m},$$

удовлетворяющими уравненіямъ

$$\left. \begin{array}{c} (p_k + H_k, F_s) = 0, \\ k = 1, 2, \dots m, \quad s = 1, \dots n-m, \end{array} \right\} \tag{51}$$

и связанными между собой слѣдующими зависимостями

$$F_{n-m-q+i} \equiv \Phi_i(x_1, x_2, \dots x_n, F_1, F_2, \dots F_{n-m-q}),$$

$$i = 1, 2, \dots q.$$

Предполагая слѣдующій функціональный опредѣлитель отличнымъ отъ нуля

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots F_{n-m-q}}{p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_{n-q}}\right),$$

принимаемъ величины $F_1, F_2, \dots F_{n-m-q}$ за новыя независимыя перемѣнныя вмѣсто $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_{n-q}$. Въ такомъ случаѣ система уравненій, для опредѣленія функцій Φ_i, становится

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}+\sum_{s=m+1}^{n} X_{ks}\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}=0,\\ &\qquad k=1, 2, \dots m,\\ &\sum_{s=m+1}^{n} Y_{\sigma s}\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}=0,\\ &\qquad \sigma=1, 2, \dots n-m-q, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$X_{ks}\equiv\left(\frac{\partial H_k}{\partial p_s}\right),\ Y_{\sigma s}\equiv\left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s}\right),$$

при чемъ скобки имѣютъ прежнее значеніе. При помощи разсужденій, аналогичныхъ предыдущимъ, составляются равенства

$$\sum_{s=m+1}^{n}\frac{\partial X_{ks}}{\partial p_{n-q+i}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}=0,$$

$$\sum_{s=m+1}^{n}\frac{\partial Y_{\sigma s}}{\partial p_{n-q+i}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}=0,$$

$$i=1, 2, \dots q,$$

которыя должны быть слѣдствіями послѣднихъ $n-m-q$ уравненій системы (52).

Не вдаваясь въ подробности вычисленій, которыя весьма немногимъ отличаются отъ вычисленій предыдущаго n^0-a, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Система производныхъ уравненій въ инволюціи (50), для которой существуетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_k+\sum_{i=1}^{q}\psi_{ki}p_{n-q+i}+\Pi_k(x_1, x_2, \dots x_n, p_{m+1}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{1i}p_{n-q+i},$$

$$p_{m+2}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{2i}p_{n-q+i}, \dots, p_{n-q}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{n-m-q,\,i}p_{n-q-i})=0,$$

$$k=1, 2, \dots m,$$

гдѣ $\Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_m$ *обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ, а всѣ* $\psi_{ki}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \dots \varphi_{n-m-q,\,i}$ *представляютъ функціи перемѣнныхъ величинъ*

$$x_1, x_2, \dots x_n, F_1, F_2, \dots F_{n-m-q}$$

и удовлетворяютъ уравненіямъ, которыя вытекаютъ изъ условій нормальности слѣдующей якобіевской системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{q}\psi_{ki}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{n-q+i}}=0,\\ &\frac{\partial\Phi}{\partial x_{m+r}}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{ri}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{n-q+i}}=0,\\ &\quad k=1, 2, \dots m,\ r=1, 2, \dots n-m-q. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Функціи $F_1, F_2, \dots F_{n-m-q}$ *представляются въ видѣ*

$$F_\sigma=\Pi'_\sigma(x_1, x_2, \dots x_n, p_{m+1}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{1i}p_{n-q+i},$$

$$p_{m+2}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{2i}p_{n-q+i}, \dots, p_{n-q}+\sum_{i=1}^{q}\varphi_{n-m-q,\,i}p_{n-q+i}),$$

$$\sigma=1, 2, \dots n-m-q,$$

гдѣ Π'_σ *обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ и кромѣ того должны удовлетворять уравненіямъ (51) и условію инволюціи всѣхъ функцій* F_σ. *Искомый полный интегралъ опредѣляется совокупностью послѣднихъ n—m—q функцій и q различными интегралами системы уравненій (53).*

6. До сихъ поръ мы разсматривали только уравненія, которыя не заключаютъ перемѣнной z. Пусть имѣемъ, наконецъ, уравненіе, зависящее отъ z,

$$p_1 + H(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n) = 0. \tag{54}$$

Полный интегралъ С. Ли q-аго класса послѣдняго уравненія опредѣляется n функціями въ инволюціи

$$F_1,\ F_2, \ldots F_n,$$

удовлетворяющими условіямъ (см. $n^0 4$, второй главы)

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1} - H\frac{\partial F_s}{\partial z} + [H,\ F_s] = 0,$$
$$s = 1,\ 2, \ldots n,$$

и связанными между собой слѣдующими зависимостями

$$F_{n-q+i} \equiv \Phi_{i+1}(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ F_1,\ F_2, \ldots F_{n-q-1}),$$
$$i = 0,\ 1,\ 2, \ldots q.$$

Предполагая существованіе неравенства

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2, \ldots F_{n-q-1}}{p_2,\ p_3, \ldots p_{n-q}}\right) \gtreqless 0, \tag{55}$$

составляемъ, какъ и въ прежнихъ случаяхъ, слѣдующую систему уравненій, которымъ удовлетворяютъ всѣ функціи Φ_{i+1},

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{n} X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + X\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$
$$\sum_{s=2}^{n} Y_{\sigma s}\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + Y_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$
$$\sigma = 1,\ 2, \ldots n-q-1,$$

гдѣ коэффиціенты X_s, $Y_{s\sigma}$ имѣютъ прежнія значенія и

$$X = \left(\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_s} p_s - H\right),$$
$$Y_\sigma = \left(\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} p_s\right).$$

Легко вывести, при помощи вычисленій, аналогичныхъ предыдущимъ, слѣдующія зависимости

$$\left.\begin{aligned}
&X_{n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \psi_{rk} X_{r+1} = \psi_k,\\
&X - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_r X_{r+1} = \psi,\\
&Y_{\sigma,\ n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} Y_{\sigma,\ r+1} = 0,\\
&Y_\sigma - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_r Y_{\sigma,\ r+1} = 0,\\
&k = 1,\ 2, \ldots q,\quad \sigma = 1,\ 2, \ldots n-q-1,
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

гдѣ обозначенія φ_{rk}, φ_r, ψ_k, ψ представляютъ произвольныя функціи величинъ

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ F_1,\ F_2, \ldots F_{n-q-1}.$$

Наконецъ, уравненія, опредѣляющія искомые интегралы Φ_{i+1}, становятся

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^{q} \psi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} + \psi\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} + \varphi_r \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,\\
&r = 1,\ 2, \ldots n-q-1,
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

и должны представлять якобіевскую систему.

Возвращаясь къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, получаемъ изъ равенствъ (56), послѣ нѣкоторыхъ приведеній, слѣдующую систему уравненій

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk}\frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} = \psi_k,\\
&\sum_{r=1}^{n-q-1} \left(p_{r+1} - \varphi_r + \sum_{i=1}^{q} \varphi_{ri} p_{n-q+i}\right)\frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} +\\
&\qquad + \sum_{i=1}^{q} \psi_i p_{n-q+i} = H + \psi,\\
&\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk}\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{r+1}} = 0,\\
&\sum_{r=1}^{n-q-1} \left(p_{r+1} - \varphi_r + \sum_{i=1}^{q} \varphi_{ri} p_{n-q+i}\right)\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{r+1}} = 0,\\
&k = 1,\ 2, \ldots q,\quad \sigma = 1,\ 2, \ldots n-q-1.
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Равенства послѣдней строки, а затѣмъ и второй преобразовываются, въ силу условія (55), въ слѣдующія уравненія

$$p_{r+1} - \varphi_r + \sum_{i=1}^{q} \varphi_{ri} p_{n-q+i} = 0,$$

$$r = 1, 2, \ldots n-q-1,$$

$$H = \sum_{i=1}^{q} \psi_i p_{n-q+i} - \psi.$$

Какъ легко видѣть, уравненія первой строки системы (58) удовлетворяются на основаніи послѣдняго значенія функціи H. Наконецъ, уравненія третьей строки системы (58) даютъ, при помощи интегрированія,

$$F_\sigma = \Pi_\sigma (x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_2 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{1k} p_{n-q+k},$$

$$p_3 + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \ldots p_{n-q} + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{n-q-1,\,k} p_{n-q+k}),$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots n-q-1,$$

при чемъ Π_σ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію:

Производное уравненіе С. Ли (54), заключающее перемѣнную z, для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \sum_{i=1}^{q} \psi_i \, p_{n-q+i} = \psi,$$

при чемъ всѣ входящія функціи опредѣляются указанными выше условіями и формулами. Искомый полный интегралъ выражается при помощи $n-q-1$ послѣднихъ написанныхъ функцій F_σ и $q+1$ различныхъ интеграловъ якобіевской системы уравненій (57).

Полученное уравненіе отличается отъ прежнихъ результатовъ своей правой частью ψ, которая представляетъ произвольную функцію, зависящую отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса только черезъ посредство функцій F_σ. Это послѣднее обстоятельство находится въ тѣсной зависимости отъ того, что, во-первыхъ, разсматриваемое нами уравненіе заключаетъ перемѣнную величину z и, во-вторыхъ, разсматриваемое интегральное собраніе представляется, въ послѣднемъ случаѣ, совокупностью $n+1$ уравненій, зависящихъ также отъ перемѣнной z.

Мы не станемъ останавливаться на дальнѣйшемъ изслѣдованіи уравненій, допускающихъ полные интегралы С. Ли того или другого класса. Хотя полученные результаты представляютъ искомыя уравненія, при помощи опредѣленій, выраженныхъ въ весьма общей формѣ, тѣмъ не менѣе найденныя формулы достаточно разъясняютъ нашу основную идею, что полные интегралы С. Ли существуютъ только для производныхъ уравненій весьма частнаго вида. Дѣйствительно, какъ легко видѣть, всѣ полученныя нами уравненія принадлежатъ къ типу такъ называемыхъ *уравненій раздѣляющихъ перемѣнныя* [1]). Такимъ образомъ теорія С. Ли не представляетъ, для насъ, обобщенія классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, но разсматриваетъ только нѣсколько новыхъ задачъ, представляющихъ аналогію съ задачами интегрированія частныхъ дифференціальныхъ уравненій. Поэтому мы будемъ въ нашемъ дальнѣйшемъ изложеніи лишь по столько касаться изслѣдованій С. Ли, по сколько разсматриваемые имъ вопросы послужили къ развитію теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

---

[1]) Ср. *Imschenetsky.*—Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p. 75.

Goursat. E.—Leçons sur l'intégration des equations.... p. 152.

ГЛАВА V.

Касательныя преобразованія.

1. Поверхностный элементъ называется еще иначе *касательнымъ элементомъ*. Какъ говорятъ *касательный элементъ* принадлежитъ поверхности, кривой или точкѣ, если онъ опредѣляется точкой послѣдняго геометрическаго мѣста и касательной къ нему плоскостью, проведенной въ послѣдней точкѣ.

Мы говоримъ, что два *геометрическія мѣста* имѣютъ общій касательный элементъ, если, проходя черезъ одну и ту же точку, оба геометрическія мѣста имѣютъ въ ней общую касательную плоскость.

Аналогичнымъ образомъ два геометрическія собранія поверхностныхъ элементовъ называются *касательными*, если они имѣютъ общій поверхностный элементъ.

Всякое преобразованіе, при помощи котораго какія-либо два касательныхъ собранія преобразовываются также въ касательныя собранія, называется *касательнымъ* (или *тангенціальнымъ*) преобразованіемъ.

Послѣднія понятія распространяются на преобразованія въ пространствахъ сколькихъ угодно измѣреній.

Пусть въ пространствѣ n измѣреній перемѣнныя

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n$$

обозначаютъ координаты поверхностнаго элемента какого-либо геометрическаго собранія. Обозначимъ новыя перемѣнныя, въ которыхъ представляется послѣднее преобразованное собраніе, черезъ

$$x_1',\ x_2', \ldots x_n',\ z',\ p_1',\ p_2', \ldots p_n'.$$

Въ виду того, что разсматриваемые нами поверхностные элементы образуютъ собраніе, то опредѣляющія ихъ, аналитически, перемѣнныя удовлетворяютъ равенству

$$dz - \sum_{s=1}^{n} p_s\,dx_s = 0. \tag{1}$$

Такъ какъ преобразованная къ новымъ перемѣннымъ система поверхностныхъ элементовъ также должна представлять геометрическое собраніе, то новыя перемѣнныя должны необходимо удовлетворять условію

$$dz' - \sum_{s=1}^{n} p_s'\,dx_s' = 0. \tag{2}$$

Чтобы перейти отъ выраженія разсмотрѣннаго геометрическаго собранія въ прежнихъ перемѣнныхъ къ его представленію въ новыхъ перемѣнныхъ, т. е. чтобы совершить аналитическое преобразованіе, необходимо имѣть выраженія перемѣнныхъ одной системы черезъ другую. Предположимъ, напримѣръ, что новыя перемѣнныя выражаются слѣдующимъ образомъ черезъ первоначальныя перемѣнныя

$$\left.\begin{aligned} x_s' &= X_s\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n), \\ z' &= Z\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n), \\ p_s' &= P_s\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n), \\ & s = 1,\ 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Такъ какъ прежнія перемѣнныя должны въ свою очередь выражаться черезъ новыя перемѣнныя, то послѣднія уравненія (3) разрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ x, z, p и даютъ ихъ значенія въ перемѣнныхъ x_s', z, p_s'.

Если обѣ системы разсматриваемыхъ перемѣнныхъ удовлетворяютъ зависимостямъ (1) и (2), то уравненія (3) должны для этого обладать опредѣленными свойствами, которыя легко вывести.

Равенства (3) условимся называть *формулами* или *уравненіями преобразованія* и подраздѣлять ихъ на различные классы, въ зависимости отъ числа уравненій, которыя даетъ система (3) между однѣми перемѣнными

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ x_1',\ x_2', \ldots x_n',\ z'. \tag{4}$$

Такъ, если результатъ исключенія перемѣнныхъ $p_1,\ p_2, \ldots p_n$ изъ $n+1$ первыхъ уравненій (3) приводитъ къ $m+1$ зависимостямъ между предыдущими перемѣнными, то опредѣляемое формулами (3). касательное преобразованіе мы будемъ называть m-аго класса.

Наименьшимъ возможнымъ классомъ касательныхъ преобразованій является очевидно нулевой, такъ какъ изъ системы $n+1$ уравненій всегда возможно исключить n перемѣнныхъ и получить всегда одну зависимость между перемѣнными величинами (4).

Наконецъ, касательное преобразованіе n-аго класса заключаетъ $n+1$ различныхъ зависимостей между перемѣнными (4), которыя выражаютъ прежнія перемѣнныя черезъ новыя, и такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ такъ называемымъ точечнымъ преобразованіемъ перемѣнныхъ.

Введеніе въ анализъ понятій о касательныхъ преобразованіяхъ принадлежитъ Эйлеру. Затѣмъ Лежандръ и Якоби пользовались въ своихъ изслѣдованіяхъ нѣкоторыми касательными преобразованіями частнаго вида, когда за новыя независимыя перемѣнныя принимаются прежнія частныя производныя. Наконецъ, общая теорія разсматриваемыхъ преобразованій была создана трудами С. Ли [1]).

Существуетъ нѣсколько способовъ изложенія основныхъ предложеній ученія о касательныхъ преобразованіяхъ [2]). До сихъ поръ обыкновенно считалось наиболѣе простымъ изложеніе разсматриваемой теоріи С. Ли, которое было дано А. Майеромъ. Намъ представляется однако, что соображенія, лежащія въ основаніи изложенія С. Ли, позволяютъ гораздо проще представить изслѣдуемую теорію, чѣмъ это было сдѣлано А. Майеромъ. Легко убѣдиться въ этомъ изъ послѣдующихъ строкъ, гдѣ мы будемъ исходить изъ изученныхъ выше свойствъ уравненій, представляющихъ собранія поверхностныхъ элементовъ.

Пусть формулы (3) представляютъ касательное преобразованіе, на основаніи котораго лѣвыя части уравненій (1) и (2) взаимно преобразовываются другъ въ друга, такъ что существуетъ слѣдующая зависимость

$$dz - \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s = \sigma\,(dz' - \sum_{s=1}^{n} p'_s\, dx'_s), \qquad (5)$$

гдѣ σ представляетъ функцію перемѣнныхъ величинъ $x'_1, x'_2, \ldots x'_n, z, p'_1, p'_2, \ldots p'_n$.

Написанное равенство является основнымъ въ разсматриваемой теоріи и послужитъ для изученія свойствъ формулъ преобразованія (3).

Исходя изъ послѣдняго равенства (5), легко представить формулы (3) въ слѣдующемъ видѣ. Для симметричности вычисленій обозначимъ черезъ

---

1) *S. Lie.*—Begründung einer Invarianten—Theorie der Berührungs—Trasformationen (Mathematische Annalen, Bd. 8, S. 215).

S. Lie u. *F. Engel.*—Theorie der Transformatiansgruppen. Abschnitt II, S. 114.

2) *A. Mayer.*—Directe Begründung der Theorie der Berührnngs--Transformationen (Mathematische Annalen. Bd. 8, S. 304).

G. Darboux.—Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p.p. 80, 250.

G. Darbaux.-Sur le probléme de Pfaff (Bulletin des Sciences Mathématiques. t. VI, 2-e série).

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots \xi_{2n}, \xi_{2n+1}$$

соотвѣтственно наши перемѣнныя

$$x_1, x_2, \ldots x_n, z', x'_1, \ldots x'_{n-1}, x'_n,$$

и затѣмъ введемъ обозначенія

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \ldots \eta_{2n}, \eta_{2n+1},$$

соотвѣтственно вмѣсто слѣдующихъ величинъ

$$p_1, p_2, \ldots p_n, \sigma, -\sigma p'_1, \ldots -\sigma p'_{n-1}, -\sigma p'_n.$$

Благодаря послѣднимъ обозначеніямъ, равенство (5) становится

$$dz - \sum_{s=1}^{2n+1} \eta_s\, d\xi_s = 0 \qquad (6)$$

и опредѣляетъ собраніе поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $2n+2$ измѣреній.

Общій видъ собраній поверхностиыхъ элементовъ m-аго класса выражается здѣсь слѣдующими уравненіями (ср. стр. 17—18)

$$\left.\begin{aligned} & z = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\, \eta_{2n-m+i+1} - H, \\ & \xi_{2n-m+i+1} = \frac{\partial H}{\partial \eta_{2n-m+i+1}}, \quad \eta_k = -\frac{\partial H}{\partial \xi_k}, \\ & i=1, 2, \ldots m, \quad k=1, \ldots 2n-m+1, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

гдѣ фуикція H имѣетъ слѣдующее значеніе

$$H \equiv \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\, \eta_{2n-m+i+1} - \varphi,$$

причемъ φ_i и φ обозначаютъ функціи всѣхъ перемѣнныхъ

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{2n+1}.$$

Въ частномъ случаѣ рѣшеніе нулевого класса разсматриваемаго уравненія (6), или (5)-аго, при сохраненіи первоначальнаго обозначенія перемѣнныхъ, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n, z', x'_1, x'_2, \dots x'_n),$$

$$p_s = \frac{\partial\varphi}{\partial x_s}, \quad \sigma p'_s = -\frac{\partial\varphi}{\partial x'_s}, \quad s = 1, 2, \dots n,$$

$$\sigma = \frac{\partial\varphi}{\partial z'}.$$

Въ силу послѣдняго значенія σ, и предыдущія равенства становятся

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_s} + \frac{\partial\varphi}{\partial z'} p'_s = 0.$$

Если первое изъ написанныхъ нами уравненій разсматриваемаго рѣшенія представить въ слѣдующемъ общемъ видѣ, неразрѣшенномъ относительно перемѣнной z,

$$\Phi(x_1, x_2, \dots x_n, z, x'_1, x'_2, \dots x'_n, z') = 0,$$

то разсматриваемое рѣшеніе нулевого класса представляется совокупностью послѣдняго написаннаго уравненія и слѣдующихъ равенствъ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_s} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} p_s = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x'_s} + \frac{\partial\Phi}{\partial z'} p'_s = 0, \quad s = 1, 2, \dots n,$$

$$\sigma = -\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial z'}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}}.$$

Такимъ образомъ формулы касательнаго преобразованія нулевого класса вполнѣ опредѣляются при помощи одной только функціи Φ, опредѣляемой уравнеіемъ, которое называется *основной формулой* преобразованія.

2. Такъ какъ равенства (3) представляютъ формулы преобразованія, при помощи которыхъ уравненіе (1) преобразовывается во (2)-е, то формулы (3), совмѣстно съ однимъ новымъ уравненіемъ, опредѣляющимъ соотвѣтствующее значеніе множителя σ, угождествляютъ равенство (5), представляя его рѣшенія и, стало-быть, должны заключаться въ формулахъ вида (7). Какъ и раньше въ предыдушемъ n^0, относимъ къ первому классу каноническихъ перемѣнныхъ всѣ величины

$$x_1, x_2, \dots x_n, z', x'_1, x'_2, \dots x'_n,$$

и ко второму классу соотвѣтственно перемѣнныя

$$p_1, p_2, \dots p_n, \sigma, q_1, q_2, \dots q_n,$$

вводя слѣдующія обозначенія

$$\left. q_s = -\sigma p'_s, \quad s = 1, 2, \dots n. \right\} \tag{8}$$

Поэтому равенство (5) принимаетъ видъ

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s + \sigma dz' + \sum_{s=1}^{n} q_s\, dx'_s. \tag{9}$$

Присоединяя къ уравненіямъ (3) еще одно новое уравненіе опредѣляющее значеніе множителя σ въ прежнихъ перемѣнныхъ x_s, z, p_s, получаемъ, на основаніи равенствъ (8), слѣдующую систему уравненій, представляющую рѣшеніе уравненія (9),

$$\left.\begin{aligned} &X_s - x'_s = 0, \quad Z - z' = 0, \\ &P_s + \frac{q_s}{\sigma} = 0, \\ &s = 1, 2, \dots n, \\ &R - \sigma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

гдѣ прежнія выраженія X_s, Z, P_s и функція R представлены всѣ въ прежнихъ перемѣнныхъ.

Какъ доказано выше, въ n^0 2 второй главы, уравненія, опредѣляющія собраніе поверхностныхъ элементовъ, образуютъ замкнутую систему. Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей уравненій (10), должны уничтожаться. Составляя послѣднія скобки, мы будемъ обозначать прямыми скобками [...] только скобки Вейлера, распространяемыя на прежнія перемѣнныя; что же касается остальныхъ членовъ разсматриваемыхъ скобокъ, которые распространяются на новыя перемѣнныя, то мы будемъ вычислять ихъ непосредственно.

Такъ какъ уравненія первой строки системы (10) зависятъ отъ z' и новыхъ перемѣнныхъ только одного класса, то легко видѣть, что должны существовать слѣдующія тождества

$$[X_i, X_k] \equiv 0, \ [X_i, Z] \equiv 0, \tag{11}$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей i и k, отъ 1 до n.

Для составленія остальныхъ скобокъ, замѣчаемъ, что существуютъ слѣдующія символическія равенства

$$\frac{d}{dx'_s} \equiv \frac{\partial}{\partial x'_s} + \frac{\partial}{\partial z} q_s, \quad \frac{d}{dz'} \equiv \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma.$$

Поэтому, приравнивая нулю скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій системы (10), получаемъ равенства

$$[X_i,\ P_k] - \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} (X_i - x'_i) + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) = 0,$$

$$[Z,\ P_k] - \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} (Z - z') + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (Z - z') = 0,$$

$$[P_i,\ P_k] + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_i} P_k - \frac{q_i}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} P_k -$$

$$- \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} P_i + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} P_i = 0,$$

$$[X_i,\ R] + \frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) = 0,$$

$$[Z,\ R] + \frac{d}{dz'} (Z - z') = 0,$$

$$[P_i,\ R] + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_i} (R - \sigma) - \frac{q_i}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (R - \sigma) +$$

$$+ \frac{d}{dz'} P_i = 0.$$

Какъ легко видѣть имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{d}{dx'_s} (X_i - x'_i) \equiv \frac{\partial X_i}{\partial z} q_s - \begin{cases} 1, & s = i, \\ 0, & s \gtrless i, \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) \equiv \frac{\partial X_i}{\partial z} \sigma,$$

$$\frac{d}{dx'_s} (Z - z') \equiv \frac{\partial Z}{\partial z} q_s,$$

$$\frac{d}{dz'} (Z - z') \equiv \frac{\partial Z}{\partial z} \sigma - 1,$$

$$\frac{d}{dx'_s} P_k \equiv \frac{\partial P_k}{\partial z} q_s, \quad \frac{q}{dz'} P_k \equiv \frac{\partial P_k}{\partial z} \sigma,$$

$$\frac{d}{dx'_s} (R - \sigma) \equiv \frac{\partial R}{\partial z} q_s,$$

$$\frac{d}{dz'} (R - \sigma) \equiv \frac{\partial R}{\partial z} \sigma.$$

На основаніи послѣднихъ тождествъ и въ силу зависимостей (8), предыдущія равенства приводятся къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{aligned} &[X_i,\ P_k] \equiv \begin{cases} 0, & i \gtrless k, \\ -\dfrac{1}{\sigma}, & i = k. \end{cases} \\ &[Z,\ P_k] \equiv -\frac{P_k}{\sigma}, \\ &[P_i,\ P_k] \equiv 0, \\ &[X_i,\ R] \equiv -\frac{\partial X_i}{\partial z} \sigma, \\ &[Z,\ R] \equiv 1 - \frac{\partial Z}{\partial z} \sigma, \\ &[P_i,\ R] \equiv \frac{\partial P_i}{\partial z} \sigma, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей i и k, отъ 1 до n.

Полученныя равенства (11) и (12) представляютъ основныя тождества, характеризующія собой касательное преобразованіе (3).

Легко видѣть, что тождества (11) и (12) представляютъ не только необходимыя но вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточныя условія для того, чтобы формулы (3) опредѣляли касательное преобразованіе. Въ самомъ дѣлѣ, данныя тождества (11) и (12) показывают, что уравненія (10) образуютъ замкнутую систему. Стало-быть, на основаніи уравненій (10), удовлетворяется равенство (9), или (5) (см. стр. 42—44), которое и представляетъ аналитическое опредѣленіе касательныхъ преобразованій.

Отмѣтимъ особенно одинъ частный случай касательныхъ преобразованій, когда соотвѣтствующія формулы преобразованія (3) таковы, что всѣ функціи X_s и P_s не зависятъ отъ перемѣнной величины z, которая входитъ только въ выраженіе функціи Z въ слѣдующей формѣ

$$Z \equiv Az + F(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n),$$

такъ что $n+1$-ое уравненіе системы (3) становится

$$z' - Az = F.$$

Такимъ образомъ перемѣнныя z' и z входятъ всего въ одно изъ уравненій формулъ преобразованія и только въ одной совмѣстной комбинаціи

$$z' - Az.$$

Поэтому соотвѣтствующее настоящему случаю первое уравненіе системы (7), которое разрѣшено относительно перемѣнной z, становится

$$z - \frac{1}{A} z' = \varphi,$$

гдѣ функція φ не зависитъ отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса. Такъ какъ остальныя уравненія разсматриваемаго собранія не заключаютъ перемѣнныхъ z и z', то, чтобы равенство (5) уничтожалось на основаніи послѣднихъ уравненій, необходимо должно существовать слѣдующее равенство

$$\sigma = \frac{1}{A},$$

т. е. при преобразованіи разсматриваемаго частнаго случая, *множитель σ долженъ представлять постоянную величину.* Не нарушая общности разсужденій, возможно положить A равнымъ единицѣ, такъ какъ для этого стоитъ только, вмѣсто z', принять величину $\frac{1}{A} z'$ за новую перемѣнную.

Въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ формулы (11) остаются безъ измѣненія.

Что касается равенствъ первыхъ трехъ строкъ системы (12), то они, въ разсматриваемомъ предположеніи, принимаютъ слѣдующій видъ

$$(X_i, P_k) \equiv \begin{cases} 0, & i \gtrless k, \\ -1, & i = k, \end{cases}$$

$$[Z, P_k] \equiv -P_k,$$

$$(P_i, P_k) \equiv 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей i и k, отъ 1 до n.

Наконецъ, остальныя равенства системы (12) въ настоящемъ случаѣ уничтожаются тождественно.

3. Приведенныя выше формулы (7) показываютъ, что уравненія касательнаго преобразованія m-аго класса опредѣляются вполнѣ, при помощи $m+1$ зависимостей между перемѣнными z, z' и каноническими перемѣнными перваго класса какъ первоначальной такъ и новой системы перемѣнныхъ величинъ.

На послѣдующихъ строкахъ мы разсмотримъ, слѣдуя С. Ли, задачу составленія общихъ формулъ касательныхъ преобразованій, исходя изъ нѣсколькихъ ихъ данныхъ уравненій.

Пусть имѣемъ $n+1$ различныхъ функцій въ инволюціи

$$X_1, X_2, \ldots X_n, Z, \tag{13}$$

зависящихъ отъ перемѣнныхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$. Въ такомъ случаѣ имѣютъ мѣсто тождества

$$[X_i, X_k] = 0, \quad [X_i, Z] = 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей i и k, отъ 1 до n.

Легко показать, что, при помощи элементарныхъ операцій, всегда возможно найти n функцій прежнихъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$

$$P_1, P_2, \ldots P_n,$$

удовлетворяющихъ равенству (5), т. е. выполняющихъ всѣ условія (12).

Подставляя въ равенство (5) значенія, получаемыя изъ первыхъ $n+1$ данныхъ уравненій (3),

$$dz' = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial Z}{\partial z} dz + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial p_r} dp_r,$$

$$dx'_s = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial X_s}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial X_s}{\partial z} dz + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial X_s}{\partial p_r} dp_r,$$
$$s=1,\ 2, \ldots n,$$

получаемъ слѣдующій результатъ

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial z} - \frac{1}{\sigma}\right) dz + \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial Z}{\partial x_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_r} + \frac{p_r}{\sigma}\right) dx_r$$
$$+ \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r}\right) dp_r = 0.$$

Предполагая, что перемѣнныя величины $x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$ не связаны между собой никакими зависимостями, мы приходимъ къ заключенію, что коэффиціенты при ихъ дифференціалахъ въ послѣднемъ тождествѣ должны уничтожаться. Такимъ образомъ получается слѣдующій рядъ новыхъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial z} = \frac{1}{\sigma}, \\ &\frac{\partial Z}{\partial x_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_r} = -\frac{p_r}{\sigma}, \\ &\frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r} = 0, \\ &r=1,\ 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Исключивъ множитель σ изъ первыхъ $n+1$ равенствъ, получаемъ n слѣдующихъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dZ}{dx_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{dX_s}{dx_r} = 0, \\ &r=1,\ 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Легко показать, что въ системѣ $2n$ уравненій, образованныхъ сейчасъ полученными n равенствами (15) и n послѣдними равенствами (14), существуютъ только n различныхъ между собой уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ n слѣдующихъ тождествъ

$$[Z,\ X_k] - \sum_{s=1}^{n} P_s [X_s,\ X_k] = 0,$$
$$k=1,\ 2, \ldots n.$$

Послѣ раскрытія скобокъ Вейлера и приведенія, написанныя тождества приводятся къ виду

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{n} \left[\frac{dX_k}{dx_r}\left(\frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r}\right) - \right. \\ &\left. \frac{\partial X_k}{\partial p_r}\left(\frac{dZ}{dx_r} - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{dX_s}{dx_r}\right)\right] = 0, \\ &k=1,\ 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Легко видѣть, что, вслѣдствіе условій инволюціи функцій (13), по меньшей мѣрѣ одинъ изъ опредѣлителей n-аго порядка слѣдующей матриссы долженъ быть отличнымъ отъ нуля [1])

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dX_1}{dx_1} & \frac{dX_1}{dx_2} & \ldots & \frac{dX_1}{dx_n} & \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \frac{\partial X_1}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \frac{dX_2}{dx_1} & \frac{dX_2}{dx_2} & \ldots & \frac{dX_2}{dx_n} & \frac{\partial X_2}{\partial p_1} & \frac{\partial X_2}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial X_2}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{dX_n}{dx_1} & \frac{dX_n}{dx_2} & \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} & \frac{\partial X_n}{\partial p_1} & \frac{\partial X_n}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial p_n} \end{matrix} \right\|$$

Поэтому равенства (16) представляютъ n различныхъ уравненій относительно выраженій, представляющихъ лѣвыя части уравненій системы, состоящей изъ послѣднихъ n уравненій (14) и уравненій (15). Слѣдовательно, изъ послѣдней системы уравненій только n различны между собой, остальныя же n уравненій уничтожаются, на основаніи предыдущихъ, въ силу зависимостей (16).

Кромѣ того, вслѣдствіе неравенства нулю по меньшей мѣрѣ одного изъ упомянутыхъ опредѣлителей матриссы, становится очевиднымъ, что

[1]) См. E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p.p. 274, 246.

соотвѣтствующія ему n различныхъ уравненій, разсматриваемой совокупности послѣднихъ n уравненій (14) и уравненій (15), разрѣшимы относительно величинъ

$$P_1,\ P_2, \dots P_n$$

и даютъ ихъ значенія, которыя, совмѣстно съ данными функціями (13), опредѣляютъ касательное преобразованіе.

Такимъ образомъ, по даннымъ $n+1$ функціямъ въ инволюціи, при помощи элементарныхъ операцій дифференцированія и алгебраическаго рѣшеия линейныхъ уравненій, опредѣляются новыя n функцій, которыя, совмѣстно съ данными функціями, удовлетворяютъ зависимостямъ, выраженнымъ равенствами (11) и (12).

Какъ эти послѣднія зависимости такъ и только что разрѣшенная задача разысканія упомянутыхъ функцій представляютъ полную аналогію со свойствами канонической системы интеграловъ каноническихъ дифференціальныхъ уравненій и съ задачей разысканія общаго интеграла послѣдней системы по половинному числу ея интеграловъ въ инволюціи. Къ этимъ послѣднимъ вопросамъ намъ придется возвратиться на послѣдующихъ страницахъ нашего изслѣдованія.

Возьмемъ, напримѣръ, слѣдующія уравненія

$$x_1' = x_1,\ x_2' = p_2,\ x_3' = x_3,$$

$$z' = z - (x_1 + x_2)\, p_2.$$

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ

$$X_1 \equiv x_1,\ X_2 \equiv p_2,\ X_3 \equiv x_3,$$

$$Z \equiv z - (x_1 + x_2)\, p_2,$$

при чемъ соотвѣтствующія условія (11) удовлетворяются тождественно. Въ настоящемъ случаѣ n послѣднихъ уравнеиій (14) и уравненія (15) образуютъ систему шести уравненій, изъ которыхъ три уничтожаются тождественно, а остальныя три даютъ слѣдующія равенства

$$x_1 + x_2 + P_2 = 0\,,$$

$$p_2 - p_1 + P_1 = 0\,,$$

$$p_3 - P_3 = 0\,.$$

Поэтому три остальныя искомыя уравненія разсматриваемаго касательнаго преобразованія становятся

$$p_1' = p_1 - p_2\,,\ \ p_2' = x_1 - x_2\,,\ \ p_3' = p_3.$$

4. Пусть имѣемъ m различныхъ функцій, выраженныхъ въ прежней системѣ перемѣнныхъ,

$$F_r(x_1,\ x_2, \dots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \dots p_n)\,, \quad r = 1, 2, \dots m. \tag{17}$$

Назовемъ соотвѣтственно черезъ

$$F_r'(x_1',\ x_2', \dots x_n',\ z',\ p_1',\ p_2', \dots p_n')\,, \quad r = 1, 2, \dots m,$$

значенія, которыя принимаютъ функціи (17) въ новыхъ перемѣнныхъ. Такимъ образомъ, на основаніи формулъ касательнаго преобразованія (3), имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$F_r(x_1,\ x_2, \dots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \dots p_n) =$$

$$= F_r'(X_1,\ X_2, \dots X_n,\ Z,\ P_1,\ P_2, \dots P_n).$$

Поэтому, составляя скобки Вейлера для какой-либо пары функцій F_s и F_σ, получаемъ, на основаніи извѣстныхъ формулъ [1]), слѣдующее равенство

$$[F_s,\ F_\sigma] = \sum_i \sum_k D\left(\frac{F_s',\ F_\sigma'}{x_i',\ x_k'}\right)[X_i,\ X_k] + \sum_i D\left(\frac{F_s',\ F_\sigma'}{x_i',\ z'}\right)[X_i, Z]$$

$$+ \sum_i \sum_k D\left(\frac{F_s',\ F_\sigma'}{x_i',\ p_k'}\right)[X_i,\ P_k] + \sum_k D\left(\frac{F_s',\ F_\sigma'}{z',\ p_k'}\right)[Z,\ P_k] +$$

$$+ \sum_i \sum_k D\left(\frac{F_s',\ F_\sigma'}{p_i',\ p_k'}\right)[P_i,\ P_k]\,,$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ различныя значенія s и σ, отъ 1 до n.

Въ силу свойствъ касательныхъ преобразованій, выраженныхъ условіями (11) и (12), послѣднее равенство становится

---

[1]) См. мое сочиненіе *„Объ интегрированіи уравненій съ частными производными“*..., стр. 40.

E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p. 276.

$$[F_s,\ F_\sigma] = \frac{1}{\sigma}\ [F'_s,\ F'_\sigma] \tag{18}$$

и показываетъ, что скобки Вейлера, составленныя для каждой пары данныхъ функцій (17), обладаютъ свойствами *инваріантности* по отношенію къ касательнымъ преобразованіямъ.

Полученное равенство приводитъ къ весьма важному заключенію, что ***замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли преобразовывается, при помощи касательныхъ преобразованій, тоже въ замкнутую систему производныхъ уравненій С. Ли; такимъ же образомъ нормальная система преобразовывается тоже въ нормальную систему.***

Возьмемъ слѣдующую замкнутую систему линейныхъ уравненій съ частными производными одной функціи f по независимымъ перемѣннымъ $x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n$

$$\left.\begin{matrix}[F_r,\ f] = 0\,, \\ {\scriptstyle r=1,\,2,\ldots m,}\end{matrix}\right\} \tag{19}$$

гдѣ всѣ функціи F_r находятся между собой въ инволюціи. Преобразовываемъ послѣднюю систему къ новымъ перемѣннымъ $x'_1,\ x'_2, \ldots x'_n,\ z',\ p'_1,\ p'_2, \ldots p'_n$, при помощи формулъ касательнаго преобразованія (3). Назовемъ соотвѣтственно черезъ F'_r и f' значенія функцій F_r и f въ новыхъ перемѣнныхъ. На основаніи предыдущаго, легко видѣть, что система уравненій (19) преобразовывается въ слѣдующую систему уравненій, видъ которой аналогиченъ предыдущему,

$$\left.\begin{matrix}[F'_r,\ f'] = 0\,, \\ {\scriptstyle r=1,\,2,\ldots m.}\end{matrix}\right\} \tag{20}$$

Наконецъ, въ силу равенства (18)-аго, становится очевиднымъ, что *каждый интегралъ системы линейныхъ уравненій (19), будучи преобразованъ, при помощи формулъ касательнаго преобразованія (3), становится, въ новыхъ перемѣнныхъ x'_s, z', p'_s, интеграломъ системы уравненій (20).* Поэтому, *система нѣсколькихъ интеграловъ въ инволюціи уравненій (19) представляетъ, въ указанныхъ новыхъ перемѣнныхъ, тоже систему интеграловъ въ инволюціи преобразованныхъ уравненій (20).*

Предыдущія разсужденія приводятъ, наконецъ, къ слѣдующему заключенію:

Пусть имѣемъ замкнутую систему производныхъ уравненій С. Ли

$$\left.\begin{matrix}F_r(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n) = 0\,, \\ {\scriptstyle r=1,\,2,\ldots m,}\end{matrix}\right\} \tag{21}$$

которую преобразовываемъ къ новымъ перемѣннымъ, по формуламъ касательныхъ преобразованій (3). Въ такомъ случаѣ очевидно, что каждое полное интегральное собраніе данныхъ уравненій (21) преобразовывается, при помощи тѣхъ же формулъ касательнаго преобразованія, въ полное интегральное собраніе преобразованной системы производныхъ уравненій.

При этомъ однако слѣдуетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что классъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли вообще измѣняется, при замѣнѣ перемѣнныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразованій. Въ самомъ дѣлѣ, классъ преобразованнаго интегральнаго собранія зависитъ не только отъ класса первоначальнаго собранія, но также и отъ класса разсматриваемаго касательнаго преобразованія.

