

Л. ШИФФ

# КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

*Перевод с английского*

Г. А. ЗАЙЦЕВА

*Издание второе*

\*

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, 1959

## А Н Н О Т А Ц И Я

Книга является одним из лучших, пользующихся широкой известностью, зарубежных курсов квантовой механики. Автор подробно останавливается на физических основах квантовой механики, излагает ее математический аппарат и дает много конкретных примеров и задач, иллюстрирующих общие идеи и методы. От обычных курсов этой дисциплины книга отличается тем, что знакомит в доступной форме также и с релятивистской квантовой механикой и может служить введением к изучению квантовой электродинамики и теории поля.

Книга рассчитана на широкий круг физиков (теоретиков и экспериментаторов), химиков, математиков — как научных работников и преподавателей, так и аспирантов и студентов.

## О Т Р Е Д А К Ц И И

Предлагаемая вниманию читателей книга Л. Шиффа давно уже завоевала себе популярность за рубежом, превратившись, например, в США фактически в основной учебник квантовой механики.

Эта популярность не случайна, а связана с целым рядом достоинств книги, делающих ее интересной и для советского читателя. При сравнительно небольшом объеме труд Л. Шиффа охватывает чрезвычайно широкий круг вопросов — от элементарных основ квантовой физики до простейших проблем современной квантовой теории поля. Эта „емкость” достигнута за счет удачного стиля изложения, когда вычислительной стороне дела отводится лишь минимально необходимое место, а основное внимание сосредоточивается на выяснении физической сущности явления (что делается, как правило, на высоком педагогическом уровне). Значительную часть выкладок читателю предоставляется произвести самому; в более сложных случаях он отсылается к математическим трудам. Однако, даже принимая ряд математических результатов автора „на веру”, читатель все же не теряет нити изложения и получает ясное представление о том, как соответствующие расчеты могли бы быть произведены. Это делает книгу полезной не только для теоретиков, но и для экспериментаторов.

Нужно заметить также, что основное внимание автор уделяет разбору конкретных физических проблем; вопросы обоснования квантовой механики играют в книге сугубо подчиненную роль. Однако там, где автор касается этих вопросов, изложение ведется с наиболее распространенной среди зарубежных физиков точки зрения так называемой „копенгагенской школы”.

Идущая уже много лет дискуссия о принципах квантовой механики связана прежде всего с интерпретацией ее вероятностного характера в применении к отдельным микрочастицам. Кстати заметим, что вероятностный характер квантовой механики ни в коей мере нельзя трактовать как проявление индетерминизма в микромире; вероятностные закономерности квантовой механики можно рассматривать как обобщение классического детерминизма.

В существовавших до появления квантовой механики статистических теориях вероятностный характер физических законов

был фактически результатом усреднения физических величин по каким-то скрытым параметрам, которые в окончательной теории отсутствовали.

Точка зрения представителей копенгагенской школы фактически сводится к тому, что мы никогда не сможем вскрыть причины, приводящие к статистическим закономерностям квантовой механики. Принцип дополнительности подвел под это положение позитивистский фундамент. В самом деле, согласно принципу дополнительности на пути познания микромира существует непреодолимый барьер, поскольку микромир мы можем изучать лишь при помощи приборов, влияние которых на изучаемое явление при одновременном измерении двух канонических сопряженных величин (например, координаты и импульса) нельзя сделать сколь угодно малым. Поэтому представители „копенгагенской школы” считают, что не следует делать даже никаких попыток для того, чтобы понять вероятностный характер квантовой механики. Однако у нас и за рубежом возникла и теперь особенно энергично начинает развиваться и другая точка зрения, согласно которой следует попытаться выйти за рамки квантовой механики Гейзенберга—Шредингера с тем, чтобы найти объяснение статистическим закономерностям явлений микромира (Бом, Де-Бройль, Вижье, Яноши, Терлецкий и др.). Будущая теория, конечно, должна не только содержать результаты квантовой механики, но и давать новые результаты, например, в области расстояний  $10^{-13}$ — $10^{-14}$  см, где уже должна сказываться структура элементарных частиц и т. д. Несмотря на то, что предлагаемые конкретные варианты носят пока что предварительный характер и естественно вызывают много возражений, принципиальная сторона такого подхода, несомненно, заслуживает внимания. Все эти теории не должны затрагивать конкретных результатов квантовой механики, которую по-прежнему следует излагать в ее вероятностной интерпретации, что и делается в книге Шиффа.

Каждая глава сопровождается рядом задач, как правило, дополняющих ее содержание; некоторые из задач представляют и самостоятельный интерес.

В то же время следует подчеркнуть, что ряд вопросов в книге не рассматривается вообще, например квантовая теория твердого тела, методы теории групп в квантовой механике.

В целом книга написана живо, с большим педагогическим мастерством. Мы надеемся, что она будет встречена с интересом широким кругом советских читателей.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга преследует следующие три цели: разъяснить физические принципы квантовой механики, изложить ее математический аппарат и дать примеры, иллюстрирующие соответствующие идеи и методы. Книга предназначена в качестве пособия для аспирантов, но может служить и справочником. Предполагается, что читатель достаточно глубоко знаком со строением атома, классической механикой и с дифференциальными уравнениями. Кроме того, он должен иметь некоторые познания в области электромагнитной теории. Наконец, для чтения последних глав книги необходимо знакомство со специальной теорией относительности.

Автор надеется, что используемые им аналитические методы удовлетворят большинство физиков-теоретиков, хотя он и не пытался достичь полной математической строгости. Например, совсем или почти совсем не обосновываются такие операции, как изменение порядка суммирования, дифференцирования, интегрирования, не дается также обоснование применения  $\delta$ -функции. Вместе с тем везде, где возможно, исследуются физические предположения, лежащие в основе получаемых результатов.

В конце каждой главы приводятся задачи. Зачастую они служат иллюстрацией или добавлением к вопросам, рассмотренным в тексте. В книге дается ряд ссылок на оригинальные теоретические работы; однако список литературы отнюдь не является исчерпывающим, а содержит лишь наиболее характерные работы. Экспериментальные результаты приводятся большей частью без указания источников, так как большое число ссылок на экспериментальные работы представляется неуместным в книге по теоретической физике. Приводятся ссылки на некоторые другие книги по квантовой механике и смежным с ней дисциплинам, где можно найти более подробное обсуждение отдельных вопросов.

Чтобы дать наиболее точное представление о книге, лучше всего разделить ее на три части. Первые три главы служат введением в квантовую механику; в них обсуждаются физические основы квантовой механики и развивается волновой формализм Шредингера. Детальное обсуждение свойств волновой функции (гл. III) при первом чтении можно опустить. Следующие восемь

глав составляют центральную часть книги. В них приводятся точные решения волнового уравнения (как для задач об определении уровней энергии, так и для задач о столкновениях), развивается матричный аппарат Гейзенберга и теория преобразований, рассматриваются приближенные методы расчета, теория излучения и некоторые применения к атомным системам. Поскольку первые одиннадцать глав соответствуют обычному одногодичному курсу для аспирантов, в центральную часть книги включено и полуклассическое изложение теории излучения (гл. X), хотя некоторые из полученных там результатов снова выводятся в гл. XIV. Последняя часть книги представляет собой краткое изложение предмета, часто именуемого высшей квантовой механикой („advanced quantum mechanics”). Она содержит релятивистскую теорию частиц и введение в квантовую теорию поля и квантовую электродинамику.

Со времени подготовки первого издания не произошло никаких изменений в основных принципах, на которых базируются первые 48 параграфов книги, посвященные квантовой механике частиц и свободных полей. Этого, однако, нельзя сказать о последних двух разделах, представляющих собой введение в квантовую механику взаимодействующих волновых полей. Положения, лежащие в основе этих разделов, подвергались коренному пересмотру в связи с созданием и успешным применением ковариантных методов перенормировки, особенно в квантовой электродинамике. Тем не менее, тщательно обдумав этот вопрос, автор решил не менять изложения § 49 и 50. Отчасти это связано с тем, что последовательное изложение ковариантной теории поля заняло бы слишком много места, а отчасти с тем, что в настоящее время об этих вопросах должен писать тот, кто принимал активное участие в их развитии. Кроме того, автору кажется, что настоящее изложение может быть полезно в том отношении, что оно дает изучающему твердую основу для изучения более новых работ.

При пересмотре книги были внесены некоторые изменения, часть которых связана с усовершенствованиями методов вычисления, сделанными в последние годы. К числу более важных дополнений относятся: описание опыта по определению импульса (§ 4), соотношение между полным эффективным сечением рассеяния и амплитудой рассеяния вперед (§ 19), теорема вириала (§ 23), определение момента количества движения с помощью бесконечно малых вращений (§ 24), функция Грина и интегральное уравнение для радиальной волновой функции (§ 26), вариационный принцип для фаз рассеянных волн (§ 27), фотоэффект и применение сходящихся сферических волн в конечном состоянии (§ 37), теория эффективного радиуса для системы нейтрон — протон (§ 41). В § 41 значительно сокращено обсуждение свойств ядра. Опущены две старые задачи и добавлено семнадцать новых.

В связи с выходом первого издания настоящей книги автор выражает особую благодарность проф. Оппенгеймеру за некоторые идеи и примеры, которые помогли придать книге данную форму, проф. Серберу за многочисленные обсуждения логических и формальных аспектов квантовой механики и д-ру Харнуэллу за постоянную поддержку в процессе работы над книгой. Автор также благодарен некоторым рецензентам и отдельным лицам, изучавшим первое издание книги, за предложения, которые помогли при подготовке нового издания.

*Л. Шифф.*





---

**ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ**

На современной ступени человеческого знания квантовую механику можно рассматривать как основную теорию атомных явлений. Опытные факты, на которых она основывается, отражают физические процессы, почти полностью лежащие за пределами непосредственного человеческого восприятия. Поэтому нет ничего удивительного в том, что теория содержит физические понятия, чуждые повседневному опыту. Однако в процессе развития квантовой механики эти понятия возникли лишь после того, как был создан полный математический формализм. В данном случае необходимость количественного сравнения с опытом, дающим окончательный критерий истинности любой физической теории, привела прежде всего к созданию формализма и лишь затем к его интерпретации в терминах физических понятий.

При изложении квантовой механики представляется целесообразным отойти от исторической последовательности и предпослать математическим построениям обсуждение физических понятий. В настоящей главе мы прежде всего дадим краткий обзор экспериментальных основ и идей старой квантовой теории, затем обсудим более новые физические концепции неопределенности и дополнительности<sup>1)</sup> и, наконец, зложим основы формализма, который (в наиболее привычном его виде) будет развит в гл. II. Мы не будем пытаться с необходимостью выводить формализм теории из основных опытов; цель состоит в том, чтобы сделать теоретические построения не столько единственно возможными, сколько физически естественными.

---

<sup>1)</sup> Здесь и в некоторых других местах книги автор строит изложение в духе так называемого принципа дополнительности. Как известно, эта интерпретация идейных основ квантовой механики (в отличие от результатов последней) отнюдь не связана с основами теории и встречает серьезные возражения как методологического, так и физического характера. Имея в виду, что в данной книге эти вопросы имеют второстепенное значение и не влияют на изложение конкретных вопросов (составляющее основное содержание книги), было сочтено возможным не вступать здесь в полемику с автором, ограничиваясь лишь замечаниями, высказанными в предисловии и примечаниях (см. также [14, 16—18]). — *Прим. перев.*

Таким образом, обоснование теории будет состоять в согласии ее выводов с опытом, а также в простоте (не столь практической, сколь принципиальной) и непротиворечивости формализма.

## § 1. Экспериментальные основы

Экспериментальная физика накопила к 1900 г. сведения о весьма большом числе самых разнообразных явлений. Было принято считать, что большинство из них допускает объяснение в рамках той теории, которую мы называем теперь *классической* теоретической физикой. С помощью уравнений Ньютона были успешно объяснены движения механических объектов, как земных, так и небесных. Применение классической механики к молекулярным движениям привело к ряду важных результатов в кинетической теории газов, а открытие Томсоном электрона в 1897 г. свелось к установлению того факта, что он ведет себя как ньютоновская частица. Дифракционные опыты Юнга, выполненные в 1803 г., определенно указывали на волновую природу света; еще более прочную основу волновая теория света получила после того, как Максвелл в 1864 г. открыл связь между оптическими и электрическими явлениями.

**Недостаточность классической физики.** Затруднения в интерпретации экспериментальных результатов, оставшиеся к началу нашего столетия, были связаны главным образом с необходимостью создания подходящей модели атома, а также с новейшими открытиями рентгеновских лучей и радиоактивности. Были, однако, и трудности, связанные с явлениями, которые, казалось бы, должны были получить объяснение в рамках существовавшей теории, но фактически такового не получили. Сюда относятся спектральное распределение теплого излучения черного тела, удельная теплоемкость твердых веществ при низкой температуре и наличие у свободных двухатомных молекул только 5 степеней свободы при обычной температуре.

Основу для разрешения трудностей второго типа заложил в 1900 г. Планк, сумевший объяснить спектр излучения черного тела с помощью допущения о том, что электромагнитное излучение испускается и поглощается дискретными порциями — *квантами*; энергия последних  $E$  была принята равной произведению частоты излучения  $\nu$  на универсальную постоянную  $h$  (так называемую *постоянную Планка*):

$$E = h\nu. \quad (1.1)$$

Позднее Эйнштейн использовал представление о квантах для объяснения некоторых экспериментально найденных закономерностей фотоэффекта. Таким путем был установлен двойственный

характер электромагнитного излучения: иногда оно ведет себя как система волн, а иногда — как поток квантов-корпускул.

Примерно в это же время стало очевидным, что не только в электромагнитном излучении, но и в атомных системах многие экспериментально измеряемые параметры принимают лишь дискретные значения. Пониманию этого способствовали теория удельных теплоемкостей твердых тел Эйнштейна и Дебая, классификация спектральных линий, данная Ритцем, опыт Франка и Герца, показавший, что при столкновениях электронов с атомами энергия электронов изменяется дискретными порциями, и, наконец, проведенный несколько позднее опыт Штерна и Герлаха, который показал, что компоненты магнитного момента атома в направлении внешнего магнитного поля имеют дискретные значения.

### Сводка основных опытов и следствий, из них вытекающих.

Таким образом, в первой четверти настоящего столетия теоретическая физика, обобщая данные опыта, пришла к следующим двум важным выводам (не известным в 1900 г.): к представлению о двойственном характере электромагнитного излучения и к утверждению о существовании дискретных значений физических величин. Связь между основными экспериментальными открытиями и теоретическими выводами схематически представлена в табл. 1. Более подробное обсуждение и библиографию можно найти в книгах по атомной физике (см., например, работы [1—3]<sup>1)</sup>).

Таблица 1

#### Связь между результатами опыта и теоретическими выводами

Диффракция (Юнг 1803, Лауз 1912)	}	.....	{ Электромагнитные волны
Тепловое излучение черного тела (Планк 1900)			
Фотоэффект (Эйнштейн 1904)	}	.....	{ Электромагнитные кванты
Эффект Комптона (1923)			
Комбинационный принцип (Ритц, Ридберг 1908)	}	.....	{ Дискретные значения физических величин
Удельные теплоемкости (Эйнштейн 1907, Дебай 1912)			
Опыт Франка и Герца (1913)			
Опыт Штерна и Герлаха (1922)			

Третья идея, появившаяся в 1924 г., связана с именем де Бройля. Последний предположил, что природа вещества также является двойственной (корпускулярной и волновой) и что им-

<sup>1)</sup> См. также книгу Шпольского [13]. — Прим. перев.

пульс частицы  $p$  связан с длиной соответствующей волны  $\lambda$  соотношением<sup>1)</sup>

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (1.2)$$

Все известные к тому времени факты свидетельствовали в пользу того, что вещество состоит из дискретных частиц, подчиняющихся механике Ньютона. Так, например, в камере Вильсона (изобретенной в 1911 г.) наблюдались отчетливые следы заряженных частиц — электронов, ядер гелия и т. д. Однако вскоре после этого Девиссон и Джермер (1927 г.) и независимо от них Томсон (1928 г.) наблюдали дифракцию электронов на кристаллах, подтвердив тем самым главную гипотезу де Бройля.

## § 2. Старая квантовая теория

Основой так называемой *старой квантовой теории*<sup>2)</sup> послужила работа Планка об излучении черного тела, развитая далее Эйнштейном и Дебаем. Однако эту теорию можно было применить для количественного описания атомов только после открытия Резерфорда (1911 г.). Резерфорд показал, что атом состоит из маленького массивного положительно заряженного ядра, окруженного электронами.

**Правила квантования Бора — Зоммерфельда.** Первый шаг в этом направлении был сделан в 1913 г. Бором, сформулировавшим два постулата об электронной или внеядерной структуре атома. Согласно первому постулату, атомная система может находиться в особых стационарных или квантовых состояниях, каждое из которых соответствует определенной энергии системы. Переход из одного состояния в другое сопровождается приобретением или потерей соответствующей разности энергий. Последняя может отдаваться (или приобретаться) либо в форме кванта излучения, либо в форме кинетической или внутренней энергии какой-нибудь другой системы. Согласно второму постулату, частота кванта излучения, в согласии с работами Планка и Эйнштейна, равна его энергии, деленной на постоянную Планка  $h$ .

Два эти постулата уже позволяют кое-что понять в комбинационном принципе Ритца и опыте Франка — Герца. Чтобы

<sup>1)</sup> Соотношение (1.2) справедливо также для квантов света, в чем легко убедиться, поделив обе части равенства на скорость света  $c$ ; для направленного пучка света  $p = E/c$  и  $\lambda = c/v$ .

<sup>2)</sup> Более подробное обсуждение вопросов, рассматриваемых в настоящем разделе, можно найти, кроме цитированных выше работ, также в книге Паулинга и Вильсона [4].

получить конкретные результаты для водорода, Бор предложил простое правило для определения круговых орбит, соответствующих стационарным состояниям. Согласно этому правилу, момент количества движения должен равняться целому кратному  $h/2\pi$ . Более общее правило квантования открыли независимо друг от друга Вильсон (1915 г.) и Зоммерфельд (1916 г.); это позволило применить постулаты Бора к более широкому классу атомных систем. Правило применимо к системам, подчиняющимся уравнениям Гамильтона, причем обобщенные координаты должны быть циклическими переменными. Оно гласит, что интеграл от канонического импульса, взятый по всему циклу изменения соответствующей координаты, должен составлять целое кратное  $h$ . Это правило с немалым успехом было применено для расчета тонкой структуры атома водорода, объяснения спектров двухатомных молекул, а также для решения ряда других задач.

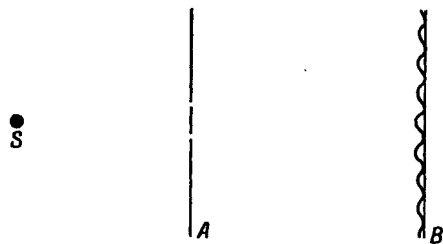
**Практические трудности.** Старая квантовая теория столкнулась с рядом практических трудностей. Так, ее нельзя было применить к аperiодическим системам; она давала лишь качественное и неполное объяснение интенсивности спектральных линий; наконец, она не давала удовлетворительного объяснения дисперсии света. Более того, по мере улучшения экспериментальной техники выяснилось, что в некоторых случаях, например в задаче об истолковании вращательных спектров некоторых двухатомных молекул, теория определенно приводит к однозначным, но ошибочным выводам.

Чтобы при описании свойств атомных систем, в особенности при расчете интенсивностей спектральных линий, можно было использовать некоторые данные классической теории, Бор в 1923 г. ввел принцип соответствия. Таким путем был получен ряд ценных результатов, но все же в начале двадцатых годов стало очевидным, что квантовая теория в существовавшей тогда форме является неудовлетворительной.

**Логические трудности.** Помимо указанных выше практических трудностей, старой квантовой теории не удалось дать логически удовлетворительного объяснения основных явлений. Трудно было понять, почему должно быть эффективным электростатическое взаимодействие электрона с ядром атома водорода, если электрон в стационарном состоянии теряет возможность испускать электромагнитное излучение, несмотря на наличие ускорения. Оставался неясным механизм испускания и поглощения света при переходах между стационарными состояниями. Правила квантования оставались произвольными даже там, где они были наиболее эффективными. Наконец, идея о двойственной природе света, ведущего себя

как частицы в процессах испускания и поглощения и как волны в процессах распространения, казалась внутренне противоречивой.

Для иллюстрации возникающих логических трудностей, а также для демонстрации того, каким путем они преодолеваются новой квантовой механикой, рассмотрим более подробно простой дифракционный опыт, схематически представленный на фиг. 1. Источник света  $S$  освещает диафрагму  $A$ , в которой прорезаны две щели. На фоточувствительном экране  $B$  возникает дифракционная картина, причем



Фиг. 1. Дифракционный опыт.

Свет от источника  $S$  проходит через две щели в диафрагме  $A$  и образует дифракционную картину на экране  $B$ .

в местах дифракционных максимумов вырывается наибольшее число фотоэлектронов. В данном случае при движении от источника света (через щели) до экрана излучение ведет себя как волна, однако при вырывании электронов из экрана  $B$  оно ведет себя как поток световых квантов (фотонов). В настоящее время мы знаем, что подобный эксперимент можно провести не

только с излучением, но и с частицами. Дифракционную картину, возникающую при рассеянии электронов от кристалла (играющего роль щелей в  $A$ ), можно обнаружить, изучая следы электронов в камере Вильсона (которая играет роль экрана  $B$ ). Таким образом, в одном и том же опыте проявляются как волновые, так и корпускулярные свойства света и вещества.

На первый взгляд могло бы показаться, что дифракционную картину, изображенную на фиг. 1, можно объяснить интерференцией между различными фотонами, проходящими через щели, т. е. только в рамках корпускулярных представлений. В несостоятельности подобного объяснения можно убедиться, уменьшая интенсивность света до таких пределов, когда в любой момент времени между источником и экраном будет находиться в среднем только один фотон. В этом случае распределение множества фотонов, попавших на экран за достаточно большой промежуток времени, по-прежнему будет определяться дифракционной картиной. Таким образом, мы приходим к выводу, что диффракция представляет собой статистическое свойство отдельного фотона, а не результат взаимодействия фотонов друг с другом. В рамках чисто корпускулярных представлений можно было бы спросить, каким образом поток независимых фотонов, каждый из которых проходит, по-видимому, только через одну из щелей,

может образовывать диффракционную картину, наблюдаемую лишь при наличии обеих щелей? Или, формулируя вопрос несколько иначе, каким образом щель, через которую фотон не проходит, не позволяет ему попасть на те места экрана, куда он мог бы попасть, если бы эта щель была закрыта?

**Точка зрения квантовой механики.** В приведенной выше формулировке вопроса молчаливо предполагается, что фотон действительно проходит через одну из двух щелей. С точки зрения классической или старой квантовой теории это допущение является естественным, ибо в них предполагается, что в любой момент времени фотон (или любая другая частица) имеет определенные координаты, доступные измерению. Современная квантовая механика, однако, отказывается от этого допущения, утверждая, что говорить о положении фотона имеет смысл лишь в том случае, когда при постановке опыта мы позаботимся об определении его положения. Более того, эта часть опыта повлияет на дальнейший его ход, и, следовательно, ее нельзя рассматривать изолированно. Таким образом, вопрос, поставленный в конце предыдущего пункта, с точки зрения квантовой механики не имеет смысла: в самой формулировке его предполагается, что фотон проходит через какую-то определенную щель (в связи с чем вторую щель в это время можно закрыть), тогда как сам опыт не позволяет определить, через какую из щелей фотон проходит в действительности.

Квантовая механика решает проблему, утверждая, что если провести достаточно тщательный опыт для определения того, через какую именно щель проходит данный фотон, то диффракционная картина вообще нарушится (см. § 4). Поэтому надо отказаться от привычного представления о фотоне (или электроны) как о классической частице, занимающей в каждый момент времени определенное положение, которое можно определить, не нарушив диффракционную картину рассматриваемого типа. В связи с этим необходимо также отказаться от классического понимания причинности, согласно которому движение частицы в любой момент времени однозначно определяется ее движением в предыдущие моменты. Новая теория, которая основывается на соображениях указанного типа, оказывается столь успешной и в других отношениях, что при существующем уровне знаний необходимость такого неполного с классической точки зрения описания следует отнести к основным свойствам природы.

### § 3. Принцип неопределенности и принцип дополнительности

Прежде чем переходить к количественному обсуждению диффракционного опыта, описанного в § 2, рассмотрим два принципа, дающие качественную характеристику физического содержания

квантовой механики. Мы ограничимся здесь обсуждением их смысла, а аргументы в пользу их справедливости рассмотрим в § 4.

**Принцип неопределенности.** Первым из них является принцип неопределенности, открытый Гейзенбергом в 1927 г. [5]. Согласно этому принципу, невозможно одновременно точно определить значения обоих членов некоторых пар физических величин, описывающих атомную систему. Члены этих пар представляют собой переменные, канонически сопряженные друг с другом в смысле Гамильтона. Примерами являются координата частицы  $x$  в прямоугольной системе и соответствующая компонента импульса  $p_x$ ;  $z$ -компонента  $J_z$  момента количества движения частицы и угол  $\varphi$  поворота в плоскости  $xu$ ; энергия частицы  $E$  и момент времени  $t$ , в который она измеряется, и т. д. В количественной формулировке принцип неопределенности утверждает, что произведение неопределенностей значений двух соответствующих переменных по порядку величины должно быть не меньше постоянной Планка  $\hbar$ , деленной на  $2\pi$  ( $\hbar = h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек [6]), так что

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim \hbar, \quad (3.1)$$

$$\Delta \varphi \cdot \Delta J_z \gtrsim \hbar, \quad (3.2)$$

$$\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \hbar. \quad (3.3)$$

Соотношение (3.1) означает, что невозможно точно определить компоненту импульса частицы, не потеряв при этом полностью всех сведений о соответствующей координате (в тот же момент времени); наоборот, невозможно точно определить координату частицы, не потеряв при этом всех сведений о соответствующей компоненте импульса. В промежуточном случае произведение неточностей одновременно измеряемых значений координаты и импульса по порядку величины должно быть не меньше  $\hbar$ . Аналогично соотношение (3.2), например, означает, что точное определение положения частицы на орбите влечет за собой потерю всех сведений о перпендикулярной плоскости орбиты компоненте момента количества движения. Соотношение (3.3) означает, что определение энергии с точностью до  $\Delta E$  должно занять интервал времени, равный по меньшей мере  $\Delta t \sim \hbar/\Delta E$ ; таким образом, если система находится в некотором состоянии в течение времени  $\Delta t$ , то энергия ее там определена с неточностью не менее  $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$ , поскольку  $\Delta t$  — наибольший промежуток времени, в течение которого можно измерять энергию. В связи с малостью постоянной Планка принцип неопределенности представляет интерес главным образом для систем атомного размера.



Как мы увидим в § 12, принцип неопределенности можно непосредственно получить из математического формализма теории; именно таким путем он и был впервые выведен Гейзенбергом.

**Принцип дополнительности.** Желая выразить смысл и значение принципа неопределенности в более „физических” терминах, Бор [7—9] в 1928 г. ввел новый *принцип дополнительности*. Согласно этому принципу, атомные явления невозможно описывать с той полнотой, какая требуется классической динамикой. Ряд величин, дополняющих друг друга и дающих полное классическое описание, фактически являются взаимно исключаящими. При этом для всестороннего описания явлений необходимо использовать все дополнительные величины. С точки зрения экспериментатора, принцип дополнительности означает, что в силу свойств физических приборов измерения, точность которых превышает требования принципа неопределенности, вообще невозможно.

Не следует смотреть на это как на результат неопытности экспериментатора или несовершенства применяемой им техники. Скорее мы имеем здесь дело с законом природы, согласно которому при попытке точно измерить одну из величин, принадлежащих к паре канонических переменных, другая величина претерпевает изменения, которые невозможно точно определить, не нарушая результатов первого измерения. Эта ситуация в корне отлична от того, что мы имеем в классической физике; в последней измерения также нарушают состояние наблюдаемой системы, но величину нарушений можно вычислить и учесть. Принцип дополнительности является, таким образом, типичным примером существенного ограничения классической точки зрения, согласно которой атомные системы можно описывать независимо от средств, с помощью которых они наблюдаются<sup>1)</sup>.

**Пределы возможной экспериментации.** Итак в атомной области необходимо делать выбор между различными экспериментальными устройствами, предназначенными для измерения членов пары канонических переменных с различной степенью точности, совмес-

<sup>1)</sup> Принцип неопределенности следует рассматривать как результат проявления объективно существующих волновых свойств частиц микромира. Этот принцип хорошо известен также и в волновой оптике; он определяет, например, связь между шириной линии и длительностью излучения. В изложении автора этот объективный характер принципа неопределенности и связанных с ним закономерностей не подчеркивается должным образом (хотя конкретные результаты правильны). С другой стороны, интерпретация принципа неопределенности с помощью концепции дополнительности (см. также примечание на стр. 11) отнюдь не навязывается опытом и не может быть признана правильной. Критику этой концепции см. в работах как советских [14, 16], так и зарубежных [18] авторов. — *Прим. перев.*

тимой с соотношениями неопределенности. В частности, существуют два предельных устройства, каждое из которых с большой точностью измеряет одну из пары величин. По классической теории предельные экспериментальные устройства подобного типа дополняют друг друга; для полного классического описания системы необходимы результаты, полученные обоими устройствами, причем эти результаты можно получать одновременно. В противоположность этому в квантовой механике предельные дополнительные опыты взаимно исключаются, и их нельзя провести совместно.

Именно в этом смысле в атомной области исчезает классическое понятие причинности. Здесь существует причинность, поскольку квантовые законы вполне определенно описывают поведение атомов, но вместе с тем отсутствуют причинные соотношения между последовательными конфигурациями атомной системы, если мы попытаемся описывать их классически.

#### § 4. Обсуждение опытов по измерению физических величин

В данном параграфе мы рассмотрим с точки зрения новой квантовой механики три довольно типичных опыта по измерению различных физических величин. Первые два служат для определения координаты и импульса частицы оптическими методами, третий представляет собой диффракционный эксперимент, описанный в § 2.

**Измерение координаты.** Рассмотрим частный пример, иллюстрирующий справедливость принципа неопределенности. Мы имеем в виду типичный метод определения координат и импульса, неоднократно обсуждавшийся в связи с вопросом об измерениях величин, характеризующих как частицы, так и поле излучения<sup>1)</sup>. Именно, определим точность, с которой можно одновременно найти координату  $x$  и соответствующую компоненту импульса частицы, наблюдая рассеиваемый ею свет через микроскоп (до некоторой степени идеализированный).

Как известно из опыта (или из волновой оптики), разрешающая способность линзы  $L$  (фиг. 2) в лучшем случае такова, что максимальная точность определения координаты составляет

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin \varepsilon}, \quad (4.1)$$

где  $\lambda$  — длина волны излучения, падающего на линзу, а  $\varepsilon$  — половина угла, проведенного из точки  $P$ , где находится частица, к краям линзы. Для простоты рассмотрим случай, когда на эк-

<sup>1)</sup> См., например, книги Гейзенберга [10] и Боме [11].

ран  $S$  попадает только один квант света  $Q$ . В силу конечности апертуры линзы точное направление движения рассеянного фотона остается неизвестным. На основании (1.2) импульс фотона после рассеяния равен  $h/\lambda$  и, следовательно, неопределенность в его  $x$ -компоненте составляет примерно  $(h/\lambda) \sin \epsilon$ .

До рассеяния  $x$ -компоненты импульсов фотона и частицы могли быть точно известны, так как тогда не было необходимости определять соответствующие координаты. Далее, коль скоро измерение координаты связано со смещением частицы относительно микроскопа, нет оснований ожидать изменения полного импульса всей системы (частицы, фотона и микроскопа). Тогда  $\Delta p_x$  — неопределенность  $x$ -компоненты импульса частицы после рассеяния равна соответствующей неопределенности для фотона:

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\lambda} \sin \epsilon. \quad (4.2)$$

Комбинируя соотношения (4.1) и (4.2), получаем, что непосредственно после рассеяния (при наиболее благоприятных условиях)

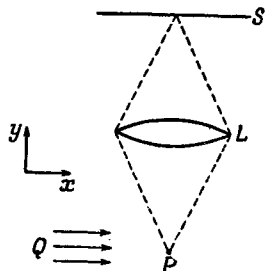
$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim h \quad (4.3)$$

в соответствии с соотношением неопределенности (3.1).

Данный опыт можно рассмотреть также с точки зрения принципа дополнительности. Дополнительные системы отличаются друг от друга длиной волны излучения: при достаточно малых  $\lambda$  можно со значительной точностью определить координату частицы, а при больших  $\lambda$  — ее импульс.

**Измерение импульса.** В только что описанном опыте по измерению координаты импульс частицы до измерения предполагался точно известным. Оказалось, что не только координата измеряется с некоторой неточностью, но, сверх того, измерение вносит также известную неопределенность и в значение импульса.

Рассмотрим теперь другой эксперимент, в начале которого точно известна координата частицы и производится измерение импульса. Мы увидим, что не только последнюю величину можно найти лишь с некоторой неточностью, но, сверх того, измерение вносит неопределенность и в значение координаты. Пусть частица представляет собой атом в возбужденном состоянии; будучи неподвижен, этот атом испускает фотон с частотой  $\nu_0$ . Вследствие эффекта Доплера при движении атома к наблюдателю со скоростью  $v$  наблюдаемая частота будет приближенно определяться



Фиг. 2. Измерение координаты частицы  $P$  с помощью одного из рассеянных квантов.

Квант  $Q$  фокусируется линзой  $L$  и дает изображение на экране  $S$ .

формулой

$$v \approx v_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \right), \quad (4.4)$$

так что

$$v \approx c \left( \frac{v}{v_0} - 1 \right). \quad (4.5)$$

Достаточно точное измерение импульса  $mv$  путем измерения частоты  $\nu$  потребует относительно большого времени  $\tau$ ; как можно показать, минимальная ошибка при определении частоты составляет

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau}. \quad (4.6)$$

Таким образом, момент испускания фотона можно определить лишь с точностью до величины  $\tau$ . В этот момент импульс атома уменьшается на  $h\nu/c$ , а его скорость — на  $h\nu/mc$ . Соответственно в координату атома вносится неопределенность

$$\Delta x = \frac{h\nu\tau}{mc}, \quad (4.7)$$

ибо чем позднее испускается фотон, тем дольше атом имеет большую скорость и тем дальше он пройдет. Эта неопределенность возникает в силу конечности времени  $\tau$ . Если бы  $\tau$  было равно нулю и если бы мы знали начальную скорость атома и изменение скорости при испускании фотона, то мы могли бы узнать, где находится атом в любой момент времени. Именно в силу конечности  $\tau$  мы не знаем, когда происходит изменение скорости, и, следовательно, не знаем и местоположения атома в более поздние моменты времени.

Неопределенность импульса, в силу (4.5) и (4.6), составляет

$$\Delta p_x = m \Delta v \approx \frac{mc \Delta\nu}{v_0} \sim \frac{mc}{v_0\tau}. \quad (4.8)$$

В рассмотренном здесь нерелятивистском случае  $v/c \ll 1$  и  $v \approx v_0$ . Таким образом, комбинируя (4.7) и (4.8), мы получаем соотношение неопределенности (3.1).

**Диффракционный опыт.** Проанализируем в заключение диффракционный опыт (§ 2), исходя из принципов дополнительности и неопределенности. Именно, обсудим вопрос о двух противоположных устройствах, которые, с классической точки зрения, взаимно дополняют друг друга. Одно из них изображено на фиг. 1. Допустим, что расстояние от  $A$  до  $B$  велико по сравнению с расстоянием между обеими щелями, а последнее — велико по сравнению с длиной световой волны. Тогда распределение интенсивности в диффракционной картине на экране с хорошим прибли-

жением определяет угловое распределение фотонов, проходящих через щели в диафрагме, и, следовательно, определяет также распределение  $y$ -компонент импульса фотона за диафрагмой. Второе устройство, изображенное на фиг. 3, позволяет определить, через какую именно щель проходит фотон, и, следовательно, дает сведения об  $y$ -координате фотона.

Во втором устройстве фотон, проходящий через щель, регистрируется одним из индикаторов  $C$ , расположенных вблизи диафрагмы, передавая ему некоторый импульс в направлении оси  $y$  (с неопределенностью  $\Delta p_y$ ). Коль скоро мы не желаем нарушить дифракционную картину, создаваемую большим числом таких фотонов, неопределенность импульса отдельного фотона, возникающая при столкновении его с индикатором, должна быть значительно меньше импульса, необходимого для попадания фотона в соседний дифракционный минимум (вместо максимума). Для фотона с импульсом  $p_x$  это означает, что

$$\Delta p_y \ll \theta p_x. \quad (4.9)$$

В рассматриваемом простом случае, когда  $R \gg a \gg \lambda$ , угол  $\theta$ , как известно из волновой оптики (или из опыта), можно выразить через длину волны  $\lambda$  и расстояние между щелями  $a$ :

$$\theta = \frac{\lambda}{2a}. \quad (4.10)$$

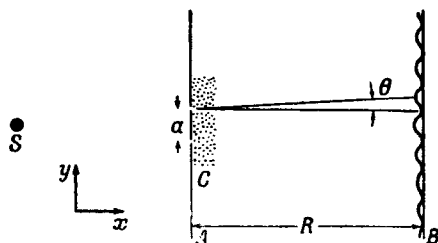
С другой стороны, если неопределенность  $\Delta y$  в  $y$ -координате индикатора окажется больше половины расстояния между щелями, то мы не сможем узнать, через какую из щелей прошел фотон. Это дает условие

$$\Delta y < \frac{1}{2} a. \quad (4.11)$$

Комбинируя выражения (4.9)—(4.11) и (1.2), видим, что попытка определить, не разрушая дифракционную картину на экране  $B$ , через какую именно щель прошел фотон, возможна лишь при условии

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \ll \frac{1}{4} h. \quad (4.12)$$

Но это неравенство противоречит соотношению неопределенности (3.1). Следовательно, не разрушая дифракционную картину, невозможно определить, через какую щель проходит фотон.



Фиг. 3. Установка, изображенная на фиг. 1, с добавлением индикатора квантов  $C$ .

**Обсуждение диффракционного опыта.** Только что рассмотренные соображения выявляют тесную связь между принципами неопределенности и дополнителности, с одной стороны, и опытами по диффракции и по измерению координат — с другой<sup>1)</sup>. Мы имеем здесь наглядное подтверждение справедливости принципа дополнителности, взятого в сочетании с наблюдаемыми на опыте свойствами вещества и излучения (дополнителность в данном случае состоит в необходимости выбора между двумя взаимно исключающими друг друга, но классически дополнительными опытами по диффракции и локализации частиц). Из изложенного следует, что представление о фотонах не приводит к существенным трудностям только до тех пор, пока мы не настаиваем на таком же детальном описании, как и в классической физике.

Разумеется, для объяснения данных опыта все же приходится приписывать фотонам необычные свойства; приведенные выше соображения не разъясняют, каким образом фотон может интерферировать сам с собой при образовании диффракционной картины<sup>2)</sup>. Равным образом остается неясным, каким путем электромагнитные волны могут вырывать фотоэлектроны из экрана<sup>3)</sup>. Эти вопросы лежат за пределами качественных рассуждений настоящей главы; они требуют применения математического аппарата квантовой механики. Тем не менее квантовомеханическое рассмотрение диффракционного опыта позволяет устранить трудность, с которой мы встретились в § 2: при успешной попытке определить, через какую именно щель проходит фотон, диффракционная картина исчезает.

## § 5. Волновые пакеты в пространстве и во времени

Соотношение (1.2) между импульсом и длиной волны, справедливость которого доказана экспериментально как для фотонов, так и для частиц вещества, наводит на мысль о том, что для описания локализованных частиц и квантов можно было бы воспользоваться волновыми образованиями, занимающими небольшую область пространства. Для разъяснения этой идеи рассмотрим *волновую функцию*  $\psi$ , зависящую от пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и от времени  $t$ . Предполагается, что она обладает следующими тремя основными свойствами: 1) она может интерферировать сама с собой, что позволяет объяснить результаты диффракцион-

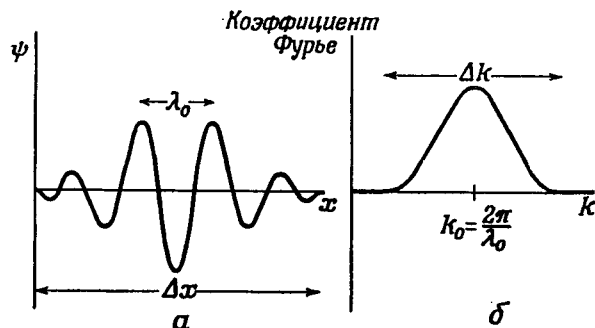
1) Фактически соображения дополнителности не играют здесь никакой роли. — *Прим. перев.*

2) В гл. VI будет показано, что волновые представления, излагаемые в гл. II, эквивалентны общей квантовомеханической теории вещества.

3) В гл. XIV будет показано, каким образом можно видоизменить теорию электромагнитного поля так, чтобы она включала и квантовые эффекты.

ных опытов; 2) ее абсолютное значение велико там, где наиболее вероятно нахождение частицы (или фотона), и мало в остальных местах; 3)  $\psi$  следует рассматривать как функцию, описывающую поведение отдельной частицы (или фотона), а не как характеристику статистического распределения многих квантов. Последнее свойство существенно, поскольку в § 2 было показано, что квант вещества или излучения интерферирует не с другими квантами, а сам с собой. В настоящем разделе мы ограничимся лишь качественным обсуждением одномерного случая, когда волновая функция  $\psi$  зависит только от  $x$  и  $t$ ; количественное рассмотрение будет отложено до гл. II.

**Пространственные пакеты.** Волновые образования, занимающие ограниченную область пространства, мы будем называть *волновыми пакетами*<sup>1)</sup>. Типичный пакет изображен на фиг. 4, а, где



Ф и г. 4. Графики функции  $\psi(x)$ , характеризующей типичный волновой пакет (а), и его преобразования Фурье (б).

представлена зависимость  $\psi(x, t)$  от  $x$  для данного момента времени  $t$ . На фигуре показаны средняя длина волны  $\lambda_0$  и приближительные размеры пакета  $\Delta x$ . В связи с исследованием волновых пакетов представляет интерес разложение  $\psi$  в интеграл Фурье<sup>2)</sup> по  $x$ , так как при этом выясняется, каким образом можно составить пакет, суммируя гармоники с различными длинами волн. Это показано на фиг. 4, б, где графически изображена зависимость коэффициентов Фурье функции  $\psi$  от волнового числа  $k = 2\pi/\lambda$ .

<sup>1)</sup> Коль скоро речь идет об ограниченном интервале времени, чаще употребляется термин „группа волн“, который будет использоваться и в этой книге. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> См., например, книгу [12] (или [15]). — *Прим. перев.*

С помощью стандартных математических методов можно показать, что

$$\Delta k \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad (5.1)$$

где  $\Delta k$  приближенно характеризует разброс волновых чисел в пакете. Если считать, что длина волны связана с импульсом соотношением (1.2), то разбросу  $\Delta k$  будет соответствовать разброс импульса

$$\Delta p = \Delta \left( \frac{h}{\lambda} \right) = \frac{h}{2\pi} \Delta k = \hbar \cdot \Delta k. \quad (5.2)$$

Сопоставление уравнений (5.1) и (5.2) дает

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar, \quad (5.3)$$

что согласуется с соотношением неопределенности (3.1). Таким образом, принцип неопределенности для координаты и импульса непосредственно вытекает из свойств волнового пакета и соотношения (1.2).

**Временные пакеты.** Аналогичным путем можно исследовать зависимость  $\psi$  от времени  $t$  в некоторой точке  $x$ . Преобразование Фурье (по  $t$ ) будет показывать в данном случае, каким образом  $\psi$  образуется из непрерывной последовательности гармонических волн с различными частотами  $\nu$ . Соотношение между интервалом времени и разбросом коэффициентов Фурье по частотам дается формулой

$$\Delta t \cdot \Delta \nu \gtrsim \frac{1}{2\pi}. \quad (5.4)$$

Используя связь энергии кванта  $E$  с частотой волны [соотношение (1.1)], можно привести (5.4) в соответствие с принципом неопределенности. Именно, определим связь между энергией и частотой равенством (1.1):

$$E = h\nu \quad (5.5)$$

(в случае фотонов оно вытекает из опытов, описанных в § 1). Сопоставление (5.4) и (5.5) приводит к соотношению неопределенности (3.3).

Предположение о справедливости формулы (5.5) не только для излучения, но и для вещества можно сделать более убедительным, если вычислить групповую скорость<sup>1)</sup> волнового пакета, характеризующего нерелятивистскую частицу с массой  $m$ , кинетической энергией  $E$  и импульсом  $p$ . Пусть длина волны и частота определяются соответственно формулами (1.2) и (5.5); тогда

<sup>1)</sup> См. книгу Борна [2], стр. 88 и 330.



групповая скорость (скорость центра пакета) будет равна

$$\frac{d\nu}{d(1/\lambda)} = \frac{dE}{dp} = \frac{d(p^2/2m)}{dp} = \frac{p}{m}, \quad (5.6)$$

что совпадает с классическим выражением для скорости. Это означает, что если можно пренебречь размерами и внутренней структурой волнового пакета, то, с учетом (5.5), волновое описание движения частицы будет совпадать с классическим.

**Волновой формализм.** Таким образом, мы видим, что частицы вещества, равно как и кванты излучения, можно представить в виде волновых пакетов, при наложении которых может иметь место интерференция. Амплитуды волн определяют вероятность нахождения частицы в данной точке. Это представление согласуется с принципом неопределенности, коль скоро принимаются во внимание выведенные из опыта соотношения (1.2) и (5.5). Таким путем, исходя из математического описания волновых движений, можно развить количественный аппарат квантовой теории. Для вещества это будет сделано в гл. II на основании развитых в настоящей главе физических принципов. Мы также всегда будем требовать, чтобы при соответствующем предельном переходе результаты любых вычислений совпадали с классическими выражениями. Это требование выражает принцип соответствия Бора, упоминавшийся в § 2. В настоящее время, когда существует достаточно полная квантовая теория, принцип соответствия представляет интерес главным образом в связи с требованием, чтобы квантовый формализм в пределе давал правильные классические результаты; однако при новых расчетах или при расширении границ теории принцип соответствия может иметь эвристическое значение.

На первый взгляд может показаться, что описание вещества исключительно с помощью волнового формализма, как это сделано в последующих четырех главах, противоречит корпускулярно-волновому дуализму, обсуждавшемуся в § 1, и, следовательно, не соответствует принципу дополненности. Однако это неверно, так как в действительности данный формализм позволяет разобраться во всех доступных измерению свойствах вещества, включая, например, и такие явления, как образование следов частиц в камере Вильсона. Так, в § 30 будет показано, что если в камере Вильсона движется одна частица с определенным импульсом и, следовательно, совершенно неопределенной координатой, то вероятность ионизации двух или более молекул газа будет пренебрежимо мала для всех точек, не лежащих очень близко к линии, параллельной вектору импульса.

Необходимо подчеркнуть, что сделанные замечания справедливы только в том случае, если описанная в настоящем разделе

волновая функция всегда интерпретируется как величина, характеризующая одну частицу, а не статистическое распределение многих частиц. Для описания нескольких частиц надо воспользоваться волновой функцией, зависящей от координат их всех. Аналогичное количественное описание световых квантов, которому посвящена гл. XIV, требует несколько иного подхода. Это связано главным образом с тем, что при взаимодействии с веществом фотоны могут испускаться и поглощаться так, что их число не сохраняется (тогда как число частиц, в рамках задач, рассматриваемых в этой книге, является постоянным). В связи с этим волновая функция фотонов должна была бы зависеть от переменного числа параметров, что является нежелательным.

### ЗАДАЧИ

1. Кратко описать опыты, перечисленные в табл. I, и дать соответствующие истолкование.

2. Дать краткое описание опытов Дэвиссона — Джермера и Томсона. Описать применение камеры Вильсона для наблюдения следов частиц.

3. Пучок атомов серебра в опыте Штерна — Герлаха получается испарением серебра в печи с температурой  $1200^\circ \text{C}$  и пропусканием испаренных атомов через коллимирующее устройство. Пользуясь соотношением неопределенности и допуская, что расстояние, проходимое пучком, равно  $1 \text{ м}$ , найти порядок величины наименьшего пятна, которое можно получить на детекторе.

4. Показать, что если какая-нибудь компонента момента количества движения электрона в атоме водорода с точностью до  $5\%$  равна  $2\hbar$ , то вообще невозможно определить угловую координату электрона на орбите в плоскости, перпендикулярной этой компоненте.

5. Винтовочная пуля весом в  $30 \text{ г}$  достигает мишени за  $0,5 \text{ сек}$ . Рассматривая пулю как материальную точку и пренебрегая сопротивлением воздуха и движением Земли, найти порядок величины разброса точек последовательных попаданий в мишень при оптимальных условиях прицеливания и стрельбы.

6. Идеально упругий мяч для игры в пинг-понг падает в вакууме на закрепленный идеально упругий шар такого же радиуса с высоты, равной десяти радиусам. Пренебрегая движением Земли, вычислить наибольшее число отскоков мяча от неподвижного шара при наиболее благоприятных условиях.

7. В опыте Франка — Герца для возбуждения одного из энергетических уровней атома используется пучок электронов с определенной энергией. Предполагая, что вследствие обратного перехода в нижнее энергетическое состояние время существования возбужденного уровня невелико, показать, что электроны, потерявшие энергию в результате неупругого рассеяния на атомах, будут обладать различной конечной энергией. Каков (по порядку величины) разброс значений конечной энергии (в  $\%$ ), если время жизни возбужденного уровня составляет приблизительно  $10^{-10} \text{ сек}$ .?

8. Обсудить возможные связи между тремя соотношениями неопределенности (3.1), (3.2) и (3.3).

9. Вывести выражение для групповой скорости, фигурирующее в левой части уравнения (5.6).

ЛИТЕРАТУРА<sup>1)</sup>

1. Richtmyer F. K., Kennard E. H., Lauritsen T., Introduction to Modern Physics, New York, 1955.
2. Born M., Atomic Physics, New York, 1951.
3. Harnwell G. P., Stephens W. E., Atomic Physics, New York, 1955.
4. Pauling L., Wilson E. B., Jr., Introduction to Quantum Mechanics, New York, 1935, Ch. II.
5. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 43, 172 (1927).
6. Du Mond J. W. M., Cohen E. R., Rev. Mod. Phys., 25, 691 (1953).
7. Bohr N., Nature, 121, 580 (1928).
8. Bohr N., Atomic Theory and the Description of Nature, London, 1934, Part II.
9. Bohr N., Phys. Rev., 48, 696 (1935).
10. Heisenberg W., The Physical Principles of the Quantum Theory, Chicago, 1930, Ch. II, III. (Имеется русский перевод: В. Гейзенберг, Физические принципы квантовой теории, М.—Л., 1932.)
11. Bohm D., Quantum Theory, New York, 1951, Ch. 5.
12. Pipes L. A., Applied Mathematics for Engineers and Physicists, New York, 1946, Ch. III.
- 13\*. Шпольский Э. В., Атомная физика, М.—Л., 1951.
- 14\*. Блохинцев Д. И., Основы квантовой механики, М.—Л., 1949.
- 15\*. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 2, гл. 6, М.—Л., 1948.
- 16\*. Фок В. А., Усп. физич. наук, 45, 3 (1951).
- 17\*. Соколов А. А., Научные доклады высшей школы, № 1, 120 (1958).
- 18\*. Сборник „Вопросы причинности в квантовой механике”, ИЛ, 1955

---

<sup>1)</sup> Здесь и далее звездочкой отмечены работы, добавленные редакцией. — Прим. ред.

## ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Настоящая и несколько последующих глав посвящены нерелятивистскому движению частицы в силовом поле, которое можно охарактеризовать с помощью потенциальной энергии. В настоящей главе развивается метод количественного описания с помощью дифференциального уравнения, так называемого *волнового уравнения Шредингера*, и рассматривается применение этого уравнения к простой одномерной задаче. При этом необходимо сделать ряд предположений о структуре волнового уравнения, о граничных условиях и условиях непрерывности решений, а также о физическом смысле последних. Сопоставление (в настоящей и последующих главах) этих предположений с экспериментальными результатами, особенно с данными о диффракции частиц вещества и с возможностью предельного перехода к классической механике, делает наши гипотезы в высокой степени правдоподобными. Однако мы не пытаемся однозначно вывести формализм теории из опытных данных. Окончательной проверкой теории должны быть, разумеется, ее внутренняя согласованность и хорошее совпадение вытекающих из нее выводов с результатами конкретных экспериментов; некоторые примеры будут рассмотрены в гл. IV и V.

### § 6. Вывод волнового уравнения

Обобщая указанные в § 5 свойства волновой функции, мы получим здесь волновое уравнение Шредингера. Некоторые свойства этого уравнения и его решений будут рассмотрены в следующих параграфах настоящей главы.

**Бегущие гармонические волны.** Прежде всего дадим более точное (количественное) описание свойств одномерной волновой функции  $\psi(x, t)$ , качественно рассматривавшихся в § 5. Там было показано, что в случае непрерывных бегущих гармонических волн длина волны и импульс связаны равенством (1.2), а энергия и частота — равенством (5.5). Перепишем эти соотношения, вводя универсальную постоянную  $\hbar = h/2\pi$ :

$$p = \hbar k, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (6.1)$$

$$E = \hbar\omega, \quad \omega = 2\pi\nu. \quad (6.2)$$

Тогда можно ожидать, что волновая функция  $\psi(x, t)$ , характеризующая движущуюся в положительном направлении оси  $x$  частицу с полностью неопределенной координатой, но с точно известными импульсом  $p$  и кинетической энергией  $E$ , дается одним из следующих выражений :

$$\cos(kx - \omega t), \quad \sin(kx - \omega t), \quad e^{i(kx - \omega t)}, \quad e^{-i(kx - \omega t)} \quad (6.3)$$

или же некоторой их линейной комбинацией. Это следует из диффракционных экспериментов типа опытов Дэвиссона и Джермера и Томсона (см. § 1), а также из требования, чтобы групповая скорость волнового пакета, приблизительно характеризуемого волновым числом  $k$  и круговой частотой  $\omega$ , совпадала со скоростью классической свободной частицы с импульсом  $p$  и энергией  $E$  [см. уравнение (5.6)].

**Необходимость найти волновое уравнение.** Чтобы выйти за рамки простейшей задачи о гармонических волнах, крайне желательно иметь уравнение, решениями которого будут как гармонические, так и более сложные волны. Для большей ясности приведем пример из более знакомой отрасли физики. В случае трехмерных звуковых волн в газе решение задачи о рассеянии звука на твердом шаре можно получить путем наложения плоских гармонических волн, распространяющихся в различных направлениях. Однако значительно проще непосредственно решать дифференциальное уравнение для звуковых волн в сферических координатах. Если же температура газа изменяется от точки к точке, то в общем случае без такого дифференциального уравнения совсем невозможно обойтись. Основное уравнение для звуковых волн можно найти с помощью непосредственного рассмотрения механических свойств газа. Хотя последнее и не относится к уравнению, решениями которого являются волновые функции § 5, найти такое уравнение в данном случае столь же необходимо. Это обстоятельство станет еще более очевидным, если с помощью волновой функции нужно будет описывать движение частицы под действием внешних сил. Ситуация в этом случае оказывается аналогичной распространению звуковых волн в неоднородном газе. Поэтому перейдем к нахождению уравнения для волновой функции и, найдя его, будем считать, что именно оно [а не частная гармоническая форма (6.3)] представляет собой фундаментальный закон природы.

Искомое уравнение должно обладать двумя основными свойствами. Во-первых, оно должно быть линейным, чтобы его решения удовлетворяли принципу наложения и можно было объяснить интерференцию (в трехмерном случае), а также образование волновых пакетов. Во-вторых, коэффициенты уравнения должны содержать только такие константы, как  $\hbar$ , масса и заряд частицы,

и не должны содержать специфических параметров, характеризующих тот или иной частный вид движения (т. е. импульса, энергии, волнового числа). Дело в том, что должно быть возможно наложение решений, относящихся к различным значениям этих параметров, а результат такой суперпозиции не может удовлетворять уравнениям, в которые они явно входят. Поскольку проще всего иметь дело с дифференциальными уравнениями, целесообразно прежде всего попытаться найти именно уравнения такого типа. Мы увидим, что это действительно оказывается возможным, причем будут соблюдены все сформулированные выше требования.

Имея в виду все изложенные соображения, рассмотрим прежде всего наиболее известное одномерное волновое уравнение, описывающее поперечные колебания струны или плоские звуковые волны в газе:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; \quad (6.4)$$

здесь  $\gamma$  — квадрат скорости волны. Подстановка гармонических функций (6.3) в (6.4) показывает, что все они (а следовательно, и все их комбинации) удовлетворяют данному дифференциальному уравнению в том и только в том случае, когда

$$\gamma = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E^2}{p^2} = \frac{p^2}{4m^2}, \quad (6.5)$$

где  $m$  — масса частицы, движение которой мы пытаемся описывать. Но из (6.5) следует, что коэффициент  $\gamma$ , фигурирующий в (6.4), зависит от параметров движения ( $E$  или  $p$ ), вследствие чего это уравнение оказывается непригодным.

**Одномерное волновое уравнение.** Для дальнейших попыток найти волновое уравнение полезно заметить, что дифференцирование волновых функций типа (6.3) по  $x$  приводит к умножению функции на  $k$  (с возможной заменой синуса на косинус и наоборот), тогда как дифференцирование по  $t$  сводится к умножению на  $\omega$ . Поэтому соотношение  $E = p^2/2m$ , или эквивалентное ему равенство  $\omega = \hbar k^2/2m$ , наводит на мысль, что искомое дифференциальное уравнение содержит первую производную по  $t$  и вторую — по  $x$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (6.6)$$

Подстановка показывает, что первые две волновые функции (6.3) не удовлетворяют уравнению (6.6), тогда как любая из других функций (но не обе одновременно) может ему удовлетворять, если только выбрать соответствующим образом постоянную  $\gamma$ . Если, в частности, положить

$$\gamma = \frac{i\omega}{k^2} = \frac{i\hbar E}{p^2} = \frac{i\hbar}{2m}, \quad (6.7)$$

то уравнению (6.6) будет удовлетворять третья из волновых функций (6.3). При этом, согласно (6.7),  $\gamma$  зависит только от постоянных  $\hbar$  и  $m$ .

Таким образом, мы получаем одномерное волновое уравнение Шредингера<sup>1)</sup> для свободной частицы с массой  $m$ . Согласно (6.6) и (6.7), его можно переписать в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (6.8)$$

Данная форма записи уравнения (6.8) характерна в том отношении, что при подстановке решений в виде гармонической функции [третьей из функций (6.3)] левая часть становится равной  $E\psi$ , а правая — равной  $(p^2/2m)\psi$ . То, что решение вида  $e^{i(\hbar x - \omega t)}$  является комплексным, сам по себе еще нельзя считать недостатком формализма. Нужно лишь потребовать, чтобы все результаты возможных физических наблюдений выражались с помощью вещественных чисел; это условие поможет нам более точно выяснить смысл функции  $\psi$ .

**Обобщение на случай трех измерений.** Проведенные выше рассуждения легко обобщаются на случай трех измерений. Равенство (6.1) естественно переписать в виде

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad k = |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (6.9)$$

где  $\mathbf{k}$  есть *волновой вектор*. Аналогично третья волновая функция (6.3) теперь запишется в виде

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (6.10)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор частицы. Тогда, очевидным образом обобщая соображения, приведшие к уравнению (6.8), найдем трехмерное уравнение Шредингера для свободной частицы, характеризуемой волновой функцией  $\psi(\mathbf{r}, t)$ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (6.11)$$

Сравнение формул (6.9) — (6.11) с классическим выражением для энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (6.12)$$

наводит на мысль, что по крайней мере для свободной частицы энергия и импульс могут быть представлены дифференциальными

<sup>1)</sup> Настоящее изложение несколько отличается от первоначальных рассуждений Шредингера [1].

операторами

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \text{grad}, \quad (6.13)$$

действующими на волновую функцию  $\psi$ . В § 7, 8, 10 и 11 будет показано, что это представление справедливо также и для свободной частицы.