Пусть имѣемъ, напримѣръ, уравненіе

$$p_1 + x_2(p_2 + p_3)^2 = 0. \tag{22}$$

Преобразовываемъ его по слѣдующимъ формуламъ касательнаго преобразованія

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = p_3, \quad z' = z - x_3 p_3,$$

$$p'_1 = p_1, \quad p'_2 = p_2, \quad p'_3 = x_3.$$

Разсматриваемое уравненіе становится

$$p'_1 + x'_2(p'_2 - x'_3)^2 = 0 \tag{23}$$

и имѣетъ слѣдующій полный интегралъ Лагранжа

$$z' = \frac{x'_2}{x'_1 - C_1} + x'_3(x'_2 + C_3) + C_3,$$

или полное интегральное собраніе С. Ли нулевого класса, составленное изъ уравненія (23) и трехъ слѣдующихъ

$$x'_1 - \frac{1}{p'_2 - x'_3} = C_1, \quad p'_3 - x'_2 = C_2, \quad z' - x'_2(p'_2 - x'_3) - x'_3 p'_3 = C_3.$$

Возвращаясь къ прежнимъ перемѣннымъ, приводимъ послѣднюю систему къ совокупности уравненій (22) и слѣдующихъ

$$x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3} = C_1, \quad x_3 - x_2 = C_2, \quad z - x_2(p_2 + p_3) = C_3.$$

Послѣднія равенства опредѣляютъ слѣдующій полный интегралъ С. Ли перваго класса

$$z=\frac{x_2}{x_1-C_1}+C_3,\quad x_3=x_2+C_2.$$

Для второго примѣра возьмемъ слѣдующее уравненіе

$$p_1+\frac{(z-2x_2p_2)\,p_2}{x_1p_3}+\frac{z-(x_2-x_3)\,p_2}{x_1}=0. \tag{24}$$

Послѣднее уравненіе, при помощи формулъ касательнаго преобразованія

$$x_1'=x_1,\ x_2'=p_2,\ x_3'=x_3,\ z'=z-x_2p_2,\ p_1'=p_1,\ p_2'=-x_2,\ p_3'=p_3,$$

приводится къ слѣдующему виду

$$p'+\frac{(z'+x_2'p_2')\,x_2'}{x_1'p_3'}+\frac{z'-x_2'x_3'}{x_1'}=0. \tag{25}$$

Полное интегральное собраніе нулевого класса послѣдняго уравненія представляется совокупностью уравненія (25) и трехъ слѣдующихъ

$$-x_1'p_3'=C_1,\quad x_1'\left(1+\frac{p_3'}{p_2'}\right)=C_2,\quad (x_2'p_2'+x_3'p_3'-z')\frac{p_2'}{p_3'}=C_3, \tag{26}$$

которыя опредѣляютъ слѣдующій полный интегралъ Лагранжа уравненія (24)

$$z'=\frac{C_1x_2'}{x_1'-C_2}-\frac{C_1x_3+C_2C_3}{x_1'}+C_3.$$

Обратная замѣна перемѣнныхъ преобразовываетъ уравненіе (25) въ (24) и найденное полное интегральное собраніе нулевого класса въ собраніе перваго класса уравненія (24), представляемое совокупностью этого послѣдняго уравненія и трехъ слѣдующихъ,

$$-x_1\,p_3=C_1,\quad x_1\left(1-\frac{p_3}{x_2}\right)=C_2,\quad (z-x_3\,p_3)\frac{x_2}{p_3}=C_3,$$

которыя опредѣляютъ полный интегралъ С. Ли перваго класса даннаго уравненія (24)

$$z=-\frac{C_1x_3+C_2C_3}{x_1}+C_3,\quad x_2=\frac{C_1}{C_2-x_1}.$$

Разсмотримъ, наконецъ, слѣдующую систему уравненій

$$p_1+\frac{(z-x_4p_4)^6}{p_3^2}=0,\quad p_2+\frac{x_4\,p_4}{2x_2}=0. \tag{27}$$

Формулы касательнаго преобразованія

$$x_1'=x_1,\ x_2'=x_2,\ x_3'=x_3,\ x_4'=-p_4,\ z'=z-x_4\,p_4,$$
$$p_1'=p_1,\ p_2'=p_2,\ p_3'=p_3,\ p_4'=x_4,$$

приводятъ уравненія (27) къ слѣдующему виду

$$p_1'+\frac{z'^6}{p_3'^2}=0,\quad p_2'-\frac{x_4'}{2x_2'}p_4'=0. \tag{28}$$

Эти послѣднія уравненія имѣютъ полный интегралъ С. Ли перваго класса

$$z'=\frac{1}{C_3-C_2x_3'-\frac{1}{C_2^2}x_1'},\quad x_4'=\frac{C_1}{\sqrt{x_2'}}.$$

Соотвѣтствующее полное интегральное собраніе представляется совокупностью уравненій (28) и слѣдующихъ

$$x_4'\sqrt{x_2'}=C_1,\quad \frac{z'}{\sqrt{p_1'}}=C_2,\quad \frac{1}{z'}+\frac{x_1'p_1'}{z'^2}+\frac{z'x_3'}{\sqrt{p_1'}}=C_3.$$

Совершая обратную замѣну перемѣнныхъ получаемъ данныя уравненія (27) и слѣдующія

$$-p_4\sqrt{x_2}=C_1,\quad \frac{z-x_4p_4}{\sqrt{p_1}}=C_2,\quad \frac{1}{z-x_4p_4}+\frac{x_1\,p_1}{(z-x_4\,p_4)^2}+$$
$$+\frac{(z-x_4\,p_4)\,x_3}{\sqrt{p_1}}=C_3,$$

представляющія полное интегральное собраніе С. Ли нулевого класса данныхъ уравненій (27). Результатъ исключенія, изъ послѣднихъ трехъ уравненій, величинъ p_1 и p_4 приводитъ къ полному интегралу Лагранжа системы (27)

$$z = -\frac{C_1 x_4}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{C_3 - \frac{x_1}{C_2^2} - C_2 x_3}.$$

Въ приведенныхъ примѣрахъ мы совершали касательныя преобразованія, чтобы указать, какъ видоизмѣняется классъ полныхъ интегральныхъ собраній, при преобразованіи перемѣнныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразованій.

Само собою разумѣется, что приходится возвращаться къ разсмотрѣнному случаю преобразованія интегральнаго собранія всякій разъ, когда мы преобразовываемъ полный интегралъ Лагранжа какого-либо уравненія съ частными производными перваго порядка. Дѣйствительно, пусть имѣемъ дифференціальное уравненіе съ частными производными

$$F'(x_1', x_2', \ldots x_n', z', p_1', p_2', \ldots p_n') = 0$$

и его полный интегралъ Лагранжа

$$z' = V(x_1', x_2', \ldots x_n', C_1, C_2, \ldots C_n).$$

Чтобы получить отсюда полный интегралъ уравненія, въ которое преобразовывается данное уравненіе замѣной входящихъ въ него перемѣнныхъ черезъ $x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$, при помощи формулъ (3), мы преобразовываемъ къ новымъ перемѣннымъ не только данный интегралъ изслѣдуемаго уравненія, но и его первыя производныя уравненія по перемѣннымъ $x_1', x_2', \ldots x_n'$. Такимъ образомъ задача приводится къ преобразованію полнаго интегральнаго собранія С. Ли нулевого класса. Поэтому классъ того собранія, которое получается въ результатѣ преобразованія перемѣнныхъ, зависитъ отъ класса разсматриваемаго касательнаго преобразованія и вообще отличенъ отъ нулевого. Слѣдовательно, исходя изъ полнаго интеграла Лагранжа даннаго уравненія, мы не имѣемъ вообще возможности, при помощи касательныхъ преобразованій, найти полный интегралъ Лагранжа преобразованнаго уравненія.

Съ другой стороны, какъ мы видимъ, въ послѣднемъ изъ приведенныхъ примѣровъ, касательныя преобразованія даютъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ способъ получать интегралы классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, исходя изъ интегральныхъ собраній С. Ли. Въ этомъ отношеніи наилучшій примѣръ представляетъ извѣстное обобщенное уравненіе Клеро

$$z = xp + yq + f(p, q) \tag{29}$$

гдѣ f нѣкоторая, какая угодно функція перемѣнныхъ p и q. Вводя новыя перемѣнныя, по формуламъ касательнаго преобразованія

$$x' = p,\ y' = q,\ z' = z - xp - yq,\ p' = -x,\ q' = -y,$$

преобразовываемъ данное уравненіе къ слѣдующему виду, въ формѣ функціональной зависимости,

$$z' = f(x', y'). \tag{30}$$

Легко разрѣшить слѣдующимъ образомъ послѣднее равенство, разсматриваемое, съ точки зрѣнія С. Ли, также какъ производное уравненіе. Исключая значеніе дифференціала dz',

$$dz' = \frac{\partial f}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f}{\partial y'} dy',$$

изъ условія соединенности поверхностныхъ элементовъ

$$dz' = p'\,dx' + q'\,dy',$$

получаемъ равенство

$$\left(p' - \frac{\partial f}{\partial x'}\right) dx' + \left(q' - \frac{\partial f}{\partial y'}\right) dy' = 0.$$

Послѣднее равенство имѣетъ три различныхъ рѣшенія. Первое изъ нихъ слѣдующее

$$x' = C_1, \quad y' = C_2,$$

гдѣ C_1, C_2—двѣ произвольныя постоянныя величины. Второе рѣшеніе имѣетъ видъ

$$y' = \varphi(x'),$$

$$p' - \frac{\partial f}{\partial x'} + \left(q' - \frac{\partial f}{\partial y'}\right) \varphi'(x') = 0,$$

гдѣ $\varphi(x')$ представляетъ произвольную функцію. Наконецъ, третье рѣшеніе представляется слѣдующимъ образомъ

$$p' = \frac{\partial f}{\partial x'}, \quad q' = \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Соотвѣтственно послѣднимъ рѣшеніямъ, мы получаемъ три различныхъ рѣшенія преобразованнаго уравненія (30). Первое изъ выше найденныхъ рѣшеній приводитъ къ полному рѣшенію второго класса уравненія (30)

$$z' = f(C_1, C_2), \quad x' = C_1, \quad y' = C_2.$$

Второе рѣшеніе представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z' = f(x', \varphi(x')), \quad y' = \varphi(x').$$

$$p' = \frac{\partial f}{\partial x} - \left(q' - \frac{\partial f}{\partial y'}\right) \varphi'(x').$$

Если, напримѣръ, положить въ послѣднемъ рѣшеніи $\varphi(x') = C'x' + C''$, гдѣ C', C''—двѣ произвольныя постоянныя, то мы получаемъ полное рѣшеніе С. Ли перваго класса уравненія (30). Наконецъ, послѣднее рѣшеніе уравненія (30) представляется въ видѣ

$$z' = f(x', y'), \quad p' = \frac{\partial f}{\partial x'}, \quad q' = \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Совершая обратную замѣну перемѣнныхъ, мы находимъ, соотвѣтственно изъ приведеннаго выше перваго рѣшенія преобразованнаго уравненія, полный интегралъ Лагранжа даннаго уравненія (29)

$$z = C_1 x + C_2 y + f(C_1, C_2).$$

Второе рѣшеніе уравненія (30) приводитъ къ общему интегралу уравненія (29)

$$z = xp + yq + f(p, q),$$

$$q = \varphi(p),$$

$$x + \frac{\partial f}{\partial p} + \left(y - \frac{\partial f}{\partial q}\right) \varphi'(p) = 0,$$

гдѣ p и q представляютъ перемѣнные параметры. Наконецъ, послѣднее рѣшеніе уравненія (30) даетъ особенный интегралъ обобщеннаго уравненія Клеро

$$z = xp + yq + f(p, q),$$

$$x + \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad y + \frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

гдѣ p и q—перемѣнные параметры. Такимъ образомъ, какъ слѣдуетъ также изъ нашихъ предыдущихъ изслѣдованій, относительно существованія полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, обобщенное уравненіе Клеро не имѣетъ полныхъ интеграловъ, отличныхъ отъ нулевого класса, и всѣ интегральныя собранія различныхъ классовъ преобразованнаго уравненія (30) переходятъ, при помощи касательныхъ преобразованій, въ рѣшенія нулевого класса обобщеннаго уравненія Клеро.

Въ своихъ изслѣдованіяхъ С. Ли не останавливается на сравненіи между собой преобразованныхъ интегральныхъ собраній, не различая ихъ по классамъ. Съ точки зрѣнія С. Ли, полныя интегральныя собранія различныхъ классовъ являются совершенно эквивалентными аналитическими элементами. Устанавливая однако въ нашемъ изслѣдованіи существенное различіе между интегралами Лагранжа и С. Ли, намъ приходится также принимать во вниманіе классы разсматриваемыхъ интегральныхъ собраній въ обѣихъ системахъ перемѣнныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразованій. На это послѣднее обстоятельство я имѣлъ случай указывать въ своемъ сочиненіи „*Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*“ и въ двухъ сообщеніяхъ Парижской Академіи Наукъ [1]) „*Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer*“, по поводу такъ называемаго усовершенствованія С. Ли способа интегрированія Якоби—Майера уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Въ послѣдующемъ изложеніи намъ придется возвратиться къ этому послѣднему вопросу съ болѣе общей точки зрѣнія.

5. Гурса [2]) разсматриваетъ, какъ приложеніе теоріи касательныхъ преобразованіи, извѣстный способъ А. Н. Коркина интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи [3]). На послѣдующихъ строкахъ мы изложимъ эти соображенія въ нѣсколько обобщенномъ видѣ.

Пусть имѣемъ *нормальную* систему разсматриваемыхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} F_r(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ {\scriptstyle r=1,2,\ldots m.} \end{array}\right\} \qquad (31)$$

Возьмемъ полный интегралъ первыхъ k уравненій послѣдней системы, гдѣ $k < m$. Соотвѣтствующее ему полное интегральное собраніе, представленное уравненіями въ инволюціи, составляется при помощи операцій

[1]) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 26 juin et 3 juillet 1899.

[2]) E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p. 302.

[3]) А. Н. Коркинъ.—*О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка.* С.П.Б. 1867.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXVIII, p. 14 60.

дифференцированія и алгебраическихъ исключеній (см. стр. 54—57). Предположимъ, что это послѣднее собраніе представляется слѣдующей системой уравненій въ инволюціи

$$F_r(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0,$$
$$r=1, 2, \ldots k,$$

$$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots p_n) = C_i.$$
$$i=1, 2, \ldots n-k+1,$$

гдѣ всѣ C_i—произвольныя постоянныя, при чемъ классъ этого собранія можетъ быть нулевымъ или какимъ угодно, такъ какъ всѣ послѣдующія разсужденія прилагаются къ собраніямъ любого класса.

Принимая выраженія F_r и Φ_i соотвѣтственно за функціи X_1, $X_2, \ldots X_n$, Z, составляемъ формулы касательнаго преобразованія (см. $n^0 3$ настоящей главы)

$$x'_r = X_s, \; z' = Z, \; p'_s = P_s,$$
$$s=1, 2, \ldots n.$$

Преобразованныя къ новымъ перемѣннымъ x'_s, z', p'_s уравненія (31) очевидно становятся

$$x'_r = 0, \quad r=1, 2, \ldots k,$$

$$F'_{k+i}(x'_{k+1}, x'_{k+2}, \ldots x'_n, z', p'_1, p'_2, \ldots p'_n) = 0,$$
$$i=1, 2, \ldots m-k.$$

Такъ какъ система данныхъ уравненій (31) *нормальная*, то полученныя преобразованныя уравненія представляютъ также *нормальную* систему. Поэтому скобки Вейлера

$$[x'_r, F'_{k+i}] \equiv -\frac{\partial F'_{k+i}}{\partial p'_r} \equiv 0,$$

должны уничтожаться тождественно для всѣхъ различныхъ значеній r, отъ 1 до k, и значеній i, отъ 1 до $m-k$.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ функціи F'_{k+i} не зависятъ отъ перемѣнныхъ $p'_1, p'_2, \ldots p'_k$, и преобразованная нормальная система уравненій представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. F'_{k+i}(x'_{k+1}, x'_{k+2}, \ldots x'_n, z', p'_{k+1}, p'_{k+2}, \ldots p'_n) = 0, \atop i=1, 2, \ldots m-k. \right\} \qquad (32)$$

Такимъ образомъ система (31), составленная изъ m уравненій съ n частными производными, преобразовывается въ аналогичную систему (32),

число уравненій которой и частныхъ производныхъ—каждое меньше на k единицъ, сравнительно съ первоначальной системой. Продолжая повторять тѣ же самыя дѣйствія съ полученными уравненіями (32), приходимъ, наконецъ, къ одному дифференціальному уравненію. Такъ какъ интегрированіе одного уравненія проводится, на основаніи Якоби-Майеровскаго способа, къ интегрированію системы уравненій, то изложенный способъ приводитъ въ результатѣ интегрированіе данныхъ уравненій къ одному обыкновенному дифференціальному уравненію.

Приведенный способъ изложенія обобщенной теоріи А. Н. Коркина даетъ мѣсто двумъ существеннымъ возраженіямъ:

Во-первыхъ, вслѣдствіе введенія общихъ формулъ касательныхъ преобразованій, становится неизвѣстнымъ классъ полнаго интегральнаго собранія, которое должно получаться въ результатѣ выполненіяго интегрированія, т. е. вводится таже неопредѣленность, относительно искомаго рѣшенія, которая характеризуетъ всѣ способы интегрированія С. Ли.

Во-вторыхъ, приведенное изложеніе упускаетъ изъ виду одну особенность, которая является весьма существенной при нѣкоторыхъ приложеніяхъ способа интегрированія А. Н. Коркина. Дѣйствительно, этотъ послѣдній требуетъ, сравнительно съ другими пріемами интегрированія частныхъ уравненій, наибольшаго числа операцій интегрированія. Тѣмъ не менѣе въ нѣкоторыхъ вопросахъ, которые находятся въ связи съ разысканіемъ нѣсколькихъ неизвѣстныхъ функцій многихъ независимыхъ перемѣнныхъ, какъ показалъ А. Н. Коркинъ [1]), его способъ интегрированія даетъ простое рѣшеніе разсматриваемой задачи.

Новое изложеніе разсматриваемой теоріи, которое мы дадимъ ниже, основывается также на касательныхъ преобразованіяхъ, при чемъ числа новыхъ и прежнихъ перемѣнныхъ различны между собой. Поэтому необходимо предварительно остановиться на нѣсколькихъ теоретическихъ соображеніяхъ.

6. Пусть прежнія перемѣнныя

$$x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$$

и новыя перемѣнныя

$$x'_1, x'_2, \ldots x'_m, z, p'_1, p'_2, \ldots p'_m$$

---

1) *Коркинъ.—О совокупныхъ уравненіяхъ...*
Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel (Mathematische Annalen, Bd. II, 1869, S. 13).
Н. Н. Салтыковъ.—Разысканіе интеграловъ, общихъ задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити (Сообщенія Харьк. Математическаго Общ., т. VI).

связаны между собой зависимостями

$$\left.\begin{aligned} x'_s &= X_s(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n), \\ z' &= Z(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n), \\ p'_s &= P_s(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n), \\ & \quad s=1, 2, \ldots m. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Если между разсматриваемыми перемѣнными существуетъ равенство

$$dz - \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s = \sigma\,(dz' - \sum_{s=1}^{m} p'_s\, dx'_s), \tag{34}$$

то обѣ системы перемѣнныхъ опредѣляютъ собой касательное преобразованіе [1]).

Предположимъ, что $m<n$. Такъ какъ наименьшее число уравненій рѣшенія уравненія (34) равняется $n+m+2$, то, чтобы послѣднее равенство имѣло мѣсто, очевидно необходимо должны существовать, кромѣ $2m+1$ уравненій (33), еще $n-m+1$ зависимостей. Изъ нихъ $n-m$ связываютъ прежнія перемѣнныя между собой, а послѣдняя зависимость опредѣлнетъ черезъ нихъ значеніе перемѣнной σ. Предположимъ, что эти зависимости выражаются слѣдующими уравненіями

$$\left.\begin{aligned} f_r(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ r=1, 2, \ldots n-m, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\sigma = R(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n).$$

На основаніи свойствъ рѣшеній равенства (34), разсуждая аналогично тому, какъ мы это дѣлали въ n^02 настоящей главы, мы заключаемъ:

Во-первыхъ, что *уравненія (35) образуютъ замкнутую систему*, и во-вторыхъ, что *существуютъ слѣдующія равенства*

$$\left.\begin{aligned} &[X_i, X_k] = 0, \quad [X_i, Z] = 0, \\ &[X_i, P_k] = \begin{cases} 0, & i \gtrless k, \\ -\dfrac{1}{\sigma}, & i=k, \end{cases} \\ &[Z, P_k] = -\frac{P_k}{\sigma}, \quad [P_i, P_k] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

[1]) *Cp. E. Goursat.*—Leçons sur l'intégration... p. 325.

$$\left.\begin{aligned} [X_i, R] &= -\frac{\partial X_i}{\partial z}\sigma, \\ [Z, R] &= 1 - \frac{\partial Z}{\partial z}\sigma, \\ [P_i, R] &= \frac{\partial P_i}{\partial z}\sigma, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

для всѣхъ различныхъ значеній i и k, отъ 1 до n. При этомъ написанныя равенства выполняются, вообще, на основаніи уравненій (35).

Однако въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ равенства (36) имѣютъ мѣсто тождественно, аналогично тому случаю, когда числа новыхъ и прежнихъ перемѣнныхъ равны между собой. Предположимъ, напримѣръ, что уравненія (35) зависятъ явно отъ величинъ

$$p_1, p_2, \ldots p_{n-m}$$

и разрѣшимы относительно послѣднихъ, такъ что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_{n-m}}{p_1, p_2, \ldots p_{n-m}}\right) \gtrless 0.$$

Если функціи X_s, Z, P_s не зависятъ отъ перемѣнныхъ

$$p_1, p_2, \ldots p_{n-m},$$

то становится очевиднымъ, что равенства первыхъ трехъ строкъ формулъ (36) должны удовлетворяться *тождественно*. Наконецъ, если функція R не зависитъ отъ тѣхъ же перемѣнныхъ, то тогда и остальныя равенства (36) тоже удовлетворяются тождественно.

Предположимъ, что, разрѣшивъ уравненія (33) и (35) относительно прежнихъ перемѣнныхъ, получаемъ слѣдующія ихъ $n+m+1$ значеній въ новыхъ перемѣнныхъ и остальныхъ $n-m$ прежнихъ

$$\left.\begin{aligned} x_r &= X'_r(x'_1, x'_2, \ldots x'_m, z', p'_1, p'_2, \ldots p'_m, x_1, x_2, \ldots x_{n-m}), \\ z &= Z'(x'_1, x'_2, \ldots x'_m, z', p'_1, p'_2, \ldots p'_m, x_1, x_2, \ldots x_{n-m}), \\ p_s &= P'_s(x'_1, x'_2, \ldots x'_m, x', p'_1, p'_2, \ldots p'_m, x_1, x_2, \ldots x_{n-m}), \\ & r=n-m+1, n-m+2, \ldots n, \quad s=1, 2, \ldots m. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

На основаніи разсужденій n^0 4-аго настоящей главы, легко вывести слѣдующее заключеніе:

Если уравненія замкнутой или нормальной системы, будучи преобразованы къ новымъ перемѣннымъ, при помощи формулъ (37), не зависятъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ $x_1, x_2 \ldots x_{n-m}$, то преобразованная къ новымъ перемѣннымъ система является также соотвѣтственно замкнутой или нормальной.

7. Пользуясь приведенными соображеніями, легко изложить теорію А. Н. Коркина. Пусть имѣемъ систему m дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи

$$\left.\begin{array}{c} F_r(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ r = 1, 2, \ldots m. \end{array}\right\} \tag{38}$$

Предположимъ, что первыя k изъ послѣднихъ уравненій образуютъ нормальную систему и разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2 \ldots p_k$, такъ что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_k}{p_1, p_2, \ldots p_k}\right) \gtrless 0. \tag{39}$$

Напишемъ полный интегралъ разсматриваемыхъ k уравненій

$$z = V(x_1, x_2, \ldots x_n, z', x_1', x_2', \ldots x_{n-k}'), \tag{40}$$

гдѣ величины $z', x_1', x_2', \ldots x_{n-k}'$ обозначаютъ $n-k+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ выполняется условіе

$$D\left(\frac{V, \dfrac{\partial V}{\partial x_{k+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{k+2}}, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{z', x_1', x_2', \ldots x_{n-k}'}\right) \gtrless 0. \tag{41}$$

Составляемъ уравненія, представляющія, совмѣстно съ (40)-ымъ, общее интегральное собраніе проинтегрированныхъ уравненій,

$$\left.\begin{array}{l} p_s = \dfrac{\partial V}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2, \ldots n, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_i'} + \dfrac{\partial V}{\partial z'} p_i' = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n-k, \end{array}\right\} \tag{42}$$

при чемъ z' разсматривается какъ функція остальныхъ произвольныхъ постоянныхъ $x_1', x_2', \ldots x_{n-k}'$, и выраженія p_i' обозначаютъ частныя про-

изводныя перваго порядка функціи z' соотвѣтственно по независимой перемѣнной x_i', такъ что имѣетъ мѣсто равенство

$$dz' = \sum_{i=1}^{n-k} p_i' \, dx_i'.$$

Дифференцируя уравненіе (40), получаемъ слѣдующее равенство

$$dz = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial V}{\partial z'} dz' + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial V}{dx_i'} dx_i'.$$

Поэтому, если ввести обозначеніе

$$\sigma = -\frac{\partial V}{\partial z'}, \tag{43}$$

то становится очевиднымъ, что равенство

$$dz - \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s = \sigma \left(dz' - \sum_{i=1}^{n-k} p_i' \, dx_i'\right)$$

удовлетворяется тождественно, на основаніи уравненій (40), (42) и (43), т. е. послѣднія опредѣляютъ касательное преобразованіе между прежними перемѣнными

$$x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$$

и новыми перемѣнными величинами

$$x_1', x_2', \ldots x_{n-k}', z', p_1', p_2', \ldots p_{n-k}'.$$

На основаніи неравенства (41), уравненія (40) и (42) опредѣляютъ выраженія слѣдующихъ прежнихъ перемѣнныхъ

$$x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n \tag{44}$$

въ новыхъ перемѣнныхъ и k прежнихъ

$$x_1, x_2, \ldots x_k.$$

Преобразовывая къ новымъ перемѣннымъ данныя уравненія (38), т. е. подставляя въ нихъ указанныя значенія перемѣнныхъ (44), замѣчаемъ, что первыя k уравненій (38) уничтожаются тождественно, такъ какъ значеніе (40)-ое функціи z представляетъ ихъ интегралъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ слѣдуетъ замѣтить, что эти k первыя уравненій (38) представляютъ, въ силу условій (39) и (41), результатъ исключенія новыхъ перемѣнныхъ изъ уравненія (40) и n первыхъ уравненій (42). Такимъ образомъ разсматриваемыя k уравненій являются въ настоящемъ случаѣ тѣми зависимостями между прежними перемѣнными, которыя имѣютъ мѣсто въ формулахъ касательныхъ преобразованій, когда число новыхъ перемѣнныхъ меньше числа прежнихъ. Наконецъ, предположимъ, что остальныя $m-k$ уравненій (38) принимаютъ видъ

$$\left.\begin{array}{c} F'_r(x'_1,\ x'_2,\dots x'_{n-k},\ z',\ p'_1,\ p'_2,\dots p'_{n-k},\ x_1,\ x_2,\dots x_k)=0, \\ r=k+1,\ k+2,\dots m, \end{array}\right\} \quad (45)$$

т. е. зависятъ вообще отъ k прежнихъ перемѣнныхъ.

До сихъ поръ мы не дѣлали никакихъ предположеній относительно интегрируемости изслѣдуемыхъ уравненій (38). Но если предположить, что послѣднія имѣютъ интегралъ, то въ такомъ случаѣ легко доказать, что уравненія (45) приводятся къ новой системѣ, уравненія которой не зависятъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть рѣшеніе данныхъ уравненій (38) представляется равенствомъ

$$z=\Phi(x_1,\ x_2,\dots x_n). \quad (46)$$

Въ такомъ случаѣ рѣшеніе преобразованной системы (45) получается какъ результатъ исключенія $n+1$ величинъ

$$x_1,\ x,\dots x_n,\ z$$

изъ системы $n+2$ уравненій (40), (46) и n слѣдующихъ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\frac{\partial V}{\partial x_i},$$
$$i=1,\ 2,\dots n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что рѣшеніе преобразованныхъ уравненій, какого-бы класса оно ни было, во всякомъ случаѣ не зависитъ отъ значеній величинъ $x_1,\ x_2,\dots x_k$. Поэтому рѣшеніе системы (45) утождествляетъ ея уравненія при какихъ-угодно значеніяхъ $x_1,\ x_2,\dots x_k$. Слѣдовательно, то же рѣшеніе утождествляетъ также уравненія

$$\frac{\partial F'_r}{\partial x_h}=0,\ \frac{\partial^2 F'_r}{\partial x_h\,\partial x_l}=0,\dots$$

которыя получаются дифференцированіемъ уравненій (45) по всѣмъ перемѣннымъ $x_1,\ x_2,\dots x_k$. Увеличивая такимъ образомъ число уравненій

системы (45)-ой прибавленіемъ ея указанныхъ производныхъ уравненій, мы получимъ въ результатѣ систему уравненій, не зависящихъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ. Если бы получилось число уравненій, которое больше $n-k+1$, то въ такомъ случаѣ разсматриваемыя уравненія не имѣютъ интеграла. Если же число уравненій вновь полученной системы меньше $n-k+1$, то, поступая съ ней какъ съ первоначальной системой, мы продолжимъ наши вычисленія до тѣхъ поръ, пока не сведемъ задачу къ интегрированію обыкновенныхъ уравненій, или пока не убѣдимся, что данныя уравненія несовмѣстны.

Изложенный способъ разсужденія А. Н. Коркина представляетъ то преимущество, что не основывается на приведеніи данныхъ уравненій къ замкнутымъ системамъ и позволяетъ такимъ образомъ приступить къ интегрированію безъ предварительнаго вычисленія всѣхъ дополнительныхъ уравненій или неизвѣстныхъ коэффиціентовъ и функцій, которые, при извѣстныхъ задачахъ, входятъ въ данныя уравненія. Это послѣднее обстоятельство обусловливаетъ успѣхъ, съ которымъ примѣняется разсматриваемый способъ интегрированія въ указанныхъ выше вопросахъ (см. стр. 133).

Въ частномъ случаѣ, если данныя уравненія (38) образуютъ замкнутую систему, то въ такомъ случаѣ очевидно, что преобразованныя уравненія (45) приводятся къ $m-k$ различнымъ уравненіямъ, независящимъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ $x_1,\ x_2,\dots x_k$. Въ самомъ дѣлѣ, во-первыхъ, извѣстно, что уравненія (45) имѣютъ интегралъ, независящій отъ послѣднихъ перемѣнныхъ, и, во-вторыхъ, число уравненій (45) не должно превосходить числа $m-k$, такъ какъ ихъ полный интегралъ долженъ заключать $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ. Поэтому единственное возможное заключеніе, которое остается сдѣлать, состоитъ въ томъ, что всѣ перемѣнныя $x_1,\ x_2,\dots x_k$ исключаются изъ уравненій (45) и результатъ послѣдняго исключенія представляется совокупностью $m-k$ различныхъ уравненій въ новыхъ перемѣнныхъ. Само собою разумѣется, что эти уравненія образуютъ *замкнутую систему*, такъ какъ по условію имѣютъ полный интегралъ съ $n-m+1$ различными произвольными постоянными.

Наконецъ, если данныя уравненія (38) образуютъ *нормальную* систему и преобразованныя уравненія (45) не зависятъ отъ $x_1,\ x_2,\dots x_k$, то очевидно, что эта система (45) также *нормальная*. Въ частномъ случаѣ, если $k=1$, то въ своемъ изслѣдованіи А. Н. Коркинъ доказываетъ, что данныя уравненія, преобразованныя къ новымъ перемѣннымъ, не зависятъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ.

Итакъ, выполнивъ преобразованіе А. Н. Коркина, мы получаемъ систему уравненій, заключающую меньшее число перемѣнныхъ, сравнительно съ данными уравненіями. Продолжая прежнія преобразованія, мы приходимъ, наконецъ, къ интегрированію обыкновенныхъ уравненій, и тогда, для полученія искомаго интеграла, остается выполнить обратную замѣну перемѣнныхъ. При этомъ необходимо отмѣтить то существенное обстоятельство, что обратная замѣна перемѣнныхъ всегда приводитъ къ полному интегралу Лагранжа или къ полному интегральному собранію нулевого класса данныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, въ основу каждаго преобразованія кладется общій интегралъ Лагранжа. Хотя послѣдній и представляется совокупностью уравненій, заключающихъ вспомогательные параметры, которые принимаются за новыя независимыя перемѣнныя, тѣмъ не менѣе результатъ исключенія послѣднихъ изъ разсматриваемой системы уравненій всегда приводитъ къ интегралу, представляемому однимъ уравненіемъ. Послѣднее обстоятельство находитъ теоретическое подтвержденіе въ извѣстной *теоремѣ Коши*, доказывающей существованіе общаго интеграла уравненій съ частными производными [1]).

Въ своемъ изложеніи А. Н. Коркинъ совершаетъ каждое послѣдовательное преобразованіе, исходя изъ интеграла одного только уравненія, а затѣмъ преобразовываетъ къ новымъ перемѣннымъ всѣ остальныя изслѣдуемыя уравненія. Что касается изложенныхъ выше соображеній, то они позволяютъ сократить число всѣхъ преобразованій, необходимыхъ для интегрированія, и приводятъ такимъ образомъ быстрѣе къ окончательному результату. Кромѣ того, приведенное изложеніе позволяетъ уменьшать число преобразовываемыхъ уравненій даже въ томъ случаѣ, когда каждое новое преобразованіе совершается какъ у А. Н. Коркина, при помощи интеграла одного только изъ разсматриваемыхъ уравненій. Дѣйствительно, при каждомъ послѣдовательномъ преобразованіи перемѣнныхъ, нѣтъ надобности преобразовывать къ новымъ перемѣннымъ всѣ разсматриваемыя уравненія, но достаточно преобразовать только одно изъ нихъ или нѣсколько, съ тѣмъ чтобы принять ихъ полный интегралъ за основаніе новаго преобразованія перемѣнныхъ и т. д.

Проинтегрируемъ, напримѣръ, нормальную систему уравненій

$$\left.\begin{aligned} p_1-\frac{x_2x_3}{p_4}=0,\quad p_2-\frac{x_4}{x_2}p_4=0,\\ p_3-\frac{x_1x_2}{p_4}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(47)$$

Полный интегралъ первыхъ двухъ уравненій представляется въ слѣдующемъ видѣ

[1]) См. мое изслѣдованіе: *„Объ интегрированіи уравненій...* стр. 45 и статью: „Sur l'existence des intégrales d'un système complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue“ (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXXI).

$$z=x_1'x_1+\frac{x_2x_3x_4}{x_1'}+z',$$

гдѣ x_1' и z' обозначаютъ двѣ произвольныя постоянныя величины.

Полагая $x_3=x_2'$ и принимая x_1' и x_2' за новыя независимыя перемѣнныя, а z' за новую неизвѣстную функцію, составляемъ формулы преобразованія къ новымъ перемѣннымъ, обозначая черезъ p_1', p_2' новыя частныя производныя $\frac{\partial z'}{\partial x_1'}$ и $\frac{\partial z'}{\partial x_2'}$,

$$z=x_1'x_1+\frac{x_2x_4x_2'}{x_1'}+z',$$

$$p_1=x_1',\quad p_2=\frac{x_4x_2'}{x_1'},$$

$$p_3=\frac{x_2x_4}{x_1'}+p_2',\quad p_4=\frac{x_2x_2'}{x_1'},$$

$$x_1-\frac{x_2x_2'x_4}{x_1'^2}+p_1'=0.$$

Преобразованное къ новымъ перемѣннымъ послѣднее уравненіе (47) становится

$$p_2'+\frac{x_1'}{x_2'}p_1'=0,$$

т. е. не зависитъ отъ прежнихъ перемѣнныхъ. Полный интегралъ послѣдняго уравненія имѣетъ значеніе

$$z'=C_1\frac{x_1'}{x_2'}+C_2,$$

гдѣ C_1, C_2 — двѣ произвольныя постоянныя.

Обратная замѣна перемѣнныхъ приводитъ къ слѣдующему полному интегралу данныхъ уравненій (47)

$$z=2\sqrt{x_2x_4(x_1x_3+C_1)}+C_2.$$

ГЛАВА VI.

Теорія характеристикъ.

1. До сихъ поръ мы занимались изслѣдованіемъ общихъ положеній теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными и производныхъ уравненій С. Ли. Что касается полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли различныхъ классовъ, отличныхъ отъ нулевого, то мы видѣли, что они существуютъ только для уравненій опредѣленныхъ типовъ. Наше дальнѣйшее изслѣдованіе посвящается способамъ разысканія полныхъ интегральныхъ собраній. Какъ было выше показано, во II-ой главѣ, каждое полное интегральное собраніе С. Ли, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, представляется замкнутой системой $n+1$ уравненій, которая въ свою очередь вполнѣ опредѣляется уравненіями геометрическаго мѣста соотвѣтствующаго интегральнаго собранія. Послѣднее геометрическое мѣсто выражается въ классической теоріи однимъ уравненіемъ, а въ теоріи С. Ли—нѣсколькими равенствами. Поэтому способы интегрированія разсматриваемыхъ уравненій приводятся къ разысканію, или послѣднихъ геометрическихъ мѣстъ, или опредѣляемыхъ ими интегральныхъ собраній непосредственно.

Изъ нашихъ изслѣдованій (см. стр. 66) вытекаетъ, что не всякое производное уравненіе С. Ли имѣетъ полные интегралы любого класса. Поэтому становится вполнѣ понятнымъ, почему общіе способы интегрированія С. Ли отличаются неопредѣленностью въ томъ смыслѣ, что не даютъ возможности заранѣе установить классъ того интеграла, который долженъ получиться въ результатѣ производимыхъ вычисленій. Дѣйствительно, каждое рѣшеніе даннаго класса допускается только производными уравненіями опредѣленнаго типа. Такъ какъ, въ своихъ изслѣдованіяхъ, С. Ли не принималъ въ расчетъ всѣ эти соображенія, то естественно, что классъ получаемыхъ имъ рѣшеній является совершенно случайнымъ.

Намъ не представляется цѣлесообразнымъ сохранять послѣднюю точку зрѣнія С. Ли, которая однако проводится въ современныхъ трактатахъ теоріи уравненій съ частными производными, тѣмъ болѣе, что мы уже получили въ предыдущихъ главахъ рядъ результатовъ относи-

тельно существованія полныхъ рѣшеній С. Ли различныхъ классовъ. Намъ представляется также недостаточнымъ въ теоретическомъ, научномъ отношеніи удовлетвориться результатами С. Ли, послѣ того какъ мы установили простое аналитическое различіе между разсматриваемыми рѣшеніями различныхъ классовъ, выражаемое при помощи функціональныхъ опредѣлителей и ихъ уничтожающихся миноровъ (см. стр. 44 и 50—51). Болѣе того, мы считаемъ невозможнымъ, послѣ всего сказаннаго, смѣшивать полные интегралы различныхъ классовъ, какъ это дѣлаютъ другіе авторы, на что было уже указано на предыдущихъ страницахъ (см. стр. 35). Удовлетвориться рѣшеніемъ С. Ли, излагая теорію интегрированія дифференціальныхъ уравненій, равносильно признанію въ несостоятельности излагаемой теоріи давать искомые интегралы во всѣхъ различныхъ случаяхъ, которые могутъ представиться, при приложеніи теоріи на практикѣ.

При разысканіи разсматриваемыхъ интеграловъ, представляются нѣсколько различныхъ случаевъ опредѣленія искомыхъ функцій, на основаніи различныхъ аналитическихъ элементовъ. Если извѣстно нѣсколько новыхъ уравненій, заключающихъ равное число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ и образующихъ замкнутую систему, совмѣстно съ данными уравненіями, или если извѣстно нѣсколько интеграловъ въ инволюціи линейныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ даннымъ интегрируемымъ, то задача интегрированія послѣднихъ выполняется при помощи способа Якоби—Майера. Если извѣстные интегралы послѣднихъ линейныхъ уравненій не находятся въ инволюціи, то въ такомъ случаѣ задача интегрированія разсматриваемыхъ уравненій совершается при помощи рѣшенія такъ называемой задачи С. Ли. Наконецъ, если извѣстна полная система интеграловъ послѣднихъ упомянутыхъ линейныхъ уравненій, то задача разысканія интеграловъ данныхъ уравненій выполняется при помощи алгебраическихъ исключеній, на основаніи такъ называемой *теоріи характеристикъ*.

Эта теорія получила свое названіе, благодаря изслѣдованіямъ Монжа [1]), который положилъ основаніе геометрическому способу изложенія задачи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Второе аналитическое рѣшеніе разсматриваемаго вопроса было дано Коши [2]), для разысканія общихъ интеграловъ изслѣдуемыхъ уравненій. Получаемый отсюда способъ составленія полныхъ интеграловъ Лагранжа равно и такъ называемый первый способъ Якоби [3]) представляютъ однако случаи исключенія, когда не получаются искомые ин-

[1]) *Monge.—Application de l'Analyse à la Géometrie.*
[2]) *Cauchy.—Exercices d'Analyse et de Physique mathématiques*, 1841, p. 238.
[3]) *Journal Crelle*, t, XVII, S. 97, или *Gesammelte Werke*, Bd. IV, S. 59.

тегралы. Эти послѣдніе случаи были изслѣдованы Майеромъ, Бертраномъ и Дарбу [1]). Почти одновременно С. Ли опубликовалъ также свои изслѣдованія, при чемъ избѣжалъ необходимости разсматривать упомянутые случаи исключенія, вводя понятія о своихъ интегральныхъ собраніяхъ.

Излагая теорію характеристикъ, на страницахъ Mathematische Annalen, Bd. IX [2]), С. Ли приводитъ также доказательство существованія своихъ интеграловъ. Но такъ какъ С. Ли не различаетъ классовъ интегральныхъ собраній, то, съ развиваемой въ настоящемъ изслѣдованіи точки зрѣнія, указанное доказательство не представляетъ интереса, такъ какъ доказываетъ только существованіе системы интеграловъ въ инволюціи линейныхъ уравненій, соотвѣтсвующихъ разсматриваемымъ производнымъ. Наконецъ, для симметричности вычисленій, С. Ли всѣ разсматриваемыя уравненія представляетъ въ видѣ однородныхъ. Впрочемъ вычисленія, которыми мы будемъ пользоваться, являются настолько простыми, что намъ представляется излишнимъ придавать изслѣдуемымъ уравненіямъ какой либо специальный видъ, тѣмъ болѣе, что, благодаря подобнымъ искусственнымъ преобразованіямъ, усложняются вычисленія, при переходѣ отъ общей теоріи къ приложеніямъ.

На предыдущихъ страницахъ мы въ достаточной мѣрѣ уже выяснили и установили нашу точку зрѣнія на сущность идей С. Ли. Послѣ того какъ извѣстенъ общій видъ всѣхъ уравненій, допускающихъ полные интегралы даннаго класса, задача разысканія послѣднихъ, для насъ, не представляетъ болѣе интереса, съ точки зрѣнія общей теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи мы сосредоточимъ наше вниманіе на разысканіи полныхъ интеграловъ Лагранжа.

Не смотря на господство въ наукѣ, въ послѣднее время, идей С. Ли, тѣмъ не менѣе послѣдній вопросъ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій не переставалъ привлекать вниманіе ученыхъ. Въ этомъ направленіи слѣдуетъ отмѣтить изслѣдованія Майера [3]), Морера [4]) и лек-

---

[1]) *Mayer.—Mathematische Annalen*, Bd. III, S. 435.
Bertrand.—Comptes rendus, t. LXXXII, p. 641.
Darboux.—Comptes rendus, t. LXXIX, p. 1488; t. LXXX, p. 160; *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1-re série, t. VIII, p. 249.

[2]) S.S. 261—264.

[3]) *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August Universität.* Göttingen 1873, p. 299.
Mathematische Annalen, Bd. VI, 1873, p. 192.

[4]) *Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti, 2-e serie, vol.* XVI, 1883, p.p. 637, 691.

ціи Е. Вебера по теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными [1]).

Съ болѣе общей точки зрѣнія теорія характеристикъ разсматривается въ моихъ сообщеніяхъ Парижской Академіи Наукъ [2]), въ сочиненіи: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*, и въ мемуарѣ: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* [3]). Въ этихъ послѣднихъ изслѣдованіяхъ разсматриваемый вопросъ рѣшается для дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, представленныхъ въ слѣдующихъ двухъ частныхъ случаяхъ, или когда данныя уравненія разрѣшены относительно частныхъ производныхъ, или когда эти уравненія, не будучи разрѣшены относительно производныхъ, вмѣстѣ съ тѣмъ не зависятъ отъ неизвѣстной функціи z. На послѣдующихъ строкахъ распространяются предыдущія соображенія на системы уравненій общаго вида, какъ было мною указано въ засѣданіи, 19 декабря 1900 г., *Société Mathématique de France*, въ Парижѣ, и затѣмъ опубликовано въ изданіяхъ того же Общества въ статьѣ: *Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction* [4])

2. Пусть имѣемъ систему m уравненій съ частными производными *въ инволюціи*

$$\left.\begin{matrix} F_i(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\dots p_n)=0, \\ i=1,\,2,\dots m. \end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2, \dots p_m$, такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$\Delta \equiv D\left(\frac{F_1,\ F_2,\dots F_m}{p_1,\ p_2,\dots p_m}\right) \gtrless 0. \qquad (2)$$

Составляемъ соотвѣтствующую даннымъ уравненіямы (1) замкнутую [5]) систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной функціи f

$$\left.\begin{matrix} [F_i, f]=0, \\ i=1,\,2,\dots m. \end{matrix}\right\} \qquad (3)$$

---

[1]) *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, 1900, *S. S. 438, 468.*

[2]) *Comptes rendus, 16 janvier et 24 juillet* 1899.

[3]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5-e série*, t. V, 1899, p. 435.

[4]) *Bulletin de le Société Mathématique de France*, t. XXIV, 1901, p. 86.

[5]) См. стр. 55 настоящаго изслѣдованія.

Послѣднія уравненія называются *дифференціальными уравненіями характеристикъ.* При геометрическомъ изложеніи, выводъ ихъ совершается на основаніи геометрическихъ свойствъ разсматриваемой задачи интегрированіе. Что касается аналитическаго изложенія теоріи характеристикъ, то въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія (3) являются непосредственнымъ слѣдствіемъ основной идеи такъ называемаго второго способа Якоби интегрированія разсматриваемыхъ уравненій [1]). Тогда вся задача теоріи характеристикъ представляетъ ничто иное, какъ рѣшеніе послѣдняго изъ трехъ различныхъ, указанныхъ выше аналитическихъ вопросовъ, представляющихся при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка. Поэтому мы не станемъ останавливаться на вопросѣ о составленіи дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, а перейдемъ непосредственно къ вычисленію искомыхъ полныхъ интеграловъ изслѣдуемыхъ уравненій.

Предположимъ, что извѣстна полная система $2n-m+1$ различныхъ интеграловъ уравненій (3), которая представляется слѣдующими функціями

$$F_1,\ F_2, \ldots F_m,\ f_1,\ f_2, \ldots f_{2n-2m+1}\,. \tag{4}$$

Задача разсматриваемой нами теоріи характеристикъ приводится къ рѣшенію слѣдующаго вопроса:

Составить при помощи данныхъ функцій (4) *значенія перемѣнныхъ*

$$z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n,$$

въ функціяхъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1,\ x_2, \ldots x_n$, *при томъ такъ, чтобы послѣднія функціи удовлетворяли слѣдующимъ условіямъ*

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=p_1,\ \frac{\partial z}{\partial x_2}=p_2, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}=p_n$$

и утождествляли данныя дифференціальныя уравненія (1).

Приравниваемъ m первыхъ функцій (4) нулямъ, а всѣ остальныя функціи соотвѣтственно произвольнымъ постояннымъ величинамъ $C_1,\ C_2, \ldots C_{2n-2m+1}$, и получаемъ такимъ образомъ слѣдующую систему уравненій

$$F_i(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n)=0,$$
$$i=1,\ 2, \ldots m,$$

$$f_r(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n)=C_r$$
$$r=1,\ 2, \ldots 2n-2m+1\,.$$

---

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 5-e série t. V p. 435).

Вслѣдствіе условія, представленнаго неравенствомъ (2), послѣдняя система уравненій разрѣшима относительно перемѣнныхъ

$$x_{m+1},\ x_{m+2}, \ldots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n\,.$$

Предположимъ, что опредѣляемыя такимъ образомъ значенія ихъ представляются равенствами

$$\left.\begin{aligned} z&=\varphi(x_1,\ x_2, \ldots x_m,\ C_1,\ C_2 \ldots C_{2n-2m+1}),\\ x_{m+k}&=\varphi_k(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots C_{2n-2m+1}),\\ p_s&=\theta_s(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots C_{2n-2m+1}),\\ &k=1,\ 2, \ldots n-m,\ s=1,\ 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Составимъ, наконецъ, систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующую линейнымъ уравнеіямъ (3), для которой уравненія (5) являются интегральными. Съ этой цѣлью замѣтимъ, что нашъ опредѣлитель Δ выражается слѣдующимъ образомъ, въ явной формѣ,

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial p_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_2}{\partial p_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}.$$

Обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$\Delta_i,\ \Delta_{ik},\ \Delta_i^s$$

тѣ значенія, которыя принимаетъ послѣдній опредѣлитель Δ, при замѣнѣ въ немъ элементовъ i—аго столбца соотвѣтствующими частными производными функцій

$$F_1,\ F_2, \ldots F_m,$$

взятыми соотвѣтственно по перемѣннымъ

$$z,\ p_{m+k},\ x_s.$$

Разрѣшая уравненія (3) относительно частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_m},$$

получаемъ слѣдующую якобіевскую систему

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n-m}X^i_{m+k}\frac{\partial f}{\partial x_{m+k}}+\sum_{s=1}^{n}P^i_s\frac{\partial f}{\partial x_s}+Z^i\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

$$i=1,2,\ldots m,$$

коэффиціенты которой имѣютъ слѣдующія значенія

$$X^i_{m+k}\equiv-\frac{\Delta_{ik}}{\Delta},$$

$$P^i_s\equiv\frac{\Delta^s_i+\Delta_i p_s}{\Delta},$$

$$Z^i\equiv-(p_i+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}p_{m+k}).$$

Соотвѣтствующія уравненія въ полныхъ дифференціалахъ представляютъ именно искомую систему

$$\left.\begin{aligned}dx_{m+k}&=\sum_{i=1}^{m}X^i_{m+k}dx_i,\\ dp_s&=\sum_{i=1}^{m}P^i_s dx_i,\\ dz&=\sum_{i=1}^{m}Z^i dx_i,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

$$k=1,2,\ldots n-m,\quad s=1,2,\ldots n.$$

Очевидно, что значенія (5) утождествляютъ уравненія (6). Потому, на основаніи равенствъ (5), система $n-m$ первыхъ уравненій (6) и послѣднее изъ нихъ приводятъ къ слѣдующему тождеству

$$dz=\sum_{i=1}^{m}p_i\,dx_i+\sum_{k=1}^{n-m}p_{m+k}\,dx_{m+k}.$$

Отсюда вытекаетъ весьма важное заключеніе: Если возможно вывести изъ уравненій (5) значенія z, p_{m+1}, $p_{m+2}, \ldots p_n$, въ функціяхъ перемѣнныхъ x_1, $x_2, \ldots x_n$, удовлетворяющія условіямъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_{m+k}}=p_{m+k},\quad k=1,2,\ldots n-m,\qquad(7)$$

то должны имѣть мѣсто также слѣдующія равенства

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=p_i,\quad i=1,2,\ldots m,$$

такъ какъ въ уравненіяхъ (5) перемѣнныя величины x_1, $x_2, \ldots x_m$ являются независимыми. Такимъ образомъ разсматриваемая задача приводится къ разысканію указанныхъ значеній z и p_{m+k}, удовлетворяющихъ условіямъ (7). Для этого *необходимо* и *достаточно*, какъ доказано въ моихъ упомянутыхъ выше изслѣдованіяхъ [1]), исключить изъ перваго уравненія (5) $n-m$ произвольныхъ постоянныхъ, при помощи $n-m$ уравненій $x_{m+k}=\varphi_k$, такимъ образомъ, чтобы уничтожались тождественно слѣдующія выраженія

$$U_c=\frac{\partial z}{\partial C}-\sum_{k=1}^{n-m}p_{m+k}\frac{\partial x_{m+k}}{\partial C},$$

соотвѣтствующія всѣмъ исключаемымъ произвольнымъ постояннымъ величинамъ C. Если кромѣ того всѣ функціи U_c, соотвѣтствующія всѣмъ $n-m+1$ остальнымъ произвольнымъ постояннымъ C, отличны отъ нуля, то въ такомъ случаѣ полученный результатъ исключенія представляетъ *полный интегралъ* Лагранжа изслѣдуемой системы уравненій (1).

Само собою разумѣется, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ самый видъ уравненій (5) указываетъ непосредственно, какія произвольныя постоянныя слѣдуетъ исключить, чтобы получить искомый интегралъ. Что касается общаго случая то, для рѣшенія разсматриваемаго вопроса здѣсь слѣдуетъ изслѣдовать свойства функцій U_c, которыя доказываютъ существованіе цѣлаго ряда произвольныхъ постоянныхъ, удовлетворяющихъ всѣмъ условіямъ, необходимымъ для рѣшенія задачи, и представляютъ обобщеніе нашихъ предыдущихъ изслѣдованій.

3. Мы начнемъ съ вычисленія производныхъ по x_1, $x_2, \ldots x_m$ функціи U_c, которая зависитъ только отъ послѣднихъ перемѣнныхъ, въ силу уравненій (5). Легко видѣть, что искомыя производныя приводятся къ слѣдующему виду.

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial C}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}-\sum_{k=1}^{n-m}p_{m+k}\frac{\partial x_{m+k}}{\partial C}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{\partial p_{m+k}}{\partial C}\cdot\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_i}-\frac{\partial p_{m+k}}{\partial x_i}\,\frac{\partial x_{m+k}}{\partial C}\right).$$

---

[1]) *Объ интегрированіи уравненій...*, стр. 80—82,
Mémoire sur l'intégration des équations..., p.p. 441—443.

Обозначимъ черезъ M_i^h миноръ опредѣлителя $\triangle$, соотвѣтствующій его элементу $\frac{\partial F_h}{\partial p_i}$, со включеніемъ своего знака. Въ такомъ случаѣ получаемъ слѣдующія равенства

$$\triangle \equiv \sum_{h=1}^{m} M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial p_i}, \qquad \triangle_i \equiv \sum_{h=1}^{m} M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial z},$$

$$\triangle_{ik} \equiv \sum_{h=1}^{m} M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}, \qquad \triangle_i^s \equiv \sum_{h=1}^{m} M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial x_s}.$$

Подставляя въ послѣднее выраженіе $\frac{\partial U_c}{\partial x_i}$, вмѣсто производныхъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial p_{m+k}}{\partial x_i},$$

соотвѣтственно ихъ значенія, изъ уравненій (6),

$$Z^i, \; X^i_{m+k}, \; P^i_{m+k},$$

получаемъ, въ силу предыдущихъ выраженій опредѣлителей $\triangle$, $\triangle_i$, $\triangle_{ik}$, $\triangle_i^s$, слѣдующій результатъ

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial C} + \frac{1}{\triangle} \sum_{h=1}^{m} M_i^h \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial p_{m+k}}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial x_{m+k}} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} \right) +$$

$$+ \frac{\triangle_i}{\triangle} \sum_{k=1}^{n-m} p_{m+k} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C}.$$

Такъ какъ данныя уравненія (1) утождествляются на основаніи равенствъ (5), то имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial F_h}{\partial x_{m+k}} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial p_{m+k}}{\partial C} \right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial C} +$$

$$+ \frac{\partial F_h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial C} = 0,$$

$$h = 1, 2, \ldots m,$$

для каждой изъ произвольныхъ постоянныхъ C. Поэтому предыдущее выраженіе производныхъ становится

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_i} = - U_c \frac{\triangle_i}{\triangle},$$

и мы получаемъ слѣдующія равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_i} lg\, U_c = - \frac{\triangle_i}{\triangle},$$

для всѣхъ значеній i, отъ 1 до m. Отсюда слѣдуютъ новыя равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\triangle_i}{\triangle} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\triangle_j}{\triangle},$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей j и i, отъ 1 до m, которыя показываютъ, что выраженіе

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\triangle_i}{\triangle} dx_i$$

представляетъ точный дифференціалъ [1]), въ силу уравненій (5). Обозначимъ этотъ точный дифференціалъ черезъ dV. Вслѣдствіе предыдущихъ выраженій производныхъ $lg\ U_c$, получаемъ, при помощи квадратуры, слѣдующее равенство

$$U_c = U_c^0 \, e^{-\int_{V_0}^{V} dV}, \tag{8}$$

гдѣ U_c^0 V_0 обозначаютъ начальныя значенія функцій U_c и V.

Предыдущая зависимость упрощается, когда разсматриваемыя уравненія не зависятъ отъ перемѣнной z. Какъ извѣстно, къ послѣднему случаю преобразовываются также и данныя уравненія (1) увеличеніемъ числа перемѣнныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, введемъ вмѣсто z новую функцію v, всѣхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n, z$, связанную съ ними слѣдующей зависимостью

$$v(x_1, x_2, \ldots x_n, z) = 0.$$

---

1) Послѣднее выраженіе представляетъ обобщеніе изслѣдованнаго мною раньше точнаго дифференціала (см. *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 83.)

Обозначимъ черезъ q_s и q соотвѣтственно частныя производныя $\frac{\partial v}{\partial x_s}$ и $\frac{\partial v}{\partial z}$. Въ силу данной зависимости, опредѣляющей новую функцію, прежнія производныя выражаются слѣдующимъ образомъ черезъ новыя производныя

$$p_s = -\frac{q_s}{q}.$$

Преобразованныя уравненія (1) остаются также въ *инволюціи*, такъ какъ имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства между скобками Пуассона, для преобразованныхъ уравненій, и скобками Вейлера, для данныхъ уравненій (1),

$$(F'_k,\ F'_h) = -\frac{1}{q}[F_k,\ F_h]',$$

при чемъ значки обозначаютъ результатъ подстановки, выполненной надъ выраженіями, при которыхъ поставлены эти значки.

Такъ какъ производная q отлична отъ нуля, то ограничивая наши изслѣдованія областью измѣненія перемѣнныхъ, внутри которой частная производная q сохраняетъ конечное значеніе, заключаемъ изъ предыдущаго равенства, что условія инволюціи данныхъ уравненій (1) влекутъ за собой условія инволюціи преобразованныхъ уравненій. Такимъ образомъ система уравненій въ инволюціи (1) преобразовывается въ новую систему уравненій въ инволюціи, которыя не заключаютъ болѣе зависимой перемѣнной величины.

Для послѣднихъ уравненій очевидно формула (8) принимаетъ слѣдующій видъ

$$U_c = U_c^0,$$

гдѣ U_c^0 обозначаетъ начальное значеніе изслѣдуемой функціи U_c.

Мы ограничимъ наши изслѣдованія областью измѣненія перемѣнныхъ величинъ, внутри которой интегралъ дифференціала dV сохраняетъ конечную опредѣленную величину. Такъ какъ, при этомъ условіи, выраженіе $e^{-\int_{V_0}^{V} dV}$ никогда не можетъ обратиться въ нуль, то, въ разсматриваемой области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ, функціи U_c обращаются въ нуль или отличны отъ нуля одновременно со своими начальными значеніями U_c^0. Такимъ образомъ задача составленія полныхъ интеграловъ данныхъ уравненій (1) находится въ непосредственной зависимости отъ значенія выраженій U_c^0.

4. Чтобы удовлетворить всѣмъ указаннымъ условіямъ, примемъ въ разсматриваемомъ интегралѣ (5) за произвольныя постоянныя величины начальныя значенія a_i, b_i и b соотвѣтственно слѣдующихъ выраженій

$$x_{m+i},\quad p_{m+i},\quad z - \sum_{k=1}^{n-m} x_{m+k} p_{m+k}.$$

Пусть, въ этомъ предположеніи, уравнеія (5) приводятся къ виду

$$\left.\begin{aligned} z &= \Phi(x_1,\ x_2, \ldots x_m,\ a_1,\ a_2, \ldots a_{n-m},\ b,\ b_1,\ b_2, \ldots b_{n-m}),\\ x_{m+k} &= \Psi_k(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_{n-m}),\\ p_s &= \Phi_s(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_{n-m}),\\ & k=1,\ 2, \ldots n-m, \quad s=1,\ 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Очевидно, что $n-m$ уравненій, отъ второго до $n-m+1$ включительно, разрѣшимы относительно величинъ a_1, $a_2, \ldots a_{n-m}$. Кромѣ того имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$U^0_{a_k} = 0,\quad U^0_{b_k} = a_k,\quad U^0_b = 1,$$
$$k = 1,\ 2, \ldots n-m.$$

Слѣдовательно, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ a_1, $a_2, \ldots a_{n-m}$ изъ перваго уравненія (9), на основаніи слѣдующихъ за нимъ $n-m$ уравненій, представляетъ искомый полный интегралъ[1]) данной системы (1).

Предположимъ, во-вторыхъ, что въ уравненіяхъ (9) постоянная b обозначаетъ начальное значеніе перемѣнной z, т. е.

$$b = z^0,$$

и что $n-m$ уравненій (9), отъ второго до $n-m+1$ включительно, разрѣшимы относительно всѣхъ постоянныхъ b_1, $b_2, \ldots b_{n-m}$. Въ такомъ случаѣ очевидно, что результатъ исключенія, изъ перваго уравненія (9), ихъ значеній, опредѣленныхъ послѣдними уравненіями, представляетъ также искомый полный интегралъ.

Пусть, наконецъ, въ уравненіяхъ (9) постоянная b имѣетъ слѣдующее значеніе

$$b = z^0 - \sum_k a_k b_k,$$

гдѣ суммированіе распространяется на показатели всѣхъ тѣхъ постоянныхъ b_k, относительно которыхъ разрѣшимы $n-m$ уравненій системы (9), отъ второго до $n-m+1$ включительно. Въ такомъ случаѣ оче-

---

[1]) Ср. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи...* стр. 85—86.

видно, что результатъ исключенія изъ перваго уравненія (9) указанныхъ значеній b_k и всѣхъ a_i, для которыхъ $i \gtrless k$, представляетъ также искомый полный интегралъ.

5. Аналогично разысканію полныхъ интеграловъ изслѣдуемой системы уравненій (1), легко вывести также законъ составленія ихъ общаго интеграла. Представимъ интегральныя уравненія (5) въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} z &= \Phi(x_1, x_2, \ldots x_m, x^0_{m+1}, \ldots x^0_n, z^0, p^0_{m+1}, \ldots p^0_n), \\ x_{m+k} &= \Psi_k(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p^0_n), \\ p_s &= \Phi_s(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p^0_n), \\ & k=1, 2, \ldots n-m, \quad s=1, 2, \ldots n, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Предположимъ далѣе, что произвольныя постоянныя величины x^0_{m+k}, z, p^0_{m+k} связаны между собой слѣдующими зависимостями

$$\left.\begin{aligned} z^0 = \Theta_0, \quad p^0_{m+k} = \frac{\partial \Theta_0}{\partial x^0_{m+k}}, \\ k=1, 2, \ldots n-m, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

гдѣ Θ_0 обозначаетъ начальное значеніе функцій $\Theta(x_1, x_2, \ldots x_n)$, соотвѣтствующее начальнымъ значеніямъ ея перемѣнныхъ $x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_n$. Кромѣ того необходимо должно удовлетворяться также условіе, чтобы опредѣляемыя формулами (11) значенія z^0, p^0_{m+1}, $p^0_{m+2}, \ldots p^0_n$ лежали внутри разсматриваемой нами области измѣненія нашихъ перемѣнныхъ величинъ.

Уравненія (10), въ силу значеній (11), становятся

$$\left.\begin{aligned} z &= \Phi'(x_1, x_2, \ldots x_m, x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \ldots x^0_n), \\ x_{m+k} &= \Psi'_k(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x^0_n), \\ p_s &= \Phi'_s(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x^0_n), \\ & k=1, 2, \ldots n-m, \quad s=1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Очевидно, что $n-m$ уравненій послѣдней системы, отъ второго до $n-m+1$ включительно, разрѣшимы относительно постоянныхъ величинъ $x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \ldots x^0_n$, такъ какъ *функціи Ψ'_k принимаютъ послѣднія значенія* для значеній $x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_m$ независимыхъ перемѣнныхъ x_1, $x_2, \ldots x_m$, и, слѣдовательно, функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{\Psi'_1, \Psi'_2, \ldots \Psi'_{n-m}}{x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \ldots x^0_n}\right),$$

для послѣднихъ начальныхъ значеній, становится равнымъ единицѣ. Наконецъ, всѣ функціи

$$U_{x^0_{m+i}}, \quad i=1, 2, \ldots n-m,$$

уничтожаются тождественно, въ силу уравненій (11). Поэтому исключая $x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \ldots x^0_n$ изъ перваго уравненія (12), при помощи $n-m$ послѣдующихъ за нимъ уравненій, мы получаемъ рѣшеніе данной системы (1).

Легко убѣдиться, что полученное рѣшеніе представляетъ *общій интегралъ Коши*. Обозначимъ, въ самомъ дѣлѣ, черезъ

$$\theta(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n)$$

значеніе функціи Θ, для начальныхъ значеній $x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_m$ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$. Въ такомъ случаѣ очевидно, что, для послѣднихъ начальныхъ значеній, функція z и ея частныя производныя

$$\frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

принимаютъ соотвѣтственно значенія функціи θ и ея частныхъ производныхъ по $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial \theta}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial \theta}{\partial x_n}.$$

Такимъ образомъ полученное рѣшеніе представляетъ дѣйствительно общій интегралъ Коши.

ГЛАВА VII.

Интегралы дифференціальныхъ уравненій характеристикъ и каноническихъ уравненій. Усовершенствованный С. Ли способъ Якоби-Майера интегрированія уравненій съ частными производными.

1. Каноническія дифференціальныя уравненія обыкновенныя и въ полныхъ дифференціалахъ представляютъ частный случай дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, соотвѣтствующихъ частнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка, представленнымъ въ видѣ, разрѣшенномъ относительно частныхъ производныхъ. Поэтому теорія дифференціальныхъ уравненій характеристикъ представляетъ полную аналогію съ теоріей каноническихъ уравненій. Какъ хорошо извѣстно, существуетъ тѣсная взаимная зависимость между задачами интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка и соотвѣтствующими дифференціальными уравненіями характеристикъ [1]). Въ предыдущей главѣ мы занимались вопросомъ о составленіи полнаго интеграла дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, исходя изъ общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ. Въ настоящей главѣ мы имѣемъ въ виду привести нѣсколько соображеній по поводу обратной задачи составленія общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, послѣ того какъ проинтегрировано соотвѣтствующее уравненіе съ частными производными. Съ рѣшеніемъ этой послѣдней задачи также тѣсно связаны имена *Гамильтона*, *Якоби* и *Ліувилля*, которые подошли, независимо другъ отъ друга и съ различныхъ точекъ зрѣнія, къ рѣшенію разсматриваемой задачи, какъ объ этомъ можно судить, сопоставляя сочиненія этихъ знаменитыхъ геометровъ.

Всѣ первоначальные труды ихъ относятся къ дифференціальнымъ уравненіямъ динамики. Первыми, по времени своего опубликованія, являются изслѣдованіе Гамильтона: *On a general method in dynamics* [2]) и письмо Якоби Парижской Академіи Наукъ: *Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps* [3]).

---

[1]) См. мои изслѣдованія: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными..., Mémoire sur l'intégration des équations... (Journal Jordan, 1899), Sur les théorèmes de Jacobi et Liouville (Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 1903).*

[2]) *Philosophical Transactions*, 1834—1835.

[3]) *Comptes rendus*, t. III, p. 59—61.

Jacobi.—Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 33.

Въ указанномъ изслѣдованіи Гамильтонъ выражаетъ общій интегралъ системы обыкновенныхъ каноническихъ уравненій при помощи полнаго интеграла соотвѣтствующаго уравненія съ частными производными, при чемъ произвольными постоянными служатъ начальныя значенія перемѣнныхъ. Что касается упомянутаго письма Якоби, то онъ показываетъ въ немъ, какъ, при помощи дифференцированія, составляется общій интегралъ канонической системы дифференціальныхъ уравненій движенія точки на плоскости, для которой извѣстны интегралъ живой силы и второй интегралъ, независящій отъ времени. Въ своихъ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ [1]) Якоби развилъ точку зрѣнія Гамильтона, принимая произвольныя величины, не представляющія начальныхъ значеній перемѣнныхъ, за постоянныя интегрированія и распространяя разсматриваемую теорію на одно уравненіе съ частными производными общаго вида. Затѣмъ въ 1853 году Ліувилль опубликовалъ свою замѣтку [2]): *Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853.* Сущность послѣдней представляетъ распространеніе перваго вышеуказаннаго предложенія Якоби на каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій общаго вида. Въ этой статьѣ Ліувилль показываетъ, какъ составляется общій интегралъ обыкновенныхъ каноническихъ уравненій, когда извѣстна половина всѣхъ интеграловъ, при условіи, что послѣдніе находятся въ инволюціи. Кромѣ того Ліувилль дополняетъ свою замѣтку весьма цѣннымъ замѣчаніемъ относительно того случая, когда данные интегралы разсматриваемой канонической системы неразрѣшимы относительно каноническихъ перемѣнныхъ одного и того же класса. При этомъ Ліувилль указываетъ, что, въ своихъ лекціяхъ въ *Collége de France*, онъ изслѣдовалъ послѣдній случай во всей его общности. Болѣе подробное разсмотрѣніе этого послѣдняго случая находится въ диссертаціи Лафона [3]). Наконецъ, мы считаемъ необходимымъ поставить въ тѣсную связь съ послѣднимъ вопросомъ изслѣдованія Майера, Бертрана и Дарбу, упомянутыя нами выше, при изложеніи теоріи характеристикъ и къ которымъ намъ придется еще разъ возвратиться, устанавливая ихъ взаимное соотношеніе съ теоріей полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли.

---

[1]) *Jacobi.—Ueber die Reduction der integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer zahl Variabeln auf die integration eines einzigen systemes gewönlicher Differenzialgleichungen* (*Gesammelte Werke*, Bd. IV, S. 57).

Jacobi.—Vorlesungen über Dynamik. Zweite, revidirte Ausgabe. Berlin, 1884, Zwanzigste Vorlesung, S. 157.

[2]) *Journal Liouville*, t. XX, 1855, p. 137.

[3]) *Lafon, A.*—Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique. Thèse. Paris 1854.

Что касается двухъ различныхъ точекъ отправленія, которыя мы здѣсь отмѣтили, при составленіи общаго интеграла каноническихъ дифференціальныхъ уравненій, то оба разсматриваемыхъ предложенія Гамильтона-Якоби и Якоби-Ліувилля не представляютъ существеннаго различія. Въ самомъ дѣлѣ, первая теорія исходитъ изъ полнаго интеграла уравненія съ частными производными, тогда какъ Ліувилль принимаетъ за основаніе интегралы въ инволюціи соотвѣтствующей канонической системы, число которыхъ равно порядку послѣдней. Легко видѣть однако, что какъ послѣдніе интегралы такъ и полный интегралъ соотвѣтствующаго частнаго уравненія представляютъ эквивалентные элементы, въ смыслѣ интегрированія послѣдняго уравненія. Кромѣ того мы установимъ далѣе такое же аналогичное соотвѣтсвіе между отмѣченнымъ выше частнымъ случаемъ Ліувилля и полными интегралами С. Ли.

2. Мы начнемъ съ изложенія новаго, весьма простого доказательства разсматриваемыхъ предложеній о составленіи общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ. Всѣ хорошо извѣстныя доказательства послѣднихъ предложеній представляютъ непосредственную повѣрку формулъ, видъ которыхъ дается предварительно. Легко однако иначе поставить вопросъ, задавшись цѣлью вычислить искомые интегралы, не предполагая напередъ извѣстнымъ ихъ видъ.

Пусть имѣемъ слѣдующее уравненіе

$$p+H(t,x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_1,\ p_2,\dots p_n)=0, \qquad (1)$$

гдѣ перемѣнныя $p,\ p_1,\ p_2,\dots p_n$ обозначаютъ частныя производныя перваго порядка функціи z соотвѣтственно по независимымъ перемѣннымъ $t,\ x_1,\ x_2,\dots x_n$.

Составляемъ соотвѣтствующую каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left.\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\right\}\quad i=1,2,\dots n. \qquad (2)$$

Предположимъ, что полный интегралъ уравненія (1) представляется уравненіемъ

$$z=V(t,\ x_1,\ x_2,\dots x_n,\ b_1,\ b_2,\dots b_n)+b, \qquad (3)$$

гдѣ $b_1,\ b_2,\dots b_n,\ b$ обозначаютъ $n+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2}\dots\dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1,\ b_2,\dots b_n}\right) \qquad (4)$$

отличенъ отъ нуля. Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно, уравненія

$$p_i=\frac{\partial V}{\partial x_i},\quad i=1,\ 2,\dots n,$$

разрѣшимы относительно произвольныхъ постоянныхъ $b_1,\ b_2\dots b_n$ и приводятъ къ n различнымъ интеграламъ въ инволюціи конической системы (2)

$$\left.F_i(t,\ x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_1,\ p_2,\dots p_n)=b_i,\ \right\}\quad i=1,2,\dots n. \qquad (5)$$

Обратно эти послѣдніе интегралы разрѣшимы очевидно относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_1,\ p_2,\dots p_n$.

Такимъ образомъ, благодаря извѣстному полному интегралу частнаго уравненія (1), становятся извѣстными n интеграловъ канонической системы (2). Поэтому задача интегрированія послѣдней приводится къ составленію n различныхъ дифференціальныхъ зависимостей, интегрированіе которыхъ приводило бы къ n остальнымъ искомымъ интеграламъ. Съ этою цѣлью составляемъ тождество

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(t,\ x_1,\ x_2,\dots x_n,\quad \frac{\partial V}{\partial x_1},\ \frac{\partial V}{\partial x_2},\dots\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)=0,$$

которое получается изъ даннаго уравненія (1), при помощи подстановки его рѣшенія (3).

Дифференцируя послѣднее тождество по $b_1,\ b_2,\dots b_n$, получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial b_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial b_s}=0,\quad s=1,\ 2,\dots n.$$

Въ силу уравненій интегрируемой системы (2), послѣднія тождества преобразовываются въ систему n слѣдующихъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}=0,$$
$$s=1,2,\ldots n.$$

Какъ легко видѣть, первыя части послѣднихъ уравненій представляютъ точныя производныя, и мы приводимъ разсматриваемыя уравненія къ слѣдующему виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial b_s}\right)=0,\quad s=1,2,\ldots n.$$

Интегрированіе послѣднихъ уравненій даетъ искомыя интегральныя уравненія изслѣдуемой канонической системы (2)

$$\frac{\partial V}{\partial b_s}=a_s,\quad s=1,\ 2,\ldots n,$$

гдѣ $a_1,\ a_2,\ldots a_n$ обозначаютъ n произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Легко видѣть, что получаемые отсюда интегралы различны. Это слѣдуетъ изъ того, что послѣднія уравненія не зависятъ отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса и разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $x_1,\ x_2,\ldots x_n$, вслѣдствіе введеннаго предположенія о неравенствѣ нулю опредѣлителя (4).

Въ изложенномъ сейчасъ доказательствѣ мы исходили изъ полнаго интеграла уравненія (1). Мы дадимъ еще второй способъ разысканія общаго интеграла канонической системы (2), принимая за основаніе ея n интеграловъ въ инволюціи (5). Съ этою цѣлью начнемъ съ разсмотрѣнія свойствъ искомыхъ интеграловъ.

Замѣтимъ прежде всего, что функціи

$$p+H,\ F_1,\ F_2,\ldots F_n \tag{6}$$

находятся въ инволюціи. Поэтому слѣдующія $n+1$ уравненій съ частными производными функціи f

$$(p+H,\ f)=0,$$
$$(F_i,\ f)=\begin{cases}0, & i=1,\ 2,\ldots s-1,\ s+1,\ldots n,\\ 1, & i=s,\end{cases}$$

образуютъ нормальную систему, допускающую n различныхъ, отличныхъ отъ функцій (6) интеграловъ, которые обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$f_1,\ f_2,\ldots f_n.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ *отсюда убѣждаемся также въ существованіи n слѣдующихъ интеграловъ канонической системы (2)*

$$f_s(t,\ x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ p_1,\ p_2,\ldots p_n)=a_s,$$
$$s=1,\ 2,\ldots n,$$

гдѣ всѣ a_s обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Каждый изъ этихъ интеграловъ находится въ союзѣ (conjuguée) съ однимъ изъ интеграловъ (5) и въ инволюціи съ остальными изъ нихъ.

Убѣдившись въ существованіи послѣднихъ интеграловъ, легко ихъ вычислить, исходя изъ того, что каждая функція f_s опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{aligned}&(p+H,f_s)=0,\\ &(F_i,\ f_s)=\begin{cases}0, & i=1,\ 2,\ldots s-1,\ s+1,\ldots n,\\ 1, & i=s.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Такъ какъ, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ, интегралы (5) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $p_1,\ p_2,\ldots p_n$, то функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2,\ldots F_n}{p_1,\ p_2,\ldots p_n}\right) \tag{8}$$

долженъ быть отличнымъ отъ нуля. Преобразовываемъ уравненія (7) къ новымъ перемѣннымъ, принимая $b_1,\ b_2,\ldots b_n$ за новыя перемѣнныя вмѣсто $p_1,\ p_2,\ldots p_n$, и обозначимъ черезъ θ_s значеніе преобразованной функціи f_s. Въ силу свойствъ функцій (6), преобразованная система уравненій (7) становится

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k}=\begin{cases}0, & i\gtrless s,\\ 1, & i=s.\end{cases}$$

Съ другой стороны значенія перемѣнныхъ $p,\ p_1,\ p_2,\ldots p_n$, опредѣляемыя уравненіями (1) и (5) какъ функціи величинъ

$$t,\ x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ b_1,\ b_2,\ldots b_n,$$

утождествляютъ эти послѣднія уравненія. Дифференцируя полученныя такимъ образомъ тождества по величинамъ $b_1,\ b_2,\ldots b_n$, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial p}{\partial b_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial b_s}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial b_s}=\begin{cases}0, & i\gtrless s,\\ 1, & i=s.\end{cases}$$

Вычитая послѣднія тождества соотвѣтственно изъ предыдущихъ, получаемъ тождества

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial b_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial q_k}-\frac{\partial p_k}{\partial b_s}\right)=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial q_k}-\frac{\partial p_k}{\partial b_s}\right)=0,$$

$$i=1,\ 2,\ldots n,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до n. Отсюда, вслѣдствіе неравенства нулю опредѣлителя (8), вытекаютъ слѣдующія тождества

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\theta_s}{\partial t}=\dfrac{\partial p}{\partial b_s},\quad \dfrac{\partial\theta_s}{\partial x_k}=\dfrac{\partial p_k}{\partial b_s},\\ k=1,\ 2,\ldots n,\end{array}\right\}\tag{9}$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до n. Такъ какъ опредѣляемыя уравненіями (1) и (5) значенія перемѣнныхъ p, p_1, $p_2,\ldots p_n$ удовлетворяютъ попарно условіямъ

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_i}=\frac{\partial p_i}{\partial x_r},$$

то, дифференцируя послѣднія по b_1, $b_2,\ldots b_n$, получаемъ новыя условія которыя показываютъ, что уравненія (9) интегрируемы. Поэтому функціи θ_s опредѣляются при помощи слѣдующихъ квадратуръ

$$\theta_s=\int\left(\frac{\partial p}{\partial b_s}\partial t+\frac{\partial p_1}{\partial b_s}dx_1+\ldots+\frac{\partial p_n}{\partial b_s}dx_n\right),$$

$$s=1,\ 2,\ldots n,$$

при чемъ не принимаются въ расчетъ дополнительныя произвольныя постоянныя величины.

Какъ легко видѣть, найденныя значенія функцій θ выражаются также слѣдующимъ образомъ, при помощи полнаго интеграла (3),

$$\theta_s=\frac{\partial V}{\partial b_s},\quad s=1,\ 2\ldots n.$$

Чтобы получить отсюда значенія функцій f_s, остается совершить обратное преобразованіе перемѣнныхъ, замѣнивъ величины b_1, $b_2,\ldots b_n$ соотвѣтственно ихъ функціональными значеніями F_1, $F_2,\ldots F_n$. Наконецъ, только что изложенное доказательство становится болѣе простымъ, вслѣдствіе симметричности вычисленій, если за исходное принять слѣдующее дифференціальное уравненіе общаго вида

$$F(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ p_1,\ p_2,\ldots p_n)=0.$$

Соотвѣтствующія дифференціальныя уравненія характеристикъ становятся

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}}=\cdots\frac{dx_n}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}}=\frac{dp_1}{-\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}=\cdots=\frac{dp_n}{-\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}.$$

Пусть имѣемъ n слѣдующихъ различныхъ интеграловъ въ инволюціи послѣдней системы

$$F_i(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ p_1,\ p_2,\ldots p_n)=b_i,$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1,$$

гдѣ F_0, b_0 условно обозначаютъ значенія F, b и b, b_1, $b_2,\ldots b_{n-1}$ представляютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ. Уравненія, служащія для опредѣленія остальныхъ искомыхъ $n-1$ интеграловъ f_1, $f_2,\ldots f_{n-1}$, принимаютъ видъ

$$(F_i,\ f_s)=\begin{cases}0, & i=0,\ 1,\ 2,\ldots s-1,\quad s+1,\ldots n-1,\\ 1, & i=s,\end{cases}$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Предполагая существованіе слѣдующаго неравенства

$$D\left(\frac{F,\ F_1,\ F_2,\ldots F_{n-1}}{p_1,\ p_2,\ p_3,\ldots p_n}\right)\gtrless 0,$$

принимаемъ величины b, b_1, $b_2,\ldots b_{n-1}$ за новыя перемѣнныя, вмѣсто p_1, $p_2,\ldots p_n$. Мы приходимъ такимъ образомъ къ двумъ различнымъ системамъ слѣдующихъ равенствъ

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_k}\,\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \begin{cases} 0, & i \gtrless s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_k}\,\frac{\partial p_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & i \gtrless s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Вычитая равенства второй строки соотвѣтственно изъ равенствъ первой строки, получаемъ слѣдующія уравненія

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s}\right) = 0,$$
$$i = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1,$$

для всѣхъ различныхъ значеній s, отъ 1 до $n - 1$. Въ силу неравенства нулю предыдущаго опредѣлителя, получаемъ новыя уравненія

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s},$$
$$k = 1,\ 2, \ldots n, \qquad s = 1,\ 2, \ldots n-1,$$

которыя и опредѣляютъ искомые интегралы при помощи квадратуръ.