**Учет действия сил.** Следующая задача состоит в обобщении волнового уравнения для свободной частицы (6.11) с целью учета возможного действия внешних сил. Предположим пока, что природа этих сил (электрических, гравитационных, а может быть, и ядерных) такова, что все они могут быть объединены в единую силу  $F$ , выражающуюся через потенциальную энергию  $V$ :

$$F(\mathbf{r}, t) = -\text{grad } V(\mathbf{r}, t). \quad (6.14)$$

Как и при выводе уравнения (6.11), желательно исходить из классического соотношения между энергией и импульсом, но теперь уже с учетом внешних сил. Если последние имеют потенциал, то это соотношение запишется в простом виде:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}, t); \quad (6.15)$$

здесь  $E$  — полная энергия, а первый и второй члены в правой части (6.15) представляют собой соответственно кинетическую и потенциальную энергию частицы.

Поскольку  $V$  не зависит от  $\mathbf{p}$  или  $E$ , соотношения (6.15) и (6.13) наводят на мысль о следующем обобщении уравнения (6.11):

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r}, t)\psi. \quad (6.16)$$

Это и есть волновое уравнение Шредингера, описывающее движение частицы с массой  $m$  в силовом поле (6.14)<sup>1)</sup>. Наш вывод не может претендовать на такую же степень убедительности, как в случае уравнения (6.11); однако рассуждения следующего параграфа должны сделать его более правдоподобным. Разумеется, окончательным подтверждением справедливости и полезности волнового уравнения (6.16) будет совпадение его следствий с опытом.

## § 7. Интерпретация волновой функции

Допустим теперь, что волновая функция  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющая уравнению (6.16), дает полное квантовомеханическое описание поведения частицы с массой  $m$  и потенциальной энер-

<sup>1)</sup> Изменение волновой функции со временем можно связать также с интегралами по всем возможным траекториям частицы; см. работу Фейнмана [2].



гией  $V(\mathbf{r}, t)$ , вследствие чего она аналогична классической траектории  $\mathbf{r}(t)$ . До сих пор мы имеем лишь одно указание на возможный смысл волновой функции: она должна быть велика там, где нахождение частицы вероятно, и мала в остальных местах. Это соображение необходимо дополнить более точными утверждениями, которые позволили бы извлекать из функции  $\psi$  максимум сведений, допускаемых законами природы, в соответствии с § 3. Как и в случае волнового уравнения, можно сказать, что критерием истинности нашей интерпретации волновой функции должны быть логическая непротиворечивость и совпадение результатов с опытом.

**Статистическая интерпретация.** Замечание о том, что волновая функция  $\psi$  должна быть велика там, где „вероятно нахождение частицы”, а также соображения § 3 говорят о необходимости статистической интерпретации функции  $\psi$ . Представим себе очень большое число тождественных, независимых и не перекрывающихся областей пространства, каждая из которых достаточно велика, чтобы содержать все, что может повлиять на физически интересные особенности движения. В каждой из областей поведение частицы с потенциальной энергией  $V(\mathbf{r}, t)$  описывается одной и той же волновой функцией  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , причем радиус-вектор  $\mathbf{r}$  в каждом случае относится к началу координат соответствующей области. Предположим теперь, вслед за Борном [3], что в той мере, в какой вообще можно установить момент проведения измерения, численные результаты измерения любой физической величины, например координаты, импульса или энергии частицы в момент времени  $t$  в разных областях пространства, вообще говоря, оказываются отнюдь не одинаковыми. Наоборот, распределение этих результатов можно описать с помощью некоторой вероятностной функции.

Например, в § 5 мы видели, что результат определения координаты содержит неопределенность порядка линейных размеров области, в которой волновая функция отлична от нуля. Поэтому естественно рассматривать  $\psi$  как меру вероятности обнаружить частицу в данной точке соответствующей области. Но функция  $\psi$ , вообще говоря, является комплексной, тогда как вероятность представляет собой вещественное положительное число. Поэтому мы допустим, что *плотность вероятности координат* частицы определяется произведением  $\psi$  на комплексно сопряженную функцию  $\varphi$ :

$$P(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (7.1)$$

Это означает, что если производить большое число точных измерений координат независимых частиц, каждая из которых описывается волновой функцией  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , то вероятность обнаружить

частицу в элементе объема  $dx dy dz$  около точки  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  будет равна  $P(\mathbf{r}, t) dx dy dz$ .

**Нормировка волновой функции  $\psi$ .** Поскольку вероятность найти частицу где-либо в области должна быть равна единице, из формулы (7.1) следует условие нормировки волновой функции:

$$\int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\tau = 1; \quad (7.2)$$

здесь  $d\tau$  — элемент объема  $dx dy dz$ , и интегрирование производится по всей области. Если функция  $\psi$  характеризует волновой пакет типа рассмотренного в § 5, то интеграл в формуле (7.2) сходится, и численный множитель у  $\psi$  можно выбрать так, чтобы интеграл был равен единице. Разумеется, в силу однородности уравнения (6.16) нормировка не мешает функции  $\psi$  удовлетворять ему. Однако существуют волновые функции типа (6.10), для которых интеграл (7.2), взятый по всему бесконечному пространству, оказывается расходящимся. Эти волновые функции требуют специального рассмотрения, которое мы отложим до § 10 и 11. Пока что будем считать область пространства, в которой находится такая волновая функция, сколь угодно большой, но конечной; тогда интеграл (7.2) берется по конечному объему и сходится, так что нормировка всегда возможна.

Чтобы функция  $\psi$  удовлетворяла волновому уравнению (6.16), нормирующий множитель не должен зависеть от времени. Поэтому истолкование  $|\psi|^2$  как плотности вероятности требует, чтобы нормировочный интеграл не зависел от времени, если соотношение (7.2) имеет место в какой-то один момент. Фактически именно так дело и обстоит, в чем можно убедиться, вычисляя производную по времени от интеграла от  $P$  по любому фиксированному объему  $V$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V P(\mathbf{r}, t) d\tau &= \int_V \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \psi \right) d\tau = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_V [\bar{\psi} \nabla^2 \psi - (\nabla^2 \bar{\psi}) \psi] d\tau = \frac{i\hbar}{2m} \int_V \operatorname{div} [\bar{\psi} \operatorname{grad} \psi - (\operatorname{grad} \bar{\psi}) \psi] d\tau = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_A [\bar{\psi} \operatorname{grad} \psi - (\operatorname{grad} \bar{\psi}) \psi]_n dA. \end{aligned}$$

Здесь производная  $\partial\psi/\partial t$  выражена с помощью (6.16), а  $\partial\bar{\psi}/\partial t$  — с помощью комплексно сопряженного уравнения. Последний интеграл получается интегрированием по частям на основании теоремы Грина; буквой  $A$  обозначена поверхность, ограничивающая область интегрирования, а символ  $[ ]_n$  означает компоненту в направлении внешней нормали к элементу поверхности  $dA$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Удобно пользоваться таким порядком множителей, когда  $\bar{\psi}$  предшествует  $\psi$  [см. ниже обсуждение формулы (7.7)].

Определим вектор  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} [\bar{\psi} \text{grad } \psi - (\text{grad } \bar{\psi}) \psi], \quad (7.3)$$

с помощью которого получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V P(\mathbf{r}, t) d\tau = - \int_V \text{div } \mathbf{S} d\tau = - \int_A S_n dA. \quad (7.4)$$

Если под объемом  $V$  подразумевать все пространство, то в случае волнового пакета, когда на больших расстояниях функция  $\psi$  обращается в нуль и нормировочный интеграл сходится, интеграл по поверхности, очевидно, равен нулю. В случаях типа (6.10) волновые функции можно определить в конечной области  $V$  таким образом, что на ограничивающих поверхностях они либо обращаются в нуль, либо удовлетворяют условиям периодичности (см. § 10). Легко показать, что при любых условиях поверхностный интеграл в (7.4) равен нулю, так что нормировочный интеграл в (7.2) не меняется с течением времени.

**Плотность тока вероятности.** Равенство (7.4) означает также справедливость дифференциального соотношения

$$\frac{\partial P(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

По форме оно аналогично известному уравнению непрерывности для жидкости с плотностью  $P$  и плотностью тока  $\mathbf{S}$  (в отсутствие источников и стоков). Поэтому естественно истолковывать вектор  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ , определяемый формулой (7.3), как *плотность тока вероятности*. Такая интерпретация делает более правдоподобным отождествление оператора  $-i\hbar \text{grad}$  с импульсом при наличии внешних сил. Поскольку при этом  $(\hbar/im) \text{grad}$  будет оператором скорости, то, очевидно,

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left( \bar{\psi} \frac{\hbar}{im} \text{grad } \psi \right),$$

где  $\text{Re}$  означает вещественную часть. Хотя указанное истолкование вектора  $\mathbf{S}$  и напрашивается само собой, нужно иметь в виду, что  $\mathbf{S}$  невозможно измерять так же непосредственно, как  $P$ . Например, было бы ошибочным утверждать, что  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  представляет собой, скажем, среднее значение тока частиц в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ , поскольку под измерением среднего тока в данной точке подразумевается одновременное точное определение координаты и скорости (эквивалентной импульсу), что противоречит соотношению неопределенности (3.1). Тем не менее иногда удобно представлять себе  $\mathbf{S}$  как вектор тока, особенно в тех случаях, когда он мало или совсем не зависит от  $\mathbf{r}$ , так как тогда

можно достаточно точно определять скорость, не нарушая смысла представления о токе.

**Среднее значение.** Существование плотности вероятности координат частицы  $P(\mathbf{r}, t)$  позволяет определить величину, которую мы будем называть *средним значением* радиуса-вектора; компоненты его представляют собой взвешенные средние соответствующих компонент радиуса-вектора частицы. Это среднее значение представляет собой математическое ожидание (в смысле теории вероятности) результатов отдельного измерения; его можно рассматривать также как результат усреднения измерений, проводимых над большим числом независимых систем, рассмотренных в начале настоящего параграфа. Запишем среднее значение  $\mathbf{r}$  в виде

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \int \mathbf{r} P(\mathbf{r}, t) d\tau = \int \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}, t) d\tau, \quad (7.5)$$

что эквивалентно трем равенствам:

$$\langle x \rangle = \int \bar{\psi} x \psi d\tau, \quad \langle y \rangle = \int \bar{\psi} y \psi d\tau, \quad \langle z \rangle = \int \bar{\psi} z \psi d\tau,$$

где функция  $\psi$  нормирована. Среднее значение зависит только от времени, так как от  $t$  зависят  $\psi$  и  $P$ , а по пространственным координатам произведено интегрирование.

Подобным же образом можно найти и средние значения любых других имеющих физический смысл величин, если только они зависят лишь от компонент радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Так, среднее значение потенциальной энергии составляет

$$\langle V \rangle = \int V(\mathbf{r}, t) P(\mathbf{r}, t) d\tau = \int \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d\tau. \quad (7.6)$$

Однако, чтобы ввести аналогичные понятия для таких величин как импульс или энергия, надо предварительно выразить их через  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Мы допустим, что для этой цели можно воспользоваться дифференциальными операторами (6.13); это предположение будет обосновано с помощью соответствующих распределений вероятности в § 10 (для энергии) и в § 11 (для импульса). Однако тотчас же возникает вопрос, каким образом следует комбинировать подобные дифференциальные операторы с плотностью вероятности координат  $P$ .

Ответ можно дать, налагая на средние значения разумное требование, чтобы по аналогии с классической формулой (6.15) имело место равенство

$$\langle E \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle + \langle V \rangle.$$

С помощью дифференциальных операторов его можно переписать в виде

$$\left\langle i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right\rangle + \langle V \rangle. \quad (7.7)$$

Очевидно, соотношение (7.7) согласуется с волновым уравнением (6.16) только в том случае, если среднее значение в общем случае определяется как результат действия оператора на  $\psi$  с последующим умножением слева на  $\bar{\varphi}$ . Таким образом, мы получим, например,

$$\langle E \rangle = \int \bar{\varphi} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} d\tau, \quad \langle p \rangle = \int \bar{\varphi} (-i\hbar) \text{grad } \psi d\tau. \quad (7.8)$$

Как и в случае (7.5), второе из равенств (7.8) эквивалентно трем выражениям для компонент:

$$\begin{aligned} \langle p_x \rangle &= -i\hbar \int \bar{\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial x} d\tau, & \langle p_y \rangle &= -i\hbar \int \bar{\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial y} d\tau, \\ \langle p_z \rangle &= -i\hbar \int \bar{\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial z} d\tau. \end{aligned}$$

**Теорема Эренфеста**<sup>1)</sup>. Естественно ожидать, что если потенциальная энергия пренебрежимо мало изменяется в области нахождения пакета, то движение волнового пакета будет аналогично движению соответствующей классической частицы. И действительно, если под векторами „координаты” и „импульса” пакета понимать средние значения этих величин, то можно показать, что классическое и квантовое движения всегда согласуются друг с другом. Компонентой „скорости” пакета будет производная по времени от среднего значения соответствующей компоненты радиуса-вектора; поскольку  $\langle x \rangle$  зависит только от времени, а  $x$  в подынтегральном выражении (7.5) представляет собой переменную интегрирования, то соответствующая компонента „скорости” равна

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{d}{dt} \int \bar{\varphi} x \psi d\tau = \int \bar{\varphi} x \frac{\partial \psi}{\partial t} d\tau + \int \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} x \psi d\tau.$$

Это выражение можно упростить, подставляя выражения производных по времени от  $\psi$  и  $\bar{\varphi}$  из уравнения (6.16); члены, содержащие  $V$ , при этом взаимно уничтожаются:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x \rangle &= -\frac{i}{\hbar} \left[ \int \bar{\varphi} x \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \right) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \bar{\varphi} + V\bar{\varphi} \right) x\psi d\tau \right] = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int [\bar{\varphi} x (\nabla^2 \psi) - (\nabla^2 \bar{\varphi}) x\psi] d\tau. \end{aligned}$$

Второе слагаемое здесь можно проинтегрировать по частям:

$$\int (\nabla^2 \bar{\varphi}) x\psi d\tau = - \int (\text{grad } \bar{\varphi}) \cdot \text{grad} (x\psi) d\tau + \int_A (x\psi \text{grad } \bar{\varphi})_n dA.$$

<sup>1)</sup> См. работу Эренфеста [4].

Поскольку на больших расстояниях функция  $\psi$ , характеризующая волновой пакет, обращается в нуль, то равен нулю и интеграл от составляющей вектора  $x\psi \operatorname{grad} \varphi$  по нормали к элементу бесконечно удаленной граничной поверхности  $A$ . Вторично интегрируя по частям (и вновь замечая, что поверхностный интеграл равен нулю), получаем

$$\int (\nabla^2 \varphi) x\psi \, d\tau = - \int \varphi \nabla^2 (x\psi) \, d\tau.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x \rangle &= \frac{i\hbar}{2m} \int \varphi [x\nabla^2 \psi - \nabla^2 (x\psi)] \, d\tau = \\ &= -\frac{i\hbar}{m} \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \, d\tau = \frac{1}{m} \langle p_x \rangle. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Поскольку в силу (7.5) величина  $\langle x \rangle$  всегда вещественна, из соотношения (7.9) вытекает, между прочим, что вещественно и значение  $\langle p_x \rangle$ . Это можно показать также с помощью второй формулы (7.8), если произвести в ней интегрирование по частям и принять во внимание, что функция  $\psi$  описывает волновой пакет.

Подобным же образом можно вычислить производную по времени от компоненты „импульса” частицы. Снова пользуясь волновым уравнением и дважды интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p_x \rangle &= -i\hbar \frac{d}{dt} \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \, d\tau = -i\hbar \left( \int \varphi \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} \, d\tau + \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \, d\tau \right) = \\ &= - \int \varphi \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \right) \, d\tau + \int \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi + V\varphi \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \, d\tau = \\ &= - \int \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial x} (V\psi) - V \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \, d\tau = - \int \varphi \frac{\partial V}{\partial x} \psi \, d\tau = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Уравнения (7.9) и (7.10) (вместе с уравнениями для других компонент) аналогичны классическим уравнениям движения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\operatorname{grad} V.$$

Мы имеем здесь пример принципа соответствия, так как из полученных уравнений видно, что коль скоро среднее значение с хорошей степенью точности представляет классическую переменную, то волновой пакет движется как классическая частица; обычно это имеет место в макроскопическом предельном случае, когда внутренней структурой и конечными размерами пакета можно пренебречь.

## § 8. Собственные функции оператора энергии

Если потенциальная энергия  $V(\mathbf{r})$  не зависит от времени, то решение уравнения Шредингера (6.16) значительно упрощается. В этом случае общее решение можно представить в виде

суммы произведений функций, зависящих только от  $\mathbf{r}$  и только от  $t$ .

**Разделение переменных в волновом уравнении.** Рассмотрим частное решение (6.16), имеющее вид  $\psi(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})f(t)$ ; общее решение можно представить как сумму частных решений этого типа. Подставляя  $\psi(\mathbf{r}, t)$  в уравнение (6.16) и деля правую и левую части на произведение  $u(\mathbf{r})f(t)$ , получим

$$\frac{i\hbar}{f} \frac{df}{dt} = \frac{1}{u} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u + V(\mathbf{r})u \right]. \quad (8.1)$$

Поскольку левая часть уравнения (8.1) зависит только от  $t$ , а правая — только от  $\mathbf{r}$ , обе они должны равняться одной и той же константе разделения, которую мы обозначим через  $E$ . Тогда уравнение для функции  $f$  легко интегрируется:

$$f(t) = Ce^{-iEt/\hbar},$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Уравнение для  $u$  принимает вид

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] u(\mathbf{r}) = Eu(\mathbf{r}). \quad (8.2)$$

Поскольку уравнение (8.2) однородно по  $u$ , постоянную  $C$  можно выбрать так, чтобы функция  $u$  была нормирована. Тогда частное решение волнового уравнения будет иметь вид

$$\psi(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) e^{-iEt/\hbar}. \quad (8.3)$$

**Смысл константы разделения  $E$ .** Применим к функции (8.3) оператор (6.13), содержащий производную по времени и соответствующий полной энергии. Мы получим

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi. \quad (8.4)$$

Говорят, что уравнение типа (8.4) определяет задачу на собственные значения; при этом  $\psi$  представляет собой собственную функцию оператора, стоящего слева, а постоянный множитель  $E$  в правой части — соответствующее ей собственное значение<sup>1)</sup>. Поскольку для функции  $\psi$ , описываемой выражением типа (8.3),  $|\psi|^2$  не зависит от времени, про собственные функции оператора энергии говорят, что они характеризуют стационарное состояние частицы.

Уравнение (8.2) также определяет задачу на собственные значения. Из него следует, что  $u$  (а следовательно, и  $\psi$ ) предста-

<sup>1)</sup> Часто вместо терминов *собственная функция* и *собственное значение* используются выражения *характеристическая функция* и *характеристическое значение*.

влетает собой собственную функцию оператора  $[-(\hbar^2/2m)\nabla^2 + V(\mathbf{r})]$ , принадлежащую тому же собственному значению  $E$ . Разумеется, заранее следовало ожидать, что если  $\psi$  является собственной функцией оператора дифференцирования по времени, то она будет и собственной функцией данного оператора. Действительно, в силу волнового уравнения (6.16) оба оператора эквивалентны не только в применении к функциям типа (8.3), но и в самом общем случае.

Вопрос о физическом смысле собственных функций и собственных значений будет полностью рассмотрен в гл. III. Однако уже сейчас, предвосхищая сделанные там выводы, мы допустим, что собственные значения представляют собой единственно возможные результаты точных измерений полной энергии частицы.

В связи с этим интересно выяснить, при всех ли вещественных значениях  $E$  уравнение (8.2) имеет физически интересные решения  $u(\mathbf{r})$ . Ответ можно получить, только уточнив понятие „физически интересные“ решения в терминах граничных условий, накладываемых на функцию  $u(\mathbf{r})$ . Этому вопросу, а также исследованию общего характера собственных значений при различных видах потенциальной энергии  $V(\mathbf{r})$  и будет посвящена остальная часть настоящего параграфа.

**Граничные условия на бесконечности.** До сих пор мы имели дело только с двумя классами волновых функций: с хорошо локализованными волновыми пакетами, для которых нормировочный интеграл  $\int |\psi|^2 d\tau$  сходится, и с бегущими гармоническими волнами типа (6.10), для которых модуль волновой функции на больших расстояниях остается постоянным и нормировочный интеграл (взятый по всему бесконечному пространству) расходится. Можно считать, что функции первого класса описывают либо свободные частицы, координаты которых в начальный момент известны довольно точно, либо же частицы, удерживаемые в конечной области пространства благодаря действию внешних сил [характеризуемых потенциальной энергией  $V(\mathbf{r})$ ]. Функции второго класса описывают частицы, которые не локализованы и не удерживаются в рассматриваемой области, а проходят из одной удаленной части пространства в другую. Такие функции, окажутся полезными при рассмотрении рассеяния частиц силовым полем<sup>1)</sup>. В обоих случаях волновые функции остаются ограниченными на бесконечности.

**Условия непрерывности.** Не зависящее от времени волновое уравнение (8.2) представляет собой линейное дифференциальное

<sup>1)</sup> Есть еще класс функций, неограниченно возрастающих на бесконечности. Они, однако, не представляют физического интереса, ибо нет оснований рассматривать частицы, для которых плотность вероятности координат становится бесконечно большой в удаленных областях пространства.



уравнение второго порядка по  $r$ . Поэтому если функция  $V(r)$  конечна (хотя и не обязательно непрерывна),<sup>1</sup> то, зная волновую функцию и ее производные на некоторой поверхности, можно проинтегрировать волновое уравнение и найти значение  $u(r)$  в любой точке. Соответственно, коль скоро волновая функция должна однозначно изображать состояние частицы, естественно потребовать, чтобы она вместе со своим градиентом была всюду непрерывна, конечна и однозначна. Из этих условий вытекает, в частности, ограниченность и непрерывность плотности координат  $P(r)$  и плотности тока вероятности  $S(r)$  во всех точках пространства.

**Граничные условия в точках, где потенциальная энергия обращается в бесконечность.** Если функция  $V(r)$  где-либо обращается в бесконечность, то соответствующие граничные условия можно найти с помощью предельного процесса исходя из условий непрерывности, указанных выше для случая конечного  $V$ .

Пусть, например, функция  $V$  претерпевает бесконечный скачок на некоторой непрерывной поверхности, так что на одной ее стороне потенциальная энергия конечна, а на другой равна  $+\infty$ . Надо определить условия, которым должны удовлетворять величины  $u(r)$  и  $g$  ад  $u$  на этой поверхности. Характерные особенности задачи останутся неизменными, если в интересующей нас точке заменить непрерывную поверхность касательной к ней плоскостью, а потенциальную энергию, непрерывно изменяющуюся на одной стороне поверхности, постоянной величиной, которую без ущерба для общности можно выбрать равной нулю (постоянная добавка к  $V$  эквивалентна просто соответствующему изменению  $E$ ). Выберем начало координат в интересующей нас точке, а ось  $x$  проведем перпендикулярно касательной плоскости.

В рассматриваемом случае волновое уравнение (8.2) распадается на три уравнения, каждое из которых содержит лишь одну из трех пространственных координат, причем разрывный характер потенциальной энергии на плоскости  $x=0$  не влияет на зависимость  $u$  от  $y$  и  $z$ . Таким образом, задача сводится к решению одномерного волнового уравнения

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + V(x) u = Eu, \quad (8.5)$$

где  $V(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $V(x) = V_0$  при  $x > 0$  и в конечном результате надо перейти к пределу  $V_0 \rightarrow +\infty$ . Пусть  $0 \leq E \leq V_0$ . Тогда общее решение уравнения (8.5) будет иметь вид

$$u(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \quad x < 0, \quad \alpha = + \left( \frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{1/2},$$

$$u(x) = C e^{-\beta x} + D e^{\beta x}, \quad x > 0, \quad \beta = + \left[ \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \right]^{1/2}.$$

В силу условия ограниченности  $u$  на бесконечности константу  $D$  следует положить равной нулю. Далее, условие непрерывности  $u$  при  $x = 0$  дает соотношение  $B = C$ , а условие непрерывности производной  $du/dx$  — равенство  $\alpha A = -\beta C$ . Поскольку  $\beta$  обращается в бесконечность вместе с  $V_0$ , а решение при  $x < 0$  должно оставаться конечным, из второй формулы следует, что  $C$  при  $V_0 \rightarrow \infty$  обращается в нуль, а тогда и  $B = 0$ . Константа  $A$  этими соотношениями не определяется, но ее можно найти из условия нормировки.

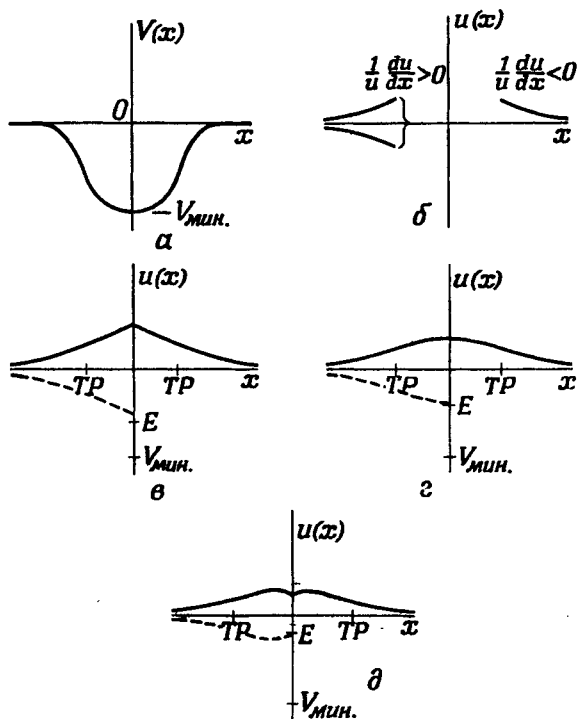
Таким образом, на поверхности, где потенциал испытывает бесконечный скачок, волновая функция должна обращаться в нуль, а производная от нее по нормали к поверхности остается неопределенной. Сделанное выше допущение о том, что  $E < V_0$ , очевидно, не является ограничением, так как в итоге  $V_0$  становится бесконечным. Если  $E < 0$ , то синус и косинус в решении для  $x < 0$  заменяются гиперболическими синусом и косинусом (что допустимо, так как решение должно быть справедливо только вблизи точки  $x = 0$ ); конечный результат при этом не изменится. Следует отметить, что как  $P$ , так и  $S_x$  обращаются в нуль, когда  $x \rightarrow 0$  со стороны отрицательных значений  $x$ ; таким образом эти величины непрерывны в точке  $x = 0$ , хотя производная  $du/dx$  в этой точке испытывает разрыв.

Граничная поверхность данного типа описывает идеально твердую непроницаемую стенку. Действительно, в аналогичном классическом случае значение  $x$ -компоненты импульса частицы при столкновении ее с такой поверхностью мгновенно изменяется на противоположное. (Энергия частицы может быть любой, но конечной.)

**Собственные значения оператора энергии в одномерном случае.** Собственные функции первого класса, описывающие частицы, удерживаемые внешними силами в некоторой конечной области пространства, всегда принадлежат дискретным собственным значениям; функциям же второго класса, не исчезающим на бесконечности, соответствует непрерывный спектр собственных значений. Качественным образом в этом можно убедиться, рассматривая решения одномерного волнового уравнения (8.5).

Предположим сначала, что  $V(x)$  при достаточно больших положительных и отрицательных значениях  $x$  становится равной некоторой константе, которую можно принять за нуль, и пусть  $E < 0$ . При таком значении полной энергии классическая частица не может уйти на бесконечность; она может находиться лишь в области, где  $E$  не меньше минимального значения потенциальной энергии  $V_{\text{мин}}$ . Если  $|x|$  достаточно велик, так что  $V = 0$ , то, очевидно, волновая функция имеет вид  $e^{-\beta|x|}$ , где  $\beta = +(-2mE/\hbar^2)^{1/2}$  (возрастающие решения мы условились отбрасывать). Пользуясь

волновым уравнением и условиями непрерывности, два таких решения, взятых для больших положительных и отрицательных значений  $x$ , можно продолжить до некоторой промежуточной точки, скажем  $x = 0$ . Непрерывности  $u$  в этой точке всегда можно добиться соответствующим подбором произвольных постоянных множителей в обоих решениях. Но легко убедиться, что при



Ф и г. 5. Потенциальная энергия  $V(x)$  и решения при больших  $x$ .

$a$  — потенциальная энергия  $V(x)$ ;  $b$  — решение  $u(x)$  при больших  $|x|$ ;  $c$  и  $d$  — решения в случае, когда энергия меньше или больше (алгебраически) собственного значения  $E$ , которому соответствует случай  $g$ ; как видно из кривых, либо волновая функция, либо ее производная испытывает разрыв в точке  $x = 0$ .

произвольных значениях  $E$  производная  $du/dx$  в точке их встречи будет, вообще говоря, испытывать разрыв. Могут, однако, найтись отдельные значения  $E$ , для которых в точке  $x = 0$  как  $u$ , так и  $du/dx$  являются непрерывными. Условия, при которых это имеет место, можно найти следующим образом.

В тех областях, где  $E < V(x)$ , отношение  $(d^2u/dx^2)/u$  положительно и кривая  $u(x)$  обращена выпуклостью в сторону оси  $x$ .

Поэтому в области, где  $V > E$ , знаки логарифмической производной  $(1/u)(du/dx)$  для двух решений, приходящих из  $\pm\infty$ , противоположны. Для потенциала, изображенного на фиг. 5, а, это иллюстрируется кривыми на фиг. 5, б; при  $x < 0$  показаны оба значения  $u$ . Точки, в которых  $E = V(x)$ , называются *точками поворота*, так как они характеризуют границы, в пределах которых движется классическая частица с энергией  $E$ : в этих точках направление ее движения изменяется на противоположное, т. е. частица поворачивает обратно. В точках поворота  $d^2u/dx^2 = 0$ , и функция  $u$  имеет нулевую кривизну.

Очевидно, для того чтобы одно решение плавно переходило в другое, должна существовать такая область, в которой  $E > V(x)$ . Тогда отношение  $(d^2u/dx^2)/u$  может быть отрицательным и функция  $u$  будет вогнута по направлению к оси  $x$ ; при этом логарифмические производные могут оказаться одинаковыми.

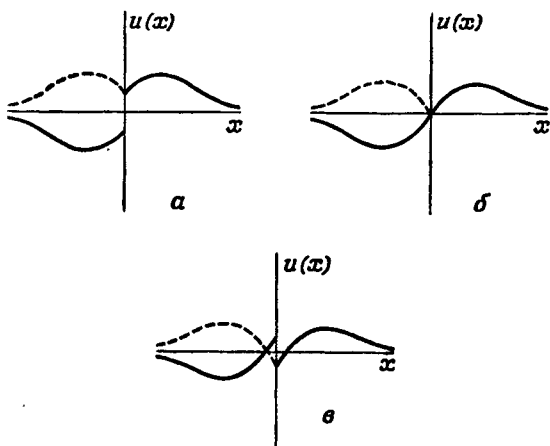
На фиг. 5, в показаны два решения, доведенные до общей точки  $x = 0$ , но соответствующие меньшему, чем нужно, значению  $E$ . По этой причине, если значения  $u$  в точке  $x = 0$  одинаковы (сплошная кривая), то оказываются различными значения производных; если же одинаковы производные, то будут различны сами функции  $u$  (пунктирная кривая слева и сплошная кривая справа). На фиг. 5, г показана функция  $u(x)$  для несколько больших (алгебраически) значений  $E$ , а на фиг. 5, д — случай еще большей энергии. В последних трех случаях значения  $E$  и  $V_{\text{мин}}$  отмечены на оси  $u$ , а точки поворота ( $TP$ ) указаны на оси  $x$ .

**Дискретные уровни энергии.** Таким образом, мы видим, что собственные функции оператора энергии для частицы с потенциальной энергией  $V(x)$ , удовлетворяющие граничным условиям и условиям непрерывности, могут существовать только для некоторых значений  $E$ , как это показано на фиг. 5, г. Аналогично классическому случаю, необходимым условием существования такой собственной функции является неравенство  $V_{\text{мин}} < 0$  (тогда  $E$  лежит между  $V_{\text{мин}}$  и 0). В одномерной задаче это условие, как и в классическом случае, является достаточным; однако в трехмерном случае дело может обстоять иначе (см. задачу 10 в гл. IV, а также § 9 и 15).

Если *потенциальная яма*, изображенная на фиг. 5, а, достаточно широка и глубока, то будет существовать еще одна собственная функция, принадлежащая более высокому собственному значению энергии (по-прежнему отрицательному). На фиг. 6, а, б и в изображена система волновых функций (аналогичных показанным на фиг. 5, в, г и е) для последовательно возрастающих (алгебраически) значений  $E$ . При  $x < 0$  представлены ветви функции  $u$ , соответствующие обоим знакам. На фиг. 5, г и б, в изображены собственные функции для двух наименьших соб-

ственных значений, т. е. двух наимизших *уровней энергии* частицы в потенциальной яме  $V(x)$ . Обобщая предыдущие качественные рассуждения, легко убедиться, что при переходе к более высоким дискретным уровням энергии, если они существуют, число узлов собственной функции каждый раз возрастает на единицу.

Таким образом, если при  $x \rightarrow \pm \infty$  потенциальная энергия стремится к конечному постоянному значению, то в зависимости от массы частицы и вида функции  $V(x)$  число дискретных уровней



Ф и г. 6. Решения для достаточно широкого или глубокого потенциала и для больших (алгебраически) значений  $E$ , чем в случае, изображенном на фиг. 5.

Значение  $E$  возрастает при переходе от  $a$  к  $б$  и  $в$ . В случае  $б$ , когда при  $x = 0$  волновая функция и ее производные непрерывны,  $E$  представляет собой собственное значение.

энергии может быть конечным, а в отдельных случаях и бесконечным (последнее будет иметь место, если  $V(x)$  достаточно медленно убывает при больших  $|x|$ ). Если, однако,  $V(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , то рассуждения типа приведенных выше показывают, что число дискретных уровней всегда будет бесконечно. Каждому из них (с точностью до произвольного постоянного множителя) будет принадлежать одна и только одна собственная функция  $u(x)$ .

**Непрерывные уровни энергии.** Для всех собственных значений оператора энергии, превышающих наименьшее из чисел  $V(+\infty)$  и  $V(-\infty)$ , можно найти собственные функции, удовлетворяющие как граничным условиям, так и условиям непрерывности. Пусть, например, потенциальная кривая имеет вид, представленный на фиг. 5,  $a$ . Тогда при любых положительных значениях  $E$  можно найти решения волнового уравнения. Это связано с тем, что

при больших  $|x|$  решения имеют вид

$$A \sin \alpha |x| + B \cos \alpha |x|, \quad \alpha = + \left( \frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{1/2}, \quad (8.6)$$

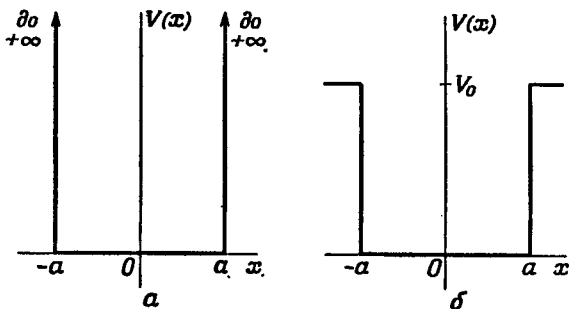
и нет никаких оснований отбрасывать какое-либо из двух слагаемых. Таким образом, при больших  $|x|$  фазы обеих волновых функций всегда можно подобрать так, чтобы при продолжении до точки  $x = 0$  решения плавно переходили друг в друга (это эквивалентно подбору отношений  $A/B$  для решений, соответствующих большим положительным и отрицательным значениям  $x$ ). По аналогии с классической механикой, движения, описываемые дискретными и непрерывными собственными значениями, иногда называют соответственно *периодическими* и *аперриодическими*.

**Дискретные и непрерывные собственные значения в трехмерном случае.** Без дальнейшего обсуждения мы предположим, что все полученные результаты можно непосредственно перенести на случай трехмерного волнового уравнения (8.2). Можно ожидать, что если  $V(\mathbf{r}) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow \infty$  (в любом направлении), то будет иметься бесконечное число дискретных уровней энергии, значения которых простираются до  $+\infty$ . Если же функция  $V(\mathbf{r})$  остается ограниченной при  $r \rightarrow \infty$  (в некотором направлении), то в зависимости от ее вида может существовать как конечное, так и бесконечное число уровней энергии. В этом случае энергия дискретного уровня не может превышать наименьшего из значений  $V(\infty)$ . Если  $E$  больше наименьшего значения  $V(\infty)$ , то собственные значения оператора энергии будут образовывать непрерывный спектр, простирающийся до  $+\infty$ .

### § 9. Одномерная прямоугольная потенциальная яма

В качестве простого примера явного квантовомеханического вычисления дискретных уровней энергии изучим движение частицы в области с постоянной потенциальной энергией, на границах которой имеются отражающие стенки. Рассмотрим два простых типа потенциальной энергии. На фиг. 7, а показан случай, когда  $V(x) = 0$  при  $-a < x < a$  и  $V(x) = +\infty$  при  $|x| > a$ , что соответствует идеально твердым непроницаемым стенкам, расположенным в точках  $x = \pm a$ . Потенциальная энергия, изображенная на фиг. 7, б, возрастает у стенки скачкообразно, но на конечную величину, так что  $V(x) = V_0$  при  $|x| > a$ . Руководствуясь видом  $V(x)$ , в этом случае часто говорят о *прямоугольной потенциальной яме*. Для обоих этих потенциалов движение классической частицы с полной энергией  $E < V_0$  будет одним и тем же, но, как мы увидим, квантовомеханическое поведение частицы оказывается различным. Скачкообразное возрастание потенциальной

энергии на границах области (на конечную величину), вообще говоря, приводит к отбрасыванию частицы внутрь области. Подобный потенциал можно представлять себе как предельный случай потенциала, изображенного на фиг. 5, а, где сила —  $dV/dx$  всегда направлена к точке  $x = 0$ . В прямоугольной потенциальной яме сила равна нулю везде, кроме границ, так что, за исключением внезапных импульсов, передаваемых частице в точках  $x = \pm a$  и направленных к началу координат, на частицу вообще не действуют никакие силы.



Фиг. 7. Одномерная прямоугольная яма с абсолютно твердыми стенками (а) и с конечным скачком потенциала (б).

**Идеально твердые стенки.** В § 8 было показано, что если вид потенциала определяется в соответствии с фиг. 7, а, то в точках  $x = \pm a$  волновая функция должна обращаться в нуль. При  $|x| < a$  волновое уравнение (8.5) записывается в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} = Eu, \quad (9.1)$$

и его общее решение есть

$$u(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \quad \alpha = + \left( \frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{1/2}. \quad (9.2)$$

Граничное условие при  $x = \pm a$  дает

$$\begin{aligned} A \sin \alpha a + B \cos \alpha a &= 0, \\ -A \sin \alpha a + B \cos \alpha a &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$A \sin \alpha a = 0, \quad B \cos \alpha a = 0.$$

Решение, для которого константы  $A$  и  $B$  равны нулю, не представляет физического интереса, так как при этом  $u = 0$  в любой точке. Нельзя также одновременно приравнять нулю  $\sin \alpha a$

и  $\cos \alpha a$  при одном и том же значении  $\alpha$  (т. е.  $E$ ). Поэтому имеется два возможных класса решений. Для первого класса

$$A = 0 \quad \text{и} \quad \cos \alpha a = 0,$$

а для второго

$$B = 0 \quad \text{и} \quad \sin \alpha a = 0.$$

Таким образом,  $\alpha a = n\pi/2$ , где для первого класса  $n$  — нечетное, а для второго класса — четное целое число. Таким образом, собственные функции обоих классов и принадлежащие им собственные значения энергии имеют вид

$$u(x) = B \cos \frac{n\pi x}{2a}, \quad \text{где } n \text{ нечетное;}$$

$$u(x) = A \sin \frac{n\pi x}{2a}, \quad \text{где } n \text{ четное;}$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{8ma^2} \quad \text{в обоих случаях.}$$

Ясно, что при  $n = 0$  получается физически неинтересное решение  $u = 0$ , а решения с отрицательными и положительными значениями  $n$  линейно связаны друг с другом. Во всех случаях константы  $A$  и  $B$  легко выбрать в соответствии с условием нормировки собственных функций  $u(x)$ .

Таким образом, мы получаем бесконечную систему дискретных уровней энергии, соответствующих всем положительным целым значениям квантового числа  $n$ . Каждому уровню принадлежит только одна собственная функция; число узлов (внутри потенциальной ямы) у  $n$ -й собственной функции равно  $n - 1$ . Эти результаты согласуются с общими соображениями § 8. Интересно отметить, что порядок величины энергии низшего (основного) состояния находится в соответствии с соотношением неопределенности (3.1). Неопределенность координаты порядка  $a$  приводит к неопределенности импульса порядка по меньшей мере  $\hbar/a$ , что в свою очередь приводит к минимальной кинетической энергии порядка  $\hbar^2/ma^2$ .

**Конечный скачок потенциала.** Если потенциальная энергия имеет вид, показанный на фиг. 7, б, то общее решение (9.2), по-прежнему справедливое при  $|x| < a$ , так как уравнение (9.1) в этой области не меняется, необходимо дополнить решением в области  $|x| > a$ . В этой области волновое уравнение имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + V_0 u = Eu,$$

и его общее решение при  $E < V_0$  (для связанного состояния) дается формулой

$$u(x) = Ce^{-\beta x} + De^{\beta x}, \quad \beta = + \left[ \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \right]^{1/2}. \quad (9.3)$$



В силу граничных условий при  $x = \pm \infty$ , рассмотренных в § 8, в области  $x > a$  нужно принять равной нулю константу  $D$ , а в области  $x < -a$  — константу  $C$ .

Наложим теперь на решения (9.2) и (9.3) условия непрерывности  $u$  и  $du/dx$  в точках  $x = \pm a$ :

$$\begin{aligned} A \sin \alpha a + B \cos \alpha a &= C e^{-\beta a}, & \alpha A \cos \alpha a - \alpha B \sin \alpha a &= -\beta C e^{-\beta a}, \\ -A \sin \alpha a + B \cos \alpha a &= D e^{-\beta a}, & \alpha A \cos \alpha a + \alpha B \sin \alpha a &= \beta D e^{-\beta a}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$2 A \sin \alpha a = (C - D) e^{-\beta a}, \quad 2\alpha A \cos \alpha a = -\beta (C - D) e^{-\beta a}, \quad (9.4)$$

$$2B \cos \alpha a = (C + D) e^{-\beta a}, \quad 2\alpha B \sin \alpha a = \beta (C + D) e^{-\beta a}. \quad (9.5)$$

При  $A \neq 0$  и  $C \neq D$  из уравнения (9.4) следует

$$\alpha \operatorname{ctg} \alpha a = -\beta. \quad (9.6)$$

Аналогично при  $B \neq 0$  и  $C \neq -D$  из уравнений (9.5) получим

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha a = \beta. \quad (9.7)$$

Уравнениям (9.6) и (9.7) нельзя удовлетворить одновременно, так как, исключив из них  $\beta$ , мы получим  $\operatorname{tg}^2 \alpha a = -1$ , откуда в противоречии с (9.3) следует, что  $\alpha$  — мнимое, а  $\beta$  — отрицательное число. Нельзя также требовать, чтобы все постоянные  $A, B, C$  и  $D$  обращались в нуль. Поэтому решения снова можно разделить на два класса. Для первого класса

$$A = 0, \quad C = D \quad \text{и} \quad \alpha \operatorname{tg} \alpha a = \beta,$$

а для второго класса

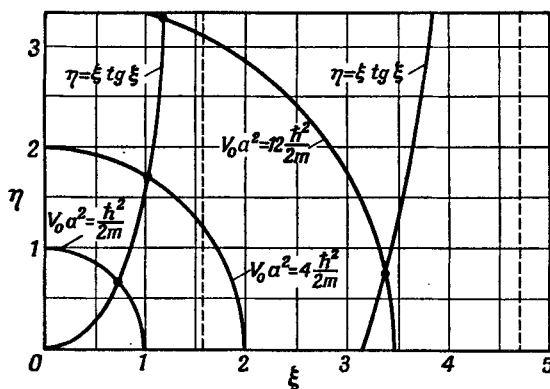
$$B = 0, \quad C = -D \quad \text{и} \quad \alpha \operatorname{ctg} \alpha a = -\beta.$$

**Уровни энергии.** Уровни энергии находятся путем численного или графического решения уравнений (9.6) и (9.7), где  $\alpha$  и  $\beta$  определяются выражениями (9.2) и (9.3). Мы опишем простой графический метод решений, позволяющий с полной ясностью выявить зависимость числа дискретных уровней от  $V_0$  и  $a$ . Положим  $\xi = \alpha a$ ,  $\eta = \beta a$ ; тогда уравнение (9.7) примет вид  $\xi \operatorname{tg} \xi = \eta$ , причем

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}.$$

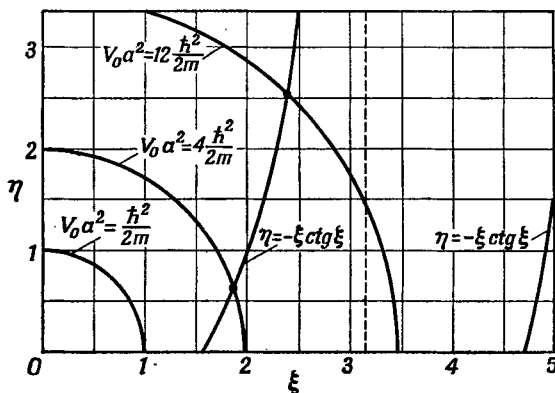
Поскольку величины  $\xi$  и  $\eta$  могут принимать только положительные значения, уровни энергии определяются (лежащими в первом квадранте) точками пересечения кривой  $\eta = \xi \operatorname{tg} \xi$  с окружностью заданного радиуса  $(2mV_0 a^2 / \hbar^2)^{1/2}$ . На фиг. 8 изображено необходимое построение для трех значений  $V_0 a^2$ . Двум меньшим значениям этого произведения принадлежит по одному, а большему — два решения уравнения (9.7).

На фиг. 9 аналогичное построение проведено для уравнения (9.6), когда уровни энергии определяются пересечением тех же окружностей с кривой  $\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi$  (в первом квадранте). Для



Ф и г. 8. Графическое решение уравнения (9.7) для трех значений  $V_0 a^2$ .

Вертикальные пунктирные линии представляют первые две асимптоты кривых  $\eta = \xi \operatorname{tg} \xi$ .



Ф и г. 9. Графическое решение уравнения (9.6) для трех значений  $V_0 a^2$ .

Вертикальная пунктирная линия представляет собой первую асимптоту кривой  $\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi$ .

наименьшего значения  $V_0 a^2$  решение отсутствует, а двум другим принадлежит по одному решению. Таким образом, всего для трех последовательно возрастающих значений  $V_0 a^2$  имеется соответственно один, два и три уровня энергии.

Из фиг. 8 и 9 ясно, что при заданной массе частицы уровни энергии зависят от параметров потенциальной энергии через

произведение  $V_0 a^2$ . Если  $V_0 a^2$  лежит между нулем и  $\pi^2 \hbar^2 / 8m$ , то имеется лишь один уровень энергии первого класса; в области  $\pi^2 \hbar^2 / 8m \leq V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 2m$  имеется по одному уровню энергии каждого класса, т. е. всего два уровня. По мере возрастания  $V_0 a^2$  уровни энергии последовательно появляются то для одного класса решений, то для другого. С помощью (9.2) нетрудно видеть, что если расположить собственные функции в порядке возрастания собственных значений, то у  $n$ -й собственной функции будет  $n - 1$  узел.

**Четность.** Из предыдущего ясно, что собственные функции первого класса будут четными, а второго класса — нечетными относительно изменения знака  $x$ . Это разделение собственных функций на четные и нечетные отнюдь не случайно; мы увидим сейчас, что оно непосредственно связано с симметрией потенциальной энергии  $V(x)$  относительно точки  $x = 0$ . Если в волновом уравнении (8.5)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x) u(x) = E u(x) \quad (9.8)$$

изменить знак у  $x$  и если  $V(-x) = V(x)$ , то мы получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(-x)}{dx^2} + V(x) u(-x) = E u(-x).$$

Таким образом, функции  $u(x)$  и  $u(-x)$  удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению и принадлежат одному и тому же собственному значению  $E$ . Если каждому уровню энергии соответствует лишь одна собственная функция, то эти решения могут отличаться только постоянным множителем:

$$u(-x) = \varepsilon u(x). \quad (9.9)$$

Изменяя в (9.9) знак у  $x$ , получаем  $u(x) = \varepsilon u(-x)$ . Из двух этих соотношений непосредственно следует, что

$$\varepsilon^2 = 1 \quad \text{или} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Таким образом, для симметричного потенциала все собственные функции являются либо четными, либо нечетными. О таких волновых функциях говорят, что они характеризуются определенной четностью.

Если некоторому собственному значению принадлежит несколько линейно независимых собственных функций, то они необязательно обладают определенной четностью, т. е. необязательно являются четными или нечетными. Легко видеть, однако, что можно найти такие линейные комбинации этих собственных функций, которые будут либо четными, либо нечетными. Пусть собственная функция  $u(x)$  не имеет определенной четности. Ее

всегда можно записать в виде

$$u(x) = u_{\text{ч}}(x) + u_{\text{н}}(x),$$

где  $u_{\text{ч}}(x) = 1/2[u(x) + u(-x)]$  — четная, а  $u_{\text{н}}(x) = 1/2[u(x) - u(-x)]$  — нечетная функции. Тогда, если волновое уравнение (9.8) симметрично, его можно записать в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_{\text{ч}}}{dx^2} + (V - E) u_{\text{ч}} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_{\text{н}}}{dx^2} + (V - E) u_{\text{н}} = 0. \quad (9.10)$$

Изменяя в (9.10) знак у  $x$ , получаем

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_{\text{ч}}}{dx^2} + (V - E) u_{\text{ч}} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_{\text{н}}}{dx^2} - (V - E) u_{\text{н}} = 0. \quad (9.11)$$

Складывая и вычитая уравнения (9.10) и (9.11), находим, что каждая из функций  $u_{\text{ч}}$  и  $u_{\text{н}}$  удовлетворяет волновому уравнению с одним и тем же собственным значением  $E$ .

**Упрощенное решение.** Зная, что решения обладают определенной четностью, можно иногда упростить процедуру вычисления уровней энергии, так как в этом случае достаточно найти решение лишь для положительных значений  $x$ . Для четных решений в точке  $x = 0$  обращается в нуль производная, а для нечетных — сама волновая функция. Пусть, например, требуется найти четные решения. Тогда вместо выражения (9.2) и (9.3) сразу же можно написать

$$\begin{aligned} u(x) &= B \cos \alpha x, & 0 < x < a, \\ u(x) &= C e^{-\beta x}, & x > a. \end{aligned}$$

Вместо того, чтобы требовать непрерывности  $u$  и  $du/dx$  при  $x = a$ , достаточно потребовать непрерывности логарифмической производной  $(1/u)(du/dx)$ , так как нормировочные постоянные  $B$  и  $C$  при этом исключаются. Это тотчас же приводит к уравнению (9.7). Аналогично нечетные решения имеют вид

$$\begin{aligned} u(x) &= A \sin \alpha x, & 0 < x < a, \\ u(x) &= C e^{-\beta x}, & x > a, \end{aligned}$$

и из условия непрерывности логарифмической производной  $(1/u)(du/dx)$  при  $x = a$  сразу же получается уравнение (9.6).

### ЗАДАЧИ

1. Исходя из соображений, приведенных в § 6, найти для свободной частицы дифференциальное уравнение для  $\psi$ , содержащее вторую производную  $\psi$  по времени. Рассмотреть какие-либо его решения, не совпадающие с решениями уравнения Шредингера, для свободной частицы.

2. Показать, что одномерное волновое уравнение (6.8), описывающее движение свободной частицы, инвариантно по отношению к преобразованиям

Галилея. Для этого показать, что если провести преобразование  $x' = x - vt$ ,  $t' = t$ , то преобразованная волновая функция имеет вид  $\psi'(x', t') = \psi(x', t') \times \times e^{if(x', t')}$  (где  $f$  зависит только от  $x'$ ,  $t'$ ,  $\hbar$ ,  $m$  и  $v$ ) и удовлетворяет уравнению (6.8) со штрихованными переменными. Найти вид функции  $f$  и показать, что решение  $\psi(x, t) = Ae^{i(\hbar x - \omega t)}$ , описывающее бегущую волну, преобразуется так, как и следовало ожидать.

3. Как быстро должна убывать при больших  $r$  функция  $\psi$ , описывающая волновой пакет, для того чтобы объемный интеграл от  $P$  и поверхностный интеграл  $S_n$  в (7.4) были сходящимися?

4. Показать непосредственным путем, что значение  $\langle p_x \rangle$  для волнового пакета вещественно.

5. Показать, что для трехмерного волнового пакета имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{1}{m} (\langle xp_x \rangle + \langle px^2 \rangle).$$

6. Вычислить уровни энергии и начертить графики собственных функций для трех связанных состояний частицы с потенциальной энергией, изображенной на фиг. 7, б, где  $V_0 a^2 = 6\hbar^2/m$ . Сравнить с первыми тремя состояниями для случая потенциала, изображенного на фиг. 7, а.

7. Рассмотреть соотношение между уровнями энергии для потенциала, изображенного на фиг. 7, б, и уровнями энергии для потенциала  $V(x) = +\infty$ ,  $x < 0$ ;  $V(x) = 0$ ,  $0 < x < a$ ;  $V(x) = V_0$ ,  $x > a$ .

8. Показать, что если потенциальную энергию  $V(r)$  везде изменить на постоянную величину, то не зависящие от времени волновые функции останутся неизменными. Что произойдет при этом с собственными значениями оператора энергии?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Schrödinger E., Ann. d. Phys., **79**, 361, 489 (1926); **81**, 109 (1926).
2. Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., **20**, 367 (1948). (Имеется русский перевод в сборнике „Вопросы причинности в квантовой механике“, ИЛ, 1955.)
3. Born M., Zs. f. Phys., **37**, 863 (1926); Nature, **119**, 354 (1927).
4. Ehrenfest P., Zs. f. Phys., **45**, 455 (1927).

---

## СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В гл. II было получено волновое уравнение Шредингера и рассмотрено его применение к решению одной простой задачи. В § 7 были сделаны некоторые замечания о физическом истолковании волновой функции. Главным образом они относились к вопросу о вычислении средних значений операторов, характеризующих различные физические величины; однако, сверх того, было введено еще представление о плотности вероятности пространственных координат. Таким образом, мы можем с помощью волновой функции вычислить любую величину, зависящую от положения частицы в пространстве (таково, например, среднеквадратичное отклонение координаты частицы от среднего значения). В то же время для других операторов мы пока умеем вычислять лишь средние значения. Очевидно, для полноты нашей интерпретации волновой функции нужно научиться вычислять вероятности различных значений для произвольных операторов; это, в частности, позволит нам получать и выражения для средних значений (использовавшиеся в § 7), не делая каждый раз особых предположений.

В настоящей главе мы прежде всего сформулируем три физических постулата, на основании которых можно получить полное истолкование волновой функции; далее с их помощью будет обсужден вопрос о полной энергии и импульсе частицы, а также решена одна иллюстративная задача. Легко видеть, что интерпретация, предложенная в § 7, будет получаться как частный случай более общей трактовки, развиваемой в настоящей главе.

### § 10. Физические постулаты и собственные функции оператора энергии

Будем исходить из волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , являющейся решением уравнения (6.16) и описывающей движение частицы с массой  $m$  и потенциальной энергией  $V(\mathbf{r})$ . Постараемся с помощью этой волновой функции получить наиболее полное описание движения частицы, согласующееся с обсуждавшимися в § 3 соотношениями неопределенности.

**Представление динамических переменных с помощью операторов.** Первый постулат состоит в том, что *каждая динамическая*

переменная, характеризующая движение частицы, может быть представлена линейным оператором. Последний может быть как просто оператором умножения (например,  $\mathbf{r}$ , если речь идет о пространственной координате частицы), так и дифференциальным оператором (например, —  $i\hbar \text{grad}$  для импульса).

С каждым оператором связано линейное уравнение для нахождения собственных значений, аналогичное введенному в начале § 8. Так, оператору  $\Omega$  соответствует уравнение

$$\Omega u_{\omega} = \omega u_{\omega}, \quad (10.1)$$

где  $u_{\omega}$  — собственная функция  $\Omega$ , принадлежащая собственному значению  $\omega$ .

Второй постулат гласит, что в результате точного измерения динамической переменной, характеризуемой оператором  $\Omega$ , может получаться лишь какое-либо из собственных значений  $\omega$ . Отсюда следует, что собственные значения всех операторов, характеризующих физические переменные, являются вещественными числами.

**Разложение по собственным функциям.** Предположим, что все собственные функции любой динамической переменной образуют полную систему в том смысле, что по ним можно разложить произвольную непрерывную функцию. Это предположение носит математический, а не физический характер; в дальнейшем мы обсудим его в связи с вопросом о собственных функциях операторов энергии и импульса.

Предположим теперь, что некоторая волновая функция  $\psi$  разложена по собственным функциям  $u_{\omega}$  оператора  $\Omega$ . Примем статистическую интерпретацию  $\psi$ , изложенную в начале § 7. Согласно этой интерпретации, в пространстве имеется большое число тождественных неперекрывающихся областей, в каждой из которых находится частица, описываемая функцией  $\psi$ . Будем теперь для каждой из этих частиц измерять динамическую переменную, характеризуемую оператором  $\Omega$ . Третий физический постулат утверждает, что число измерений, при которых получается собственное значение  $\omega$ , пропорционально квадрату абсолютной величины коэффициента при  $u_{\omega}$  в разложении функции  $\psi$ . Этот постулат, введенный Борном (см. стр. 35), позволяет определять вероятности тех или иных значений любой динамической переменной<sup>1)</sup>. Отсюда следует, что мы можем с достоверностью измерить некоторое собственное значение  $\omega$  лишь в том случае, если волновая функция, описывающая частицу, совпадает с соответствующей собственной функцией  $u_{\omega}$ .

<sup>1)</sup> Другая, детерминистическая, интерпретация, использующая вместо динамических переменных представление о „скрытых параметрах“, была предложена Бомом [1], но она не является общепринятой.

Вместо того чтобы выводить следствия из этих постулатов для произвольного оператора  $\Omega$ , мы рассмотрим в настоящем параграфе полную энергию частицы, а в § 11—ее импульс. Большая часть результатов, которые мы получим, справедлива и для операторов других физических величин.

**Оператор полной энергии.** В силу соотношений неопределенности (3.3) полную энергию частицы невозможно точно измерить в течение ограниченного промежутка времени. Поэтому для того, чтобы полная энергия имела определенное значение, существенно, чтобы потенциальная энергия  $V(\mathbf{r})$  не зависела от времени. Тогда собственные функции  $u(\mathbf{r})$  оператора  $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})$ , эквивалентного, как показано в § 8, оператору полной энергии  $i\hbar \partial/\partial t$ , не должны зависеть от времени. Собственные значения оператора энергии определяются уравнением (8.2)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right]u_E(\mathbf{r}) = Eu_E(\mathbf{r}), \quad (10.2)$$

где собственная функция  $u_E(\mathbf{r})$ , принадлежащая собственному значению  $E$ , должна удовлетворять граничным условиям и условиям непрерывности, рассмотренным в § 8.

Как указывалось в § 8, собственные функции оператора энергии можно разделить на два класса: функции первого класса локализованы в конечной области и принадлежат дискретным собственным значениям; функции второго класса остаются конечными на больших расстояниях и спектр собственных значений непрерывен.