3. Послѣднее доказательство распространяется также на случай, отмѣченный Ліувиллемъ, когда извѣстные интегралы (5) канонической системы (2) разрѣшимы относительно каноническихъ перемѣнныхъ различныхъ классовъ, но при этомъ различныхъ значковъ. Такъ предположимъ, напримѣръ, что уравненія (5) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ величинъ

$$p_1,\ p_2, \ldots p_{n-m},\ x_{n-m+1},\ x_{n-m+2}, \ldots x_n,$$

такъ что слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2, \ldots F_{n-m},\ F_{n-m+1}, \ldots F_n}{p_1,\ p_2, \ldots p_{n-m},\ x_{n-m+1}, \ldots x_n}\right)$$

отличенъ отъ нуля. Возвращаясь къ уравненіямъ (7), опредѣляющимъ искомыя функціи f_s, вводимъ $b_1,\ b_2, \ldots b_n$ какъ новыя перемѣнныя вмѣсто величинъ $p_1,\ p_2, \ldots p_{n-m},\ x_{n-m+1}, \ldots x_n$. Преобразованныя уравненія (7) становятся

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k}\,\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}}\,\frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k}\,\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}}\,\frac{\partial \theta_s}{\partial q_{n-m+r}} = \begin{cases} 0, & i \gtrless s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Кромѣ того мы имѣемъ еще рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k}\,\frac{\partial p_k}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}}\,\frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k}\,\frac{\partial p_k}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}}\,\frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & i \gtrless s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Отсюда слѣдуютъ новыя равенства

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s}\right) -$$
$$- \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}}\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} + \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s}\right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s}\right) - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}}\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} + \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s}\right) = 0,$$
$$i = 1,\ 2, \ldots n,$$

которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній s, отъ 1 до n. Вслѣдствіе неравенства нулю предыдущаго опредѣлителя, послѣдняя система приводитъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial b_s}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} = -\frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s},$$
$$k = 1,\ 2, \ldots n-m, \qquad r = 1,\ 2, \ldots m,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до n.

Какъ извѣстно изъ теоріи касательныхъ преобразованій, система уравненій (1) и (5) остается также въ инволюціи, если каноническія перемѣнныя подраздѣлить на два класса, изъ которыхъ каждый соотвѣтствуетъ одной изъ двухъ слѣдующихъ строкъ

$$x_1,\ x_2,\dots x_{n-m},\ -p_{n-m+1},\ -p_{n-m+2},\dots -p_n,$$
$$p_1,\ p_2,\dots p_{n-m},\quad x_{n-m+1},\quad x_{n-m+2},\dots\quad x_n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что послѣднія написанныя уравненія, служащія для опредѣленія функцій θ_s, образуютъ интегрируемую систему. Это заключеніе, независимо отъ теоріи касательныхъ преобразованій, слѣдуетъ также непосредственно изъ самаго факта существованія функцій θ_s, доказаннаго выше для соотвѣтствующихъ имъ значеній функцій f_s. Такимъ образомъ искомыя функціи опредѣляются при помощи слѣдующихъ квадратуръ

$$\theta_s=\int\Big(\frac{\partial p}{\partial b_s}dt+\frac{\partial p_1}{\partial b_s}dx_1+\dots+\frac{\partial p_{n-m}}{\partial b_s}dx_{n-m}-$$
$$-\frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial b_s}dp_{n-m+1}-\dots-\frac{\partial x_n}{\partial b_s}dp_n\Big),$$
$$s=1,\ 2,\dots n,$$

гдѣ не принимаются въ расчетъ дополнительныя произвольныя постоянныя величины.

Легко представить послѣднія выраженія при помощи одной функціи. Въ самомъ дѣлѣ, проинтегрируемъ точный дифференціалъ

$$dz=pdt+p_1dx_1+\dots+p_{n-m}dx_{n-m}-x_{n-m+1}dp_{n-m+1}-\dots-x_ndp_n,$$

гдѣ $p,\ p_1,\dots p_{n-m},\ x_{n-m+1},\dots x_n$ обозначаютъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (1) и (5). Напишемъ интегралъ послѣдняго дифференціала въ слѣдующемъ видѣ

$$z=U(t,\ x_1,\ x_2,\dots x_{n-m},\ p_{n-m+1},\dots p_n,\ b_1,\ b_2,\dots b_n)+b,$$

гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину. Въ такомъ случаѣ функціи θ_s выражаются слѣдующимъ образомъ

$$\theta_s=\frac{\partial U}{\partial b_s},\quad s=1,\ 2,\dots n.$$

Поэтому искомыя интегральныя уравненія канонической системы (2) становятся

$$\frac{\partial U}{\partial b_s}=a_s,\quad s=1,\ 2,\dots n,$$

гдѣ $a_1,\ a_2,\dots a_n$ обозначаютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Возьмемъ, напримѣръ, слѣдующую каноническую систему третьяго порядка

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},$$
$$i=1,\ 2,\ 3,$$

соотвѣтствующую частному дифференціальному уравненію

$$p+H=0,$$

гдѣ функція H имѣетъ слѣдующее значеніе

$$H=\frac{x_2x_3-x_1}{t}p_1+\frac{x_1x_3}{t}\frac{p_1^2}{p_2}-\frac{x_3^2}{t}\frac{p_1p_3}{p_2}.$$

Разсматриваемая каноническая система имѣетъ три интеграла въ инволюціи

$$\frac{tp_2}{p_1}=b_1,\quad t\Big(1-\frac{p_2}{x_3p_1}\Big)=b_2,\quad \frac{tp_2^2}{x_3p_1}=b_3.$$

Послѣдніе, совмѣстно съ нашимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, опредѣляютъ значенія перемѣнныхъ $p,\ p_1,\ p_2,\ x_3$ слѣдующимъ образомъ

$$p=\frac{b_1^2p_3-b_3(b_1x_2+b_2x_1)}{b_1(t-b_2)^2},$$

$$p_1=\frac{b_3t}{b_1(t-b_2)},\quad p_2=\frac{b_3}{t-b_2},\quad x_3=\frac{b_1}{t-b_2}.$$

Стало-быть, въ настоящемъ случаѣ, функція U получаетъ значеніе

$$U=\frac{b_3(b_1x_2+tx_1)-b_1^2p_3}{b_1(t-b_2)}+b.$$

Поэтому слѣдующія три уравненія

$$\frac{\partial U}{\partial b_1}=a_1,\quad \frac{\partial U}{\partial b_2}=a_2,\quad \frac{\partial U}{\partial b_3}=a_3$$

опредѣляютъ искомые три интеграла интегрируемой канонической системы

$$-(x_1p_1+x_3p_3)\frac{p_1}{tp_2}=a_1,$$

$$(x_1p_1+x_2p_2-x_3p_3)\frac{x_3p_1}{tp_2}=a_2,$$

$$(x_1p_1+x_2p_2)\frac{x_3p_1}{tp_2^2}=a_3.$$

Если принять за исходные интегралы нашей канонической системы первые два данные интеграла и послѣднiй изъ трехъ только что полученныхъ, которые образуютъ совмѣстно систему трехъ уравненiй въ инволюцiи, разрѣшимыхъ относительно перемѣнныхъ p_1, x_2, x_3, то соотвѣтствующее значенiе *характеристической функцiи* становится

$$U' = \left(\frac{1}{b_1} t x_1 - a_3 t + b_2 a_3\right) p_2 - \frac{b_1 p_3}{t - b_2}.$$

Въ такомъ случаѣ три искомые интеграла опредѣляются уравненiями

$$\frac{\partial U'}{\partial b_1} = a_1, \quad \frac{\partial U'}{\partial b_2} = a_2, \quad \frac{\partial U'}{\partial a_3} = b_3,$$

которыя представляютъ остальные три приведенные уже выше интеграла изслѣдуемой канонической системы.

4. Всѣ приведенныя доказательства распространяются весьма легко на системы уравненiй съ частными производными и на соотвѣтствующiя дифференцiальныя уравненiя характеристикъ.

Начнемъ съ разсмотрѣнiя слѣдующей нормальной системы m дифференцiальныхъ уравненiй

$$\left.\begin{array}{c} p_i + H_i(x_1, x_2, \ldots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n) = 0, \\ i = 1, 2, \ldots m, \quad (m < n). \end{array}\right\} \tag{10}$$

Составляемъ соотвѣтствующую послѣднимъ каноническую систему уравненiй въ полныхъ дифференцiалахъ

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+k} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} dx_i, \\ dp_{m+k} &= -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+k}} dx_i, \\ k &= 1, 2, \ldots n-m. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Пусть полный интегралъ системы (10) представляется равенствомъ

$$z = V(x_1, x_2, \ldots x_n, b_1, b_2, \ldots b_{n-m}) + b,$$

гдѣ b_1, $b_2 \ldots$, b_{n-m}, b обозначаютъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, \quad b_2, \quad \ldots b_{n-m}}\right) \gtrless 0. \tag{12}$$

Какъ легко видѣть, производныя уравненiя

$$p_{m+k} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}}, \quad k = 1, 2, \ldots n-m,$$

опредѣляютъ $n-m$ различныхъ интеграловъ канонической системы (11). Ея остальные $n-m$ интеграловъ получаются слѣдующимъ образомъ.

Дифференцируя по всѣмъ величинамъ b_1, $b_2, \ldots b_{n-m}$ тождества

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + H_i\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots m,$$

получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} \partial b_s} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots m, \quad s = 1, 2, \ldots n-m.$$

Умножая послѣднiя уравненiя соотвѣтственно на dx_i и складывая результаты, соотвѣтствующiе всѣмъ различнымъ значкамъ i, отъ 1 до m, получаемъ $n-m$ тождествъ

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} dx_i = 0, \quad s = 1, 2, \ldots n-m.$$

При помощи послѣднихъ тождествъ, первыя $n-m$ уравненiй (11) преобразовываются въ слѣдующiя дифференцiальныя уравненiя

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} dx_{m+k} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots n-m,$$

лѣвыя части которыхъ представляютъ точные дифференцiалы

$$d\left(\frac{\partial V}{\partial b_s}\right)=0,$$

$$s=1,\ 2,\ldots n-m.$$

Интегрируя послѣднія, находимъ искомыя интегральныя уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial b_s}=a_s,\quad s=1,\ 2,\ldots n-m,$$

гдѣ $a_1,\ a_2,\ldots a_{n-m}$ обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Полученныя уравненія разрѣшимы относительно $n-m$ перемѣнныхъ $x_{m+1},\ x_{m+2},\ldots x_n$, вслѣдствіе неравенства (12), и опредѣляютъ такимъ образомъ систему $n-m$ новыхъ различныхъ интеграловъ канонической системы (11), отличныхъ отъ прежнихъ, указанныхъ выше интеграловъ.

Распространимъ послѣднее доказательство на замкнутую систему уравненій, зависящихъ явно отъ функціональной перемѣнной величины z,

$$\left.\begin{array}{c} p_i+H_i(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ z,\ p_{m+1},\ p_{m+2},\ldots p_n)=0,\\ i=1,\ 2,\ldots m,\quad (m<n), \end{array}\right\} \tag{13}$$

которыя удовлетворяютъ извѣстнымъ условіямъ [1])

$$\frac{\partial H_h}{\partial x_i}-\frac{\partial H_h}{\partial z}H_i-\frac{\partial H_i}{\partial x_h}+\frac{\partial H_i}{\partial z}H_h+[H_k,\ H_h]=0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній h и i, отъ 1 до m.

Составляемъ соотвѣтствующую обобщенную каноническую систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left.\begin{array}{c} dx_{m+k}=\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}}dx_i,\\[2ex] dp_{m+k}=-\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{dH_i}{dx_{m+k}}dx_i,\\ k=1,\ 2,\ldots n-m,\\[2ex] dz=\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{r=1}^{n-m}p_{m+r}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}}-H_i\right)dx_i. \end{array}\right\} \tag{14}$$

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій...*, стр. 48.

Пусть полный интегралъ системы (13) представляется уравненіемъ

$$z=V(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ b,\ b_1,\ b_2,\ldots b_{n-m}), \tag{15}$$

гдѣ $b,\ b_1,\ b_2,\ldots b_{n-m}$ обозначаютъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, при чемъ

$$D\left(\frac{V,\ \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}},\ \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}},\ldots\frac{\partial V}{\partial x_n}}{b,\ \ b_1\ ,\ \ b_2\ ,\ldots b_{n-m}}\right)\gtrless 0. \tag{16}$$

Очевидно, что совокупность уравненій (15)-аго и его первыхъ производныхъ уравненій по $x_{m+1},\ x_{m+2},\ldots x_n$ опредѣляетъ $n-m+1$ различныхъ интеграловъ системы (14). Для разысканія остальныхъ $n-m$ интеграловъ, дифференцируемъ по всѣмъ величинамъ $b,\ b_1,\ b_2,\ldots b_{n-m}$ тождества, которыя получаются изъ данныхъ уравненій (13), вслѣдствіе подстановки въ нихъ рѣшенія (15). Такимъ образомъ получается рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_i}+\frac{\partial H_i}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial b_s}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_{m+k}}=0,$$

$$s=1,\ 2,\ldots n-m,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x_i}+\frac{\partial H_i}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial b}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x_{m+n}}=0,$$

для всѣхъ значеній i, отъ 1 до n.

Предположимъ, что, внутри разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ величинъ, производная $\frac{\partial V}{\partial b}$ сохраняетъ конечное значеніе. Исключая изъ предыдущихъ тождествъ первой строки производную $\frac{\partial H_i}{\partial z}$, въ силу послѣдняго тождества, и раздѣляя полученный результатъ на $\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2$, приходимъ къ новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right)+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial}{\partial x_{m+k}}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right)=0,$$

$$i=1,\ 2,\ldots m,\quad s=1,\ 2,\ldots n-m.$$

Умножая соотвѣтственно на dx_i тождества, соотвѣтствующія значку i, и складывая ихъ, получаемъ, въ силу $n-m$ первыхъ уравненій (14), систему слѣдующихъ дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right)dx_i+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial}{\partial x_{m+k}}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right)dx_{m+k}=0,$$

$$s=1,2,\ldots n-m.$$

Полученныя уравненія приводятся къ слѣдующему виду уравненій въ точныхъ дифференціалахъ

$$d\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}\right)=0,$$

$$s=1,2,\ldots n-m.$$

Интегрируя послѣднія уравненія, получаемъ интегральныя уравненія, опредѣляющія искомые интегралы обобщенной канонической системы (14),

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}}=a_s,\text{ или }\frac{\partial V}{\partial b_s}=a_s\frac{\partial V}{\partial b},$$

$$s=1,2,\ldots n-m.$$

гдѣ $a_1, a_2,\ldots a_{n-m}$ обозначаютъ различныя произвольныя постоянныя величины. Какъ хорошо извѣстно [1]), полученныя уравненія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $x_{m+1}, x_{m+2},\ldots x_n$, въ силу неравенства (16), и, слѣдовательно, опредѣляемые ими интегралы системы (14) различны, а также отличны отъ прежнихъ $n-m+1$ интеграловъ, такъ какъ не зависятъ отъ перемѣнныхъ p_{m+k}.

Возьмемъ, наконецъ, систему m дифференціальныхъ уравненій въ инволюціи, не зависящихъ отъ z и представленныхъ въ общемъ видѣ

$$\left.\begin{array}{c}F_h(x_1, x_2,\ldots x_n, p_1, p_2,\ldots p_n)=0,\\ h=1,2,\ldots m.\end{array}\right\}\qquad(17)$$

[1]) См. мое сочиненіе: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Journal Jordan, 1899. p.p. 460—461).

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $p_1, p_2,\ldots p_n$, такъ что имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Delta\equiv D\left(\frac{F_1, F_2,\ldots F_m}{p_1, p_2,\ldots p_m}\right)\gtrless 0.$$

Составляемъ соотвѣтствующую систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (см. стр. 148)

$$\left.\begin{array}{c}dx_{m+k}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}dx_i,\\ dp_r=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i^r}{\Delta}dx_i,\\ k=1,2,\ldots n-m,\quad r=1,2,\ldots n,\end{array}\right\}\qquad(18)$$

гдѣ Δ_{ik}, Δ_i^r обозначаютъ прежнія значенія опредѣлителей (см. ст. 147), съ тою только разницею, что здѣсь функціи F_h не зависятъ отъ z.

Предположимъ извѣстнымъ полный интегралъ данныхъ уравненій (17)-ыхъ

$$z=V(x_1, x_2,\ldots x_n, b_1, b_2,\ldots b_{n-m})+b,$$

гдѣ $b_1, b_2,\ldots b_{n-m}$, b обозначаютъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ удовлетворяется условіе

$$D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}},\ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, b_2,\ldots b_{n-m}}\right)\gtrless 0.$$

Само собою разумѣется, что уравненія

$$F_h(x_1, x_2,\ldots x_n, p_1, p_2,\ldots p_n)=C_h,$$

$$h=1,2,\ldots m,$$

$$p_{m+k}=\frac{\partial V}{\partial x_{m+k}},$$

$$k=1,2,\ldots n-m,$$

опредѣляютъ n различныхъ интеграловъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (18), причемъ $C_1, C_2,\ldots C_m$ обозначаютъ m различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Что касается остальныхъ $n-m$ интеграловъ послѣдней системы (18), то они вычисляются слѣдующимъ образомъ.

Мы имѣемъ тождества

$$F_h\left(x_1,\ x_2,\dots x_n,\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\dots\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)=0,$$
$$h=1,\ 2,\dots m.$$

Дифференцируя ихъ послѣдовательно по $b_1,\ b_2,\dots b_{n-m}$, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F_h}{\partial p_i}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial b_s}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\,\partial b_s}=0,$$
$$h=1,\ 2,\dots m,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Вслѣдствіе неравенства нулю опредѣлителя $\triangle$, разрѣшая послѣднія равенства относительно производныхъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_i},\quad i=1,\ 2,\dots m,$$

и пользуясь прежними значеніями опредѣлителей $\triangle_{ik}$, преобразовываемъ наши тождества въ слѣдующія новыя тождества

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\triangle_{ik}}{\triangle}\,\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_{m+k}}=0,$$
$$i=1,\ 2,\dots m,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Умножая послѣднія тождества соотвѣтственно на dx_i и складывая результаты, получаемъ, въ силу первыхъ $n-m$ уравненій (18), слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_i}\,dx_i+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial x_{m+k}}\,dx_{m+k}=0,$$

или

$$d\left(\frac{\partial V}{\partial b_s}\right)=0,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Поэтому становится очевиднымъ, что остальные искомые $n-m$ интеграловъ системы (18) опредѣляются слѣдующими $n-m$ различными уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_s}=a_s,\quad s=1,\ 2,\dots n-m,$$

гдѣ $a_1,\ a_2,\dots a_{n-m}$ обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ [1]).

Доказанныя предложенія легко распространяются также на системы частныхъ дифференціальныхъ уравненій въ инволюціи общаго вида, заключающихъ явно неизвѣстную функцію z.

Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, систему m уравненій въ инволюціи, зависящихъ отъ неизвѣстной функціи z,

$$\left.\begin{array}{c}F_h(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\dots p_n)=0,\\ h=1,\ 2,\dots m,\end{array}\right\}\tag{19}$$

для которыхъ имѣетъ мѣсто неравенство

$$\varDelta\equiv D\left(\frac{F_1,\ F_2,\dots F_m}{p_1,\ p_2,\dots p_m}\right)\gtrless 0.$$

Соотвѣтствующая система въ полныхъ дифференціалахъ представляется совокупностью прежнихъ уравненій (18) и слѣдующаго дополнительнаго

$$dz=-\sum_{i=1}^{m}\left(p_i+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\triangle_{ik}}{\triangle}p_{m+k}\right),\tag{20}$$

при чемъ опредѣлители $\triangle$, $\triangle_{ik}$ и $\triangle_i^r$ отличаются, въ настоящемъ случаѣ, отъ предыдущихъ ихъ значеній тѣмъ, что функціи F_h зависятъ здѣсь отъ перемѣнной z.

Пусть полный интегралъ системы (19) представляется уравненіемъ

$$z=V(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ b,\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-m}),\tag{21}$$

гдѣ $b,\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-m}$ обозначаютъ произвольныя постоянныя величины, и кромѣ того существуетъ условіе

$$D\left(\frac{V,\ \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}},\ \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}},\dots\dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b,\quad b_1,\quad b_2,\quad\dots b_{n-m}}\right)\gtrless 0.$$

---

[1]) Этотъ результатъ былъ опубликованъ мною въ замѣткѣ: *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles (Comptes rendus, 24 juillet 1899).*

Совокупность уравненія (21) и n слѣдующихъ

$$F_h(x_1,\ x_2, \dots x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \dots p_n) = C_h,$$
$$h=1,\ 2, \dots n-m,$$

$$p_{m+k} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}},$$
$$k=1,\ 2, \dots n-m,$$

опредѣляетъ $n+1$ интеграловъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (18) и (20), гдѣ $C_1,\ C_2, \dots C_m$ обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Остальные $n-m$ интеграловъ послѣдней системы вычисляются на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Составляемъ тождества, которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній h, отъ 1 до m,

$$\frac{\partial F_h}{\partial z}\,\frac{\partial V}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_h}{\partial p_i}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\,b_s} = 0,$$
$$s=1,\ 2, \dots n-m,$$

$$\frac{\partial F_h}{\partial z}\,\frac{\partial V}{\partial b} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F_h}{\partial p_i}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial b} + \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\,\partial b} = 0.$$

Предполагая, что, въ разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ, производная $\frac{\partial V}{\partial b}$ сохраняетъ конечное значеніе, получаемъ аналогично предыдущему (см. стр. 171) новыя тождества для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$,

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F_h}{\partial p_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial b_s}}{\dfrac{\partial V}{\partial b}}\right) + \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}\,\frac{\partial}{\partial x_{m+k}}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial b_s}}{\dfrac{\partial V}{\partial b}}\right) = 0,$$
$$h=1,\ 2, \dots m.$$

Такъ какъ опредѣлитель $\triangle$ отличенъ отъ нуля, то, разрѣшая послѣднія равенства относительно производныхъ

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial b_s}}{\dfrac{\partial V}{\partial b}}\right),\quad i=1,\ 2, \dots m,$$

и пользуясь прежними значеніями опредѣлителей $\triangle_{ik}$, получаемъ тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial b_s}}{\dfrac{\partial V}{\partial b}}\right) + \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\triangle_{ik}}{\triangle}\,\frac{\partial}{\partial x_{m+k}}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial b_s}}{\dfrac{\partial V}{\partial b}}\right) = 0,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Совершенно аналогично предыдущему умножаемъ послѣднія тождества соотвѣтственно на dx_i и складываемъ полученные результаты. При помощи полученныхъ такимъ образомъ тождествъ, дифференціальныя уравненія, соотвѣтствующія первымъ $n-m$ уравненіямъ (18), преобразовываются въ слѣдующія

$$d\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial b_s}}{\dfrac{\partial V}{\partial b}}\right) = 0,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Такимъ образомъ искомые интегралы опредѣляются уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} - a_s\frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$
$$s=1,\ 2, \dots n-m,$$

гдѣ $a_1,\ a_2, \dots a_{n-m}$ обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Подобно тому какъ мы только что распространили на системы уравненій съ частными производными первое изъ изложенныхъ доказательствъ теоремы Якоби, такъ совершенно аналогично возможно обобщить приведенное нами доказательство предложеній Ліувилля. Это обобщеніе не представляетъ никакихъ затрудненій, когда разсматриваемыя уравненія явно не зависятъ отъ функціональной перемѣнной z. Что касается случая, когда перемѣнная z входитъ въ данныя уравненія, тогда равенства, выражающія каноническія свойства интеграловъ, соотвѣтствующихъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, представляются въ болѣе сложномъ видѣ. Для выраженія этихъ свойствъ въ разсматриваемомъ случаѣ оказывается необходимымъ составить выраженіе полнаго интеграла соотвѣтствующихъ частныхъ дифференціальныхъ уравненій. То же самое замѣчаніе относится къ случаю Ліувилля, когда данные интегралы въ инволюціи разрѣшаются относительно каноническихъ перемѣнныхъ съ различными значками и различныхъ классовъ. Этотъ случай очевидно приводится къ первому, при помощи касательныхъ преобразованій. Мы приходимъ такимъ образомъ въ обоихъ случаяхъ къ необходимости перейти къ тѣмъ же первоначальнымъ, исходнымъ условіямъ, на которыхъ основывались въ первомъ изъ данныхъ нами доказательствъ. Какъ намъ кажется, послѣднее, по простотѣ своей, повидимому не оставляетъ желать ничего лучшаго. Мы не станемъ входить въ виду этого въ дальнѣйшія подробности относительно доказательствъ изслѣдуемыхъ предложеній и перейдемъ къ разсмотрѣнію полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли.

5. Какъ видно изъ изложенныхъ выше соображеній, слѣдуетъ по справедливости приписать Ліувиллю честь первенства, воспользоваться идеей интегральныхъ собраній С. Ли [1]). Дѣйствительно, въ своей упомянутой выше статьѣ: *Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique...*, Ліувилль предусмотрѣлъ случай полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, представляющихъ систему интеграловъ въ инволюціи канонической системы, которые неразрѣшимы относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса. При этомъ Ліувилль, и затѣмъ Лафонъ, разрѣшали представляющій здѣсь вопросъ въ самомъ общемъ видѣ, т. е. не ограничивались предположеніемъ, подобно С. Ли, что данные интегралы въ инволюціи не должны разрѣшаться относительно какихъ либо другихъ перемѣнныхъ кромѣ тѣхъ, относительно которыхъ эти интегралы разрѣшимы, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ. Такимъ образомъ Ліувилль предрѣшилъ вопросъ объ усовершенствованіи, внесенномъ С. Ли въ способъ интегрированія Якоби-Майера, еще задолго до его созданія и до развитія общей теоріи разсматриваемыхъ уравненій. Только этимъ послѣднимъ обстоятельствомъ и возможно объяснить тотъ фактъ, что значеніе результатовъ Ліувилля не было оцѣнено раньше и что потребовался долгій промежутокъ времени, съ 50-ыхъ до 70-хъ годовъ прошлаго столѣтія, т. е. двадтатилѣтній періодъ въ развитіи теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, пока С. Ли не пришелъ къ аналогичнымъ результатамъ. Если я не ошибаюсь, то въ литературѣ разсматриваемой области математическаго анализа только здѣсь, на этихъ страницахъ моего изслѣдованія, приводятся впервые настоящія историко-критическія соображенія, устанавливающія сравнительную оцѣнку трудовъ Ліувилля и С. Ли. Этому послѣднему факту я также нахожу истолкованіе и объясняю его тѣмъ, что С. Ли облекалъ въ столь сложную форму изложеніе своихъ результатовъ, что ихъ практическое значеніе, сущность и взаимная связь съ трудами предыдущихъ изслѣдователей ускользаютъ отъ вниманія читателя.

[1]) См. мое сообщеніе: *Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville* (Comptes rendus, 17 août 1903)

Чтобы восполнить отмѣченный пробѣлъ и установить преемственную зависимость между классической теоріей уравненій съ частными производными и изслѣдованіями С. Ли, мы продолжимъ на послѣдующихъ страницахъ изученіе полныхъ интеграловъ С. Ли.

Начнемъ съ разсмотрѣнія вопроса о составленіи общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, на основаніи извѣстнаго полнаго интеграла С. Ли соотвѣтствующихъ производныхъ уравненій и перейдемъ затѣмъ къ задачѣ о переходѣ отъ полнаго интеграла С. Ли къ полному интегралу Лагранжа.

Если производныя уравненія данной системы, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, находятся *въ инволюціи*, то въ такомъ случаѣ поставленный нами вопросъ разрѣшается на основаніи изложенной выше теоріи касательныхъ преобразованій. Дѣйствительно, приводя полное интегральное собраніе С. Ли, соотвѣтствующее данному полному интегралу, къ совокупности $n+1$ уравненій въ инволюціи, при помощи соображеній, аналогичныхъ изложеннымъ на страницахъ 54—57, легко затѣмъ получить искомый общій интегралъ, какъ это показано у Goursat: *Leçons sur l'intégration... (n⁰ 108, p. p. 276—277)*. Составивъ общій интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, мы получаемъ затѣмъ извѣстнымъ образомъ полный интегралъ Лагранжа соотвѣтствующихъ производныхъ уравненій, разсматриваемыхъ какъ дифференціальныя уравненія съ частными производными. Такимъ образомъ оба намѣченные вопроса разрѣшаются при помощи алгебраическихъ исключеній. Ходъ послѣднихъ вычисленій однако упрощается и распространяется также на замкнутыя системы уравненій, если принять во вниманіе свойства полныхъ интеграловъ С. Ли, аналогичныя свойствамъ полныхъ интеграловъ Лагранжа, къ разсмотрѣнію которыхъ мы и приступаемъ.

Пусть имѣемъ уравненіе

$$p_1 + H(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) = 0. \tag{22}$$

Составляемъ соотвѣтствующую ему каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left.\frac{dx_{r+1}}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}, \quad \frac{dp_{r+1}}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_{r+1}} \right\} \quad \substack{r=1,\,2,\ldots,n-1} \tag{23}$$

Предположимъ, что данное уравненіе (22) имѣетъ полное рѣшеніе С. Ли q-аго класса, которое представляется слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} &z=\varphi(x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-1})+b\ ,\\ &x_{n-q+i}=\varphi_i(x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-1}),\\ &p_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}p_{n-q+i},\\ &i=1,\ 2,\dots q,\quad k=1,\ 2,\dots n-q, \end{aligned}\right\}\tag{24}$$

при чемъ $b_1, b_2, \dots b_n$ обозначаютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, и пусть имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$\triangle=D\left(\frac{\varphi_1,\ \varphi_2,\dots\varphi_q,\ \psi_2,\ \dots\psi_{n-q}}{b_1,\ b_2,\dots b_q,\ b_{q+1},\dots b_{n-1}}\right),\tag{25}$$

гдѣ обозначенія ψ имѣютъ прежнія указанныя выше значенія

$$\psi_k\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}p_{n-q+i}.$$

Легко показать, что общій интегралъ канонической системы (23) опредѣляется совокупностью уравненій

$$\left.\begin{aligned} &x_{n-q+i}=\varphi_i(x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-1}),\\ &\qquad i=1,\ 2,\dots q,\\ &p_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}p_{n-q+i},\\ &\qquad k=2,\ 3,\dots n-q,\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}p_{n-q+i}=a_s,\\ &\qquad s=1,\ 2,\dots n-1, \end{aligned}\right\}\tag{26}$$

гдѣ $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ представляютъ $n-1$ новыхъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Во-первыхъ, нетрудно убѣдиться, что послѣднія $n-1$ уравненій (26) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ

$$x_2,\ x_3,\dots x_{n-q},\ p_{n-q+1},\ p_{n-q+2},\dots p_n.\tag{27}$$

Въ самомъ дѣлѣ, вводимъ обозначенія

$$\theta_s\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}p_{n-q+i}$$

и составляемъ слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$\triangle'\equiv D\left(\frac{\theta_1,\ \theta_2,\dots\theta_{n-q-1},\ \theta_{n-q},\dots\theta_{n-1}}{x_2,\ x_3,\dots x_{n-q},\ p_{n-q+1},\dots p_n}\right).$$

Въ силу значеній функцій θ_s и ψ_k, становится очевиднымъ, что имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k}\equiv\frac{\partial\psi_k}{\partial b_s},\qquad \frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-q+i}}\equiv-\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s},\tag{28}$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$, значеній k, отъ 1 до $n-q$ и значеній i, отъ 1 до q. Поэтому опредѣлитель $\triangle'$ принимаетъ слѣдующее значеніе

$$\triangle'\equiv\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_2}{\partial b_1} & \frac{\partial\psi_3}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial\psi_{n-q}}{\partial b_1} & -\frac{\partial\varphi_1}{\partial b_1} & \dots & -\frac{\partial\varphi_q}{\partial b_1}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial b_2} & \frac{\partial\psi_3}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial\psi_{n-q}}{\partial b_2} & -\frac{\partial\varphi_1}{\partial b_2} & \dots & -\frac{\partial\varphi_q}{\partial b_2}\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial b_{n-1}} & \frac{\partial\psi_3}{\partial b_{n-1}} & \dots & \frac{\partial\psi_{n-q}}{\partial b_{n-1}} & -\frac{\partial\varphi_1}{\partial b_{n-1}} & \dots & \frac{\partial\varphi_q}{\partial b_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Послѣ перестановки столбцовъ въ послѣднемъ опредѣлителѣ, легко видѣть, что онъ выражается слѣдующимъ образомъ черезъ опредѣлитель $\triangle$

$$\triangle'=(-1)^{(n-q)q}\,\triangle.$$

Поэтому, въ силу неравенства (25), разсматриваемый опредѣлитель $\triangle'$ также отличенъ отъ нуля

$$\triangle'\gtrless 0.$$

Слѣдовательно, послѣднія $n-1$ уравненія (26) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ (27), и, стало-быть, система уравненій (26) опредѣляетъ значенія всѣхъ перемѣнныхъ величинъ

$$x_2,\ x_3, \ldots x_n,\ p_2,\ p_3, \ldots p_n \tag{29}$$

въ функціяхъ независимой перемѣнной x_1 и $2(n-1)$ произвольныхъ постоянныхъ величинъ

$$b_1,\ b_2, \ldots b_{n-1},\ a_1,\ a_2, \ldots a_{n-1}.$$

Наша задача приводится такимъ образомъ къ доказательству, что послѣднія значенія представляютъ общій интегралъ канонической системы (23). Убѣдиться въ этомъ легко различными способами. Мы начнемъ съ изложенія доказательства, аналогичнаго такъ называемому первому способу Якоби, въ классической теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Функціональныя значенія перемѣнныхъ (29), опредѣляемыя системой уравненій (26), будучи подставлены въ эти послѣднія уравненія, обращаютъ ихъ въ тождества. Полученныя такимъ образомъ тождества дифференцируемъ по x_1 и приходимъ къ новымъ тождествамъ, которыя, въ силу равенствъ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\sigma \partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\sigma \partial x_k} p_{n-q+i} \equiv \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\sigma \partial b_s} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\sigma \partial b_s} p_{n-q+i} \equiv \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial b_s},$$

принимаютъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_{n-q+i}}{dx_1} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{r+1}} \frac{dx_{r+1}}{dx_1},\\
&\frac{dp_k}{dx_1} = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial x_k} \frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1},\\
&\frac{\partial\psi_1}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial b_s} \frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} = 0,\\
&i = 1, 2, \ldots q, \quad k = 2, 3, \ldots n-q, \quad s = 1, 2, \ldots n-1.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Съ другой стороны уравненія, соотвѣтствующія первымъ двумъ строкамъ системы (26), и уравненіе $p_1 = \psi_1$ утождествляютъ данное уравненіе (22), разсматриваемое какъ производное уравненіе С. Ли, и мы имѣемъ поэтому слѣдующее тождество

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1 + H(x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots \varphi_q,\ \psi_2,\ \psi_3, \ldots \psi_{n-q},\\
&\qquad p_{n-q+1},\ p_{n-q+2}, \ldots p_n) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

справедливое для всѣхъ значеній перемѣнныхъ

$$x_1,\ x_2, \ldots x_{n-q},\ p_{n-q+1},\ p_{n-q+2}, \ldots p_n$$

и произвольныхъ постоянныхъ величинъ $b_1,\ b_2, \ldots b_{n-1}$. Поэтому дифференцируя написанное тождество по всѣмъ послѣднимъ величинамъ и принимая во вниманіе слѣдующія тождества

$$\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial p_{n-q+i}} \equiv -\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\sigma}, \quad \sigma = 1,\ 2, \ldots n-q,$$

получаемъ въ результатѣ рядъ новыхъ тождествъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial x_k} = 0,\\
&-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{r+1}} = 0,\\
&\frac{\partial\psi_1}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial b_s} = 0,\\
&k = 2, 3, \ldots n-q, \quad i = 1, 2, \ldots q, \quad s = 1, 2, \ldots n-1.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Сопоставляя тождества системъ (30) и (32), соотвѣтствующія однимъ и тѣмъ же значкамъ i, k, s, легко приходимъ къ слѣдующимъ тождествамъ

$$\frac{dx_{n-q+i}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}} = \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{r+1}} \left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots q,$$

$$\frac{dp_k}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} \left(\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\right) - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial x_k} \left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}\right) = 0,$$

$$k = 2, 3, \ldots n-q,$$

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s} \left(\frac{dp_{n-q-i}}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\right) - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial b_s} \left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}\right) = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots n-1.$$

Въ силу неравенства (25), изъ послѣднихъ n—1 тождествъ вытекаютъ слѣдующія тождества

$$\frac{dx_{r+1}}{dx_1}=\frac{\partial H}{\partial p_{r+1}},\quad \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1}=-\frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}},$$
$$r=1,\,2,\dots n-q-1,\qquad i=1,\,2,\dots q.$$

На основаніи послѣднихъ, предыдущія двѣ системы тождествъ даютъ остальныя искомыя тождества

$$\frac{dx_{n-q+i}}{dx_1}=\frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}},\quad \frac{dp_k}{dx_1}=-\frac{\partial H}{\partial x_k},$$
$$i=1,\,2,\dots q,\qquad k=2,\,3,\dots n-q.$$

Такимъ образомъ полученныя тождества показываютъ, что значенія перемѣнныхъ (29), опредѣляемыя уравненіями (26), утождествляютъ каноническую систему (23) и представляютъ, стало-быть, ея общій интегралъ.

Легко дать еще другое новое, отличное отъ предыдущаго доказательство разсматриваемаго предложенія, приводящееся къ тому, чтобы показать, что разсматриваемая нами система уравненій (26) опредѣляетъ всѣ $2n$—2 интеграловъ каноническихъ уравненій (23). Въ силу неравенства (25), n—1 уравненій первой и второй строки системы (26) разрѣшимы относительно произвольныхъ постоянныхъ $b_1,\ b_2,\dots b_{n-1}$, и мы получаемъ такимъ образомъ n—1 слѣдующихъ интеграловъ уравненій (23)

$$\left.\begin{array}{c} F_s(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_2,\ p_3,\dots p_n)=b_s,\\ s=1,\,2,\dots n-1. \end{array}\right\} \tag{33}$$

Эти уравненія представляютъ систему n—1 интеграловъ въ инволюціи, какъ это слѣдуетъ изъ общихъ свойствъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, разсмотрѣнныхъ во второй главѣ. Поэтому скобки Пуассона, составленныя изъ всѣхъ функцій $F_1,\ F_2,\dots F_{n-1}$ попарно, уничтожаются тождественно, т. е. *существуетъ рядъ тождествъ*

$$(F_s,\ F_\sigma)=0, \tag{34}$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и σ, отъ 1 *до* n—1.

Внося функціональныя значенія b_s, опредѣляемыя уравненіями (33), въ послѣднія n—1 равенствъ (26), получаемъ уравненія

$$\left.\begin{array}{c} f_s(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_2,\ p_3,\dots p_n)=a_s,\\ s=1,\,2,\dots n-1. \end{array}\right\} \tag{35}$$

Мы приводимъ доказательство разсматриваемаго предложенія къ тому, чтобы показать, что послѣднія уравненія представляютъ n—1 остальныхъ интеграловъ системы (23), отличныхъ отъ интеграловъ (33).

Такъ какъ уравненія (33) и (35) являются преобразованіемъ системы (26), разрѣшимой относительно перемѣнныхъ (29), то само собою разумѣется, что уравненія (35) представляютъ систему n—1 различныхъ равенствъ, отличныхъ отъ (33)-хъ. Кромѣ того легко видѣть, что функціи f_s представляютъ интегралы линейнаго уравненія съ частными производными функціи f, соотвѣтствующаго обыкновеннымъ уравненіямъ (23),

$$(p_1+H,\ f)=0, \tag{36}$$

гдѣ послѣднія скобки Пуассона распространяются на всѣ перемѣнныя $x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_1,\ p_2,\dots p_n$.

Дѣйствительно, замѣчая, что функціи f_s имѣютъ значенія

$$f_s\equiv\theta_s(x_1,\ x_1,\dots x_{n-q},\ p_{n-q+1},\dots p_n,\ F_1,\ F_2,\dots F_{n-1}),$$

приводимъ выраженія скобокъ Пуассона

$$(p_1+H,\ f_s)$$

къ слѣдующему виду

$$(p_1+H,\ f_s)\equiv\frac{\partial\theta_s}{\partial x_1}+\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-q+i}}+$$
$$+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_r}(p_1+H,\ F_r)\,.$$

Такъ какъ функціи F_r представляютъ интегралы уравненія (36), то имѣютъ мѣсто тождества

$$(p_1+H,\ F_r)=0,$$

для всѣхъ значеній r, отъ 1 до n—1. Поэтому предыдущія равенства становятся

$$(p_1+H,\ f_s)\equiv\frac{\partial\theta_s}{\partial x_1}+\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-q+i}}$$

и, на основаніи тождествъ (28), принимаютъ слѣдующее значеніе

$$(p_1+H, f_s)\equiv\frac{\partial\psi_1}{\partial b_s}+\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\psi_k}{\partial b_s}+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}.$$

Легко видѣть, что правыя части послѣднихъ равенствъ представляютъ тождественный нуль. Дѣйствительно, такъ какъ уравненія (24) представляютъ полный интегралъ С. Ли даннаго уравненія (22), то существуетъ тождество

$$\psi_1+H(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\varphi_q, \psi_2, \psi_3, \ldots\psi_{n-q},$$
$$p_{n-q+1}, \ldots p_n)=0.$$

Дифференцируя послѣднее по b_s, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ (представленныхъ послѣднею строкою системы (32))

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial b_s}+\sum\limits_{i=1}^{q}\dfrac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}+\sum\limits_{k=2}^{n-q}\dfrac{\partial H}{\partial p_k}\dfrac{\partial\psi_k}{\partial b_s}=0,\\ s=1, 2, \ldots n-1.\end{array}\right\}\qquad(37)$$

Поэтому предыдущія равенства принимаютъ видъ

$$(p_1+H, f_s)=0,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$, и показываютъ, что функціи $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ служатъ интегралами линейнаго уравненія (36), т. е. уравненія (35) представляютъ $n-1$ интеграловъ канонической системы (23) и, вмѣстѣ съ уравненіями (33), представляютъ полную систему ея $2n-2$ различныхъ интеграловъ.