**Нормировка в ящике.** Часто бывает желательным рассматривать оба класса функций единым образом; это можно сделать, помещая исследуемую частицу в ящик произвольного большого, но конечного объема. Простейшим примером является случай ящика с идеально твердыми стенками, на которых, как показано в § 8, волновая функция обращается в нуль. В этом случае, как показано в § 8, все собственные значения дискретны. Если ящики велики по сравнению с характерными для данной задачи размерами, то собственные значения, которые в отсутствие ящика были дискретными, практически не изменяются, так как до введения стенок волновые функции в этих местах были чрезвычайно малы. Что же касается собственных значений, которые при отсутствии ящика были распределены непрерывно, то они очень близко расположены друг к другу; для свободной частицы это будет явно показано в § 11.

Удобнее предположить, что на стенках ящика волновые функции не обращаются в нуль, а подчиняются *периодическим граничным условиям*, так как при этом собственные функции оператора импульса имеют более простой вид (см. § 11). Пусть



наш ящик („область периодичности“) имеет форму куба с длиной ребра  $L$  и центром в начале координат (куб периодичности); потребуем, чтобы на соответствующих точках противоположных граней куба волновые функции (равно как и их производные по нормали к стенке) принимали одинаковые значения. Без этих граничных условий собственные значения были бы непрерывны, теперь же они становятся дискретными, так как фазы собственных функций на больших расстояниях уже не произвольны [см. дискуссию в связи с соотношениями (8.6)]. Как и в случае ящика с твердыми стенками, влияние, которое оказывают стенки, пренебрежимо мало; их роль ограничивается тем, что непрерывные собственные значения становятся дискретными, и волновые функции можно нормировать в области конечного объема; мы по-прежнему будем называть эти функции „непрерывными“, даже если они нормированы в объеме ящика.

**Свойство ортонормированности собственных функций оператора энергии.** Интеграл  $\int |u_E(\mathbf{r})|^2 d\tau$ , всегда сходящийся для собственных функций дискретного спектра, сходится для всех собственных функций, нормированных в ящике конечного объема  $L^3$ . Коэффициент при  $u_E$  можно в этом случае выбрать таким образом, чтобы этот интеграл был равен единице; тогда функция  $u_E(\mathbf{r})$  будет нормирована.

Покажем теперь, что собственные функции, принадлежащие двум различным собственным значениям,  $E$  и  $E'$ , являются *ортogonalными*, т. е. интеграл от произведения одной из функций на комплексно-сопряженное значение другой, взятый по общей области определения обеих функций, равен нулю. Из уравнения (10.2) следует, что  $\bar{u}_{E'}(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \bar{u}_{E'}(\mathbf{r}) = E' \bar{u}_{E'}(\mathbf{r}), \quad (10.3)$$

где, в соответствии с принятой физической интерпретацией, величина  $E'$  считается вещественной; в дальнейшем это предположение будет оправдано. Умножим уравнение (10.2) на  $\bar{u}_{E'}$ , а (10.3) — на  $u_E$ , проинтегрируем по объему  $L^3$  и составим разность полученных таким путем выражений. При этом члены, содержащие  $V$ , сокращаются, и мы получаем

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int (\bar{u}_{E'} \nabla^2 u_E - u_E \nabla^2 \bar{u}_{E'}) d\tau = (E - E') \int \bar{u}_{E'} u_E d\tau. \quad (10.4)$$

Интеграл в левой части (10.4) с помощью теоремы Грина можно преобразовать в интеграл по поверхности куба  $A$ :

$$\begin{aligned} \int (\bar{u}_{E'} \nabla^2 u_E - u_E \nabla^2 \bar{u}_{E'}) d\tau &= \int \operatorname{div} (\bar{u}_{E'} \operatorname{grad} u_E - u_E \operatorname{grad} \bar{u}_{E'}) d\tau = \\ &= \int_A (\bar{u}_{E'} \operatorname{grad} u_E - u_E \operatorname{grad} \bar{u}_{E'})_n dA, \end{aligned} \quad (10.5)$$

где индекс  $n$  означает проекцию вектора на внешнюю нормаль к элементу поверхности  $dA$ . Поверхностный интеграл в (10.5) равен нулю, так как в силу условия периодичности волновая функция и ее производная в направлении нормали на соответствующих точках противоположных граней куба имеют одинаковые значения, а производные в направлении внешней нормали на противоположных гранях куба имеют противоположные знаки. Тогда из равенства (10.4) следует, что при  $E \neq E'$  функции  $u_E$  и  $u_{E'}$  ортогональны<sup>1)</sup>.

Собственное значение  $E$  оператора энергии называют *вырожденным*, если ему соответствуют две или более линейно независимые собственные функции  $u_1, u_2, \dots$ . Составляя линейные комбинации вырожденных собственных функций, можно многими различными способами получить взаимно ортогональные функции. Например, функцию  $u_\alpha = a_1 u_1 + a_2 u_2$  можно сделать ортогональной к  $u_1$ , выбирая коэффициенты так, чтобы они удовлетворяли соотношению

$$\frac{a_1}{a_2} = - \frac{\int \bar{u}_1 u_2 d\tau}{\int |u_1|^2 d\tau};$$

это не нарушает условия нормировки  $u_\alpha$ , и  $u_2$  по-прежнему является собственной функцией оператора энергии, принадлежащей собственному значению  $E$ . Выбор ортогональных линейных комбинаций, очевидно, не однозначен. Описанным способом можно сделать взаимно ортогональными все собственные функции оператора энергии, даже если некоторые из собственных значений вырождены.

Совокупность подобных собственных функций, каждая из которых нормирована и ортогональна ко всем остальным, называется *ортонормированной* системой функций. Ортонормированная система невырожденных собственных функций оператора энергии характеризуется соотношением

$$\int \bar{u}_{E'}(\mathbf{r}) u_E(\mathbf{r}) d\tau = \delta_{EE'}, \quad (10.6)$$

где  $\delta_{EE'}$  — символ Кронекера, равный единице, если  $E = E'$ , и равный нулю, если  $E \neq E'$ . При наличии вырождения равенство (10.6) нужно заменить на

$$\int \bar{u}_{E's'}(\mathbf{r}) u_{E_s}(\mathbf{r}) d\tau = \delta_{EE'} \delta_{ss'}, \quad (10.7)$$

<sup>1)</sup> Очевидно, что приведенное доказательство ортогональности собственных функций *дискретного* спектра справедливо и в отсутствие ящика, так как на больших расстояниях функции  $u$  быстро убывают, и поверхностный интеграл, который в этом случае берется по сфере бесконечного радиуса, равен нулю. Собственные функции, принадлежащие непрерывному спектру оператора энергии, тоже можно рассматривать, не прибегая к нормировке в объеме ящика (как это сделано в § 11 для собственных функций оператора импульса, принадлежащих непрерывному спектру). В связи с этим см. книгу Кембла [2], в которой содержится подробное обсуждение вопроса и приводятся ссылки на оригинальные работы.

где индексом  $s$  обозначены различные ортогональные вырожденные собственные функции. Часто оказывается удобным не вводить явным образом индекс  $s$ , пользуясь и для вырожденных состояний соотношением (10.6); индекс  $s$  в этом случае подразумевается.

**Вещественность собственных значений оператора энергии.** Теперь можно непосредственно показать, что, как и предполагалось, числа  $E$  вещественны. Для этой цели умножим уравнение (10.2) на  $\bar{u}_E(\mathbf{r})$  и проинтегрируем по кубу периодичности объема  $L^3$ . Если функция  $u_E$  нормирована, то в результате получим

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \bar{u}_E \nabla^2 u_E d\tau + \int V(\mathbf{r}) |u_E|^2 d\tau,$$

причем правую часть этого соотношения, выраженную через средние значения, можно записать в виде  $(1/2m) \langle p^2 \rangle + \langle V \rangle$ .

Второй член  $V$  вещественен, в силу вещественности подинтегрального выражения. Что касается первого члена, то можно непосредственно убедиться в его вещественности, выполнив интегрирование по частям:

$$-\int \bar{u}_E \nabla^2 u_E d\tau = \int (\text{grad } \bar{u}_E) \cdot (\text{grad } u_E) d\tau - \int \bar{u}_E (\text{grad } u_E)_n dA.$$

Объемный интеграл, очевидно, вещественен, а интеграл по поверхности [как и в случае (10.5)] равен нулю в силу периодичности граничных условий на стенках ящика. Интересно отметить, что величина  $\langle p^2 \rangle$  не может быть отрицательной.

**Разложение по собственным функциям оператора энергии.** Как указывалось в начале настоящего параграфа, мы делаем математическое допущение, согласно которому собственные функции  $u_E(\mathbf{r})$  полного оператора энергии образуют полную систему, т. е. по ним можно разложить произвольную непрерывную функцию<sup>1)</sup>.

Пусть теперь в некоторый момент времени задана какая-то функция  $\psi(\mathbf{r})$ , нормированная в ящике объема  $L^3$  и подчиняющаяся на его стенках периодическим граничным условиям. Предполагая, что существует разложение

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_E A_E u_E(\mathbf{r}), \quad (10.8)$$

можно однозначно определить не зависящие от  $\mathbf{r}$  коэффициенты  $A_E$ .

Коэффициенты в разложении (10.8) можно определить, умножая обе части равенства на  $\bar{u}_{E'}$  и интегрируя по объему ящика.

<sup>1)</sup> Дальнейшее обсуждение см. в книге Кембла [2], гл. 4, § 30.

Допуская, что можно изменить порядок суммирования и интегрирования<sup>1)</sup>, получим с помощью (10.6) или (10.7)

$$\int \bar{u}_{E'}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\tau = \sum_E A_E \int \bar{u}_{E'}(\mathbf{r}) u_E(\mathbf{r}) d\tau = \sum_E A_E \delta_{EE'} = A_{E'} \quad (10.9)$$

**Условие полноты.** Подставляя выражение (10.9) для  $A_E$  обратно в формулу (10.8), получаем

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_E \left[ \int \bar{u}_E(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\tau' \right] u_E(\mathbf{r}),$$

или, изменяя порядок суммирования и интегрирования,

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \psi(\mathbf{r}') \left[ \sum_E \bar{u}_E(\mathbf{r}') u_E(\mathbf{r}) \right] d\tau'. \quad (10.10)$$

Поскольку  $\psi(\mathbf{r})$  — произвольная непрерывная функция, из равенства (10.10) следует, что заключенная в квадратные скобки часть подинтегрального выражения равна нулю при всех значениях  $\mathbf{r}'$ , кроме  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ . Действительно, в противном случае при изменении  $\psi$  в точках  $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$  в силу (10.10) изменится и значение  $\psi$  в точке  $\mathbf{r}$ , что противоречит допущению о произвольности  $\psi$ . Если же область пространства, по которой производится интегрирование, содержит точку  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ , то интеграл от выражения в скобках должен быть равен единице. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_E \bar{u}_E(\mathbf{r}') u_E(\mathbf{r}) &= 0, \quad \mathbf{r}' \neq \mathbf{r}, \\ \int \sum_E \bar{u}_E(\mathbf{r}') u_E(\mathbf{r}) d\tau' &= 1, \end{aligned} \quad (10.11)$$

если область, по которой производится интегрирование, содержит точку  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ .

Равенства (10.11) носят название условия полноты для ортонормированных функций  $u_E(\mathbf{r})$ . Они вытекают непосредственно из полноты системы, выражаемой соотношением (10.8), и справедливы независимо от того, являются ли данные функции собственными функциями оператора энергии или нет.

**Вероятность и среднее значение.** Согласно второму и третьему физическим постулатам, сформулированным в начале настоящего параграфа, при точном измерении полной энергии могут получаться лишь собственные значения оператора энергии; если

<sup>1)</sup> В принципе законность изменения порядка суммирования и интегрирования нужно исследовать для каждого случая отдельно. Относящиеся к этому вопросу математические соображения выходят за рамки настоящей книги, и мы всегда будем предполагать, что в случаях, представляющих физический интерес, подобное изменение порядка суммирования и интегрирования допустимо.

частица описывается волновой функцией  $\psi(\mathbf{r})$ , то вероятность того, что при измерении получится некоторое значение  $E$ , пропорциональна  $|A_E|^2$ . Нетрудно видеть, что множитель пропорциональности равен единице, так как если вероятность некоторого значения энергии

$$P(E) = |A_E|^2, \quad (10.12)$$

то при суммировании по всем  $P(E)$  получается единица:

$$\begin{aligned} \sum_E P(E) &= \sum_E \int \bar{u}_E(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\tau \int u_E(\mathbf{r}') \bar{\varphi}(\mathbf{r}') d\tau' = \\ &= \int \int \bar{\varphi}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) \left[ \sum_E \bar{u}_E(\mathbf{r}) u_E(\mathbf{r}') \right] d\tau d\tau' = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 d\tau = 1. \end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь соотношением (10.11) и условием нормировки функции  $\psi$ .

С помощью выражения для вероятности можно вычислить и среднее значение энергии:

$$\langle E \rangle = \sum_E E P(E) = \sum_E \int E \bar{u}_E(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\tau \int u_E(\mathbf{r}') \bar{\varphi}(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (10.13)$$

В первый интеграл подставим вместо  $E \bar{u}_E$  соответствующее выражение из уравнения (10.3) и дважды проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int E \bar{u}_E(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\tau &= \int \psi(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \bar{u}_E(\mathbf{r}) d\tau = \\ &= \int \bar{u}_E(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) d\tau. \end{aligned}$$

Два поверхностных интеграла, получающиеся при интегрировании по частям, обращаются в нуль в силу периодических граничных условий, которым подчиняются функции  $u_E$  и  $\psi$ . Таким образом, с помощью (10.11) и (10.13) получаем

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \sum_E \int \bar{u}_E(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) d\tau \int u_E(\mathbf{r}') \bar{\varphi}(\mathbf{r}') d\tau' = \\ &= \int \int \bar{\varphi}(\mathbf{r}') \left\{ \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) \right\} \left[ \sum_E \bar{u}_E(\mathbf{r}) u_E(\mathbf{r}') \right] d\tau d\tau' = \\ &= \int \bar{\varphi}(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) d\tau. \quad (10.14) \end{aligned}$$

Результат, содержащийся в (10.14), подтверждает сделанное в § 7 предположение о том, что для вычисления среднего значения некоторой величины нужно поместить соответствующий оператор между  $\bar{\varphi}(\mathbf{r})$  и  $\psi(\mathbf{r})$  так, чтобы он действовал только на  $\psi(\mathbf{r})$ , а затем проинтегрировать по всем  $\mathbf{r}$ .

**Общее решение уравнения Шредингера.** Если потенциальная энергия  $V(\mathbf{r})$  не зависит от  $t$  и если известно решение уравнения Шредингера (6.16) для некоторого момента времени, то можно записать формальное выражение для решения, справедливого в любой момент времени. Разложим функцию  $\psi(\mathbf{r}, t)$  по собственным функциям оператора энергии (коэффициенты разложения при этом будут зависеть от времени):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_E A_E(t) u_E(\mathbf{r}), \quad A_E(t) = \int \bar{u}_E(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) d\tau. \quad (10.15)$$

Подставляя (10.15) в волновое уравнение (6.16), получаем

$$i\hbar \sum_E u_E(\mathbf{r}) \frac{d}{dt} A_E(t) = \sum_E A_E(t) E u_E(\mathbf{r}). \quad (10.16)$$

Вследствие ортонормированности функций  $u_E$  уравнение (10.16) эквивалентно следующему:

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_E(t) = E A_E(t).$$

Отсюда, интегрируя, непосредственно получаем

$$A_E(t) = A_E(t_0) e^{-iE(t-t_0)/\hbar}. \quad (10.17)$$

Заметим, что величина  $P(E) = |A_E(t)|^2 = |A_E(t_0)|^2$  не зависит от времени.

Таким образом, если функция  $\psi(\mathbf{r}, t)$  известна в момент  $t = t_0$ , то с помощью соотношений (10.15) и (10.17) можно определить решение для произвольного момента времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_E A_E(t_0) e^{-iE(t-t_0)/\hbar} u_E(\mathbf{r}), \\ A_E(t_0) &= \int \bar{u}_E(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', t_0) d\tau', \end{aligned} \quad (10.18)$$

или

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \left[ \sum_E \bar{u}_E(\mathbf{r}') u_E(\mathbf{r}) e^{-iE(t-t_0)/\hbar} \right] \psi(\mathbf{r}', t_0) d\tau'. \quad (10.19)$$

Решение (10.18) представляет собой линейную комбинацию полученных ранее частных решений (8.3).

## § 11. Собственные функции оператора импульса

Собственные функции оператора импульса —  $i\hbar \text{grad}$  дают второй поучительный пример применения общих соображений, изложенных в начале предыдущего параграфа. Они оказываются также весьма полезными при решении физически интересных задач.

**Вид собственных функций.** Собственные функции оператора импульса удовлетворяют трем уравнениям для определения собственных значений:

$$-i\hbar \operatorname{grad} u_p(\mathbf{r}) = p u_p(\mathbf{r}) \quad (11.1)$$

или

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} u_p(\mathbf{r}) &= p_x u_p(\mathbf{r}), & -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} u_p(\mathbf{r}) &= p_y u_p(\mathbf{r}), \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} u_p(\mathbf{r}) &= p_z u_p(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Они имеют вид

$$u_p(\mathbf{r}) = C e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar},$$

где  $C$  — нормировочная постоянная.

Как и в § 6, удобно перейти от вектора импульса  $\mathbf{p}$  к волновому вектору  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ , переписав собственные функции оператора импульса в виде

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = C e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (11.2)$$

Это равенство определяет собственные функции оператора импульса, принадлежащие собственным значениям  $\hbar\mathbf{k}$ .

**Нормировка в ящике.** Как и в случае собственных функций оператора энергии, рассматривавшемся в § 10, можно ограничиться заданием функции  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  в произвольно большом, но конечном кубе объема  $L^3$  с центром в начале координат. На стенках этого куба функции должны удовлетворять граничным условиям периодичности. Тогда условие нормировки дает  $C = L^{-3/2}$ . Вектор  $\mathbf{k}$  более не является произвольным: его компоненты могут принимать лишь значения

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (11.3)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  — положительные или отрицательные целые числа или нули. Выбирая  $L$  достаточно большим, можно сделать расстояния между соседними собственными векторами  $\mathbf{k}$  сколь угодно малыми; соответственно как угодно близко будут расположены и собственные значения оператора энергии  $\hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m$ .

Интересно отметить, что собственными функциями (11.2) нельзя пользоваться внутри ящика с идеально твердыми стенками, так как эти функции нигде не обращаются в нуль. Это аналогично классической ситуации, когда импульс частицы не сохраняется при отражении от твердой стенки. С другой стороны, кубический ящик, на стенках которого волновая функция

должна подчиняться граничным условиям периодичности, соответствует случаю, когда все бесконечное пространство разделено на кубы, и все волновые функции — периодичны с периодом  $L$  по каждой из трех осей прямоугольной системы координат. Если условие периодичности пространства перенести в соответствующую классическую задачу, то частица, проходящая через стенку, будет эквивалентна частице, падающей на эту стенку и появляющейся (с тем же импульсом) в соответствующей точке противоположной стенки.

Легко убедиться в том, что собственные функции оператора импульса

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = L^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (11.4)$$

ортонормированы. Действительно, интегрируя по области объема  $L^3$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \int \bar{u}_l(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) d\tau &= \\ &= \frac{1}{L^3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} dz = \\ &= \delta_{k_x l_x} \delta_{k_y l_y} \delta_{k_z l_z} = \delta_{\mathbf{k}l}, \end{aligned} \quad (11.5)$$

где  $\delta$  — символ Кронекера, и при вычислении использованы равенства (11.3). Ортонормированность можно доказать также с помощью более общего метода, использованного в § 10 для собственных функций оператора энергии [см. (10.4)].

**Дельта-функция Дирака.** В § 10 указывалось, что в случае собственных функций непрерывного спектра необязательно вводить куб периодичности (что приводит к превращению спектра в дискретный, причем расстояние между собственными значениями может быть сделано как угодно малым). Для собственных функций оператора импульса в этом можно явно убедиться, вводя  $\delta$ -функцию Дирака [3]. Последнюю можно определить с помощью соотношений

$$\delta(x) = 0, \text{ если } x \neq 0, \quad \int \delta(x) dx = 1, \quad (11.6)$$

где область интегрирования содержит точку  $x = 0$ . Эквивалентное определение гласит, что для произвольной функции  $f(x)$ , непрерывной в точке  $x = 0$ , имеет место равенство

$$\int f(x) \delta(x) dx = f(0); \quad (11.7)$$

здесь область интегрирования опять содержит точку  $x = 0$ .

Сопоставление формул (11.6) и (10.11) или (11.7) и (10.10)



показывает, что величину в скобках в формуле (10.10) можно выразить через  $\delta$ -функции

$$\sum_E \bar{u}_E(\mathbf{r}') u_E(\mathbf{r}) = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (11.8)$$

Сравнивая далее (11.8) и (10.6), можно видеть, что условие полноты представляет собой своего рода свойство ортонормированности собственных функций относительно суммирования по всем собственным значениям.

**Представление  $\delta$ -функции.** Из определений (11.6) или (11.7) следует, что функция  $\delta(x)$  носит резко выраженный сингулярный характер<sup>1)</sup>. Качественно ее можно представить себе равной нулю всюду, кроме точки  $x = 0$ , а в этой точке настолько большой, что площадь, ограниченная графиком этой функции и осью  $x$ , конечна и равна единице. Более формально ее можно представить различными способами в виде предела последовательности аналитических функций.

Весьма полезным оказывается одно частное представление  $\delta(x)$  в виде предельного значения функции  $(\sin gx)/\pi x$ , где  $g$  — положительное вещественное число. Эта функция, равная  $g/\pi$  при  $x = 0$ , при увеличении  $|x|$  осциллирует с постоянно убывающей амплитудой и с периодом  $2\pi/g$ , а интеграл от нее по  $x$ , взятый в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , равен единице независимо от значения  $g$ . Поэтому предел  $(\sin gx)/\pi x$  при  $g \rightarrow \infty$  имеет все свойства  $\delta$ -функции: при  $x = 0$  он становится бесконечно большим, интеграл от предельного выражения равен единице, а бесконечно быстрые осцилляции при увеличении  $|x|$  означают, что весь вклад в интеграл, содержащий эту функцию, обусловлен бесконечно малой окрестностью точки  $x = 0$ . В связи с этим можно положить

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin gx}{\pi x}. \quad (11.9)$$

**Нормировка на  $\delta$ -функцию.** Представлением  $\delta$ -функции в виде (11.9) можно воспользоваться для выражения интеграла ортогональности типа (11.5). Откажемся от куба периодичности, считая, что собственные функции оператора импульса имеют вид (11.2) во всем пространстве, причем компоненты вектора  $\mathbf{k}$  могут принимать любые вещественные значения. Интеграл  $\int u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  представляет собой произведение трех интегралов, каждый из которых

<sup>1)</sup> Строгое математическое обоснование допустимости использования  $\delta$ -функции было недавно дано Шварцем; см., например, [4]. (Обобщенные функции такого типа фактически вводились еще раньше Соболевым [6]; теория обобщенных функций применительно к задачам теоретической физики была в последнее время развита Боголюбовым и Парасюком [7]. Наглядное описание свойств  $\delta$ -функции и ее применение для решения различных задач можно найти в книге Иваненко и Соколова [8]; см. также книгу [9]. — *Прим. перев.*)

можно выразить через  $\delta$ -функцию:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx &= \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{-g}^g e^{i(k_x - l_x)x} dx = \\ &= \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{2 \sin g(k_x - l_x)}{k_x - l_x} = 2\pi \delta(k_x - l_x). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Таким образом, для бесконечного пространства собственные функции оператора импульса имеют вид

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = (8\pi^3)^{-1/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (11.11)$$

а условие ортонормированности есть

$$\int \bar{u}_l(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) d\tau = \delta(k_x - l_x) \delta(k_y - l_y) \delta(k_z - l_z) \equiv \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}). \quad (11.12)$$

В § 12 для одной типичной задачи будет показано, что одни и те же конечные результаты получаются как при нормировке собственных функций оператора импульса в кубе периодичности, так и при нормировке на  $\delta$ -функцию.

**Некоторые свойства  $\delta$ -функции.** Важно отметить, что вследствие сингулярного характера  $\delta$ -функции последняя не может являться конечным результатом вычислений; она имеет смысл только, если в дальнейшем по ее аргументу производится интегрирование. Именно в этом смысле имеют место следующие свойства  $\delta$ -функции (см. книгу Дирака [3]):

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta(-x), \\ \delta'(x) &= -\delta'(-x), \\ x\delta(x) &= 0, \\ x\delta'(x) &= -\delta(x), \\ \delta(ax) &= a^{-1} \delta(x), \quad a > 0, \end{aligned} \quad (11.13)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = (2a)^{-1} [\delta(x - a) + \delta(x + a)], \quad a > 0,$$

$$\int \delta(a - x) \delta(x - b) dx = \delta(a - b),$$

$$f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a);$$

здесь штрих означает дифференцирование по аргументу функции.

Любое из первых шести соотношений (11.13) можно доказать, умножая обе части равенства на непрерывную дифференцируемую функцию  $f(x)$  и интегрируя по  $x$ . Например, четвертое соотно-

шение (11.13) дает

$$\begin{aligned} \int f(x) x \delta'(x) dx &= - \int \delta(x) \frac{d}{dx} [xf(x)] dx = \\ &= - \int \delta(x) [f(x) + xf'(x)] dx = - \int f(x) \delta(x) dx, \end{aligned}$$

где мы учли равенство нулю граничных членов, полученных в результате интегрирования по частям. Таким образом, величина  $x\delta'(x)$ , будучи множителем в подинтегральном выражении, дает тот же результат, что и  $-\delta(x)$ . Аналогично седьмое из соотношений (11.13) означает, что при умножении обеих частей на  $f(a)$  или  $f(b)$  и интегрировании по  $a$  или  $b$  получается одинаковый результат. Последнее равенство проверяется путем интегрирования обеих частей по  $x$  или  $a$ .

**Условие полноты.** Условие полноты для собственных функций оператора импульса, формулируемое как для ящика, так и для нормировки на  $\delta$ -функцию, можно доказать, не обращаясь к допущению о полноте, сделанному в § 10 для собственных функций оператора энергии. При нормировке в ящике выражение, аналогичное левой части соотношения (11.8), имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \bar{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \\ &= L^{-3} \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i [n_x(x-x') + n_y(y-y') + n_z(z-z')]/L}. \end{aligned}$$

Это выражение легко вычислить в предельном случае больших  $L$ , когда при изменении каждого из чисел  $n$  на единицу сумма изменяется на пренебрежимо малую величину. Тогда можно рассматривать  $n_x$  как непрерывную переменную и в связи с этим

заменить сумму по  $n$  интегралом  $\int_{-\infty}^{\infty} dn_x = (L/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dk_x$ . При этом,

принимая во внимание формулу (11.10), мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \bar{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} (8\pi^3)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z-z')]} dk_x dk_y dk_z = \\ &= \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Аналогичное вычисление можно провести и при нормировке на  $\delta$ -функцию, причем в этом случае формулы (11.11) и (11.10) дают

$$\int u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) d\tau_{\mathbf{k}} = \int \int \int \bar{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) dk_x dk_y dk_z = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (11.15)$$

Условие полноты (11.14) или (11.15) показывает, что собственные функции оператора импульса ортонормированы как относительно интегрирования по всем координатам  $\mathbf{r}$ , так и по отношению к суммированию или интегрированию по всем значениям вектора  $\mathbf{k}$ .

**Разложение по собственным функциям оператора импульса.** С помощью  $\delta$ -функции произвольную непрерывную функцию  $\psi(\mathbf{r})$  можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \psi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau'. \quad (11.16)$$

Подставляя вместо  $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  левую часть равенства (11.14), получаем

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \int \psi(\mathbf{r}') \sum_{\mathbf{k}} \bar{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) d\tau' = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \\ A_{\mathbf{k}} &= \int \bar{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\tau'. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Аналогично, заменяя  $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  соответствующим выражением из соотношения (11.15), будем иметь

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \psi(\mathbf{r}') \int \bar{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) d\tau_{\mathbf{k}} d\tau' = \int A_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) d\tau_{\mathbf{k}}, \quad (11.18)$$

где выражения для  $A_{\mathbf{k}}$  остаются прежними. Соотношения (11.17) и (11.18) показывают, что произвольную функцию можно разложить по собственным функциям оператора импульса, нормированным либо в кубе периодичности, либо на  $\delta$ -функцию<sup>1)</sup>.

**Вероятность и среднее значение.** Функция, определяющая плотность вероятности различных значений импульса и характеризующаяся нормированной волновой функцией  $\psi(\mathbf{r})$ , пропорциональна  $|A_{\mathbf{k}}|^2$ . Множитель пропорциональности равен 1, так как, если положить

$$P(\mathbf{k}) = |A_{\mathbf{k}}|^2, \quad (11.19)$$

то, по аналогии с (10.12), легко показать, что

$$\sum_{\mathbf{k}} P(\mathbf{k}) = 1 \quad \text{и} \quad \int P(\mathbf{k}) d\tau_{\mathbf{k}} = 1 \quad (11.20)$$

(соответственно при нормировке в кубе периодичности и на  $\delta$ -функцию).

При нормировке в кубе среднее значение импульса равно  $\langle \mathbf{p} \rangle = \hbar \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} P(\mathbf{k}) = \hbar \sum_{\mathbf{k}} \int \mathbf{k} \bar{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\tau \int u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \bar{\psi}(\mathbf{r}') d\tau'$ . (11.21)

<sup>1)</sup> Эти не вполне строго доказанные нами результаты эквивалентны математическим теоремам о разложимости функций в ряды и интегралы Фурье.

Из (11.2) явствует, что  $k\bar{u}_k(\mathbf{r})$  можно заменить на  $i \text{grad } \bar{u}_k(\mathbf{r})$ . Тогда в первом интеграле (11.21) можно провести интегрирование по частям, причем интеграл по поверхности равен нулю вследствие периодических граничных условий, наложенных на  $\psi$  и  $\bar{u}_k$ . Используя соотношения (11.14) и (11.21), получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} \rangle &= -i\hbar \sum_{\mathbf{k}} \int \bar{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \text{grad } \psi(\mathbf{r}) d\tau \int u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \bar{\psi}(\mathbf{r}') d\tau' = \\ &= -i\hbar \int \int \bar{\psi}(\mathbf{r}') [\text{grad } \psi(\mathbf{r})] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau d\tau' = \\ &= -i\hbar \int \bar{\psi}(\mathbf{r}) \text{grad } \psi(\mathbf{r}) d\tau. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Этот результат находится в соответствии со вторым равенством (7.8).

При нормировке на  $\delta$ -функцию вычисления в основном аналогичны предыдущим, за исключением того, что поверхностный интеграл, получаемый в результате интегрирования по частям, берется по сфере бесконечного радиуса и обращается в нуль вследствие малости  $\psi$  на больших расстояниях. Это соответствует предположению о том, что функция  $\psi$  нормирована; в противном случае как интеграл  $\int P(\mathbf{k}) d\tau_k$ , так и среднее значение  $\langle \mathbf{p} \rangle$  не имели бы физического смысла. В результате вычислений получаются те же соотношения (11.22) и (7.8).

## § 12. Движение свободного волнового пакета в одном измерении

Одномерное движение свободной (т. е. не подверженной действию внешних сил) частицы описывается волновым уравнением Шредингера (6.8). Исследование этого движения дает интересный пример применения метода разложения, развитого в § 10 и 11. Прежде всего для данного момента времени мы найдем минимальное значение произведения неопределенностей (3.1), а также возможные формы соответствующего одномерного волнового пакета. Так как форму пакета можно рассматривать просто как начальное условие, налагаемое на решение уравнения Шредингера с произвольной потенциальной энергией  $V$ , то структура „минимизирующего“ пакета не будет зависеть от того, свободна частица или нет. Однако аналитическое выражение для  $\psi$  в последующие моменты времени особенно легко найти в том случае, когда внешние силы отсутствуют.

**Минимальное значение произведения неопределенностей<sup>1)</sup>.** Чтобы найти минимальное значение произведения неопределенностей  $\Delta x \cdot \Delta p$ , нужно прежде всего определить, что мы понимаем

<sup>1)</sup> См. работу Гейзенберга [5].

под  $\Delta x$  и  $\Delta p$ . Возможны различные определения этих величин; аналитически проще всего иметь дело со средними квадратичными отклонениями от средних значений, определенных в соответствии с § 7:

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle 2x \langle x \rangle \rangle + \langle \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \\ (\Delta p)^2 &= \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2.\end{aligned}\quad (12.1)$$

Эти равенства получаются непосредственно из общего определения средних значений, приведенного в § 7. Положив теперь

$$\alpha \equiv x - \langle x \rangle, \quad \beta \equiv p - \langle p \rangle = -i\hbar \left[ \frac{d}{dx} - \left\langle \frac{d}{dx} \right\rangle \right], \quad (12.2)$$

мы получим

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi} \alpha^2 \psi dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi} \beta^2 \psi dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\alpha} \bar{\psi}) (\alpha \psi) dx \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\beta} \bar{\psi}) (\beta \psi) dx.\end{aligned}\quad (12.3)$$

Преобразование интеграла, содержащего  $\alpha$ , очевидно; аналогичное преобразование интеграла, содержащего  $\beta$ , достигается интегрированием по частям с учетом обращения  $\psi$  в нуль при  $x = \pm\infty$  (функция  $\psi$  характеризует нормированный волновой пакет).

Очевидно, имеет место неравенство

$$\int \left| f - g \frac{\int \bar{f} \bar{g} dx}{\int \bar{g} \bar{g} dx} \right|^2 dx \geq 0,$$

где интегрирование проводится от  $x = -\infty$  до  $+\infty$ ; причем равенство здесь достигается лишь при  $f = \gamma g$  ( $\gamma$  — постоянная). Отсюда непосредственно получаем

$$\int |f|^2 dx \int |g|^2 dx \geq \left| \int \bar{f} g dx \right|^2.$$

Если теперь заменить  $f$  на  $\alpha\psi$ , а  $g$  на  $\beta\psi$ , то соотношение (12.3) примет вид

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \left| \int (\bar{\alpha} \bar{\psi}) (\beta \psi) dx \right|^2 = \left| \int \bar{\psi} \alpha \beta \psi dx \right|^2. \quad (12.4)$$

Последний член в (12.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\left| \int \bar{\psi} \left[ \frac{1}{2} (\alpha\beta - \beta\alpha) + \frac{1}{2} (\alpha\beta + \beta\alpha) \right] \psi dx \right|^2 = \\ = \frac{1}{4} \left| \int \bar{\psi} (\alpha\beta - \beta\alpha) \psi dx \right|^2 + \frac{1}{4} \left| \int \bar{\psi} (\alpha\beta + \beta\alpha) \psi dx \right|^2.\end{aligned}\quad (12.5)$$

Опущенный в правой части (12.5) член с произведением двух слагаемых равен нулю, в чем легко убедиться, воспользовавшись соотношением

$$\int \overline{\psi \alpha \beta \psi} dx = \int \overline{\psi \alpha} \overline{\beta \psi} dx = \int (\overline{\beta \psi}) (\alpha \psi) dx = \int \overline{\psi \beta \alpha \psi} dx,$$

получаемся при интегрировании по частям с учетом вещественности  $\alpha$ .

Теперь из (12.2) имеем

$$(\alpha\beta - \beta\alpha)\psi = -i\hbar \left[ x \frac{d\psi}{dx} - \frac{d}{dx} (x\psi) \right] = i\hbar\psi. \quad (12.6)$$

Таким образом, соотношения (12.4) — (12.6) дают

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{1}{4} \hbar^2 \quad \text{или} \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar, \quad (12.7)$$

где равенство может иметь место только, если второй член в правой части (12.5) обращается в нуль. Таково точное выражение для соотношения неопределенности Гейзенберга (3.1), если неопределенности  $\Delta x$  и  $\Delta p$  определять по (12.1).

**Форма минимизирующего пакета.** Из предыдущего вывода следует, что минимальное значение произведения неопределенностей достигается только при выполнении двух условий:

$$\alpha\psi = \gamma\beta\psi, \quad (12.8)$$

$$\int \overline{\psi} (\alpha\beta + \beta\alpha) \psi dx = 0. \quad (12.9)$$

Равенства (12.8) и (12.2) дают дифференциальное уравнение для  $\psi$

$$\frac{d\psi}{dx} = \left[ \frac{i}{\gamma\hbar} (x - \langle x \rangle) + \frac{i\langle p \rangle}{\hbar} \right] \psi,$$

которое непосредственно интегрируется:

$$\psi(x) = N \exp \left[ \frac{i}{2\gamma\hbar} (x - \langle x \rangle)^2 + \frac{i\langle p \rangle x}{\hbar} \right] \quad (12.10)$$

( $N$  — произвольная постоянная).

С учетом (12.8) уравнение (12.9) теперь принимает вид

$$\left( \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \right) \int \overline{\psi} \alpha^2 \psi dx = 0,$$

откуда, очевидно, следует, что величина  $\gamma$  должна быть чисто мнимой. Далее, поскольку интеграл от  $|\psi|^2$  должен сходиться, мнимая часть  $\gamma$  должна быть отрицательной. Константа  $N$  определяется условием нормировки

$$\int |\psi|^2 dx = 1.$$

Аналогично параметр  $\gamma$  можно найти из условия

$$\int (x - \langle x \rangle)^2 |\psi|^2 dx = (\Delta x)^2.$$

Интегралы легко вычисляются, и мы получаем следующее выражение для нормированной функции, характеризующей минимизирующий волновой пакет:

$$\psi(x) = [2\pi (\Delta x)^2]^{-1/4} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4(\Delta x)^2} + \frac{i \langle p \rangle x}{\hbar} \right]. \quad (12.11)$$

**Коэффициенты разложения по собственным функциям оператора импульса.** Одномерные собственные функции оператора импульса аналогично (11.4) и (11.11) имеют вид

$$u_k(x) = L^{-1/2} e^{ikx} \quad (12.12)$$

(нормировка в области периодичности длиной  $L$ ) или

$$u_k(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{ikx} \quad (12.13)$$

(нормировка на  $\delta$ -функцию). Так как для свободной частицы волновое уравнение имеет простую форму (6.8)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (12.14)$$

то собственные функции оператора импульса являются вместе с тем и собственными функциями оператора энергии<sup>1)</sup>. Поэтому любое решение волнового уравнения можно записать в виде, аналогичном (10.18):

$$\psi(x, t) = \left( \sum_k \text{или} \int dk \right) A_k e^{-iE_k t/\hbar} u_k(x), \quad (12.15)$$

где коэффициенты  $A_k$  не зависят от  $x$  и  $t$ ; зависимость от времени полностью определяется экспоненциальным множителем. Как нетрудно проверить непосредственной подстановкой, функция (12.15) удовлетворяет уравнению (12.14), если только

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (12.16)$$

Таким образом, задача об определении движения волнового пакета сводится к нахождению коэффициентов разложения  $A_k$  для некоторого момента времени, скажем для  $t=0$ , после чего с помощью соотношений (12.15) и (12.16) можно найти  $\psi(x, t)$  и

<sup>1)</sup> Обратное утверждение необязательно справедливо, так как уравнение (12.16) для каждого  $E_k$  допускает два значения  $k$  (положительное и отрицательное).



для других моментов времени. Экспоненциальные множители в (12.15) при  $t = 0$  равны единице, и для нахождения  $A_k$  можно воспользоваться одномерным аналогом второго из соотношений (11.17):

$$A_k = \int \bar{u}_k(x) \psi(x, 0) dx. \quad (12.17)$$

Пределы интегрирования равны  $x = \pm L/2$  или  $x = \pm \infty$  в зависимости от того, какая выбрана нормировка — в области периодичности или на  $\delta$ -функцию. Плотность вероятности различных значений импульса, характеризуемая функцией  $P(k) = |A_k e^{-iE_k t/\hbar}|^2 = |A_k|^2$ , не зависит от времени, так что, например, величины  $\langle p \rangle$  и  $\Delta p$  являются постоянными.

**Изменение минимизирующего пакета со временем.** В качестве простого характерного примера рассмотрим функцию  $\psi(x, 0)$  вида (12.11), причем  $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$ , так что в начальный момент времени центр волнового пакета находится в точке  $x = 0$ , а его средний импульс равен нулю. Тогда, нормируя волновую функцию в области периодичности, мы получаем из (12.17)

$$A_k = [2\pi L^2 (\Delta x)^2]^{-1/4} \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left[-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2} - ikx\right] dx = \left[\frac{8\pi (\Delta x)^2}{L^2}\right]^{1/4} e^{-k^2 (\Delta x)^2}, \quad (12.18)$$

где  $L$  предполагается настолько большим, что вкладом в интеграл от областей  $|x| > L/2$  можно пренебречь. Подставляя это выражение в правую часть (12.15), находим волновую функцию для произвольных значений  $t$

$$\psi(x, t) = \sum_k A_k e^{-i\hbar k^2 t/2m} u_k(x), \quad (12.19)$$

где  $k = 2\pi n/L$ , причем  $n$ —любое положительное и отрицательное целое число или нуль. Как и в § 11, длину  $L$  можно взять произвольно большой; соответственно  $n$  можно рассматривать как непрерывную переменную и суммирование по  $n$  заменить интегрированием, что сводится к вычислению интеграла  $(L/2\pi) \int dk$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \left[\frac{(\Delta x)^2}{2\pi^3}\right]^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-k^2 (\Delta x)^2 - \frac{i\hbar k^2 t}{2m} + ikx\right] dk = \\ &= (2\pi)^{-1/4} \left(\Delta x + \frac{i\hbar t}{2m\Delta x}\right)^{-1/4} \exp\left[-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2 + (2i\hbar t/m)}\right]. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Плотность вероятности для координат при этом равна

$$|\psi(x, t)|^2 = \left\{ 2\pi \left[ (\Delta x)^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)^2} \right] \right\}^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \left[ (\Delta x)^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)^2} \right]} \right\}. \quad (12.21)$$

Выражение (12.21) имеет тот же вид, что и  $|\psi(x, 0)|^2$ , с той разницей, что вместо  $(\Delta x)^2$  появляется сумма  $(\Delta x)^2 + \hbar^2 t^2 / 4m^2 (\Delta x)^2$ , равная  $(\Delta x)^2 + (\Delta p)^2 t^2 / m^2$ . Таким образом, центр пакета остается в точке  $x = 0$ , но ширина его увеличивается при изменении  $t$  как в положительном, так и отрицательном направлениях. Чем меньше первоначальная неопределенность в координате, тем больше неопределенность в импульсе и тем быстрее расплывается пакет; зависящая от времени часть приведенного выше выражения  $t(\Delta p)/m$  просто равна расстоянию, проходимому классической частицей с импульсом  $\Delta p$  за время  $t$ .

При нормировке на  $\delta$ -функцию получаются такие же результаты. Выражение (12.18) для  $A_{\hbar}$  нужно при этом умножить на  $(L/2\pi)^{1/2}$ , суммирование в (12.19) заменить интегрированием по  $k$  и результаты разделить на  $L/2\pi$  (множитель  $L/2\pi$  при этом выпадает); наконец, функцию  $u_{\hbar}$  в (12.19) нужно умножить на  $(L/2\pi)^{1/2}$ . В результате три появляющихся множителя сократятся, и следовательно, равенства (12.20) и (12.21) не изменятся при изменении нормировки собственных функций оператора импульса.

**Классический предельный случай.** В § 7 мы видели, что если рассматривать лишь средние значения координаты и импульса волнового пакета, то последний всегда движется как классическая частица. Однако классическая динамика полезна для описания движения волнового пакета лишь в том случае, если можно пренебречь расплыванием его в течение интересующего нас промежутка времени.

Чтобы показать, по какому параметру можно судить о достижении классического предела, рассмотрим волновой пакет, соответствующий классической частице, движущейся с периодом  $T$  по круговой орбите радиусом  $a$ . Допустим, что этот пакет достаточно хорошо локализован, так что потенциальная энергия заметно не изменяется в области нахождения пакета. Тогда, как отмечалось выше, применение классической теории для описания движения волнового пакета будет полезно лишь в том случае, если в течение промежутка времени, большого по сравнению с  $T$ , расплывание пакета мало по сравнению с  $a$ . Наименьшее расплывание пакета за время  $t$  имеет место, когда  $\Delta x$  по порядку величины равно  $(\hbar t/m)^{1/2}$ . Потребуем поэтому, чтобы  $(\hbar t/m)^{1/2} \ll a$  при  $t \gg T$ .

Это условие имеет простой смысл: момент количества движения частицы  $2\pi\hbar a^2/T$  должен быть велик по сравнению с  $\hbar$ . В большинстве атомных систем, в которых момент количества движения каждого электрона имеет величину порядка  $\hbar$ , волновой пакет, соответствующий хорошо локализованной частице, за один период расплывается настолько, что классическое описание его движения уже не представляет физического интереса.

### ЗАДАЧИ

1. Пусть имеются три вырожденные линейно независимые (хотя и необязательно ортогональные) собственные функции. Найти три линейные комбинации этих функций, которые были бы взаимно ортогональны и нормированы. Будут ли эти линейные комбинации собственными функциями? Если да, то являются ли они вырожденными?

2. Показать, что для одномерного движения частицы функции  $u_{x'}(x) = \delta(x - x')$ , где  $x'$  — любые вещественные числа, образуют полную ортонормированную систему, и каждая из них является собственной функцией оператора координаты  $x$ , принадлежащей собственному значению  $x'$ . Найти плотность вероятности для координат частицы и сравнить ее с полученной в § 7.

3. Пусть в одномерной задаче потенциальная энергия  $V(x)$  не зависит от времени и представляет собой монотонно возрастающую функцию  $x$ . Показать, что функции  $u_{V'}(x) = (dV/dx)^{-1/2} \delta(x - x')$ , где  $V' = V(x')$  и  $x'$  — любые вещественные числа, образуют полную ортонормированную систему собственных функций оператора потенциальной энергии, принадлежащих собственным значениям  $V'$ . Найти плотность вероятности для потенциальной энергии и показать, что ее свойства соответствуют ожидаемым.

4. Как нужно изменить рассуждения § 11, относящиеся к собственным функциям оператора импульса, если нормировка производится не в кубе, а в прямоугольном параллелепипеде?

5. Найти два других представления  $\delta$ -функции Дирака, аналогичные соотношению (11.9).

6. Проверить все соотношения (11.13), содержащие  $\delta$ -функцию.

7. Проверить справедливость обоих соотношений (11.20), т. е. доказать, что сумма (или интеграл) от плотности вероятности для импульса, определяемой соотношениями (11.19) [или (11.17)], равна единице, если функция  $\psi$  нормирована.

8. Подынтегральное выражение в (10.19), заключенное в квадратные скобки, позволяет вычислить функцию  $\psi$  для времени  $t$ , если известно значение  $\psi$  в момент  $t_0$ . Если это выражение в одномерном случае обозначить через  $G(x, x', t, t_0)$ , то  $\psi(x, t) = \int G(x, x', t, t_0) \psi(x', t_0) dx'$ . Показать, что для свободной частицы, движущейся в одном измерении,

$$G(x, x', t, t_0) = \left[ \frac{-im}{2\pi\hbar(t-t_0)} \right]^{1/2} \exp \left[ \frac{im(x-x')^2}{2\hbar(t-t_0)} \right].$$

Допуская, что при  $t_0 = 0$  функция  $\psi$  характеризует нормированный волновой пакет (12.11), с помощью этого результата найти  $\psi$  и  $|\psi|^2$  для другого момента  $t$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bohm D., Phys. Rev., 85, 166, 180 (1952). (Имеется русский перевод в сборнике „Вопросы причинности в квантовой механике”, ИЛ, 1955.)
2. K e m b l e E. C., The Fundamental Principles of Quantum Mechanics, New York, 1937.
3. Д и р а к Р. А. М., The Principles of Quantum Mechanics, 3d ed., Oxford, New York, 1947. (Имеется русский перевод 2-го издания: П. Д и р а к, Основы квантовой механики, М.—Л., 1937.)
4. H a l p e r i n I., S c h w a r t z L., Introduction to the Theory of Distributions, Toronto, 1952.
5. H e i s e n b e r g W., The Physical Principles of the Quantum Theory, Chicago, 1930. (Имеется русский перевод: В. Г е й з е н б е р г, Физические принципы квантовой теории, М.—Л., 1932.)
- 6\*. С о б о л е в С. Л., Математический сборник, 1 (43), 39 (1936).
- 7\*. Б о г о л ю б о в Н. Н., П а р а с ю к О. С., ДАН СССР, 100, 25, 429 (1955).
- 8\*. И в а н е н к о Д. Д., С о к о л о в А. А., Классическая теория поля, М.—Л., 1951.
- 9\*. С о к о л о в А. А., Дельта-функция и ее применение к решению некоторых математических задач геофизики, Свердловск, 1946.
- 10\*. Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, М.—Л., 1958.

## ДИСКРЕТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ. УРОВНИ ЭНЕРГИИ

В настоящей главе формализм, развитый в гл. II и усовершенствованный в гл. III, будет применен для явного вычисления дискретных уровней энергии и соответствующих им собственных функций. В следующей главе будут рассмотрены случаи непрерывного распределения собственных значений оператора энергии (непрерывный спектр). Таким образом, сейчас мы будем иметь дело со связанными состояниями, когда внешние силы (потенциальная энергия) удерживают частицу в некоторой области пространства, а в следующей главе — с задачами о столкновениях, когда частица может приходиться из бесконечности и уходить на бесконечность.

Аналитические решения волнового уравнения (8.2) можно найти лишь для относительно небольшого числа функций  $V(\mathbf{r})$ , характеризующих потенциальную энергию; однако значение таких решений выходит за пределы этих конкретных задач: зачастую они служат основой приближенных вычислений, относящихся к более сложным системам.

### § 13. Линейный гармонический осциллятор

Одной из наиболее важных задач классической механики является задача об одномерном движении материальной точки, удерживаемой у некоторого неподвижного центра силой, пропорциональной расстоянию от него. Изучение этой задачи важно не только само по себе, но и потому, что движение более сложных систем часто можно рассматривать как совокупность нормальных колебаний, формально эквивалентных колебаниям гармонических осцилляторов. В квантовой механике представление о линейном гармоническом осцилляторе также очень важно, как в связи с задачами, например, о колебаниях отдельных атомов в молекулах, так и для исследования более сложных систем, например кристаллов или квантованных волновых полей (см. ниже, гл. XIII).

**Асимптотическое поведение.** Силу  $F = -Kx$  можно характеризовать потенциальной энергией  $V(x) = Kx^2/2$ ; таким образом,

уравнение (8.5) принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{2} Kx^2u = Eu. \quad (13.1)$$

Уравнения такого типа удобно прежде всего переписать в безразмерной форме. В данном случае мы введем для этого безразмерную независимую переменную  $\xi = \alpha x$  и безразмерное собственное значение  $\lambda$  и попытаемся переписать уравнение (13.1) в виде

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) u = 0. \quad (13.2)$$

Сравнивая уравнения (13.2) и (13.1), видим, что такая запись возможна, только если

$$\alpha^4 = \frac{mK}{\hbar^2}, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar} \left( \frac{m}{K} \right)^{1/2} = \frac{2E}{\hbar\omega_c}, \quad (13.3)$$

где  $\omega_c = (K/m)^{1/2}$ —круговая частота соответствующего классического гармонического осциллятора.

Решение уравнения (13.2) удобно начинать с исследования асимптотического поведения  $u$  при  $\xi \rightarrow \pm \infty$ <sup>1)</sup>. При достаточно больших  $\xi$  уравнение (13.2), очевидно, удовлетворяется функцией  $u(\xi) = \xi^n e^{\pm \xi^2/2}$ , коль скоро мы интересуемся лишь главными членами (порядка  $\xi^{2n}$ ; здесь  $n$ —любое конечное число). Из граничных условий, рассмотренных в § 8, следует, что в показателе степени можно оставить только знак минус. Это приводит к предположению, что точное решение уравнения (13.2) имеет вид

$$u(\xi) = H(\xi) e^{-\xi^2/2}, \quad (13.4)$$

где  $H(\xi)$  — полином конечного порядка относительно  $\xi$ . Подставляя (13.4) в уравнение (13.2), получим уравнение для  $H(\xi)$ :

$$H'' - 2\xi H' + (\lambda - 1)H = 0, \quad (13.5)$$

где штрихи означают дифференцирование по  $\xi$ .

**Уровни энергии.** Функцию  $H(\xi)$  будем искать в виде

$$H(\xi) = \xi^s (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots), \quad a_0 \neq 0, \quad s \geq 0. \quad (13.6)$$

При  $\xi = 0$  это выражение остается конечным. Уравнение (13.5) должно выполняться при всех значениях  $\xi$ ; поэтому, подставляя в него (13.6), можно независимо приравнять нулю коэффициенты

<sup>1)</sup> Мы следуем здесь полиномиальному методу Зоммерфельда, изложенному в книге [1].

при всех степенях  $\xi$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} s(s-1)a_0 &= 0, \\ (s+1)sa_1 &= 0, \\ (s+2)(s+1)a_2 - (2s+1-\lambda)a_0 &= 0, \\ (s+3)(s+2)a_3 - (2s+3-\lambda)a_1 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ (s+\nu+2)(s+\nu+1)a_{\nu+2} - (2s+2\nu+1-\lambda)a_\nu &= 0, \end{aligned} \quad (13.7)$$

где  $\nu$  — целое число. Поскольку  $a_0$  не может равняться нулю, из первого уравнения (13.7) следует, что  $s = 0$  или  $s = 1$ . Из второго уравнения следует, что либо  $s$ , либо  $a_1$ , либо обе эти величины равны нулю. Тогда третье уравнение связывает  $a_2$  с  $a_0$ , четвертое —  $a_3$  с  $a_1$  и вообще  $(\nu+3)$ -е уравнение связывает  $a_{\nu+2}$  с  $a_\nu$ .

Равенства (13.7) показывают, что ряд (13.6) содержит конечное или бесконечное число членов в зависимости от выбора чисел  $s$ ,  $a_1$  и собственного значения  $\lambda$ . Если ряд не обрывается, то его асимптотическое поведение можно найти, определив отношение коэффициентов при достаточно больших  $\nu$ :

$$\frac{a_{\nu+2}}{a_\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \frac{2}{\nu}.$$

Такое отношение коэффициентов характерно для ряда, представляющего функцию  $\xi^n e^{\xi^2}$  при произвольном конечном  $n$ . Из формулы (13.4) явствует, что при этом нарушаются граничные условия, накладываемые на  $u(\xi)$  при больших  $|\xi|$ .

Таким образом, ряд (13.6) должен обрываться. Это означает, что, поскольку  $a_0 \neq 0$ ,

$$\lambda = 2s + 2\nu + 1,$$

где  $\nu$  — целое четное число. В противном случае члены с четными индексами образовали бы бесконечный ряд. Так как при этом ряд с нечетными индексами не может оборваться, следует положить  $a_1 = 0$ . Индекс  $s$  может еще принимать значения 0 и 1, соответственно чему  $\lambda$  равно  $2\nu + 1$  или  $2\nu + 3$ , где  $\nu$  — четное целое число. Вводя квантовое число  $n$ , можно объединить оба случая, полагая

$$\lambda = 2n + 1, \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13.8)$$

**Нулевая энергия.** Уровни энергии (13.8) образуют бесконечную последовательность и отстоят друг от друга на равных интервалах. Именно это было постулировано в 1900 г. Планком и соответствует правилу квантования старой квантовой теории. Однако для кван-

товой механики характерно конечное значение энергии основного состояния  $\hbar\omega_c/2$ . Эта так называемая *нулевая энергия* связана с принципом неопределенности так же, как и конечный наименьший уровень энергии частицы в прямоугольной яме с идеально твердыми стенками (см. § 9). По порядку величины полная энергия равна  $[(\Delta p)^2/m] + K(\Delta x)^2$ , где  $\Delta p$  и  $\Delta x$  в соответствии с § 12 характеризуют разбросы значений импульса и координаты. Легко видеть [с учетом соотношения неопределенностей (3.1)], что это выражение имеет минимум при  $\Delta p$  порядка  $(Km\hbar^2)^{1/4}$ , откуда следует, что минимум полной энергии имеет величину порядка  $\hbar(K/m)^{1/2}$  или  $\hbar\omega_c$ .

**Четность.** Из соотношений (13.8) и (13.7) явствует, что число  $n$  представляет собой наибольшее значение суммы  $s + v$  в разложении функции  $H$  (13.6). Обозначая соответствующий полином через  $H_n(\xi)$ , видим, что по отношению к переменной  $\xi$  он будет иметь степень  $n$  и его четность или нечетность будет определяться четностью или нечетностью числа  $n$ . Поскольку функция  $e^{-\xi^2/2}$  — четная и не имеет узлов, соответствующая собственная функция  $u_n(\xi)$  имеет  $n$  узлов и четность ее определяется четностью числа  $n$ . Эти выводы согласуются с результатами, полученными ранее в § 8 и 9.

**Полиномы Эрмита.** Полиномом Эрмита  $n$ -го порядка  $H_n(\xi)$  называется полином, четность которого совпадает с четностью  $n$  и который удовлетворяет уравнению (13.5) при  $\lambda = 2n + 1$ :

$$H_n'' - 2\xi H_n' + 2nH_n = 0. \quad (13.9)$$

Из полученного ранее решения уравнения (13.5) следует, что эти условия однозначно определяют  $H_n$  с точностью до произвольного постоянного множителя. Поэтому при более подробном изучении свойств полиномов  $H_n$  можно будет избежать применения рекуррентных соотношений (13.7), если только удастся найти какую-либо другую форму решения, удовлетворяющую поставленным условиям. Действительно, существует гораздо более удобное представление  $H_n$  через производящую функцию  $S(\xi, s)$ :

$$S(\xi, s) = e^{\xi^2 - (s-\xi)^2} = e^{-s^2 + 2s\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n. \quad (13.10)$$

Разлагая экспоненциальное выражение в (13.10) в ряд по степеням  $s$  и  $\xi$ , легко установить, что члены с некоторой заданной степенью  $s$  будут содержать  $\xi$  либо в той же степени, либо в степени, меньшей данной на четное число. Следовательно, определяемый таким путем полином  $H_n(\xi)$  будет иметь степень  $n$  и четность его совпадет с четностью  $n$ .

Чтобы убедиться в том, что полиномы  $H_n$  удовлетворяют дифференциальному уравнению (13.9), продифференцируем обе части



(13.10) сначала по  $\xi$ , а затем по  $s$ :

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = 2s e^{-s^2+2s\xi} = \sum_n \frac{2s^{n+1}}{n!} H_n(\xi) = \sum_n \frac{s^n}{n!} H'_n(\xi),$$

$$\frac{\partial S}{\partial s} = (-2s + 2\xi) e^{-s^2+2s\xi} = \sum_n \frac{(-2s + 2\xi) s^n}{n!} H_n(\xi) = \sum_n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} H_n(\xi).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  в суммах, входящих в эти два выражения, получим соответственно

$$H'_n = 2nH_{n-1},$$

$$H_{n+1} = 2\xi H_n - 2nH_{n-1}. \quad (13.11)$$

Легко видеть, что получающееся отсюда дифференциальное уравнение наименьшего порядка, содержащее только  $H_n$ , совпадает с (13.9). Таким образом, функции  $H_n(\xi)$ , определяемые равенством (13.10), представляют собой полиномы Эрмита.