Мы приведемъ еще одно, третье по счету, и самое простое доказательство разсматриваемаго предложенія, представляющее распространеніе на полные интегралы С. Ли даннаго нами доказательства теоремы Якоби-Ліувилля, въ началѣ настоящей главы.

Съ этою цѣлью возвращаемся къ тождествамъ (37), представляющимъ непосредственное слѣдствіе существованія полнаго интегральнаго собранія С. Ли (24) даннаго уравненія (22). Въ силу слѣдующихъ изъ уравненій канонической системы (23)

$$\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1}=-\frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}},\quad \frac{dx_k}{dx_1}=\frac{\partial H}{\partial p_k},$$
$$i=1, 2, \ldots q,\qquad k=2, 3, \ldots n-q,$$

тождества (37) приводятъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1}+\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial\psi_k}{\partial b_s}\frac{dx_k}{dx_1}=0,$$
$$s=1, 2, \ldots n-1.$$

Принимая во вниманіе отмѣченныя выше равенства

$$\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial b_s}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\sigma\,\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\sigma\,\partial b_s}p_{n-q+i},$$

мы преобразовываемъ послѣднія уравненія къ такому виду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_1\,\partial b_s}p_{n-q+i}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1}+$$
$$+\sum_{k=2}^{n-q}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial b_s\,\partial x_k}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial b_s\,\partial x_k}p_{n-q+i}\right)\frac{dx_k}{dx_1}=0,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Легко видѣть, что лѣвыя части написанныхъ уравненій представляютъ точные дифференціалы, такъ что изслѣдуемыя уравненія становятся въ полныхъ дифференціалахъ

$$d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}p_{n-q+i}\right)=0,$$
$$s=1, 2, \ldots n-1.$$

Итакъ *искомыя интегральныя уравненія имѣютъ значенія*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}p_{n-q+i}=a_s,$$
$$s=1, 2, \ldots n-1.$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ обозначаютъ произвольныя постоянныя величины.

6. Какъ извѣстно, каноническія системы дифференціальныхъ уравненій обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференціалахъ обладаютъ такъ называемыми каноническими системами интеграловъ [1]). Легко показать, что уравненія (26) опредѣляютъ такую *каноническую систему интеграловъ*

---

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Journal Jordan, 1899, p. 435).

уравненій (23), совершенно аналогично Гамильтонъ-Якобіевской теоріи, т. е. что *интегралы (33) и (35) системы (23) являются каноническими, удовлетворяя условіямъ (34) и еще слѣдующимъ*

$$\left.\begin{aligned} &(F_r, f_s) \equiv \begin{cases} 0, & s \gtrless r, \\ 1, & s = r, \end{cases} \\ &(f_r, f_s) \equiv 0, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

для всѣхъ значеній указателей r и s, отъ 1 до $n-1$.

Чтобы убѣдиться въ существованіи послѣднихъ равенствъ, составляемъ значенія слѣдующихъ скобокъ Пуассона

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_\sigma} (F_r, F_\sigma),$$

которыя, въ силу условій (34), приводятся къ виду

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}}. \tag{39}$$

Послѣднее равенство, на основаніи тождества (28), преобразовывается въ слѣдующее

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_k}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s}.$$

Въ виду того, что уравненія (33) представляютъ преобразованіе первыхъ $n-1$ уравненій (26), то результатъ подстановки опредѣляемыхъ ими значеній перемѣнныхъ

$$x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_{n-q},$$

въ уравненія (33), представляетъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\left.\begin{aligned} &F_r(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_{n-q}, \\ &\qquad p_{n-q+1}, \ldots p_n) = b_r, \\ &\qquad r = 1, 2, \ldots n-1. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Дифференцируя послѣднія по любой изъ величинъ b_s, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & s \gtrless r, \\ 1, & s = r, \end{cases}$$

для всѣхъ значеній r и s, отъ 1 до $n-1$. Поэтому, вслѣдствіе полученныхъ тождествъ, предыдущія выраженія скобокъ (F_r, f_s) даютъ первый рядъ искомыхъ нами условій (38)

$$(F_r, f_s) = \begin{cases} 0, & s \gtrless r, \\ 1, & s = r, \end{cases}$$

Наконецъ, для разысканія значенія скобокъ (f_r, f_s), составляемъ слѣдующее выраженіе

$$(f_r, f_s) \equiv \sum_{u=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_r}{\partial b_u} (F_u, \theta_s') + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (\theta_r', F_v) +$$

$$+ \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-2} \frac{\partial \theta_r}{\partial b_u} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (F_u, F_v),$$

гдѣ значки при θ_s и θ_r, въ первыхъ двухъ суммахъ, обозначаютъ, что функціи θ_s, θ_r, при составленіи скобокъ Пуассона, дифференцируются только по тѣмъ перемѣннымъ x и p, которыя входятъ въ нихъ непосредственно. Поэтому мы имѣемъ

$$(F_u, \theta_s') \equiv \sum_{k=2}^{q} \frac{\partial F_u}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_u}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}},$$

$$(\theta_r', F_v) \equiv \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_r}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_v}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_r}{\partial x_k}.$$

Первое изъ этихъ выраженій имѣетъ видъ правой части равенства (39), второе же отличается отъ послѣдняго обратнымъ знакомъ. Поэтому, на основаніи предыдущихъ вычисленій, заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned} &(F_u, \theta_s') = \begin{cases} 0, & u \gtrless s, \\ 1, & u = s, \end{cases} \\ &(\theta_r', F_v) = \begin{cases} 0, & v \gtrless r, \\ -1, & v = r. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Въ силу послѣднихъ равенствъ и условій (34), выраженія разсматриваемыхъ скобокъ становятся

$$(f_r,\ f_s)\equiv\frac{\partial\theta_r}{\partial b_s}-\frac{\partial\theta_s}{\partial b_r}.$$

Такъ какъ выраженія производныхъ, въ правой части послѣдняго равенства, имѣютъ соотвѣтственно значенія

$$\frac{\partial\theta_r}{\partial b_s}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial b_r\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial b_r\partial b_s}p_{n-q+i},$$

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial b_r}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial b_s\partial b_r}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial b_s\partial b_r}p_{n-q+i},$$

то мы приходимъ къ остальнымъ искомымъ условіямъ (38)

$$(f_r,\ f_s)\equiv 0,$$

которыя справедливы для всѣхъ значеній r и s, отъ 1 до n—1.

Въ дополненіе къ выведеннымъ равенствамъ прибавимъ еще слѣдующія.

На основаніи уравненій (33), первое уравненіе (24) приводится къ слѣдующему виду

$$z-F(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_2,\ p_3,\dots p_n)=b_n, \tag{42}$$

гдѣ функція F имѣетъ значеніе

$$F\equiv\varphi(x_1,\ x_2,\dots x_{n-q},\ F_1,\ F_2,\dots F_{n-1}).$$

Такъ какъ уравненія (24) образуютъ замкнутую систему, то представляющія ихъ преобразованіе уравненія (22), (33) и (42) составляютъ также замкнутую систему, при чемъ, кромѣ условій (34) и (38), имѣютъ мѣсто еще слѣдующія равенства

$$\left.\begin{aligned}&[p_1+H,\ z-F]=0,\\&[F_s,\ z-F]=0,\\&\scriptstyle s=1,\,2,\,\dots n-1.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Въ виду того, что лѣвыя части послѣднихъ $n-1$ равенствъ не зависятъ отъ величинъ p_1, b_1, $b_2,\dots b_n$, то эти равенства не могутъ быть слѣдствіемъ разсматриваемыхъ уравненій и, стало-быть, удовлетворяются

тождественно, тогда какъ первое равенство (43) является слѣдствіемъ даннаго уравненія (22).

Вычислимъ, наконецъ, значеніе скобокъ Вейлера

$$[z-F,\ f_s]\equiv[z,\ f_s]-[F,\ f_s].$$

Очевидно существуютъ слѣдующія равенства

$$[z,\ f_s]\equiv-\sum_{i=1}^{q}p_{n-q+i}\frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-q+i}}-\sum_{\sigma=2}^{n}p_\sigma\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}\frac{\partial F_v}{\partial p_\sigma},$$

$$[F,\ f_s]\equiv\sum_{u=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial b_u}(F_u,\ \theta_s')+\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}(\varphi',\ F_v)+$$

$$\sum_{u=1}^{n-1}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial b_u}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}(F_u,\ F_v).$$

Принимая во вниманіе условія (34), (41), значенія слѣдующихъ скобокъ Пуассона

$$(\varphi',\ F_v)\equiv-\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial F_v}{\partial p_k},$$

и тождества (28), приходимъ къ слѣдующему выраженію разсматриваемыхъ скобокъ Вейлера

$$[z-F,\ f_s]\equiv\sum_{i=1}^{q}p_{n-q+i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}-\frac{\partial\varphi}{\partial b_s}+$$

$$+\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}\left(\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial F_v}{\partial p_k}-\sum_{\sigma=2}^{n}p_\sigma\frac{\partial F_v}{\partial p_\sigma}\right).$$

Легко видѣть, что выраженіе въ скобкахъ, находящееся въ послѣдней строкѣ, на основаніи уравненій послѣдней строки системы (24), приводится къ слѣдующему виду

$$\sum_{i=1}^{q}p_{n-q+i}\left(\sum_{k=2}^{n-q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\frac{\partial F_v}{\partial p_k}-\frac{\partial F_v}{\partial p_{n-q+i}}\right). \tag{44}$$

Возвращаясь къ тождествамъ (40) и дифференцируя ихъ по перемѣннымъ p_{n-q+i}, мы получаемъ новыя тождества

$$\sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k}\,\frac{\partial \psi_k}{\partial p_{n-q+i}} + \frac{\partial F_r}{\partial p_{n-q+i}} = 0.$$

Поэтому выраженіе (44) уничтожается тождественно. Такъ какъ во всѣхъ нашихъ вычисленіяхъ величины b_s замѣнены ихъ функціональными значеніями F_s, то очевидно, что искомыя зависимости имѣютъ слѣдующій видъ

$$[z - F,\ f_s] = -f_s, \tag{45}$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до n—1.

7. Воспользуемся выведенными каноническими свойствами (34), (38), (43) и (45) интеграловъ (33) и (35) канонической сисмемы (23), для рѣшенія вопроса о переходѣ отъ полнаго интеграла С. Ли (24) даннаго уравненія (22) къ его полному интегралу Лагранжа. Благодаря каноническимъ свойствамъ разсматриваемыхъ интеграловъ, является возможность обойти необходимость составленія общаго интеграла системы (23), для рѣшенія поставленной задачи. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе неравенства нулю опредѣлителя (25), существуетъ, по меньшей мѣрѣ, одна пара его сопряженныхъ миноровъ, соотвѣтственно порядковъ q и n—q—1, которые отличны отъ нуля. Не нарушая общности разсужденій, мы можемъ предположить, что слѣдующіе два опредѣлителя отличны отъ нуля

$$\triangle_1 \equiv D\left(\frac{\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots \varphi_q}{b_1,\ b_2,\ldots b_q}\right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial b_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_q}{\partial b_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_2} & \cdot & \cdots & \frac{\partial\varphi_q}{\partial b_2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_q} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial b_q} & \cdots & \frac{\partial\varphi_q}{\partial b_q} \end{vmatrix} \gtreqless 0,$$

$$\triangle_2 \equiv D\left(\frac{\psi_2,\ \psi_3,\ldots \psi_{n-q}}{b_{q+1},\ b_{q+2},\ldots b_{n-1}}\right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_2}{\partial b_{q+1}} & \frac{\partial\psi_3}{\partial b_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-q}}{\partial b_{q+1}} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial b_{q+2}} & \cdot\cdot & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-q}}{\partial b_{q+2}} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial b_{n-1}} & \frac{\partial\psi_3}{\partial b_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-q}}{\partial b_{n-1}} \end{vmatrix} \gtreqless 0.$$

Если послѣднія условія имѣютъ мѣсто, то легко доказать, что система n уравненій въ инволюціи, опредѣляющихъ, при помощи квадратуры, полный интегралъ Лагранжа уравненія (22), разсматриваемаго какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, представляется совокупностью уравненія (22) и n—1 слѣдующихъ

$$\left.\begin{aligned} &F_{q+k}\ (x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ p_2,\ p_3,\ldots p_n) = b_{q+k}, \\ &\qquad k=1,\ 2,\ldots n-q-1, \\ &f_r\ (x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ p_2,\ p_3,\ldots p_n) = a_r, \\ &\qquad r=1,\ 2,\ldots q. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Такъ какъ указатели $q+k$ и r имѣютъ различныя значенія, то очевидно, что послѣдніе интегралы находятся въ инволюціи. Кромѣ того легко убѣдиться, что система интеграловъ (45) разрѣшима относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_2,\ p_3,\ldots p_n$. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (45) равносильны слѣдующимъ уравненіямъ, которыя представляютъ ихъ преобразованіе и составляются такимъ образомъ.

Прежде всего замѣтимъ, что въ силу условія $\triangle_1 \gtreqless 0$, первыя q уравненій системы (26) разрѣшаются относительно величинъ $b_1,\ b_2,\ldots b_q$ и опредѣляютъ ихъ значенія

$$\left.\begin{aligned} &b_i = \Phi_i\ (x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ b_{q+1},\ b_{q+2},\ldots b_{n-1}), \\ &\qquad i=1,\ 2,\ldots q. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Поэтому, въ силу неравенства нулю опредѣлителя (25), первыя n—q—1 уравненій (45) получаются изъ уравнеій

$$p_k - \psi_k = 0, \quad k = 2,\ 3,\ldots n-q,$$

путемъ исключенія изъ нихъ значеній $b_1,\ b_2,\ldots b_q$, опредѣляемыхъ предыдущими равенствами (46). Слѣдовательно, n—q—1 первыхъ уравненій (45) равнозначны уравненіямъ

$$p_k = (\psi_k), \quad k = 2,\ 3,\ldots n-q, \tag{47}$$

гдѣ скобки обозначаютъ результатъ указанной подстановки. Что касается остальныхъ уравненій (45), т. е. q послѣднихъ, то они равносильны уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b_r}\right) - \sum_{i=1}^{q}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_r}\right)p_{n-q+i} = a_r, \\ &\qquad r=1,\ 2,\ldots q, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

гдѣ, какъ и раньше, скобки отмѣчаютъ результатъ подстановки значеній $b_1, b_2, \dots b_q$, опредѣляемыхъ уравненіями (46). Послѣдняя система (48) линейна относительно перемѣнныхъ $p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots p_n$; опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при послѣднихъ перемѣнныхъ, представляетъ выраженіе (Δ_1), гдѣ скобки имѣютъ прежнее значеніе. Такъ какъ послѣдній опредѣлитель неравенъ нулю, то, слѣдовательно, уравненія (48) разрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ p_{n-q+i}. Внося значенія послѣднихъ въ уравненія (47), мы получаемъ изъ нихъ выраженія остальныхъ перемѣнныхъ p. Такимъ образомъ получаются выраженія всѣхъ перемѣнныхъ

$$p_2, p_3, \dots p_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+1}, \dots p_n$$

въ функціяхъ величинъ

$$x_1, x_2, \dots x_n, a_1, a_2, \dots a_q, b_{q+1} \dots b_n.$$

Присоединяя сюда значеніе перемѣнной p_1, опредѣляемой въ видѣ функціи тѣхъ же самыхъ величинъ, при помощи даннаго уравненія (22), мы приводимъ къ квадратурѣ вопросъ о разысканіи полнаго интеграла Лагранжа послѣдняго уравненія, разсматриваемаго какъ диффереиціальное съ частными производными.

Однако, благодаря выведеннымъ выше условіямъ (43) и (44), легко получить искомый интегралъ, при помощи алгебраическихъ исключеній, воспользовавшись уравненіемъ (42), и обойтись такимъ образомъ безъ операціи интегрированія. Въ самомъ дѣлѣ, составляемъ выраженіе

$$\Phi \equiv z - F + \sum_{i=1}^{q} f_i F_i$$

и вычисляемъ значенія слѣдующихъ скобокъ Вейлера

$$[p_1 + H, \Phi] \equiv [p_1 + H, z - F] + \sum_{i=1}^{q} \Big[f_i (p_1 + H, F_i) + F_i (p_1 + H, f_i) \Big],$$

$$[\Phi, F_{q+k}] \equiv [z - F, F_{q+k}] + \sum_{i=1}^{q} \Big[f_i (F_i, F_{q+k}) + F_i (f_i, F_{q+k}) \Big],$$

$$[\Phi, f_r] \equiv [z - F, f_r] + \sum_{i=1}^{q} \Big[f_i (F_i, f_r) + F_i (f_i, f_r) \Big],$$

соотвѣтствующихъ значеніямъ k, отъ 1 до $n-q-1$, и значеніямъ r, отъ 1 до q. Какъ легко видѣть, послѣднія выраженія уничтожаются на основаніи условій (34), (38), (43) и (44), и мы получаемъ слѣдующія равенства

$$[p_1 + H, \Phi] = 0,$$

$$[\Phi, F_{q+k}] = 0, [\Phi, f_r] = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots n-q-1, \quad r = 1, 2, \dots q.$$

Такъ какъ равенства (43) удовлетворяются на основаніи уравненія (22), то отсюда слѣдуетъ, что совокупность уравненій (22), (45) и слѣдующаго

$$z = F - \sum_{i=1}^{q} f_i F_i + b, \tag{49}$$

гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину, образуетъ замкнутую систему $n+1$ уравненій, разрѣшимыхъ относительно перемѣнныхъ $z, p_1, p_2, \dots p_n$. Поэтому опредѣляемое послѣдними уравненіями значеніе перемѣнной z, функціей перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots x_n$ и n произвольныхъ постоянныхъ $b_1, b_2, \dots b_{n-1}, b$, представляетъ искомый полный интегралъ Лагранжа уравненія (22), разсматриваемаго какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными. Другими словами послѣдній интегралъ получается какъ результатъ подстановки въ уравненіе (49) значеній величинъ $p_2, p_3, \dots p_n$, опредѣляемыхъ уравненіями (45). Очевидно, что въ результатѣ послѣдней подстановки функціи $f_1, f_2, \dots f_q$, $F_{q+1}, \dots F_{n-1}$ тождественно обращаются соотвѣтственно въ $a_1, a_2, \dots a_q$, $b_{q+1}, b_{q+2}, \dots b_{n-1}$, и мы получаемъ

$$\left. \begin{aligned} z = \varphi [x_1, x_2, \dots x_{n-q}, (F_1), (F_2), \dots (F_q), b_{q+1}, b_{q+2}, \dots b_{n-1}] - \\ - \sum_{i=1}^{q} a_i (F_i) + b, \end{aligned} \right\} \tag{50}$$

гдѣ скобки, въ выраженіяхъ (F_i), обозначаютъ результатъ произведенной подстановки.

Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе [1])

$$p_1 + \frac{(x_2 p_2 - x_4 p_4) x_4 p_2}{x_1 p_3} + \frac{(x_3 x_4 - x_2) p_2}{x_1} = 0. \tag{51}$$

Это уравненіе имѣетъ полное интегральное собраніе С. Ли второго класса, представленное совокупностью уравненій

$$z = b_4, \tag{52}$$

---

[1]) Послѣднее уравненіе, но только въ другихъ обозначеніяхъ, служило примѣромъ также въ $n^0 3$ настоящей главы.

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= b_2(x_1-b_1)-\frac{x_1 x_2}{b_3}, \\ x_4 &= \frac{b_3}{x_1-b_1}, \\ p_1 &= \left(\frac{x_2}{b_3}-b_2\right)p_3+\frac{b_3}{(x_1-b_1)^2}p_4, \\ p_2 &= \frac{x_1}{b_3}p_3, \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

при чемъ, въ настоящемъ случаѣ, слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \psi_2}{b_1, b_2, b_3}\right) \equiv \frac{x_1 p_3}{b_3(x_1-b_1)} \gtreqless 0.$$

Поэтому общій интегралъ канонической системы, соотвѣтствующей данному уравненію (51), опредѣляется совокупностью второго, третьяго и послѣдняго уравненія системы (52) и слѣдующими тремя уравненіями

$$\left.\begin{aligned} b_2 p_3 - \frac{b_3}{(x_1-b_1)^2}p_4 &= a_1, \\ -(x_1-b_1)p_3 \qquad\qquad &= a_2, \\ -\frac{x_1 x_2}{b_3^2}p_3-\frac{1}{x_1-b_1}p_4 &= a_3, \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

гдѣ a_1, a_2 и a_3 обозначаютъ три новыхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.

Чтобы составить полный интегралъ Лагранжа даннаго уравненія (51), замѣчаемъ, что слѣдующихъ два сопряженныхъ минора разсматриваемаго опредѣлителя неравны нулю:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial b_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial b_1} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial b_2} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial b_2} \end{vmatrix} \equiv -\frac{b_3}{x_1-b_1} \gtreqless 0,$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial b_3} \equiv -\frac{x_1 p_3}{b_3^2} \gtreqless 0.$$

Поэтому второе и третье уравненія системы (52) разрѣшаются относительно величинъ b_1, b_2 и даютъ ихъ слѣдующія значенія

$$b_1 = x_1 - \frac{b_3}{x_4},$$

$$b_2 = \frac{x_4}{b_3}\left(x_3+\frac{x_1 x_2}{b_3}\right).$$

Въ силу этихъ значеній b_1 и b_2, первое и второе уравненія (53) опредѣляютъ значенія p_3 и p_4

$$p_3 = -\frac{a_2 x_4}{b_5}, \quad p_4 = -\left[\frac{a_1 b_3}{x_4^2}+\frac{a_2}{b_3}\left(x_4+\frac{x_1 x_2}{b_3}\right)\right].$$

Наконецъ, послѣднія два уравненія системы (52) даютъ выраженія

$$p_1 = -\left(a_1+\frac{a_2 x_2 x_4}{b_3^2}\right), \quad p_2 = -\frac{a_2}{b_3^2}x_1 x_4.$$

Поэтому искомый полный интегралъ находится при помощи интегрированія точнаго дифференціала

$$dz = -a_1\,dx_1 - a_1 b_3\frac{dx_4}{x_4^2}-\frac{a_2}{b_3^2}\left[x_4(x_2\,dx_1+x_1\,dx_2)+x_1 x_2\,dx_4\right]-$$

$$-\frac{a_2}{b_3}(x_4\,dx_3+x_3\,dx_4),$$

или

$$dz = -a_1\,dx_1 - a_1 b_3\frac{dx_4}{x_4^2}-\frac{a_2}{b_3^2}\,d(x_1 x_2 x_4)-\frac{a_2}{b_3}\,d(x_3 x_4).$$

Отсюда, при помощи квадратуры, получаемъ

$$z = a_1\left(\frac{b_3}{x_4}-x_1\right)-\frac{a_2}{b_3}x_4\left(x_3+\frac{x_1 x_2}{b_3}\right)+b,$$

гдѣ a_1, a_2, b_3 и b представляютъ четыре произвольныхъ постоянныхъ величины.

Прилагая къ настоящему случаю формулу (50), легко составить искомый полный интегралъ даннаго уравненія (51), исключительно исходя изъ уравненій (52) и (53). Дѣйствительно, въ настоящемъ случаѣ формула (50) становится

$$z = -a_1(F_1) - a_2(F_2) + b,$$

и функціи F_1, F_2 имѣютъ слѣдующія значенія

$$F_1 \equiv x_1\left(1 - \frac{p_3}{x_4 p_2}\right), \qquad F_2 \equiv (x_2 p_2 + x_3 p_3)\frac{x_4 p_2}{x_1 p_3^2}.$$

Подставляя сюда найденныя выше значенія перемѣнныхъ p_2, p_3 и p_4, въ функціяхъ всѣхъ перемѣнныхъ x и постоянныхъ a_1, a_2, b_3, получаемъ

$$(F_1) \equiv x_1 - \frac{b_3}{x_4}, \quad (F_2) \equiv \left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3}\right)\frac{x_4}{b_3}.$$

Итакъ, искомый полный интегралъ выражается въ прежнемъ видѣ

$$z = a_1\left(\frac{b_3}{x_4} - x_1\right) - \frac{a_2}{b_3} x_4\left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3}\right) + b.$$

8. На послѣдующихъ строкахъ имѣется въ виду отмѣтить еще два доказательства предложенія, приведеннаго въ n^0 5-мъ настоящей главы, которыя отличны отъ прежнихъ трехъ доказательствъ.

Такъ какъ полный интегралъ С. Ли (26) приводитъ къ $n-1$ интеграламъ въ инволюціи (33) канонической системы (23), которые разрѣшаются относительно перемѣнныхъ $p_2, p_3, \ldots p_{n-q}, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \ldots x_n$ (и неразрѣшимы относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса), то всѣ разсужденія, которыми мы пользовались выше (см. n^0 3 настоящей главы) для доказательства теоремы Ліувилля, примѣняются также и въ настоящемъ случаѣ. Поэтому, сохраняя наши обозначенія, получаемъ, примѣнительно къ разсматриваемымъ условіямъ, слѣдующія уравненія

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial\theta_s}{\partial x_k} = \dfrac{\partial p_k}{\partial b_s}, \quad \dfrac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-q+i}} = -\dfrac{\partial x_{n-q+i}}{\partial b_s}, \\ k=1,2,\ldots n-q, \quad i=1,2,\ldots q,\end{array}\right\} \tag{54}$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Очевидно, что послѣднія уравненія образуютъ интегрируемую систему. Кромѣ того такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ имѣетъ мѣсто полный интегралъ С. Ли (24), то поэтому существуютъ равенства

$$p_k = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \quad x_{n-q+i} = \varphi_i,$$

для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній k, отъ 1 до $n-q$, и значеній i, отъ 1 до q. Вслѣдствіе этого заключаемъ, что уравненія (54) приводятся къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial b_s} - \sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_k\,\partial b_s} p_{n-q+i}, \quad \frac{\partial\theta_s}{\partial p_{n-q+i}} = -\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s},$$
$$k=1,2,\ldots n-q, \qquad i=1,2,\ldots q,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Отсюда искомыя функціи θ_s опредѣляются при помощи квадратуръ

$$\theta_s = \int\left[\sum_{k=1}^{n-q}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial b_s} - \sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_k\,\partial b_s} p_{n-q+i}\right)dx_k - \sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}dp_{n-q+i}\right],$$
$$s=1,2,\ldots n-1,$$

при чемъ не принимаются въ расчетъ дополнительныя произвольныя постоянныя величины. Такъ какъ предыдущія уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$\theta_s = \int d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i}\right),$$
$$s=1,2,\ldots n-1,$$

то мы получаемъ прежній результатъ

$$\theta_s = \frac{\partial\varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i},$$
$$s=1,2,\ldots n-1.$$

Къ тому же самому заключенію мы приходимъ также, прилагая въ настоящемъ случаѣ теорему Якоби-Ліувилля, изложенную въ концѣ n^0 3-ьяго настоящей главы. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (23) представимъ въ видѣ слѣдующей новой канонической системы

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial x_{r+1}}{\partial x_1}=\dfrac{\partial H}{\partial p_{r+1}}, & \dfrac{\partial(-p_{n-q+i})}{dx_1}=\dfrac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}},\\[2ex] \dfrac{dp_{r+1}}{dx_1}=-\dfrac{\partial H}{dx_{r+1}}, & \dfrac{dx_{n-q+i}}{dx_1}=-\dfrac{\partial H}{\partial(-p_{n-q+i})},\\[1ex] r=1,2,\ldots n-q-1, & i=1,2,\ldots q.\end{array}\right\} \tag{55}$$

Пусть извѣстна для послѣдней системы совокупность n—1 различныхъ интеграловъ въ инволюціи, которые разрѣшаются относительно всѣхъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса

$$p_2,\ p_3,\ldots p_{n-q},\ x_{n-q+1},\ x_{n-q+2},\ldots x_n.$$

Поэтому представляя интегралъ точнаго дифференціала

$$dz=\sum_{k=1}^{n-q} p_k\,dx_k+\sum_{i=1}^{q}-x_{n-q+i}\,dp_{n-q+i}$$

въ слѣдующемъ видѣ

$$z=U(x_1,\ x_2,\ldots x_{n-q},\ p_{n-q+1},\ldots p_n,\ b_1,\ b_2,\ldots b_{n-1})+b, \tag{56}$$

гдѣ b—новая произвольная постоянная величина, мы выражаемъ общій интегралъ канонической системы (55) при помощи уравненій

$$\left.\begin{array}{ll}p_{r+1}=\dfrac{\partial U}{\partial x_{r+1}}, & x_{n-q+i}=-\dfrac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}},\\ r=1,2,\ldots n-q-1, & i=1,2,\ldots q,\\[1ex] \multicolumn{2}{c}{\dfrac{\partial U}{\partial b_s}=a_s,}\\ \multicolumn{2}{c}{s=1,2,\ldots n-1,}\end{array}\right\} \tag{57}$$

гдѣ всѣ a_s обозначаютъ n—1 различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Предполагая, что интегралъ (56) удовлетворяетъ условію

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_2},\ \dfrac{\partial U}{\partial x_3},\ldots\dfrac{\partial U}{\partial x_{n-q}},\ \dfrac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}},\ldots\dfrac{\partial U}{\partial p_n}}{b_1,\ b_2,\ \ldots b_{n-q-1},\ b_{n-q},\ \ldots b_{n-1}}\right)\gtrless 0, \tag{58}$$

заключаемъ, что послѣднія n—1 уравненій (57) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ величинъ

$$x_2,\ x_3,\ldots x_{n-q},\ p_{n-q+1},\ p_{n-q+2},\ldots p_n.$$

Подставляя вмѣсто функціи U значеніе ея, выраженное при помощи интеграла, получаемъ

$$\frac{\partial U}{\partial b_s}\equiv\int\left(\sum_{k=1}^{n-q}\frac{\partial p_k}{\partial b_s}dx_k+\sum_{i=1}^{q}-\frac{\partial x_{n-q+i}}{\partial b_s}dp_{n-q+i}\right).$$

Если разсматриваемая нами система интеграловъ въ инволюціи представляется уравненіями (33), которыя получаются изъ системы (24), то очевидно, что аналогично предыдущему, послѣднее равенство становится

$$\frac{\partial U}{\partial b_s}\equiv\int d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}p_{n-q+i}\right),$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial b_s}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}p_{n-q+i},$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до n—1. Такимъ образомъ оказывается, что *изслѣдованныя нами уравненія*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b_s}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_s}p_{n-q+i}=a_s,$$
$$s=1,2,\ldots n-1,$$

тождественны послѣднимъ n—1 уравненіямъ (57) и заключаются, стало-быть, какъ частный случай въ общихъ формулахъ, соотвѣтствующихъ предположеніямъ Ліувилля, по отношенію къ которымъ условія, опредѣляющія полное интегральное собраніе С. Ли, являются лишь частнымъ случаемъ.

Какъ извѣстно, уравненія (57) опредѣляютъ каноническую систему интеграловъ и, для случая С. Ли, обращаются тождественно въ уравненія (26), какъ это легко видѣть, благодаря только что выведенному заключенію. Поэтому приведенное нами выше предложеніе, что уравненія (26) опредѣляютъ каноническую систему интеграловъ системы (23), является также частнымъ случаемъ общей теоріи каноническихъ уравненій.

Чтобы закончить разсмотрѣніе вопроса о составленіи общаго интеграла каноническихъ уравненій, исходя изъ полнаго интеграла С. Ли соотвѣтствующаго производнаго уравненія, слѣдуетъ отмѣтить, что выведенное выше выраженіе (50) полнаго интеграла Лагранжа уравненія (22), разсматриваемаго какъ дифференціальное съ частными производными, представляетъ обобщеніе упомянутыхъ выше результатовъ Майера, Дарбу и Бертрана. Легко видѣть, что выраженія полнаго интеграла уравненія (22), полученныя послѣдними геометрами, заключаются въ формулѣ (50) въ томъ частномъ случаѣ, когда начальныя значенія перемѣнныхъ принимаются за произвольныя постоянныя величины въ общемъ интегралѣ канонической системы (23).

9. Мы имѣемъ въ виду далѣе распространить только что полученные результаты на общій интегралъ каноническихъ уравненій (23) въ самомъ общемъ предположеніи Ліувилля.

Пусть данные $n-1$ интеграловъ въ инволюціи каноническихъ системъ (23), или (55) разрѣшаются относительно каноническихъ перемѣнныхъ второго класса по отношенію какъ къ первой такъ и ко второй канонической системѣ. Предположимъ, что, въ виду простоты вычисленій, мы разрѣшили разсматриваемые интегралы относительно перемѣнныхъ $p_2, p_3, \ldots p_{n-q}, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \ldots x_n$. Въ такомъ случаѣ общій интегралъ обѣихъ разсматриваемыхъ каноническихъ системъ одновременно представляется уравненіями (57).

Очевидно, что, въ силу условія (58), уравненія (57) разрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ $x_2, x_3, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n$. Поэтому интегрированіе уравненія

$$dz = \left(p_1 + \sum_{r=1}^{n-1} p_{r+1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}\right) dx_1$$

совершается при помощи квадратуры, и затѣмъ полный интегралъ уравненія (22) опредѣляется на основаніи теоріи характеристикъ.

Наша задача, къ рѣшенію которой мы теперь переходимъ, состоитъ въ доказательствѣ, что достаточно уравненій (56) и (57) для составленія полнаго интеграла Лагранжа уравненія (22), при помощи алгебраическихъ преобразованій, не совершая указаннаго выше новаго интегрированія.

Въ самомъ дѣлѣ, необходимо отличны отъ нуля, по меньшей мѣрѣ, значенія одной пары сопряженныхъ миноровъ, порядковъ q-аго и $n-q-1$-аго, опредѣлителя первой части неравенства (58). Поэтому, не нарушая общности разсужденій, можемъ предположить

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1' &\equiv D\left(\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}, \dfrac{\partial U}{\partial x_3}, \ldots \dfrac{\partial U}{\partial x_{n-q}}}{b_{q+1}, b_{q+2}, \ldots b_{n-1}}\right) \gtrless 0, \\ \Delta_2' &\equiv D\left(\frac{\dfrac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}}, \dfrac{\partial U}{\partial p_{n-q+2}}, \ldots \dfrac{\partial U}{\partial p_n}}{b_1, \quad b_2, \quad \ldots b_q}\right) \gtrless 0. \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Въ силу второго изъ этихъ неравенствъ, послѣднія q уравненій первой строки системы (57) даютъ

$$b_i = \Phi_i\,(x_1, x_2, \ldots x_n, p_{n-q+1}, \ldots p_n, b_{q+1}, b_{b+2}, \ldots b_{n-1}),$$
$$i = 1, 2, \ldots q.$$

Внося послѣднія значенія $b_1, b_2, \ldots b_q$ въ $n-q-1$ первыя уравненія первой строки и въ q первыя уравненія второй строки системы (57), получаемъ равенства

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\right), \quad k = 2, 3, \ldots n-q, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial b_r}\right) &= a_r, \quad r = 1, 2, \ldots q, \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

гдѣ скобки обозначаютъ результатъ произведенной подстановки.

Легко показать, что послѣднія уравненія (60) образуютъ замкнутую систему, такъ какъ представляютъ собой преобразованіе интеграловъ въ инволюціи канонической системы (23).

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ въ слѣдующемъ видѣ полную систему интеграловъ системы (55), которые опредѣляются уравненіями (57),

$$\left.\begin{aligned} F_s(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) &= b_s, \\ f_s(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) &= a_s, \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$
$$s = 1, 2, \ldots n-1.$$

Какъ хорошо извѣстно, послѣдніе интегралы образуютъ каноническую систему, по отношенію къ уравненіямъ (55). Въ виду того, что существуютъ зависимости

$$\sum_{u=1}^{n}\left(\frac{\partial F_s}{\partial p_u}\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_u} - \frac{\partial F_s}{\partial x_u}\frac{\partial f_\sigma}{\partial p_u}\right) \equiv \sum_{r=1}^{n-q-1}\left(\frac{\partial F_s}{\partial p_{r+1}}\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial F_s}{\partial x_{r+1}}\frac{\partial f_\sigma}{\partial p_{r+1}}\right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{q}\left[\frac{\partial F_s}{\partial x_{n-q+i}}\frac{\partial f_\sigma}{\partial(-p_{n-q+i})} - \frac{\partial F_s}{\partial(-p_{n-q+i})}\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{n-q+i}}\right],$$

становится очевиднымъ, что уравненія (61) образуютъ каноническую систему интеграловъ также по отношенію къ исходной канонической системѣ (23). Слѣдовательно, уравненія (60) равнозначны $n-1$ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} F_{q+k}(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, \ldots p_n) &= b_{q+k}, \\ &\scriptstyle k=1,2,\ldots n-q-1, \\ f_r(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, \ldots p_n) &= a_r, \\ &\scriptstyle r=1,2,\ldots q, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

и опредѣляютъ систему $n-1$ интеграловъ въ инволюціи по отношенію къ канонической системѣ (23).

Такъ какъ исходные $n-1$ интеграловъ, согласно со сдѣланнымъ предположеніемъ, могутъ также разрѣшаться относительно перемѣнныхъ $p_2, p_3, \ldots p_n$, то отсюда слѣдуетъ, что уравненія (62) вообще могутъ и не разрѣшаться относительно послѣднихъ перемѣнныхъ.

Не останавливаясь сейчасъ на этомъ замѣчаніи, такъ какъ намъ придется разобрать его подробно, воспользуемся первыми $n-1$ интегралами (61), чтобы представить уравненіе (56) въ слѣдующемъ видѣ

$$z - F(x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) = b,$$

при чемъ имѣетъ мѣсто тождество

$$F \equiv U(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, p_{n-q+1}, \ldots p_n, F_1, F_2, \ldots F_{n-1}).$$

Само собою разумѣется, что, составляя скобки Вейлера, по отношенію къ канонической системѣ (55), т. е. подраздѣляя каноническія перемѣнныя на слѣдующіе два класса, соотвѣтствующіе обѣимъ строкамъ

$$\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, & -p_{n-q+1}, & -p_{n-q+2}, \ldots & -p_n, \\ p_1, p_2, \ldots p_{n-q}, & x_{n-q+1}, & x_{n-q+2}, \ldots & x_n, \end{matrix}$$

получаемъ слѣдующія равенства

$$\left.\begin{aligned} [p_1 + H, z - F] &= 0, \\ [F_s, z - F] &= 0, \quad s = 1, 2, \ldots n-1. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Вычислимъ, наконецъ, въ этомъ же предположеніи, значеніе скобокъ

$$[f_s, z - F] \equiv [f_s, z] - (f_s, F).$$

Вводимъ слѣдующія обозначенія

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \theta_s, \tag{64}$$

благодаря которымъ получаемъ тождества

$$f_s \equiv \theta_s(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \ldots p_n, F_1, F_2, \ldots F_{n-1}),$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-1$. Поэтому имѣемъ

$$[f_s, z] \equiv \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} [F_v, z],$$

$$(f_s, F) \equiv \sum_{u=1}^{n-1} \frac{\partial U}{\partial b_u} (\theta'_s, F_u) + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (F_v, U') + \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_u} \frac{\partial U}{\partial b_v} (F_u, F_v).$$

Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ перемѣнныя

$$x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, -p_{n-q+1}, \ldots -p_n$$

являются каноническими перваго класса, то выраженія разсматриваемыхъ скобокъ становятся

$$[F_v, z] \equiv \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}} p_{r+1} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} x_{n-q+i},$$

$$(\theta'_s, F_u) \equiv -\sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \theta'_s}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial F_u}{\partial p_{r+1}} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \theta'_s}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial F_u}{\partial x_{n-q+i}},$$

$$(F_v, U') \equiv \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial U}{\partial x_{r+1}} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}}.$$

Въ виду того, что имѣютъ мѣсто тождества

$$F_u\left(x_1, x_2, \ldots x_{n-q}, -\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}}, -\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+2}}, \ldots -\frac{\partial U}{\partial p_n},\right.$$
$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}, \ldots \frac{\partial U}{\partial x_{n-q}}, p_{n-q+1}, \ldots p_n\right) \equiv b_u,$$
$$u = 1, 2, \ldots n-1,$$

то, дифференцируя ихъ по всѣмъ b_s, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial F_u}{\partial x_{n-q+i}}\frac{\partial^2 U}{\partial p_{n-q+i}\,\partial b_s}+\sum_{r=1}^{n-q-1}\frac{\partial F_u}{\partial p_{r+1}}\frac{\partial^2 U}{\partial x_{r+1}\,\partial b_s}\equiv\begin{cases}0, & s \gtrless u,\\ 1, & s=u.\end{cases}$$

Поэтому, въ силу введенныхъ обозначенiй (64), заключаемъ, что

$$(\theta'_s,\ F_u)\equiv\begin{cases}\ \ 0, & s \gtrless u,\\ -1, & s=u.\end{cases}$$

Кромѣ того принимая во вниманiе, что

$$(F_u,\ F_r)=0,$$

приводимъ вычисляемыя нами скобки Вейлера къ слѣдующему виду

$$[f_s,\ z-F]\equiv\frac{\partial U}{\partial b_s}+\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}\left(\sum_{r=1}^{n-q-1}p_{r+1}\frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}}+\sum_{i=1}^{q}x_{n-q+i}\frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}}\right)-$$

$$-\sum_{v=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_s}{\partial b_v}\left(\sum_{r=1}^{n-q-1}\frac{\partial U}{\partial x_{r+1}}\frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}}\frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}}\right).$$

Въ силу тождествъ, въ которыя обращаются первыя $n-1$ уравненiй (57), когда въ нихъ подставить значенiя $b_1,\ b_2,\dots b_{n-1}$, опредѣляемыя этими же уравненiями, выраженiя суммъ обѣихъ послѣднихъ строчекъ равны; стало-быть, разность ихъ уничтожается, и мы получаемъ въ результатѣ равенства

$$[f_s,\ z-F]\equiv f_s,\quad s=1,\ 2,\dots n. \tag{65}$$

Равенства (63) и (65) заключаютъ скобки Вейлера, составленныя относительно канонической системы (55).