Соотношения (13.11) можно использовать для вычисления как самих полиномов Эрмита, так и производных от них; можно также пользоваться явными выражениями, получаемыми непосредственно из производящей функции. Если  $n$  раз продифференцировать  $S(\xi, s)$  по  $s$  и затем приравнять  $s$  нулю, то, как видно из (13.10), результат будет равен просто  $H_n(\xi)$ . Для любой функции вида  $f(s - \xi)$ , очевидно, имеет место соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^n S}{\partial s^n} = e^{\xi^2} \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-(s-\xi)^2} = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} e^{-(s-\xi)^2}.$$

Отсюда получаем выражение для  $n$ -го полинома Эрмита:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} e^{-\xi^2}. \quad (13.12)$$

Первые три полинома, вычисленные по формуле (13.12), имеют вид

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2.$$

**Волновые функции гармонического осциллятора.** Производящая функция полезна также для вычисления интегралов, содержащих волновые функции гармонического осциллятора (13.4):

$$u_n(x) = N_n H_n(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2}. \quad (13.13)$$

Пусть, например, требуется нормировать функции  $u_n(x)$ . Это означает, что постоянную  $N_n$  надо выбрать так, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_n(x)|^2 dx = \frac{|N_n|^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = 1.$$

Интеграл в правой части можно представить как коэффициент ряда, получаемого в результате разложения интеграла от произведения двух производящих функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2+2s\xi} e^{-t^2+2t\xi} e^{-\xi^2} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^n t^m}{n! m!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi. \quad (13.14)$$

Интеграл в левой части (13.14) легко вычисляется, давая в результате

$$\pi^{1/2} e^{2st} = \pi^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2st)^n}{n!}. \quad (13.15)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  и  $t$  в правых частях (13.14) и (13.15), находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi &= \pi^{1/2} 2^n n!, \\ \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi &= 0, \quad n \neq m. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Согласно первой формуле (13.16), нормировочную постоянную можно выбрать в виде

$$N_n = \left( \frac{\alpha}{\pi^{1/2} 2^n n!} \right)^{1/2}; \quad (13.17)$$

здесь еще остается неопределенным постоянный фазовый множитель, модуль которого равен единице. Из второй формулы вытекает, что при  $n \neq m$  функции  $u_n(x)$  и  $u_m(x)$  взаимно ортогональны. Это находится в соответствии с общим результатом, полученным в § 10 для невырожденных собственных функций оператора энергии, так как, согласно (13.8),  $E_n \neq E_m$  при  $n \neq m$ , т. е. вырождение отсутствует.

Типичным примером других интегралов, которые можно вычислить с помощью производящей функции, является следующий:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_n(x) x u_m(x) dx = \frac{\bar{N}_n N_m}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi.$$

Составим два разложения для интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2+2s\xi} e^{-t^2+2t\xi} \xi e^{-\xi^2} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^n t^m}{n! m!} \int_{-\infty}^{\infty} \xi H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi$$

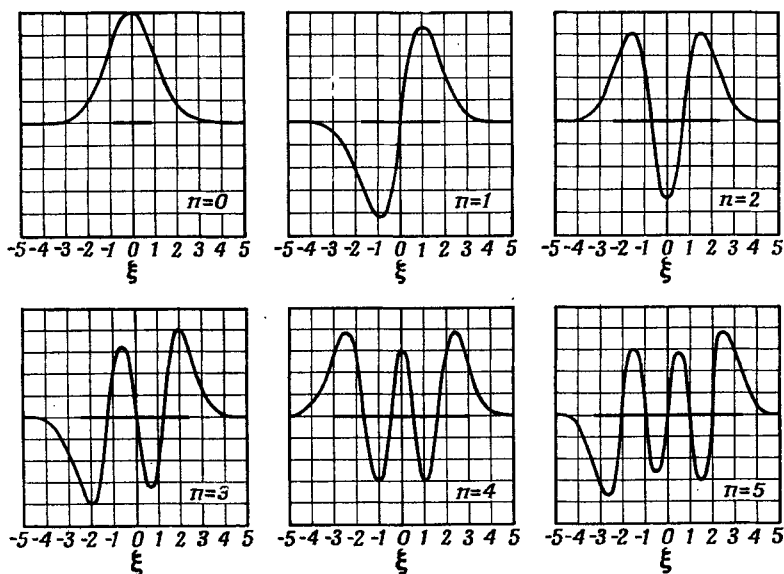
и

$$\pi^{1/2} (s+t) e^{2st} = \pi^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (s^n + t^n + s^n t + t^n s)}{n!}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  и принимая во внимание (13.17), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_n(x) x u_m(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{1/2}, & m = n + 1, \\ \frac{1}{\alpha} \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2}, & m = n - 1, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (13.18)$$

**Соответствие с классической теорией.** На фиг. 10 показаны графики первых шести волновых функций гармонического осциллятора. Легко видеть, что плотности вероятности для координат  $|u_n|^2$ ,



Фиг. 10. Собственные функции оператора энергии для первых шести состояний гармонического осциллятора (Паулинг и Вильсон [3]).

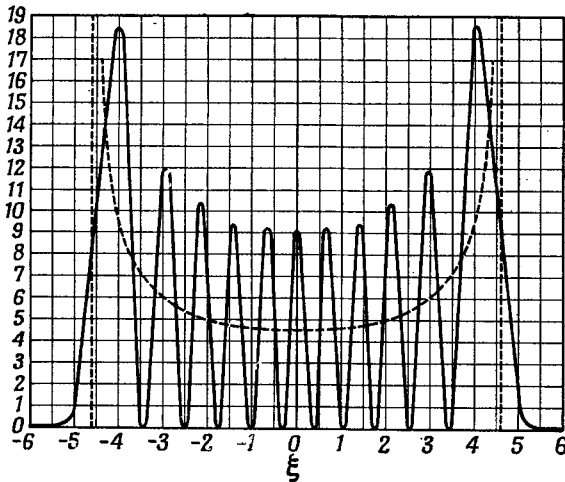
соответствующие этим стационарным волновым функциям, мало похожи на соответствующие плотности для классического гармонического осциллятора; последние пропорциональны  $(\xi_0^2 - \xi^2)^{-1/2}$ , где  $\xi_0$  — амплитуда классического осциллятора, энергия которого равна квантовомеханическому собственному значению оператора энергии. С возрастанием  $n$  классическая и квантовая плотности вероятности становятся все более и более близкими. На фиг. 11 приводятся графики  $|u_n|^2$  для  $n = 10$  (сплошная кривая) и плотности для классического осциллятора с полной энергией  $(21/2)\hbar\omega_c$  (пунктирная кривая). В среднем соответствие является очень

хорошим; главное отличие состоит в быстрых колебаниях функции  $|u_n|^2$ .

Из равенства (7.6) можно получить среднее значение потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_n(x) \frac{1}{2} Kx^2 u_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} K \left( \frac{2n+1}{2\alpha^2} \right) = \frac{1}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c = \frac{1}{2} E_n \end{aligned}$$

[интеграл  $\int x^2 |u_n|^2 dx$  можно вычислить с помощью производящей функции аналогично (13.18)]. Таким образом, как и у классического



Ф и г. 11. Плотность вероятности координат для гармонического осциллятора в состоянии  $n = 10$  (сплошная кривая) и для классического осциллятора с той же полной энергией (пунктирная кривая). (Паулинг и Вильсон [3].)

осциллятора, средние значения потенциальной и кинетической энергии при любом  $n$  равны половине полной энергии.

Аналогичным путем можно показать, что  $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$  для любой волновой функции гармонического осциллятора и, следовательно, в силу (12.1)  $\langle \Delta x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle$  и  $\langle \Delta p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle$ . В связи с этим легко видеть, что произведение неопределенностей равно

$$\Delta x \cdot \Delta p = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar.$$

Для собственной функции основного состояния

$$u_0(x) = \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\alpha^2 x^2 / 2}; \quad (13.19)$$

это произведение достигает наименьшего [см. (12.7)] возможного значения  $\hbar/2$ . Как и следовало ожидать, функция (13.19) имеет вид (12.11). Таким образом, если величину  $\Delta x$  соответствующим образом связать с  $K$  и  $m$ , то функция, характеризующая минимизирующий волновой пакет, будет собственной функцией оператора энергии гармонического осциллятора.

**Осциллирующий волновой пакет.** В соответствии с (10.18) общее решение зависящего от времени уравнения Шредингера для гармонического осциллятора

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} Kx^2 \right) \psi(x, t)$$

можно разложить по стационарным волновым функциям:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} = e^{-i\omega_c t/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(x) e^{-in\omega_c t}, \quad (13.20)$$

где  $A_n$  — произвольные постоянные. Таким образом, с точностью до фазового множителя  $e^{-i\omega_c t/2}$  функция  $\psi(x, t)$  является периодической по  $t$  с периодом классического осциллятора  $2\pi/\omega_c$ . Это наводит на мысль, что, по-видимому, возможно найти решение в виде волнового пакета, центр тяжести которого осциллирует с классическим периодом.

Для исследования этой возможности допустим, что при  $t = 0$  функция (13.20) имеет вид нормированного минимизирующего пакета (13.19), центр тяжести которого, однако, смещен в положительном направлении оси  $x$  на расстояние  $a$ :

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(x) = \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\alpha^2(x-a)^2/2}. \quad (13.21)$$

Для определения коэффициента  $A_m$  умножим (13.21) на  $\bar{u}_m(x)$  и проинтегрируем по всем значениям  $x$ , пользуясь свойством ортонормированности функций  $u_n$ :

$$\begin{aligned} A_m &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_m(x) \psi(x, 0) dx = \\ &= \frac{\bar{N}_m}{\pi^{1/4} \alpha^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(\xi) e^{-\xi^2/2} e^{-(\xi-\xi_0)^2/2} d\xi, \quad \xi_0 \equiv \alpha a. \end{aligned}$$

Интеграл в правой части можно вычислить с помощью производящей функции, приравнивая почленно коэффициенты в двух разло-

жениях интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2 + 2s\xi} e^{-(\xi^2 - \xi\xi_0 + \xi_0^2/2)} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) e^{-(\xi^2 - \xi\xi_0 + \xi_0^2/2)} d\xi$$

$$\text{и} \quad \pi^{1/2} e^{-\xi_0^2/4 + s\xi_0} = \pi^{1/2} e^{-\xi_0^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s\xi_0)^n}{n!}.$$

Принимая во внимание (13.17), получаем

$$A_n = \frac{\xi_0^n e^{-\xi_0^2/4}}{(2^n n!)^{1/2}}. \quad (13.22)$$

Подставляя это в (13.20), находим

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\xi^2/2 - \xi_0^2/4 - i\omega_c t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} \left(\frac{1}{2} \xi_0 e^{-i\omega_c t}\right)^n = \\ &= \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{4} \xi_0^2 - \frac{1}{2} i\omega_c t - \frac{1}{4} \xi_0^2 e^{-2i\omega_c t} + \xi\xi_0 e^{-i\omega_c t}\right) = \\ &= \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\xi - \xi_0 \cos \omega_c t)^2 - \right. \\ &\quad \left. - i\left(\frac{1}{2} \omega_c t + \xi\xi_0 \sin \omega_c t - \frac{1}{4} \xi_0^2 \sin 2\omega_c t\right)\right] \end{aligned}$$

[сумма вычислена с помощью производящей функции (13.10)]. Плотность вероятности координат; определяется квадратом модуля  $\psi(x, t)$ :

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{\alpha}{\pi^{1/2}} e^{-\alpha^2 (x - a \cos \omega_c t)^2}.$$

Отсюда видно, что функция  $\psi$  в данном случае описывает волновой пакет, осциллирующий без изменения формы около точки  $x = 0$  с амплитудой  $a$  и классической частотой  $\omega_c$ . Волновая функция  $\psi$  при  $a \rightarrow 0$  стремится к собственной функции  $u_0(x) e^{-i\omega_c t/2}$ , соответствующей наименьшей энергии. С увеличением  $a$  возрастает число стационарных состояний, играющих заметную роль в образовании пакета, и увеличивается квантовое число  $n_0$ , для которого  $A_n$  в (13.22) принимает максимальное значение. При  $n \gg 1$  для нахождения максимального значения  $\ln A_n$  можно воспользоваться формулой Стирлинга; пренебрегая членами, порядок величины которых меньше или равен  $\ln n$ , получаем

$$\ln A_n \approx n \left( \ln \xi_0 - \frac{1}{2} \ln 2 \right) - \frac{1}{2} n (\ln n - 1), \quad (13.23)$$

$$n_0 \approx \frac{1}{2} \xi_0^2 = \frac{Ka^2}{2\hbar\omega_c}.$$

Таким образом, собственные функции, дающие основной вклад в  $\psi(x, t)$ , принадлежат энергиям  $E_{n_0} = (n_0 + 1/2)\hbar\omega_0$ , близким к энергии классического осциллятора  $Ka^2/2$ , колеблющегося с той же амплитудой.

## § 14. Сферически симметричные потенциалы в трехмерном пространстве

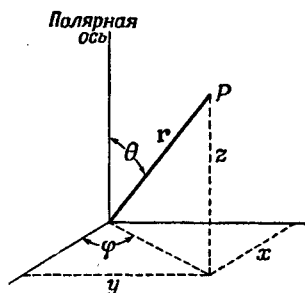
В общем случае невозможно получить аналитические решения трехмерного волнового уравнения (8.2), если только путем разделения переменных его не удастся свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям, каждое из которых содержит только одну из трех пространственных координат. В работах Эйзенхарта [2] было показано<sup>1)</sup>, что имеется 11 координатных систем, допускающих разделение переменных в волновом уравнении для свободной частицы [т. е. уравнении (8.2) при  $V=0$ ]. Одной из наиболее важных является сферическая система координат, в которой прямоугольные координаты точки имеют вид (см. фиг. 12)

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

Если потенциальная энергия сферически симметрична, так что функция  $V(\mathbf{r}) = V(r)$  зависит лишь от абсолютной величины  $r$  вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из начала координат, то разделение переменных всегда возможно в сферических координатах. Многие задачи, представляющие физический интерес, можно точно или приближенно свести к уравнению Шредингера со сферически симметричным потенциалом того или иного вида. В настоящем параграфе мы проведем разделение переменных и решим получающиеся при этом обыкновенные дифференциальные уравнения с аргументами  $\theta$  и  $\varphi$ . Остальные два параграфа будут посвящены решению радиального уравнения для некоторых частных видов потенциальной энергии  $V(r)$ .



Фиг. 12. Соотношение между прямоугольными и сферическими координатами точки  $P$ .

**Разделение переменных в волновом уравнении.** В сферических координатах волновое уравнение (8.2) со сферически симметричной

<sup>1)</sup> См. также книгу Паулинга и Вильсона [3], приложение IV.

потенциальной энергией имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u + V(r) u = Eu. \quad (14.1)$$

Прежде всего разделим радиальную и угловую части, полагая

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi).$$

Деля обе части (14.1) на  $u$ , получаем

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] = -\frac{1}{Y} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (14.2)$$

Поскольку левая часть (14.2) зависит только от  $r$ , а правая — только от  $\theta$  и  $\varphi$ , то обе части должны равняться постоянной, которую мы обозначим через  $\lambda$ . Таким образом, из (14.2) получаем радиальное уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{\lambda}{r^2} \right\} R = 0 \quad (14.3)$$

и угловое уравнение

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0. \quad (14.4)$$

Полагая в (14.4)  $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$  и повторяя тот же самый прием, можно разделить переменные  $\theta$  и  $\varphi$ , в результате чего получим

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \nu \Phi = 0, \quad (14.5)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \left( \lambda - \frac{\nu}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0. \quad (14.6)$$

Уравнение (14.5), определяющее зависимость волновой функции от  $\varphi$ , немедленно интегрируется; общее решение его имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= Ae^{i\nu^{1/2}\varphi} + Be^{-i\nu^{1/2}\varphi}, & \nu \neq 0, \\ \Phi(\varphi) &= A + B\varphi, & \nu = 0. \end{aligned} \quad (14.7)$$

В силу условия непрерывности функций  $\Phi(\varphi)$  и  $d\Phi/d\varphi$  величина  $\nu$  во всей области  $0 \leq \varphi < 2\pi$  (см. § 8) должна быть равна квадрату целого числа. Соответственно вместо (14.7) мы получим

$$\Phi_m(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} e^{im\varphi}. \quad (14.8)$$



Коль скоро  $m$  может равняться любому положительному или отрицательному целому числу или нулю<sup>1)</sup>, здесь учтены все решения, имеющие физический смысл.

Постоянный множитель выбран равным  $(2\pi)^{-1/2}$  для того, чтобы функция  $\Phi$  была нормирована на единицу в области изменения  $\varphi$ .

**Полиномы Лежандра.** Пока функция  $V(r)$  не задана, самое большее, что мы можем сделать — это решить уравнение (14.6), где теперь  $\nu = m^2$ . Удобно произвести замену аргумента  $w = \cos \theta$  и положить

$$\Theta(\theta) = P(w).$$

Тогда уравнение (14.6) примет вид

$$\frac{d}{dw} \left[ (1-w^2) \frac{dP}{dw} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-w^2} \right) P = 0. \quad (14.9)$$

Поскольку  $\theta$  изменяется от 0 до  $\pi$ , то  $w$  изменяется от 1 до  $-1$ . Решение уравнения (14.9) можно получить методом, во многих отношениях аналогичным примененному в § 13; мы здесь не будем останавливаться на нем<sup>2)</sup>.

Будучи дифференциальным уравнением второго порядка, уравнение (14.9) имеет два линейно независимых решения. Исключая некоторые специальные значения  $\lambda$ , оба эти решения обращаются в бесконечность при  $w = \pm 1$  и, следовательно, являются физически недопустимыми (см. § 8). Однако, если  $\lambda = l(l+1)$ , где  $l$  — положительное целое число или нуль, то одно из решений остается конечным при  $w = \pm 1$ . Это конечное решение имеет вид полинома от  $w$  порядка  $l - |m|$ , умноженного на  $(1-w^2)^{|m|/2}$ ; четность его равна четности  $l - |m|$ .

Физически допустимые решения уравнения (14.9) при  $m = 0$  называются *полиномами Лежандра*  $P_l(w)$ . Их свойства, как и в случае полиномов Эрмита, можно рассматривать с помощью производящей функции

$$T(w, s) = (1 - 2sw + s^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(w) s^l, \quad s < 1. \quad (14.10)$$

Дифференцирование производящей функции по  $w$  и по  $s$  приводит к соотношениям, аналогичным равенствам (13.11) для полиномов Эрмита:

$$\begin{aligned} (1-w^2)P_l' &= -lwP_l + lP_{l-1}, \\ (l+1)P_{l+1} &= (2l+1)wP_l - lP_{l-1}; \end{aligned} \quad (14.11)$$

<sup>1)</sup> Для квантового числа, соответствующего координате  $\varphi$ , мы применяем обычное обозначение  $m$ , которое не следует смешивать с массой частицы.

<sup>2)</sup> Полное решение этого уравнения можно найти в книге Уиттекера и Ватсона [4], гл. 15.

(штрихом обозначено дифференцирование по  $w$ ). Дифференциальное уравнение наименьшего порядка, вытекающее из (14.11) и содержащее только  $P_l$ , как нетрудно видеть, совпадает с (14.9), если в последнем положить  $\lambda = l(l+1)$  и  $m = 0$ .

При  $m$ , отличном от нуля, уравнение (14.9) имеет физически допустимые решения, если  $\lambda = l(l+1)$  и  $|m| \leq l$ . Эти решения, называемые *присоединенными полиномами Лежандра*, выражаются через полиномы Лежандра следующим образом:

$$P_l^m(w) = (1-w^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} P_l(w). \quad (14.12)$$

Это можно показать, подставляя (14.12) в уравнение, получаемое путем  $|m|$ -кратного дифференцирования уравнения для  $P_l(w)$ . Дифференцируя (14.10)  $|m|$  раз по  $w$  и умножая результат на  $(1-w^2)^{|m|/2}$ , получим производящую функцию для присоединенных полиномов Лежандра:

$$T_m(w, s) = \frac{(2|m|)!(1-w^2)^{|m|/2} s^{|m|}}{2^{|m|} (|m|)! (1-2sw+s^2)^{|m|+1/2}} = \sum_{l=|m|}^{\infty} P_l^m(w) s^l. \quad (14.13)$$

**Сферические функции.** Угловая часть  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  полной волновой функции, удовлетворяющая уравнению (14.4) при  $\lambda = l(l+1)$ , называется сферической функцией (или сферической гармоникой). Очевидно,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = N_{lm} P_l^m(\cos \theta) \Phi_m(\varphi), \quad (14.14)$$

где  $\Phi_m(\varphi)$  дается формулой (14.8), а  $N_{lm}$  — нормировочная постоянная для присоединенного полинома Лежандра.

Так же, как в § 10 была доказана ортогональность собственных функций оператора энергии, можно доказать и ортогональность решений уравнения (14.4), соответствующих различным значениям  $\lambda$  или  $l$ . Однако собственное значение  $l$  является  $(2l+1)$ -кратно вырожденным, так как ему принадлежат все линейно независимые решения  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , в которых  $m$  принимает любое целое значение от  $-l$  до  $+l$ . В силу специального вида функции  $\Phi_m(\varphi)$ , определяемой выражением (14.8), все эти вырожденные собственные функции взаимно ортогональны. Таким образом, интеграл

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \bar{Y}_{l'n'}(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \bar{Y}_{l'm'} Y_{lm} \, dw \, d\varphi$$

обращается в нуль, если только не имеют места условия  $l = l'$  и  $m = m'$ .

Интересно отметить, что сферические функции, так сказать, не более ортогональны, чем это необходимо для обращения интеграла в нуль, когда следует. Именно при любых значениях  $l$  интеграл по  $\varphi$  обращается в нуль при  $m \neq m'$ ; интеграл по  $\theta$

или  $w$  обращается в нуль только при  $l \neq l'$  и  $|m| = |m'|$ , так как при  $m \neq m'$  ортогональность обеспечивается интегралом по  $\varphi$ .

Интеграл

$$\int_{-1}^1 P_l^m(w) P_{l'}^m(w) dw \quad (14.15)$$

можно вычислить различными способами, например с помощью производящей функции (14.13), как это делалось в § 13. Как и следовало ожидать, интеграл (14.15) отличен от нуля только при  $l = l'$ , причем в этом случае он равен  $[2/(2l+1)] [(l+|m|)!/(l-|m|)!]$ . Следовательно, в качестве постоянной  $N_{lm}$  (содержащей произвольный фазовый множитель единичного модуля) можно взять обратное значение корня квадратного из этой величины. Таким образом, нормированные сферические функции имеют вид

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (14.16)$$

В частности, первые четыре гармоники запишутся так:

$$Y_{0,0} = \frac{1}{(4\pi)^{1/2}}, \quad Y_{1,1} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta e^{i\varphi},$$

$$Y_{1,0} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta, \quad Y_{1,-1} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta e^{-i\varphi}.$$

**Четность.** Теперь можно обобщить введенное в § 9 представление о четности на случай трехмерных задач, рассматриваемых в настоящем параграфе. Произведем отражение относительно начала координат, т. е. заменим переменные так, чтобы радиус-вектор  $\mathbf{r}$  перешел в  $-\mathbf{r}$ . Это соответствует замене  $x$  на  $-x$ ,  $y$  на  $-y$  и  $z$  на  $-z$  или же (при неизменном  $r$ ) замене  $\theta$  на  $\pi - \theta$  и  $\varphi$  на  $\varphi + \pi$ . Единственное изменение, которое может при этом произойти в (14.1), состоит в замене волновой функции  $u(r, \theta, \varphi)$  на  $u(r, \pi - \theta, \varphi + \pi)$ ; структура и коэффициенты уравнения остаются неизменными. Тогда из результатов § 9 следует, что можно найти ортогональные линейные комбинации вырожденных собственных функций, имеющие определенные четности, а невырожденные собственные функции должны сами обладать определенной четностью.

При  $l > 0$  уровни энергии для сферически симметричного потенциала вырождены по крайней мере по отношению к квантовому числу  $m$ . В этом случае четность всех вырожденных собственных функций одинакова и, как мы теперь покажем, равна четности числа  $l$ . Действительно, при преобразовании отражения радиальная часть решения  $R(r)$  остается неизменной. Функция  $\Phi(\varphi)$ , определяемая соотношением (14.8), имеет четность  $|m|$ . Четность  $P_l^m(\cos \theta)$  определяется величиной  $l - |m|$ , так как функция  $P_l^m(w)$  равна четной части  $(1 - w^2)^{|m|/2}$ , умноженной на полином

от  $w$ , четность которого относительно изменения знака  $w$  или  $\cos \theta$  равна четности  $l - |m|$ . Таким образом, четность  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , а следовательно, и  $u(\mathbf{r})$  совпадает с четностью числа  $l$ .

**Момент количества движения.** Радиальное волновое уравнение (14.3) можно переписать в форме, напоминающей одномерное волновое уравнение (8.5). Если положить  $R(r) = \chi(r)/r$ , то уравнение для новой радиальной волновой функции  $\chi$  можно записать в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] \chi = E\chi. \quad (14.17)$$

Таким образом, радиальное движение аналогично одномерному движению частицы с потенциальной энергией

$$V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}. \quad (14.18)$$

Физическое происхождение добавочной „потенциальной энергии” связано с моментом количества движения, в чем легко убедиться следующим образом. Обозначим через  $M$  момент количества движения классической частицы относительно оси, проходящей через центр орбиты перпендикулярно ее плоскости. Тогда угловая скорость частицы будет  $\omega = M/mr^2$ , где  $r$  — расстояние от частицы до начала координат. Чтобы удержать частицу на орбите, необходимо приложить силу, направленную внутрь и равную

$$m\omega^2 r = \frac{M^2}{mr^3}.$$

Эта „центробежная сила” создается потенциальной энергией, в связи с чем к энергии  $V(r)$ , характеризующей радиальное движение, нужно прибавить дополнительную „центробежную потенциальную энергию”  $M^2/2mr^2$ . Коль скоро

$$M = [l(l+1)]^{1/2} \hbar,$$

то эта энергия совпадает с добавочным членом в (14.18).

Высказанные физические соображения в пользу отождествления квантового числа  $l$  с моментом количества движения частицы получают количественное обоснование, если ввести операторы, соответствующие трем компонентам вектора момента количества движения. В классическом случае мы имеем  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , следовательно, при квантовом рассмотрении надо положить

$$\begin{aligned} M_x &= yp_z - zp_y = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ M_y &= zp_x - xp_z = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ M_z &= xp_y - yp_x = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (14.19)$$

Преобразуя выражения (14.19) к сферическим координатам, получим

$$\begin{aligned} M_x &= i\hbar \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ M_y &= i\hbar \left( -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ M_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (14.20)$$

В силу (14.20) оператор квадрата полного момента количества движения имеет вид

$$\mathbf{M}^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (14.21)$$

Сравнение уравнений (14.21) и (14.4) показывает, что  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  является собственной функцией оператора  $\mathbf{M}^2$ , принадлежащей собственному значению  $l(l+1)\hbar^2$ :

$$\mathbf{M}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (14.22)$$

Аналогично, сопоставляя (14.8) и последнюю из формул (14.20), видим, что  $\Phi_m(\varphi)$ , а следовательно, и  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  есть собственная функция оператора  $M_z$ , принадлежащая собственному значению  $m\hbar$ :

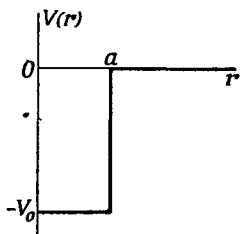
$$M_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (14.23)$$

Таким образом, волновые функции, получающиеся при разделении переменных в волновом уравнении в сферических координатах, являются собственными функциями как полного момента количества движения, так и его проекции на полярную ось. Квантовое число  $l$ , фигурирующее в (14.22), называется *азимутальным* или *орбитальным* квантовым числом. Величина  $m$ , входящая в (14.23), называется *магнитным квантовым числом*, так как она играет важную роль в теории эффекта Зеемана (см. § 39), где приходится иметь дело с компонентой момента количества движения в направлении магнитного поля (направленного вдоль оси  $z$ ). Следует заметить, что если потенциальная энергия  $V(r)$  не является сферически симметричной, то в общем случае нельзя разделить переменные в волновом уравнении и получить таким путем собственные функции оператора момента количества движения. Это соответствует классическому результату, согласно которому момент количества движения является интегралом движения только в случае центральных сил, описываемых сферически симметричным потенциалом. Есть, однако, одно характерное различие между классической и квантовой теориями: в пер-

вой все три компоненты  $M$  можно точно определить одновременно, тогда как во второй в общем случае одновременно можно задать только  $M_z$  и  $M^2$ . Действительно, сферические гармоники  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  не являются собственными функциями операторов  $M_x$  и  $M_y$  (исключая случай  $l = 0$ ). Этот результат можно связать с принципом неопределенности. Разумеется, выбор направления полярной оси, выделяющий  $M_z$  по сравнению с  $M_x$  и  $M_y$ , является совершенно произвольным, что соответствует произволу в выборе оси пространственного квантования в старой квантовой теории (в отсутствие внешних полей).

### § 15. Трехмерная прямоугольная потенциальная яма

Теперь мы можем приступить к определению уровней энергии связанных состояний, соответствующих тому или иному частному виду потенциальной энергии  $V(r)$  и данному значению орбитального квантового числа  $l$ . Для этого надо будет решить радиальное волновое уравнение (14.3) при заданной функции  $V(r)$ . В качестве первого примера рассмотрим прямоугольную потенциальную яму конечной глубины, для которой  $V(r) = -V_0$  при  $r < a$  и  $V(r) = 0$  при  $r > a$ , где  $V_0 > 0$  (фиг. 13). Сферическая область данного типа, внутри которой потенциал меньше, чем в остальных точках пространства, является центром притяжения так же, как это имело место в одномерном случае, рассмотренном в § 9.



Фиг. 13. Сферически симметричная прямоугольная потенциальная яма глубиной  $V_0$  и радиусом  $a$ .

**Нулевой момент количества движения.** При  $l = 0$  проще решать волновое уравнение, записанное в виде (14.17), а не (14.3). В этом случае  $R(r) = \chi(r)/r$  и уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi}{dr^2} - V_0 \chi &= E \chi, & r < a, \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi}{dr^2} &= E \chi, & r > a. \end{aligned} \quad (15.1)$$

Уравнения (15.1) решаются так же, как и в § 9 (случай конечного скачка потенциала), с той лишь разницей, что, во-первых, в настоящей задаче энергия отсчитывается не от нуля, а от  $V_0$ ; во-вторых, в § 9 переменная  $x$  изменялась от  $-\infty$  до  $+\infty$ , тогда как теперь  $r$  изменяется от 0 до  $+\infty$ ; в-третьих, граничное условие, согласно которому волновая функция не должна обращаться в бесконечность при  $x = -\infty$ , заменяется теперь таким же условием в точке  $r = 0$ .

Из результатов § 9 следует, что решение (15.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \chi(r) &= A \sin \alpha r + B \cos \alpha r, & \alpha &= \left[ \frac{2m(V_0 - |E|)}{\hbar^2} \right]^{1/2}, & r < a, \\ \chi(r) &= C e^{-\beta r}, & \beta &= \left( \frac{2m|E|}{\hbar^2} \right)^{1/2}, & r > a, \end{aligned} \quad (15.2)$$

причем нас интересуют связанные состояния, когда  $E < 0$ . В силу условия конечности  $R(r)$  при  $r = 0$  следует положить  $B = 0$  в первой формуле (15.2). Таким образом, функция  $\chi(r)$  имеет вид нечетного решения одномерной задачи. Уровни энергии можно найти, приравнявая два значения  $(1/\chi)$  ( $d\chi/dr$ ) в точке  $r = a$  [что эквивалентно условию непрерывности  $(1/R)$  ( $dR/dr$ ) в этой точке] и решая уравнение

$$\alpha \operatorname{ctg} \alpha a = -\beta, \quad (15.3)$$

совпадающее с (9.6). Из результатов § 9 явствует теперь, что при  $V_0 a^2 > \pi^2 \hbar^2 / 8m$  дискретные уровни энергии отсутствуют, при  $\pi^2 \hbar^2 / 8m < V_0 a^2 \leq 9\pi^2 \hbar^2 / 8m$  имеется одно связанное состояние и т. д.

**Решения во внутренней области при произвольном  $l$ .** Если  $l \neq 0$ , то удобнее пользоваться не уравнением для  $\chi$ , а первоначальным радиальным уравнением (14. 3). Положим  $\varrho = \alpha r$ , где  $\alpha$  дается формулой (15.2), тогда при  $r < a$  волновое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \right] R = 0. \quad (15.4)$$

Близкое сходство между (15.4) и уравнением Бесселя наводит на мысль связать  $R(r)$  с функциями Бесселя. Это действительно можно сделать. Введем сферическую функцию Бесселя  $j_l(\varrho)$ , регулярную в точке  $\varrho = 0$ , определив ее соотношением<sup>1)</sup>

$$j_l(\varrho) = \left( \frac{\pi}{2\varrho} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(\varrho), \quad (15.5)$$

где  $J$  — обычная функция Бесселя полуцелого порядка. Как нетрудно проверить, функция  $j_l(\varrho)$  удовлетворяет уравнению (15.4). Аналогично сферическая функция Неймана имеет вид

$$n_l(\varrho) = (-1)^{l+1} \left( \frac{\pi}{2\varrho} \right)^{1/2} J_{-l-1/2}(\varrho).$$

Можно показать<sup>2)</sup>, что  $J_{l+1/2}(\varrho)$ , где  $l$  — положительное или отрицательное целое число или нуль, можно представить в виде

<sup>1)</sup> Это определение и свойства функций  $j_l$  и  $n_l$  заимствуются из книги Морза [5].

<sup>2)</sup> См. книгу Ватсона [6].

суммы произведений  $\sin \varrho$  и  $\cos \varrho$  на полиномы нечетного порядка относительно  $\varrho^{-1/2}$ . В частности, явные выражения для первых трех функций  $j$  и  $n$  имеют вид

$$\begin{aligned} j_0(\varrho) &= \frac{\sin \varrho}{\varrho}, & n_0(\varrho) &= -\frac{\cos \varrho}{\varrho}, \\ j_1(\varrho) &= \frac{\sin \varrho}{\varrho^2} - \frac{\cos \varrho}{\varrho}, & n_1(\varrho) &= -\frac{\cos \varrho}{\varrho^2} - \frac{\sin \varrho}{\varrho}, \\ j_2(\varrho) &= \left(\frac{3}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho}\right) \sin \varrho - \frac{3}{\varrho^2} \cos \varrho, & n_2(\varrho) &= -\left(\frac{3}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho}\right) \cos \varrho - \frac{3}{\varrho^2} \sin \varrho. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Главные члены при малых  $\varrho$  запишутся следующим образом<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} j_l(\varrho) &\xrightarrow{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^l}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l+1)}, \\ n_l(\varrho) &\xrightarrow{\varrho \rightarrow 0} -\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{\varrho^{l+1}}, \end{aligned} \quad (15.7)$$

а главные члены в асимптотических разложениях функций  $j_l$  и  $n_l$  равны<sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} j_l(\varrho) &\xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} \cos \left[ \varrho - \frac{1}{2}(l+1)\pi \right], \\ n_l(\varrho) &\xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} \sin \left[ \varrho - \frac{1}{2}(l+1)\pi \right]. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Некоторые свойства функций  $j$  и  $n$  характеризуются соотношениями

$$\begin{aligned} \int j_0^2(\varrho) \varrho^2 d\varrho &= \frac{1}{2} \varrho^3 [j_0^2(\varrho) + n_0(\varrho) j_1(\varrho)], \\ \int n_0^2(\varrho) \varrho^2 d\varrho &= \frac{1}{2} \varrho^3 [n_0^2(\varrho) - j_0(\varrho) n_1(\varrho)], \\ n_{l-1}(\varrho) j_l(\varrho) - n_l(\varrho) j_{l-1}(\varrho) &= \frac{1}{\varrho^2}, \quad l > 0, \\ j_l(\varrho) \frac{d}{d\varrho} n_l(\varrho) - n_l(\varrho) \frac{d}{d\varrho} j_l(\varrho) &= \frac{1}{\varrho^2}. \end{aligned} \quad (15.9)$$

<sup>1)</sup> Формулы (15.7) дают хорошее приближение, если  $\varrho^2$  несколько меньше  $4l+6$  (для функции  $j_l$ ) и 2 (для функции  $n_l(\varrho)$ ) (см. книгу Ватсона [6]).

<sup>2)</sup> Формулы [15.8] дают хорошее приближение, если  $\varrho$  несколько больше  $l(l+1)/2$  (см. [6], стр. 199). Однако абсолютные величины (но не фазы) функций  $j_l$  и  $n_l$  с хорошим приближением определяются формулами (15.8), если только  $\varrho$  несколько больше  $l$  (что близко к тому значению  $\varrho$ , для которого абсолютная величина функции  $j_l$  имеет максимум).



Следующие равенства справедливы как для  $j$ , так и для  $n$ :

$$\begin{aligned}
 j_{l-1}(\varrho) + j_{l+1}(\varrho) &= \frac{2l+1}{\varrho} j_l(\varrho), \quad l > 0, \\
 \frac{d}{d\varrho} j_l(\varrho) &= \frac{1}{2l+1} [lj_{l-1}(\varrho) - (l+1)j_{l+1}(\varrho)], \\
 \frac{d}{d\varrho} [e^{l+1} j_l(\varrho)] &= e^{l+1} j_{l-1}(\varrho), \quad l > 0, \\
 \frac{d}{d\varrho} [e^{-l} j_l(\varrho)] &= -e^{-l} j_{l+1}(\varrho), \\
 \int j_1(\varrho) d\varrho &= -j_0(\varrho), \\
 \int j_0(\varrho) \varrho^2 d\varrho &= \varrho^2 j_1(\varrho), \\
 \int j_l^2(\varrho) \varrho^2 d\varrho &= \frac{1}{2} \varrho^3 [j_l^2(\varrho) - j_{l-1}(\varrho) j_{l+1}(\varrho)], \quad l > 0.
 \end{aligned} \tag{15.10}$$

Поскольку при  $r = 0$  функция  $R(r)$  должна оставаться конечной, искомое решение при  $r < a$  имеет вид

$$R(r) = A j_l(\alpha r). \tag{15.11}$$

**Решения во внешней области при произвольном  $l$ .** При  $r > a$  волновое уравнение можно привести к виду (15.4), если положить  $\varrho = i\beta r$ , где величина  $\beta$  определена в (15.2). Поскольку область изменения  $\varrho$  теперь не содержит нуля, то нет оснований исключать  $n_l$  из решения. Из функций  $j_l$  и  $n_l$  надо составить такую линейную комбинацию, которая экспоненциально убывала бы при больших  $r$ . В связи с этим определим *сферические функции Ганкеля*

$$\begin{aligned}
 h_l^{(1)}(\varrho) &= j_l(\varrho) + i n_l(\varrho), \\
 h_l^{(2)}(\varrho) &= j_l(\varrho) - i n_l(\varrho),
 \end{aligned} \tag{15.12}$$

асимптотические выражения для которых в соответствии с (15.8) имеют вид

$$\begin{aligned}
 h_l^{(1)}(\varrho) &\xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} e^{i \left[ e^{-\frac{1}{2}(l+1)\pi} \right]}, \\
 h_l^{(2)}(\varrho) &\xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} e^{-i \left[ e^{-\frac{1}{2}(l+1)\pi} \right]}.
 \end{aligned} \tag{15.13}$$

Можно показать, что асимптотические разложения, главные члены которых определяются формулами (15.13), не содержат экспонент с противоположным знаком показателя степени.

Таким образом, при  $r > a$  искомое решение есть

$$R(r) = B h_l^{(1)}(i\beta r) = B [j_l(i\beta r) + i n_l(i\beta r)]. \tag{15.14}$$

Первые три из этих функций имеют вид

$$\begin{aligned} h_0^{(1)}(i\beta r) &= -\frac{1}{\beta r} e^{-\beta r}, \\ h_1^{(1)}(i\beta r) &= i \left( \frac{1}{\beta r} + \frac{1}{\beta^2 r^2} \right) e^{-\beta r}, \\ h_2^{(1)}(i\beta r) &= \left( \frac{1}{\beta r} + \frac{3}{\beta^2 r^2} + \frac{3}{\beta^3 r^3} \right) e^{-\beta r}. \end{aligned} \quad (15.15)$$

**Уровни энергии.** Уровни энергии получаются из условия непрерывности  $(1/R)(dR/dr)$  при  $r = a$ . Накладывая это условие на внутреннее (15.11) и внешнее (15.15) решения при  $l = 0$ , мы получим уравнение (15.3). Последнее можно переписать в виде

$$\xi \operatorname{ctg} \xi = -\eta, \quad \xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}, \quad (15.16)$$

где, как и в § 9,  $\xi = \alpha a$  и  $\eta = \beta a$ . При  $l = 1$  условие непрерывности в силу (15.6) и (15.15) приводится к виду

$$\frac{\operatorname{ctg} \xi}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2}, \quad \xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}. \quad (15.17)$$

Уравнения (15.17) можно решить либо численно, либо графически, с помощью методов, применявшихся в § 9. В общем случае собственные значения, получающиеся при решении уравнений типа (15.16) и (15.17) с различными значениями  $l$ , являются невырожденными.

Число уровней энергии, допускаемых уравнениями (15.17) при различных значениях  $V_0 a^2$ , легко определить и без помощи численных расчетов. Новый уровень появляется, если  $\eta$  обращается в нуль или  $\operatorname{ctg} \xi$  — в бесконечность. Это имеет место при  $\xi = \pi, 2\pi \dots$ . Поэтому если  $l = 1$ , то при

$$V_0 a^2 \leq \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}$$

уровни энергии отсутствуют, при  $\pi^2 \hbar^2 / 2m < V_0 a^2 < 2\pi^2 \hbar^2 / m$  имеется одно связанное состояние и т. д.

Наименьшее значение  $V_0 a^2$ , для которого имеется связанное состояние при  $l = 1$ , больше соответствующего значения  $V_0 a^2$  при  $l = 0$ . Физически это вполне естественно. Действительно, фигурирующий в радиальном волновом уравнении член с  $l$  был истолкован в § 14 как добавочная потенциальная энергия, соответствующая отталкивающей „центробежной силе“. Соответственно для удержания частицы, обладающей конечным моментом количества движения, требуется большая сила притяжения, чем для частицы, момент количества движения которой равен нулю. В самом деле, оказывается, что минимальная „сила“  $V_0 a^2$

прямоугольной потенциальной ямы, необходимая для удержания частицы, монотонно возрастает с возрастанием орбитального квантового числа  $l$ <sup>1)</sup>.

### § 16. Атом водорода

Если потенциальная энергия имеет вид  $V(r) = -Ze^2/r$  (кулоновское притяжение между атомным ядром с зарядом  $+Ze$  и электроном с зарядом  $-e$ ), то волновое уравнение также можно решить аналитически. Данная задача представляет непосредственный физический интерес, так как с точностью до релятивистских эффектов (см. гл. XII) вычисляемые при этом собственные значения оператора энергии соответствуют наблюдаемым уровням энергии атома водорода ( $Z=1$ ), однократно ионизованного атома гелия ( $Z=2$ ) и т. д.

**Приведенная масса.** Волновое уравнение Шредингера, полученное в § 6, описывает движение одной частицы во внешнем силовом поле. Теперь, однако, нас интересует движение двух частиц (ядра и электрона), между которыми действует сила притяжения, зависящая только от расстояния между частицами. Для нахождения волнового уравнения, описывающего движение двух частиц, вспомним, каким образом в § 6 обобщалось волновое уравнение в связи с переходом от одного к трем измерениям. Там мы предположили, что волновая функция зависит уже не от одной координаты  $x$ , а от трех,  $x$ ,  $y$  и  $z$ , и ввели соответствующие импульсы, руководствуясь при этом классическим выражением для энергии.

Аналогичное обобщение, связанное с переходом от трех к шести прямоугольным координатам, непосредственно приводит к волновому уравнению Шредингера для двух частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) = \\ = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) + \right. \\ \left. + V(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) \right] \psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t). \quad (16.1)$$

Потенциальная энергия здесь может произвольным образом зависеть от шести координат и от времени. Если теперь потенци-

<sup>1)</sup> Можно показать, что при данном  $l$  связанные состояния с энергией, равной нулю, появляются, когда

$$\left( \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{l+1}{a}.$$

При  $l > 0$  это эквивалентно условию  $j_{l-1}(\xi) = 0$ , где теперь  $\xi = (2mV_0 a^2 / \hbar^2)^{1/2}$ .

альная энергия зависит только от относительных координат, т. е.  $V = V(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ , то возможно важное упрощение. Именно, введем относительные координаты  $x, y, z$  и координаты центра инерции  $X, Y, Z$ , полагая

$$\begin{aligned} x &= x_1 - x_2, & y &= y_1 - y_2, & z &= z_1 - z_2, \\ MX &= m_1 x_1 + m_2 x_2, & MY &= m_1 y_1 + m_2 y_2, & MZ &= m_1 z_1 + m_2 z_2; \end{aligned} \quad (16.2)$$

здесь  $M = m_1 + m_2$  — полная масса системы. В новых координатах уравнение (16.1) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \right] \psi, \quad (16.3)$$

где

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (16.4)$$

так называемая *приведенная масса*.

В волновом уравнении (16.3) можно теперь дважды разделить переменные. Во-первых, как и в § 8, можно выделить часть, зависящую от времени; во-вторых, остающуюся волновую функцию можно представить в виде произведения функции от относительных координат на функцию от координат центра инерции. Элементарный расчет дает

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z, X, Y, Z, t) &= u(x, y, z) U(X, Y, Z) e^{-i(E+E')t/\hbar}, \\ &-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 u + Vu = Eu, \\ &-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 U = E'U, \end{aligned} \quad (16.5)$$

где оператор  $\nabla^2$  во втором и в третьем уравнениях означает соответственно дифференцирование по относительным координатам и координатам центра инерции. Второе уравнение (16.5), описывающее относительное движение двух частиц, совпадает с уравнением движения одной частицы с массой  $\mu$  во внешнем поле, характеризуемом потенциальной энергией  $V$ . Из третьего уравнения (16.5) следует, что центр инерции системы двух частиц движется как свободная частица с массой  $M$ .

В задаче об атоме водорода нас будут интересовать уровни энергии  $E$ , связанные с относительным движением. Поскольку масса атомного ядра значительно больше массы электрона, приведенная масса  $\mu$  в этом случае очень близка к последней.

**Асимптотическое поведение.** В сферических координатах разделение переменных в уравнении для относительного движения

производится так же, как и в § 14. При этом радиальное уравнение, соответствующее данному значению орбитального квантового числа  $l$ , имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{Ze^2}{r} R + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} R = ER, \quad (16.6)$$

причем для связанного состояния  $E < 0$ . Мы воспользуемся полиномиальным методом, применявшимся в § 13 при решении уравнения для гармонического осциллятора, и прежде всего попытаемся переписать уравнение (16.6) в безразмерном виде, вводя безразмерную независимую переменную  $\varrho = \alpha r$ . Однако в противоположность (13.1), где главную роль при больших  $x$  играла потенциальная энергия  $Kx^2/2$ , в уравнении (16.6) главным членом при больших  $r$  будет слагаемое  $ER$ . Поэтому удобно выбрать  $\alpha$  так, чтобы это слагаемое стало заданным числом; тогда асимптотическое поведение решения не будет зависеть от собственного значения  $E$ . Соответственно перепишем уравнение (16.6) в виде

$$\frac{1}{\varrho^2} \frac{d}{d\varrho} \left( \varrho^2 \frac{dR}{d\varrho} \right) + \left[ \frac{\lambda}{\varrho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \right] R = 0, \quad (16.7)$$

где вместо члена с  $E$  теперь фигурирует  $1/4$  (выбор именно этого числа диктуется лишь соображениями дальнейшего удобства). Сопоставляя уравнения (16.6) и (16.7), видим, что

$$\alpha^2 = \frac{8\mu|E|}{\hbar^2}, \quad \lambda = \frac{2\mu Ze^2}{\alpha \hbar^2} = \frac{Ze^2}{\hbar} \left( \frac{\mu}{2|E|} \right)^{1/2}. \quad (16.8)$$

Как и в случае уравнения для гармонического осциллятора, выясним прежде всего асимптотическое поведение функции  $R(\varrho)$  при  $\varrho \rightarrow \infty$ . Принимая во внимание лишь главные члены (порядка  $R$ ), легко понять, что при достаточно большом  $\varrho$  уравнению (16.7) удовлетворяет функция  $R(\varrho) = \varrho^n e^{\pm \varrho/2}$ , где  $n$ —любое конечное число. Это наводит на мысль искать точное решение уравнения (16.7) в виде

$$R(\varrho) = F(\varrho) e^{-\varrho/2}, \quad (16.9)$$

где  $F(\varrho)$  — полином конечного порядка относительно  $\varrho$ . Подставляя (16.9) в (16.7), получим уравнение для  $F(\varrho)$ :

$$F'' + \left( \frac{2}{\varrho} - 1 \right) F' + \left[ \frac{\lambda - 1}{\varrho} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \right] F = 0, \quad (16.10)$$

где штрихи означают дифференцирование по  $\varrho$ .

**Уровни энергии.** Будем искать  $F$  в виде

$$F(\varrho) = \varrho^s (a_0 + a_1 \varrho + a_2 \varrho^2 + \dots) \equiv \varrho^s L(\varrho), \quad a_0 \neq 0, \quad s \geq 0. \quad (16.11)$$

При  $\varrho = 0$  это выражение остается конечным. Подстановка (16.11) в (16.10) дает уравнение для  $L$ :

$$\varrho^2 L'' + \varrho[2(s+1) - \varrho] L' + [\varrho(\lambda - s - 1) + s(s+1) - l(l+1)] L = 0.$$

Если положить здесь  $\varrho$  равным нулю, то из вида  $L$  следует, что  $s(s+1) - l(l+1) = 0$ . Это квадратное уравнение имеет два корня:  $s = l$  и  $s = -(l+1)$ . Поскольку при  $\varrho = 0$  функция  $R(\varrho)$  должна оставаться конечной, следует положить  $s = l$ . Соответственно уравнение для  $L$  принимает вид

$$\varrho L'' + [2(l+1) - \varrho] L' + (\lambda - l - 1) L = 0. \quad (16.12)$$

Для решения уравнения (16.12) подставим в него степенные ряды вида (16.11). Как легко убедиться, рекуррентная формула для коэффициентов имеет вид

$$a_{\nu+1} = \frac{\nu + l + 1 - \lambda}{(\nu + 1)(\nu + 2l + 2)} a_{\nu}. \quad (16.13)$$

Если ряды не обрываются, то их асимптотическое поведение определяется отношением коэффициентов при высоких степенях  $\nu$ :

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu}.$$

Это отношение соответствует степенному разложению функции  $\varrho^n e^{\varrho}$ , где  $n$  — произвольное конечное число. Из соотношений (16.9) и (16.11) видно, что при этом нарушаются граничные условия, налагаемые на функцию  $R$  при больших  $\varrho$ .

Таким образом, ряд для функции  $L$  должен обрываться на некотором члене. Обозначим через  $n'$  наивысшую степень  $\varrho$  в разложении  $L$  ( $n' \geq 0$ ); тогда величина  $\lambda$  должна быть равна целому положительному числу  $n$ <sup>1)</sup>

$$\lambda = n = n' + l + 1. \quad (16.14)$$

Число  $n'$  называется *радиальным*, а  $n$  — *полным квантовым числом*. Поскольку  $n'$  и  $l$  могут быть равны нулю или положительным целым числам,  $n$  может принимать значения 1, 2, ... Собственные значения оператора энергии даются формулой (16.8)

$$E_n = -|E_n| = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 n^2} \quad (16.15)$$

в согласии со старой квантовой теорией и с опытом. В противоположность рассмотренному в § 15 случаю прямоугольной потенциальной ямы в задаче о кулоновском поле при любом конечном

<sup>1)</sup> Допустимые значения  $\lambda$  оказались целыми числами, а не кратными от них благодаря специальному выбору переменных в (16.7), при котором член, ранее содержавший собственное значение  $E$ , был положен равным  $1/4$ .

значении  $Z$  имеется бесконечное число дискретных уровней энергии, лежащих в пределах от  $-\mu Z^2 e^4 / 2\hbar^2$  до нуля. Это связано с медленным убыванием абсолютной величины кулоновского потенциала при больших значениях  $r$ .

**Полиномы Лагерра.** При  $\lambda = n$  допустимые решения уравнения (16.12) выражаются через *полиномы Лагерра*  $L_q(\varrho)$ , которые можно определить с помощью производящей функции

$$U(\varrho, s) = \frac{e^{-\varrho s/(1-s)}}{1-s} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{L_q(\varrho)}{q!} s^q, \quad s < 1. \quad (16.16)$$

Дифференцирование производящей функции по  $\varrho$  и  $s$  приводит к соотношениям типа уравнений (13.11) для полиномов Эрмита и уравнений (14.11) для полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned} L'_q - qL'_{q-1} &= -qL_{q-1}, \\ L_{q+1} &= (2q+1-\varrho)L_q - q^2L_{q-1}. \end{aligned} \quad (16.17)$$

Легко видеть, что дифференциальное уравнение наименьшего порядка, которое вытекает из (16.17) и содержит только  $L_q$ , имеет вид

$$\varrho L''_q + (1-\varrho)L'_q + qL_q = 0. \quad (16.18)$$

Это уравнение напоминает (16.12), но не совпадает с ним. Определим *присоединенные полиномы Лагерра*, полагая

$$L_q^p(\varrho) = \frac{d^p}{d\varrho^p} L_q(\varrho). \quad (16.19)$$

Дифференцируя (16.18)  $p$  раз, находим дифференциальное уравнение для  $L_q^p(\varrho)$ :

$$\varrho L_q^{p''} + (p+1-\varrho)L_q^{p'} + (q-p)L_q^p = 0. \quad (16.20)$$

Сравнивая это с (16.12) (при  $\lambda = n$ ), видим, что искомые полиномиальные решения представляют собой присоединенные полиномы Лагерра  $L_{n+l}^{2l+1}(\varrho)$ , порядок которых в соответствии с (16.14) равен  $(n+l) - (2l+1) = n-l-1$ .

Дифференцируя (16.16)  $p$  раз по  $\varrho$ , получаем производящую функцию для присоединенных полиномов Лагерра:

$$U_p(\varrho, s) = \frac{(-s)^p e^{-\varrho s/(1-s)}}{(1-s)^{p+1}} = \sum_{q=p}^{\infty} \frac{L_q^p(\varrho)}{q!} s^q. \quad (16.21)$$

Явное выражение для них имеет вид

$$L_{n+l}^{2l+1}(\varrho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+1} \frac{[(n+l)]^k e^{\varrho k}}{(n-l-1-k)! (2l+1+k)! k!}. \quad (16.22)$$

В этом можно убедиться, подставив (16.22) в (16.21) (при  $q = n + l$  и  $p = 2l + 1$ ) и изменив порядок суммирования.

**Волновые функции атома водорода.** Радиальная волновая функция имеет вид  $e^{-\varrho/2} \varrho^l L_{n+l}^{2l+1}(\varrho)$ . Нормировочную постоянную можно найти, вычисляя с помощью производящей функции интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\varrho} \varrho^{2l} [L_{n+l}^{2l+1}(\varrho)]^2 \varrho^2 d\varrho = \frac{2n[(n+l)!]^2}{(n-l-1)!}. \quad (16.23)$$

Таким образом, нормированные собственные функции оператора энергии атома водорода имеют вид

$$u_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$R_{nl}(r) = - \left\{ \left( \frac{2Z}{na_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^2} \right\}^{1/2} e^{-\varrho/2} \varrho^l L_{n+l}^{2l+1}(\varrho), \quad (16.24)$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}, \quad \varrho = \frac{2Z}{na_0} r,$$

где  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  — нормированная сферическая функция, определяемая формулой (14.16), а  $a_0$  — радиус первой (круговой) боровской орбиты ( $Z = 1$ ) старой квантовой теории. Уровни энергии (16.15) можно записать в виде

$$E_n = - \frac{Z^2 e^2}{2a_0 n^2}.$$

Первые три радиальные функции в соответствии с (16.22) и (16.24) имеют вид

$$R_{10}(r) = \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} 2e^{-Zr/a_0},$$

$$R_{20}(r) = \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \left( 2 - \frac{Zr}{a_0} \right) e^{-Zr/2a_0},$$

$$R_{21}(r) = \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0 \sqrt{3}} e^{-Zr/2a_0}.$$

Явные выражения для большего числа этих функций и графики некоторых из них можно найти в § 21 книги Паулинга и Вильсона [3].

Интересно отметить, что все собственные функции, соответствующие  $l = 0$ , имеют разрыв градиента в точке  $r = 0$ . Действительно, в этой точке у них  $dR_{n0}/dr \neq 0$ , а  $Y_{00}$  не зависит от  $\theta$  и  $\varphi$ . Это обстоятельство связано с обращением потенциальной энергии в бесконечность в указанной точке, в чем легко убедиться с помощью предельного перехода, аналогичного использованному в § 8 для вывода граничных условий на идеально твердых стенках.



**Вырождение.** Собственные значения оператора энергии (16.15) зависят только от  $n$ , и следовательно, они вырождены как по отношению к  $l$ , так и по отношению к  $m$ . При заданном  $n$  значение  $l$  может изменяться от 0 до  $n - 1$ , и для каждого из этих  $l$  число  $m$  принимает значения от  $-l$  до  $+l$ . Таким образом, кратность вырождения уровня энергии  $E_n$  равна

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2 \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2.$$

Из результатов § 14 явствует, что вырождение по отношению к числу  $m$  характерно для любого центрального силового поля, для которого  $V$  зависит только от расстояния  $r$  до некоторой точки. Однако вырождение по отношению к орбитальному квантовому числу характерно именно для кулоновского случая и отсутствует у большинства других центральных полей. В некоторых задачах, например в задаче о движении валентного электрона в атоме щелочного металла, потенциальная энергия зависит только от расстояния до центра, но имеет лишь приближенно кулоновский вид. В результате  $n$  уровней энергии с данным значением главного квантового числа  $n$ , но с различными значениями  $l$  не совпадают друг с другом и  $n$ -й водородоподобный уровень энергии расщепляется на  $n$  различных уровней. Если, кроме того, накладывается еще некоторое внешнее (например, магнитное) поле, снимающее сферическую симметрию, то исчезает и  $(2l + 1)$ -кратное вырождение по  $m$  и  $n$ -й водородоподобный уровень расщепляется на  $n^2$  различных уровней.

Наличие вырожденных собственных значений оператора энергии означает, что линейные комбинации соответствующих собственных функций также удовлетворяют волновому уравнению с тем же самым значением энергии. В случае вырождения по  $m$  можно найти такие линейные комбинации сферических функций  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , которые соответствуют новому выбору полярной оси. Поэтому естественно ожидать, что и в водородной задаче при данном  $l$  и различных  $n$  существуют линейные комбинации вырожденных собственных функций, соответствующие некоторому новому выбору системы координат. Действительно, волновое уравнение для атома водорода допускает разделение переменных не только в сферических, но и в параболических координатах. Вообще вырождение всегда имеет место, если волновое уравнение можно решить несколькими способами (в различных системах координат или в одной системе координат, ориентируемой различным образом), поскольку при отсутствии вырождения волновые функции в различных системах координат отличались бы только постоянным множителем, что обычно невозможно. Случай  $l = 0$  (для центрального поля общего вида) представляет собой исключение, так как

тогда волновая функция сферически симметрична, и вид ее остается неизменным при всех ориентациях полярной оси, т. е. вырождение отсутствует. Для атома водорода аналогичное исключение имеет место для  $n = 1$ , когда решения волнового уравнения в сферических и в параболических координатах оказываются тождественными.

**Разделение переменных в параболических координатах.** Параболические координаты  $\xi, \eta, \varphi$  выражаются через сферические координаты следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi &= r - z = r(1 - \cos \theta), \\ \eta &= r + z = r(1 + \cos \theta), \\ \varphi &= \varphi.\end{aligned}\quad (16.25)$$

Поверхности  $\xi = \text{const}$  имеют вид конфокальных параболоидов вращения с полярной осью  $z$  и фокусом в начале координат, открытых в направлении положительных  $z$  (или  $\theta = 0$ ). Поверхности  $\eta = \text{const}$  представляют собой аналогичную систему конфокальных параболоидов, открытых в сторону отрицательных  $z$  ( $\theta = \pi$ ). Поверхности  $\varphi = \text{const}$  — такие же, как и в сферической системе координат; они представляют собой плоскости, проходящие через полярную ось.

Волновое уравнение для атома водорода в параболических координатах принимает вид

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} - \frac{2Ze^2}{\xi + \eta} u = Eu, \quad E < 0.\end{aligned}\quad (16.26)$$

Переменные можно разделить, полагая

$$u(\xi, \eta, \varphi) = f(\xi) g(\eta) \Phi(\varphi)$$

и деля обе части на  $u$ ; при этом сразу же отделяется переменная  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}\frac{4\xi\eta}{\xi + \eta} \left[ \frac{1}{f} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{1}{g} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dg}{d\eta} \right) \right] + \\ + \frac{4\mu Ze^2 \xi \eta}{\hbar^2 (\xi + \eta)} - \frac{2\mu |E| \xi \eta}{\hbar^2} = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}.\end{aligned}\quad (16.27)$$

Поскольку левая часть уравнения (16.27) зависит только от  $\xi$  и  $\eta$ , а правая часть — только от  $\varphi$ , обе части должны быть равны постоянной, которую мы обозначим через  $m^2$ . В соответствии с § 14 это дает для нормированной функции  $\Phi(\varphi)$  выражение, совпадающее с (14.8):

$$\Phi_m(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16.28)$$

В оставшейся части уравнения (16.27) можно разделить переменные  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\frac{1}{f} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{df}{d\xi} \right) - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{\mu |E|}{2\hbar^2} \xi + \frac{\mu Z e^2}{\hbar^2} =$$

$$= - \left[ \frac{1}{g} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dg}{d\eta} \right) - \frac{m^2}{4\eta} - \frac{\mu |E|}{2\hbar^2} \eta \right] = \nu, \quad (16.29)$$

где постоянную разделения  $\nu$  нужно определить из граничных условий. Таким образом, уравнения для функции  $f$  и  $g$  имеют вид

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{df}{d\xi} \right) - \left( \frac{m^2}{4\xi} + \frac{\mu |E| \xi}{2\hbar^2} - \frac{\mu Z e^2}{\hbar^2} + \nu \right) f = 0,$$

$$\frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dg}{d\eta} \right) - \left( \frac{m^2}{4\eta} + \frac{\mu |E| \eta}{2\hbar^2} - \nu \right) g = 0. \quad (16.30)$$

Поскольку они имеют одинаковый вид, отличаясь только постоянными членами, достаточно решить лишь одно из них.

**Уровни энергии.** Первое из уравнений (16.30) можно решить тем же методом, что и (16.6). Подстановка  $\zeta = \alpha \xi$  приводит его к безразмерному виду

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta \frac{df}{d\zeta} \right) + \left( \frac{\lambda_1}{\zeta} - \frac{1}{4} - \frac{m^2}{4\zeta^2} \right) f = 0, \quad (16.31)$$

коль скоро параметры  $\alpha$  и  $\lambda_1$  даются формулами

$$\alpha^2 = \frac{2\mu |E|}{\hbar^2}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\mu Z e^2}{\hbar^2} - \nu \right). \quad (16.32)$$

Второе из уравнений (16.30) также приводится к виду (16.31), если положить  $\zeta = \alpha \eta$ , где  $\alpha$  — то же, что и в (16.32); при этом  $\lambda_1$  заменяется на

$$\lambda_2 = \frac{\nu}{\alpha}. \quad (16.33)$$

Будем теперь решать уравнение (16.31) так же, как и (16.7). Асимптотическое поведение решения определяется множителем  $e^{\pm \zeta}$ , где в показателе надо выбрать знак минус. Ряд, на который умножается экспоненциальная функция, начинается с члена  $\zeta^s$ , где, как легко показать,  $s = \pm m/2$ . Поэтому положим

$$f(\zeta) = e^{-\zeta/2} \zeta^{|m|/2} L(\zeta). \quad (16.34)$$

Подставляя это в (16.31), получаем для  $L$  уравнение

$$\zeta L'' + (|m| + 1 - \zeta) L' + \left[ \lambda_1 - \frac{1}{2} (|m| + 1) \right] L = 0. \quad (16.35)$$

Как и в случае (16.12), волновая функция (16.34) расходится при больших  $\zeta$ , если ряд для  $L$  не обрывается, превращаясь в полином. Полиномиальные решения представляют собой присоединенные

полиномы Лагерра; сравнение (16.20) и (16.35) показывает, что они равны  $L_{n_1+|m|}^{(|m|)}(\xi)$ , где

$$n_1 = \lambda_1 - \frac{1}{2}(|m| + 1) \quad (16.36)$$

есть положительное целое число или нуль.

Аналогично из уравнения для  $g(\eta)$  следует, что

$$n_2 = \lambda_2 - \frac{1}{2}(|m| + 1) \quad (16.37)$$

также есть положительное целое число или нуль. Равенства (16.36) и (16.37) дают

$$\lambda_1 + \lambda_2 = n_1 + n_2 + |m| + 1 \equiv n, \quad (16.38)$$

где  $n$  — положительное целое число, не равное нулю. Уровни энергии находим, комбинируя (16.32), (16.33) и (16.38):

$$E_n = -|E_n| = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2\mu} \frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 n^2},$$

в согласии с (16.15). Поскольку, согласно (16.38), число  $n$  можно различными способами выразить через три квантовые числа  $n_1$ ,  $n_2$  и  $m$ , то уровень энергии  $E_n$  является вырожденным. При  $m = 0$   $n_1$  и  $n_2$  можно выбрать  $n$  способами. При  $|m| > 0$  можно двояким образом выбрать значение  $m (= \pm |m|)$ , после чего остается еще  $n - |m|$  возможностей задать  $n_1$  и  $n_2$ . Таким образом, кратность вырождения  $n$ -го уровня в соответствии с полученным ранее результатом равна

$$n + 2 \sum_{|m|=1}^{n-1} (n - |m|) = n + 2 \left[ n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} \right] = n^2.$$

**Волновые функции.** Из предыдущего ясно, что в параболических координатах ненормированные волновые функции атома водорода имеют вид

$$u_{n_1, n_2, m}(\xi, \eta, \varphi) = e^{-\alpha(\xi+\eta)/2} (\xi \eta)^{|m|/2} L_{n_1+|m|}^{(|m|)}(\alpha\xi) L_{n_2+|m|}^{(|m|)}(\alpha\eta) e^{im\varphi},$$

$$\alpha = \frac{\mu Z e^2}{\hbar^2 (n_1 + n_2 + |m| + 1)}.$$

При заданных значениях уровня энергии  $E_n$  и магнитного квантового числа  $m$  ( $n > |m|$ ) параболические квантовые числа  $n_1$  и  $n_2$  можно выбрать так, что  $n_1 + n_2 = n - |m| - 1$ , т. е.  $n - |m|$  различными способами. Аналогично при заданных  $n$  и  $m$  азимутальное квантовое число  $l$  можно выбрать так, что  $|m| \leq l \leq n - 1$ , т. е. также  $n - |m|$  различными способами. Поэтому  $n - |m|$  произведений функций от  $\xi$  и  $\eta$  представляют собой линейные комбинации  $n - |m|$  произведений функций от  $r$  и  $\theta$ .

Связь между решениями в параболических и сферических координатах выглядит особенно просто для основного состояния. В этом случае  $n_1 = n_2 = m = 0$ , и в параболических координатах решение есть просто  $\exp[-\mu Z e^2 (\xi + \eta)/2\hbar^2]$ . При этом в сферических координатах мы имеем  $n = 1, l = m = 0$ , и собственная функция имеет вид  $\exp[-\mu Z e^2 r/\hbar^2]$ . Из (16.25) ясно, что эти два решения тождественны.

### ЗАДАЧИ

1. Применить правила квантования Бора — Зоммерфельда (см. § 2) для определения уровней энергии гармонического осциллятора и для нахождения круговых орбит в атоме водорода. Сравнить с результатами, полученными в настоящей главе.

2. Определить по порядку величины разброс квантовых чисел и энергий состояний, дающих существенный вклад в осциллирующий волновой пакет для гармонического осциллятора.

3. С помощью производящей функции для полиномов Эрмита вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_n(x) x^2 u_m(x) dx,$$

где  $u$  — нормированные волновые функции гармонического осциллятора.

4. С помощью производящей функции для полиномов Лежандра вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 P_l(w) P_{l'}(w) dw.$$

5. Найти приближенное аналитическое выражение для уровня энергии в случае прямоугольной потенциальной ямы ( $l = 0$ ) при условии, что  $V_0 a^2$  лишь немногим больше  $\pi^2 \hbar^2/8m$ .

6. Показать, что для прямоугольной потенциальной ямы значения  $V_0 a^2$ , при которых происходит образование новых уровней энергии с  $l > 0$ , равны  $\hbar^2 z^2/2m$ , где  $z$  — не равные нулю корни уравнения  $J_{l-1}(z) = 0$  (см. примечание 1 на стр. 101).

7. Предположить, что энергия взаимодействия между нейтроном и протоном в дейтроне имеет вид прямоугольной потенциальной ямы с  $a = 2,00 \cdot 10^{-13}$  см. Принимая, что при  $l = 0$  уровень энергии системы равен  $-2,23$  Мэв, вычислить значение  $V_0$  в Мэв с точностью до третьего знака. Сравнить ответ с получающимся по приближенной формуле, выведенной в задаче 5.

8. Рассмотреть уравнение (14.17) с  $l = 0$  и  $V(r) = -V_0 e^{-r/a}$ . Заменить переменные, полагая  $z = e^{-r/2a}$ , и показать, что при этом получается уравнение Бесселя. Выяснить, какие граничные условия нужно наложить на функцию  $\chi(z)$  и как с их помощью можно определять уровни энергии. Найти нижний предел  $V_0$ , при котором еще существует связанное состояние.

9. Найти выражения для собственных функций и уровней энергии частицы, находящейся в двумерном круговом ящике с идеально твердыми стенками.

10. В § 9 показано, что в одномерной прямоугольной потенциальной яме связанное состояние существует при любом положительном значении  $V_0 a^2$ , а в § 15 показано, что в трехмерной прямоугольной потенциальной яме связанное состояние существует лишь при  $V_0 a^2 > \pi^2 \hbar^2/8m$ . Как будет обстоять дело в случае двумерной прямоугольной потенциальной ямы?

Имеют ли эти результаты физический смысл, и если да, то в чем он заключается?

11. Если твердое тело с моментом инерции  $I$  относительно некоторой оси вращается вокруг этой оси, то уравнение Шредингера для него имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2},$$

где  $\psi(\varphi, t)$  — функция времени  $t$  и угла поворота вокруг оси  $\varphi$ . Какими граничными условиями нужно пользоваться при решении этого уравнения? Найти нормированные собственные функции и собственные значения оператора энергии. Имеет ли здесь место вырождение?

12. Решая волновое уравнение в прямоугольной системе координат, найти уровни энергии трехмерного изотропного гармонического осциллятора [ $V(r) = Kr^2/2$ ]. Определить степень вырождения каждого из уровней энергии. Показать, что переменные в этом уравнении разделяются также в сферических и в цилиндрических координатах.

13. Показать, что среднее значение потенциальной энергии электрона в  $n$ -м квантовом состоянии атома водорода равно  $-Z^2 e^2 / a_0 n^2$ . С помощью этого результата найти среднее значение кинетической энергии.

14. Найти нормированные волновые функции атома водорода в параболических координатах для  $n = 2$ ,  $m = 0$ . Представить их в виде линейных комбинаций соответствующих волновых функций в сферических координатах.

15. Рассмотреть вопрос о четности волновых функций атома водорода в параболических координатах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sommerfeld A., Wave Mechanics, New York, 1929. (Имеется русский перевод: А. Зоммерфельд, Волновая механика, М.—Л., 1933.)
2. Eisenhart L. P., Phys. Rev., **45**, 428 (1934).
3. Pauling L., Wilson E. B., Jr., Introduction to Quantum Mechanics, New York, 1935.
4. Whittaker E. T., Watson G. N., A Course of Modern Analysis, 4th ed., Cambridge, London, 1935. (Имеется русский перевод: Е. Уиттекер, Г. Ватсон, Курс современного анализа, М.—Л., 1937.)
5. Morse P. M., Vibration and Sound, 2d ed., New York, 1948. (Имеется русский перевод: Ф. Морз, Колебания и звук, М.—Л., 1949.)
6. Watson G. N., Theory of Bessel Functions, 2d ed., New York, 1945. (Имеется русский перевод: Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.)

## НЕПРЕРЫВНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ. ТЕОРИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ

Задачи с непрерывным спектром собственных значений оператора энергии обычно возникают при рассмотрении рассеяния частицы силовым полем (столкновений). Метод решения этих задач отличается от метода, применявшегося в предыдущей главе. Там для определения дискретных уровней энергии частицы использовались граничные условия на больших расстояниях, тогда как в задачах о столкновениях энергия задается заранее и в зависимости от нее определяется асимптотическое поведение волновой функции на больших расстояниях. Интенсивность рассеяния частицы силовым полем оказывается непосредственно связанной с этой асимптотикой.

Как и в гл. IV, мы получим здесь относительно немного точных решений, но область их применимости оказывается значительно шире, чем могло бы показаться с первого взгляда, так как они могут служить основой для приближенных расчетов в более сложных случаях. Интересно отметить, что теория столкновений играет особенно важную роль в физике атомного ядра (см. § 41), где другие пути исследования дают сравнительно мало сведений.

### § 17. Одномерный прямоугольный потенциальный барьер

Рассмотрим прежде всего столкновение одномерно движущейся частицы с прямоугольным потенциальным барьером  $V(x)$ , изображенным на фиг. 14. Будем считать, что частица приходит из области отрицательных значений  $x$  и либо отражается барьером, либо проходит через него. В соответствующей классической задаче частица или отражается или обязательно проходит через барьер в зависимости от того, меньше или больше ее энергия, чем высота барьера. Мы увидим, что в квантовой механике почти при любой энергии частицы вероятность как отражения, так и прохождения принимает определенное конечное значение. Поскольку в самой постановке задачи отсутствует симметрия между положительным и отрицательным направлениями оси  $x$ , нет смысла вводить решения с определенными четностями и, следовательно, необязательно считать функцию  $V(x)$  симметричной относительно точки  $x = 0$ , как это делалось в § 9. Поэтому допустим, что  $V(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $x > a$  и  $V(x) = V_0 > 0$  при  $0 < x < a$ .

**Асимптотическое поведение.** Нам надлежит описать частицу, которая приходит слева с энергией  $E > 0$  и может либо отразиться от потенциального барьера, либо пройти через него. Таким образом асимптотическое поведение волновой функции [в областях, где  $V(x) = 0$ ] будет следующим: при  $x < 0$  волновая функция должна описывать частицу, движущуюся как влево (в результате отражения), так и вправо (падающая частица); при  $x > a$  волновая функция должна соответствовать лишь частице, прошедшей через барьер (и движущейся вправо). Частица, свободно движущаяся в определенном направлении с определенной энергией, обязательно имеет и определенный импульс, и, следовательно, описывается одномерной собственной функцией оператора импульса  $u(x) \sim e^{ipx/\hbar}$ , если частица движется с импульсом  $p$  в положительном направлении вдоль оси  $x$ , и  $u(x) \sim e^{-ipx/\hbar}$ , если частица движется в отрицательном направлении.

Принимая во внимание это обстоятельство и замечая, что волновое уравнение в области с  $V(x) = 0$  имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} = Eu,$$

находим асимптотические решения для нашего случая:

$$\begin{aligned} u(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x \leq 0, \\ u(x) &= Ce^{ikx}, & x \geq a. \end{aligned} \quad (17.1)$$

Фиг. 14. Одномерный прямоугольный потенциальный барьер высотой  $V_0$  и толщиной  $a$ .

Здесь  $k = p/\hbar = (2mE/\hbar^2)^{1/2}$  — волновое число. Решения (17.1) в областях, где отсутствуют внешние силы, справедливы не только для простого барьера, изображенного на фиг. 14, но и при рассеянии на потенциальном барьере любого вида.

**Нормировка.** Чтобы выяснить физический смысл коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ , подставим (17.1) в выражение (7.3) для одномерной плотности тока вероятности:

$$\begin{aligned} S(x) &= v(|A|^2 - |B|^2), & x < 0, \\ S(x) &= v|C|^2, & x > a, \end{aligned} \quad (17.2)$$

где  $v = \hbar k/m$  — скорость частицы с волновым числом  $k$ . Поскольку эти выражения не зависят от  $x$ , то из результатов § 7 следует, что их можно истолковать как результирующий ток соответственно в первой и второй областях (за положительное принимаем направление вправо). Эта интерпретация соответствует сделанному выше замечанию о смысле величин  $A$ ,  $B$  и  $C$  как амплитуд падающей, отраженной и прошедшей через потенциальный барьер волн.

Поскольку в данной задаче представляют интерес лишь отношения  $|B|^2$  и  $|C|^2$  к  $|A|^2$ , определяющие соответственно коэффици-



коэффициенты отражения и прозрачности, абсолютная нормировка волновых функций (17.1) здесь не обязательна. Однако иногда удобно нормировать волновую функцию падающей частицы так, чтобы поток был равен единице; тогда нужно положить  $A = 1/v^{1/2}$ . Эту нормировку не следует истолковывать в том смысле, что  $u(x)$  характеризует не одну, а много частиц; правильнее будет сказать, что мы выбираем, как это описывалось в § 7, достаточно большое число тождественных, независимых и не перекрывающихся систем [каждая из которых описывается функцией  $u(x)$ ], причем полный падающий поток во всех системах равен единице. Более аккуратной, но часто менее удобной была бы нормировка  $u(x)$  на единицу в одномерном „ящике” длины  $L$  с периодическими граничными условиями.

**Коэффициенты отражения и прозрачности.** Внутри потенциального барьера характер решения зависит от того, превышает ли  $E$  высоту барьера  $V_0$  или нет. Предположим сначала, что  $E > V_0$ , так что внутри барьера можно определить волновое число  $\alpha = [2m(E - V_0)/\hbar^2]^{1/2}$ . Тогда решение во внутренней области будет иметь вид

$$u(x) = Fe^{i\alpha x} + Ge^{-i\alpha x}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (17.3)$$

Условия непрерывности  $u$  и  $du/dx$  при  $x = 0$  и  $x = a$  приводят к четырем соотношениям между пятью коэффициентами. Мы можем исключить  $F$  и  $G$  и найти отношения  $B/A$  и  $C/A$ :

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{(k^2 - \alpha^2)(1 - e^{2i\alpha a})}{(k + \alpha)^2 - (k - \alpha)^2 e^{2i\alpha a}}, \\ \frac{C}{A} &= \frac{4k\alpha e^{i(\alpha - k)a}}{(k + \alpha)^2 - (k - \alpha)^2 e^{2i\alpha a}}. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Квадраты модулей этих отношений представляют собой соответственно коэффициенты отражения и прозрачности:

$$\begin{aligned} \left| \frac{B}{A} \right|^2 &= \left[ 1 + \frac{4k^2\alpha^2}{(k^2 - \alpha^2)^2 \sin^2 \alpha a} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{4E(E - V_0)}{V_0^2 \sin^2 \alpha a} \right]^{-1}, \\ \left| \frac{C}{A} \right|^2 &= \left[ 1 + \frac{(k^2 - \alpha^2)^2 \sin^2 \alpha a}{4k^2\alpha^2} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha a}{4E(E - V_0)} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (17.5)$$

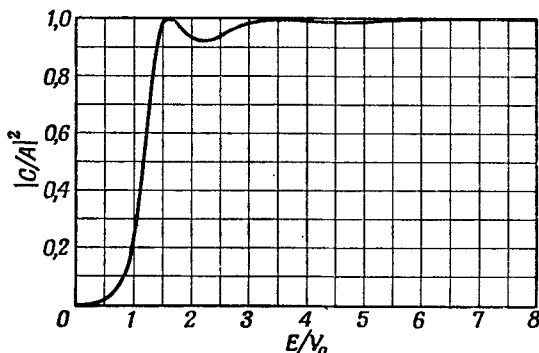
Пользуясь (17.5), легко проверить, что  $|B/A|^2 + |C/A|^2 = 1$ , как и следовало ожидать.

Из формул (17.5) следует, что когда энергия частицы приближается к высоте барьера ( $E \rightarrow V_0$ ), коэффициент прозрачности стремится к значению

$$\left( 1 + \frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2} \right)^{-1}. \quad (17.6)$$

При увеличении  $E$  ( $E > V_0$ ) коэффициент прозрачности колеблется между единицей и непрерывно возрастающим нижним пределом

(см. фиг. 15). При  $\alpha a = \pi, 2\pi, \dots$ , т. е. когда на протяжении барьера укладывается целое число полуволин, имеет место полное пропускание<sup>1)</sup>. Как известно, интерференционные явления подобного типа имеют место при прохождении света через тонкие преломляющие пластинки.



Фиг. 15. Зависимость коэффициента прозрачности прямоугольного барьера от энергии частицы при  $mV_0 a^2/\hbar^2 = 8$ .

При  $0 < E < V_0$  коэффициенты отражения и прозрачности проще всего найти, заменяя в уравнениях (17.4)  $\alpha$  на  $i\beta$ , где

$$\beta = \left[ \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \right]^{1/2}.$$

В результате для коэффициента прозрачности получим

$$\left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left[ 1 + \frac{V_0^2 \operatorname{sh}^2 \beta a}{4E(V_0 - E)} \right]^{-1}. \quad (17.7)$$

При уменьшении  $E$ , начиная от  $E = V_0$ , коэффициент прозрачности (17.7) монотонно убывает от значения (17.6). При  $\beta a \gg 1$  он становится очень малым и приближенно дается выражением

$$\frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\beta a}. \quad (17.8)$$

На фиг. 15 изображен график коэффициента прозрачности (17.5) и (17.7), вычисленный для случая довольно мало проникаемого барьера ( $mV_0 a^2/\hbar^2 = 8$ ).

<sup>1)</sup> Такой же эффект возникает и при замене прямоугольного барьера прямоугольной потенциальной ямой ( $V_0 < 0$ ). Коэффициенты прозрачности и отражения при этом по-прежнему будут определяться формулами (17.5), но с измененным знаком  $V_0$  (в частности, знак  $V_0$  нужно изменить и в выражении для  $\alpha$ ).

## § 18. Трехмерные столкновения

В настоящей главе в основном будет рассматриваться трехмерный случай рассеяния частицы неподвижным силовым центром (или столкновения двух частиц друг с другом). В § 16 было показано, что если силы взаимодействия между двумя частицами зависят только от их относительного положения, то задачу о нерелятивистском движении двух частиц можно свести к двум одночастичным задачам, первая из которых описывает движение частиц относительно их центра инерции, а вторая — свободное движение центра инерции. Однако при вычислении уровней энергии внутреннего движения центр инерции можно было считать неподвижным, в то время как в задаче о рассеянии необходимо учитывать его движение. Это связано с тем, что в обычных лабораторных условиях первоначально неподвижные частицы бомбардируются другими, полную энергию которых в силу (16.5) можно представить в виде  $E_0 = E + E'$ . Следовательно, энергия относительного движения  $E$  отличается от энергии бомбардирующих частиц  $E_0$ , и результат рассеяния зависит от того, что именно покоилось в начальный момент — рассеивающая частица или центр инерции.

Систему координат, в которой до столкновения покоится рассеивающая частица, мы будем называть *лабораторной*, а систему, в которой (до и после столкновения) покоится центр инерции, — *системой центра инерции*. Очевидно, расчет легче производить во второй системе, так как в ней мы имеем лишь три степени свободы, а в первой — шесть. Столкновение в системе центра инерции можно рассматривать как рассеяние частицы с приведенной массой  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  [см. (16.4)] и начальной скоростью  $v$  на неподвижном рассеивающем центре [см. ниже замечания в связи с формулой (18.9)]. Переход от этой системы к лабораторной системе координат, в которой ведутся наблюдения, приводит к изменению углового распределения рассеиваемых частиц.

**Эффективное сечение рассеяния.** Угловое распределение частиц, рассеиваемых неподвижным силовым центром или другими частицами, удобно описывать с помощью представления об эффективном сечении рассеяния. Предположим, что группа  $n$  частиц, или рассеивающих центров, облучается параллельным пучком частиц, поток которых (т. е. число частиц, падающих на единицу поверхности за единицу времени) равен  $N$ . Будем считать этот поток настолько малым, что интерференция между падающими частицами отсутствует и число частиц, выбиваемых из мишени при отдаче, пренебрежимо мало.

Допустим также, что расстояние между частицами мишени настолько велико, что каждое столкновение происходит только с одной из них. Тогда число частиц, рассеянных в единицу времени

в малый телесный угол  $\Delta\omega_0$  в направлении, составляющем полярные углы  $\theta_0$  и  $\varphi_0$  с направлением движения первоначального пучка, будет пропорционально  $N$ ,  $n$  и  $\Delta\omega_0$  и может быть записано в виде

$$nN\sigma_0(\theta_0, \varphi_0)\Delta\omega_0; \quad (18.1)$$

здесь коэффициент пропорциональности  $\sigma_0(\theta_0, \varphi_0)$  называется *дифференциальным эффективным сечением рассеяния*. Так как размерность (18.1) равна  $\text{сек.}^{-1}$ , то  $\sigma_0(\theta_0, \varphi_0)$  имеет размерность площади. При этом величина  $\sigma_0(\theta_0, \varphi_0)\Delta\omega_0$  представляет собой площадь поперечного сечения первичного пучка, содержащую столько частиц, сколько их рассеивается отдельным центром в телесный угол  $\Delta\omega_0$ . Интегрируя  $\sigma_0(\theta_0, \varphi_0)$  по поверхности сферы единичного радиуса, получаем *полное эффективное сечение рассеяния*

$$\sigma_0 = \int \sigma_0(\theta_0, \varphi_0) d\omega_0. \quad (18.2)$$

При столкновении частицы с неподвижным центром определение дифференциального эффективного сечения (18.1) одинаково справедливо как в лабораторной системе координат, так и в системе центра инерции. Действительно, эффективная масса неподвижного рассеивающего центра бесконечна и, следовательно, центр инерции системы остается неподвижным. В случае же столкновения двух частиц конечной массы формула (18.1), вообще говоря, имеет силу лишь в лабораторной системе координат и при этом относится только к рассеянию падающих частиц. Поведения (в лабораторной системе) частиц отдачи она не описывает, хотя, разумеется, из  $\sigma_0(\theta_0, \varphi_0)$  можно получить и дифференциальное сечение для частиц отдачи. По аналогии с (18.1) дифференциальное эффективное сечение  $\sigma(\theta, \varphi)$  можно определить и в системе центра инерции, причем опять наблюдаемыми считаются падающие частицы, а поток их  $N$  вычисляется относительно частицы мишени, а не по отношению к центру инерции. Поскольку в этой системе координат частицы после столкновения движутся в противоположных направлениях, ясно, что дифференциальное эффективное сечение для частиц отдачи, рассеянных в направлении  $\theta, \varphi$ , есть  $\sigma(\pi - \theta, \varphi + \pi)$ .

**Соотношения между углами в лабораторной системе и системе центра инерции.** Чтобы найти связь между сечениями и углами в двух используемых нами координатных системах, удобно сообщить лабораторной системе такую скорость в направлении движения падающего пучка, чтобы центр инерции оказался в покое. На фиг. 16, *a* изображена частица с массой  $m_1$  и начальной скоростью  $v$ , сталкивающаяся с другой частицей с массой  $m_2$ , первоначально покоившейся. По закону сохранения импульса центр инерции движется при этом вправо со скоростью  $v' = m_1 v / (m_1 + m_2)$ . Таким образом, в системе центра инерции частицы с массами  $m_1$

и  $m_2$  приближаются к центру инерции со скоростями соответственно  $v'$  и  $v''$ , где

$$v'' = v - v' = \frac{m_2 v}{(m_1 + m_2)}.$$

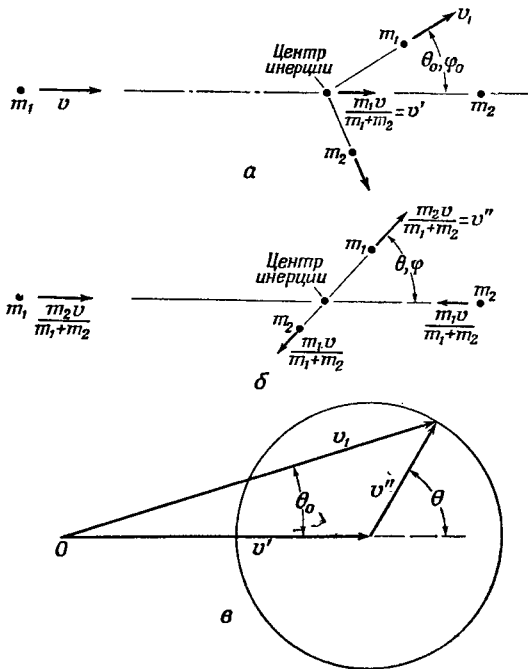
Очевидно, после столкновения они с теми же скоростями удаляются от центра инерции (см. фиг. 16, б). Из геометрических соображений следует, что углы  $\theta$  и  $\varphi$  связаны с  $\theta_0$  и  $\varphi_0$  соотношениями

$$\begin{aligned} v'' \cos \theta + v' &= v_1 \cos \theta_0, \\ v'' \sin \theta &= v_1 \sin \theta_0, \\ \varphi &= \varphi_0. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Первые два уравнения (18.3) после исключения  $v_1$  дают:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_0 &= \frac{\sin \theta}{\gamma + \cos \theta}, \\ \gamma &= \frac{v'}{v''} = \frac{m_1}{m_2}. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Соотношения (18.3) и (18.4) можно обобщить на случай таких столкновений (например, ядерных реакций), когда на первоначально неподвижную частицу с массой  $m_1$  налетает частица с массой  $m_2$ , а после столкновения возникают частицы с массами  $m_3$  и  $m_4$ , причем  $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ . Первая из формул (18.4) остается справедливой и в том случае, когда часть внутренней энергии, равная  $Q$ , переходит в кинетическую энергию возникающих частиц (величина  $Q$  положительна для экзотермических столкновений и отрицательна — для эндотермических); при этом наблюдается частица с массой  $m_3$ . Величина  $\gamma$  в этом случае по-прежнему определяется как отношение скорости центра инерции



Фиг. 16. *a* — лабораторная система координат, в которой частица мишени (с массой  $m_2$ ) первоначально находится в покое; *б* — система центра инерции, в которой до и после столкновения центр инерции двух частиц остается неподвижным; *в* — векторное сложение скорости центра инерции в лабораторной системе координат ( $v'$ ) со скоростью частицы в системе центра инерции ( $v''$ ). В результате получается скорость частицы в лабораторной системе ( $v_1$ ); при  $v'' < v'$  угол  $\theta_0$  не может превышать  $\arcsin(v''/v')$ .

в лабораторной системе к наблюдаемой скорости частицы в системе центра инерции. Однако, как можно показать, она уже не равна отношению  $m_1/m_2$ , а дается формулой

$$\gamma = + \left( \frac{m_1 m_2}{m_2 m_1} \frac{E}{E + Q} \right)^{1/2}, \quad (18.5)$$

где  $E = m_1 m_2 v^2 / 2(m_1 + m_2)$  — первоначальная энергия относительного движения в системе центра инерции [см. замечания в связи с формулой (18.9)].

**Связь между эффективными сечениями.** Связь между эффективными сечениями в лабораторной системе координат и в системе центра инерции вытекает из определения этих величин. Из него следует, что число частиц, рассеиваемых в бесконечно малый телесный угол  $d\omega_0$  в направлении  $\theta_0, \varphi_0$ , равно числу частиц, рассеиваемых в угол  $d\omega$  в направлении  $\theta, \varphi$ :

$$\sigma_0(\theta_0, \varphi_0) \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 = \sigma(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (18.6)$$

Пользуясь последней из формул (18.3) и первой формулой (18.4), получаем из (18.6)

$$\sigma_0(\theta_0, \varphi_0) = \frac{(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \theta)^{3/2}}{|1 + \gamma \cos \theta|} \sigma(\theta, \varphi), \quad (18.7)$$

где в общем случае  $\gamma$  дается равенством (18.5). Следует отметить, что, поскольку полное число столкновений не зависит от способа описания процесса, то полное эффективное сечение оказывается одним и тем же как в лабораторной системе, так и в системе центра инерции; оно также одинаково для обеих разлетающихся после столкновения частиц.

**Зависимость от  $\gamma$ .** Из формул (18.4) явствует, что при  $\gamma < 1$  величина  $\theta_0$  монотонно возрастает от 0 до  $\pi$  при увеличении  $\theta$  от 0 до  $\pi$ . При  $\gamma = 1$  угол  $\theta_0 = \theta/2$ ; следовательно,  $\theta_0$  изменяется от 0 до  $\pi/2$  при изменении  $\theta$  от 0 до  $\pi$ . В этом случае

$$\sigma_0(\theta_0, \varphi_0) = 4 \cos \theta_0 \sigma(2\theta_0, \varphi_0),$$

и в лабораторной системе не происходит рассеяния частиц в заднюю полусферу. При  $\gamma > 1$  угол  $\theta_0$  сначала [при увеличении  $\theta$  от 0 до  $\arccos(-1/\gamma)$ ] возрастает от 0 до  $\arcsin(1/\gamma)$ ; это максимальное в данных условиях значение  $\theta_0$  меньше  $\pi/2$ . Затем при дальнейшем увеличении  $\theta$  до  $\pi$  угол  $\theta_0$  уменьшается до нуля. Для максимального  $\theta_0$  сечение  $\sigma_0(\theta_0, \varphi_0)$  обычно становится бесконечным, но вклад от этой сингулярности в полное эффективное сечение конечен; в лабораторной системе не происходит рассеяния на угол, превышающий максимальное значение  $\theta_0$ . Два значения  $\theta$ , соответствующие одному и тому же  $\theta_0$  [лежащему в интервале от 0 до  $\arcsin(1/\gamma)$ ],

можно отличить по энергии рассеиваемой частицы (энергия больше при меньших  $\theta$ ).

Схематическая иллюстрация этого последнего случая ( $\gamma > 1$ ) дана на фиг. 16,в. Наблюдаемая в лабораторной системе скорость частицы  $v_1$  складывается из скорости в системе центра инерции  $v''$  и скорости центра инерции в лабораторной системе координат  $v'$ . Если начало вектора  $v_1$  лежит в точке  $O$ , то геометрическим местом его концов будет окружность радиуса  $v''$ . Поэтому при  $v'' < v'$  угол  $\theta_0$  между результирующей скоростью  $v_1$  и направлением падающего пучка не может превышать

$$\arcsin\left(\frac{v''}{v'}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

По мере уменьшения  $\gamma = v'/v''$  размеры окружности возрастают, и вектор  $v_1$  получает возможность поворачиваться на все более и более значительные углы.

Рассмотренные геометрические соотношения в равной мере справедливы как для квантовомеханической, так и для классической системы. Дело в том, что по существу мы имеем здесь соотношения между векторами импульса в асимптотической области, где нет необходимости считать частицы точно локализованными в пространстве, вследствие чего они могут иметь определенные импульсы.

Интересно отметить, что для столкновений электронов с атомами различие между лабораторной системой и системой центра инерции можно пренебречь, так как отношение масс сталкивающихся частиц весьма велико. Однако для ядерных столкновений различие между обеими системами координат обычно бывает существенно.

**Асимптотическое поведение.** В системе центра инерции дифференциальное эффективное сечение  $\sigma(\theta, \varphi)$  можно найти, зная асимптотическое решение уравнения для относительного движения (16.5):

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \cdot \nabla^2 u + Vu = Eu. \quad (18.8)$$

В качестве аргументов волновой функции  $u$  можно взять изображенные на фиг. 16,б углы  $\theta$ ,  $\varphi$  и расстояние между двумя частицами  $r$ . Согласно (16.4), приведенная масса  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ . Из фиг. 16 нетрудно видеть, что энергия относительного движения

$$E = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_0, \quad (18.9)$$

где  $E_0$  — начальная энергия падающей частицы. Интересно отметить, что величина  $E$  представляет собой кинетическую энергию частицы, масса которой равна приведенной массе  $\mu$ , а скорость —

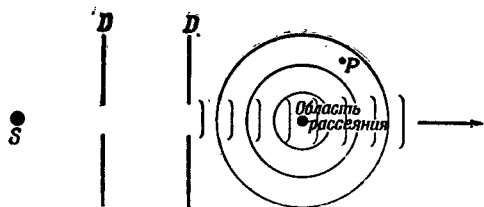
скорости относительного движения  $v$ . Поэтому можно представить себе, что уравнение (18.8) описывает рассеяние частицы с массой  $\mu$ , начальной скоростью  $v$  и кинетической энергией  $E = \mu v^2/2$  на неподвижном рассеивающем центре, описываемом потенциальной энергией  $V(\mathbf{r})$ ; при этом положение (фиктивной) частицы с массой  $\mu$  относительно рассеивающего центра определяется вектором  $\mathbf{r}$ .

Как и в § 17, рассеяние определяется асимптотическим поведением функции  $u(r, \theta, \varphi)$  в области, где  $V = 0$ . На больших расстояниях между сталкивающимися частицами функция  $u$  должна содержать, во-первых, часть, описывающую падающую частицу с массой  $\mu$ , движущуюся в определенном направлении со скоростью  $v$  и, во-вторых, радиально расходящуюся волну:

$$u(r, \theta, \varphi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A[e^{ikz} + r^{-1} f(\theta, \varphi) e^{ikr}], \quad k = \frac{\mu v}{\hbar}. \quad (18.10)$$

Первый член в (18.10) описывает частицу, движущуюся в положительном направлении вдоль оси  $z$  (т. е., поскольку  $z = r \cos \theta$ , вдоль полярной оси  $\theta = 0$ ). Он представляет собой плоскую волну — собственную функцию оператора импульса (11.2), причем волновой вектор  $\mathbf{k}$  направлен вдоль полярной оси и по абсолютной величине равен  $k$ . Второе слагаемое в (18.10) изображает радиально расходящуюся волну, амплитуда которой зависит от  $\theta$  и  $\varphi$  и обратно пропорциональна  $r$  (поскольку радиальная составляющая тока должна быть обратно пропорциональна квадрату радиуса).

Легко проверить, что при любом виде функции  $f(\theta, \varphi)$  выражение (18.10) асимптотически удовлетворяет волновому уравнению (18.8) в области, где  $V = 0$ , с точностью до членов порядка  $1/r$ .



Фиг. 17. Схема лабораторной установки для исследования рассеяния.

В точке наблюдения  $P$  отсутствует интерференция между падающей и рассеянной волнами.

Однако при непосредственной подстановке (18.10) в уравнение (7.3) возникают члены, соответствующие интерференции между падающей и рассеянной волнами, которая не имеет места в большинстве экспериментальных устройств. Действительно, практически падающие и рассеянные частицы обычно отделяют друг от друга, коллимируя те или другие частицы. Пусть, например, экспериментальная установка имеет вид, представленный схематически на фиг. 17. Падающие частицы, выходя из источника  $S$ , коллимируются

**Нормировка.** Физический смысл коэффициента  $A$  и угловой функции  $f$  можно выяснить, вычислив поток частиц (как в § 17).



диафрагмами  $DD$  в достаточно ограниченный пучок. Хотя коллимированный пучок и не описывается плоской волной типа  $e^{ikh}$ , однако его можно образовать путем наложения таких волн с волновыми векторами, лишь слегка отличающимися по величине и по направлению. Полный угловой разброс, выраженный в радианах, по порядку величины будет равен отношению длины волны частицы к диаметру коллимирующего отверстия и, следовательно, практически его можно сделать чрезвычайно малым. Так как функция  $f$  обычно не слишком быстро изменяется при изменении углов, то небольшой разброс направлений волновых векторов не очень существен. Таким образом, в точке наблюдения  $P$  имеется только член, содержащий  $f$ , и он практически совпадает с членом, фигурирующим в (18.10). При достаточно большом удалении от области рассеяния, член с  $f$  становится пренебрежимо малым, вследствие чего при вычислении падающего потока можно принимать во внимание только член, описывающий плоскую волну. Поэтому в области наблюдения интерференционные члены обычно не имеют физического смысла, будучи лишь следствием идеализации, связанной с подстановкой в уравнение (18.10) точно плоской волны<sup>1)</sup>.

Подставляя в отдельности каждое из слагаемых (18.10) в формулу (7.3), видим, что падающий поток направлен вдоль полярной оси и по абсолютной величине равен  $v|A|^2$ ; главный член в рассеянном (радиальном) потоке есть

$$\frac{v|A|^2|f(\theta, \varphi)|^2}{r^2}.$$

Отсюда по определению эффективного сечения получаем

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (18.11)$$

Как уже отмечалось в § 17, в задачах о рассеянии точный выбор коэффициента  $A$  не играет существенной роли. Можно, в частности, нормировать волновую функцию так, чтобы плотность падающего потока была равна единице, для чего достаточно положить  $A = 1/\sqrt{v}$ ; иногда пользуются также условием  $\int |u|^2 d\tau = 1$ , где интегрирование проводится по объему большого параллелепипеда, на границах которого наложены условия периодичности. Часто мы будем полагать константу  $A$  просто равной единице.

## § 19. Рассеяние сферически симметричным полем

Дифференциальное эффективное сечение рассеяния определяется лишь асимптотическим поведением волновой функции, но чтобы найти это последнее, необходимо решить волновое уравне-

<sup>1)</sup> В известной степени исключительный случай будет рассмотрен в следующем параграфе — см. дискуссию в связи с формулами (19.14) и (19.24).

ние (18.8) во всем пространстве. Как и в задаче об уровнях энергии, рассматривавшейся в гл. IV, решение возможно лишь если переменные в волновом уравнении разделяются. В частности, большой физический интерес представляет случай сферически симметричной потенциальной энергии. Мы допустим сейчас, что  $V$  зависит только от  $r$ , и найдем связь асимптотического выражения (18.10) с решениями волнового уравнения, в котором произведено разделение переменных в сферических координатах; такой подход называется *методом парциальных волн*.

В последующей части настоящей главы мы в большинстве случаев не будем проводить различия между рассеянием частицы неподвижным центром и столкновением двух частиц в системе центра инерции.

**Асимптотическое поведение.** Очевидно, что задача теперь является симметричной относительно полярной оси, в связи с чем функции  $u$ ,  $f$  и  $\sigma$  не зависят от угла  $\varphi$ . Общее решение уравнения (18.8) имеет вид (см. § 14)

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} r^{-1} \chi_l(r) P_l(\cos \theta), \quad (19.1)$$

где  $P_l$  — полином Лежандра порядка  $l$ , а функция  $\chi_l$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + \left[ k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l = 0, \quad (19.2)$$

$$k = \left( \frac{2\mu E}{\hbar^2} \right)^{1/2}, \quad U(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Асимптотический вид решения (19.2) с точностью до произвольного постоянного множителя определяется граничным условием, согласно которому при  $r = 0$  функция  $R_l$  должна быть конечной, т. е.  $\chi_l$  должна быть равна нулю.

Чтобы выяснить общий характер асимптотического поведения функции  $\chi_l$ , будем считать  $r$  настолько большим, что в уравнении (19.2) можно пренебречь членами с  $U$  и  $l$ . Тогда решение (19.2) будет иметь вид  $e^{\pm ikr}$ . Лучшее приближение получим, положив

$$\chi_l(r) = A \exp \left[ \int_a^r f(r') dr' \right] e^{\pm ikr}, \quad (19.3)$$

где  $A$  и  $a$  — постоянные. Предполагается, что при больших  $r$  первый экспоненциальный множитель является медленно меняющейся функцией  $r$ , в связи с чем при  $r \rightarrow \infty$  функция  $f(r)$  должна уменьшаться быстрее, чем  $1/r$ . Подстановка (19.3) в (19.2) приводит к следующему уравнению для  $f$ :

$$f' + f^2 \pm 2ikf = U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} = W(r), \quad (19.4)$$

где штрих означает дифференцирование по  $r$ . Если теперь  $W(r)$  при больших  $r$  убывает как  $r^{-s}$  ( $s > 0$ ), то главную роль в левой части играет последнее слагаемое, и  $f$  также убывает как  $r^{-s}$ . Если еще  $s > 1$ , то при больших  $r$  волновая функция  $\chi_l$  ведет себя как  $e^{\pm ikr}$ , так как интеграл в показателе (19.3) сходится при больших  $r$ . Если же  $W$  при возрастании  $r$  убывает экспоненциально или как гауссова функция (что возможно лишь при  $l = 0$ ), то может оказаться существенным не только третий, но и первый член в левой части (19.4). Легко показать, что и в этом случае  $\chi_l$  при больших  $r$  ведет себя как  $e^{\pm ikr}$ . Единственный физически интересный случай, требующий особого подхода, представляет кулоновское поле, когда независимо от значения  $l$  функции  $U$  и  $W$  при больших  $r$  ведут себя как  $1/r$ ; этот случай будет рассмотрен в § 20. Таким образом, асимптотическое выражение функции  $\chi_l(r)$  в общем случае можно записать в виде

$$\chi_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A_l' \sin(kr + \delta_l'), \quad (19.5)$$

где величины  $A_l'$  и  $\delta_l'$ , вообще говоря, могут быть комплексными. С точностью до постоянного множителя уравнение (19.2) имеет только одно решение, обращающееся в нуль при  $r = 0$ . Можно показать, что если это решение вещественно вблизи точки  $r = 0$ , то оно будет вещественным всюду в силу вещественности величин  $k$ ,  $U$  и  $l$ . Поэтому числа  $\delta_l'$  должны быть вещественны, хотя  $A_l'$  могут быть и комплексными. Принимая это во внимание, легко проверить, что полный радиальный поток частиц через сферу большого радиуса обращается в нуль:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r^2 \int_0^\pi S_r \sin \theta d\theta = 0; \quad (19.6)$$

здесь  $S_r$  — радиальная компонента вектора (7.3), получающаяся в результате подстановки (19.1) в (7.3). Это означает, что в системе нет ни источников, ни стоков частиц и все радиально рассеянные частицы приносятся падающей плоской волной.

**Дифференциальное эффективное сечение.** Оказывается удобным переопределить фигурирующие в (19.5) амплитуду  $A_l'$  и фазу  $\delta_l'$ , воспользовавшись решением несколько специализированной задачи. Допустим, что на расстояниях  $r$ , превышающих некоторое значение  $a$ , величиной  $U(r)$  можно пренебречь [в практически интересных случаях  $a$  может быть настолько малым, что членом  $l$  в (19.2) пренебрегать уже нельзя]. В § 15 было показано, что при  $r > a$  наиболее общее вещественное выражение для  $R_l(r)$  (с точностью, может быть, до постоянного комплексного множителя) имеет вид

$$R_l(r) = A_l [\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)], \quad (19.7)$$

где  $\delta_l$  — вещественное число. В силу (15.8) эта функция асимптотически ведет себя как

$$R_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (kr)^{-1} A_l \sin\left(kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l\right). \quad (19.8)$$

Равенства (19.5) и (19.8) совпадают, если  $A_l = kA'_l$  и  $\delta_l = \delta'_l + l\pi/2$ . Попробуем теперь отождествить асимптотическую форму (19.1) с (18.10). Для этого разложим  $e^{ikr} = e^{ikr \cos \theta}$  в ряд по полиномам Лежандра<sup>1)</sup>:

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (19.9)$$

Подставляя асимптотическое выражение (19.9) в (18.10) при  $A = 1$  и приравнявая результат асимптотическому значению (19.1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l (kr)^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2} l\pi\right) P_l(\cos \theta) + r^{-1} f(\theta) e^{ikr} = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} A_l (kr)^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l\right) P_l(\cos \theta). \end{aligned}$$

Записав синусы в комплексной экспоненциальной форме, следует приравнять коэффициенты при  $e^{ikr}$  и  $e^{-ikr}$  в обеих частях равенства:

$$\begin{aligned} 2ikf(\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{-il\pi/2} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l e^{i(\delta_l - l\pi/2)} P_l(\cos \theta), \\ \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{il\pi/2} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l e^{-i(\delta_l - l\pi/2)} P_l(\cos \theta). \quad (19.10) \end{aligned}$$

Поскольку эти соотношения справедливы для любых значений  $\theta$ , а полиномы Лежандра образуют ортогональную систему, из второго соотношения (19.10) следует:

$$A_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l}.$$

Подставив это в первое равенство (19.10), найдем амплитуду рассеяния

$$f(\theta) = (2ik)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta). \quad (19.11)$$

Таким образом, дифференциальное эффективное сечение дается формулой

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \right|^2. \quad (19.12)$$

<sup>1)</sup> См. книгу Ватсона [1].

**Полное эффективное сечение.** Полное эффективное сечение получается в результате интегрирования (19.12) по поверхности сферы единичного радиуса. В силу ортогональности полиномов Лежандра в полном сечении нет членов, содержащих произведения множителей с разными  $l$ :

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (19.13)$$

Полное эффективное сечение можно выразить также через амплитуду рассеяния вперед  $f(0)$ . Из вида производящей функции для полиномов Лежандра (14.10) следует, что  $P_l(1) = 1$  при любых  $l$ ; поэтому при  $\theta = 0$  формула (19.11) дает

$$f(0) = (2ik)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1).$$

Сравнивая это с (19.13), получаем

$$\sigma = \frac{2\pi}{ik} [f(0) - \bar{f}(0)] = \frac{4\pi}{k} \text{Im} [f(0)], \quad (19.14)$$

где символ  $\text{Im}$  означает мнимую часть. Соотношение (19.14) можно истолковать следующим образом. Чтобы рассеяние имело место, частицы должны удаляться из бомбардирующего пучка в количестве, пропорциональном  $\sigma$ ; поэтому за область рассеяния ( $\theta \approx 0$ ) интенсивность пучка должна быть меньше, чем перед ней. Это может произойти только за счет интерференции двух слагаемых в асимптотическом выражении (18.10). Поскольку член, характеризующий такую интерференцию, должен линейно зависеть от амплитуды рассеяния вперед, должно существовать общее соотношение типа (19.14). Явное вычисление интерференционного члена показывает, что фактически соотношение (19.14) справедливо и в гораздо более общем случае; амплитуда  $f$  может зависеть не только от  $\theta$ , но и от  $\varphi$ : может также иметь место не только упругое, но и неупругое рассеяние и поглощение (см. работу Шиффа [2]).

**Фазы.** Согласно (19.8), угол  $\delta_l$  представляет собой разность фаз между асимптотическими выражениями точной радиальной функции  $R_l(r)$  и радиальной функции свободного движения  $j_l(kr)$ .

Поэтому величину  $\delta_l$  называют *фазой*  $l$ -й парциальной волны. Фазы полностью определяют рассеяние: в частности, дифференциальное сечение обращается в нуль, если все углы  $\delta_l$  равны  $0^\circ$  или  $180^\circ$ .

Следует отметить, что если  $U(r)$  убывает быстрее, чем  $1/r$ , то соотношение (19.11) остается справедливым независимо от существ-

вованая сферы радиуса  $a$ , за пределами которой значением  $U(r)$  можно пренебречь. Однако при вычислении эффективного сечения метод парциальных волн особенно полезен при наличии подобного радиуса  $a$ , особенно если  $ka$  по порядку величины меньше или равно единице. Дело в том, что первый (и наибольший) максимум функции  $j_l(kr)$ , грубо говоря, лежит при  $r = l/k$ , а при заметно меньших  $r$  эта функция мала, убывая примерно как  $r^l$  [см. (15.7)]. Поэтому при  $a \ll l/k$  функция  $j_l$  будет очень мала там, где  $U$  имеет заметную величину. Соответственно поле  $U(r)$  почти не будет влиять на  $l$ -ю парциальную волну, фаза  $\delta_l$  будет очень мала, и вкладом этой волны в рассеяние можно будет пренебречь. Следовательно, эффективное сечение представится в виде ряда членов, соответствующих различным  $l$  от нуля до максимального значения, по порядку величины равного  $ka$ . Поскольку вычисление фаз обычно является довольно трудоемким, то чем меньше величина  $ka$ , тем легче применять данный метод. Поэтому метод парциальных волн оказывается наиболее полезным при малых энергиях падающих частиц.

Интересно отметить, что в классическом случае прицельное расстояние для свободной частицы с массой  $\mu$ , скоростью  $v$  и моментом количества движения  $l\hbar$  равно  $l\hbar/\mu v = l/k$ . Таким образом, предыдущие замечания сводятся к утверждению о том, что классическая частица не испытывает рассеяния, если ее момент количества движения настолько велик, что она не попадает в область взаимодействия  $r < a$ .

**Вычисление фаз.** Фазы  $\delta_l$  вычисляются путем „сшивания“ волновой функции  $R_l(r)$  при  $r < a$  с решением во внешней области (19.7). При этом „внутреннее“ решение может задаваться либо аналитически, либо в случае необходимости — численными методами. Граничные условия в точке  $r = a$  сводятся к требованию непрерывности функции  $(1/R_l)$  ( $dR_l/dr$ ). Обозначая это соотношение для „внутреннего“ решения через  $\gamma_l$ , мы имеем

$$\frac{k[j'_l(ka) \cos \delta_l - n'_l(ka) \sin \delta_l]}{j_l(ka) \cos \delta_l - n_l(ka) \sin \delta_l} = \gamma_l,$$

где производные  $j'_l$  и  $n'_l$  можно выразить с помощью (15.10). Отсюда для фазы  $\delta_l$  получаем

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{kj'_l(ka) - \gamma_l j_l(ka)}{kn'_l(ka) - \gamma_l n_l(ka)}. \quad (19.15)$$

При  $l \gg ka$ , когда фазу  $\delta_l$  можно считать малой, уравнение (19.15) позволяет немедленно найти приближенное значение  $\delta_l$ . Именно в этом случае  $\gamma_l$  мало отличается от соответствующего значения в отсутствие рассеивающего потенциала, в связи с чем

мы положим

$$\gamma_l = k \left[ \frac{j_l'(ka)}{j_l(ka)} + \varepsilon_l \right], \quad |\varepsilon_l| \ll \left| \frac{j_l'(ka)}{j_l(ka)} \right|. \quad (19.16)$$

С помощью (15.9) выражение (19.15) можно представить в форме

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{\varepsilon_l (ka)^2 j_l^2(ka)}{\varepsilon_l (ka)^2 j_l(ka) n_l(ka) - 1} \quad (19.17)$$

(пока еще точной). Воспользуемся теперь (15.7) для  $j_l$  при  $l \gg (ka)^2$  и оценим  $n_l$  с помощью (15.7) и (15.8); тогда неравенство (19.16) примет вид

$$|\varepsilon_l| \ll \frac{l}{ka}, \quad (19.18)$$

а выражение (19.17) приближенно можно будет записать в форме

$$\delta_l \approx - \frac{\varepsilon_l (ka)^{2l+2}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l+1)]^2} = - \frac{\varepsilon_l 2^{2l} (l!)^2 (ka)^{2l+2}}{[(2l+1)!]^2}. \quad (19.19)$$

Равенством (19.19) можно воспользоваться для проверки сходимости сумм по парциальным волнам типа суммы, фигурирующей в (19.11). Главные члены в  $\ln |\delta_l|$  при большом  $l$  можно найти по формуле Стирлинга; пренебрегая членами порядка  $\ln l$  и меньше, получаем

$$\ln |\delta_l| \approx \ln |\varepsilon_l| + 2l [\ln(ka) + 1 - \ln 2] - 2l \ln l.$$

Таким образом, даже если  $|\varepsilon_l|$  принимает максимальное значение (19.18), то и тогда  $\delta_l$  убывает обратно пропорционально  $l!$  (т. е. быстрее, чем экспоненциально), и ряды, фигурирующие в выражениях для эффективного сечения, очень быстро сходятся при больших  $l$ .

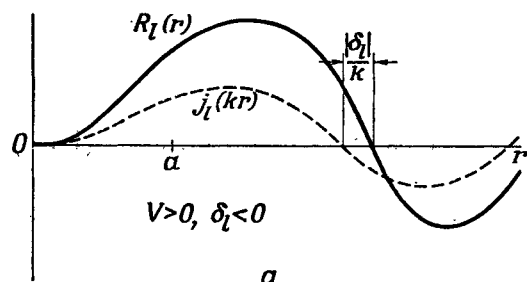
**Связь между знаками  $\delta_l$  и  $V(r)$ .** Из формулы (19.19) явствует, что при  $l \gg (ka)^2$  знаки  $\delta_l$  и  $\varepsilon_l$  противоположны. Пусть потенциальная энергия  $V$  или  $U$  положительна, что соответствует преобладанию сил отталкивания. Тогда из (19.2) следует, что отношение второй производной от радиальной волновой функции к самой этой функции алгебраически больше, чем для свободной частицы. Это означает, что логарифмическая производная радиальной функции при  $r = a$  алгебраически больше, чем в случае  $U = 0$ . Таким образом, коль скоро преобладают силы отталкивания, величина  $\varepsilon_l$  оказывается положительной, а фаза  $\delta_l$  — отрицательной. Последнее означает, что по сравнению со случаем отсутствия сил радиальная волновая функция „выталкивается наружу”.

Аналогичным путем можно убедиться, что при отрицательном потенциале добавка  $\varepsilon_l$  будет отрицательной, а фаза  $\delta_l$  — положи-

тельной. Это означает, что в случае преобладания сил притяжения радиальная волновая функция „втягивается внутрь”.

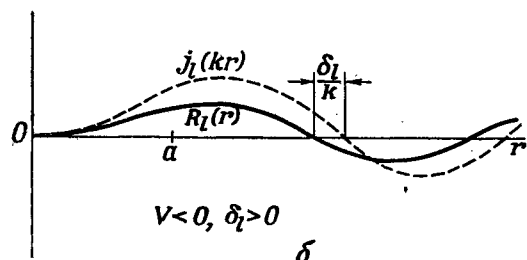
Высказанные утверждения остаются в силе и тогда, когда число  $l$  не велико по сравнению с  $ka$ , а фаза  $\delta_l$  не слишком мала.

В этом можно убедиться, сравнивая графики функций  $j_l(kr)$  и  $R_l(r)$ , произвольно подогнанные так, чтобы обе функции одинаково вели себя вблизи точки  $r = 0$ . На фиг. 18, *a* дается схематическое сравнение для положительного, а на фиг. 18, *б* для отрицательного  $V$ .



$$V > 0, \delta_l < 0$$

*a*



$$V < 0, \delta_l > 0$$

*б*

Фиг. 18. Схематические графики, характеризующие изменение радиальной волновой функции  $j_l(kr)$ , найденной в отсутствие внешних сил, под действием положительного отталкивающего потенциала (*a*) и отрицательного притягивающего потенциала (*б*).

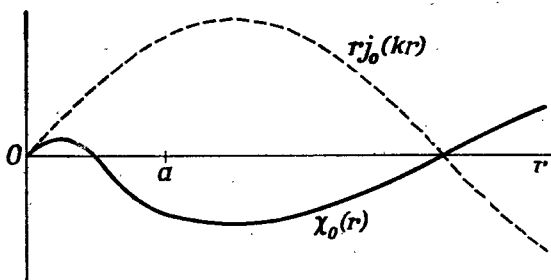
Радиус действия потенциала в обоих случаях равен  $a$ . Функция  $R_l(r)$  произвольно проведена так, чтобы при  $r = 0$  она вела себя подобно  $j_l(kr)$ ; в случае *a* она поднимается быстрее, имеет большую амплитуду и запаздывает по фазе по сравнению с функцией  $j_l(kr)$  (т. е. „выталкивается” наружу). В случае *б* функция  $R_l(r)$  начинает раньше отклоняться вниз и, следовательно, имеет меньшую амплитуду по сравнению с  $j_l(kr)$  и опережает ее по фазе (т. е. „втягивается” внутрь). Амплитуда не имеет непосредственного физического значения, тогда как фазы определяют характер рассеяния. Расстояние между соседними узлами функций  $R_l$  и  $j_l$  не совпадает со сдвигом фаз, деленным на  $k$  (как это показано на графиках), пока функция  $j_l$  не совершит нескольких колебаний и не примет асимптотический вид.

столько мало, а притягивающий потенциал по абсолютной величине настолько велик, что  $\delta_0$  будет составлять  $180^\circ$ , а все прочие фазы будут пренебрежимо малы. В этом случае амплитуда рассеяния  $f(\theta)$  равна нулю для всех  $\theta$ , и рассеяние отсутствует.

**Эффект Рамзауэра — Таунсенда.** Рассмотрение графика на фиг. 18, *б* наводит на мысль, что при достаточной величине притягивающего потенциала одна из радиальных парциальных волн может оказаться втянутой внутрь как раз на половину периода и фаза ее составит  $180^\circ$ . При этом соответствующий член в выражении (19.11) для  $f(\theta)$  обращается в нуль и не влияет на эффективное сечение рассеяния. Из предыдущего ясно, что фаза имеет наибольшее значение при  $l = 0$ . Соответственно оказывается возможным такое положение, когда произведение  $ka$  на-



В этом состоит объяснение<sup>1)</sup> эффекта Рамзауэра — Таунсенда<sup>2)</sup>, заключающегося в появлении чрезвычайно глубокого минимума эффективного сечения рассеяния электронов на атомах инертного газа при энергии бомбардирующих частиц около  $0,7 \text{ эв}$ . Атом инертного газа, электронные оболочки которого полностью заполнены, относительно мал, и результирующее действие атомных электронов и ядра на рассеиваемый электрон велико и проявляется в резко ограниченной области пространства. Поэтому можно ожидать ситуации типа изображенной на фиг. 19.