Однако легко воспользоваться этими зависимостями, чтобы составить замкнутую систему $n+1$ уравненiй по отношенiю къ канонической системѣ (23). Въ силу условiй (63) и (65), мы имѣемъ слѣдующiя равенства

$$\left.\begin{aligned}
&p_1+\sum_{r=1}^{n-q-1}\frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}p_{r+1}+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}}x_{n-q+i}-(p_1+H,\ F)=0,\\
&\sum_{r=1}^{n-q-1}\frac{\partial F_s}{\partial p_{r+1}}p_{r+1}+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial F_s}{\partial p_{n-q+i}}x_{n-q+i}-(F_s,\ F)=0,\\
&\sum_{r=1}^{n-q-1}\frac{\partial f_s}{\partial p_{r+1}}p_{r+1}+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial f_s}{\partial p_{n-q+i}}x_{n-p+i}-(f_s,\ F)=f_s,\\
&\qquad\qquad s=1,\ 2,\dots n-1,
\end{aligned}\right\}\tag{66}$$

при чемъ скобки Пуассона $(p_1+H,\ F)$, $(F_s,\ F)$ и $(f_s,\ F)$ составлены здѣсь по отношенiю къ канонической системѣ (23), т. е. въ предположенiи, что перемѣнныя величины раздѣляются на два класса, соотвѣтствующiе двумъ строкамъ

$$\left.\begin{matrix}x_2,\ x_3,\dots x_n,\\ p_2,\ p_3,\dots p_n.\end{matrix}\right\}\tag{67}$$

Составляемъ, наконецъ, слѣдующее выраженiе

$$\Phi\equiv z-F-\sum_{i=1}^{q}x_{n-q+i}p_{n-q+i}+\sum_{i=1}^{q}f_i\,F_i$$

и вычисляемъ значенiя скобокъ Вейлера, въ канонической системѣ перемѣнныхъ (67),

$$[p_1+H,\ \Phi]\equiv[p_1+H,\ z-\sum_{i=1}^{q}x_{n-q+i}p_{n-q+i}]-(p_1+H,\ F)+$$

$$+\sum_{i=1}^{q}[f_i(p_1+H,\ F_i)+F_i(p_1+H,\ f_i)],$$

$$[F_{q+k},\ \Phi]\equiv[F_{q+k},\ z-\sum_{i=1}^{q}x_{n-q+i}p_{n-q+i}]-(F_{q+k},\ F)+$$

$$+\sum_{i=1}^{q}[f_i(F_{q+k},\ F_i)+F_i(F_{q+k},\ f_i)],$$

$$[f_r,\ \Phi]\equiv[f_r,\ z-\sum_{i=1}^{q}x_{n-q+i}p_{n-q+i}]-(f_r,\ F)+$$

$$+\sum_{i=1}^{q}[f_i(f_r,\ F_i)+F_i(f_r,\ f_i)],$$

для всѣхъ значенiй k, отъ 1 до $n-q-1$, и для значенiй r, отъ 1 до q. Такъ какъ интегралы (61) образуютъ каноническую систему одновременно по отношенiю къ каноническимъ системамъ какъ (23) такъ и (55), то, для разсматриваемыхъ сейчасъ формулъ, имѣютъ мѣсто равенства

$$(F_{q+k},\ F_i)\equiv0,\quad (f_r,\ f_i)\equiv0,$$

$$(F_s,\ f_\sigma)\equiv\begin{cases}0, & s\gtrless\sigma,\\ 1, & s=\sigma.\end{cases}$$

Кромѣ того, принимая въ расчетъ уравненiя (66), мы приходимъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$[p_1 + H,\ \Phi] = 0,\quad [F_{q+k},\ \Phi] = 0,\quad [f_r,\ \Phi] = 0,$$
$$k = 1, 2, \dots n-q-1, \qquad r = 1, 2, \dots q.$$

Отсюда заключаемъ, что совокупность $n+1$ уравненій (22)-ого (62)-ыхъ и слѣдующаго

$$z = F + \sum_{i=1}^{q} x_{n-q+i} p_{n-q+i} - \sum_{i=1}^{q} f_i F_i + b_n$$

образуетъ замкнутую систему, при чемъ b_n представляетъ новую произвольную постоянную величину.

Здѣсь слѣдуетъ однако различать два случая, когда классъ представляемаго послѣдней системой полнаго интегральнаго собранія равенъ нулю, или отличенъ отъ него, въ зависимости отъ того, разрѣшаются ли уравненія (62) относительно перемѣнныхъ $p_2, p_3, \dots p_n$, или нѣтъ. Разсматриваемая въ первомъ случаѣ система уравненій, путемъ исключенія всѣхъ перемѣнныхъ $p_1, p_2, \dots p_n$, приводитъ къ слѣдующему полному интегралу Лагранжа уравненія (22)

$$z = U[x_1, \dots x_{n-q}, (p_{n-q+1}), \dots (p_n), (F_1), \dots (F_q), b_{q+1}, b_{q+2}, \dots b_{n-1}] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{q} x_{n-q+i} (p_{n-q+i}) - \sum_{i=1}^{q} a_i (F_i) + b_n,$$

гдѣ круглыми скобками обозначенъ результатъ подстановки въ выраженія, заключенныя въ скобки, значеній исключаемыхъ перемѣнныхъ.

Если же уравненія (62) неразрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ p, то эта система (62) опредѣляетъ полный интегралъ С. Ли уравненія (22), разсматриваемаго какъ *производное* уравненіе С. Ли. Чтобы получить отсюда, при помощи алгебраическихъ исключеній, полный интегралъ Лагранжа уравненія (22), разсматривая его какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, остается воспользоваться результатами, доказанными въ $n^0$7-омъ настоящей главы.

Изложенныя соображенія, относительно составленія полныхъ интеграловъ Лагранжа одного дифференціальнаго уравненія съ частными производными перваго порядка, распространяются безъ труда на какія угодно системы совокупныхъ уравненій какъ независящихъ явно отъ неизвѣстной функціи z, такъ и заключающихъ послѣднюю функціональную перемѣнную. Это заключеніе ясно слѣдуетъ изъ всего изложенія настоящей главы. Поэтому мы не станемъ останавливаться на доказательствѣ указанныхъ здѣсь обобщеній и ограничимся только слѣдующимъ замѣчаніемъ.

Только что разрѣшенная задача позволяетъ составлять полный интегралъ Лагранжа, на основаніи извѣстнаго полнаго интеграла С. Ли, или даетъ возможность, для составленія полнаго интеграла Лагранжа, переходить отъ одного полнаго интегральнаго собранія нулевого класса къ другому для того, чтобы обойти тѣ или другія трудности вычисленій, которыя могутъ встрѣчаться при составленіи интеграловъ изслѣдуемыхъ уравненій. Разсматриваемая задача находится въ тѣсной связи съ такъ называемымъ *усовершенствованіемъ С. Ли* способа Якоби-Майера интегрированія частныхъ уравненій [1]), съ той только разницей, что С. Ли прилагаетъ свою теорію къ своимъ *производнымъ* уравненіямъ, тогда какъ соображенія, изложенныя на послѣднихъ страницахъ, имѣютъ главною цѣлью интегрированіе дифференціальныхъ уравненій. Какъ мы раньше указывали [2]), рѣшеніе Майера послѣдняго вопроса было ошибочнымъ; что же касается моего предложеннаго раньше рѣшенія [3]), то оно требуетъ одной квадратурой больше, чѣмъ только что изложенное рѣшеніе, которое основывается исключительно на алгебраическихъ преобразованіяхъ [4]).

10. Воспользуемся полученными результатами, чтобы показать, какія видоизмѣненія, благодаря имъ, могутъ быть внесены въ извѣстный способъ Якоби-Майера интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Пусть имѣемъ *замкнутую* систему m слѣдующихъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x_1,\ x_2, \dots x_n,\ p_1,\ p_2, \dots p_n) = 0, \\ i = 1, 2, \dots m, \end{array}\right\} \tag{68}$$

которыя, предположимъ, разрѣшимы относительно m какихъ либо частныхъ производныхъ. Для интегрированія данныхъ уравненій, намъ достаточно однако разрѣшить ихъ относительно m какихъ либо изъ перемѣнныхъ съ различными значками. Пусть, напримѣръ, данныя уравненія разрѣшаются относительно перемѣнныхъ

---

1) *S. Lie, Mathematische Annalen, Bd. VIII, S. 215.*

2) См. мои сочиненія: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 73 и *Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer (Comptes rendus, 26 juin 1899).*

3) См.: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 103 и *Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer (Comptes rendus, 3 juillet 1899).*

4) Послѣдніе результаты были опубликованы мною въ двухъ статьяхъ: *Sur les relations entre les intégrales complètes de S. Lie et de Lagrange (Comptes rendus, 10 août 1903)* и *Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville (Comptes rendus, 17 août 1903).*

$$p_1, p_2, \dots p_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_m.$$

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующую систему уравненій *въ инволюціи*

$$\left.\begin{array}{l} p_i = H_i(x_1, x_2, \dots x_k, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n, p_{k+1}, \dots p_n), \\ \qquad i=1, 2, \dots k, \\ x_{k+j} = L_j(x_1, x_2, \dots x_k, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n, p_{k+1}, \dots p_n), \\ \qquad j=1, 2, \dots m-k. \end{array}\right\} \quad (69)$$

Для опредѣленія искомаго полнаго интеграла данныхъ уравненій начнемъ съ разысканія уравненія

$$F_{m+1}(x_1, x_2, \dots x_k, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n, p_{k+1}, \dots p_n) = b_1, \qquad (70)$$

которое должно находиться въ инволюціи съ системой (69), при чемъ b_1 представляетъ произвольную постоянную величину. Для этого должны удовлетворяться условія

$$(p_i - H_i, F_{m+1}) = 0, \quad (x_{k+j} - L_j, F_{m+1}) = 0,$$
$$i=1, 2, \dots k, \qquad j=1, 2, \dots m-k.$$

Поэтому функція F_{m+1} должна служить интеграломъ слѣдующей якобіевской системы линейныхъ уравненій съ частными производными функціи f величинъ $x_1, x_2, \dots x_k, x_{m+1}, \dots x_n, p_{k+1}, \dots p_n$, разсматриваемыхъ какъ независимыя перемѣнныя,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{r=1}^{n-m}\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}}\frac{\partial f}{\partial x_{m+r}} - \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+r}}\frac{\partial f}{\partial p_{m+r}}\right) = 0,$$
$$i=1, 2, \dots k,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_{k+j}} + \sum_{r=1}^{n-m}\left(\frac{\partial L_j}{\partial p_{m+r}}\frac{\partial f}{\partial x_{m+r}} - \frac{\partial L_j}{\partial x_{m+r}}\frac{\partial f}{\partial p_{m+r}}\right) = 0,$$
$$j=1, 2, \dots m-k.$$

Такимъ образомъ уравненіе (70) представляетъ интегралъ канонической системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_{m+r} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}}dx_i - \sum_{j=1}^{m-k}\frac{\partial L_j}{\partial p_{m+r}}dp_{k+j},$$
$$dp_{m+r} = -\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial H_i}{\partial x_{m+r}}dx_i + \sum_{j=1}^{m-k}\frac{\partial L_j}{\partial x_{m+r}}dp_{k+j},$$
$$r=1, 2, \dots n-m.$$

Слѣдовательно, искомый интегралъ (70) опредѣляется при помощи операціи интегрированія порядка $2(m-n)$. Присоединяя уравненіе (70) къ исходной системѣ уравненій, получаемъ новую замкнутую систему $m+1$ уравненія, съ которой поступаемъ аналогично тому, какъ поступали съ первоначальной системой. Продолжая указанныя дѣйствія, мы приходимъ, какъ въ способѣ Якоби-Майера и при помощи равнаго съ нимъ числа эквивалентныхъ операцій интегрированія, къ системѣ n уравненій въ инволюціи слѣдующаго общаго вида

$$p_i = H_i'(x_1, x_2, \dots x_q, p_{q+1}, \dots p_n, b_1, b_2, \dots b_{n-m}),$$
$$i=1, 2, \dots q.$$

$$x_{q+j} = L_j'(x_1, x_2, \dots x_q, p_{q+1}, \dots p_n, b_1, b_2, \dots b_{n-m}),$$
$$j=1, 2, \dots n-q,$$

гдѣ $b_1, b_2, \dots b_{n-m}$ обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Затѣмъ, при помощи одной квадратуры, получается уравненіе, выражающее въ общемъ случаѣ перемѣнную z функціей остальныхъ величинъ $x_1, x_2, \dots x_n, p_1, \dots p_n, b_1, b_2, \dots b_{n-m}$ и еще одной новой произвольной постоянной b. Мы приходимъ такимъ образомъ къ полному интегральному собранію данной системы уравненій (68), изъ котораго получается ихъ полный интегралъ Лагранжа, при помощи алгебраическихъ исключеній, какъ только что показано на предыдущихъ страницахъ.

Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$p_1 + \frac{(x_2 p_2 - x_3 p_3) x_3 p_2}{x_1 p_4} + \frac{(x_3 x_4 - x_2) p_2}{x_1} = 0. \qquad (71)$$

Слѣдующія два уравненія

$$\frac{x_1 p_4}{p_2} = b_1, \quad x_1\left(1 - \frac{p_4}{x_3 p_2}\right) = b_2$$

образуютъ, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (71), систему трехъ уравненій въ инволюціи, при чемъ b_1 и b_2 обозначаютъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины. Эти уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$p_1 - \frac{b_1}{(x_1 - b_2)^2}p_3 + \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1(x_1 - b_2)}p_4 = 0,$$

$$p_2 - \frac{x_1 p_4}{b_1} = 0,$$

$$x_3 - \frac{b_1}{x_1 - b_2} = 0.$$

Соотвѣтствующая якобіевская система линейныхъ уравненій съ частными производными функціи

$$f(x_1,\ x_2,\ x_4,\ p_3,\ p_4)$$

становится

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} \frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{p_4}{x_1 - b_2} \frac{\partial f}{\partial p_4} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_1}{b_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_3} = 0.$$

Поэтому задача приводится къ интегрированію слѣдующей канонической системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_4 = \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} dx_1 - \frac{x_1}{b_1} dx_2,$$

$$dp_4 = -\frac{p_4}{x_1 - b_2} dx_1.$$

Каждое изъ написанныхъ уравненій интегрируется при помощи квадратуры. Если возьмемъ интегралъ перваго изъ послѣднихъ уравненій

$$\frac{b_1 x_4 - x_1 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} = b_3,$$

гдѣ b_3—новая произвольная постоянная величина, то, совершивъ еще одну квадратуру, получаемъ полный интегралъ С. Ли второго класса даннаго уравненія (71), представленный слѣдующими тремя уравненіями

$$z = b_4,$$

$$x_3 = \frac{b_1}{x_1 - b_2},$$

$$x_4 = \frac{1}{b_1} x_1 x_2 + b_3 (x_1 - b_2),$$

гдѣ b_4—новая произвольная постоянная величина. Прилагая въ настоящемъ случаѣ теорію, изложенную въ предыдущемъ n^o7-омъ, получаемъ полный интегралъ Лагранжа даннаго уравненія (71) въ слѣдующемъ видѣ

$$z = a_2 \left(\frac{b_1}{x_3} - x_1 \right) - \frac{a_3}{b_1} x_3 \left(x_4 + \frac{x_1 x_2}{b_1} \right) + b,$$

гдѣ a_2, a_3, b_1 и b обозначаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.

ГЛАВА VIII.

Задача С. Ли.

1. Разрѣшенный С. Ли вопросъ, извѣстный въ теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными подъ названіемъ *задачи С. Ли*, является однимъ изъ цѣнныхъ вкладовъ С. Ли въ научную область интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Благодаря ему обнаруживается практическое значеніе, которое представляетъ каждый интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, для интегрированія соотвѣтствующихъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Какъ извѣстно, до С. Ли, послѣдній вопросъ оставался открытымъ, и всякій единичный интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, который не находится въ инволюціи съ ихъ остальными интегралами, не могъ быть использованъ при интегрированіи разсматриваемыхъ уравненій въ тѣхъ случаяхъ, когда общій интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ оставался неизвѣстнымъ. Кромѣ того разсматриваемая теорія даетъ новые случаи интегрированія при помощи квадратуръ уравненій каноническихъ и съ частными производными (см. мою статью: *Sur le problème de S. Lie, Comptes rendus, 24 août 1903*). Такимъ образомъ рѣшеніе задачи С. Ли является существеннымъ дополненіемъ и дальнѣйшимъ развитіемъ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

С. Ли дважды возвращался въ своихъ изслѣдованіяхъ къ рѣшенію разсматриваемой задачи [1]), при чемъ во второмъ изложеніи значительно усовершенствовалъ свою теорію. Рѣшеніе С. Ли, воспроизведенное во всѣхъ его существенныхъ чертахъ въ сочиненіяхъ Гурса и Э. Вебера [2]), основано на столь сложныхъ началахъ, что популяризація самой теоріи и примѣненіе ея для практическихъ цѣлей совершались до сихъ поръ въ самыхъ ограниченныхъ размѣрахъ [3]).

[1]) Mathematische Annalen Bd. VIII, S. 248, Bd. XI. S. 464.

[2]) *Gaursat, E.*—Leçons sur l'intégration... p. 304.

E. v. Weber.—Vorlesungen über das Pfaffs che Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, S. 544.

[3]) Едва-ли не единственное приложеніе разсматриваемой теоріи сдѣлано А. Майеромъ въ его мемуарѣ: *Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von Lie* (Mathematische Annalen, Bd. XVII, S. 332).

Основываясь на приведенныхъ соображеніяхъ относительно значенія разсматриваемой теоріи, мы изложимъ ее ниже съ точки зрѣнія развитія Якоби-Гамильтоновскаго способа интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Въ VII главѣ моего цитированнаго уже выше сочиненія: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными*, приведено рѣшеніе занимающей насъ задачи въ тѣхъ предѣлахъ, въ которыхъ разсматриваетъ ее С. Ли въ VIII томѣ Mathematische Annalen. Дальнѣйшее развитіе указаннаго рѣшенія опубликовано мною, въ краткихъ чертахъ, въ статьѣ: *Sur le problème de S. Lie* (Comptes rendus, 24 août 1903) и будетъ изложено подробно на послѣдующихъ страницахъ.

Необходимо, наконецъ, отмѣтить, что поставленная С. Ли задача уже раньше намѣчалась Якоби въ его трудахъ и разсматривалась имъ при нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ и условіяхъ, которыя соотвѣтствовали современному той эпохѣ развитію теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными общаго вида и въ частности линейныхъ уравненій.

Въ самомъ дѣлѣ, Якоби вводилъ въ свои изслѣдованія разсмотрѣніе *функціональныхъ группъ интеграловъ* дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, соотвѣтствующихъ даннымъ частнымъ уравненіямъ. Но онъ не пользовался при этомъ терминомъ *функціональная группа интеграловъ*, введеннымъ только С. Ли, и не извлекъ изъ разсмотрѣнія интеграловъ въ общемъ случаѣ всѣхъ тѣхъ преимуществъ для интегрированія данныхъ уравненій, которыя открылъ С. Ли [1]). Тѣмъ не менѣе слѣдуетъ указать на одинъ частный случай относительно дифференціальныхъ уравненій движенія системъ точекъ, допускающихъ три *интеграла площадей*, когда Якоби пришелъ къ тѣмъ же результатамъ, которые вытекаютъ изъ разсматриваемой общей теоріи С. Ли [2]). Наконецъ, Якоби отмѣтилъ нѣсколько частныхъ случаевъ въ своей общей теоріи, которые показываютъ его стремленія къ тому, чтобы использовать извѣстные интегралы дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, для уменьшенія трудностей интегрированія соотвѣтствующихъ имъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными [3]).

[1]) *Jacobi.—Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi.* (Gesammelte Werke, Bd. V, S. 151).

[2]) *Jacobi.*—Nova methodus... S. 153—163.

[3]) *Jacobi.—Vorlesungen über Dynamik. Zweite Ausgabe,* 1884. *S.* 263.

Imschenetzky. V. G.—Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. 1869. p.p. 68—69.

2. Пусть имѣемъ систему m дифференціальныхъ уравненій съ частными производными въ *инволюціи*

$$\left. \begin{array}{c} F_i(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ i = 1, 2, \ldots m. \end{array} \right\} \qquad (1)$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно перемѣнныхъ величинъ $p_1, p_2, \ldots p_m$, такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_m}{p_1, p_2, \ldots p_m}\right) \gtrless 0. \qquad (2)$$

Составляемъ систему линейныхъ уравненій въ *инволюціи*, соотвѣтствующую даннымъ уравненіямъ (1)

$$(F_i, f) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots m. \qquad (3)$$

Предположимъ, наконецъ, что извѣстны $m + r$ $(r < 2n - 2m)$ слѣдующихъ различныхъ интеграловъ послѣднихъ уравненій

$$F_1, F_2, \ldots F_m, f_1, f_2, \ldots f_r, \qquad (4)$$

которые образуютъ *функціональную группу*, т. е. скобки Пуассона, составленныя изъ каждой пары интеграловъ (4), не представляютъ новыхъ интеграловъ системы (3), отличныхъ отъ интеграловъ (4)-ыхъ.

Какъ извѣстно, линейныя уравненія

$$\left. \begin{array}{c} U_k(f) \equiv (f_k, f) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots r, \end{array} \right\} \qquad (5)$$

образуютъ замкнутую систему совмѣстно съ уравненіями (3) [1]). Наша задача состоитъ въ томъ, чтобы составить изъ послѣднихъ уравненій (5) такую замкнутую систему линейныхъ уравненій, которая имѣла бы интегралами функціи (4). Уравненія искомой системы должны имѣть слѣдующій видъ

$$V(f) \equiv \sum_{k=1}^{r} \Pi_k (F_1, F_2, \ldots f_r)\, U_k(f) = 0,$$

гдѣ Π_k представляютъ неизвѣстныя функціи.

1) *Goursat, E.*—Leçons sur l'intégration... p. 308.

Само собою разумѣется, что функціи $F_1, F_2, \ldots F_m$ утождествляютъ всѣ уравненія предыдущаго вида. Чтобы удовлетворить поставленному условію относительно остальныхъ функцій (4), необходимо опредѣлить значенія всѣхъ Π_k такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\left. \begin{array}{c} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ks} \Pi_k = 0, \\ s = 1, 2, \ldots r, \end{array} \right\} \qquad (6)$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$\alpha_{ks} \equiv (f_k, f_s).$$

Такъ какъ уравненія (6) линейны и однородны относительно неизвѣстныхъ величинъ Π_k, то, чтобы послѣднія имѣли значенія, отличныя отъ нулей, необходимо долженъ обращаться въ нуль слѣдующій опредѣлитель

$$S \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{r1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{1r} & \alpha_{2r} & \ldots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Предположимъ, что уничтожается не только послѣдній опредѣлитель S, но также и всѣ его миноры, отъ перваго до $q-1$-аго порядка включительно, такъ что первый миноръ, не обращающійся въ нуль, представляетъ опредѣлитель $r-q$-аго порядка. Въ виду того, что порядокъ, въ которомъ мы размѣщаемъ интегралы (4), вполнѣ произволенъ и зависитъ отъ нашего усмотрѣнія, то мы можемъ, не нарушая общности разсужденій, обозначить извѣстные интегралы (4) такъ, чтобы первый неуничтожающійся миноръ опредѣлителя (7) представлялся слѣдующимъ опредѣлителемъ

$$D \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{r-q,1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{r-q,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \alpha_{1,r-q} & \alpha_{2,r-q} & \ldots & \alpha_{r-q,r-q} \end{vmatrix}.$$

Такъ какъ послѣдній опредѣлитель косой симметрическій и, по условію, неравенъ нулю, то, стало-быть, порядокъ его является четнымъ числомъ, какъ это хорошо извѣстно изъ теоріи опредѣлителей. Называя его, напримѣръ, черезъ 2ϱ, мы получаемъ такимъ образомъ, что

$$r - q \equiv 2\varrho, \tag{8}$$

т. е. *разность $r - q$ является четнымъ числомъ.*

Возвращаясь къ уравненіямъ (6), мы получаемъ изъ нихъ

$$\Pi_k = -\sum_{j=1}^{q} \frac{D_{kj}}{D} \Pi_{2\varrho+j},$$
$$k = 1, 2, \ldots 2\varrho,$$

гдѣ D_{kj} обозначаетъ значеніе, которое принимаетъ опредѣлитель D, при замѣнѣ его элементовъ k-аго столбца соотвѣтственно величинами

$$a_{2\varrho+j,\,1},\ a_{2\varrho+j,\,2}, \ldots a_{2\varrho+j,\,2\varrho}.$$

Благодаря вычисленнымъ значеніямъ Π_k, выраженіе $V(f)$ становится

$$V(f) \equiv \sum_{j=1}^{q} \Pi_{2\varrho+j} V_j(f),$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$V_j(f) \equiv U_{2\varrho+j}(f) - \sum_{k=1}^{2\varrho} \frac{D_{kj}}{D} U_k(f),$$
$$j = 1, 2, \ldots q.$$

Вслѣдствіе произвольности всѣхъ величинъ $\Pi_{2\varrho+j}$, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ j, отъ 1 до q, становится очевиднымъ, что всѣ выраженія $V_j(f)$ обладаютъ свойствами, аналогичными выраженіямъ $V(f)$, т. е. уничтожаются для всѣхъ значеній (4) функціи f. Поэтому мы получаемъ систему q уравненій

$$V_j(f) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots q. \tag{9}$$

интегралами которой служатъ функціи (4).

Само собою разумѣется, что уравненія (3) и (9) образуютъ *замкнутую* систему, такъ какъ существуютъ общіе всѣмъ имъ интегралы (4). Кромѣ того изъ самаго строенія разсматриваемыхъ уравненій видно, что всѣ они различны между собой. Мы получаемъ такимъ образомъ, при помощи алгебраическихъ вычисленій, замкнутую систему $m+q$ различныхъ уравненій (3) и (9), для которой извѣстны $m+r$ различныхъ интеграловъ (4).

Очевидно, что задача интегрированія исходной системы уравненій (1) упрощается, въ смыслѣ пониженія порядка интегрированій, если

опредѣлять новые интегралы системы (3), отличные отъ (4)-ыхъ, какъ интегралы замкнутой системы, образованной совокупностью уравненій (3) и (9).

Такъ какъ извѣстны $m+r$ интеграловъ послѣдней системы, то ея новый интегралъ опредѣляется при помощи операціи интегрированія, порядокъ которой выражается числомъ

$$2n - 2m - q - r.$$

Послѣднее, въ силу зависимости (8), является четнымъ и равно числу

$$2n - 2m - 2q - 2\varrho.$$

Назовемъ черезъ f_{r+1} полученный такимъ образомъ интегралъ разсматриваемой системы. Послѣдній интегралъ, въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ, образуетъ, совмѣстно съ (41)-ыми, функціональную группу, которая очевидно имѣетъ по меньшей мѣрѣ одной *существенной функціей* [1]) больше сравнительно съ прежней группой, такъ какъ разность между числомъ всѣхъ функцій группы $m+r+1$ и числомъ прежнихъ *существенныхъ функцій* $m+q$ является нечетнымъ $2\varrho+1$, что невозможно въ силу изложенныхъ выше соображеній. Предположимъ, что разсматриваемая группа имѣетъ только одной *существенной функціей* больше сравнительно съ предыдущей. Въ такомъ случаѣ мы составляемъ еще одно уравненіе

$$V_{q+1}(f) = 0,$$

образующее, совмѣстно съ предыдущими, замкнутую систему $m+q+1$ уравненій, для которой извѣстны очевидно $m+r+1$ интеграловъ. Поэтому новый интегралъ, который обозначимъ черезъ f_{r+2}, опредѣляется при помощи операціи интегрированія порядка

$$2n - 2m - 2q - 2\varrho - 2.$$

Продолжая поступать аналогичнымъ образомъ и далѣе, приходимъ въ результатѣ, при самомъ неблагопріятномъ случаѣ, послѣ $n-m-q-\varrho$ послѣдовательныхъ операцій интегрированія соотвѣтственно порядковъ

$$2n-2m-2q-2\varrho, \quad 2n-2m-2q-2\varrho-2, \ldots 4,\ 2,$$

къ $n-m-q-\varrho$ различнымъ новымъ интеграламъ системы (3)

[1]) *Существенными (ausgezeichnete, distinguée)* функціями группы называются такія, которыя находятся въ инволюціи какъ между собой, такъ и съ каждой изъ функцій группы въ отдѣльности (см. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій..., глава VIII*).

$$f_{r+1},\ f_{r+2}, \ldots f_{n-m+\varrho},$$

(въ силу зависимости (8), число $n-m-q-\varrho+r$ равняется $n-m+\varrho$).

Такимъ образомъ въ результатѣ получается слѣдующая замкнутая система $n-\varrho$ линейныхъ уравненій

$$(F_i,\ f)=0,\quad i=1,\ 2, \ldots m,$$
$$V_j(f)=0,\quad j=1,\ 2, \ldots q,\ q+1, \ldots n-m-\varrho,$$

для которой извѣстна полная система ея $n+\varrho$ различныхъ интеграловъ

$$F_1,\ F_2, \ldots F_m,\ f_1,\ f_2, \ldots f_r,\ f_{r+1}, \ldots f_{n-m+\varrho}. \tag{10}$$

3. Согласно съ изложеннымъ, послѣдняя группа интеграловъ (10) имѣетъ $n-\varrho$ *существенныхъ функцій*, въ числѣ которыхъ находятся m первыхъ интеграловъ (10).

Остальныя $n-m-\varrho$ существенныхъ функцій, которыя мы обозначимъ черезъ

$$\Phi_1,\ \Phi_2, \ldots \Phi_q,\ \Phi_{q+1}, \ldots \Phi_{n-m-\varrho} \tag{11}$$

могутъ быть вычислены, при помощи $n-m-\varrho$ послѣдовательныхъ операцій интегрированія порядковъ

$$n-m-\varrho,\ n-m-\varrho-1, \ldots q,\ q-1, \ldots 2,\ 1.$$

Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что задача интегрированія данныхъ уравненій (1) очевидно привелась бы къ одной только квадратурѣ, если бы эти послѣднія функціи были извѣстны. Квадратура эта состоитъ въ разысканіи послѣдняго интеграла системы линейныхъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}&[F_i,\ f]=0,\quad i=1,\ 2, \ldots m,\\ &[\Phi_j,\ f]=0,\quad j=1,\ 2, \ldots q,\ q+1, \ldots n-m-\varrho,\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

гдѣ функція f разсматривается какъ зависящая отъ всѣхъ прежнихъ перемѣнныхъ x, p и отъ новой перемѣнной z.

Интегралами послѣдней системы служатъ очевидно всѣ функціи (10). Приравнявъ m первыя изъ нихъ нулю, а всѣ остальныя произвольнымъ постояннымъ, получаемъ уравненія

$$\left.\begin{aligned}&F_i(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n)=0,\\ &\qquad i=1,\ 2, \ldots m,\\ &f_k(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n)=b_k,\\ &\qquad k=1,\ 2, \ldots r,\ r+1, \ldots n-m+\varrho,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

гдѣ всѣ b_k обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Послѣдняя система представляетъ $n+\varrho$ интегральныхъ уравненій системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующихъ линейнымъ уравненіямъ (12). Послѣдній ея интегралъ получается интегрированіемъ точнаго дифференціала, въ который обращается уравненіе

$$dz=\sum_{s=1}^{n} p_s\,dx_s, \tag{14}$$

на основаніи интегральныхъ уравненій (13) (ср. стр. 148). Такимъ образомъ послѣдній искомый интегралъ системы (12) представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z-F(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n). \tag{15}$$

Однако для рѣшенія разсматриваемой задачи интегрированія данныхъ уравненій (1), нѣтъ надобности вычислять функціи (11), но достаточно замѣтить, что всѣ уравненія $V_j(f)=0$ равнозначны слѣдующимъ линейнымъ уравненіямъ [1])

$$(\Phi_j,\ f)=0,\quad j=1,\ 2, \ldots q,\ q+1, \ldots n-m-\varrho. \tag{16}$$

Это замѣчаніе является существеннымъ въ томъ отношеніи, что мы имѣемъ теперь теоретическое основаніе утверждать, что *уравненіе (14), въ силу системы уравненій (13), обращается въ точный дифференціалъ, интегрированіемъ котораго опредѣляется функція (15).*

4. Доказанныхъ предложеній достаточно, чтобы показать, что интегрированіе уравненій (1), на основаніи полученныхъ данныхъ, совершается при помощи операцій дифференцированія и алгебраическихъ исключеній.

Въ самомъ дѣлѣ, соотвѣтствующая даннымъ уравненіямъ (1) нормальная система линейныхъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}&[F_i,\ f]=0,\\ &\quad i=1,\ 2, \ldots m,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

имѣетъ $n+\varrho+1$ различныхъ интеграловъ (10) и (15). Легко показать, что остальные $n-m-\varrho$ интеграловъ этой системы (17) опредѣляются при помощи дифференцированія, и тогда очевидно, что задача интегрированія данныхъ уравненій (1) разрѣшается на основаніи теоріи характеристикъ.

[1]) См. *Объ интегрированіи уравненій...*, глава VII.

Чтобы составить эти послѣдніе недостающіе интегралы, приравниваемъ интегралъ (15) произвольной постоянной величинѣ b. Не нарушая общности разсужденій, можемъ предположить, что полученное такимъ образомъ уравненіе и уравненія (13)-ыя разрѣшаются относительно перемѣнныхъ

$$z,\ x_{n-\rho+1},\ x_{n-\rho+2},\dots x_n,\ p_1,\ p_2,\dots p_n$$

и выражаютъ слѣдующимъ образомъ ихъ значенія въ функціяхъ остальныхъ перемѣнныхъ и всѣхъ $n-m+\rho+1$ произвольныхъ постоянныхъ

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi(x_1,\ x_2,\dots x_{n-\rho},\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-m+\rho})+b,\\ x_{n-\rho+i} &= \varphi_i(x_1,\ x_2,\dots x_{n-\rho},\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-m+\rho}),\\ p_s &= \psi_s(x_1,\ x_2,\dots x_{n-\rho},\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-m+\rho}),\\ &\quad i=1,2,\dots\rho, \qquad s=1,2,\dots n. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Вслѣдствіе того, что результатъ исключенія всѣхъ постоянныхъ $b_1,\ b_2,\dots b_{n-m+\rho}$, изъ $n+\rho$ послѣднихъ уравненій (18), приводитъ къ данной системѣ (1), разрѣшающейся относительно перемѣнныхъ $p_1,\ p_2,\dots p_m$, въ силу условія (2), то должно имѣть мѣсто слѣдующее неравенство

$$D\left(\frac{\varphi_1,\ \varphi_2,\dots\varphi_\rho,\ \psi_{m+1},\ \psi_{m+2},\dots\psi_n}{b_1,\ b_2,\dots b_\rho,\ b_{\rho+1},\ b_{\rho+2},\dots b_{n-m+\rho}}\right)\gtrless 0.$$

Напишемъ въ явной формѣ значеніе опредѣлителя лѣвой части послѣдняго неравенства

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_1}\cdots\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_1} & \frac{\partial\psi_{m+1}}{\partial b_1}\cdots\frac{\partial\psi_{n-\rho}}{\partial b_1} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_1}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial b_1}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_2}\cdots\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_2} & \frac{\partial\psi_{m+1}}{\partial b_2}\cdots\frac{\partial\psi_{n-\rho}}{\partial b_2} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_2}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial b_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_{n-m+\rho}}\cdots\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_{n-m+\rho}} & \frac{\partial\psi_{m+1}}{\partial b_{n-m+\rho}}\cdots\frac{\partial\psi_{n-\rho}}{\partial b_{n-m+\rho}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_{n-m+\rho}}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial b_{n-m+\rho}} \end{vmatrix} \tag{19}$$

Такъ какъ равенство (14) утождествляется, на основаніи уравненій (18), то должны имѣть мѣсто тождества

$$\left.\begin{aligned} \psi_s \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_s}\psi_{n-\rho+i},\\ s=1,2,\dots m,\ m+1,\dots n-\rho. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Отсюда выводятся слѣдующія тождества

$$\frac{\partial\psi_{m+j}}{\partial b_k} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{m+j}\partial b_k} - \sum_{i=1}^{\rho}\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_{m+j}\partial b_k}\psi_{n-\rho+i} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{m+j}}\frac{\partial\psi_{n-\rho+i}}{\partial b_k}\right),$$
$$j=1,2,\dots n-m-\rho,$$

для всѣхъ значеній k, отъ 1 до $n-m+\rho$. Подставляемъ послѣднія значенія производныхъ $\frac{\partial\psi_{m+j}}{\partial b_k}$, вмѣсто элементовъ всѣхъ столбцовъ опредѣлителя (19), отъ $\rho+1$-аго до $n-m$-аго столбца включительно. Въ этихъ послѣднихъ выраженіяхъ элементовъ отбрасываемъ всѣ члены вида

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{m+j}}\cdot\frac{\partial\psi_{n-\rho+i}}{\partial b_k},$$

какъ пропорціональные элементамъ послѣднихъ ρ столбцовъ опредѣлителя (19), и прибавляемъ взамѣнъ ихъ члены, которые пропорціональны элементамъ первыхъ ρ столбцовъ разсматриваемаго опредѣлителя

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial b_k}\cdot\frac{\partial\psi_{n-\rho+i}}{\partial x_{m+j}}.$$

Благодаря послѣднимъ преобразованіямъ, предыдущій опредѣлитель представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_1}\cdots\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_1} & \frac{\partial\theta_1}{\partial x_{m+1}}\cdots\frac{\partial\theta_1}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_1}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial b_1}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_2}\cdots\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_2} & \frac{\partial\theta_2}{\partial x_{m+1}}\cdots\frac{\partial\theta_2}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_2}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial b_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_{n-m+\rho}}\cdots\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial b_{n-m+\rho}} & \frac{\partial\theta_{n-m+\rho}}{\partial x_{m+1}}\cdots\frac{\partial\theta_{n-m+\rho}}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial b_{n-m+\rho}}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial b_{n-m+\rho}} \end{vmatrix},$$

гдѣ обозначенія θ_k имѣютъ слѣдующія значенія

$$\theta_k \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_k} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_k} \psi_{n-\rho+i},$$

для всѣхъ значеній k, отъ 1 до $n-m+\rho$.

Вслѣдствіе неравенства нулю послѣдняго опредѣлителя, не долженъ равняться нулю по меньшей мѣрѣ одинъ изъ его миноровъ $n-m-\rho$-аго порядка, который составленъ изъ элементовъ $\rho+1$, $\rho+2, \ldots n-m$-аго столбцовъ разсматриваемаго опредѣлителя. Пусть, напримѣръ, слѣдующій опредѣлитель-миноръ

$$D\left(\frac{\theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots \theta_{n-m-\rho}}{x_{m+1}, \quad x_{m+2}, \ldots \quad x_{n-\rho}}\right)$$

отличенъ отъ нуля. Отсюда слѣдуетъ, что уравненія

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial \varphi}{\partial b_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} \psi_{n-\rho+i} = a_j, \\ j=1,\, 2, \ldots n-m-\rho, \end{array}\right\} \tag{21}$$

различны и разрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ

$$x_{m+1},\ x_{m+2}, \ldots x_{n-\rho},$$

при чемъ a_1, $a_2, \ldots a_{n-m-\rho}$ представляютъ $n-m-\rho$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Легко доказать, что уравненія (21) представляютъ недостающія $n-m-\rho$ интегральныхъ уравненій системы въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующей линейнымъ уравненіямъ (17). Въ самомъ дѣлѣ, исключаемъ изъ выраженій θ_j значенія b_1, $b_2, \ldots b_{n-m+\rho}$, опредѣляемыя уравненіями (18). Обозначимъ полученные результаты соотвѣтственно черезъ

$$F_{m+1},\ F_{m+2}, \ldots F_{n-\rho}. \tag{22}$$

Такъ какъ въ результатѣ произведенной подстановки функціи ψ_s принимаютъ тождественно значенія p_s, то функціи F_{m+j} выражаются слѣдующимъ образомъ

$$F_{m+j} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_j} - \sum_{i=2}^{\rho} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_1} p_{n-\rho+i},$$

при чемъ всѣ b_k замѣнены ихъ указанными выше функціональными значеніями.