Фиг. 19. Схематическая кривая, характеризующая влияние атомного потенциала инертного газа с „радиусом“  $a$  на парциальную волну при  $l = 0$  в случае минимального эффективного сечения рассеяния (эффект Рамзауэра — Таунсенда).

Как и на фиг. 18, истинная волновая функция и волновая функция свободного движения вблизи точки  $r = 0$  ведут себя одинаково, но первая из них „втягивается внутрь“, сдвигаясь по фазе на  $180^\circ$ . В действительности величина  $a$  будет несколько меньше, чем показано на фигуре.

Здесь, в области действия атомного потенциала, фаза парциальной волны с  $l = 0$  сдвигается как раз на половину периода по сравнению со случаем свободной частицы, и в то же время длина волны электрона настолько велика по сравнению с  $a$ , что фазами для больших значений  $l$  можно пренебречь. Ясно, что минимальное значение эффективного сечения рассеяния будет наблюдаться лишь при некоторой определенной энергии рассеиваемых частиц. Действительно, при малой энергии поведение волновой функции в области действия потенциала почти не зависит от энергии, в то время как фаза волновой функции свободных частиц сильно зависит от энергии.

С физической точки зрения эффект Рамзауэра — Таунсенда можно представить себе как результат диффракции электронов на атомах инертного газа, причем искажение волновой функции

<sup>1)</sup> Это объяснение было предложено Н. Бором и количественно подтверждено Факсеном и Хольцмарком [3].

<sup>2)</sup> Обзор опытных результатов содержится в статье Коллата [4].

внутри атома таково, что она непрерывно переходит в неискаженную функцию вне атома. Этот эффект аналогичен рассмотренному выше случаю полной прозрачности одномерного барьера при определенных энергиях [см. дискуссию в связи с (17.5)]. Однако, в противоположность одномерному случаю, эффект Рамзауэра — Таунсенда не может наблюдаться, если преобладают силы отталкивания. Действительно, для того чтобы фаза  $\delta_0$  составила —  $180^\circ$ , величина  $ka$  должна быть по крайней мере близка к единице, а тогда будут заметны и фазы, соответствующие более высоким значениям  $l$ .

**Рассеяние идеально твердой сферой.** В качестве первого примера применения метода парциальных волн рассмотрим рассеяние частиц идеально твердой сферой, когда  $V(r) = +\infty$  при  $r < a$ , и  $V(r) = 0$  при  $r > a$ . При  $r > a$  решение радиального уравнения будет иметь вид (19.7). Граничное условие  $u(a, \theta) = 0$ , полученное в § 8, эквивалентно требованию, чтобы при  $r = a$  все радиальные функции обращались в нуль. Таким образом, фазы можно найти, либо приравнявая нулю все функции  $R_l(a)$ , определяемые по (19.7), либо полагая в (19.15)  $\gamma_l \rightarrow \infty$ :

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}. \quad (19.20)$$

Вычисления особенно просты в предельном случае низких энергий, когда  $ka = 2\pi a/\lambda \ll 1$ . В этом случае, подставляя (15.7) в (19.20), получаем следующую приближенную формулу для фаз:

$$\operatorname{tg} \delta_l \approx \frac{(ka)^{2l+1}}{(2l+1)[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)]^2}. \quad (19.21)$$

Таким образом, в соответствии с (19.19) фазы  $\delta_l$  очень быстро убывают с ростом  $l$ . При  $k \rightarrow 0$  все фазы стремятся к нулю, но вклад в сечение от парциальной волны с  $l = 0$  остается конечным вследствие наличия в (19.12) и (19.13) множителя  $1/k^2$ . Итак, мы получаем

$$\sigma(\theta) \approx a^2, \quad \sigma \approx 4\pi a^2. \quad (19.22)$$

Рассеяние является сферически симметричным, и полное эффективное сечение в 4 раза превышает классическое значение.

В предельном случае высоких энергий ( $ka \gg 1$ ) можно ожидать классических результатов. Действительно, в этом случае можно образовать волновые пакеты, малые по сравнению с размерами области рассеяния, а они могут двигаться по классическим траекториям, не расплываясь заметным образом. Это соответствует представлению о лучах в волновой теории света или звука. Расчет сечения здесь довольно затруднителен: мы только наметим метод вычисления главного члена в полном сечении. Подстанов-

ка (19.20) в (19.13) дает

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1) j_l^2(ka)}{j_l^2(ka) + n_l^2(ka)}. \quad (19.23)$$

Воспользуемся асимптотическими разложениями функций Бесселя, справедливыми для больших значений аргумента<sup>1)</sup> в том случае, когда порядок функции либо меньше аргумента, либо совпадает с ним, либо, наконец, больше его. Вычисление показывает, что основной вклад в (19.23) обусловлен слагаемыми с

$$l < (ka) - C(ka)^{1/2},$$

где  $C$  — число порядка единицы; главный член равен  $(ka)^2/2$ . Две другие части, соответствующие  $(ka) - C(ka)^{1/2} < l < (ka) + C(ka)^{1/2}$  и  $l > (ka) + C(ka)^{1/2}$ , дают вклад порядка  $(ka)^{1/2}$ , и в предельном случае больших энергий ими можно пренебречь. Таким образом,

$$\sigma \approx 2\pi a^2, \quad (19.24)$$

что вдвое превышает классическое значение.

Причина на первый взгляд неправильного результата (19.24) состоит в том, что при выборе асимптотического выражения волновой функции (18.10) акты рассеяния в классическом предельном случае считаются дважды: первый раз — в действительном рассеянии (которое, как и в классической задаче, оказывается сферически симметричным) и второй раз — в теневой области, возникающей за рассеивающей сферой по направлению движения [эта тень обусловлена интерференцией между падающей плоской волной  $e^{ikz}$  и рассеянной волной  $f(\theta)e^{ikr}/r$ ; см. также дискуссию в связи с (19.14)]. Однако при конечных значениях  $ka$  около сферы действительно происходит дифракция, и полное измеряемое эффективное сечение приблизительно равно  $2\pi a^2$  (если только измерение захватывает резкий максимум в направлении движения первичного пучка).

**Рассеяние прямоугольной потенциальной ямой.** В качестве второго примера применения метода парциальных волн мы рассмотрим несколько более сложную задачу о рассеянии сферически симметричной прямоугольной потенциальной ямой, изображенной на фиг. 13 (§ 15). По аналогии с (15.1) в области при  $r < a$  волновую функцию, конечную при  $r = 0$ , можно представить в виде

$$R_l(r) = B_l j_l(\alpha r), \quad \alpha = \left[ \frac{2\mu(E + V_0)}{\hbar^2} \right]^{1/2}. \quad (19.25)$$

Таким образом, фазы определяются формулой (19.15), где при  $r = a$  логарифмическая производная от  $l$ -й парциальной волны

<sup>1)</sup> См. книгу Ватсона [1], гл. 8.

равна

$$\gamma_l = \frac{\alpha j_l(\alpha a)}{l_l(\alpha a)}. \quad (19.26)$$

В предельном случае низких энергий ( $ka \ll 1$ ) подстановка (15.7) в (19.15) приводит к следующим значениям для первых двух фаз

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_0 &\approx -\frac{\gamma_0 ka^2}{1 + \gamma_0 a}, \\ \operatorname{tg} \delta_1 &\approx \frac{(ka)^3}{3} \frac{1 - \gamma_1 a}{2 + \gamma_1 a}. \end{aligned} \quad (19.27)$$

При  $k \rightarrow 0$  оба эти значения стремятся к нулю, за исключением случая  $\gamma_0 a = -1$  или  $\gamma_1 a = -2$ . Однако, как и в случае твердой сферы, парциальная волна с  $l=0$  вносит конечный вклад в сечение рассеяния, так как в (19.12) и (19.13) имеется множитель  $1/k^2$ . В силу (19.26)  $\gamma_0 a = \alpha a \operatorname{ctg} \alpha a - 1$ , и, следовательно,

$$\sigma \approx 4\pi a^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha a}{\alpha a}\right)^2. \quad (19.28)$$

Рассеяние является сферически симметричным. Полученный здесь и в задаче о рассеянии на твердой сфере вывод о том, что при рассеянии частиц малой энергии сечение рассеяния по существу не зависит ни от энергии, ни от угла наблюдения, почти всегда справедлив для любого потенциала с конечным радиусом действия. Исключения, отмечавшиеся в связи с (19.27), могут возникнуть, если какое-либо из отношений  $\gamma_l$  таково, что знаменатель в выражении для  $\operatorname{tg} \delta_l$  очень мал. В таких случаях говорят о *резонансе* для  $l$ -й парциальной волны. Обычно она при этом играет главную роль в рассеянии.

**Резонансное рассеяние.** Чтобы найти приближенное выражение для эффективного сечения резонансного рассеяния, заметим, что если  $\alpha$  достаточно близко к  $\alpha_0 \equiv (2\mu V_0/\hbar^2)^{1/2}$ , то  $\gamma_l$  зависит от  $\alpha$  линейно. При увеличении  $\alpha$  внутренняя часть волновой функции быстрее достигает максимума, вследствие чего логарифмическая производная при  $r = a$  уменьшается. При малых  $k$

$$\alpha = (\alpha_0^2 + k^2)^{1/2} \approx \alpha_0 + \frac{k^2}{2\alpha_0},$$

так что, ограничиваясь низшими степенями  $k$ , можно написать

$$\gamma_l a \approx \gamma_l^0 a - b_l (ka)^2,$$

где  $\gamma_l^0$  есть значение  $\gamma_l$  при  $\alpha = \alpha_0$ , а  $b_l$  — положительное число порядка единицы<sup>1)</sup>. Подставляя это в (19.27) и затем в (19.12), нахо-

<sup>1)</sup> Можно показать, что при нулевой энергии падающих частиц  $l$ -я парциальная волна находится точно в резонансе, если  $\gamma_l^0 a = -(l+1)$ ; в этом случае  $b_l = 1/2$  для всех  $l$ . (См. примечание 1 на стр. 101.)

дим главный член в сечении рассеяния для случаев резонанса парциальных волн с  $l = 0$  или 1:

$$\sigma(\theta) \approx \frac{a^2}{(\zeta_0 - b_0 k^2 a^2)^2 + (ka)^2}, \quad l = 0 \quad (19.29)$$

$$\sigma(\theta) \approx \frac{9a^2 \cos^2 \theta (ka)^4}{(\zeta_1 - b_1 k^2 a^2)^2 + (ka)^6}, \quad l = 1. \quad (19.30)$$

Мы положили здесь  $\zeta_0 = \gamma_0^0 a + 1$  и  $\zeta_1 = \gamma_1^0 a + 2$ ; при резонансе абсолютные величины  $|\zeta_0|$  и  $|\zeta_1|$  малы по сравнению с единицей. Легко показать, что выражение (19.29) представляет собой монотонно убывающую функцию от  $ka$ , тогда как (19.30) при положительных  $\zeta_1$  имеет резкий максимум при  $ka \approx (\zeta_1/b_1)^{1/2}$ , а при отрицательном  $\zeta_1$  — гораздо более слабый максимум при  $ka \approx (2|\zeta_1/b_1|)^{1/2}$ .

Пользуясь соотношением  $\zeta_0 = \alpha_0 a \operatorname{ctg} \alpha_0 a$ , из (19.29) можно усмотреть, что при резонансе парциальной волны с  $l = 0$  справедливо следующее приближенное выражение для полного сечения:

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2 + \alpha_0^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 a}. \quad (19.31)$$

Очевидно, при низких энергиях парциальная волна с  $l = 0$  будет в резонансе, если величина  $\alpha_0 a$  приближенно равна нечетному числу, умноженному на  $\pi/2$ , так что  $V_0 a^2 \approx \pi^2 \hbar^2 / 8\mu$ ,  $9\pi^2 \hbar^2 / 8\mu$  и т. д. Как видно из формулы (15.3), это как раз те значения  $V_0 a^2$ , при которых возникают новые уровни энергии с  $l = 0$ . Как можно показать, резонанс всегда имеет место при рассеянии частиц такой энергии потенциальной ямой (необязательно прямоугольной и обязательно при  $l = 0$ ), если при том же  $l$  в яме имеются дискретные уровни, близкие к нулю.

Наглядно можно было бы сказать, что в тех случаях, когда энергия падающих частиц близка к тому значению, при котором возможен их захват силовым центром, частица имеет тенденцию „концентрироваться“ в соответствующей области, в связи с чем волновая функция заметно искажается и рассеяние увеличивается.

Резкие резонансные максимумы при рассеянии частиц малой энергии, аналогичные найденному выше для случая  $l = 1$ ,  $\zeta_1 > 0$ , могут иметь место и при любых других значениях  $l$  (исключая  $l = 0$ ), если только потенциальная яма недостаточно глубока или широка, чтобы в ней мог возникнуть новый уровень с тем же моментом количества движения (в случае прямоугольной ямы этому соответствуют малые положительные значения  $\zeta_\gamma$ ). Наглядно можно представить себе, что потенциал такого типа содержит виртуальный уровень энергии, расположенный несколько выше нулевого. Хотя при положительном значении энергии дискретный уровень существовать не может, положительный „центро-

бежный потенциал"  $l(l+1)\hbar^2/2\mu r^2$  [см. (14.18)] при  $l > 0$  действует как потенциальный барьер, удерживающий частицу на виртуальном уровне вблизи силового центра. Такой барьер изображен на фиг. 20; так же, как и барьер, представленный на фиг. 14, он обладает малой прозрачностью при низких энергиях [см. (17.7)]. Таким образом, виртуальный уровень имеет в некотором роде

временный характер, вызывая при совпадении энергии падающей волны с энергией виртуального уровня большее искажение волновой функции падающей частицы по сравнению с волнами других энергий.

**Угловое распределение при низких энергиях.** При малой (но отличной от нуля) энергии падающей частицы заметную роль в рассеянии может играть парциальная волна с  $l = 1$ . Если только фазы  $\delta_0$  и  $\delta_1$  заметно отличны от нуля, то формулы (19.12) и (19.13) принимают вид

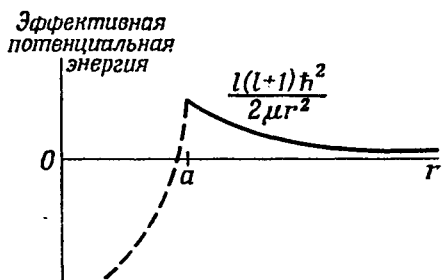
$$\sigma(\theta) = \frac{1}{k^2} [\sin^2 \delta_0 +$$

$$+ 6 \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos(\delta_1 - \delta_0) \cos \theta + 9 \sin^2 \delta_1 \cos^2 \theta], \quad (19.32)$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} (\sin^2 \delta_0 + 3 \sin^2 \delta_1).$$

Из формул (19.27) и (19.32) видно, что в отсутствие резонанса отношение вкладов парциальных волн с  $l = 0$  и  $l = 1$  в полное сечение составляет величину порядка  $(ka)^4$ . Однако в дифференциальном сечении наибольший член, зависящий от углов (пропорциональный  $\cos \theta$ ), имеет порядок  $(ka)^2$  относительно изотропного слагаемого.

Таким образом, парциальная волна с  $l = 1$  влияет главным образом на угловое распределение при малой энергии, но не на полное сечение рассеяния; это обусловлено интерференцией данной волны с более интенсивной парциальной волной с  $l = 0$ . Если, например, при некоторой энергии падающих частиц  $\delta_0 = 20^\circ$  и  $\delta_1 = 2^\circ$ , то вклад парциальной волны с  $l = 1$  в полное эффективное сечение рассеяния составляет лишь 3%; в то же время вследствие наличия этой волны рассеяние вперед ( $\theta = 0^\circ$ ) в 3,5 раза превышает рассеяние назад ( $\theta = 180^\circ$ ).



Фиг. 20. Эффективная потенциальная энергия  $V(r)$  плюс „центробежный потенциал” для  $l > 0$ , когда  $V = 0$  при  $r > a$ .

Вид пунктирной части кривой (при  $r < a$ ) зависит от формы потенциала  $V$ . Если  $E$  несколько больше нуля, то эффективный потенциальный барьер ( $r \gtrsim a$ ) характеризуется малым пропусканием и в этом отношении аналогичен барьеру, изображенному на фиг. 14.

## § 20. Рассеяние кулоновским полем

В § 19 отмечалось, что в отношении применения метода парциальных волн рассеяние в кулоновском поле представляет особый случай. При столкновении частиц с зарядами  $Ze$  и  $Z'e$  потенциальная энергия  $V(r) = ZZ'e^2/r$ , и легко видеть, что асимптотически функция (19.3) имеет вид

$$\chi_i(r) \sim e^{\pm i(kr - n \ln r)}; \quad (20.1)$$

здесь  $n = \mu ZZ'e^2/\hbar^2 k = ZZ'e^2/\hbar v$ , где  $v$  — скорость относительного движения, а  $\mu$  — приведенная масса. Таким образом, решения радиального уравнения никогда не переходят в синусоидальные решения волнового уравнения для свободной частицы, так как на больших расстояниях нельзя пренебречь логарифмической добавкой к фазе. Хотя и в данном случае можно получить решение задачи о рассеянии в сферических координатах (что делается в дальнейшем), но фазы  $\delta_i$ , введенные в § 19, приобретают другой смысл. В настоящем параграфе намечается лишь схема расчета и дается общее описание результатов, заимствованных из более обширных руководств<sup>1)</sup>.

**Параболические координаты.** Если мы интересуемся лишь сечением  $\sigma(\theta)$  для чисто кулоновского поля, то проще разделять переменные не в сферических, а в параболических координатах (см. § 16). Это связано с тем, что искомое решение зависит почти исключительно от переменной  $\xi$  (16.25), а не от  $\eta$  и  $\varphi$ . Из осевой симметрии задачи ясно, что решение не будет зависеть от  $\varphi$ ; далее, если выделить в волновой функции множитель  $e^{ikz}$ , характеризующий плоскую падающую волну, то можно думать, что остающаяся часть функции не будет зависеть и от  $\eta$ . Действительно, положим

$$u_c = e^{ikz} f, \quad (20.2)$$

где  $u_c$  — полная кулоновская волновая функция (включающая как падающую, так и рассеянную волну). Функция  $u_c$  должна содержать часть, асимптотическое поведение которой характеризуется функцией  $r^{-1}e^{ikr}$ , но не может содержать членов с асимптотическим выражением  $r^{-1}e^{-ikr}$  [см. (18.10)]. Поскольку такую форму может иметь выражение вида  $e^{ikz}f(r-z)$ , но не  $e^{ikz}f(r+z)$ , можно ожидать, что фигурирующая в (20.2) функция  $f$  будет зависеть только от  $\xi = r - z$ .

Подставим (20.2) в (16.26), заменив там  $Z$  на  $-ZZ'$  и принимая во внимание, что  $E > 0$ . Тогда для  $f$  получим дифференциаль-

<sup>1)</sup> См. работу Гордона [5] и книгу Мотта и Месси [6], гл. 3. С математической стороны вопроса можно познакомиться по книге Уиттекера и Ватсона [7], гл. 16. (См. также книгу Ландау и Лифшица [11], гл. 14. — *Прим. перев.*)

ное уравнение

$$\xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} + (1 - ik\xi) \frac{df}{d\xi} - nkf = 0. \quad (20.3)$$

Оно сводится к уравнению для вырожденной гипергеометрической функции  $F(a, b, z)$ :

$$z \frac{d^2 F}{dz^2} + (b - z) \frac{dF}{dz} - aF = 0, \quad (20.4)$$

если положить

$$f(\xi) = CF(-in, 1, ik\xi), \quad (20.5)$$

где  $C$  постоянная.

**Вырожденная гипергеометрическая функция.** Решение уравнения (20.4), регулярное в точке  $z = 0$ , можно записать в виде степенного ряда

$$F(a, b, z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+s) \Gamma(b)^s}{\Gamma(a) \Gamma(b+s) \Gamma(1+s)} z^s = 1 + \frac{az}{b1!} + \frac{a(a+1)z^2}{b(b+1)2!} + \dots \quad (20.6)$$

Удобно положить  $F(a, b, z) = W_1(a, b, z) + W_2(a, b, z)$ , где функции  $W_1$  и  $W_2$  по отдельности удовлетворяют уравнению (20.4). Тогда асимптотическое представление  $F$  можно получить из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} W_1(a, b, z) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} g(a, a-b+1, -z), \\ W_2(a, b, z) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{z^2} z^{a-b} g(1-a, b-a, z), \\ g(\alpha, \beta, z) &\xrightarrow{z \rightarrow \infty} 1 + \frac{\alpha\beta}{z1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{z^2 2!} + \dots \end{aligned} \quad (20.7)$$

Решение уравнения (20.4), имеющее особую точку в начале координат, можно записать в виде

$$G(a, b, z) = iW_1(a, b, z) - iW_2(a, b, z). \quad (20.8)$$

Такое решение потребуется нам для задач, в которых около точки  $r = 0$  поле уже перестает быть кулоновским.

Асимптотическое представление кулоновской волновой функции можно получить из соотношений (20.2), (20.5) и (20.7). С точностью до членов порядка  $r^{-1}$  оно имеет вид

$$u_c \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{C e^{n\pi/2}}{\Gamma(1+in)} \left\{ e^{i[kz+n \ln k(r-z)]} \left[ 1 - \frac{n^2}{ik(r-z)} \right] + \frac{1}{r} f_c(\theta) e^{i(kr-n \ln 2kr)} \right\}, \quad (20.9)$$



где

$$f_c(\theta) = \frac{\Gamma(1+in)}{i\Gamma(-in)} \frac{e^{-in \ln(\sin^2 1/2\theta)}}{2k \sin^2 1/2\theta} =$$

$$= \frac{n}{2k \sin^2 1/2\theta} e^{-in \ln(\sin^2 1/2\theta) + i\pi + 2i\eta_0}, \quad (20.10)$$

$$\eta_0 = \arg \Gamma(1+in).$$

**Эффективное сечение рассеяния и нормировка.** Слагаемое  $f_c$  в правой части (20.9) представляет расходящуюся рассеянную волну, так как только в нем имеется множитель  $(1/r)e^{ikr}$ . Соответственно первый член в (20.9) изображает „плоскую“ падающую волну; в асимптотической области множителем  $-n^2/ik(r-z)$  можно пренебречь. Как падающая, так и рассеянная волны даже на бесконечности искажены логарифмическими фазовыми множителями. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния в соответствии с (18.11) равно

$$\sigma_c(\theta) = |f_c(\theta)|^2 = \left(\frac{n}{2k \sin^2 1/2\theta}\right)^2 = \left(\frac{ZZ'e^2}{2\mu v^2}\right)^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{1}{2} \theta. \quad (20.11)$$

Именно эта формула была получена Резерфордом с помощью классической механики. Она была подтверждена экспериментально при исследовании столкновений  $\alpha$ -частиц (ядер гелия) с более тяжелыми ядрами. Однако следует отметить, что при столкновениях тождественных частиц часть фазового множителя в амплитуде рассеяния  $f_c(\theta)$ , содержащая угол  $\theta$ , может дать отклонения от классических закономерностей (см. § 32).

Нормируя падающий пучок на единичную плотность потока, следует взять константу  $C$  в виде

$$C = v^{-1/2} \Gamma(1+in) e^{-n\pi/2}.$$

Таким образом, волновая функция в кулоновском поле есть

$$u_c = v^{-1/2} \Gamma(1+in) e^{-n\pi/2} e^{ikz} F(-in, 1, ik\xi) =$$

$$= v^{-1/2} \Gamma(1+in) e^{-n\pi/2} e^{ikr \cos \theta} F(-in, 1, 2ikr \sin^2 1/2\theta). \quad (20.12)$$

Тогда плотность частиц при  $r=0$  можно найти с помощью разложения (20.6)

$$|u_c(0)|^2 = |C|^2 = v^{-1} |\Gamma(1+in)|^2 e^{-n\pi} = \frac{2n\pi}{v(e^{2n\pi} - 1)}. \quad (20.13)$$

При малых скоростях сталкивающихся частиц ( $|n| \gg 1$ ) отсюда следует:

$$|u_c(0)|^2 \approx \frac{2\pi |n|}{v} \text{ для сил притяжения, } n < 0,$$

$$|u_c(0)|^2 \approx \frac{2\pi n}{v} e^{-2n\pi} \text{ для сил отталкивания, } n > 0. \quad (20.14)$$

Вторая из формул (20.14) представляет определенный практический интерес. Экспоненциальный множитель играет основную роль в реакциях между положительно заряженными ядрами малой энергии, когда радиусы ядер можно считать столь малыми, что для возникновения реакции сталкивающиеся ядра должны приблизиться друг к другу на нулевое расстояние. Величина  $\exp(-2\pi ZZ'e^2/\hbar v)$  называется *множителем Гамова*<sup>1)</sup> и в основном именно она определяет значения скоростей многих ядерных реакций, происходящих при малых энергиях падающих частиц.

**Решения в сферических координатах.** При ядерных столкновениях, например в случае рассеяния протонов с энергией в несколько миллионов электронов-вольт атомами водорода, отклонения от кулоновского закона взаимодействия на малых расстояниях могут привести к изменению эффективного сечения. Для рассмотрения таких задач удобно модифицировать развитый в § 19 метод парциальных волн так, чтобы производить разложение по сферическим функциям для чисто кулоновского поля, а поправки за счет искажения закона взаимодействия вводить в первые несколько членов с малыми  $l$ . Для этой цели нужно прежде всего решить задачу о рассеянии в чисто кулоновском поле с помощью сферических парциальных волн.

Положим

$$u_c = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\cos \theta). \quad (20.15)$$

Радиальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{2nk}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l = 0. \quad (20.16)$$

Если сделать подстановку  $R_l(r) = r^l e^{ikr} f_l(r)$ , то для функции  $f_l$  получим

$$r \frac{d^2 f_l}{dr^2} + [2ikr + 2(l+1)] \frac{df_l}{dr} + [2ik(l+1) - 2nk] f_l = 0. \quad (20.17)$$

Это есть вырожденное гипергеометрическое уравнение (20.4), и его решение, регулярное в точке  $r = 0$ , имеет вид

$$f_l(r) = C_1 F(l+1+in, 2l+2, -2ikr). \quad (20.18)$$

Пользуясь (20.7), можно найти асимптотическое представление (20.18) на больших расстояниях, откуда получаем

$$R_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{C_1 e^{(n\pi/2) + i\eta_l} \Gamma(2l+2)}{(2k)^l \Gamma(l+1+in) kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi - n \ln 2kr + \eta_l\right), \quad (20.19)$$

<sup>1)</sup> См. работы Гамова [8] и Гермн и Кондона [9].

где

$$\eta_l = \arg^* \Gamma(l + 1 + in).$$

Коэффициенты  $C_l$  следует определить так, чтобы разложение по парциальным волнам (20.15) совпадало с решением уравнения в параболических координатах (20.12). В силу ортогональности полиномов Лежандра имеет место соотношение

$$R_l(r) = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi P_l(\cos \theta) u_c(r, \theta) \sin \theta d\theta, \quad (20.20)$$

где функция  $u_c(r, \theta)$  дается второй из формул (20.12). Полного вычисления интеграла можно избежать, заметив, что в функции  $R_l(r)$  нам неизвестен только постоянный множитель  $C_l$ . Соответственно можно взять правую и левую части (20.20) лишь вблизи точки  $r = 0$ ; тогда находим

$$C_l = \frac{(2ik)^l e^{-n\pi/2} \Gamma(l + 1 + in)}{v^{1/2} (2l)!}.$$

Таким образом, мы получаем другое выражение для (20.12):

$$u_c = v^{-1/2} e^{-n\pi/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l + 1 + in)}{(2l)!} (2ikr)^l e^{ikr} \times \\ \times F(l + 1 + in, 2l + 2, -2ikr) P_l(\cos \theta). \quad (20.21)$$

**Искаженное кулоновское поле.** Если истинный потенциал отклоняется от кулоновского выражения лишь при малых  $r$ , то по аналогии с результатами § 19 можно ожидать, что в сумме (20.21) изменятся лишь несколько первых членов. Поскольку вне области аномального потенциала все радиальные функции должны удовлетворять уравнению (20.16) [и, следовательно,  $f_l$  — уравнению (20.17)], то единственная возможность изменения  $f_l$  состоит в том, чтобы добавить к ней нерегулярное решение  $G(l + 1 + in, 2l + 2, -2ikr)$ , определяемое формулой (20.8). Коэффициент при  $G$  определяется из условия, чтобы асимптотическое выражение для полной волновой функции складывалось из кулоновских падающей и рассеянной волн, а также из добавочной расходящейся волны.

Поэтому в каждом члене (20.21) нужно заменить  $F$  на линейную комбинацию  $F$  и  $G$ , причем член  $W_2$ , характеризующий падающую волну, должен оставаться неизменным. Такой комбинацией будет

$$e^{i\delta_l} (F \cos \delta_l + G \sin \delta_l) = W_1 e^{2i\delta_l} + W_2.$$

Тогда модифицированную волновую функцию, удовлетворяющую волновому уравнению вне области аномального потенциала, можно

записать в виде

$$u_m = u_c + v^{-1/2} e^{-n\pi/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l+1+in)}{(2l)!} (2ikr)^l e^{ikr} \times \\ \times (e^{2i\delta_l} - 1) W_1(l+1+in, 2l+2, -2ikr) P_l(\cos \theta). \quad (20.22)$$

Это асимптотически дает

$$u_m \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} v^{-1/2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{i(\eta_l + \delta_l)} (kr)^{-1} \times \\ \times \sin\left(kr - \frac{1}{2} l\pi - n \ln 2kr + \eta_l + \delta_l\right) P_l(\cos \theta). \quad (20.23)$$

Как было показано в связи с (19.5), каждый член в правой части (20.23) с точностью до комплексного множителя должен быть вещественной функцией  $r$ , так что все фазы  $\delta_l$  должны быть вещественны.

Дополнительные сдвиги фаз  $\delta_l$  можно найти, как и в § 19, из условия непрерывности всех парциальных волн на границе области аномального потенциала. Однако если в § 19 фазы  $\delta_l$  характеризовали отклонение волновой функции от вида, соответствующего свободной частице, то здесь они описывают отклонение от волновой функции для частицы, рассеиваемой чисто кулоновским полем<sup>1</sup>. С помощью формулы (20.22) можно показать, что асимптотическое представление  $u_m$  имеет вид (20.9) с заменой  $f_c(\theta)$  на

$$f_m(\theta) = f_c(\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} k^{-1} (2l+1) e^{i(2\eta_l + \delta_l)} \sin \delta_l P_l(\cos \theta). \quad (20.24)$$

Дифференциальное эффективное сечение рассеяния равно  $|f_m(\theta)|^2$ ; в общем случае оно содержит член, возникающий в результате интерференции между амплитудой кулоновского рассеяния  $f_c(\theta)$  и добавочными членами, зависящими от фаз  $\delta_l$ .

### Классический предельный случай для чисто кулоновского поля.

Как указывалось в § 12, следует ожидать совпадения результатов квантовой и классической теорий во всех тех случаях, когда можно образовать волновые пакеты, движущиеся по классическим траекториям без заметного распыления и притом настолько малые, что во всех точках пакета действующие силы можно считать одинаковыми. Там же было найдено, что наименьшее расширение волнового пакета за время  $t$  по порядку величины равно  $(\hbar t/\mu)^{1/2}$  или  $(\hbar d/\mu v)^{1/2} = (\lambda d)^{1/2}$ , где  $d = vt$  — расстояние,

<sup>1</sup> Для вычисления фаз  $\delta_l$ , фигурирующих в (20.22), нужно знать ход функции  $G$  при малых  $r$ ; полезные формулы приведены в работе Йоста, Уилера и Брейта [10].

проходимое пакетом за время  $t$ , а  $\lambda \equiv \lambda/2\pi = \hbar/\mu v$  — приведенная длина волны для относительного движения. Таким образом, классическую теорию можно применять, если  $(\lambda d)^{1/2} \ll d$  или  $(d/\lambda)^{1/2} \gg 1$ , где  $d$  — расстояние, в пределах которого сила изменяется заметным образом. В кулоновском поле отталкивания длина  $d$  по порядку величины совпадает с классическим прицельным расстоянием  $\left| ZZ'e^2 / \frac{1}{2} \mu v^2 \right|$ . Это дает также полезную оценку и для кулоновского поля притяжения, поскольку при всех столкновениях, за исключением относительно небольшого числа случаев рассеяния на большие углы, частицы никогда не приближаются друг к другу ближе, чем на это расстояние.

Таким образом, условие применимости классической теории есть

$$|n_l|^{1/2} \equiv \left| \frac{ZZ'e^2}{\hbar v} \right|^{1/2} \gg 1.$$

В силу больших значений  $n$  угловая часть фазы  $f_c(\theta)$ , определяемая равенством (20.10), быстро осциллирует с изменением  $\theta$  и, следовательно, лишь в малой степени влияет на характер столкновений одинаковых частиц (см. задачу 6, гл. IX). Интересно отметить, что для кулоновского поля классический предельный случай осуществляется при малых скоростях  $v$ , тогда как для потенциала с конечным радиусом действия  $a$  (типа рассмотренного в § 19) он имеет место при  $(a/\lambda)^{1/2} \gg 1$ , т. е. при больших  $v$ . Это связано с тем, что при уменьшении  $v$  „протяженность”  $|ZZ'e^2/\mu v^2|$  кулоновского поля увеличивается быстрее, чем  $\lambda = \hbar/\mu v$ .

### ЗАДАЧИ

1. Показать, что в случае одномерной прямоугольной потенциальной ямы (фиг. 14, при  $V_0 < 0$ ) коэффициенты прозрачности и отражения даются формулами (17.5), если в них (равно как и в выражении для  $\alpha$ ) изменить знак у  $V_0$ . Рассмотреть вопрос о зависимости коэффициента прозрачности от  $E$  в этом случае.

2. Показать, что если  $\gamma$  определяется соотношением (18.5), то формулы (18.4) и (18.7) будут справедливы для бинарных столкновений общего типа. (Указание: воспользоваться законом сохранения энергии и массы.)

3. Показать, что если частица с массой  $m_1$  испытывает упругое столкновение с находившейся первоначально в покое частицей с массой  $m_2$ , то все частицы отдачи (с массой  $m_2$ ) в лабораторной системе координат рассеиваются в переднюю полусферу. Если в системе центра инерции угловое распределение сферически симметрично, то каково будет распределение частиц с массой  $m_2$  в лабораторной системе координат?

4. Представить волновую функцию (19.1) в области, где рассеивающий потенциал равен нулю (но не обязательно в асимптотической области), в виде суммы плоских волн и разложения по сферическим функциям Ганкеля первого рода [см. (15.12)]. Пользуясь этим представлением, а также замечанием, сделанным в связи с (15.13), показать, что рассеянная волна всюду (а не только в асимптотической области) является чисто расходящейся.

5. Вычислить значение  $V_0 a^2$  для трехмерной прямоугольной потенциальной ямы, при котором эффективное сечение рассеяния при нулевой энергии равно нулю (эффект Рамзауэра — Таузенда). Найти главный член в выражении для полного сечения при малой энергии. (Указание: необходимо учесть парциальные волны как с  $l = 0$ , так и с  $l = 1$ .)

6. Сформулировать в явном виде предположения, сделанные при выводе формулы (19.31), и показать, что при малой энергии падающих частиц эта формула дает хорошее приближение для полного эффективного сечения в случае резонанса волны с  $l = 0$ .

7. Пользуясь формулой (19.31) и результатами задачи 5 гл. IV, найти (для данного потенциала) приближенное выражение полного эффективного сечения через энергию падающих частиц  $E$  и энергию связи  $\epsilon$  частицы в данном поле. Считать, что энергии  $E$  и  $\epsilon$  малы по сравнению с  $V_0$ .

8. Принимая во внимание три первые парциальные волны ( $l = 0, 1, 2$ ), вычислить дифференциальное эффективное сечение рассеяния идеально твердой сферой для случая  $ka = 1/2$ . Построить полярную диаграмму функций  $\sigma(\theta)$ . Чему равно в этом случае полное эффективное сечение и с какой точностью оно определяется при использовании трех членов разложения?

9. Найти общее выражение для фаз при рассеянии в поле  $V(r) = A/r^2$ , где  $A > 0$ . Является ли полное эффективное сечение конечным? Если нет, то возникает ли расходимость от рассеяния на малые или на большие углы и почему? Как нужно видоизменить вычисления при  $A < 0$ ? Возникают ли в этом случае какие-либо трудности?

10. Протоны с энергией в 200 000 эв рассеиваются атомами алюминия. Интенсивность рассеяния назад ( $\theta = 180^\circ$ ) оказалась равной 96% значения, вычисленного по формуле Резерфорда. Допустить, что это связано с отклонениями от кулоновского потенциала на столь малых расстояниях, что изменяется лишь фаза  $\delta_0$ . Чему соответствует в этом случае добавочный потенциал — притяжению или отталкиванию? Найти знак и абсолютную величину добавки к  $\delta_0$ , вызванной изменением потенциала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Watson G. N., Theory of Bessel Functions, New York, 1944. (Имеется русский перевод: Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.)
2. Schiff L. I., Progr. Theor. Phys., 11, 288 (1954).
3. Faxén H., Holtsmark J., Zs. f. Phys., 45, 307 (1927).
4. Kollath R., Phys. Zs., 31, 985 (1931).
5. Gordon W., Zs. f. Phys., 48, 180 (1928).
6. Mott N. F., Massey H. S. W., The Theory of Atomic Collisions, 2d ed., Oxford — New York, 1949. (Имеется русский перевод: Н. Мотт, Г. Месси, Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951.)
7. Whittaker E. T., Watson G. N., A Course of Modern Analysis, 4th ed., Cambridge, London, 1935. (Имеется русский перевод: Т. Уиттекер, Г. Ватсон, Курс современного анализа, М.—Л., 1937.)
8. Gamow G., Zs. f. Phys., 51, 204 (1928).
9. Gurney R. W., Condon E. U., Phys. Rev., 33, 127 (1929).
10. Yost F. L., Wheeler J. A., Breit G., Phys. Rev., 49, 174 (1936).
- 11\*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, М.—Л., 1948.

## МАТРИЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В предыдущих четырех главах было получено волновое уравнение Шредингера и найдены его решения для некоторых случаев, представляющих физический интерес. Теперь мы дадим другую формулировку квантовой механики, в которой динамические переменные (координаты, компоненты импульса, энергия частицы и т. д.) явно входят в уравнения движения, не будучи обязаны при этом действовать на волновую функцию. Такую же структуру имеют и классические уравнения движения; поэтому можно ожидать, что здесь окажется возможным установить более тесное соответствие между классическим и квантовым формализмом, чем в теории Шредингера.

Фактически дело именно так и обстоит. Главное формальное отличие от классической механики заключается в том, что квантовые динамические переменные не подчиняются коммутативному закону умножения. Подобные некоммутативные динамические переменные, зачастую называемые просто *операторами*, удобно представлять в виде матриц. Поскольку строки и столбцы матрицы можно выбрать сколь угодно большим числом вполне эквивалентных способов, теория матриц дает особенно гибкий способ описания. Именно благодаря тесной формальной аналогии между классической динамикой и матричной квантовой механикой последняя и явилась исторически первой формулировкой квантовой теории, данной в 1925 г. Гейзенбергом<sup>1</sup>.

В настоящей главе будет дан прежде всего краткий обзор наиболее важных свойств матриц; далее будет показано, каким образом матричное исчисление связано с квантовой теорией и какую пользу оно может принести при решении конкретных задач.

### § 21. Матричная алгебра<sup>2)</sup>

Рассмотрим сначала матрицы, у которых число строк и столбцов конечно, а затем покажем, как обобщаются полученные резуль-

<sup>1)</sup> См. работы Гейзенберга [1] и Борна, Гейзенберга и Иордана [2]. Связь между матричной квантовой механикой и волновым уравнением установлена Шредингером [3] и Эккартом [4].

<sup>2)</sup> Со свойствами матриц можно также познакомиться, например, по книге Гельфанда [14]; более полное изложение теории матриц содержится в монографии Гантмахера [15]. — *Прим. перев.*

таты на случай матриц с бесконечным числом строк и столбцов<sup>1)</sup>.

**Сложение и умножение матриц.** Матрицей называется квадратная или прямоугольная таблица чисел, которая по определенным правилам складывается и перемножается с другой такой таблицей. Мы будем обозначать матрицы заглавными латинскими буквами, например  $A$ , а образующие ее числа, или *элементы*, — теми же буквами, но с индексами, например  $A_{kl}$ ; здесь  $k$  означает столбец, а  $l$  — строку, в которых находится элемент  $A_{kl}$ . Матрицы можно складывать, если они имеют одинаковый *ранг*, т. е. одинаковое число строк и одинаковое число столбцов. Сложение коммутативно:

$$A + B = B + A. \quad (21.1)$$

Если обозначить через  $C$  сумму матриц, то

$$C_{kl} = A_{kl} + B_{kl}. \quad (21.2)$$

Если число столбцов у матрицы  $A$  равно числу строк у матрицы  $B$ , то  $A$  можно умножить справа на  $B$ ; в результате перемножения получится матрица  $C$ , число строк которой совпадает с числом строк в матрице  $A$ , а число столбцов — с числом столбцов в матрице  $B$ :

$$C = AB, \quad C_{kl} = \sum_m A_{km} B_{ml}. \quad (21.3)$$

Здесь суммирование производится по всем индексам  $m$ , обозначающим столбцы  $A$  и строки  $B$ . Из соотношений (21.2) и (21.3) непосредственно следует дистрибутивность умножения:

$$A(B + C) = AB + AC. \quad (21.4)$$

Умножение подчиняется также ассоциативному закону:

$$A(BC) = (AB)C, \quad (21.5)$$

где левая часть означает, что  $A$  умножается справа на произведение  $B$  и  $C$ , а правая часть — что произведение  $A$  и  $B$  умножается справа на  $C$ . Произведение (21.5) записывается просто в виде  $ABC$ ; из (21.3) получим для него явное выражение

$$D = ABC, \quad D_{kl} = \sum_{m,n} A_{km} B_{mn} C_{nl}. \quad (21.6)$$

Из (21.3) явствует, что, вообще говоря,  $AB$  не равно  $BA$ ; таким образом, умножение в общем случае не коммутативно<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Более полное обсуждение имеется в книге Неймана [5], гл. 2.

<sup>2)</sup> Выражение  $AB - BA$  обычно называется коммутатором величин  $A$  и  $B$ . — *Прим. перев.*



**Нулевая, единичная и постоянная матрицы.** Если  $A$  — произвольная квадратная матрица, то *нулевая матрица*  $\circ$  определяется равенствами

$$\circ A = \circ, \quad A \circ = \circ, \quad (21.7)$$

из которых следует, что все элементы матрицы  $\circ$  равны нулю. Если матрица  $A$  не квадратная, то все элементы  $\circ$  по-прежнему равны нулю, но сами матрицы  $\circ$ , фигурирующие в разных местах в (21.7), имеют неодинаковое число строк и столбцов.

*Единичная матрица*  $1$  определяется требованием, чтобы для произвольных матриц  $A$  и  $B$  выполнялись соотношения

$$1A = A, \quad B1 = B. \quad (21.8)$$

Из (21.8) следует, что единичная матрица является квадратной, и ранг ее (число строк или столбцов) равен числу строк в  $A$  или числу столбцов в  $B$ . Далее, ее элементы, лежащие на главной диагонали ( $k = l$ ), равны единице, а недиагональные элементы равны нулю; таким образом, элементы единичной матрицы совпадают с символами Кронекера  $\delta_{kl}$ , введенными в § 10.

Произведение числа  $c$  на матрицу  $A$  равно матрице  $cA$ , элементы которой получаются в результате умножения элементов матрицы  $A$  на  $c$ . Поэтому, если определить *постоянную матрицу*  $C$  как матрицу, кратную единичной, так что вместо единицы диагональным элементом будет отличное от нуля число  $c$ , то

$$cA = CA, \quad (21.9)$$

где  $C_{kl} = c\delta_{kl}$  — матричные элементы постоянной матрицы  $C$ <sup>1)</sup>.

**Шпур, детерминант и обратная матрица.** Сумма диагональных элементов квадратной матрицы называется ее шпуром (а также следом или *диагональной суммой*) и обозначается символом  $\text{Sp}$ :

$$\text{Sp}(A) = \sum_k A_{kk}. \quad (21.10)$$

Детерминант квадратной матрицы определяется по обычному правилу вычисления детерминанта для чисел, расположенных в квадратной таблице.

Матрица  $A$  может иметь или не иметь обратную матрицу  $A^{-1}$ , определяемую равенствами

$$AA^{-1} = 1, \quad A^{-1}A = 1. \quad (21.11)$$

Матрица  $A$  называется *несингулярной*, если она имеет обратную матрицу, и *сингулярной* в противном случае. Если  $A$  — несингуляр-

<sup>1)</sup> Терминология автора в данном случае отличается от принятой в математике, где постоянной называется такая матрица, все элементы которой — постоянные числа. Однако данное определение соответствует определению интегралов движения в матричной формулировке квантовой механики (см. § 23). — *Прим. перев.*

ная матрица конечного ранга, то можно показать (см. задачу 2), что она является квадратной и  $(k, l)$ -й элемент обратной матрицы равен алгебраическому дополнению элемента  $A_{lk}$ , деленному на детерминант матрицы  $A$ ; таким образом, матрица сингулярна, если ее детерминант равен нулю. Легко проверить, что для несингулярных матриц  $A$ ,  $B$  и  $C$

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}. \quad (21.12)$$

**Эрмитовы и унитарные матрицы.** Матрица  $A^*$  называется *эрмитово сопряженной* с  $A$ , если она получается из  $A$  заменой строк на столбцы и всех элементов на комплексно сопряженные им величины. Поэтому, если

$$B = A^*, \text{ то } B_{kl} = \bar{A}_{lk}. \quad (21.13)$$

Нетрудно проверить, что эрмитово сопряженной с произведением нескольких матриц будет матрица, полученная в результате перемножения сопряженных матриц в обратном порядке:

$$(ABC)^* = C^*B^*A^*. \quad (21.14)$$

Матрица называется *эрмитовой*, или *самосопряженной*, если она равна своей эрмитово сопряженной матрице; таким образом, матрица  $A$  эрмитова, если

$$A = A^*. \quad (21.15)$$

Эрмитовыми, очевидно, могут быть только квадратные матрицы.

Матрица называется *унитарной*, если эрмитово сопряженная с ней матрица равна обратной; таким образом, матрица  $A$  унитарна, если

$$A^* = A^{-1} \text{ или } AA^* = 1 \text{ и } A^*A = 1. \quad (21.16)$$

Унитарные матрицы конечного ранга должны быть квадратными.

**Преобразование и диагонализация матриц.** Преобразование квадратной матрицы  $A$  в  $A'$  с помощью несингулярной матрицы  $S$  определяется соотношением

$$SAS^{-1} = A'. \quad (21.17)$$

Отсюда ясно, что  $S^{-1}$  преобразует обратно  $A'$  в  $A$ .

Преобразование не изменяет вида матричного уравнения. Так, уравнение

$$AB + CDE = F$$

при преобразовании переходит в

$$SABS^{-1} + SCDES^{-1} = SFS^{-1},$$

что эквивалентно уравнению

$$SAS^{-1} \cdot SBS^{-1} + SCS^{-1} \cdot SDS^{-1} \cdot SES^{-1} = SFS^{-1}$$

или

$$A'B' + C'D'E' = F',$$

где штрихами обозначены преобразованные матрицы. В силу инвариантности матричных уравнений относительно преобразований можно производить любые подходящие преобразования системы матриц, не нарушая справедливости получаемых при этом результатов.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если у нее отличные от нуля элементы расположены только на главной диагонали ( $k = l$ ). Диагональные элементы называются при этом *собственными значениями* матрицы. Нетрудно видеть, что  $n$ -я степень диагональной матрицы также будет диагональной и собственные значения ее будут  $n$ -ми степенями собственных значений первоначальной матрицы.

Говорят, что матрица  $S$  в (21.17) *диагонализует* матрицу  $A$ , если полученная в результате преобразования матрица  $A'$  диагональна, т. е.  $A'_{kl} = A'_k \delta_{kl}$ . Для явного определения  $A'$  умножим (21.17) справа на  $S$ :

$$SA = A'S. \quad (21.18)$$

Приравнивая элементы правых и левых частей (21.18), получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_m S_{km} A_{ml} = A'_k S_{kl}, \quad \text{или} \quad \sum_m S_{km} (A_{ml} - A'_k \delta_{ml}) = 0, \quad (21.19)$$

где  $A'_k$  — одно из собственных значений  $A'$ , а суммирование по индексу  $m$  производится от единицы до  $N$  ( $N$  — ранг матрицы  $A$ ).

Равенства (21.19) можно теперь рассматривать как систему  $N$  однородных алгебраических уравнений относительно элементов матрицы преобразования  $S_{km}$ , где  $k$  фиксировано. Необходимым и достаточным условием разрешимости этой системы является обращение в нуль детерминанта, составленного из коэффициентов уравнения; иначе говоря, детерминант квадратной матрицы ( $A_{ml} - A'_k \delta_{ml}$ ) должен быть равен нулю. Отсюда получаем одно алгебраическое уравнение  $N$ -й степени, так называемое *вековое уравнение*, имеющее  $N$  корней  $A'_k$ . Таким образом, собственные значения диагональной матрицы  $A'$ , полученной из  $A$  в результате преобразования, не зависят от способа диагонализации  $A$  (исключая, может быть, последовательность расположения): поэтому их называют также собственными значениями первоначальной недиагональной матрицы  $A$ . Матрицы  $A$  и  $A'$  называются *вырожденными*, если два или более собственных значения совпадают друг с другом.

**Матрицы бесконечного ранга.** Правила сложения и умножения матриц (21.2) и (21.3) очевидным образом переносятся на случай бесконечного числа строк и столбцов, если только бесконечная сумма в (21.3) сходится. Иногда мы будем иметь дело с матрицами, у которых число строк или столбцов (или и тех и других) является несчетно бесконечным; в этом случае один или оба матричных индекса становятся непрерывными переменными и обычное суммирование нужно заменить интегрированием. Мы не будем здесь подробно рассматривать эти возможности, но просто допустим, что все разумные результаты без каких-либо затруднений переносятся с конечных на бесконечные матрицы<sup>1)</sup>. Когда говорят, что эрмитова матрица бесконечного ранга является квадратной, то имеют в виду, что ее строки и столбцы перенумерованы одинаковым образом. Унитарная матрица бесконечного ранга не обязательно должна быть квадратной. Ее строки и столбцы могут нумероваться различно; при этом, например, число строк может быть счетным, а число столбцов — несчетно бесконечным.

В квантовой механике в основном имеют дело с эрмитовыми и унитарными матрицами, чаще всего бесконечного ранга. Основная теорема, которую мы примем без доказательства, состоит в том, что любую эрмитову матрицу можно привести к диагональному виду с помощью унитарного преобразования. Из этой теоремы следует, что собственные значения эрмитовой матрицы определяются однозначно, с точностью до порядка их расположения. Как легко показать с помощью этой теоремы (см. задачу 1), для того чтобы можно было диагонализировать две эрмитовы матрицы с помощью одного и того же унитарного преобразования, необходимо и достаточно, чтобы они *коммутировали*. (Матрицы  $A$  и  $B$  коммутируют, если  $AB = BA$ .) Далее из этой теоремы следует, что собственные значения эрмитовой матрицы вещественны. Если  $S$  и  $A$  в (21.17) представляют собой соответственно унитарную и эрмитову матрицы, то это соотношение можно переписать в виде

$$SAS^* = A'. \quad (21.20)$$

В силу (21.14) уравнение, эрмитово сопряженное с (21.20), имеет вид

$$SAS^* = A'^*.$$

Отсюда следует, что  $A'^* = A'$ , т. е. в результате преобразования с помощью унитарной матрицы свойство эрмитовости сохраняется. Если матрица  $A'$  эрмитова и диагональна, то из (21.13) следует, что все ее собственные значения вещественны. Легко видеть, что справедливо и обратное утверждение: если в результате унитарного

<sup>1)</sup> Более тщательное обсуждение этого вопроса и доказательство приводимой далее теоремы имеется в книге Неймана [5].

преобразования матрицу можно привести к диагональному виду и все ее собственные значения вещественны, то она является эрмитовой.

Важно отметить, что если ранг  $A$  бесконечен, то матрица  $A^{-1}$  будет обратной  $A$  лишь в том случае, когда выполняются оба соотношения (21.11). Аналогично для унитарности  $A$  должно выполняться как второе, так и третье соотношения (21.16).

## § 22. Матрицы в квантовой механике

Появление матриц в квантовой механике легко связать с решением уравнения Шредингера (8.2). В этом параграфе мы будем пользоваться обозначениями, связанными с *методом Гамильтона*; более подробно они будут обоснованы в § 23. Перепишем уравнение (8.2) в виде

$$Hu_k(\mathbf{r}) = E_k u_k(\mathbf{r}), \quad (22.1)$$

где индекс  $k$  характеризует различные собственные функции оператора энергии  $u_k(\mathbf{r})$ , образующие полную ортонормированную систему, и соответствующие собственные значения  $E_k$  [ $k$  служит для обозначения как уровней энергии, так и различных вырожденных собственных функций; иными словами, этот индекс включает и  $E$  и  $s$  из (10.7)].

Оператор энергии  $H$ , называемый также гамильтонианом, определяется соотношением

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}). \quad (22.2)$$

В соответствии с § 8 индекс  $k$  может принимать как дискретные, так и непрерывные значения; он может быть также дискретным в одном интервале значений и непрерывным — в другом. Для обозначения суммирования по всем значениям  $k$  мы будем пользоваться символом  $\mathbf{S}$  или  $\mathbf{S}_k$ ; при этом суммирование включает также и интегрирование по области непрерывного изменения  $k$ .

**Матрица унитарного преобразования.** Пусть имеется вторая полная ортонормированная система функции  $v_n(\mathbf{r})$ . Последние отнюдь не обязаны удовлетворять уравнению Шредингера (22.1) с потенциальной энергией  $V(\mathbf{r})$ , характерной для данной задачи. Они могут, например, представлять собой собственные функции оператора импульса (11.4) или (11.11), или волновые функции атома водорода (16.24), к которым добавлены еще соответствующие волновые функции непрерывного спектра (типа рассмотренных в § 20). Функции  $v_n$  можно разложить по  $u_k$ :

$$v_n(\mathbf{r}) = \mathbf{S}_k S_{kn} u_k(\mathbf{r}),$$

причем из ортонормированности функций  $u_k$  следует, что

$$S_{kn} = \int \bar{u}_k(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}) d\tau.$$

Аналогично

$$u_k(\mathbf{r}) = \mathbf{S}_n \bar{S}_{kn} v_n(\mathbf{r}). \quad (22.3)$$

Легко убедиться, что матрица с элементами  $S_{kn}$  унитарна:

$$\begin{aligned} (SS^*)_{kl} &= \mathbf{S}_n S_{kn} \bar{S}_{ln} = \mathbf{S}_n \int \bar{u}_k(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}) d\tau \int \bar{v}_n(\mathbf{r}') u_l(\mathbf{r}') d\tau' = \\ &= \int \int u_k(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau d\tau' = \int \bar{u}_k(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}) d\tau. \end{aligned} \quad (22.4)$$

Здесь было использовано условие полноты, справедливое для любой полной ортонормированной системы функций, в том числе и для функций  $v_n(\mathbf{r})$  [см. замечание, сделанное в связи с (10.11)]. Последний интеграл в правой части (22.4) равен  $\delta$ -символу Кронекера или  $\delta$ -функции Дирака в зависимости от того, принимает ли индекс  $k$  дискретные или непрерывные значения; в обоих случаях он представляет собой элемент единичной матрицы. Таким образом, мы доказали, что  $SS^* = 1$ . Аналогично можно показать, что

$$(S^*S)_{nm} = S_k \bar{S}_{kn} S_{km} = (1)_{nm}.$$

**Матрица энергии.** С помощью функций  $v_n(\mathbf{r})$  можно вычислить матрицу оператора энергии

$$H_{nm} = \int v_n(\mathbf{r}) H v_m(\mathbf{r}) d\tau, \quad (22.5)$$

где  $H$  — оператор (22.2). Рассмотрим теперь связь между матрицей энергии (22.5) в  $v_n$ -представлении и собственными значениями оператора энергии  $E_k$ .

Преобразуя  $H_{nm}$  с помощью унитарной матрицы  $S$ , получаем

$$\begin{aligned} (SHS^*)_{kl} &= \mathbf{S}_{n,m} S_{kn} H_{nm} \bar{S}_{lm} = \\ &= \mathbf{S}_{n,m} \int \bar{u}_k(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}) d\tau \int \bar{v}_n(\mathbf{r}') H' v_m(\mathbf{r}') d\tau' \int \bar{v}_l(\mathbf{r}'') u_l(\mathbf{r}'') d\tau'', \end{aligned}$$

где штрих у  $H$  показывает, что оператор действует только на переменную  $\mathbf{r}'$ , находящуюся справа. Выполняя суммирование по индексу  $m$ , получим  $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')$  и, следовательно,

$$\int H' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') u_l(\mathbf{r}'') d\tau'' = H' \int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') u_l(\mathbf{r}'') d\tau'' = H' u_l(\mathbf{r}').$$

Суммируя далее по  $n$  и опуская штрихи, находим

$$(SHS^*)_{kl} = \int \bar{u}_k(\mathbf{r}) H u_l(\mathbf{r}) d\tau = E_k \delta_k, \text{ или } E_k \delta(k-l), \quad (22.6)$$

т. е. мы получаем элементы диагональной матрицы с собственными значениями  $E_k$ .

Таким образом, решение уравнения Шредингера полностью эквивалентно диагонализации матрицы энергии, выраженной в некотором произвольном представлении, например в представлении, задаваемом функциями  $v_n$ . Собственные значения матрицы энергии являются собственными значениями оператора энергии, получаемыми при решении уравнения Шредингера, а матрица унитарного преобразования  $S$ , диагонализующая  $H$ , дает в соответствии с (22.3) представление собственных функций  $u_k(\mathbf{r})$  оператора энергии через функции произвольно выбранной системы.

Интересно отметить, что матрица  $S$  необязательно должна быть квадратной. Например, функции  $v_n$  могут быть собственными функциями трехмерного гармонического осциллятора, полностью принадлежащими дискретному спектру, тогда как  $u_k$  могут быть собственными функциями оператора импульса, полностью принадлежащими непрерывному спектру. Однако матрица энергии, записанная как в диагональном виде (22.6), так и в недиагональном виде  $H_{nm}$ , является квадратной.

**Динамические переменные как эрмитовы матрицы.** Как видно из (22.6), собственными значениями матрицы энергии являются вещественные уровни энергии  $E_k$ . Тогда из результатов § 21 следует, что в любом представлении матрица  $H$  является эрмитовой.

В соответствии с интерпретацией, данной в § 10, собственные значения любого оператора, характеризующего динамическую переменную, должны быть вещественны, так как ими определяются единственно возможные результаты точных физических измерений этой переменной. Произвольную динамическую переменную можно изобразить матрицей, собственные значения которой в диагональном представлении лежат на главной диагонали, а всякое другое представление может быть получено из диагонального с помощью соответствующей унитарной матрицы. Таким образом, произвольную динамическую переменную, допускающую физическое измерение, можно представить с помощью эрмитовой матрицы. Поэтому такую динамическую переменную называют эрмитовой.

**Волновые функции как унитарные матрицы.** Для любой полной ортонормированной системы функций, например для  $u_k(\mathbf{r})$  или  $v_n(\mathbf{r})$ , справедливо условие полноты

$$\mathbf{S}_k u_k(\mathbf{r}) \bar{u}_k(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (22.7)$$

и условие ортонормированности

$$\int \bar{u}_k(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}) d\tau = \delta_{kl} \quad \text{или} \quad \delta(k - l). \quad (22.8)$$

Будем рассматривать функцию  $u_k(\mathbf{r})$  как двухмерную таблицу чисел, в которой строки нумеруются переменным радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , а столбцы — индексом  $k$ . Тогда она будет представлять собой

матрицу  $U_{rh}$ , а равенство (22.7) — матричное уравнение

$$(UU^*)_{rr'} = \sum_h U_{rh} \bar{U}_{r'h} = (1)_{rr'}.$$

Аналогично соотношение (22.8) в матричной форме имеет вид

$$(U^*U)_{kl} = \sum_r \bar{U}_{rk} U_{rl} = (1)_{kl}.$$

Таким образом, матрица  $U$  унитарна.

**г-представление.** Указанное свойство волновых функций наводит на мысль, что эту унитарную матрицу можно применять в качестве матрицы преобразования. Преобразуем матрицу энергии  $H_{nm}$ , определяемую равенством (22.5), с помощью унитарной матрицы  $V_{rn} \equiv v_n(\mathbf{r})$ :

$$\begin{aligned} (VHV^*)_{rr'} &= \sum_n \sum_m V_{rn} H_{nm} \bar{V}_{r'm} = \sum_n \sum_m \bar{v}_n(\mathbf{r}) H_{nm} \bar{v}_m(\mathbf{r}') = \\ &= \sum_n \sum_m v_n(\mathbf{r}) \int \bar{v}_n(\mathbf{r}'') H'' v_m(\mathbf{r}'') d\tau'' \cdot \bar{v}_m(\mathbf{r}') = \\ &= \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') H'' \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') d\tau'' = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') H' \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') d\tau'' = \\ &= H' \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') d\tau'' = H' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = H \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (22.9)$$

Мы получили результат, обратный результату (22.5). В соотношении (22.5) исходным считался дифференциальный оператор  $H$  и для него получалось матричное представление; здесь же матрица преобразуется обратно в выражение, по существу являющееся дифференциальным оператором. Теперь, однако, видно, что дифференциальный оператор  $H$ , действующий на функции от пространственных координат, можно записать в виде матрицы в представлении, в котором строки и столбцы нумеруются переменными  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ , что отнюдь не было очевидно, когда мы исходили непосредственно из выражения (22.2). С этой точки зрения решение дифференциального волнового уравнения Шредингера (22.1) эквивалентно диагонализации матрицы

$$H_{rr'} = H \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

что, как мы видели выше, эквивалентно диагонализации матрицы  $H_{nm}$ .

В  $\mathbf{r}$ -представлении координата  $\mathbf{r}$  диагональна:  $(\mathbf{r})_{r,r'} = \mathbf{r}' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ . Стоит отметить, что матрица энергии  $H_{rr'}$  в  $\mathbf{r}$ -представлении не является диагональной, хотя  $\delta$ -функция и обращает ее в нуль, если  $\mathbf{r}$  отличается от  $\mathbf{r}'$  на конечную величину. Это связано с наличием производных от  $\delta$ -функции, у которых имеются отличные от нуля матричные элементы, бесконечно близкие к диагонали  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ . Например, матрица  $f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  диагональна, а матрицы  $\left(\frac{d}{dx}\right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  и  $\nabla^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  недиагональны.



**Полезное тождество.** Если  $\Omega$  — оператор, результат действия которого на функцию  $f(\mathbf{r})$  можно представить в виде

$$\Omega f(\mathbf{r}) = \int \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\tau',$$

то можно получить тождество, часто оказывающееся полезным:

$$\int \bar{g}(\mathbf{r}) [\Omega f(\mathbf{r})] d\tau = \int [\overline{\Omega^* g(\mathbf{r})}] f(\mathbf{r}) d\tau. \quad (22.10)$$

Если рассматривать  $\Omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  в качестве матрицы в  $\mathbf{r}$ -представлении, то, действуя на  $g(\mathbf{r})$  матрицей, эрмитово сопряженной с  $\Omega$ , получим

$$\Omega^* g(\mathbf{r}) = \int \overline{\Omega(\mathbf{r}', \mathbf{r})} g(\mathbf{r}') d\tau',$$

откуда непосредственно следует (22.10).

С помощью этого тождества можно переносить действие операторов в подинтегральном выражении с одного множителя на другой. Примерами применения его могут служить соотношения (7.9), (7.10) и (12.3), полученные в результате интегрирования по частям. Там оператор  $\Omega$  является дифференциальным, а его матричное представление содержит производные и кратные от  $\delta$ -функции. Но оператор  $\Omega$  не обязан принадлежать к такому специальному типу [он может быть, например, интегральным оператором, аналогичным оператору, содержащемуся в квадратных скобках в (10.19)]; соотношение (22.10) равным образом справедливо и для операторов, у которых отличны от нуля матричные элементы, находящиеся на конечном расстоянии от диагонали.

### § 23. Уравнения движения в матричной форме

В предыдущем параграфе были рассмотрены основные трансформационные свойства матриц, представляющих динамические переменные в некоторый определенный момент времени. Вычисляя теперь производные по времени от этих матриц, мы найдем уравнения движения для динамических переменных. Эти уравнения оказываются формально очень похожими на классические уравнения движения и указывают общий метод квантования любой классической системы.

**Производная по времени от матрицы.** Будем исходить из уравнения Шредингера, зависящего от времени (6.16), записав его с помощью гамильтониана:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = H\psi(\mathbf{r}, t); \quad (23.1)$$

типичное выражение для  $H$  дается формулой (22.2). Матрицу, представляющую произвольную функцию  $F$  динамических переменных, можно выразить с помощью полной ортонормированной системы

функций, зависимость которых от времени определяется уравнением (23.1). Обозначим две какие-нибудь функции из указанной полной системы буквами  $\psi$  и  $\varphi$  и вычислим производную по времени от типичного матричного элемента:

$$\int \bar{\varphi} F \psi d\tau = \int \int \bar{\varphi}(\mathbf{r}, t) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}', t) d\tau d\tau'.$$

Будем считать, что  $F$  представляет собой оператор общего вида (необязательно дифференциальный или оператор умножения на число), который удовлетворяет равенству (22.10) и может явно зависеть от времени.

Дифференцируя по  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \bar{\varphi} F \psi d\tau &= \int \int \bar{\varphi}(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\partial}{\partial t} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \right] \psi(\mathbf{r}', t) d\tau d\tau' + \\ &+ \int \int \bar{\varphi}(\mathbf{r}, t) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}', t) \right] d\tau d\tau' + \\ &+ \int \int \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\varphi}(\mathbf{r}, t)) \right] F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}', t) d\tau d\tau' = \\ &= \int \bar{\varphi} \frac{\partial F}{\partial t} \psi d\tau + \frac{1}{i\hbar} \int \int \bar{\varphi}(\mathbf{r}, t) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) [H'\psi(\mathbf{r}', t)] d\tau d\tau' - \\ &- \frac{1}{i\hbar} \int \int [H\bar{\varphi}(\mathbf{r}, t)] F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}', t) d\tau d\tau'. \end{aligned}$$

Здесь первый член справа представляет собой матричный элемент оператора  $\partial F/\partial t$ ; в преобразованиях использовано уравнение (23.1). С помощью тождества (22.10) перенесем в последнем члене действие (эрмитова) оператора  $H$  с функции  $\bar{\varphi}$  на  $F\psi$ , после чего получим

$$\frac{d}{dt} \int \bar{\varphi} F \psi d\tau = \int \bar{\varphi} \frac{\partial F}{\partial t} \psi d\tau + \frac{1}{i\hbar} \int \bar{\varphi} (FH - HF) \psi d\tau.$$

Поскольку функции  $\psi$  и  $\varphi$  в любой момент времени совершенно произвольны, это можно переписать в виде уравнения для матричных элементов:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} (FH - HF). \quad (23.2)$$

Элементы матрицы в левой части (23.2) представляют собой производные по времени от элементов  $F$ , так что эту матрицу можно называть полной производной по времени от  $F$ . Первый член, учитывающий только явную зависимость  $F$  от  $t$ , дает частную производную от  $F$  по времени. Второй член определяет ту часть изменения матрицы  $F$  со временем, которая обусловлена изменением функций, используемых для вычисления матричных элементов. Равенство (23.2) представляет собой уравнение движения для динамической переменной в форме Гейзенберга.

**Классические уравнения Лагранжа и Гамильтона.** Чтобы выявить сходство (23.2) с соответствующим классическим уравнением, дадим краткий обзор основ классической теории Гамильтона. Для консервативной динамической системы с  $f$  степенями свободы уравнения движения можно получить с помощью вариационного принципа<sup>1)</sup> исходя из функции Лагранжа  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$ , зависящей от координат  $q_i$ , скоростей  $\dot{q}_i \equiv dq_i/dt$  и времени, а именно:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0. \quad (23.3)$$

Получаемые при этом уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, f. \quad (23.4)$$

Определим *импульс, канонически сопряженный с  $q_i$* , как  $p_i \equiv \partial L / \partial \dot{q}_i$ , и введем функцию Гамильтона, зависящую от координат и импульсов:

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L. \quad (23.5)$$

Варьируя  $H$ , находим уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, f. \quad (23.6)$$

С помощью уравнений Гамильтона (23.6) можно найти производную по времени от любой функции координат, импульсов и времени, взятой в движущейся фазовой точке:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right). \end{aligned}$$

*Скобка Пуассона*  $\{A, B\}$  для двух произвольных функций координат и импульсов определяется соотношением

$$\{A, B\} \equiv \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right). \quad (23.7)$$

С помощью этого символа уравнение для функции  $F$  от динамических переменных можно записать в виде

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}. \quad (23.8)$$

<sup>1)</sup> См. книги Уиттекера [6], 3-е изд., § 99 и 109, Корбена и Стэля [7], § 26 и 63, Голдстейна [8], гл. 2 и 7.

Левая часть (23.8) представляет собой полную производную от  $F$  по времени, взятую в движущейся фазовой точке. Первый член справа учитывает явную зависимость  $F$  от времени, а второй описывает изменение  $F$ , связанное с движением фазовой точки, в которой вычисляется функция  $F$ . Таким образом, уравнения (23.2) и (23.8) весьма сходны; движение фазовой точки во втором случае соответствует изменению функций, характеризующих матричное представление, в первом.

**Классические и квантовые скобки Пуассона.** Сходство между уравнениями (23.2) и (23.8) наводит на мысль, что для нахождения квантового аналога классических уравнений движения в общем случае нужно заменить классическую скобку Пуассона на *квантовую*, определяемую как коммутатор, деленный на  $i\hbar$ :

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B] \equiv \frac{1}{i\hbar} (AB - BA). \quad (23.9)$$

Это предположение подтверждается двумя обстоятельствами. Во-первых, рассмотрим классические условия контактного преобразования от одной системы канонических переменных  $q_i, p_i$  к другой  $Q_i, P_i$ <sup>1)</sup>:

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}, \quad \{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad (23.10)$$

где скобки Пуассона вычисляются по отношению к первоначальным переменным  $q_i, p_i$ . В § 6 мы видели, что для перехода от классической теории к квантовой нужно заменить  $p_x$  дифференциальным оператором  $-i\hbar(\partial/\partial x)$  и т. д. Поэтому, чтобы вычислить коммутатор  $x$  и  $p_x$ , нужно найти результат действия соответствующего оператора на произвольную функцию от координат  $g(\mathbf{r})$ :

$$(xp_x - p_x x)g(\mathbf{r}) = -i\hbar x \frac{\partial g}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(xg) = i\hbar g(\mathbf{r}). \quad (23.11)$$

В силу произвольности  $g(\mathbf{r})$  для этого и других коммутаторов можно написать операторные уравнения:

$$xp_x - p_x x = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x \right) = i\hbar,$$

$$xp_y - p_y x = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} x \right) = 0,$$

$$xy - yx = 0, \quad p_x p_y - p_y p_x = 0$$

и т. д. Этот результат соответствует классическим уравнениям (23.10), если совершить подстановку (23.9). Во-вторых, алгебраические свойства коммутаторов и классических скобок Пуассона

<sup>1)</sup> См. Уиттекер [6], Корбен и Стэль [7], гл. 11—13; Голдстейн [8], гл. 8.

оказываются одинаковыми. Именно, исходя из определения (23.7), легко проверить, что

$$\begin{aligned} \{A, B\} &= -\{B, A\}, \\ \{A, c\} &= 0, \quad \text{где } c \text{ -- число,} \\ \{(A_1 + A_2), B\} &= \{A_1, B\} + \{A_2, B\}, \\ \{A_1 A_2, B\} &= \{A_1, B\} A_2 + A_1 \{A_2, B\}, \\ \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} &= 0. \end{aligned} \quad (23.12)$$

Порядок множителей, которые могут не коммутировать, здесь нигде не изменялся. Как показал Дирак<sup>1)</sup>, из формул (23.12) следует, что квантовый аналог скобки Пуассона дается правой частью (23.9); в рамках этих рассуждений постоянная  $\hbar$ , разумеется, остается произвольной (см. также задачу 11).

**Квантование классической системы.** Изложенные соображения дают основание предположить, что для перехода к квантовому описанию любой классической системы нужно сначала записать классическую функцию Гамильтона и уравнения движения в некоторой системе канонических переменных  $q_i, p_i$ ; затем классические скобки Пуассона в (23.8) и (23.10) следует, в соответствии с (23.9), заменить квантовыми. Тогда для канонических переменных будут выполняться квантовые условия<sup>2)</sup>

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0. \quad (23.13)$$

В дальнейшем (гл. XIII) выяснится, что этот метод квантования полезен не только для классических частиц, но и для классических волновых полей.

Применяя его, необходимо учитывать два обстоятельства. Во-первых, координаты и импульсы должны рассматриваться в декартовой системе координат. Во-вторых, при наличии неопределенности в отношении порядка следования некоммутирующих множителей обычно бывает целесообразно брать их симметризованное произведение. Оба эти обстоятельства иллюстрируются при помощи следующего примера.

**Движение частицы в электромагнитном поле.** В качестве примера применения изложенного выше метода квантования рассмотрим задачу о движении заряженной материальной точки в произвольном внешнем электромагнитном поле. Классическая функция Гамильтона, выраженная через канонические переменные  $\mathbf{r}, \mathbf{p}$  и

<sup>1)</sup> См. работу [9], § 21.

<sup>2)</sup> Заметим, что, как видно из вывода (12.7), для любой пары канонических переменных  $\Delta q_i \cdot \Delta p_i \geq \hbar/2$ .

через потенциалы электромагнитного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , имеет вид<sup>1)</sup>

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi, \quad (23.14)$$

где  $e$  — заряд частицы и  $c$  — скорость света; напряженности электрического и магнитного полей выражаются через потенциалы по формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (23.15)$$

В декартовых координатах квантовые условия (23.13) имеют вид

$$[x, p_x] = [y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar, \quad (23.16)$$

тогда как другие пары координат и компонент импульса коммутируют. Пользуясь теперь формулами (23.2), (23.14) и (23.16), вычислим скорость и ускорение частицы  $d\mathbf{r}/dt$  и  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  и сравним их с соответствующими классическими выражениями.

**Вычисление коммутаторов.** Для удобства вычисления некоторых коммутаторов, получающихся в результате подстановки отдельных выражений в (23.2), выведем некоторые элементарные формулы. Так как все компоненты вектора  $\mathbf{r}$  коммутируют друг с другом, то коммутируют и две произвольные функции от  $\mathbf{r}$ . Из (23.16) следует, что

$$\begin{aligned} x^2 p_x - p_x x^2 &= x(p_x x + i\hbar) - p_x x^2 = \\ &= (p_x x + i\hbar)x + i\hbar x - p_x x^2 = 2i\hbar x. \end{aligned}$$

Методом индукции нетрудно показать, что

$$x^n p_x - p_x x^n = ni\hbar x^{n-1}. \quad (23.17)$$

Из (23.17) следует, что для произвольной функции  $f(\mathbf{r})$ , допускающей представление в виде степенного ряда по  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , имеет место соотношение<sup>2)</sup>

$$[f(\mathbf{r}), p_x] = f(\mathbf{r}) p_x - p_x f(\mathbf{r}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{r}). \quad (23.18)$$

Представляя  $p_x$  в виде  $-i\hbar(\partial/\partial x)$ , как это делалось в (23.11), можно убедиться в справедливости (23.18) и для функций более общего вида, необязательно представляемых в виде степенного ряда. Действуя левой частью (23.18) на произвольную функцию  $g(\mathbf{r})$ , получаем

$$[f(\mathbf{r}), p_x] g(\mathbf{r}) = -i\hbar \left[ f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{r}) \right] g(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{r}) \right],$$

<sup>1)</sup> См. книгу Ван-Флека [10], стр. 7 и 20. В настоящей книге применяется гауссова система единиц.

<sup>2)</sup> Как видно из сравнения с (23.9), это соответствует классической формуле  $\{f(\mathbf{r}), p_x\} = \partial f(\mathbf{r})/\partial x$ .

что в силу произвольности  $g(\mathbf{r})$  означает справедливость операторного тождества (23.18). Путем повторного применения (23.18) легко показать, что

$$f(\mathbf{r}) p_x^2 - p_x^2 f(\mathbf{r}) = i\hbar \left( p_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} p_x \right) = 2i\hbar \frac{\partial f}{\partial x} p_x + \hbar^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (23.19)$$

**Скорость и ускорение заряженной частицы.** Пользуясь (23.18), можно теперь записать функцию Гамильтона (23.14) в виде

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 + e\varphi = \\ = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{ie\hbar}{2mc} \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 + e\varphi. \quad (23.20)$$

Принимая во внимание (23.2) и (23.20), легко показать, что производная по времени от компоненты вектора  $\mathbf{r}$  равна

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right), \quad (23.21)$$

что соответствует классическому соотношению между скоростью и каноническим импульсом частицы при наличии электромагнитного поля.

Путем непосредственного, но несколько утомительного вычисления можно найти компоненту вектора ускорения частицы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \left[ \frac{dp_x}{dt} - \frac{e}{c} \frac{dA_x}{dt} \right] = \frac{1}{i\hbar m} [p_x, H] - \frac{e}{mc} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{e}{i\hbar mc} [A_x, H].$$

Результат имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e}{m} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \\ + \frac{e}{2m^2c} \left[ \left( p_y - \frac{e}{c} A_y \right) \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \left( p_y - \frac{e}{c} A_y \right) \right] - \\ - \frac{e}{2m^2c} \left[ \left( p_z - \frac{e}{c} A_z \right) \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \left( p_z - \frac{e}{c} A_z \right) \right]. \quad (23.22)$$

**Сила Лоренца.** Уравнение (23.22) вместе с аналогичными уравнениями для  $y$ - и  $z$ -компонент можно записать в виде одного векторного уравнения для „силы“:

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right) + \\ + \frac{1}{2} \frac{e}{c} \left[ \frac{1}{m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \times (\operatorname{rot} \mathbf{A}) - (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \times \frac{1}{m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] = \\ = e\mathbf{E} + \frac{1}{2} \frac{e}{c} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right). \quad (23.23)$$

[Здесь были использованы равенства (23.15) и (23.21)]. Уравнение (23.23) соответствует классическому выражению для силы

$$e\mathbf{E} + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}),$$

где  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  есть скорость частицы, если только пользоваться симметричным выражением, т. е. брать полусумму двух членов  $\mathbf{v} \times \mathbf{H}$  и  $-\mathbf{H} \times \mathbf{v}$ . Эти члены одинаковы в классическом случае, но различны в квантовой механике, так как скорость  $\mathbf{v}$ , определяемая формулой (23.21), не коммутирует с  $\mathbf{H}$ .

Уравнение (23.23) содержит, в частности, обобщение рассмотренной в § 7 теоремы Эренфеста. Если взять диагональный элемент (23.23), то выражение, стоящее слева, будет представлять собой произведение массы на вторую производную по времени от среднего значения радиус-вектора частицы. В то же время справа будет стоять среднее значение силы Лоренца, действующей на заряженную частицу. Таким образом, уравнение (23.23) показывает, что если волновой пакет локализован столь сильно, что можно пренебречь изменением электромагнитного поля на его протяжении, то он движется, как классическая частица. Конечно, этот результат можно получить и методом § 7, если только в соответствии с (23.1) и (23.20) записать волновое уравнение Шредингера в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{ie\hbar}{mc} \mathbf{A} \cdot \text{grad} + \frac{ie\hbar}{2mc} \text{div} \mathbf{A} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 + e\varphi \right) \psi. \quad (23.24)$$

**Интегралы движения.** Из уравнения (23.2) вытекает, что если  $F$  не зависит явно от времени (так что  $\partial F/\partial t = 0$ ) и коммутирует с  $H$ , то  $dF/dt = 0$ . В этом случае говорят, что  $F$  является *интегралом движения*. Обычно эти условия могут выполняться в любой момент времени, только если оператор  $H$  сам является постоянным. Если вместо  $F$  в (23.2) подставить  $H$ , то для постоянной функции Гамильтона должно иметь место равенство  $\partial H/\partial t = 0$ , т. е. оператор  $H$  не должен явно зависеть от времени. Таким образом, если  $H$  не зависит от  $t$ , то функция  $F$  от динамических переменных будет постоянной, если она не зависит от  $t$  и коммутирует с  $H$ .

Примером интеграла движения является любая координата (или любой импульс) системы, если только канонически сопряженный импульс (или координата) не содержится явно в  $H$ . Поскольку рассматриваемая каноническая переменная коммутирует со всеми другими динамическими переменными, кроме канонически сопряженной с ней самой, то она в этом случае коммутирует и с  $H$ . Так, например, если гамильтониан системы взаимодействующих друг с другом частиц не зависит от координат центра инерции, то полный импульс системы представляет собой интеграл движения. Это



находится в соответствии с классическим результатом, согласно которому полный импульс системы взаимодействующих частиц в отсутствие внешних сил сохраняется.

Аналогично с помощью третьей формулы (14.20) можно найти условие сохранения момента количества движения частицы. Из этой формулы следует, что оператор  $z$ -компоненты момента количества движения есть  $M_z = i\hbar(\partial/\partial\varphi)$ , где  $\varphi$  — угол поворота вокруг оси  $z$ . Поэтому имеет место операторное соотношение, аналогичное (23.11):

$$\varphi M_z - M_z \varphi = i\hbar, \quad (23.25)$$

где  $\varphi$  и  $M_z$  можно рассматривать как канонически сопряженные переменные. Следовательно,  $M_z$  является интегралом движения, если оператор  $H$  не зависит от угла  $\varphi$  [например, если потенциальная энергия  $V$  в (22.2) зависит только от расстояния  $z$  до фиксированного центра]. Поскольку выбор оси  $z$  произволен, то величины  $M_x$  и  $M_y$  также будут интегралами движения. Это согласуется с классическим результатом, согласно которому в центральном силовом поле момент количества движения частицы сохраняется.

**Оператор четности.** Четность, впервые рассматривавшаяся в § 9, определялась (см. также § 14) как свойство собственной функции оператора энергии быть четной или нечетной по отношению к изменению знака всех пространственных координат. В квантовой механике можно ввести оператор четности  $P$ , хотя он и не имеет классического аналога; он определяется как оператор отражения всех координат всех частиц относительно начала координат

$$Pf(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, t) = f(-x_1, -y_1, -z_1, -x_2, -y_2, -z_2, \dots, t). \quad (23.26)$$

Из определения (23.26) непосредственно следует, что  $P^2$  равен единичному оператору  $1$ . Поэтому если диагонализировать матрицу  $P$ , то квадраты всех диагональных элементов будут равны единице, и, следовательно, собственные значения  $P$  равны  $\pm 1$ .

Если гамильтониан  $H$  не изменяется при отражении всех координат относительно начала, то  $P$  коммутирует с  $H$  и потому является интегралом движения. Кроме того, в соответствии с § 21, матрицы  $P$  и  $H$  можно одновременно привести к диагональному виду. Поэтому собственная функция оператора энергии имеет вполне определенную четность, которая с течением времени не изменяется<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Частица может обладать также *внутренней четностью*, положительной или отрицательной в зависимости от знака, фигурирующего в уравнении  $P\psi(\mathbf{r}, t) = \pm \psi(-\mathbf{r}, t)$ . Заметим, что при этом оператор  $P$  будет изменять уже не только координаты, от которых зависит волновая функция, но и саму волновую функцию.

**Энергетическое представление.** В § 22 было показано, что систему собственных функций оператора энергии  $u_k(\mathbf{r})$ , удовлетворяющих уравнению Шредингера, можно рассматривать как унитарную матрицу, преобразующую гамильтониан от  $r$ -представления к диагональному виду:

$$H_{kl} = E_k \delta_{kl} \quad \text{или} \quad E_k \delta(k - l).$$

Хотя результаты, полученные в § 22, относились только к одному моменту времени, однако их можно сделать справедливыми и для любого момента времени, совершая преобразование с помощью зависящих от времени собственных функций  $u_k(\mathbf{r})e^{-iE_k t/\hbar}$  (если только  $H$  не зависит явно от времени). Матричное представление, в котором оператор  $H$  приведен к диагональному виду, называется **энергетическим**.

Если функция  $F$  не зависит явно от времени, то уравнение движения (23.2) принимает в этом представлении особенно простой вид:

$$\frac{dF_{kl}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} (FH - HF)_{kl} = \frac{i}{\hbar} (E_k - E_l) F_{kl}. \quad (23.27)$$

Интегрируя (23.27), получаем

$$F_{kl}(t) = F_{kl}^0 e^{i(E_k - E_l)t/\hbar}, \quad (23.28)$$

где  $F_{kl}^0$  есть значение матричного элемента при  $t=0$ . Таким образом, в энергетическом представлении недиагональные матричные элементы любой не зависящей от времени функции динамических переменных гармонически зависят от времени, причем частоты связаны с разностями энергий стационарных состояний формулой Бора (см. § 2); диагональные же матричные элементы не зависят от времени.

**Теорема вириала.** Доказательство квантовой теоремы вириала можно провести по аналогии с соответствующим доказательством в классической механике. Там исходным пунктом является усреднение по времени временной производной от  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$  (для системы, совершающей периодические движения, результат должен быть равен нулю). В квантовой механике аналогичной величиной будет производная по времени от среднего значения  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ , т. е. (в энергетическом представлении) диагональный матричный элемент коммутатора  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$  и  $H$  (также равный нулю):

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}), H] \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}), H] &= \left[ (xp_x + yp_y + zp_z), \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(x, y, z) \right] = \\ &= \frac{i\hbar}{m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - i\hbar \left( x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \\ &= 2i\hbar T - i\hbar (\mathbf{r} \cdot \text{grad } V), \end{aligned}$$

( $T$  — кинетическая энергия). Отсюда следует, что

$$2 \langle T \rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \text{grad } V \rangle. \quad (23.29)$$

Заметим, что совершенно безразлично, будем ли мы исходить из выражения  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$  или из  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$ , поскольку разность между этими выражениями постоянна и потому коммутирует с  $H$ .

Если функция  $V$  сферически симметрична и пропорциональна  $r^n$ , и, сверх того, средние значения существуют, то из (23.29) явствует, что  $2 \langle T \rangle = n \langle V \rangle$ . Случай  $n = -1$  находится в соответствии с результатами задачи 13 гл. IV, а случай  $n = 2$  в соответствии с результатами § 13.

**Дираковские обозначения бра и кэт**<sup>1)</sup>. Несколько отличные обозначения для состояний и матричных элементов основываются на представлении о *бра-* и *кэт-векторах*<sup>2)</sup>. Кэт-вектор аналогичен волновой функции, характеризующей состояние системы. Группа таких векторов обозначается символом  $|\rangle$ , а один кэт, соответствующий  $m$ -му состоянию системы, — символом  $|m\rangle$ . Суперпозиция двух состояний характеризуется линейной комбинацией соответствующих кэт. Бра-вектор аналогичен комплексно сопряженной волновой функции. Символ  $\langle |$  означает группу таких векторов, а символ  $\langle n|$  — один бра-вектор, соответствующий  $n$ -му состоянию системы.

Скалярное произведение бра-вектора на кэт, обозначаемое символом  $\langle n|m\rangle$ , соответствует интегралу от произведения комплексно сопряженной волновой функции одного состояния на волновую функцию другого состояния. Матричный элемент (22.5) в этих обозначениях записывается в виде  $\langle n|H|m\rangle$ .

## § 24. Момент количества движения

Интересный и практически важный пример прямого применения матричных методов для описания динамических переменных дает исследование свойств оператора момента количества движения. Мы будем рассматривать их лишь в некоторый определенный момент времени, не интересуясь изменением матриц момента количества движения со временем. Однако нужно отметить, что если оператор момента количества движения коммутирует с гамильтонианом, то он является интегралом движения, и матрицы его не изменяют своего вида с течением времени. В § 23 было показано, что это имеет место в том случае, когда гамильтониан является сферически симметричным.

<sup>1)</sup> Указанные обозначения введены Дираком в третьем переработанном издании его книги [9] (во втором издании, переведенном на русский язык, эти обозначения отсутствуют). Названия бра- и кэт-векторов происходят от английского слова „bracket” — „скобка”. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> См. книгу Дирака [9], § 5—8.

**Определение момента количества движения.** В соответствии с (14.19) момент количества движения  $\mathbf{M}$  относительно некоторой точки выражается через радиус-вектор частицы  $\mathbf{r}$  и ее импульс  $\mathbf{p}$  равенством

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (24.1)$$

Здесь оператор  $\mathbf{p}$  отнюдь не обязательно представлять в обычном дифференциальном виде; существенно лишь, чтобы для компонент  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$  имели место правила перестановки (23.16). Благодаря этому оказывается возможным найти не содержащие  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$  правила перестановки между компонентами  $\mathbf{M}$ :

$$\begin{aligned} [M_x, M_y] &= (yp_z - zp_y)(zp_x - xp_z) - (zp_x - xp_z)(yp_z - zp_y) = \\ &= yp_x(p_z z - zp_z) + xp_y(zp_z - p_z z) = i\hbar(xp_y - yp_x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$[M_x, M_y] = i\hbar M_z, \quad [M_y, M_z] = i\hbar M_x, \quad [M_z, M_x] = i\hbar M_y. \quad (24.2)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (24.2) справедливы также и для компонент оператора полного момента количества движения системы частиц, поскольку для различных частиц операторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$ , а следовательно, и операторы момента количества движения коммутируют друг с другом. Однако оказывается, что соотношениям (24.2) удовлетворяют и такие матричные представления  $\mathbf{M}$ , которые не совместимы с первоначальным определением (24.1). При возникновении такого рода противоречий иногда есть физические основания считать соотношения (24.2) более фундаментальными, чем (24.1) (см. ниже).

Заметим, что в силу первоначального определения (24.1) матрица  $\mathbf{M}$  эрмитова, так как эрмитовыми являются операторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$ . Будем считать, что это имеет место и в общем случае, так как допущение об эрмитовости компонент  $\mathbf{M}$  не противоречит правилам перестановки (24.2).

**Определение с помощью бесконечно малых вращений.** Момент количества движения можно определить также способом, допускающим обобщение на более сложные случаи (системы многих взаимодействующих друг с другом частиц, волновые поля, спин). Пусть рассматриваемая система характеризуется гамильтонианом  $H$ , не изменяющимся при вращении  $R$  системы координат. Тогда для произвольной функции  $f$  мы будем иметь  $RHf = HRf$ , т. е.  $R$  коммутирует с  $H$ . Таким образом, любое вращение  $R$  представляет собой интеграл движения, и это непосредственно следует из инвариантности  $H$  относительно вращений. С другой стороны, физически единственной динамической переменной, постоянство которой обусловлено сферической симметрией  $H$ , является момент количества движения. Поэтому можно ожидать, что существует некоторое соотношение между  $R$  и  $\mathbf{M}$ .

Произвольное вращение  $R$  можно получить, последовательно производя вращения на бесконечно малые углы вокруг каждой из трех координатных осей. В силу сказанного выше можно ожидать, что каждая компонента  $\mathbf{M}$  связана с бесконечно малым вращением вокруг соответствующей оси. Вращение на бесконечно малый угол  $\varphi$  вокруг оси  $z$  переводит произвольную функцию  $f$  в

$$\begin{aligned} \bar{R}_z(\varphi) f(x, y, z) &= f(x + \varphi y, y - \varphi x, z) = \\ &= f(x, y, z) + \varphi y \frac{\partial f}{\partial x} - \varphi x \frac{\partial f}{\partial y} = \left[ 1 + \varphi \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] f(x, y, z). \end{aligned}$$

В силу произвольности  $f$  из (24.1) получаем

$$R_z(\varphi) = 1 + \frac{\varphi}{i\hbar} M_z,$$

где угол  $\varphi$  бесконечно мал. Это соотношение носит более фундаментальный характер, чем (24.1), и его можно использовать для определения  $\mathbf{M}$  также и в том случае, когда не существует величин  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{p}$ , фигурирующих в (24.1).

**Выбор представления.** Из формул (24.2) явствует, что любые две компоненты  $\mathbf{M}$  не коммутируют друг с другом, и, следовательно, в любом представлении может быть диагональной только одна из них. Однако все три компоненты коммутируют с оператором

$$\mathbf{M}^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2;$$

так, например,

$$\begin{aligned} [M_z, \mathbf{M}^2] &= M_z M_x^2 - M_x^2 M_z + M_z M_y^2 - M_y^2 M_z = \\ &= i\hbar (M_x M_y + M_y M_x) - i\hbar (M_y M_x + M_x M_y) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому можно одновременно диагонализировать одну из компонент  $\mathbf{M}$ , например  $M_z$ , и  $\mathbf{M}^2$ ; этим мы и воспользуемся, чтобы задать представление.

Удобно пользоваться оператором  $M_z$  и неэрмитовой матрицей

$$L = M_x + iM_y, \quad (24.3)$$

из определения которой следует равенство

$$\mathbf{M}^2 = M_z^2 + \frac{1}{2}(LL^* + L^*L). \quad (24.4)$$

Пользуясь (24.2), можно найти правила перестановки для  $L$ :

$$[\mathbf{M}^2, L] = 0, \quad [M_z, L] = \hbar L, \quad [L, L^*] = 2\hbar M_z. \quad (24.5)$$

Задача состоит в нахождении такого представления, в котором матрицы  $M_z$  и  $\mathbf{M}^2$  диагональны. Для нумерации строк и столбцов у матриц в этом представлении можно воспользоваться собствен-

ными значениями данных динамических переменных; их и надлежит определить, равно как и элементы матрицы  $L$ . Далее, из уравнения (24.3) и эрмитово сопряженного с ним можно будет найти матрицы  $M_x$  и  $M_y$ :

$$M_x = \frac{1}{2}(L^* + L), \quad M_y = \frac{1}{2}i(L^* - L). \quad (24.6)$$

**Соотношения между матричными элементами.** Строки и столбцы в рассматриваемом представлении мы будем нумеровать парой индексов  $m$  и  $j$ . Собственные значения  $M_z$  будут равны  $m\hbar$ , так что  $m$  есть безразмерное вещественное число; связь собственных значений  $M^2$  с числами  $j$  будет определена ниже (24.13). Первое из соотношений (24.5) в матричной форме имеет вид

$$(\mathbf{M}^2 L)_{m'j', m''j''} - (L \mathbf{M}^2)_{m'j', m''j''} = 0.$$

Вычисляя матричное произведение и принимая во внимание, что матрица  $\mathbf{M}^2$  диагональна, получаем отсюда

$$[(\mathbf{M}^2)_{j'} - (\mathbf{M}^2)_{j''}] L_{m'j', m''j''} = 0, \quad (24.7)$$

где  $(\mathbf{M}^2)_{j'}$  — собственное значение матрицы  $\mathbf{M}^2$ , соответствующее числу  $j'$ . Из (24.7) следует, что у матрицы  $L$  отличны от нуля лишь те элементы, для которых  $j' = j''$ . Поэтому при определении  $L$  индекс  $j$  можно временно не принимать во внимание; следует лишь помнить, что получаемые матрицы будут принадлежать какому-то определенному значению  $j$ . Они могут быть частями большей матрицы, содержащей элементы с различными  $j$ ; в ней, однако, не будет отличных от нуля недиагональных элементов, связывающих части матрицы с разными значениями  $j$ .

Таким образом, для обозначения строк и столбцов матрицы  $L$  на первых порах достаточно одного индекса  $m$ . Тогда второе из равенств (24.5) дает

$$(M_z L)_{m', m''} - (L M_z)_{m', m''} = \hbar L_{m', m''}$$

или, поскольку матрица  $M_z$  диагональна и ее собственные значения равны  $m\hbar$ ,

$$(m' - m'') \hbar L_{m', m''} = \hbar L_{m', m''}. \quad (24.8)$$

Поэтому не равны нулю только те матричные элементы  $L$ , для которых  $m' = m'' + 1$ . Обозначим их следующим образом:

$$L_{m+1, m} = \lambda_m \hbar, \quad (24.9)$$

где  $\lambda_m$  — некоторое безразмерное число (может быть комплексное).

Возьмем теперь  $m$ -й диагональный элемент от третьего из соотношений (24.5)

$$\sum_{m'} (L_{m, m'} L_{m', m}^* - L_{m, m'}^* L_{m', m}) = 2\hbar^2 m.$$

Легко видеть, что каждая сумма здесь содержит только один

отличный от нуля член, так что в силу (24.9) отсюда следует:

$$|\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 = 2m. \quad (24.10)$$

**Собственные значения  $M_z$ .** Равенство (24.10) представляет собой линейное разностное уравнение первого порядка относительно  $|\lambda_m|^2$ , и его общее решение содержит одну произвольную постоянную:

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1). \quad (24.11)$$

Но, с другой стороны, величина  $|\lambda_m|^2$  по определению положительна или равна нулю, тогда как правая часть (24.11) при достаточно больших положительных и отрицательных  $m$ , очевидно, отрицательна. Однако это не будет приводить к трудностям, если среди возможных значений  $m$  есть два такие  $m_1$  и  $m_2$ , для которых  $\lambda_m = 0$  и которые отличаются друг от друга на целое число. Тогда ряд последовательных чисел  $m$ , отличающихся друг от друга на единицу, может обрываться на обоих концах без того, чтобы величина  $|\lambda_m|^2$  становилась отрицательной. На верхнем пределе ( $m = m_1$ ) уравнение (24.8) будет удовлетворяться, если  $L_{m_1+1, m_1} = 0$  (а не за счет наличия собственных значений  $M_z$ , больших  $m_1$ ). Равным образом выполнение равенства (24.8) на нижнем пределе ( $m = m_2$ ) будет обеспечено условием  $L_{m_2+1, m_2} = 0$  (а не наличием собственных значений  $M_z$ , меньших  $m_2+1$ ). Очевидно, в интервале значений  $m$  от  $m_2+1$  до  $m_1$  включительно величина  $|\lambda_m|^2$  будет неотрицательна.

Таким образом, мы получаем конечную последовательность собственных значений оператора  $M_z$ , отличающихся друг от друга на единицу и лежащих в интервале от  $m_2+1$  до  $m_1$ ; при этом числа  $m_1$  и  $m_2$  представляют собой соответственно больший и меньший корни квадратного уравнения  $C - m(m+1) = 0$ , т. е.

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+4C)^{1/2}, \quad m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+4C)^{1/2}.$$

Обозначим теперь  $m_1$  через  $j$ . Тогда  $C = j(j+1)$  и собственные значения  $M_z$  изменяются в пределах от  $-j$  до  $j$ , отличаясь друг от друга на единицу. Это означает, что  $2j$  есть целое положительное число или нуль, т. е.  $j$  может принимать только значения  $0, 1/2, 1, 3/2, \dots$

**Собственные значения  $M^2$ . Матрица  $L$ .** Теперь в новых обозначениях равенство (24.11) принимает вид

$$|\lambda_m|^2 = j(j+1) - m(m+1) = (j-m)(j+m+1). \quad (24.12)$$

Вычисляя диагональный элемент матрицы (24.4), находим собственные значения  $M^2$ :

$$(M^2)_{m_j, m_j} = \left\{ m^2 + \frac{1}{2}[j(j+1) - (m-1)m + j(j+1) - m(m+1)] \right\} \hbar^2 = j(j+1) \hbar^2. \quad (24.13)$$

Таким образом, имеется бесконечное число представлений для матриц  $\mathbf{M}^2$ ,  $M_z$  и  $L$ , каждое из которых характеризуется целым или полуцелым значением  $j$  и содержит  $2j+1$  строк и столбцов. Как и следовало ожидать, при данном  $j$  все собственные значения  $\mathbf{M}^2$  одинаковы. Все эти представления можно объединить в одно представление бесконечного ранга, хотя часто удобнее рассматривать их отдельно.

Равенство (24.12) не определяет фазы матричных элементов  $L$ , которая остается произвольной. Это соответствует произволу в выборе фазы нормированных собственных функций оператора момента количества движения и не имеет физического значения. Поэтому мы положим все фазы равными нулю, в связи с чем для отличных от нуля матричных элементов  $L$  получим

$$L_{(m+1)j, mj} = [(j-m)(j+m+1)]^{1/2} \hbar. \quad (24.14)$$

При  $j=0$  полный момент  $\mathbf{M}^2$  и все компоненты  $\mathbf{M}$  представляются нулевыми матрицами первого ранга:  $(0)$ . Для следующих трех возможных значений  $j$  матрицы, полученные с помощью (24.6), (24.13) и (24.14), имеют вид

$$\begin{aligned} j = \frac{1}{2}, \quad M_x &= \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ M_z &= \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ j = 1, \quad M_x &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ M_z &= \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ j = \frac{3}{2}, \quad M_x &= \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \\ M_y &= \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}i & 0 & 0 \\ \sqrt{3}i & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -\sqrt{3}i \\ 0 & 0 & \sqrt{3}i & 0 \end{pmatrix}, \\ M_z &= \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^2 = \frac{15}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (24.15)$$



**Связь со сферическими функциями.** Сравнение всего изложенного с результатами § 14 указывает на тесную связь между матричными представлениями оператора момента количества движения при целом  $j = l$  и сферическими функциями  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , определяемыми уравнением (14.6). Сопоставление равенств (14.22) и (14.23) с выражениями для матриц  $M^2$  и  $M_z$  приводит к выводу, что введенные в § 14 операторы момента количества движения дают просто другое представление матриц, рассмотренных в настоящем параграфе. Равным образом это относится и к матрице  $L$ , что можно показать, вычисляя результат действия  $L$  на сферические функции. В соответствии с (14.20) и (24.3) в полярных координатах оператор  $L$  имеет вид

$$L = \hbar e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (24.16)$$

Соответственно, пользуясь рассмотренными в § 14 свойствами сферических функций, можно показать, что

$$LY_{lm}(\theta, \varphi) = \pm [(l - m)(l + m + 1)]^{1/2} \hbar Y_{l, m+1}(\theta, \varphi), \quad (24.17)$$

где знак минус берется для  $m \geq 0$ , а знак плюс — для  $m < 0$  (вычисления носят несколько различный характер для разных групп значений  $m$ ). Таким образом, если по аналогии с (22.5) ввести матрицу оператора  $L$ , то мы получим матрицу (24.14) с целыми  $j$  (с точностью, может быть, до изменения нескольких знаков, которые все равно произвольны).

Равным образом по аналогии с (22.7) и (22.8) можно показать, что функция  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  играет роль унитарной матрицы, осуществляющей преобразование от представления, в котором строки и столбцы нумеруются угловыми переменными  $\theta, \varphi$ , к другому представлению, в котором они нумеруются квантовыми числами  $l, m$ . С первым представлением мы, не оговаривая этого явно, имели дело в § 14; матрица  $L$  при этом является результатом действия оператора (24.16) на соответствующим образом нормированную  $\delta$ -функцию от углов. Во втором представлении, исследованном в настоящем параграфе, матрица  $L$  определяется (с точностью до некоторых знаков) формулой (24.14).

**Спиновый момент количества движения.** Из результатов, полученных в настоящем параграфе и в § 14, следует, что если все представления с целыми  $j$  объединить в единое представление бесконечного ранга, то компоненты  $M$  с помощью (24.1) можно выразить через матрицы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$ , подчиняющиеся правилам перестановки (23.16). Для матриц с полужелыми значениями  $j$  это уже неверно, так как, хотя они и удовлетворяют соотношениям (24.2), более жесткие условия (24.1) и (23.16) для них не выполняются.

ся. Таким образом, поскольку фактически орбитальный момент выражается через координаты и импульсы, собственные значения матрицы, соответствующих его компонентам (для частицы или системы частиц), должны быть целыми кратными  $\hbar$ .

Ничто, однако, не мешает частице иметь внутренний момент количества движения, описываемый формулами (24.2), но не допускающий представления через координаты и импульс частицы (24.1). Собственные значения компонент вектора внутреннего момента количества движения могут быть целыми или полуцелыми числами. Более того, оператор  $\mathbf{M}^2$  может иметь только одно собственное значение, соответствующее одному определенному числу  $j$ . Действительно,  $\mathbf{M}^2$ , во-первых, коммутирует со всеми тремя компонентами  $\mathbf{M}$  и, во-вторых, ничто не мешает ему коммутировать и с  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{p}$  [равенство (24.1) в этом случае не имеет места]. Иначе говоря, оператор  $\mathbf{M}^2$  может коммутировать со всеми динамическими переменными, характеризующими частицу, и, следовательно, при всех обстоятельствах может быть интегралом движения. Поэтому его можно приравнять определенному числу  $j(j+1)\hbar^2$ . Для орбитального момента количества движения это невозможно, так как в этом случае оператор  $\mathbf{M}^2$  не коммутирует с  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{p}$  и потому не всегда описывает интеграл движения.

Описанный выше внутренний момент количества движения называется спиновым. Из опыта найдено, что электроны, протоны, нейтроны и, по-видимому,  $\mu$ -мезоны имеют спиновый момент количества движения с  $j = 1/2$ ; матрицы  $\mathbf{M}$  при этом даются формулами (24.15); что касается  $\pi$ -мезонов, то их спиновый момент количества движения  $j = 0^1$ .

**Сложение моментов количества движения.** Иногда представляет интерес рассмотрение векторной суммы  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$  двух коммутирующих друг с другом моментов количества движения  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  [все компоненты  $\mathbf{M}_1$  коммутируют со всеми компонентами  $\mathbf{M}_2$ , и для каждого из операторов  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  в отдельности выполняются правила перестановки (24.2)]. Эти операторы могут относиться к независимым частицам или же могут обозначать спиновый и орбитальный моменты одной и той же частицы. Как указывалось в начале настоящего параграфа, оператор  $\mathbf{M}$  подчиняется тем же правилам перестановки (24.2), что и  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$ . Рассмотренные ранее результаты позволяют легко найти представление, в котором матрицы  $\mathbf{M}_1^2$ ,  $\mathbf{M}_2^2$ ,  $M_{1z}$  и  $M_{2z}$  диагональны. Строки и столбцы для него будут обозначаться индексами  $j_1, j_2, m_1$  и  $m_2$ ; при этом матрицы  $\mathbf{M}_1$  будут иметь вид (24.15) относительно индексов  $j_1$  и  $m_1$  и будут единичными по отношению к индексам  $j_2$  и  $m_2$ .

<sup>1)</sup> Обсуждение свойств  $\pi$ - и  $\mu$ -мезонов см. в книге Маршака [11], гл. 4, 6.

Можно найти второе представление, в котором диагональные матрицы  $M_1^2$ ,  $M_2^2$ ,  $M^2$  и  $M_z$ , а строки и столбцы нумеруются индексами  $j_1, j_2, j$  и  $m$  [причем собственными значениями  $M^2$  и  $M_z$  будут  $j(j+1)\hbar^2$  и  $m\hbar$ ]. Если числа  $j_1$  и  $j_2$  фиксированы, то ранг матриц первого представления равен

$$(2j_1 + 1)(2j_2 + 1),$$

а соответствующие собственные функции представляют собой произведения собственных функций  $M_{1z}$  и  $M_{2z}$ , подобно тому, как представление (22.6), в котором диагонален гамильтониан, характеризуется собственными функциями  $u_k$  оператора  $H$ . Тот же ранг (при данных  $j_1$  и  $j_2$ ) должны иметь и матрицы второго представления. Действительно, собственные функции операторов  $M^2$  и  $M_z$ , характеризующие это представление, являются линейными комбинациями первоначальных собственных функций. Определим теперь  $j$  и  $m$ , фигурирующие во втором представлении.

**Собственные значения  $(M_1 + M_2)^2$ .** Поскольку  $M_j = M_{1z} + M_{2z}$ , то ясно, что возможные собственные значения  $m$  равны  $m_1 + m_2$ . Поэтому наибольшим значением  $m$  будет  $j_1 + j_2$ , что возможно лишь при  $m_1 = j_1$  и  $m_2 = j_2$ . Отсюда следует, что наибольшее значение  $j$  есть  $j_1 + j_2$ , причем имеется только одно состояние с таким  $j$ . Следующее по величине значение  $m$  равно  $j_1 + j_2 - 1$ ; оно встречается дважды: при  $m_1 = j_1$  и  $m_2 = j_2 - 1$  и при  $m_1 = j_1 - 1$  и  $m_2 = j_2$  (предполагается, что ни  $j_1$ , ни  $j_2$  не равны нулю). Из функций, характеризующих эти два состояния можно составить две линейно независимые комбинации, одна из которых описывает новое состояние с  $j = j_1 + j_2$ . Действительно, именно при таком  $j$  числа  $m$  должны отличаться друг от друга на единицу и принимать значения от  $-j_1 - j_2$  до  $j_1 + j_2$ . Другая линейная комбинация не может соответствовать данному или большему значению  $j$ , так как при этом могли бы быть более высокие значения  $m$ , которые в действительности отсутствуют. Следовательно, вторая линейная комбинация описывает состояние с  $j = j_1 + j_2 - 1$ . Продолжая эти рассуждения, находим, что все отличающиеся друг от друга на единицу значения  $j$  в пределах от  $j_1 + j_2$  до  $|j_1 - j_2|$  встречаются лишь по одному разу, и для каждого  $j$  имеется  $2j + 1$  линейно независимых комбинаций первоначальных собственных функций. Поэтому ранг матриц второго представления равен

$$\sum_{j = |j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} (2j + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1),$$

как и следовало ожидать.

Полученный результат совпадает с правилом сложения моментов количества движения в старой квантовой теории: длина вектора, равного сумме двух векторов момента количества движения, может скачками изменяться на единицу, уменьшаясь при этом от суммы длин двух векторов (когда они параллельны) до разности этих длин (когда векторы антипараллельны).

С помощью матричных методов можно найти унитарную матрицу, осуществляющую преобразование от представления  $m_1, m_2$  к представлению  $j, m$  при фиксированных  $j_1$  и  $j_2$ . Поскольку явное ее выражение имеет довольно сложный вид, оно здесь не приводится<sup>1)</sup>.

### ЗАДАЧИ

1. Принимая без доказательства, что произвольную эрмитову матрицу можно привести к диагональному виду с помощью унитарного преобразования, показать, что равенство нулю коммутатора двух эрмитовых матриц составляет необходимое и достаточное условие возможности привести их к диагональному виду одним и тем же унитарным преобразованием.

2. Показать, что несингулярная матрица конечного ранга должна быть квадратной.

3. Даны две матрицы  $A$  и  $B$ , удовлетворяющие соотношениям

$$A^2 = 0, \quad AA^* + A^*A = 1, \quad B = A^*A,$$

где  $0$  — нулевая и  $1$  — единичная матрицы. Показать, что  $B^2 = B$ . Предполагая, что матрица  $B$  невырождена, найти  $A$  и  $B$  в представлении, в котором матрица  $B$  диагональна. Можно ли в каком-либо представлении привести к диагональному виду матрицу  $A$ ?

4. Даны три матрицы  $A, B$  и  $C$ , удовлетворяющие соотношениям

$$A^2 = B^2 = C^2 = 1, \quad AB + BA = BC + CB = CA + AC = 0,$$

где  $1$  — единичная и  $0$  — нулевая матрицы. Предполагая, что матрица  $A$  невырождена, найти все три матрицы в представлении, в котором она диагональна.

5. Даны три матрицы  $A, B$  и  $C$ , для которых справедливы соотношения

$$A^2 = B^2 = C^2 = 1, \quad BC - CB = iA,$$

где  $1$  — единичная матрица. Показать, что  $AB + BA = AC + CA = 0$ , где  $0$  — нулевая матрица. Считая матрицу  $A$  невырожденной, найти все три матрицы в представлении, в котором она диагональна.

6. Считая известным выражение (13.18) для матричных элементов  $x$  в представлении, характеризуемом волновыми функциями гармонического

<sup>1)</sup> См. книгу Кондона и Шортли [12], гл. 13, § 14; в гл. 3 этой книги рассматриваются также другие интересные свойства момента количества движения; см. также работу Финберга и Пэйка [13].

осциллятора, найти с помощью только матричных методов аналогичную матрицу для  $x^2$ . Результат сравнить с решением задачи 3 гл. IV.

7. Применяя только матричные методы, показать, что если для гармонического осциллятора  $x_{nm} \neq 0$ , то  $E_n - E_m = \pm \hbar (K/\mu)^{1/2}$ . (Принять во внимание, что для гармонического осциллятора  $H = p^2/2\mu + Kx^2/2$ ,  $xp - px = i\hbar$ .)

8. Применяя только матричные методы, показать, что если  $H = p^2/2\mu + V(r)$ , то

$$\sum_n (E_n - E_m) |x_{nm}|^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu},$$

где суммирование производится по всем состояниям, а  $x$  есть компонента вектора  $\mathbf{r}$  в декартовой системе координат.

9. Пусть гамильтониан одномерного движения имеет вид  $H = p^2/2\mu + V(x)$ , где функцию  $V(x)$  можно представить в виде степенного ряда по  $x$ . Применяя только матричные методы, показать, что при этом

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{\mu}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dV}{dx}.$$

Какой смысл имеет здесь оператор  $d/dt$ ?

10. Преобразовать гамильтониан гармонического осциллятора от  $x$ -представления, где он имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} Kx^2,$$

к  $p$ -представлению. Какой вид имеют в  $p$ -представлении решения, соответствующие волновым функциям (13.13) в  $x$ -представлении?

11. Пусть операторы  $A(x, p)$  и  $B(x, p)$  можно представить в виде степенных рядов по  $x$  и  $p$  и  $[x, p] = i\hbar$ . Используя только матричные методы, показать, что

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [A, B] = \{A, B\}.$$

12. Проверить равенство (24.17), действуя на сферические функции оператором  $L$  (24.16).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **33**, 879 (1925).
2. Born M., Heisenberg W., Jordan P., Zs. f. Phys., **35**, 557 (1925).
3. Schrödinger E., Ann. d. Phys., **79**, 734 (1926).
4. Eckart C., Phys. Rev., **28**, 711 (1926).
5. Neumann J., Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932.
6. Whittaker E. T., Analytical Dynamics, 3d ed., Cambridge, London, 1927. (Имеется русский перевод: Е. Уиттекер, Аналитическая динамика, М., 1937.)
7. Corben H. C., Stehle P., Classical Mechanics, New York, 1950.
8. Goldstein H., Classical Mechanics, Cambridge, 1950. (Имеется русский перевод: Р. Голдстейн, Классическая механика, М.—Л., 1957.)

9. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 3d ed., Oxford, New York, 1947. (Имеется русский перевод 2-го издания: П. Дирак, Основы квантовой механики, М.—Л., 1937.)
10. Van Vleck J. H., The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities, Oxford, New York, 1932.
11. Marshak R. E., Meson Physics, New York, 1952.
12. Condon E. U., Shortley G. H., The Theory of Atomic Spectra, New York, 1935. (Имеется русский перевод: Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, 1949.)
13. Feenberg E., Paley G. E., Notes on the Quantum Theory of Angular Momentum, Cambridge, 1953.
- 14\*. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, М.—Л., 1951.
- 15\*. Гантмахер Ф. Ф., Теория матриц, М.—Л., 1953.

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

Как в классическом, так и в квантовом случае уравнения движения можно решить точно лишь для относительно небольшого числа физически интересных систем. Поэтому приближенные методы должны играть важную роль практически во всех применениях теории. Это, однако, не только не уменьшает, но даже увеличивает значение задач, допускающих точное решение, поскольку, как указывалось в начале гл. IV и V, точные решения зачастую могут быть полезны в качестве исходного пункта для приближенных вычислений. Кроме того, они могут помочь определить пределы применимости различных приближенных методов.

В настоящей и следующей главах мы рассмотрим несколько приближенных методов и проиллюстрируем их на некоторых конкретных примерах. Удобно разделить эти методы на две группы в зависимости от того, имеем ли мы дело со стационарными состояниями, характеризруемыми собственными функциями оператора энергии, или же интересуемся задачами, в которых гамильтониан зависит от времени (гл. VIII). Задачам первого типа посвящена настоящая глава, задачам второго типа — следующая. В обоих случаях мы будем исходить из волнового уравнения Шредингера, лишь в редких случаях пользуясь матричными методами или обозначениями.

### § 25. Стационарная теория возмущений

Теория возмущений для стационарных состояний<sup>1)</sup> ставит своей задачей определить, как меняются дискретные уровни энергии и собственные функции для систем, подверженных действию малого возмущения. С самого начала допускается, что гамильтониан  $H$  в уравнении Шредингера можно записать в виде суммы двух частей. Одна из них,  $H_0$ , имеет достаточно простой вид, так что соответствующее уравнение Шредингера может быть решено, тогда как другая часть  $H'$  настолько мала, что ее можно рассматривать как *возмущение* к  $H_0$ . Для удобства сохраним наши старые обозначения,  $u_n$  и  $E_n$ , для нормированных собственных функций и собственных значений *невозмущенного* гамильтони-

<sup>1)</sup> См. работу Шредингера [1].

ана  $H_0$ , которые предполагаются известными. Возмущенные волновые функции стационарных состояний и уровни энергии будем обозначать через  $\psi$  и  $W$ . Таким образом,

$$H\psi = W\psi, \quad H = H_0 + H', \quad H_0 u_n = E_n u_n. \quad (25.1)$$

**Невырожденный случай.** Допущение о малости  $H'$  наводит на мысль разложить возмущенные собственные функции и уровни энергии в ряд по степеням  $H'$ . Удобнее всего это сделать, вводя некоторый параметр  $\lambda$  так, чтобы нулевая, первая и т. д. его степени соответствовали нулевому, первому и т. д. порядку теории возмущений. Соответственно заменим  $H'$  на  $\lambda H'$  и представим  $\psi$  и  $W$  в виде разложений по степеням  $\lambda$ . Допустим, что получающиеся таким путем ряды сходятся для значений  $\lambda$  в интервале от нуля до единицы, хотя фактически вопрос об их аналитичности исследовался лишь для нескольких простейших задач<sup>1)</sup>. Тогда приближения различных порядков определяются коэффициентами при соответствующих степенях  $\lambda$ ; в окончательных результатах параметр  $\lambda$  полагается равным единице.

Представим возмущенные волновые функции и собственные значения в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \lambda\psi_1 + \lambda^2\psi_2 + \lambda^3\psi_3 + \dots, \\ W &= W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \lambda^3 W_3 + \dots \end{aligned} \quad (25.2)$$

Подставляя эти выражения в волновое уравнение, получим

$$(H_0 + \lambda H')(\psi_0 + \lambda\psi_1 + \dots) = (W_0 + \lambda W_1 + \dots)(\psi_0 + \lambda\psi_1 + \dots). \quad (25.3)$$

Поскольку уравнение (25.3) предполагается справедливым при произвольных значениях  $\lambda$ , можно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ . Таким образом, получается система уравнений, последовательно характеризующих возмущения все более высокого порядка:

$$\begin{aligned} H_0\psi_0 &= W_0\psi_0, \\ H_0\psi_1 + H'\psi_0 &= W_0\psi_1 + W_1\psi_0, \\ H_0\psi_2 + H'\psi_1 &= W_0\psi_2 + W_1\psi_1 + W_2\psi_0 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (25.4)$$

Первое из уравнений (25.4), как и следовало ожидать, означает, что  $\psi_0$  совпадает с одной из невозмущенных собственных функций. Поэтому положим

$$\psi_0 = u_m, \quad W_0 = E_m. \quad (25.5)$$

Состояние, характеризуемое функцией  $u_m$ , предполагается невырожденным (хотя другие невозмущенные состояния могут быть и вырождены). Случай вырождения будет рассмотрен ниже.

<sup>1)</sup> Дискуссию по этому вопросу см. в работе Арлея и Борхсеннуса [2] (особенно ч. IV).