Поэтому скобки Пуассона $(F_\sigma,\ F_{m+j})$ имѣютъ слѣдующее значеніе

$$(F_\sigma,\ F_{m+j}) \equiv \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial p_{n-\rho+i}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-m+\rho} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial b_k} (F_\sigma, f_k).$$

Подставляя сюда выраженія

$$\frac{\partial F_{m+j}}{\partial x_s} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_j\, \partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_j\, \partial x_s} p_{n-\rho+i},$$

$$\frac{\partial F_{m+j}}{\partial p_{n-\rho+i}} \equiv - \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j},$$

$$(F_\sigma,\ f_k) \equiv 0,$$

получаемъ въ результатѣ

$$\left.\begin{array}{c} (F_\sigma,\ F_{m+j}) \equiv \displaystyle\sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_j\, \partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_j\, \partial x_s} p_{n-\rho+i} \right) + \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j}. \end{array}\right\} \tag{23}$$

Съ другой стороны мы имѣемъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$F_i(x_1,\ x_2, \ldots x_{n-\rho},\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots \varphi_\rho,\ \psi_1,\ \psi_2, \ldots \psi_n) \equiv 0,$$
$$i=1,\, 2, \ldots m.$$

Дифференцируя послѣднія тождества по b_1, $b_2, \ldots b_{n-m-\rho}$, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial b_j} \equiv 0, \\ \sigma=1,\, 2, \ldots m, \qquad j=1,\, 2, \ldots n-m-\rho. \end{array}\right\} \tag{24}$$

Вслѣдствіе равенствъ (20), имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial b_j} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s \partial b_j} - \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_s \partial b_j} \psi_{n-\rho+i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_j} \right),$$
$$s = 1, 2, \ldots n-\rho,$$

для всѣхъ значеній j, отъ 1 до $n-m-\rho$. Поэтому, послѣ подстановки значеній всѣхъ b_k, изъ уравненій (18), въ обѣ системы предыдущихъ равенствъ, тождества (24) становятся

$$\sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} + \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_s \partial b_j} - \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_s \partial b_j} p_{n-\rho+i} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_s} \right) \right] + \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-\rho+i}} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_j} \equiv 0,$$
$$\sigma = 1, \ldots m, \qquad j = 1, 2, \ldots n-m-\rho.$$

Поэтому выраженія скобокъ Пуассона (23) принимаютъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{array}{c} (F_\sigma, F_{m+j}) \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial \varphi_{n-\rho+i}}{\partial b_s} \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-\rho+i}} - \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \right), \\ \sigma = 1, \ldots m, \qquad j = 1, \ldots n-m-\rho. \end{array}\right\} \tag{25}$$

5. Прежде чѣмъ вести дальше наши разсужденія необходимо остановиться на нѣкоторыхъ общихъ свойствахъ теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Пусть имѣемъ слѣдующую замкнутую систему m различныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи f

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i^k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \\ i = 1, 2, \ldots m, \end{array}\right\} \tag{26}$$

удовлетворяющихъ условію

$$\begin{vmatrix} X_1^1 & X_1^2 & \ldots & X_1^m \\ X_2^1 & X_2^2 & \ldots & X_2^m \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ X_m^1 & X_m^2 & \ldots & X_m^m \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

при чемъ коэффиціенты X_i^k представляютъ функціи всѣхъ перемѣнныхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Предположимъ, что функціи

$$f_1, f_2, \ldots f_{n-m}$$

представляютъ полную систему $n-m$ различныхъ интеграловъ уравненій (26), такъ что имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i^k \frac{\partial f_s}{\partial x_k} = 0, \\ i = 1, 2, \ldots m, \quad s = 1, 2, \ldots n-m. \end{array}\right\} \tag{27}$$

Вслѣдствіе предыдущаго неравенства, послѣдніе интегралы должны удовлетворять условію

$$D\left(\frac{f_1, \quad f_2, \ \ldots f_{n-m}}{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots \ x_n} \right) \gtrless 0. \tag{28}$$

Поэтому слѣдующія уравненія

$$\left.\begin{array}{c} f_s(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ s = 1, 2, \ldots n-m, \end{array}\right\} \tag{29}$$

представляютъ рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующихъ линейной системѣ (26), и опредѣляютъ значенія перемѣнныхъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n,$$

какъ функціи остальныхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$. Въ силу послѣднихъ значеній, уравненія (29) обращаются въ тождества и даютъ мѣсто новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} = 0,$$
$$h = 1, 2, \ldots m.$$

Умножая послѣднія тождества соотвѣтственно на X_i^h и складывая полученные результаты, получаемъ новый рядъ тождествъ

$$\sum_{h=1}^{m} X_i^h \frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{m} X_i^h \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots m,$$

для всѣхъ значеній s, отъ 1 до $n-m$. Послѣднія, въ силу равенствъ (27), приводятся къ слѣдующимъ тождествамъ

$$\sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \left(\sum_{h=1}^{m} X_i^h \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} - X_i^{m+r} \right) = 0, \quad s=1,2,\ldots n-m, \quad i=1,2,\ldots m.$$

Отсюда, вслѣдствіе неравенства (28), получаются искомыя нами тождества

$$\left. \sum_{h=1}^{m} X_i^h \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} - X_i^{m+r} = 0, \quad i=1,2,\ldots m, \quad r=1,2,\ldots n-m, \right\} \tag{30}$$

которымъ должно удовлетворять каждое рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтсвующихъ данной системѣ линейныхъ уравненій (26).

6. Послѣ сдѣланнаго отступленія, возвращаемся къ формуламъ (25). Совокупность уравненій (18) представляетъ рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующихъ замкнутой системѣ линейныхъ уравненій (12), которую представимъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial f}{\partial x_s} - \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} p_s \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \sigma=1,2,\ldots m,$$

$$\sum_{s=1}^{n} \left(A_j^s \frac{\partial f}{\partial x_s} + B_j^s \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) + C_j \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad j=1,2,\ldots q,\ q+1,\ldots n-m-\rho.$$

Поэтому тождества (30) въ настоящемъ случаѣ, благодаря обозначеніямъ уравненій (18), становятся

$$\sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} - \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-\rho+i}} = 0, \quad i=1,2,\ldots \rho, \quad \sigma=1,2,\ldots m,$$

и т. д.

Для нашихъ цѣлей достаточно равенствъ написанной первой строки. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи послѣднихъ, скобки Пуассона (25) обращаются тождественно въ нуль, и мы получаемъ искомыя тождества

$$(F_\sigma, F_{m+j}) \equiv 0, \quad \sigma=1,2,\ldots m, \quad j=1,2,\ldots n-m-\rho.$$

Такимъ образомъ функціи (22) представляютъ $n-m-\rho$ искомыхъ интеграловъ системы линейныхъ уравненій (17). Поэтому полный интегралъ данной системы уравненій въ инволюціи (1) опредѣляется совокупностью уравненій (18) и (21), при помощи операцій алгебраическихъ исключеній, на основаніи *теоріи характеристикъ*. При этомъ произвольными постоянными служатъ всѣ $2n-2m$ слѣдующихъ величинъ

$$b_1,\ b_2, \ldots b_{n-m+\rho},\ b,\ a_1,\ a_2 \ldots a_{n-m-\rho}. \tag{31}$$

Если послѣднія не удовлетворяютъ указаннымъ въ теоріи характеристикъ условіямъ, то необходимо принять начальныя значенія слѣдующихъ перемѣнныхъ величинъ

$$x_{m+1},\ x_{m+2}, \ldots x_n,\quad z - \sum_{j=1}^{n-m} x_{m+j} p_{m+j},\quad p_{m+1},\ p_{m+2}, \ldots p_n$$

произвольными постоянными величинами, вмѣсто постоянныхъ (31).

Относительно предыдущихъ вычисленій слѣдуетъ замѣтить, что при послѣдовательномъ разысканіи интеграловъ уравненій (3), мы предполагали всегда самый неблагопріятный случай, когда, при каждомъ новомъ интегрированіи, число интеграловъ соотвѣтствующихъ функціональныхъ группъ увеличивается только на единицу. Но если бы скобки Пуассона, составленныя изъ каждаго вновь полученнаго интеграла съ прежними, приводили къ новымъ интеграламъ разсматриваемыхъ уравненій, тогда, само собою разумѣется, что число указанныхъ операцій интегрированія и порядокъ ихъ соотвѣтственно уменьшаются.

Наконецъ, если какой-либо изъ найденныхъ интеграловъ системы (3) находится въ инволюціи со всѣми остальными, то приравнивая его произвольной постоянной величинѣ и присоединяя полученное такимъ образомъ уравненіе къ исходнымъ (1), мы избѣгаемъ необходимости составлять одно изъ вспомогательныхъ уравненій вида $V(f)=0$ и тѣмъ упрощаемъ вычисленія.

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующему результату:

Пусть даны m уравненій въ инволюціи (1); предположимъ, что ихъ дифференціальныя уравненія характеристикъ имѣютъ $m+r$ различныхъ интеграловъ (4), образующихъ функціональную группу съ $m+q$ существенными функціями. Въ такомъ случаѣ разность $r-q$ является нѣкоторымъ четнымъ числомъ 2ρ, и задача интегрированія уравненій (1) разрѣшается, *въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ, при помощи $n-m-\varrho-q$ послѣдовательныхъ операцій интегрированія соотвѣтственно порядковъ*

$$2(n-m-\varrho-q),\ 2(n-m-\varrho-q-1), \ldots 4,\ 2,$$

одной квадратуры и при помощи алгебраическихъ исключеній.

Проинтегрируемъ, напримѣръ, слѣдующее дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$F_1 \equiv x_1 p_1 - e^{x_2} p_2 (p_3 - p_4) = 0. \tag{32}$$

Соотвѣтствующее линейное уравненіе

$$(F_1, f) = 0 \tag{33}$$

имѣетъ, кромѣ интеграла F_1, еще слѣдующихъ три интеграла

$$f_1 \equiv p_3,\quad f_2 \equiv x_3 p_4 + x_4 p_3 - p_2,\quad f_3 \equiv p_4,$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$(f_1, f_2) \equiv f_3,\quad (f_1, f_3) \equiv 0,\quad (f_2, f_3) \equiv f_1.$$

Значеніе соотвѣтствующаго опредѣлителя S

$$\begin{vmatrix} 0 & -f_3 & 0 \\ f_3 & 0 & f_1 \\ 0 & -f_1 & 0 \end{vmatrix}$$

равняется нулю. Первый неуничтожающійся миноръ послѣдняго опредѣлителя принадлежитъ первому порядку

$$\begin{vmatrix} 0 & -f_3 \\ f_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv f_3^2.$$

Поэтому существуетъ одно линейное уравненіе

$$(f_3, f) - \frac{f_1}{f_3}(f_1, f) = 0, \tag{34}$$

образующее замкнутую систему съ уравненіемъ (33). Послѣдняя система линейныхъ уравненій (33) и (34) имѣетъ слѣдующій интегралъ

$$F_2 \equiv x_1 p_1,$$

находящійся въ инволюціи съ извѣстными интегралами f_1, f_2, f_3.

Составляемъ поэтому слѣдующую систему уравненій

$$F_1 = 0,\quad F_2 = C_1,$$

$$f_1 = b_1,\quad f_2 = b_2,\quad f_3 = b_3,$$

гдѣ C_1, b_1, b_2, b_3 обозначаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины. Послѣдняя система уравненій даетъ

$$\left.\begin{aligned} & p_1 = \frac{C_1}{x_1},\quad p_2 = \frac{C_1 e^{-x_2}}{b_1 - b_3},\quad p_3 = b_1,\ p_4 = b_3, \\ & x_4 = \frac{1}{b_1}\left(\frac{C_1 e^{-x_2}}{b_1 - b_3} + b_2 - b_3 x_3\right). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Въ силу послѣднихъ зависимостей, дифференціальное уравненіе

$$dz = \sum_{s=1}^{4} p_s\, dx_s$$

даетъ, при помощи квадратуры, интегралъ

$$z = \left(b_1 - \frac{b_3^2}{b_1}\right) x_3 - \frac{C_1}{b_1} e^{-x_2} + C_1 \lg x_1 + b, \tag{36}$$

гдѣ b—новая произвольная постоянная величина.

Итакъ составляемъ систему двухъ уравненій

$$F_1 = 0,\quad F_2 = C_1. \tag{37}$$

Система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующая линейнымъ уравненіямъ

$$[F_1, f] = 0,\quad [F_2, f] = 0,$$

имѣетъ рѣшеніе, представленное совокупностью уравненій (35), (36) и слѣдующаго

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_3} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_3} \psi_4 = a_3,$$

выраженнаго въ прежнихъ обозначеніемъ. Въ настоящемъ случаѣ послѣднее уравненіе становится

$$-\frac{b_3}{b_1}\left[x_3+\frac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1-b_3)}\right]=a_3.$$

Поэтому совокупность этого уравненія съ (35)-ыми и (36)-ымъ опредѣляетъ слѣдующія выраженія

$$\left.\begin{aligned}
&z=-\frac{2\,C_1 e^{-x_2}}{(b_1-b_3)}+C_1\,lg\,x_1+b',\\
&x_3=-\frac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1-b_3)^2}-\frac{b_1 a_3}{b_3},\quad x_4=\frac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1-b_3)^2}+\frac{b_2}{b_1}+a_3,\\
&p_1=\frac{C_1}{x_1},\quad p_2=\frac{C_1 e^{-x_2}}{b_1-b_3},\quad p_3=b_1,\quad p_4=b_3,
\end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

гдѣ b' обозначаетъ новую произвольную постоянную величину, связанную слѣдующимъ образомъ съ постоянной b,

$$b'=b+\frac{a_3}{b_3}(b_3^2-b_1^2).$$

Вводимъ, вмѣсто обозначенія произвольныхъ постоянныхъ b_1, b_2, b_3, a_3 и b', величины

$$x_3^0,\ x_4^0,\ a,\ p_3^0,\ p_4^0,$$

представляющія начальныя значенія перемѣнныхъ

$$x_3,\ x_4,\ z-x_3\,p_3-x_4\,p_4,\ p_3,\ p_4,$$

соотвѣтствующія начальнымъ значеніямъ x_1^0 и x_2^0 независимыхъ перемѣнныхъ x_1 и x_2.

Въ такомъ случаѣ уравненія (38) преобразовываются въ слѣдующія

$$z=\frac{2C_1\left(e^{-x_2^0}-e^{-x_2}\right)}{p_3^0-p_4^0}+C_1\ lg\ \frac{x_1}{x_1^0}+a+x_3^0\ p_3^0+x_4^0\ p_4^0,$$

$$x=\frac{C_1\left(e^{-x_2^0}-e^{-x_2}\right)}{(p_3^0-p_4^0)^2}+x_3^0,\quad x_4=\frac{C_1\left(e^{-x_2}-e^{-x_2^0}\right)}{(p_3^0-p_4^0)^2}+x_4^0,$$

$$p_1=\frac{C_1}{x_1},\quad p_2=\frac{C_1 e^{-x_2}}{p_3^0-p_4^0},\quad p_3=p_3^0,\ p_4=p_4^0.$$

Исключая x_3^0 и x_4^0, изъ первыхъ трехъ уравненій сейчасъ написанной системы, получаемъ полный интегралъ системы уравненій (37)

$$z=\frac{C_1\left(e^{-x_2^0}-e^{-x_2}\right)}{p_3^0-p_4^0}+C_1\,lg\frac{x_1}{x_1^0}+p_3^0\ x_3+p_4^0\ x_4+a.$$

при чемъ p_3^0, p_4^0 и a являются тремя различными произвольными постоянными величинами.

Принимая въ послѣдней формулѣ C_1 также за произвольную постоянную величину, мы выражаемъ этимъ же самымъ уравненіемъ искомый полный интегралъ даннаго уравненія (32), при чемъ C_1, p_3^0, p_4^0, a представляютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 1 Марта 1902 года.

1. Прочитанъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Произведены выборы проф. Тулузскаго университета E. Cosserat. Избранъ единогласно.

3. *В. А. Стекловъ* доложилъ статью A. Kneser'а: „Die Iacobi'sche Bedingung des Extremums bei einem allgemeinen Typus von Aufgaben der Variationsrechnung".

4. *М. А. Тихомандрицкій* отъ имени Д. Д. Мордухай-Болтовскаго сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ обобщеніи теоремы Абеля".

Экстренное засѣданіе 10 Мая 1902 года.

1. Прочитанъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. В. А. Стекловъ сообщилъ, что В. П. Ермаковъ и К. А. Поссе благодарятъ за избраніе ихъ въ почетные члены, а А. П. Котельниковъ за избраніе его въ члены-корреспондеиты Общества.

3. Г. предсѣдательствующій сообщилъ, что университетъ въ Христіаніи приглашаетъ Математическое Общество приаять участіе въ чествованіи столѣтія со дня ражденія Абеля. Постановлено послать отъ имени Общества адресъ.

4. Избранъ единогласно въ почетные члены Общества академикъ А. М. Ляпуновъ (безъ баллотировки).

Засѣданіе 12 Марта 1904 года.

1. Прочитанъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Предсѣдатель прочелъ письмо Д. И. Менделѣева съ выраженіемъ благодарности по поводу поздравленія въ день 75-лѣтняго юбилея.

3. По предложенію В. А. Стеклова постановлено предложить Краковской Академіи Наукъ обмѣнъ изданіями, при чемъ Общество просило В. А. Стеклова вступить въ переписку по этому поводу.

4. Доложена просьба слушательницъ С.-Петербургскихъ Женскихъ Курсовъ о высылкѣ изданій Общества для читальни; постановлено выслать 2-ую серію „Сообщеній" Общества.

5. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Обобщеніе задачи Крелля".

6. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „О комплексахъ прямыхъ".

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА.

3 *Октября 1904 года.*

1. Доложенъ и утвержденъ отчетъ о дѣятельности Общества за 1903—1904 акад. годъ.

2. Предсѣдатель доложилъ о смерти почетнаго члена Общества акад. Ѳ. А. Бредихина и предложилъ почтить память его вставаніемъ.

3. Предсѣдатель сдѣлалъ нѣкоторыя замѣчаія по поводу отчета о средствахъ Общества въ 1903—1904 году; при этомъ выяснилось, что остатокъ въ 1019 руб. 30 коп. объясняется тѣмъ, что ко времени составленія отчета не была произведена расплата съ типографіей Зильберберга за печатаніе „Сообщеній" Общества; послѣ этой расплаты, предстоящей въ ближайшемъ будущемъ, остатокъ уменьшится приблизительно рублей на 500.

4. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета Общества на 1904—1905 академ. годъ; избраны: предсѣдателемъ проф. В. А. Стекловъ, товарищами предсѣдателя: проф. В. П. Алексѣевскій и проф. А. П. Грузинцевъ, секретаремъ приватъ-доцентъ А. П. Пшеборскій.

5. По примѣру прежнихъ лѣтъ произведена добровольная подписка.

Засѣданіе 12 Ноября 1904 года.

1. Доложенъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.
2. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ въ даръ книгахъ.
3. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одной формулѣ анализа".
4. *Д. М. Синцовъ* доложилъ сообщеніе В. П. Ермакова: „Объ интегрированіи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка".

Изслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Н. Н. Салтыкова.

(Окончаніе).

ГЛАВА IX.

Интегрирующіе множители и безконечно-малыя преобразованія.

1. Задача интегрированія разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущаго изложенія, во всѣхъ встрѣчающихся различныхъ случаяхъ, съ теоретической точки зрѣнія, всегда приводится къ интегрированію линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Всѣ послѣдующія страницы настоящаго изслѣдованія посвящаются изученію этихъ послѣднихъ уравненій и соотвѣтствующихъ имъ дифференціальныхъ уравненій обыкновенныхъ или въ полныхъ дифференціалахъ.

Пусть имѣемъ линейное уравненіе съ частными производными одной функціи f

$$X\,(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + X\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

и соотвѣтствующее ему обыкновенное дифференціальное уравненіе

$$dy - X\,dx = 0, \tag{2}$$

гдѣ X представляетъ функцію перемѣнныхъ величинъ x и y.

Обозначимъ черезъ q *интегрирующій множитель* послѣдняго уравненія; въ такомъ случаѣ имѣютъ мѣсто равенства

$$q = \frac{\partial f}{\partial y},\;\; qX = -\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Отсюда, во-первыхъ, слѣдуетъ, что интегрирующій множитель уравненія (2) получается изъ интеграла уравненія (1) при помощи дифференцированія и, во-вторыхъ, получается уравненіе

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial\,(qX)}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial x}+X\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial y}q=0, \tag{3}$$

которое служитъ для опредѣленія множителя q, независимо отъ интеграла уравненія (1).

Система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующая частному уравненію (3), представляется въ *каноническомъ видѣ*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial H}{\partial q},\ \frac{dq}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y} \tag{4}$$

гдѣ введено слѣдующее обозначеніе

$$H\equiv Xq,$$

при чемъ первое изъ написанныхъ уравненій тождественно съ данным уравненіемъ (2).

Уравненія (4) представляютъ *каноническую систему Ліувилля* [1], въ которую онъ преобразовываетъ каждое уравненіе, удвоивъ число функціональныхъ перемѣнныхъ, т. е. вводя въ настоящемъ случаѣ новую функціональную перемѣнную q.

Система (4) линейна относительно послѣдней перемѣнной q. Легко также убѣдиться, что послѣдняя система имѣетъ интегралъ, линейный относительно перемѣнной q. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы уравненіе

$$\eta q=b, \tag{5}$$

представляло интегралъ системы (4), гдѣ b-произвольная постоянная величина и η-функція x и y, для этого должно удовлетворяться тождественно слѣдующее равенство

$$\frac{\partial(\eta q)}{\partial x}+\frac{\partial(\eta q)}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial q}-\frac{\partial(\eta q)}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial y}=0,$$

которое, при помощи скобокъ Пуассона, выражается слѣдующимъ образомъ

$$(p+H,\ \eta q)=0, \tag{6}$$

гдѣ p и q разсматриваются какъ частныя производныя перваго порядка одной и той же функціи соотвѣтственно по независимымъ перемѣннымъ x и y.

[1]) Ср. *Laurent—Traité d' Analyse*, t. VI p. 96.

Поэтому функція η опредѣляется слѣдующимъ уравненіемъ

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}+X\frac{\partial \eta}{\partial y}=\eta\frac{\partial X}{\partial y},\ \text{или}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\eta}X\right)=0, \tag{7}$$

т. е. выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель уравненія (2).

Въ виду того, что послѣдній множитель всегда существуетъ, то, стало-быть, существуетъ и разсматриваемый линейный интегралъ (5) канонической системы уравненій (4).

Такъ какъ значеніе вспомогательной перемѣнной Ліувилля q представляетъ выраженіе интегрирующаго множителя уравненія (2), то само собою разумѣется, что, обратно, опредѣляемое значеніе q изъ извѣстнаго линейнаго интеграла вида (5)

$$q=\frac{b}{\eta},\ \text{или выраженіе}\ \frac{1}{\eta}$$

представляетъ каждое интегрирующій множитель уравненія (2).

С. Ли даетъ особое, спеціальное названіе лѣвой части интеграла (5), представляя ее въ нѣсколько иномъ видѣ. Если функція f обозначаетъ интегралъ уравненія (1), то въ такомъ случаѣ q выражается при помощи частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$, и С. Ли называетъ первую часть интеграла (5) *безконечно-малымъ преобразованіемъ* уравненія (1) или (2)-ого, обозначая его слѣдующимъ образомъ

$$U(f)\equiv\eta\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{8}$$

При этомъ очевидно, что равенство (6) приводится къ слѣдующему виду

$$(X(f),\ U(f))=0 \tag{9}$$

и показываетъ, что *безконечно-малое преобразованіе* $U(f)$ является интеграломъ уравненія (1) одновременно съ функціей f. С. Ли принимаетъ послѣднее свойство безконечно-малыхъ преобразованій за ихъ опредѣленіе. Что же касается термина: *безконечно-малое преобразованіе*, то онъ естественно вытекаетъ изъ того соображенія, что выраженіе $U(f)$ представляетъ коэффиціентъ безконечно-малаго приращенія интеграла уравненія (1), соотвѣтствующаго безконечно-малому приращенію $\eta\delta t$ перемѣнной y, гдѣ δt обозначаетъ нѣкоторую безконечно-малую величину [1]).

[1]) См. *S. Lie—Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen, Bd. XI, S. 490).*

Если разсматривать $U(f)$ не только какъ функцію перемѣнныхъ x, y, а какъ выраженіе (8), то въ такомъ случаѣ послѣднее равенство (9) приводитъ обратно къ прежнему уравненію (7), служащему для опредѣленія функціи η.

Изъ послѣдняго замѣчанія непосредственно вытекаетъ прежнее заключеніе въ новой формѣ, т. е. *если извѣстно безконечно-малое преобразованіе (8) уравненія (2), то интегрированіе его совершается при помощи квадратуры,* вслѣдствіе того, что выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель уравненія (2).

Наконецъ, легко видѣть, что дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка, соотвѣтствующее канонической системѣ (4), выражается слѣдующимъ образомъ

$$p + Xq = 0, \tag{10}$$

т. е. представляетъ исходное уравненіе (1), гдѣ вмѣсто производныхъ $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ введены соотвѣтственно обозначенія p и q. Слѣдовательно. *каноническая система Ліувилля (4), соотвѣтствующая уравненію (2), получается какъ слѣдствіе приложенія общей теоріи Якоби-Гамильтона къ линейному уравненію съ частными производными (1).*

Такъ какъ безконечно-малое преобразованіе уравненія (1) опредѣляетъ интегралъ канонической системы (4), то зная $U(f)$, получаемъ интегралъ (5), а второй интегралъ системы (4) получается слѣдующимъ образомъ.

Подставляя значенія p и q, опредѣляемыя уравненіями (5) и (10), въ равенство

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

получаемъ точный дифференціалъ

$$dz = \frac{b}{\eta}(dy - X\,dx).$$

Дифференцируя по b интегралъ послѣдняго, получаемъ второй интегралъ канонической системы (4), который вмѣстѣ съ тѣмъ является очевидно также искомымъ интеграломъ уравненія (2)

$$\int \frac{1}{\eta}(dy - X\,dx) = a,$$

гдѣ a обозначаетъ новую произвольную постоянную величину.

Этотъ результатъ получается также, независимо отъ послѣднихъ соображеній, какъ непосредственное слѣдствіе приведеннаго выше предложеніе, что выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель уравненія (2). Если мы воспользовались теоріей каноническихъ уравненій, которая въ данномъ случаѣ приводитъ къ прежнимъ результатамъ, то только для того, чтобы изложенныя соображенія послужили намъ руководящей идеей для послѣдующихъ обобщеній.

Такимъ образомъ, по отношенію къ уравненіямъ (1) и (2), интегрирующій множитель послѣдняго изъ уравненій и ихъ безконечно-малое преобразованіе являются эквивалентными элементами для интегрированія разсматриваемыхъ уравненій. Кромѣ того, благодаря изложеннымъ соображеніямъ, устанавливается впервые на этихъ страницахъ тѣсная связь между понятіями объ интегрирующемъ множителѣ, безконечно-маломъ преобразованіи уравненія (2) и соотвѣтствующими ему каноническими уравненіями Ліувилля. Вмѣстѣ съ тѣмъ становится очевиднымъ, что преобразованіе Ліувилля обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій къ каноническому виду пріобрѣтаетъ существенное значеніе въ теоріи дифференціальныхъ уравненій, которое не придавали ему до сихъ поръ.

2. Начнемъ съ распространенія предыдущихъ результатовъ на одно уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx = \sum_{h=1}^{m} X_h\,dt_h, \tag{11}$$

и на соотвѣтствующую ему якобіевскую систему уравненій съ частными производными

$$X_h(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$
$$h = 1, 2, \dots m,$$

гдѣ всѣ X_h обозначаютъ функціи перемѣнныхъ $t_1, t_2, \dots t_m$ и x.

Интегрирующій множитель уравненія (11), который мы обозначимъ черезъ ρ, удовлетворяетъ слѣдующей якобіевской [1]) системѣ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial X_h}{\partial x}\rho = 0,$$
$$h = 1, 2, \dots m.$$

[1]) Обыкновенно *якобіевскими* называются только системы линейныхъ однородныхъ уравненій.

Соотвѣтствующія уравненія въ полныхъ дифференціалахъ представляются совокупностью уравненій (11)-аго и слѣдующаго

$$dp = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial X_h}{\partial x}\, p\, dt_h.$$

Если ввести обозначенія

$$X_h\, p \equiv H_h,$$

для всѣхъ значеній h, отъ 1 до m, то оба уравненія, (11)-ое и послѣднее, становятся

$$dx = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial p}\, dt_h, \quad dp = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x}\, dt_h \qquad (12)$$

и представляютъ такимъ образомъ обобщенную *каноническую* систему Ліувилля.

Пусть η обозначаетъ функцію перемѣнныхъ величинъ $t_1, t_2, \ldots t_m$, x и выраженіе

$$U(f) \equiv \eta \frac{\partial f}{\partial x}$$

представляетъ безконечно-малое преобразованіе уравненія (11), удовлетворяющее тождественно условіямъ

$$(X_h(f),\ U(f)) = 0, \quad h = 1, \ldots m. \qquad (13)$$

Поэтому каноническая система (12) имѣетъ слѣдующій интегралъ

$$\eta p = b,$$

гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину. Само собою разумѣется, что опредѣляемое послѣднимъ уравненіемъ значеніе

$$\frac{b}{\eta}, \text{ или выраженіе } \frac{1}{\eta}$$

представляютъ интегрирующіе множители уравненія (11). Слѣдовательно, интегралъ послѣдняго принимаетъ видъ

$$\int \frac{1}{\eta}\left(dx - \sum_{h=1}^{m} X_h\, dt_h\right) = a,$$

при чемъ a обозначаетъ произвольную постоянную величину.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что *уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ, имѣющее безконечно-малое преобразованіе, интегрируется при помощи квадратуры.*

Это послѣднее предложеніе становится очевиднымъ *a priori*, если принять во вниманіе, что каждое уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ преобразовывается, согласно теоріи А. Майера[1], въ обыкновенное дифференціальное уравненіе. Что же касается С. Ли[2], опубликовавшаго впервые этотъ результатъ, то онъ вывелъ его какъ слѣдствіе своей теоріи интегрирующаго множителя замкнутой системы линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка.

Написанный интегралъ получается также на основаніи уравненій, которыя вытекаютъ изъ равенствъ (13) и показываютъ, что выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель даннаго уравненія (11)[3].

Наконецъ, тотъ же самый результатъ получается при помощи теоремы Якоби-Ліувилля, аналогично предыдущему случаю одного обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія.

3. Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію системы n обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$dx_i = X_i\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots n, \qquad (14)$$

гдѣ всѣ X_i обозначаютъ функціи перемѣнныхъ величинъ $t, x_1, x_2, \ldots x_m$. Обозначая черезъ

$$p_1, p_2, \ldots p_n$$

систему n интегрирующихъ множителей Якоби[4] уравненій (14), получаемъ слѣдующія равенства (см. C. Jordan, Cours d'Analyse t. III, 1896, p. 68).

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots n, \\ \sum_{k=1}^{n} p_k X_k &= -\frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

1) См. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 34—37 и 41—44.

2) *S. Lie*—Mathematische Annalen, Bd. XI, p. 504—521.

3) Эти уравненія имѣютъ очевидно слѣдующій видъ

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial X_h}{\partial x}\eta,$$

$$h = 1, 2, \ldots m.$$

4) *Jacobi.—Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis (Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 240).*

гдѣ функція f обозначаетъ интегралъ слѣдующаго линейнаго уравненія съ частными производными, соотвѣтствующаго системѣ (14),

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{16}$$

Исключая производныя функціи f изъ уравненій (15), получаемъ уравненія, служащія для опредѣленія значеній p_i, независимо отъ f,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} p_k = 0, \\ &\qquad i = 1, 2, \ldots n, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_r}, \tag{18}$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей r и k, отъ 1 до n. Слѣдовательно, искомыя значенія p_i представляютъ рѣшенія системы (17), которыя кромѣ того удовлетворяютъ условіямъ (18). Система уравненій (17) принадлежитъ къ якобіевскому виду, изслѣдованному въ главѣ III настоящаго сочиненія. Соотвѣтствующая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ значеніе

$$dx_i = X_i\, dt, \quad dp_i = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} p_k\, dt,$$
$$i = 1, 2 \ldots n,$$

и представляетъ *каноническую систему* Ліувилля, въ которую онъ преобразовываетъ данную систему (14). Дѣйствительно, благодаря обозначенію

$$\sum_{k=1}^{n} X_k p_k \equiv H,$$

послѣднія уравненія становятся

$$\left.\begin{aligned} &dx_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt, \quad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} . dt, \\ &\qquad i = 1, 2 \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Легко видѣть, что для того, чтобы найти рѣшеніе системы (17), удовлетворяющее условіямъ (18), для этого достаточно составить интегралъ дифференціальнаго уравненія съ частными производными, соотвѣтствующаго канонической системѣ (19). Нетрудно замѣтить, что это послѣднее частное уравненіе представляетъ ничто иное какъ уравненіе (16), и, стало быть,

мы возвращаемся обратно къ n первымъ формуламъ (15), выражающимъ значенія множителей p_i, при помощи интеграла уравненія (16). *Поэтому каноническая система Ліувилля (19) получается въ результатѣ приложенія къ уравненію (16) общей теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.*

Пусть выраженіе

$$U(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

представляетъ безконечно-малое преобразованіе системы уравненій (14), при чемъ $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ обозначаютъ функціи перемѣнныхъ $t, x_1, x_2, \ldots x_n$. Въ такомъ случаѣ выраженіе $U(f)$, разсматриваемое какъ функція перемѣнныхъ $t, x_1, x_2, \ldots x_n$ представляетъ интегралъ уравненія (16) одновременно съ функціей f, и мы получаемъ равенство

$$(X(f),\ U(f)) = 0. \tag{20}$$

Поэтому уравненіе

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, p_i = b, \tag{21}$$

представляетъ интегралъ канонической системы Ліувилля (19), гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину и лѣвая часть равенства получается изъ выраженія $U(f)$ замѣной въ немъ производныхъ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ обозначеніями p_i.

Съ другой стороны, будемъ ли исходить изъ условія (20), или изъ предположенія, что уравненіе (21) представляетъ интегралъ системы (19), мы получаемъ каждый разъ слѣдующую систему уравненій, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты ξ_i,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \xi_k,$$
$$i = 1, 2 \ldots n.$$

На основаніи теоріи, изложенной въ III-й главѣ настоящаго изслѣдованія, интегрированіе послѣдней системы приводится къ интегрированію совокупности обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (14) и слѣдующихъ

$$d\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \xi_k\, dt,$$
$$i = 1, 2 \ldots n.$$

Послѣднія уравненія отличаются отъ *варіаціонныхъ* уравненій Пуанкаре только обозначеніемъ функціональныхъ перемѣнныхъ δx_1, $\delta x_2, \ldots \delta x_n$, которыя связаны съ ξ_i слѣдующими соотношеніями

$$\delta x_i = \xi_i \,\delta t, \qquad i = 1, 2 \ldots n.$$

Наконецъ, замѣтимъ, что совокупность данныхъ уравненій (14) и n послѣднихъ выведенныхъ уравненій образуетъ каноническую систему при условіи, что исходныя уравненія (14) представляютъ каноническую систему.

4. Всѣ предыдущія соображенія прилагаются также къ системамъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_i = \sum_{h=1}^{m} X_i^h dt_h, \qquad i = 1, 2 \ldots n, \tag{22}$$

гдѣ всѣ X_i^h обозначаютъ функціи перемѣнныхъ величинъ $t_1, t_2, \ldots t_m$, $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Покажемъ прежде всего, что преобразованіе Ліувилля прилагается также къ уравненіямъ въ полныхъ дифференціалахъ. Дѣйствительно, введемъ новыя перемѣнныя величины

$$y_1, y_2, \ldots y_n,$$

опредѣляемыя слѣдующими уравненіями

$$dy_i = -\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k^h}{\partial x_i} y_k \,dt_h, \qquad i = 1, 2 \ldots n.$$

Легко видѣть, что совокупность послѣднихъ уравненій, вмѣстѣ съ (22)-ыми, представляетъ каноническую систему. Для этого слѣдуетъ замѣтить прежде всего, что разсматриваемыя уравненія представляютъ систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ. Вводя затѣмъ обозначенія

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^h y_k \equiv H_h, \qquad h = 1, 2, \ldots m,$$

мы представляемъ разсматриваемыя уравненія въ каноническомъ видѣ

$$dx_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial y_i} dt_h, \quad dy_i = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x_i} dt_h, \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{23}$$

Согласно съ опредѣленіемъ, интегрирующіе множители Якоби системы (22)

$$p_1, p_2, \ldots p_n$$

представляютъ соотвѣтственно значенія частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

гдѣ функція f является интеграломъ якобіевской системы

$$X^h(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + \sum_{i=1}^{n} X_i^h \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots m. \tag{24}$$

Съ другой стороны, аналогично предыдущему случаю обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, множители p_i опредѣляются слѣдующей системой уравненій

$$\frac{\partial p_i}{\partial t_h} + \sum_{k=1}^{n} X_k^h \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k^h}{\partial x_i} p_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \quad h = 1, 2, \ldots m, \tag{25}$$

и уравненіями (18)-ыми. Послѣдняя написанная система nm уравненій (25) принадлежитъ къ типу уравненій, изслѣдованныхъ въ III-ьей главѣ настоящаго сочиненія. Какъ слѣдуетъ изъ изложенной тамъ теоріи, система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующая уравненіямъ (25), представляется въ видѣ канонической системы, которая получается изъ предыдущей системы (23), замѣной въ ней перемѣнныхъ y_i черезъ p_i. Другими словами послѣдняя система получается въ результатѣ приложенія къ линейнымъ уравненіямъ (24) общей теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка.

Наконецъ, *каждому безконечно-малому преобразованію системы уравненій (22)*

$$U(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

соотвѣтствуетъ интегралъ

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i p_i = b$$

канонической системы, къ которой приводятся данныя уравненія (22); при этомъ ξ *обозначаютъ функціи перемѣнныхъ* $t_1, t_2, \ldots t_m, x_1, x_2, \ldots x_n$, *а* b*—произвольную постоянную величину.*

Аналогично предыдущему, функціи ξ_i опредѣляются слѣдующей системой уравненій [1]), которая также принадлежитъ къ типу изслѣдованныхъ въ III-ьей главѣ,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t_h}+\sum_{k=1}^{n} X_k^h \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_i^h}{\partial x_k}\xi_k,$$
$$i=1,2,\ldots n, \qquad h=1,2,\ldots m.$$

5. Въ виду полной аналогіи, которую представляютъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ съ обыкновенными дифференціальными уравненіями, мы ограничимся разсмотрѣніемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (14). Предположимъ, что слѣдующія уравненія

$$\left. \begin{array}{c} f_k(t,\ x_1,\ x_2, \ldots x_n)=a_k, \\ k=1,2,\ldots n, \end{array} \right\} \tag{26}$$

представляютъ n различныхъ интеграловъ системы (14), при чемъ всѣ a_k обозначаютъ различныя произвольныя постоянныя величины. Производныя

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1},\ \frac{\partial f_k}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f_k}{\partial x_n},$$

согласно съ предыдущимъ опредѣленіемъ, представляютъ значенія n интегрирующихъ множителей Якоби системы уревненій (14), которые условимся обозначать слѣдующимъ образомъ

$$p_{1k},\ p_{2k}, \ldots p_{nk}.$$

Такъ какъ число различныхъ интеграловъ (26) равняется n, то мы имѣемъ, стало-быть, n различныхъ системъ интегрирующихъ множителей, соотвѣтствующихъ n значеніямъ k, отъ 1 до n.

Наконецъ, вслѣдствіе того, что послѣднія n уравненій (19) линейны относительно перемѣнныхъ p_i, то очевидно, что они имѣютъ рѣшенія слѣдующаго вида

$$p_i=\sum_{k=1}^{n} b_k p_{ik},$$
$$i=1,2,\ldots n,$$

гдѣ b_k обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Далѣе, само собою разумѣется, что опредѣлитель

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles (Journal Jordan, 1897, p. 429).*

Ср. *A. Mayer.—Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen und im Besondern der infinitesimalen Berührungstransformationen der Ebene (Berichte u. d. Verhandlungen d. K. S. Gesellschaft der W. zu Leipzig, Math.-Phys. classe, 1893, S. 697).*

$$M\equiv\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

отличенъ отъ нуля. Поэтому предыдущія уравненія, будучи разрѣшены относительно постоянныхъ b_k, даютъ n слѣдующихъ интеграловъ системы (19)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{M_{ik}}{M}p_i=b_k, \tag{27}$$
$$k=1,2,\ldots n,$$

гдѣ выраженіе M_{ik} обозначаетъ миноръ опредѣлителя M, соотвѣтствующій его элементу p_{ik}, находящемуся на пересѣченіи k-ого столбца и i-ой строки разсматриваемаго опредѣлителя.

Послѣдніе интегралы представляются также слѣдующимъ образомъ

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k}\right)p_i=b_k,$$
$$k=1,2,\ldots n,$$

гдѣ всѣ x_i обозначаютъ ихъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (26), и скобки указываютъ на результатъ замѣны a_k ихъ функціональными значеніями f_k. Эти уравненія или выводятся изъ уравненій (27), или составляются непосредственно, на основаніи теоремы Ліувилля для канонической системы (19), по отношенію къ которой уравненія (27) образуютъ систему n интеграловъ въ инволюціи, разрѣшимыхъ относительно каноническихъ перемѣнныхъ перваго класса.

Совокупность уравненій (26) и (27) представляетъ $2n$ различныхъ интеграловъ системы (19). Такимъ образомъ, *если извѣстны всѣ n интеграловъ данныхъ уравненій (14), то полная система интеграловъ соотвѣтствующей канонической системы Ліувилля (19) составляется при помощи операцій дифференцированія.*

Легко видѣть, что совокупность интеграловъ (26) и (27) образуетъ каноническую систему по отношенію къ уравненіямъ (19). Это слѣдуетъ, во-первыхъ, изъ того, что имѣютъ мѣсто условія

$$(f_s,\ f_r)=0,$$

для всѣхъ значеній s и r, отъ 1 до n, такъ какъ функціи f_k зависятъ только отъ каноническихъ перемѣнныхъ перваго класса. Затѣмъ, во-вторыхъ, значенія p_{ik} утождествляютъ условія (18). Поэтому указанныя выше значенія функціи p_i удовлетворяютъ также послѣднимъ условіямъ. Слѣдовательно, интегралы (27) находятся въ инволюціи. Такимъ образомъ, называя черезъ F_k лѣвыя части уравненій (27), мы получаемъ слѣдующія тождества

$$(F_s, F_r) = 0,$$

для всѣхъ значеній s и r, отъ 1 до n. Наконецъ, получаемъ еще слѣдующія значенія скобокъ Пуассона

$$(F_s, f_r) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} \frac{\partial f_r}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} p_{kr}.$$

Подставляя въ послѣднія выраженія значенія производныхъ $\frac{\partial F_s}{\partial p_k}$, представляемъ такимъ образомъ предыдущія выраженія

$$(F_s, f_r) \equiv \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} M_{ks}\, p_{kr}.$$

Отсюда, на основаніи свойствъ опредѣлителя M, приходимъ къ искомымъ равенствамъ

$$(F_s, f_r) \equiv \begin{cases} 0, & r \gtrless s, \\ 1, & r = s, \end{cases}$$

которыя, совмѣстно съ предыдущими равенствами, показываютъ, что разсматриваемые интегралы дѣйствительно образуютъ каноническую систему.

Кромѣ того, изъ существованія интеграловъ (27) заключаемъ, что каноническая система (19) имѣетъ n интеграловъ въ инволюціи, линейныхъ относительно вспомогательныхъ перемѣнныхъ Ліувилля p_i.

Само собою разумѣется, что вводя вспомогательныя перемѣнныя, чтобы привести данныя уравненія къ каноническому виду, мы удвоиваемъ число уравненій. Поэтому до сихъ поръ геометры въ своихъ вычисленіяхъ не пользовались преобразованіемъ Ліувилля. Какъ однако слѣдуетъ изъ предыдущихъ разсужденій, новыя вводимыя Ліувиллемъ перемѣнныя величины тѣсно связаны съ тѣми величинами, которыя встрѣчаются въ теоріи дифференціальныхъ уравненій или въ видѣ интегрирующихъ множителей Якоби, или при разсмотрѣніи безконечно-малыхъ преобразованій изслѣдуемыхъ уравненій. Такимъ образомъ введеніе вспомогательныхъ перемѣнныхъ Ліувилля не усложняетъ задачи интегрированія данныхъ уравненій больше, чѣмъ всѣ упомянутыя теоріи. Напротивъ преобразованіе разсматриваемыхъ уравненій къ каноническому виду представляетъ существенное удобство, въ виду особенностей теоріи канонических уравненій, которыя упрощаютъ задачу интегрированія дифференціальныхъ уравненій.

ГЛАВА X.

Приложеніе безконечно-малыхъ преобразованій къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій.

1. Первый вопросъ, который представляется при интегрированіи данныхъ дифференціальныхъ уравненій, при помощи ихъ безконечно-малыхъ преобразованій, состоитъ въ разысканіи послѣднихъ.

Въ моемъ изслѣдованіи: *Sur les transformations infinitésimales*, опубликованномъ въ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* за 1897 годъ [1]), показано, что задача вычисленія безконечно-малыхъ преобразованій системы дифференціальныхъ уравненій обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференціалахъ равнозначна задачѣ интегрироваія этихъ самыхъ уравненій. То же самое заключеніе вытекаетъ съ особенной наглядностью изъ разсужденій, изложенныхъ въ предыдущей главѣ. Поэтому теорія безконечно-малыхъ преобразованій представляетъ одинъ изъ тѣхъ формальныхъ, общихъ способовъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій, которыя приводятъ, въ различныхъ частныхъ случаяхъ, сравнительно съ другими пріемами интегрированія, къ болѣе или менѣе удачному разрѣшенію задачи интегрированія дифференціальныхъ уравненій того или другого частнаго вида.

Становясь на послѣднюю точку зрѣнія, мы приходимъ къ необходимости изученія элементовъ теоріи безконечно-малыхъ преобразованій, достаточныхъ для интегрированія дифференціальныхъ уравненій и къ разсмотрѣнію вычисленій, необходимыхъ для выполненія самого интегрированія.

Послѣдніе два вопроса служили предметомъ постоянныхъ изслѣдованій С. Ли. Мнѣ удалось, съ своей стороны, получить въ этомъ направленіи нѣсколько результатовъ, изложеніе которыхъ представляетъ содержаніе настоящей главы.

Отличительная черта трудовъ С. Ли заключается въ оригинальности и новизнѣ формы изложенія своихъ мыслей и результатовъ. Поэтому очень часто утрачивается связь между изслѣдованіями С. Ли и другихъ геометровъ. Но, кромѣ того, идеи С. Ли не всегда приводятъ

[1]) T. III, 5-e série, p. 429.

къ простому представленію изслѣдуемыхъ вопросовъ и, что всего важнѣе, иногда не даютъ естественнаго разъясненія сущности разсматриваемыхъ задачъ. Высказанныя соображенія относятся, по нашему мнѣнію, также къ теоріи безконечно-малыхъ преобразованій. Какъ мы видѣли въ предыдущей главѣ, существуетъ тѣсная связь между безконечно-малыми преобразованіями дифференціальныхъ уравненій, ихъ интегрирующими множителями Якоби и преобразованіемъ Ліувилля разсматриваемыхъ уравненій къ каноническому виду. Благодаря послѣднему обстоятельству, *интегрированіе уравненій, для которыхъ извѣстны безконечно-малыя преобразованія, представляетъ частный случай задачи интегрированія каноническихъ уравненій.*

Такимъ образомъ мы вносимъ нѣкоторыя упрощенія въ теорію безконечно-малыхъ преобразованій и приходимъ къ уменьшенію числа операцій, необходимыхъ для интегрированія системъ дифференціальныхъ уравненій обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференціалахъ, допускающихъ такъ называемую группу безконечно-малыхъ преобразованій; наконецъ, всѣ необходимыя для выполненія послѣдняго интегрированія операціи, которыя совершаются при помощи квадратуръ, пріобрѣтаютъ у насъ весьма простое выраженіе.

На послѣдующихъ страницахъ излагаются подробно эти результаты, которые были опубликованы раньше въ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* [1]) за 1905 г. въ мемуарѣ: *Etude sur les transformations infinitésimales* и въ статьѣ: *Приложеніе теоріи группъ безконечно-малыхъ преобразованій къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій при помощи квадратуръ*, напечатанной въ Протоколахъ Физико-Математическаго Общества, состоящаго при Кіевскомъ Университетѣ [2]).

Пусть имѣемъ систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$dx_k = X_k dt, \qquad k = 1, 2, \ldots n, \tag{1}$$

гдѣ всѣ X_k представляютъ функціи независимой перемѣнной t и зависимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Соотвѣтствующее линейное уравненіе съ частными производными перваго порядка функціи f перемѣнныхъ $t, x_1, x_2, \ldots x_n$, разсматриваемыхъ какъ независимыя, принимаетъ слѣдующій видъ

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{2}$$

1) 6-e série, tome I, p. 53.

2) Кіевскія Университетскія Извѣстія за 1904 г.

Предположимъ, что разсматриваемыя уравненія (1) или (2) допускаютъ m различныхъ [1]) безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_m(f), \tag{3}$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$U_k(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

при чемъ всѣ коэффиціенты ξ_{ik} представляютъ функціи перемѣнныхъ $t, x_1, x_2, \ldots x_n$.

С. Ли говоритъ, что *безконечно-малыя преобразованія (3) образуютъ группу*, если они удовлетворяютъ тождественно слѣдующимъ условіямъ

$$(U_s(f),\ U_r(f)) = \sum_{\rho=1}^{m} c_{sr\rho} U_\rho(f),$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и r, отъ 1 до m, *при чемъ всѣ величины $c_{sr\rho}$ представляютъ постоянныя значенія.*

Наконецъ, условившись обозначать черезъ p_i частныя производныя функціи f

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

введемъ слѣдующія обозначенія

$$\sum_{i=1}^{n} X_i p_i \equiv H, \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} p_i \equiv F_k.$$

Въ нашихъ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы ограничимся предположеніемъ о существованіи группъ безконечно-малыхъ преобразованій и не будемъ прибѣгать къ операціямъ, для составленія новыхъ безконечно-малыхъ преобразованій или интеграловъ разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій. Кромѣ того мы не будемъ предполагать извѣстными интегралы этихъ послѣднихъ уравненій, такъ какъ въ каждомъ случаѣ, когда нѣкоторые изъ этихъ интеграловъ становятся извѣстными, задача интегрированія соотвѣтствующихъ дифференціальныхъ уравненій пре-

1) Безконечно-малыя преобразованія называются *различными*, если они не связаны между собой линейными зависимостями съ постоянными коэффиціентами.

образовывается въ новую задачу, при чемъ порядокъ интегрируемой системы уравненій становится меньше сравнительно съ исходной системой [1]).

Каждое безконечно-малое преобразованіе даетъ мѣсто интегралу канонической системы Ліувилля, соотвѣтствующей даннымъ уравненіямъ (1). Поэтому идея С. Ли, примѣнить безконечно-малыя преобразованія къ интегрированію данныхъ уравненій, приводится по существу къ тому, чтобы ввести въ вычисленія интегралы второго класса канонической системы Ліувилля и воспользоваться ими для вычисленія искомыхъ интеграловъ, которые принадлежатъ къ первому классу.

2. Условившись въ предыдущихъ обозначеніяхъ, будемъ называть группу безконечно-малыхъ преобразованій (3) *группой въ инволюціи*, если всѣ постоянныя величины $c_{sr\rho}$ тождественно равны нулямъ, т. е. функціи F_k находятся въ инволюціи, удовлетворяя тождественно условіямъ

$$(F_s,\ F_r)=0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и r, отъ 1 до m.

Первое предложеніе, которое мы имѣемъ въ виду доказать, состоитъ въ слѣдующемъ:

Если система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (1) допускаетъ группу n различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій въ инволюціи, то интегрированіе данной системы совершается при помощи одной только квадратуры.

Въ самомъ дѣлѣ, данныя функціи

$$F_1,\ F_2,\dots F_n$$

представляютъ n различныхъ интеграловъ въ инволюціи линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка функціи F независимыхъ перемѣнныхъ

$$x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_1,\ p_2,\dots p_n,$$

которое, при помощи скобокъ Пуассона, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{\partial F}{\partial t}+(H,\ F)=0. \tag{4}$$

Поэтому соотвѣтствующая каноническая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

---

[1]) См. по этому поводу изслѣдованія *С. Ли*: Mathematische Annalen, Bd. XI, S. 487, и *Vorlesungen über Differentialgeichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, bearbeitet u. herausgegeben v. G. Scheffers.*

C. Jordan. Cours d'Analyse, t III. 1896, p.p. 79—87.

$$\frac{dx_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_k},\quad k=1,\ 2,\dots n, \tag{5}$$

имѣетъ n интеграловъ въ инволюціи, разрѣшимыхъ относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_1,\ p_2,\dots p_n$,

$$F_i=b_i,\ i=1,\ 2,\dots n, \tag{6}$$

гдѣ b_i представляютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Слѣдовательно, остальные n интеграловъ разсматриваемой канонической системы (5) опредѣляются, на основаніи извѣстной теоремы Якоби—Ліувилля, при помощи одной квадратуры, приводящейся къ интегрированію точнаго дифференціала

$$dz=-H\,dt+\sum_{k=1}^{n}p_k dx_k,$$

гдѣ всѣ p_k представляютъ ихъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (6). Пусть интегралъ послѣдняго точнаго дифференціала представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z=V(t,\ x_1,\ x_2,\dots x_n,\ b_1,\ b_2,\dots b_n)+b,$$

гдѣ b обозначаетъ новую произвольную постоянную величину. Въ такомъ случаѣ искомые n интеграловъ системы (5) представляются уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_i}=a_i,\ i=1,\ 2,\dots n, \tag{7}$$

гдѣ всѣ a_i обозначаютъ n новыхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Легко убѣдиться, что эти послѣднія уравненія представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ интегралы данной системы уравненій (1).

Дѣйствительно, слѣдуетъ прежде всего замѣтить, что первыя n уравненій канонической системы (5) представляютъ данныя уравненія (1); остальныя же n уравненій (5) являются уравненіями Ліувилля, которыя онъ вводитъ для преобразованія данной системы (1) къ каноническому виду. Такъ какъ далѣе уравненія (6) разрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ p_k, то, какъ хорошо извѣстно, уравненія (7) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $x_1,\ x_2,\dots x_n$. Наконецъ, нетрудно убѣдиться, что уравненія (7) не зависятъ отъ постоянныхъ

$$b_1,\ b_2,\dots b_n.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ уравненія (6) линейны относительно p_k, то опредѣленныя изъ этихъ уравненій выраженія послѣднихъ перемѣнныхъ линейны относительно всѣхъ постоянныхъ b_i. Поэтому выраженіе dz, а также выраженіе его интеграла, т. е. функція V, линейны относительно всѣхъ b_i. Слѣдовательно, всѣ частныя производныя $\frac{\partial V}{db_i}$ не заключаютъ совершенно постоянныхъ величинъ $b_1, b_2, \ldots b_n$, и уравненія (7) представляютъ, стало-быть, искомые интегралы данной системы уравненій (1).

Послѣдніе интегралы легко представить въ явной формѣ черезъ посредство коэффиціентовъ данныхъ безконечно-малыхъ преобразованій. Дѣйствительно, уравненія (6) представляются слѣдующимъ образомъ въ явной формѣ

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} p_i = b_k, \quad k=1, 2, \ldots n.$$

Называемъ черезъ $\triangle$ отличный отъ нуля опредѣлитель

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначая черезъ $\triangle_{ri}$ миноръ опредѣлителя $\triangle$, соотвѣтствующій его элементу ξ_{ri}, получаемъ

$$p_r = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\triangle_{ri}}{\triangle}, \quad r=1, 2, \ldots n,$$

при чемъ послѣднія значенія p_r удовлетворяютъ условіямъ

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_r},$$

для всѣхъ значеній r и k, отъ 1 до n. Такъ какъ b_k представляютъ произвольныя постоянныя величины, то мы получаемъ слѣдующія тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\triangle_{ri}}{\triangle}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\triangle_{ki}}{\triangle}\right), \quad k, r=1, 2, \ldots n,$$

при чемъ i получаетъ рядъ значеній отъ 1 до n. Отсюда слѣдуетъ, что отношенія

$$\frac{\triangle_{1i}}{\triangle}, \frac{\triangle_{2i}}{\triangle}, \ldots \frac{\triangle_{ni}}{\triangle}$$

представляютъ системы интегрирующихъ множителей данныхъ уравненій (1). Стало-быть, интегралы ихъ становятся

$$\int \sum_{k=1}^{n} \frac{\triangle_{ki}}{\triangle} (dx_k - X_k\, dt) = a_i, \quad i=1, 2, \ldots n,$$

гдѣ выраженія подъ знаками интеграловъ представляютъ точные дифференціалы и a_i обозначаютъ произвольныя постоянныя величины.

3. Для продолженія нашего изслѣдованія въ томъ же самомъ направленіи, необходимо распространить полученные результаты на уравненія въ полныхъ дифференціалахъ и на якобіевскія системы линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи и на какія угодно *замкнутыя* системы послѣднихъ уравненій.

Возьмемъ систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. dx_i = \sum_{h=1}^{m} X_i^h\, dt_h, \quad i=1, 2, \ldots n, \right\} \tag{8}$$

гдѣ коэффиціенты X_i^h являются функціями независимыхъ перемѣнныхъ $t_1, t_2, \ldots t_m, x_1, x_2, \ldots x_n$ и удовлетворяютъ извѣстнымъ условіямъ, показывающимъ, что написанныя уравненія представляютъ систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ.

Въ такомъ случаѣ соотвѣтствующая нашимъ уравненіямъ якобіевская система имѣетъ видъ

$$\left. X^h(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + \sum_{i=1}^{n} X_i^h \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad h=1, 2, \ldots m. \right\} \tag{9}$$

Наконецъ, каноническая система, въ которую преобразовываются данныя уравненія (8), становится

$$dx_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial p_i} dt_h, \quad dp_i = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x_i} dt_h,$$

$$i = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ функціи H_h имѣютъ значенія

$$H_h \equiv \sum_{k=1}^{n} X_k^h p_k.$$

Поэтому, на основаніи *обобщенной теоремы Якоби—Ліувилля*, распространенной мною на *системы каноническихъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ* [1]), доказанное выше предложеніе, относительно обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, распространяется слѣдующимъ образомъ на уравненія въ полныхъ дифференціалахъ и на якобіевскія системы:

Если системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (8), или соотвѣтствующая якобіевская система (9) допускаютъ группу въ инволюціи n различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій, то интегрированіе данныхъ уравненій совершается при помощи одной только квадратуры.

Наконецъ, послѣднее предложеніе относится не только къ якобіевскимъ системамъ, но распространяется также весьма легко и на всякую *замкнутую* систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, т. е. такую систему, что скобки Пуассона, составленныя изъ лѣвыхъ частей ея уравненій, выражаются линейно черезъ эти лѣвыя части и, стало-быть, уничтожаются, на основаніи данныхъ уравненій.

Мы условимся говорить, что *замкнутая система* линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи допускаетъ *замкнутую группу безконечно-малыхъ преобразованій, если составленныя изъ нихъ скобки Пуассона выражаются линейно съ постоянными коэффиціентами относительно лѣвыхъ частей уравненій данной замкнутой системы.*

Чтобы убѣдиться въ справедливости послѣдняго обобщенія только что приведеннаго предложенія, относительно якобіевскихъ системъ, на замкнутыя системы, достаточно указать на то, что послѣдній случай приводится къ предыдущему. Въ самомъ дѣлѣ, какъ хорошо извѣстно, разсматриваемая замкнутая система, разрѣшеніемъ ея уравненій относительно частныхъ производныхъ, приводится къ якобіевской

[1]) См. сообщ. *Харьк. Мат. Общ. т. VI стр. 225, Comptes rendus d. S. de l'Acad. des Sc., 23 janvier, 30 janvier, 4 juillet, 1899* и главу VII настоящаго сочиненія.

системѣ, и, путемъ алгебраическихъ преобразованій, замкнутая группа разсматриваемыхъ безконечно-малыхъ преобразованій переходитъ въ группу въ инволюціи, соотвѣтствующую полученной якобіевской системѣ [1]).

Для примѣра возьмемъ слѣдующую систему уравненій

$$dx = X\,dt, \quad dy = Y\,dt, \tag{10}$$

допускающую группу двухъ слѣдующихъ различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_1(f) \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad U_2(f) \equiv \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

гдѣ X, Y, ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 представляютъ функціи перемѣнныхъ t, x, y.

Какъ извѣстно, возможны только слѣдующихъ два случая [2]): или имѣетъ мѣсто условіе

$$(U_1(f),\ U_2(f)) = 0,$$

или существуетъ зависимость

$$(U_1(f),\ U_2(f)) = U_1 f.$$

Если имѣетъ мѣсто первый случай, то составляемъ тогда слѣдующія уравненія

$$U_1(f) = b_1, \ U_2(f) = b_2,$$

при чемъ b_1, b_2, обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Вычисляемъ затѣмъ квадратуру

$$f = \int \frac{1}{\Delta} [b_1 \eta_2 - b_2 \eta_1)(dx - X\,dt) + (b_2 \xi_1 - b_1 \xi_1)(dy - Y\,dt)] + b,$$

гдѣ b — новая произвольная постоянная величина и имѣетъ Δ значеніе

$$\Delta \equiv \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1.$$

Въ такомъ случаѣ оба искомые интеграла данной системы дифференціальныхъ уравненій (10) становятся

[1]) Ср. *S. Lie.*—Mathematische Annalen, Bd. XI, S. 495.
C. Jordan.—Cours d'Analyse, t. III, 1-re édition, p. 81—82.

[2]) *S. Lie—Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen bearbeitet und herausgegeben v. G. Scheffers, Leipzig 1891, S. 412.*

$$\frac{\partial f}{\partial b_1}=a_1, \quad \frac{\partial f}{\partial b_2}=a_2,$$

гдѣ a_1 и a_2 представляютъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины, при чемъ производныя $\frac{\partial f}{\partial b_1}$, $\frac{\partial f}{\partial b_2}$ не зависятъ отъ величинъ b_1 и b_2.

Во второмъ изъ указанныхъ предположеній, относительно разсматриваемой группы, получается слѣдующая полная система линейныхъ уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial t}+X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad \xi_1\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_1\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

имѣющая безконечно-малое преобразованіе $U_2(f)$. Разрѣшая два послѣднихъ уравненія относительно производныхъ $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, получаемъ якобіевскую систему, которой соотвѣтствуетъ слѣдующее уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ

$$dy=\frac{\eta_1}{\xi_1}dx+(Y-\frac{\eta_1}{\xi_1}X)\,dt.$$

Это уравненіе имѣетъ безконечно-малое преобразованіе

$$U_2'f\equiv\frac{\Delta}{\xi_1}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Поэтому отношеніе $\frac{\xi_1}{\Delta}$ представляетъ интегрирующій множитель послѣдняго уравненія въ полныхъ дифференціалахъ, его интегралъ становится

$$\int\frac{\xi_1}{\Delta}\left[dy-\frac{\eta_1}{\xi_1}dx-(Y-\frac{\eta_1}{\xi_1}X)\,dt\right]=a_1$$

и представляетъ вмѣстѣ съ тѣмъ одинъ изъ интеграловъ системы (10), при чемъ a_1 обозначаетъ произвольную постоянную величину.

Второй изъ искомыхъ интеграловъ получается затѣмъ при помощи квадратуры. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя значеніе y, опредѣляемое найденнымъ интеграломъ, въ первое изъ данныхъ уравненій, получаемъ уравненіе

$$dx=(X)\,dt,$$

имѣющее безконечно-малое преобразованіе

$$U_1'(f)\equiv(\xi_1)\frac{\partial f}{\partial x},$$

гдѣ скобки обозначаютъ результатъ произведеннаго исключенія. Поэтому второй искомый интегралъ становится

$$\int\frac{1}{(\xi_1)}[dx-(X)\,dt]=a_2,$$

гдѣ a_2 — новая произвольная постоянная величина.

4. Основываясь на полученныхъ результатахъ, легко установить второй случай интегрированія дифференціальныхъ уравненій (1) или (2), уравненій въ полныхъ дифференціалахъ и якобіевскихъ системъ, при помощи квадратуръ, въ томъ предположеніи, что разсматриваемыя уравненія допускаютъ такъ называемую *интегрируемую группу безконечно-малыхъ преобразованій* [1]).

Чтобы составить понятіе объ *интегрируемой группѣ*, начнемъ съ опредѣленія такъ называемыхъ *производныхъ группъ данной группы безконечно-малыхъ преобразованій.*

Обозначимъ черезъ

$$U_1(f),\ U_2(f),\dots U_n(f) \tag{11}$$

группу n различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій системы уравненій (1).

Пусть послѣдняя группа заключаетъ *подгруппу* [2]) n_1 безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_1(f),\ U_2(f),\dots U_{n_1}(f),$$

гдѣ $n_1<n$; послѣдняя называется *производной группой*, если всѣ безконечно-малыя преобразованія данной группы удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ

$$(U_s(f),\ U_r(f))=\sum_{\rho=1}^{n_1}c_{sr\rho}\,U_\rho(f),$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и r, отъ 1 до n, при чемъ $c_{sr\rho}$ представляютъ постоянныя величины.

Предположимъ, что указанная производная группа имѣетъ въ свою очередь также производную группу; эта послѣдняя въ такомъ случаѣ называется *второй производной* данной группы и т. д.

Очевидно, что данная группа допускаетъ конечное число производныхъ группъ.

---

[1]) *S. Lie u Engel.—Theorie der Transformationsgruppen.* Bd. III, s. 679.

[2]) Мы говоримъ, что нѣсколько безконечно-малыхъ преобразованій данной группы образуютъ подгруппу, если они образуютъ самостоятельно группу, независимо отъ остальныхъ безконечно-малыхъ преобразованій данной группы.

Если послѣдняя производная данной группы приводится къ одному только безконечно-малому преобразованію, то мы называемъ разсматриваемую группу *интегрируемой*.

Предположимъ, что группа (11) интегрируемая и имѣетъ q производныхъ подгруппъ. Представимъ каждую послѣдовательную производную группу въ новой строкѣ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l} U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f), \ldots U_{n_2}(f), \ldots U_{n_1}(f), \ldots U_n(f); \\ U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f), \ldots U_{n_2}(f), \ldots U_{n_1}(f); \\ U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f), \ldots U_{n_2}(f); \\ \quad . \qquad . \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \quad . \qquad . \qquad \ldots \qquad \ldots \\ U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f); \\ U_1(f). \end{array}$$

Въ такомъ случаѣ, согласно съ С. Ли, интегрированіе уравненій (1) совершается при помощи n различныхъ квадратуръ [1]. Но мы имѣемъ въ виду показать, что число квадратуръ, необходимыхъ для интегрированія системы (1) въ разсматриваемомъ случаѣ, равняется числу производныхъ подгруппъ данной группы, увеличенному на единицу. Такимъ образомъ всякій разъ, когда число разсматриваемыхъ производныхъ подгруппъ меньше n, то изслѣдумая задача интегрированія разрѣшается при помощи меньшаго числа квадратуръ, нежели этого требуетъ С. Ли.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи понятія о производныхъ группахъ, становится очевиднымъ, что равенства

$$X(f) = 0, \quad U_1(f) = 0, \quad U_2(f) = 0, \ldots U_{n_1}(f) = 0 \qquad (12)$$

образуютъ замкнутую систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка неизвѣстной функціи f, и что послѣдняя система допускаетъ *замкнутую группу $n - n_1$ различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій*

$$U_{n_1+1}(f), \quad U_{n_1+2}(f), \ldots U_n(f). \qquad (13)$$

Дѣйствительно, скобки Пуассона, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій (12), уничтожаются, на основаніи этихъ самыхъ уравненій, а скобки Пуассона, изъ безконечно-малыхъ преобразованій (13), выражаются линейно съ постоянными коэффиціентами черезъ лѣвыя части уравненій (12).

---

[1]) *S. Lie.—Mathematische Annalen,* Bd. XI, s. 517—518.
S. Lie u Engel.—Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, s. 708—709.

Поэтому, въ силу предложенія, доказаннаго въ n^o3, интегрированіе системы уравненій (12) совершается при помощи одной только квадратуры, и мы получаемъ дифференцированіемъ $n - n_1$ различныхъ ея интеграловъ, которые обозначимъ черезъ

$$f_1,\ f_2, \ldots f_{n-n_1}.$$

Послѣднія функціи являются вмѣстѣ съ тѣмъ интегралами уравненія (2). Поэтому число входящихъ въ него независимыхъ перемѣнныхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ порядокъ системы уравненій (1) могутъ быть понижены на $n - n_1$ единицъ. Предположимъ, что полученные интегралы различны относительно перемѣнныхъ

$$x_{n_1+1},\ x_{n_1+2}, \ldots x_n.$$

Вводя вмѣсто послѣднихъ, новыми перемѣнными, функціи $f_1,\ f_2, \ldots f_{n-n_1}$, мы преобразовываемъ уравненіе (2) къ слѣдующему виду

$$X'(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_1} X'_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \qquad (14)$$

Такъ какъ функціи f служатъ интегралами уравненій (12), то первая производная нашей группы (11), будучи преобразована также къ новымъ перемѣннымъ, представляетъ *интегрируемую группу n_1* различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій, допускаемыхъ уравненіемъ (14), которая представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$U'_1(f),\ U'_2(f), \ldots U'_{n_1}(f),$$

гдѣ введены обозначенія

$$U'_k(f) = \sum_{i=1}^{n_1} \xi'_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

и поставленные сверху буквъ значки отмѣчаютъ результатъ совершеннаго преобразованія.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ задачѣ, аналогичной исходной задачѣ, но порядка болѣе низкаго на $n - n_1$ единицъ.

Прилагая къ уравненію (14) предыдущія разсужденія, мы получаемъ, при помощи одной только квадратуры и дифференцированія, $n_1 - n_2$ интеграловъ уравненія (14), пусть

$$f_{n-n_1+1},\ f_{n-n_1+2}, \ldots f_{n-n_2},$$

различныхъ, положимъ, относительно перемѣнныхъ

$$x_{n_1+1},\ x_{n_2+2}, \dots x_{n_1}.$$

Преобразовываемъ уравненіе (14) къ новымъ перемѣннымъ, принимая за таковыя только что написанные интегралы и т. д.

Наконецъ, послѣ q—1 кратнаго повторенія указанныхъ операцій вычисленія, мы приходимъ къ составленію замкнутой системы двухъ слѣдующихъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка функціи f, по независимымъ перемѣннымъ $t, x_1, x_2, \dots x_{q-1}$,

$$X^{(q-1)}(f)=0, \qquad Y_1^{(q-1)}(f)=0,$$

допускающихъ *замкнутую* группу безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_2^{(q-1)}(f),\ U_3^{(q-1)}(f), \dots U_{n_{q-1}}^{(q-1)}(f).$$

Выполнивъ еще одну, q-ю по счету, квадратуру, мы составляемъ, при помощи дифференцированія, $n_{q-1}-1$ интеграловъ послѣднихъ двухъ уравненій, которые мы обозначимъ черезъ

$$f_{n-n_{q-1}+1},\ f_{n-n_{q-1}+2}, \dots f_{n-1}$$

и будемъ предполагать различными относительно перемѣнныхъ

$$x_2,\ x_3, \dots x_{n_{q-1}}.$$

Принимая полученные интегралы за новыя перемѣнныя, вмѣсто послѣднихъ величинъ, мы приходимъ, наконецъ, къ уравненію вида

$$\frac{\partial f}{\partial t}+X_1^{(q)}\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,$$

допускающему безконечно-малое преобразованіе

$$U_1^{(q)}(f)\equiv \xi_{11}^{(q)}\frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Стало быть, соотвѣтствующее обыкновенное дифференціальное уравненіе имѣетъ интегрирующій множитель $\frac{1}{\xi_{11}^{(q)}}$ и искомый интегралъ разсматриваемаго уравненія f_n получается при помощи квадратуры

$$\int \frac{1}{\xi_{11}^{(q)}}(dx_1-X_1^{(q)}\,dt).$$

Приравнявъ произвольнымъ постояннымъ величинамъ всѣ вычисленные интегралы и возвратившись къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, мы получаемъ такимъ образомъ полную систему интеграловъ данныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (1).

Само собою разумѣется, что приведенныя разсужденія прилагаются безъ существенныхъ измѣненій также къ интегрированію системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, допускающихъ интегрируемую группу безконечно-малыхъ преобразованій.

Изъ предыдущаго изложенія слѣдуетъ, что число необходимыхъ квадратуръ, для интегрированія уравненій въ обоихъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ, меньше сравнительно съ требованіями С. Ли, который рѣшаетъ каждую изъ обѣихъ задачъ, при помощи n различныхъ квадратуръ. Между тѣмъ оказывается, что, въ случаѣ *группы въ инволюціи*, достаточно всего одной квадратуры, а при *интегрируемой группѣ*, число необходимыхъ квадратуръ равняется числу производныхъ группъ, увеличенному на единицу.

Вводимое упрощеніе вытекаетъ изъ основного положенія, что *каждое безконечно-малое преобразованіе С. Ли системы данныхъ дифференціальныхъ уравненій опредѣляетъ интегралъ соотвѣтствующей канонической системы Ліувилля.*

Этотъ результатъ, который остался незамѣченнымъ С. Ли и его послѣдователями, является существеннымъ для развитія теоріи безконечно-малыхъ преобразованій. Благодаря тому же результату пріобрѣтаетъ новое значеніе преобразованіе Ліувилля данныхъ уравненій къ каноническому виду, которому до сихъ поръ не приписывали значенія, вслѣдствіе необходимости удвоить при этомъ число разсматриваемыхъ перемѣнныхъ. Однако, какъ оказывается, при разсмотрѣніи безконечно-малыхъ преобразованій, мы вводимъ тѣ же самыя перемѣнныя Ліувилля, образующія, совмѣстно съ данными, два класса каноническихъ перемѣнныхъ. Такимъ образомъ является возможность приложить къ изученію безконечно-малыхъ преобразованій теорію каноническихъ уравненій обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференціалахъ, которая, мы полагаемъ, должна пріобрѣсти первенствующее значеніе при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій, допускающихъ безконечно-малыя преобразованія.

Возьмемъ, для примѣра, систему дифференціальныхъ уравненій [1])

$$dx=X\,dt, \quad dy=Y\,dt, \quad dz=Z\,dt,$$

допускающую слѣдующую группу безконечно-малыхъ преобразованій

---

[1]) Ср. *S. Lie.—Vorlesungen über Differentialgeichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen bearbeitet und herausgegeben v. G. Scheffers*, ss. 545—555.

$$U_1(f),\quad U_2(f),\quad U_3(f),$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$(U_1(f),\ U_2(f))=0,\quad (U_1(f),\ U_3(f))=U_1(f),\quad (U_2(f),\ U_3(f))=0,$$

при чемъ введены обозначенія

$$U_i(f)\equiv\xi_i\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_i\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta_i\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Первая производная подгруппа данной группы состоитъ изъ одного безконечно-малаго преобразованія $U_1(f)$. Поэтому, интегрируя систему уравненій

$$X(f)=0,\quad U_1(f)=0,\quad U_2(f)=b_1,\quad U_3(f)=b_2,$$

получаемъ, при помощи квадратуры, уравненіе

$$f=V(t,\ x,\ y,\ z,\ b_1,\ b_2)+b,$$

гдѣ b_1, b_2 и b представляютъ три произвольныхъ постоянныхъ величины.

Стало быть, два интеграла данной системы представляются уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_1}=a_1,\quad \frac{\partial V}{\partial b_1}=a_2,$$

гдѣ a_1 и a_2—двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины.

Введемъ далѣе слѣдующее обозначеніе

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3\end{vmatrix},$$

и назовемъ черезъ Δ_{ri} миноръ послѣдняго опредѣлителя, соотвѣтствующій его элементу, расположенному на пересѣченіи r-аго столбца и i-ой строки. Поэтому, на основаніи указанныхъ выше соображеній, оба предыдущихъ интеграла представляются также въ слѣдующемъ видѣ

$$\int\left[\frac{\Delta_{12}}{\Delta}(dx-Xdt)+\frac{\Delta_{22}}{\Delta}(dy-Ydt)+\frac{\Delta_{32}}{\Delta}(dz-Zdt)\right]=a_1,$$

$$\int\left[\frac{\Delta_{13}}{\Delta}(dx-Xdt)+\frac{\Delta_{23}}{\Delta}(dy-Ydt)+\frac{\Delta_{33}}{\Delta}(dz-Zdt)\right]=a_2.$$

Предположимъ, что полученные интегралы разрѣшимы относительно перемѣнныхъ y и z. Въ такомъ случаѣ третій искомый интегралъ находится при помощи квадратуры

$$\int\frac{1}{\xi_1'}[dx-X'dt]\,a_3,$$

гдѣ a_3 обозначаетъ новую произвольную постоянную величину.

5. Въ XI томѣ *Mathematische Annalen* (p. 521) С. Ли приложилъ къ рѣшенію своей задачи, изслѣдованной въ главѣ VIII-ой настоящаго сочиненія, теорію группъ безконечно-малыхъ преобразованій. Развитыя выше соображенія позволяютъ также и здѣсь внести упрощенія въ изложеніе С. Ли и приводятъ рѣшеніе разсматриваемой задачи къ приложенію теоремы Якоби-Ліувилля.

Возвращаемся къ системѣ m уравненій съ частными производными въ инволюціи

$$\left.\begin{matrix}F_i(x_1,\ x_2,\dots x_n,\ p_1,\ p_2\dots p_n)=0,\\ i=1,\ 2,\dots m,\end{matrix}\right\}\tag{15}$$

удовлетворяющихъ условію

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2,\dots F_m}{p_1,\ p_2,\dots p_m}\right)\gtrless 0.$$

Предположимъ, что соотвѣтствущая система линейныхъ уравненій въ инволюціи

$$(F_i,\ f)=0,\qquad i=1,\ 2,\dots m,\tag{16}$$

имѣетъ $m+r$ различныхъ интеграловъ

$$F_1,\ F_2,\dots F_m,\ f_1,\ f_2,\dots f_r,\quad (r<2n-2m)\tag{17}$$

образующихъ *функціональную группу*, съ $m+q$ *существенными функціями.*

Очевидно, что каждое выраженіе

$$U_k(f)\equiv(f_k,\ f)$$

представляетъ безконечно-малое преобразованіе системы уравненій (16). Что же касается безконечно-малыхъ преобразованій

$$V_1(f),\ V_2(f),\dots V_q(f),\tag{18}$$

составленныхъ въ VIII главѣ (см. $n^o 2$), то они уничтожаются для значеній f, представленыхъ рядомъ интеграловъ (17), и кромѣ того образуютъ группу безконечно-малыхъ преобразованій въ инволюціи [1]).

Какъ и раньше (см. loc. c.), при помощи послѣдовательныхъ интегрированій, находимъ рядъ $n-m-q-\varrho$ различныхъ интеграловъ въ инволюціи системы уравненій (16)

$$f_{r+1},\ f_{r+2}, \dots f_{n-m+\rho} \tag{19}$$

и составляемъ $n-m-q-\varrho$ новыхъ безконечно-малыхъ преобразованій

$$V_{q+1}(f),\ V_{q+1}(f), \dots V_{n-m+\rho}(f). \tag{20}$$

Всѣ выраженія (18) и (20) образуютъ группу $n-m-\varrho$ безконечно-малыхъ преобразованій въ инволюціи, которыя кромѣ того уничтожаются для всѣхъ значеній интеграловъ (17) и (19) системы линейныхъ уравненій (16). Это послѣднее соображеніе является весьма существеннымъ для дальнѣйшаго изложеиія.

Предполагая интегралы (17) и (19) различными относительно перемѣнныхъ $x_{n-\rho+1}, x_{n-\rho+2}, \dots x_n,\ p_1,\ p_2, \dots p_n$, принимаемъ функціи (17) и (19) за новыя перемѣнныя величины вмѣсто послѣднихъ перемѣнныхъ. Само собою разумѣется, что уравненія (16) преобразовываются въ уравненія слѣдующаго вида

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{n-m-\rho} X_{si} \frac{\partial f}{\partial x_{m+s}} = 0, \quad i=1,\dots m,\right\} \tag{21}$$

и группа ихъ $n-m-\varrho$ безконечно-малыхъ преобразованій становится

$$V'_\sigma f \equiv \sum_{s=1}^{n-m-\rho} \xi_{s\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_{m+s}}, \quad \sigma = 1, 2, \dots n-m-\rho,$$

гдѣ всѣ коэффиценты X_{si}, $\xi_{s\sigma}$ зависятъ отъ перемѣнныхъ величинъ $x_1, x_2, \dots x_{n-\rho}$ и отъ значеній $F_1, F_2, \dots F_m, f_1, f_2, \dots f_{n-m+\rho}$, которыя разсматриваются какъ постоянныя величины. Въ такомъ случаѣ интегрированіе системы (21) заканчивается при помощи одной только квадратуры. Въ самомъ дѣлѣ, введемъ обозначеніе

[1]) Ср. *E. Goursat.—Leçons sur l'intégration...* p. 50—51 и мое изслѣдованіе: *Etude sur les transformations infinitésimales (Journal Jordan 1905, p. 74—75).*

$$D \equiv \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \dots & \xi_{n-m-\rho,1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \dots & \xi_{n-m-\rho,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1,n-m-\rho} & \xi_{2,n-m-\rho} & \dots & \xi_{n-m-\rho,n-m-\rho} \end{vmatrix}$$

и назовем через D_{si} минор последнего опре=делителя, соответствующий его элементу ξ_{si}

Проинтегрировав точный дифферен=циал

$$df = \sum_{s=1}^{n-m-\rho} \sum_{k=1}^{n-m-\rho} b_k \frac{D_{sk}}{D}\left(dx_{m+s} - \sum_{i=1}^{m} X_{si}\, dx\right)$$

представим искомые интегралы сле=дующими формулами

$$\frac{\partial f}{\partial b_k}, \quad k=1,2,\dots n-m-\rho$$

или при помощи следующих квадратур

$$\int \sum_{s=1}^{n-m-\rho} \frac{D_{sk}}{D}\left(dx_{m+s} - \sum_{i=1}^{m} X_{si}\, dx_i\right)$$

$$k=1,2,\dots n-m-\rho$$

Затем интегрирование дифференци=альных уравнений с частными производ=ными (15) совершается на основании тео=рии характеристик. (Соб. Х.М.О. т. $\underline{X}$ б1)