**Первый порядок теории возмущений.** В излагаемом расчете неявно предполагается, что функция  $u_m$  принадлежит дискретному спектру, хотя часть невозмущенных собственных функций  $u$  может соответствовать и непрерывным значениям энергии. В противном случае вычисление возмущенного значения энергии не представляло бы интереса. В следующем параграфе в связи с задачей о столкновениях будет рассмотрено возмущение собственных функций непрерывного спектра.

Разложим  $\psi_1$  по функциям  $u_n$ :

$$\psi_1 = \mathcal{S} a_n^{(1)} u_n, \quad (25.6)$$

где  $\mathcal{S}$  означает одновременно суммирование по дискретному спектру и интегрирование по непрерывному спектру. Подставляя (25.6) во второе из уравнений (25.4), получаем

$$\mathcal{S} a_n^{(1)} H_0 u_n + H' u_m = E_m \mathcal{S} a_n^{(1)} u_n + W_1 u_m.$$

Заменим в первом члене  $H_0 u_n$  на  $E_n u_n$ , умножим уравнение на  $\bar{u}_k$  и проинтегрируем по всему пространству, принимая во внимание ортонормированность функций  $u^1$ . При этом получим

$$a_k^{(1)} (E_m - E_k) + W_1 \delta_{km} = \int \bar{u}_k H' u_m d\tau \equiv H'_{km}. \quad (25.7)$$

Интеграл в правой части является  $(k, m)$ -м матричным элементом оператора возмущения  $H'$  в представлении, в котором невозмущенный оператор  $H_0$  диагонален [см. (22.5)].

Полагая в (25.7)  $k = m$ , находим

$$W_1 = H'_{mm}, \quad (25.8)$$

что совпадает со средним значением  $H'$  в состоянии  $m$ . При  $k \neq m$  из уравнения (25.7) следует;

$$a_k^{(1)} = \frac{H'_{km}}{E_m - E_k}, \quad k \neq m. \quad (25.9)$$

Таким образом, решение с точностью до первого порядка относительно  $H'$  найдено. Неопределенным остается лишь коэффициент  $a_m^{(1)}$ , который будет вычислен ниже из условия нормировки волновой функции  $\psi$ .

**Второй порядок теории возмущений.** Для нахождения членов второго порядка относительно  $H'$  воспользуемся третьим из уравнений (25.4). Подставляя в него выражение

$$\psi_2 = \mathcal{S} a_n^{(2)} u_n, \quad (25.10)$$

<sup>1)</sup> Если хотя бы один из индексов  $k$  и  $n$  дискретен, то интеграл  $\int \bar{u}_k u_n d\tau$  равен  $\delta_{kn}$ ; если же оба индекса принадлежат непрерывному спектру, то интеграл равен  $\delta(k - n)$ ; в обоих случаях  $\mathcal{S} n_f \int \bar{u}_k u_n d\tau = f_k$  (см. § 10).

получаем

$$\mathbf{S} a_n^{(2)} H_0 u_n + H' \mathbf{S} a_n^{(1)} u_n = E_m \mathbf{S} a_n^{(2)} u_n + W_1 \mathbf{S} a_n^{(1)} u_n + W_2 u_m.$$

Заменяя, как и прежде, в первом члене  $H_0 u_n$  на  $E_n u_n$ , умножая на  $\bar{u}_k$  и интегрируя по всему пространству, находим

$$a_k^{(2)} (E_m - E_k) = \mathbf{S} a_n^{(1)} H'_{kn} - W_1 a_k^{(1)} - W_2 \delta_{km}. \quad (25.11)$$

Если теперь положить  $k = m$ , то с учетом (25.8) будем иметь

$$W_2 = \mathbf{S}' a_n^{(1)} H'_{mn} = \mathbf{S}' \frac{H'_{mn} H'_{nm}}{E_m - E_n} = \mathbf{S}' \frac{|H'_{mn}|^2}{E_m - E_n}, \quad (25.12)$$

где штрих у  $\mathbf{S}$  означает, что при суммировании и интегрировании по  $n$  член с  $n = m$  следует опустить. Аналогично при  $k \neq m$  получим из (25.11)

$$a_k^{(2)} = \mathbf{S}' \frac{H'_{kn} H'_{nm}}{(E_m - E_k)(E_m - E_n)} - \frac{H'_{km} H'_{mm}}{(E_m - E_k)^2} + \frac{a_m^{(1)} H'_{km}}{E_m - E_k}. \quad (25.13)$$

Таким образом, мы нашли решение с точностью до членов второго порядка малости (коэффициент  $a_m^{(2)}$ , как и  $a_m^{(1)}$ , остается еще неопределенным).

**Нормировка функции  $\psi$ .** Поскольку функция  $\psi_0$  принята равной  $u_m$ , то с точностью до нулевого порядка  $\psi$  уже нормирована. Полагая теперь нормировочный интеграл  $\int |\psi|^2 d\tau$  равным единице в любом порядке теории возмущений и принимая во внимание (25.2), получаем

$$\int (\psi_0 \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_0 \psi_1) d\tau = 0 \quad \text{в первом приближении.}$$

$$\int (\psi_0 \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_0 \psi_2 + |\psi_1|^2) d\tau = 0 \quad \text{во втором приближении.}$$

Отсюда сразу следует:

$$a_m^{(1)} + \bar{a}_m^{(1)} = 0, \quad a_m^{(2)} + \bar{a}_m^{(2)} + \mathbf{S} |a_n^{(1)}|^2 = 0.$$

Эти соотношения определяют лишь вещественные части  $a_m^{(1)}$  и  $a_m^{(2)}$ , мнимые же части остаются неопределенными. Выбор мнимых частей  $a_m^{(1)}$  и  $a_m^{(2)}$  эквивалентен выбору фазы волновой функции  $\psi$  в соответствующих порядках теории возмущений; это в свою очередь влияет на фазы членов следующих порядков. Не нарушая общности, можно просто положить эти мнимые части равными нулю. Тогда

$$a_m^{(1)} = 0, \quad a_m^{(2)} = -\frac{1}{2} \mathbf{S} |a_n^{(1)}|^2.$$

Следует заметить, что возмущенные уровни энергии не зависят от выбора фаз<sup>1)</sup>.

Таким образом, энергия и волновая функция с точностью до членов второго порядка по  $H'$  определяются формулами (мы полагаем теперь  $\lambda = 1$ )

$$W = E_m + H'_{mm} + S'_n \frac{|H'_{mn}|^2}{E_m - E_n},$$

$$\psi = u_m + S'_k \frac{H'_{km} u_k}{E_m - E_k} + S'_k \left\{ \left[ S'_n \frac{H'_{kn} H'_{nm}}{(E_m - E_k)(E_m - E_n)} - \frac{H'_{km} H'_{mm}}{(E_m - E_k)^2} \right] u_k - \frac{1}{2} \frac{|H'_{km}|^2}{(E_m - E_k)^2} u_m \right\}. \quad (25.14)$$

Из формул (25.8) и (25.12) следует, что вычисление энергии  $W$  с точностью до данного порядка малости относительно  $H'$  требует знания волновой функции  $\psi$  только с точностью до ближайшего более низкого порядка.

### Применение теории возмущений к гармоническому осциллятору.

В качестве простейшего примера применения теории возмущений в невырожденном случае рассмотрим с точностью до второго порядка возмущение  $m$ -го уровня энергии линейного гармонического осциллятора (см. § 13) при добавлении потенциальной энергии  $H' = bx^2/2$ . Невозмущенный гамильтониан имеет вид  $H_0 = p^2/2\mu + Kx^2/2$  (масса обозначена буквой  $\mu$ , чтобы не смешивать ее с квантовым числом  $m$ ); невозмущенным собственным функциям  $u_m(x)$ , определяемым формулой (13.13), соответствуют собственные значения  $E_m = (m + 1/2)\hbar(K/\mu)^{1/2}$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Этот пример, очевидно, тривиален, так как возмущенные собственные функции и собственные значения получаются просто путем замены  $K$  на  $K + b$  в  $u_m(x)$  и  $E_m$ ; тем не менее он поучителен.

Нам нужно найти матричные элементы  $x^2$ , вычисленные с различными парами волновых функций гармонического осциллятора. Как и в задаче 3 гл. IV, их можно вычислить с помощью производящей функции для полиномов Эрмита (13.10), или, еще проще, путем перемножения матриц по формуле (21.3) [матричные элементы  $x_{nn}$  даются равенствами (13.18)]. Таким образом, мы получаем

$$(x^2)_{nn} = \sum_k x_{nk} x_{km} = \begin{cases} (2\alpha^2)^{-1} [(m+1)(m+2)]^{1/2}, & n = m+2, \\ (2\alpha^2)^{-1} (2m+1), & n = m, \\ (2\alpha^2)^{-1} [m(m-1)]^{1/2}, & n = m-2, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (25.15)$$

где  $\alpha = (\mu K/\hbar^2)^{1/4}$ . Подставляя эти элементы в первую из формул

<sup>1)</sup> См. также работу Эпштейна [3].

(25.14), находим следующее выражение для энергии с точностью до членов второго порядка малости:

$$W = \left(m + \frac{1}{2}\right) \hbar \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{b}{2K} - \frac{b^2}{8K^2}\right];$$

полученный результат совпадает с разложением  $(m + 1/2)\hbar[(K + b)/\mu]^{1/2}$  в ряд по степеням  $b$ , если ограничиться там только членами второго порядка.

**Вырожденный случай.** Покажем теперь, что если невозмущенное состояние  $m$  вырождено, то наше рассмотрение недостаточно. Предположим сначала, что в данной группе вырожденных состояний имеется состояние  $k$ , ортогональное к состоянию  $m$  ( $E_k = E_m$ ,  $\int \bar{u}_k u_m d\tau = 0$ ). Тогда в силу (25.7)  $H'_{km} = 0$ , и, следовательно, найденные выше формулы первого порядка применимы лишь в том случае, если матричный элемент  $H'_{km}$  действительно равен нулю. В этом случае говорят, что состояния  $k$  и  $m$  не связываются матрицей  $H'$ . Пусть теперь  $H'_{km} = 0$  и, кроме того,  $H'_{kk} = H'_{mm}$ . Тогда в силу (25.11)

$$\sum_{n \neq k, m} a_n^{(1)} H'_{kn} = \sum_{n \neq k, m} \frac{H'_{kn} H'_{nm}}{E_m - E_n} = 0.$$

В этом случае в первом приближении состояния  $k$  и  $m$  остаются вырожденными, так как возмущенные энергии обоих состояний ( $E_k + H'_{kk}$  и  $E_m + H'_{mm}$ ) оказываются одинаковыми. Соответственно полученные выше формулы второго приближения сохраняют смысл лишь в том случае, если хотя бы один из матричных элементов  $H'_{kn}$  или  $H'_{nm}$  равен нулю при всех  $n$ . (В этом случае говорят, что не существует промежуточных состояний  $n$ , связывающих  $k$  и  $m$  друг с другом.)

Резюмируя, можно сказать, что развитая выше методика оказывается непригодной уже в первом приближении, если в нулевом приближении невозмущенное состояние вырождено и матрица возмущения  $H'$  связывает вырожденные состояния. Аналогично формулы второго приближения оказываются непригодными, если в первом приближении невозмущенное состояние вырождено и матрица возмущения связывает вырожденные состояния (через одно или несколько промежуточных).

**Снятие вырождения в первом приближении.** Допустим, что в некотором приближении возмущение снимает вырождение, имевшееся у невозмущенного состояния  $m$ . Это значит, что гамильтониан  $H = H_0 + \lambda H'$  имеет по крайней мере две точные собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям при  $\lambda \neq 0$  и одинаковым — при  $\lambda = 0$ . Раньше мы предположили, что при  $\lambda \rightarrow 0$  собственные функции непрерывно и аналитически зависят

от  $\lambda$ ; таким образом, каждая из собственных функций, невырожденных при  $\lambda \neq 0$ , при  $\lambda = 0$  переходит в определенную линейную комбинацию вырожденных невозмущенных собственных функций. Если эти линейные комбинации отличаются от тех невозмущенных собственных функций, для которых производились вычисления, то разложения (25.2) при  $\lambda = 0$  не будут иметь места и развитый выше метод окажется непригодным.

Из сказанного ясно, что теорию возмущений можно будет применять и для вырожденных возмущенных состояний, если только предварительно провести точную диагонализацию части матрицы возмущения  $H'_{ni}$ , охватывающей столько состояний, сколько необходимо для снятия вырождения. Это эквивалентно нахождению таких линейных комбинаций невозмущенных собственных функций, которые при увеличении  $\lambda$  от нуля до заданного значения непрерывно переходят в точные возмущенные собственные функции. Пусть, например, в невозмущенной задаче имеется два вырожденных состояния,  $k$  и  $m$ , и  $H'_{km} = H'_{mk} \neq 0$ . В этом случае для снятия вырождения (в первом приближении) нужно диагонализировать только матрицу второго ранга

$$\begin{pmatrix} H'_{mm} & H'_{mk} \\ H'_{km} & H'_{kk} \end{pmatrix}; \quad (25.16)$$

при этом будет найдена правильная линейная комбинация функций  $u_m$  и  $u_k$ , которую можно было бы использовать для нахождения приближений более высокого порядка. Ниже будет приведен пример подобного случая.

**Снятие вырождения во втором приближении.** Может случиться, однако, что  $H'_{km} = 0$  и  $H'_{kk} = H'_{mm}$ , так что в первом приближении вырождение не снимается. В этом случае непосредственная, хотя и излишне сложная процедура решения состояла бы в диагонализации той части матрицы энергии, строки и столбцы которой нумеруются всеми индексами  $n$ , соответствующими отличным от нуля матричным элементам  $H'_{mn}$  или  $H'_{kn}$ . Строки и столбцы этой матрицы можно переставлять друг с другом так, что любые из них можно сделать соседними. Если, например, имеется два подобных индекса  $n$  и  $l$ , то для снятия вырождения во втором приближении нужно было бы диагонализировать матрицу

$$\begin{pmatrix} E_m + H'_{mm} & 0 & H'_{mn} & H'_{ml} \\ 0 & E_m + H'_{mm} & H'_{kn} & H'_{kl} \\ H'_{nm} & H'_{nk} & E_n + H'_{nn} & H'_{nl} \\ H'_{lm} & H'_{lk} & H'_{ln} & E_l + H'_{ll} \end{pmatrix}. \quad (25.17)$$

Менее непосредственный, но аналитически более простой прием состоит в разложении точных собственных функций в ряд по степе-

ням  $\lambda$ , как это делалось в соотношениях (25.2), (25.6) и (25.10)<sup>1)</sup>. Однако вследствие вырождения в член нулевого порядка теперь следует включить как  $u_m$ , так и  $u_k$ :

$$\begin{aligned} \psi_m &= a_m u_m + a_k u_k + \mathbf{S}' (\lambda a_l^{(1)} + \lambda^2 a_l^{(2)}) u_l, \\ \psi_k &= b_m u_m + b_k u_k + \mathbf{S}' (\lambda b_l^{(1)} + \lambda^2 b_l^{(2)}) u_l, \\ \psi_n &= u_n + \mathbf{S}_{l \neq n} (\lambda a_{nl}^{(1)} + \lambda^2 a_{nl}^{(2)}) u_l, \quad n \neq m, k \end{aligned}$$

(штрих у  $\mathbf{S}$  означает, что  $l \neq m, k$ ). Подставляя первое из этих выражений в волновое уравнение

$$(H_0 + \lambda H') \psi_m = W_m \psi_m,$$

где

$$W_m = E_m + \lambda W_m^{(1)} + \lambda^2 W_m^{(2)},$$

с точностью до членов второго порядка малости получаем

$$\begin{aligned} \lambda a_m H' u_m + \lambda a_k H' u_k + \mathbf{S}' (\lambda a_l^{(1)} E_l u_l + \lambda^2 a_l^{(2)} E_l u_l + \lambda^2 a_l^{(1)} H' u_l) = \\ = (\lambda W_m^{(1)} + \lambda^2 W_m^{(2)}) (a_m u_m + a_k u_k) + \\ + \mathbf{S}' (\lambda a_l^{(1)} E_m u_l + \lambda^2 a_l^{(2)} E_m u_l + \lambda^2 a_l^{(1)} W_m^{(1)} u_l). \end{aligned} \quad (25.18)$$

Умножая (25.18) слева на  $\bar{u}_m$  и интегрируя, находим (принимая во внимание, что  $H'_{mk} = 0$ )

$$\lambda a_m H'_{mm} + \mathbf{S}' \lambda^2 a_l^{(1)} H'_{ml} = \lambda W_m^{(1)} a_m + \lambda^2 W_m^{(2)} a_m. \quad (25.19)$$

Равным образом уравнение (25.18) можно умножить на  $\bar{u}_k$  и на  $\bar{u}_n (n \neq m, k)$ ; интегрируя, получим в каждом из этих случаев

$$\lambda a_k H'_{kk} + \mathbf{S}' \lambda^2 a_l^{(1)} H'_{kl} = \lambda W_m^{(1)} a_k + \lambda^2 W_m^{(2)} a_k, \quad (25.20)$$

$$\begin{aligned} \lambda a_m H'_{nm} + \lambda a_k H'_{nk} + \lambda a_n^{(1)} E_n + \lambda^2 a_n^{(2)} E_n + \mathbf{S}' \lambda^2 a_l^{(1)} H'_{nl} = \\ = \lambda a_n^{(1)} E_m + \lambda^2 a_n^{(2)} E_m + \lambda^2 a_n^{(2)} W_m^{(1)}. \end{aligned} \quad (25.21)$$

Члены первого порядка малости (25.19) и (25.20) дают результат, которого и следовало ожидать:

$$W_m^{(1)} = H'_{mm} = H'_{kk}.$$

Члены второго порядка дают

$$\mathbf{S}' a_l^{(1)} H'_{ml} = W_m^{(2)} a_m, \quad \mathbf{S}' a_l^{(1)} H'_{kl} = W_m^{(2)} a_k. \quad (25.22)$$

Из членов первого порядка в (25.21) получаем выражение для  $a_l^{(1)}$  ( $l = n \neq m, k$ ):

$$a_l^{(1)} (E_m - E_l) = a_m H'_{lm} + a_k H'_{lk}. \quad (25.23)$$

<sup>1)</sup> См. книгу Ван-Флека [4], § 4.

Подстановка (25.23) в (25.22) приводит к системе двух однородных алгебраических уравнений для  $a_m$  и  $a_k$ . Последняя имеет не равные нулю решения в том и только в том случае, когда детерминант из коэффициентов при  $a_m$  и  $a_k$  равен нулю [см. замечания к уравнению (21.19)]:

$$\begin{vmatrix} S' \frac{H'_{ml}H'_{lm}}{E_m - E_l} - W_m^{(2)} & S' \frac{H'_{ml}H'_{lk}}{E_m - E_l} \\ S' \frac{H'_{kl}H'_{lm}}{E_m - E_l} & S' \frac{H'_{kl}H'_{lk}}{E_m - E_l} - W_m^{(2)} \end{vmatrix} = 0. \quad (25.24)$$

В данном случае вековое уравнение (25.24) будет второго порядка, тогда как из (25.17) получается аналогичное уравнение четвертого порядка. Очевидно, изложенный прием всегда дает уравнение более низкого порядка, чем то, которое получается при точной диагонализации.

Начав с уравнения для функции  $\psi_k$ , а не  $\psi_m$ , мы также пришли бы к вековому уравнению (25.24). Два корня (25.24) представляют собой возмущенные энергии  $W_m^{(2)}$  и  $W_k^{(2)}$ , а две пары решений — коэффициенты  $a_m$ ,  $a_k$  и  $b_m$ ,  $b_k$ . Таким образом, во втором приближении теории возмущений вырождение снимается; кроме того, мы находим правильные линейные комбинации невозмущенных вырожденных функций  $u_m$  и  $u_k$ .

**Эффект Штарка первого порядка в атоме водорода.** В качестве примера рассмотрим с точностью до величин первого порядка малости изменение уровней энергии атома водорода во внешнем электрическом поле напряженностью  $E$  (так называемый эффект Штарка). Будем считать, что поле направлено в положительном направлении оси  $z$ . Невозмущенный оператор энергии для атома водорода, согласно (16.5) и (22.2), равен

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 - \frac{e^2}{r},$$

где  $\mu$  — приведенная масса (16.4). Легко показать, что добавочная энергия ядра и электрона во внешнем поле  $H'$  равна

$$H' = -eEz = -eEr \cos \theta, \quad (25.25)$$

где полярная ось направлена по оси  $z$ .

Из результатов § 14 следует, что в случае произвольной сферически симметричной потенциальной энергии волновые функции в сферических координатах являются четными при четном азимутальном квантовом числе  $l$  и нечетными — при нечетном  $l$ . Оператор возмущения (25.25) является нечетным, так как он меняет знак при отражении относительно начала координат. Поэтому матричные элементы  $H'$  отличны от нуля лишь для невозмущенных состояний

с противоположными четностями. В частности, все диагональные матричные элементы  $H'$ , вычисленные с невозмущенными водородными функциями (16.24), равны нулю. Это означает, что для невырожденного состояния, каковым является, например, основное состояние ( $n = 1$ ) атома водорода, эффект Штарка первого порядка отсутствует.

Первое возбужденное состояние атома водорода ( $n = 2$ ) четырехкратно вырождено: квантовые числа  $l$  и  $m$  могут принимать значения  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ . Покажем теперь в общем виде, что недиагональные матричные элементы  $H'$  отличны от нуля лишь для состояний с одинаковыми квантовыми числами  $m$ . Из соотношений (23.16) следует, что  $z$  коммутирует с  $z$ -компонентой момента количества движения  $M_z = \hbar p_y - y p_x$ , так что  $[M_z, H'] = 0$ . В представлении, в котором матрица  $M_z$  диагональна,  $k$ s-й матричный элемент этого равенства имеет вид  $(m_k - m_s)\hbar H'_{ks} = 0$ , и, следовательно,  $H'_{ks} = 0$ , если  $m_k$  не равно  $m_s$ . Таким образом, рассматривая эффект Штарка для первого возбужденного состояния атома водорода в первом приближении, необходимо учитывать только два из указанных выше четырех невозмущенных вырожденных состояний.

**Возмущенные уровни энергии.** Часть матрицы возмущения, которую мы должны диагонализировать, имеет вид (25.16), где  $H'_{m'n} = H'_{hk} = 0$  и

$$\begin{aligned} H'_{km} &= -eE \int \bar{u}_{210}(\mathbf{r}) r \cos \theta u_{200}(\mathbf{r}) d\tau = \\ &= -\frac{eE}{16a_0^3} \int_0^\infty \int_{-1}^1 r^4 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/a_0} w^2 dw dr = 3eE a_0. \end{aligned}$$

[ $w = \cos \theta$ ; использована формула (16.24)]. Преобразуем теперь эту двухрядную матрицу от представления, характеризуемого функциями  $u_{200}$  и  $u_{210}$ , к другому представлению, в котором она диагональна и имеет собственные значения  $W_1$  и  $W_2$ .

Будем пользоваться обозначениями (22.3) и (22.5). Недиagonalное представление характеризуется собственными функциями  $v_1 = u_{200}$  и  $v_2 = u_{210}$ , а диагональное — функциями  $\bar{S}_{11}v_1 + \bar{S}_{12}v_2$  и  $\bar{S}_{21}v_1 + \bar{S}_{22}v_2$ . Тогда собственные значения  $H'$  даются двумя корнями векового уравнения [см. замечания в связи с уравнением (21.19)]

$$\begin{vmatrix} H'_{11} - W_i & H'_{12} \\ H'_{12} & H'_{22} - W_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -W_i & 3eE a_0 \\ 3eE a_0 & -W_i \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Они легко находятся:  $W_1 = 3eE a_0$ ,  $W_2 = -3eE a_0$ . Матрицу пре-



образования  $S$  можно найти из матричного уравнения

$$SH' = WS, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix},$$

принимая во внимание условие унитарности  $S$ . В результате элементы матрицы  $S$  определяются с точностью до произвольного фазового множителя. Выбирая фазу равной нулю, получаем

$$S = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, из четырех вырожденных состояний, имеющих при  $n = 2$ , в первом приближении два состояния вообще не изменяются при воздействии электрического поля, а два другие описываются линейными комбинациями  $2^{-1/2}(u_{200} + u_{210})$  и  $2^{-1/2}(u_{200} - u_{210})$ ; добавочная энергия составляет соответственно  $3eEa_0$  и  $-3eEa_0$ . Это означает, что в данном невозмущенном состоянии атом водорода ведет себя как диполь с постоянным моментом  $3ea_0$ , способный ориентироваться тремя различными способами: параллельно и антипараллельно внешнему электрическому полю (по одному состоянию) и перпендикулярно полю (два состояния).

**Наличие постоянных дипольных моментов.** Как отмечалось выше, атом водорода может обладать постоянным дипольным моментом (при наличии которого изменение энергии пропорционально  $E$ ) лишь в том случае, если невозмущенное состояние вырождено. В то же время индуцированный дипольный момент (при наличии которого изменение энергии пропорционально  $E^2$ ) может возникнуть в любом состоянии (см. задачи 1 и 12). Покажем теперь, что первое из этих утверждений справедливо вообще для любой системы, гамильтониан которой инвариантен относительно отражения пространственных координат всех частиц. Из замечаний, сделанных в связи с (23.26), явствует, что невырожденные состояния такой системы характеризуются определенной четностью. Поэтому из нечетности оператора дипольного момента следует, что среднее значение этой величины равно нулю. Все виды взаимодействия между частицами, встречающиеся до сих пор в физике, описываются гамильтонианами, обладающими указанным свойством инвариантности. Поскольку основные состояния всех атомов и ядер вероятнее всего не вырождены<sup>1)</sup>, можно ожидать, что в основ-

<sup>1)</sup> Если отвлечься от вырождения, связанного с произвольной ориентацией полного момента количества движения в пространстве (такое вырождение не может привести к появлению дипольного момента, так как все соответствующие состояния имеют одинаковую четность), то вырождение всегда или связано с каким-нибудь специальным видом симметрии, присущим системе (например, с возможностью разделить переменные как в сферических,

ном состоянии атомы и ядра не будут обладать постоянными дипольными моментами. Действительно, такие моменты никогда не наблюдались экспериментально. Обобщение этих соображений приводит к предположению о том, что атомы (или ядра) могут иметь электрический заряд, электрический квадрупольный момент, магнитный дипольный момент и т. д., но не могут иметь магнитного заряда, электрического дипольного момента, магнитного квадрупольного момента и т. д. (см. также задачу 21, гл. XI).

## § 26. Борновское приближение

В предыдущем параграфе была развита теория возмущений собственных значений и собственных функций дискретного спектра. Обратимся теперь к вопросу о возмущениях в непрерывном спектре. Подобные собственные функции, как и в гл. V, будут интересовать нас в связи с теорией столкновений. Задача здесь состоит не в том, чтобы определить собственное значение оператора энергии, которое в данном случае можно задать заранее, а в том, чтобы найти возмущенные собственные функции и связать их с эффективным сечением рассеяния. Для простоты ограничимся случаями, когда всю потенциальную энергию взаимодействия между сталкивающимися частицами можно рассматривать как возмущение, и проведем вычисления с точностью только до членов первого порядка. Как мы увидим, это *борновское приближение* [6] лучше всего применимо при условии, что кинетическая энергия сталкивающихся частиц велика по сравнению с энергией взаимодействия. Поэтому данное приближение дополняет метод парциальных волн (§ 19), который наиболее полезен при малой энергии рассеиваемых частиц.

**Приближение теории возмущений.** Нужно найти решение волнового уравнения для относительного движения (18.8)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 u + V(\mathbf{r}) u = Eu, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (26.1)$$

при условии, что асимптотическое поведение  $u$  определяется форму-

так и в параболических координатах в случае атома водорода), или носит случайный характер. Первое маловероятно для систем, состоящих из многих частиц, второе — крайне невероятно по статистическим соображениям. В некоторых молекулах, однако, имеется группа почти вырожденных состояний, то они переходов между которыми матричные элементы оператора дипольного момента отличны от нуля.

Если расстояние между соответствующими уровнями мало по сравнению с тепловой энергией молекул или с энергией молекул в электрическом поле, то они приводят к возникновению постоянного дипольного момента (см. стр. 154 и § 48, 70 в книге Ван-Флека [5]).

лой (18.10):

$$u(\mathbf{r}, \theta, \varphi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikz} + r^{-1} f(\theta, \varphi) e^{ikr}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}. \quad (26.2)$$

Действуя в духе теории возмущений (§ 25), положим

$$u(\mathbf{r}) = e^{ikz} + v(\mathbf{r}), \quad (26.3)$$

где рассеянная волна  $v(\mathbf{r})$  должна быть малой добавкой к невозмущенному решению  $e^{ikz}$ . Величину  $v(\mathbf{r})$  найдем только с точностью до членов первого порядка малости относительно рассеивающего потенциала  $V(\mathbf{r})$ ; вычисление высших приближений по этому методу оказывается чрезвычайно трудным.

Подставляя (26.3) в (26.1), получаем

$$(-\nabla^2 - k^2)v = -U(\mathbf{r})e^{ikz} - U(\mathbf{r})v, \quad U(\mathbf{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}V(\mathbf{r}). \quad (26.4)$$

Предполагая, что функция  $v(\mathbf{r})$  мала по сравнению с  $e^{ikz}$  (это, грубо говоря, эквивалентно условию малости  $U(\mathbf{r})$  по сравнению с  $k^2$ ), пренебрежем вторым членом в правой части уравнения (26.4). Мы получим тогда неоднородное волновое уравнение

$$(-\nabla^2 - k^2)v(\mathbf{r}) = -U(\mathbf{r})e^{ikz} \quad (26.5)$$

с известной правой частью. Достаточным критерием применимости нашего решения будет неравенство

$$|v(\mathbf{r})| \ll |e^{ikz}| = 1 \text{ при всех } \mathbf{r}. \quad (26.6)$$

Это условие всегда достаточно, но в некоторых случаях оно накладывает более жесткие ограничения, чем фактически необходимо для того, чтобы в борновском приближении получались полезные результаты.

**Функция Грина.** Вместо того, чтобы рассматривать специальный случай (26.5), наметим метод решения более общего неоднородного дифференциального уравнения в частных производных:

$$(\Omega - \omega_0)v(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}); \quad (26.7)$$

здесь  $\Omega$  — эрмитов оператор с собственными значениями  $\omega$  и полной ортонормированной системой собственных функций  $u_\omega(\mathbf{r})$ , а  $F(\mathbf{r})$  — заданная функция  $\mathbf{r}$ . По определению, имеем

$$\Omega u_\omega(\mathbf{r}) = \omega u_\omega(\mathbf{r}),$$

$$\int \bar{u}_{\omega'}(\mathbf{r}) u_\omega(\mathbf{r}) d\tau = \delta(\omega - \omega'), \quad \int \bar{u}_\omega(\mathbf{r}) u_\omega(\mathbf{r}') d\omega = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (26.8)$$

Пусть для определенности собственные значения  $\omega$  принадлежат непрерывному спектру.

Для решения уравнения (26.7) разложим  $v(\mathbf{r})$  по функциям  $u$  :

$$v(\mathbf{r}) = \int A_{\omega} u_{\omega}(\mathbf{r}) d\omega. \quad (26.9)$$

Подстановка (26.9) в (26.7) дает

$$\int A_{\omega} (\omega - \omega_0) u_{\omega}(\mathbf{r}) d\omega = F(\mathbf{r}).$$

Умножая это на  $\bar{u}_{\omega'}(\mathbf{r})$  и интегрируя по  $\mathbf{r}$ , получаем

$$A_{\omega'} = \frac{\int \bar{u}_{\omega'}(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\omega' - \omega_0}.$$

Таким образом, решение уравнения (26.7) можно записать в виде

$$v(\mathbf{r}) = \int G_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') F(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (26.10)$$

где величина

$$G_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{u_{\omega}(\mathbf{r}) \bar{u}_{\omega}(\mathbf{r}')}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (26.11)$$

называется *функцией Грина* для оператора  $\Omega$  и числа  $\omega_0$ <sup>1)</sup>.

**Функция Грина для свободной частицы.** Если оператор  $\Omega$  представляет собой гамильтониан свободной частицы, то функцию Грина (26.11) можно вычислить без особого труда. Согласно (11.11), собственная функция оператора  $-\nabla^2$ , соответствующая собственному значению  $k'^2$  и должным образом нормированная, имеет вид

$$u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}},$$

где  $\mathbf{k}'$  — произвольный вектор с абсолютной величиной  $k'$ . Поэтому функция Грина есть

$$G_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (2\pi)^{-3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'}}{k'^2 - k^2} d\mathbf{r}'. \quad (26.12)$$

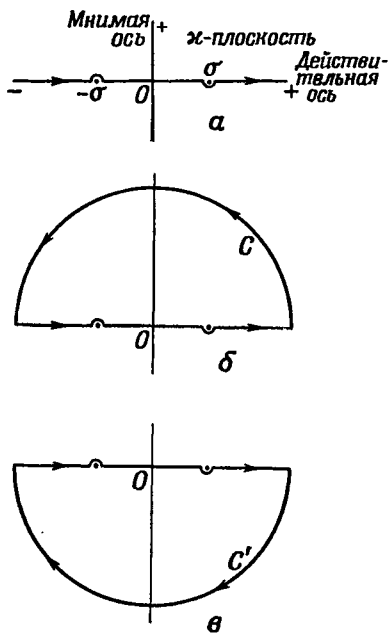
Интегрирование по всем значениям  $\mathbf{k}'$  проведем в сферических координатах, выбрав полярную ось в направлении вектора  $\mathbf{e} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= (2\pi)^{-3} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik' \mathbf{e} \cos \theta}}{k'^2 - k^2} k'^2 dk' \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= (2\pi^2 \mathbf{e})^{-1} \int_0^{\infty} \frac{\sin k' \mathbf{e}}{k'^2 - k^2} k' dk' = (4\pi^2 \mathbf{e})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa \sin \kappa}{\kappa^2 - \sigma^2} d\kappa, \end{aligned} \quad (26.13)$$

где  $\sigma \equiv k\mathbf{e} = k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . — положительное число.

<sup>1)</sup> Дальнейшее обсуждение свойств функции Грина можно найти в книге Морза и Фешбаха [7], гл. 7 (а также в книге Иваненко и Соколова [36]. — Прим. перев.).

При  $\kappa = \pm \sigma$  подинтегральное выражение в (26.13) имеет сингулярность, что является частным случаем сингулярности при  $\omega = \omega_0$  в коэффициентах разложения (26.9). Уравнение (26.7) само по себе не позволяет определить характер функции  $A_0$  при  $\omega = \omega_0$ , так как к любому решению неоднородного уравнения  $v(\mathbf{r})$  можно добавить еще решение соответствующего однородного уравнения  $u_{\omega_0}(\mathbf{r})$ . Какую именно добавку следует выбрать, можно определить только из граничных условий, накладываемых на функцию  $v(\mathbf{r})$ . Подобным же образом вклад в интеграл (26.13), обусловленный бесконечно малыми окрестностями точек  $\kappa = \pm \sigma$ , можно определить только сравнивая формулы (26.3) и (26.2). Это сравнение показывает, что нужно выбирать лишь такие решения  $v(\mathbf{r})$ , которые имеют асимптотический вид  $r^{-1} f(\theta, \varphi) e^{ikr}$ . Из соотношения (26.10) между  $v(\mathbf{r})$  и  $G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  явствует, что интеграл в (26.13) нужно вычислять так, чтобы при больших  $\sigma$  он вел себя как  $e^{i\sigma}$ .



Ф и г. 21. Контурь для вычисления интеграла в (26.13).

**Явное вычисление функции Грина.** Указанное вычисление удобно произвести, рассматривая (26.13) как контурный интеграл в комплексной плоскости  $\kappa$ . Путь интегрирования в основном проходит вдоль вещественной оси. Мы покажем, что зависимость интеграла от  $\sigma$  определяется выбором контура около обеих особых точек.

Пусть контур выбран так, как показано на фиг. 21, а. Интеграл в (26.13) можно записать в виде

$$(2i)^{-1} \int \frac{\kappa e^{i\kappa}}{(\kappa - \sigma)(\kappa + \sigma)} d\kappa - (2i)^{-1} \int \frac{\kappa e^{-i\kappa}}{(\kappa - \sigma)(\kappa + \sigma)} d\kappa. \quad (26.14)$$

Первое слагаемое здесь можно вычислить, замыкая контур бесконечной полуокружностью  $C$  в верхней полуплоскости (фиг. 21, б), поскольку на этой полуокружности экспоненциальный множитель становится исчезающе малым и соответствующая часть интеграла равна нулю. Соответственно первый интеграл равен (умноженному на  $2\pi i$ ) вычету подинтегрального выражения в единственном полюсе ( $\kappa = \sigma$ ), лежащем внутри контура, т. е.  $\pi i e^{i\sigma}$ .

Второй интеграл в (26.14) вычисляем, замыкая контур в нижней полуплоскости (фиг. 21, в). Результат равен (умноженному на  $-2\pi i$ ) вычету в единственном полюсе ( $z = -\sigma$ ), расположенном внутри контура интегрирования, т. е.  $-\pi i e^{i\sigma}$ . Таким образом, вся сумма в (26.14) равна  $\pi e^{i\sigma}$ . Легко видеть, что при любом другом выборе контура интегрирования наряду с членом, содержащим  $e^{i\sigma}$  (или вместо него), появляется и член  $e^{-i\sigma}$ . Подобный член в  $G$  соответствует наличию в  $v(\mathbf{r})$  падающей волны и должен быть отброшен как не удовлетворяющий граничным условиям на бесконечности (26.2). Подставляя найденное значение в (26.13), находим функцию Грина для свободной частицы (характеризуемой оператором  $-\nabla^2$ ):

$$G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^{-1} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (26.15)$$

**Эффективное сечение рассеяния.** Пользуясь соотношениями (26.3), (26.5), (26.10) и (26.15), получаем приближенное решение волнового уравнения (26.1):

$$u(\mathbf{r}) = e^{ikhz} - (4\pi)^{-1} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ikhz'} U(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (26.16)$$

Второй член здесь представляет собой результат суперпозиции рассеянных волн, расходящихся от всех возможных точек  $\mathbf{r}'$ , причем амплитуды этих волн пропорциональны произведению амплитуды падающей волны на рассеивающий потенциал в данной точке.

Допустим, что функция  $U(\mathbf{r}')$  достаточно быстро убывает на больших расстояниях, так что существует асимптотическая область, в которой величина  $r$  значительно превышает значения  $r'$ , дающие существенный вклад в интеграл (26.16). Тогда можно положить

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} r - \omega r', \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} + \frac{\omega r'}{r^2},$$

где  $\omega$  — косинус угла между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ . Следовательно, асимптотически формула (26.16) принимает вид

$$u(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikhz} - (4\pi r)^{-1} e^{ikr} \int U(\mathbf{r}') e^{ik(z' - \omega r')} d\tau'. \quad (26.17)$$

Сравнивая (26.17) с (26.2), находим амплитуду рассеяния

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= -(4\pi)^{-1} \int U(\mathbf{r}') e^{ik(z' - \omega r')} d\tau' = \\ &= -(4\pi)^{-1} \int U(\mathbf{r}') \exp i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}' d\tau'. \end{aligned} \quad (26.18)$$

Мы ввели здесь вектор  $\mathbf{K} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$ , где векторы  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}$  направлены соответственно вдоль падающего пучка (полярная ось) и вдоль радиуса-вектора, проведенного в точку наблюдения ( $\theta$  и  $\varphi$  — полярные углы этого вектора). Абсолютные величины векторов  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}$  одинаковы и равны  $k$ . На фиг. 22 показаны эти три вектора; абсолютная величина вектора  $\mathbf{K}$ , очевидно, равна  $2k \sin(\theta/2)$ . С физической точки зрения вектор  $\hbar \mathbf{K}$  характеризует импульс,

передаваемый падающей частицей рассеивающему центру за время столкновения. Таким образом, если разложить рассеивающий потенциал по плоским волнам (в интеграл Фурье), то, как видно из второй формулы (26.18), амплитуда рассеяния в данном направлении пропорциональна компоненте Фурье рассеивающего потенциала, соответствующей изменению импульса частицы при столкновении.

Дифференциальное эффективное сечение рассеяния определяется соотношением (18.11):

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (26.19)$$

Если функция  $U(\mathbf{r})$  сферически симметрична [ $U(\mathbf{r}) = U(r)$ ], то можно проинтегрировать (26.18) по полярным углам, определяющим положение вектора  $\mathbf{r}'$ . Выбирая полярную ось в направлении вектора  $\mathbf{K}$ , получаем

$$f(\theta) = -K^{-1} \int_0^\infty r' U(r') \sin Kr' dr'. \quad (26.20)$$

Как и следовало ожидать, амплитуда рассеяния не зависит от угла  $\varphi$ .

Интересно отметить, что, как следует из соотношений (26.19) и (26.20), скорость бомбардирующих частиц  $v$  и угол рассеяния  $\theta$  входят в эффективные сечения только в виде комбинации  $K \sim v \sin(\theta/2)$ .

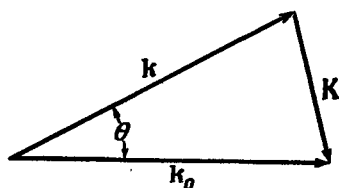
**Применение метода возмущений к парциальным волнам.** Если функция  $U(r)$  сферически симметрична, то, разделяя переменные в уравнении (26.1) в сферических координатах, как это делалось в § 19, можно приближенно решить его с помощью метода возмущений. Радиальное волновое уравнение для  $l$ -й парциальной волны имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right] R_l = 0. \quad (26.21)$$

Положим, как и в (26.3), что  $R_l(r) = j_l(kr) + \chi_l(r)$ , где функция  $j_l(kr)$ , определяемая равенством (15.5), представляет собой невозмущенное решение. Тогда из (26.21) найдем приближенное уравнение для  $\chi_l$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\chi_l}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l = U(r) j_l(kr) \quad (26.22)$$

(член  $U(r)\chi_l(r)$  отброшен).



Ф и г. 22. Соотношение между волновым вектором падающей частицы  $k_0$ , волновым вектором рассеянной частицы  $k$  и углом рассеяния  $\theta$ .

Импульс, передаваемый при столкновении, равен  $\hbar K$ , а его абсолютная величина составляет  $2\hbar k \sin \frac{1}{2} \theta$ .

Подобно (26.5), уравнение (26.22) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение с известной правой частью. По аналогии с (26.10) его решение можно записать с помощью функции Грина  $G(r, r')$ :

$$\chi_l(r) = \int_0^{\infty} G(r, r') U(r') j_l(kr') r'^2 dr'. \quad (26.23)$$

Функция  $G(r, r')$  должна быть регулярной в точке  $r = 0$  (тогда и  $\chi_l(r)$  будет регулярна в этой точке) и должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dG(r, r')}{dr} \right] + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] G(r, r') = \frac{\delta(r-r')}{r'^2}. \quad (26.24)$$

Подставив (26.23) в уравнение (26.22), можно показать, что последнее при этом действительно удовлетворяется.

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений типа (26.24) часто оказывается более удобным не пользоваться общим выражением (26.11), успешно примененным в трехмерной задаче, а использовать следующий прием. Заметим, что всюду, кроме точки  $r = r'$ , функция  $G(r, r')$  должна удовлетворять радиальному уравнению для свободной частицы [когда правая часть в (26.24) равна нулю]. Это будет иметь место, если  $G(r, r')$  при  $r < r'$  представляет собой какое-нибудь одно, а при  $r > r'$  — другое частное решение волнового уравнения при  $U = 0$ . Если, кроме того, при  $r = r'$  значения этих функций совпадают, а значения производных различны, то производная от уже имеющей разрыв производной, возникающая при двойном дифференцировании в левой части (26.24), будет содержать множитель  $\delta(r - r')$ . Так как в точке  $r = 0$  функция  $G(r, r')$  должна быть регулярной, то при  $r < r'$  решение нужно взять в виде  $j_l(kr)$ . Таким путем можно показать, что функция Грина должна иметь вид

$$G(r, r') = k j_l(kr_{<}) n_l(kr_{>}), \quad (26.25)$$

где  $r_{<}$  — наименьшая, а  $r_{>}$  — наибольшая из величин  $r$  и  $r'$ . Очевидно, эта функция регулярна при  $r = 0$  и удовлетворяет уравнению (26.24) всюду, исключая, быть может, точку  $r = r'$ . Чтобы исследовать поведение  $G$  в этой точке, подставим (26.25) в (26.24) и проинтегрируем обе части полученного равенства по бесконечно малой окрестности точки  $r'$ . Интеграл от правой части дает  $1/r'^2$ , второй член слева обращается в нуль при стремлении области интегрирования к нулю, а первый член слева дает

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{r' - \epsilon}^{r' + \epsilon} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dG(r, r')}{dr} \right] dr = \frac{1}{r'^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ r^2 \frac{dG(r, r')}{dr} \right] \Big|_{r' - \epsilon}^{r' + \epsilon} = \\ = k^2 [j_l(kr') n'_l(kr') - j'_l(kr') n_l(kr')].$$



В силу последней из формул (15.9) член в квадратных скобках справа равен  $(kr')^{-2}$ . Отсюда следует, что функция  $G(r, r')$ , определяемая равенством (26.25), действительно совпадает с искомой функцией Грина.

**Фазы.** Подставляя (26.25) в (26.23), получаем

$$\begin{aligned} \chi_l(r) &= k \int_0^{\infty} j_l(kr_<) n_l(kr_>) U(r') j_l(kr') r'^2 dr', \\ \chi_l(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} kn_l(kr) \int_0^{\infty} j_l^2(kr') U(r') r'^2 dr'. \end{aligned} \quad (26.26)$$

Фазы  $\delta_l$  определяются асимптотическим представлением  $R_l(r)$ ; в соответствии с (19.7)

$$R_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \text{const} [j_l(kr) - \text{tg } \delta_l n_l(kr)].$$

Сравнивая это с асимптотическим представлением функции  $R_l(r) \approx j_l(kr) + \chi_l(r)$ , полученным из (26.26), находим

$$\text{tg } \delta_l \approx -k \int_0^{\infty} j_l^2(kr') U(r') r'^2 dr'. \quad (26.27)^{1)}$$

Равенство (26.27) дает выражение для фаз в борновском приближении. Если все  $\delta_l$  малы, то в формуле (19.11) для  $f(\theta)$  можно приближенно положить  $e^{2i\delta_l} - 1 \approx 2i\delta_l$ , так что

$$\begin{aligned} f(\theta) &\approx k^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \delta_l P_l(\cos \theta) \approx \\ &\approx - \int_0^{\infty} r^2 U(r) \left[ \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) j_l^2(kr) P_l(\cos \theta) \right] dr. \end{aligned} \quad (26.28)$$

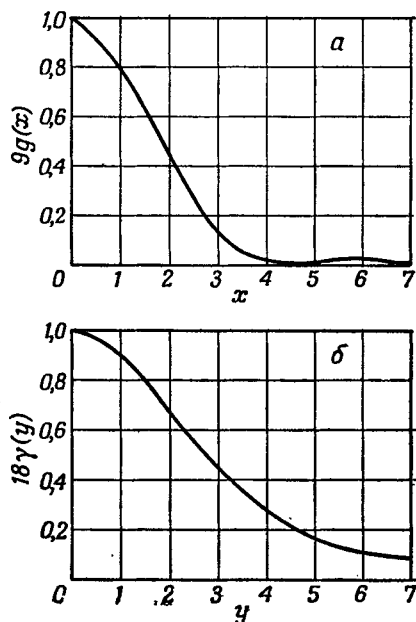
Можно показать <sup>2)</sup>, что сумма в скобках равна  $\sin Kr/Kr$ , где  $K = 2k \sin(\theta/2)$ , так что формула (26.28) совпадает с полученной ранее амплитудой рассеяния в борновском приближении (26.20), что и следовало ожидать.

Проведенное выше исследование парциальных волн с помощью теории возмущений представляет практический интерес, так как в ряде случаев было найдено, что если фазы не малы по сравнению с единицей, то подстановка (26.27) в точное выражение (19.11) для амплитуды рассеяния дает лучшее приближение, чем простая

<sup>1)</sup> У автора выражение (26.27) называется борновским приближением. Обычно борновским приближением называется выражение, в которое переходит (26.27) при малых  $j_l$  ( $j_l \ll 1$ ). — Прим. перев.

<sup>2)</sup> См. книгу Ватсона [8].

формула (26.20). Вообще говоря, гораздо проще вычислять интегралы в (26.27), чем находить точные значения фаз, решая радиальное волновое уравнение. Далее, формулой (26.20) можно воспользоваться для суммирования ряда по парциальным волнам при больших  $l$ , когда фазы  $\delta_l$  действительно малы; после этого в первые члены ряда можно внести поправки.



Фиг. 23. *a* — угловое распределение при рассеянии на прямоугольной потенциальной яме (26.29); *b* — полное эффективное сечение (26.30).

Функция  $g(x)/g(0) = 9g(x)$  изображена на фиг. 23, *a*.

При высоких энергиях ( $ka \gg 1$ ) сечение имеет резкий максимум для рассеяния вперед, так что большая часть рассеянных частиц находится внутри конуса с углом при вершине порядка  $1/ka$ .

Для вычисления полного эффективного сечения проще всего перейти от переменной  $\theta$  к  $x = Ka = 2ka \sin(\theta/2)$ , тогда  $\sin \theta d\theta$  заменится на  $x dx / (ka)^2$  и равенство (26.29) будет иметь вид

$$\sigma = \left( \frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2} \right)^2 \frac{2\pi}{(ka)^2} \int_0^{2ka} g(x) x dx = \frac{32\pi\mu^2 V_0^2 a^6}{\hbar^4} \gamma(2ka),$$

$$\gamma(y) \equiv \frac{1}{y^2} \int_0^y \frac{(\sin x - x \cos x)^2}{x^5} dx = \frac{1}{4y^2} \left( 1 - \frac{1}{y^2} + \frac{\sin 2y}{y^3} - \frac{\sin^2 y}{y^4} \right). \quad (26.30)$$

**Рассеяние прямоугольной потенциальной ямы.** В качестве первого примера применения борновского приближения (26.20) рассмотрим рассеяние прямоугольной потенциальной ямы, когда  $V(r) = -V_0$  при  $r < a$  и  $V(r) = 0$  при  $r > a$ . Подставив это в (26.20), получим

$$f(\theta) = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2 K^3} (\sin Ka - Ka \cos Ka),$$

$$K = 2k \sin \frac{\theta}{2}.$$

Соответственно дифференциальное эффективное сечение рассеяния имеет вид

$$\sigma(\theta) = \left( \frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2} \right)^2 g\left(2ka \sin \frac{\theta}{2}\right),$$

$$g(x) = \frac{(\sin x - x \cos x)^2}{x^5}. \quad (26.29)$$

Поскольку  $\gamma(0) = 1/18$ , а при больших  $y$   $\gamma(y)$  приближается к  $1/4y^2$ , то в пределе при  $ka \ll 1$  полное эффективное сечение равно  $16\pi\mu^2 V_0^2 a^6 / 9\hbar^4$ . Если же энергия рассеиваемых частиц  $E$  в системе центра инерции велика, то сечение примет вид

$$\frac{\pi\mu V_0^2 a^4}{\hbar^2 E}.$$

Функция  $\gamma(y)/\gamma(0) = 18\gamma(y)$  изображена на фиг. 23, б.

**Условия применимости борновского приближения.** Удобный критерий применимости борновского приближения в предыдущей задаче можно получить, пользуясь (26.6) и предполагая, что функция  $v(\mathbf{r})$  максимальна в центре рассеивающего потенциала. Это условие, вероятно, достаточно, но, возможно, является излишне жестким. Например, наше приближение может хорошо описывать рассеяние на малые углы (когда передается небольшой импульс), не будучи в то же время удовлетворительным для больших углов. В силу (26.16) наш критерий имеет вид

$$\begin{aligned} |v(0)| &= \frac{\mu}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty \int_{-1}^1 e^{ikr(1+w)} V(r) r dr dw \right| = \\ &= \frac{\mu}{\hbar^2 k} \left| \int_0^\infty (e^{2ikr} - 1) V(r) dr \right| = \frac{\mu V_0}{2\hbar^2 k^2} |e^{2ika} - 2ika - 1| = \\ &= \frac{\mu V_0}{2\hbar^2 k^2} (y^2 - 2y \sin y + 2 - 2 \cos y)^{1/2} \ll 1, \quad y \equiv 2ka. \quad (26.31) \end{aligned}$$

В предельном случае малых энергий ( $ka \ll 1$ ) неравенство (26.31) дает  $\mu V_0 a^2 / \hbar^2 \ll 1$ , тогда как при высоких энергиях ( $ka \gg 1$ ) мы имеем

$$\frac{\mu V_0 a}{\hbar^2 k} = \frac{V_0 a}{\hbar v} \ll 1,$$

где  $v$  — скорость падающей частицы. Таким образом, если прямоугольная яма достаточно „велика“ для того, чтобы захватить частицу (как показано в § 15, для этого должно иметь место условие  $\mu V_0 a^2 / \hbar^2 \approx 1$ ), то борновским приближением можно пользоваться лишь при высоких энергиях,  $ka \gg 1$ . Поэтому борновское приближение дополняет метод парциальных волн (см. § 19), наиболее полезный, когда  $ka$  по порядку величины меньше или равно единице.

Качественные особенности результатов, полученных для случая прямоугольной потенциальной ямы, сохраняются и для любого потенциала с конечным радиусом действия.

**Рассеяние экранированным кулоновским полем.** В качестве второго примера применения борновского приближения рассмотрим упругое рассеяние электронов нейтральным атомом, описывая взаимодействие между ними экранированным кулоновским потенциалом:  $V(r) = -(Ze^2/r)e^{-r/a}$ . При малых  $r$  это выражение ведет себя просто как кулоновский потенциал ядра с атомным номером  $Z$ ; с другой стороны,  $V(r)$  быстро убывает, если расстояние  $r$  велико по сравнению с „радиусом”  $a$  электронного облака. Статистическая теория атома Томаса—Ферми показывает (см. § 38), что для не слишком легких атомов константа  $a$  примерно равна  $\hbar^2/me^2Z^{1/3}$ , где  $m$  — масса электрона<sup>1)</sup>.

Подставляя этот потенциал в (26.20), получаем

$$f(\theta) = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 K} \int_0^\infty \sin Kr \cdot e^{-r/a} dr = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 (K^2 + a^{-2})}, \quad K = 2k \sin \frac{\theta}{2}. \quad (26.32)$$

Если импульс, передаваемый при столкновении, достаточно велик, так что в знаменателе можно пренебречь величиной  $1/a^2$  по сравнению с  $K^2$ , то выражение (26.32) приводит для эффективного сечения к формуле Резерфорда (20.11). В аналогичном классическом случае частица проходит поблизости от ядра, так что экранирующие электроны играют сравнительно малую роль. Однако в противоположность формуле Резерфорда равенство (26.32) дает конечную величину для сечения рассеяния на исчезающе малые углы. (В аналогичном классическом случае частицы проходят далеко от ядра, и, следовательно, действие его заметно экранируется атомными электронами.) Полное эффективное сечение рассеяния составляет

$$\sigma = \int_0^{2k} |f|^2 \frac{2\pi K dK}{k^2} = \frac{16\pi m^2 Z^2 e^4 a^4}{\hbar^4 (4k^2 a^2 + 1)}.$$

Если принять для  $a$  приведенное выше выражение теории Томаса—Ферми, то при больших энергиях ( $ka \gg 1$ ) эффективное сечение обращается в  $4\pi Z^{4/3}/k^2$ , что по порядку величины совпадает с результатом численного решения задачи о рассеянии для потенциала Томаса—Ферми<sup>2)</sup>.

Критерий применимости борновского приближения (26.31) принимает вид

$$\frac{2mZe^2}{\hbar^2 k} \left| \int_0^\infty \sin x e^{ix - x/ka} \frac{dx}{x} \right| \ll 1,$$

<sup>1)</sup> Обсуждение вопроса о рассеянии на атоме, описываемом по методу Томаса—Ферми, можно найти в книге Мотта и Мессис [9], гл. 9, раздел 41.

<sup>2)</sup> См. работу Буллларда и Мессис [10].

где введена новая переменная интегрирования  $x = kr$ . Отсюда при  $ka \ll 1$  следует неравенство  $2mZe^2a/\hbar^2 \ll 1$ , которое в связи с приведенным выше приближенным значением  $a$  эквивалентно условию  $Z^{2/3} \ll 1$ . Поэтому при исследовании рассеяния медленных электронов на атомах борновское приближение оказывается непригодным. С другой стороны, при  $ka \gg 1$  мы получаем, что  $(Ze^2/\hbar v)\ln ka \ll 1$ . Поскольку этот результат, как можно показать, не меняется существенно при переходе к релятивистской теории, то борновское приближение оказывается непригодным для тяжелых элементов, когда величина

$$\frac{Ze^2}{\hbar c} = \frac{Z}{137}$$

становится сравнимой с единицей.

Интересно отметить тесное соответствие между различными результатами для прямоугольной потенциальной ямы и для экранированного кулоновского поля, если выбрать  $a$  одинаковым в обоих случаях и положить  $V_0 \approx Ze^2/a$ .

## § 27. Вариационный метод

Впервые вариационный метод был применен для приближенного вычисления наименьшего уровня энергии системы; в последние годы им стали пользоваться и в теории столкновений. В первом случае, который мы и рассмотрим сначала, вариационный метод можно применять и в отсутствие близкой задачи, допускающей точное решение, т. е. тогда, когда метод возмущений оказывается непригодным. Им можно пользоваться также и в том случае, когда не удастся разделить переменные в уравнении Шредингера, вследствие чего численное интегрирование чрезвычайно сложно, а квазиклассический метод (см. § 28) оказывается неприменимым.

Применение вариационного метода к теории столкновений будет рассмотрено в последней части настоящего параграфа.

**Среднее значение энергии.** В § 10 было показано, что если разложить произвольную нормированную функцию  $\psi$  по собственным функциям оператора энергии  $u_E$ :

$$\psi = \sum_E A_E u_E, \quad \text{где} \quad H u_E = E u_E, \quad (27.1)$$

образующим полную ортонормированную систему, то среднее значение  $H$  в состоянии  $\psi$  дается формулой

$$\langle H \rangle = \int \bar{\psi} H \psi d\tau = \sum_E E |A_E|^2. \quad (27.2)$$

Интегрирование здесь производится по всей области изменения координат, характеризующих систему. Для удобства записи все

собственные значения оператора энергии в формулах (27.1) и (27.2) считаются дискретными; этого можно добиться, помещая систему в ящик (см. § 10); можно также заменить знак суммы символом  $\sum$  (см. § 22).

Заменяя в сумме справа в (27.2) каждое собственное значение  $E$  наименьшим собственным значением  $E_0$ , можно получить полезное неравенство:

$$\langle H \rangle \geq \sum_E E_0 |A_E|^2 = E_0 \sum_E |A_E|^2. \quad (27.3)$$

Поскольку, как показано в § 10, для нормированной функции  $\psi$   $\sum_E |A_E|^2 = 1$ , из (27.3) следует:

$$E_0 \leq \int \bar{\psi} H \psi \, d\tau. \quad (27.4)$$

Если функция  $\psi$  не нормирована, то неравенство (27.4), очевидно, можно переписать в виде

$$E_0 \leq \frac{\int \bar{\psi} H \psi \, d\tau}{\int |\psi|^2 \, d\tau}. \quad (27.5)$$

Вариационный метод<sup>1)</sup> заключается в вычислении интегралов в правой части (27.4) или (27.5) для некоторой *пробной функции*  $\psi$ , зависящей от нескольких параметров. Затем параметры подбираются из условия минимальности среднего значения энергии. В результате определяется верхний предел энергии основного состояния системы. Следует ожидать, что он будет близок к точному значению, если пробная функция похожа на истинную (см. задачу 9). Поэтому при выборе пробной функции важно использовать любую доступную информацию или физическую интуицию<sup>2)</sup>.

**Применение к возбужденным состояниям.** Вариационным методом можно пользоваться и для нахождения верхнего предела одного или нескольких более высоких уровней энергии, если только пробная функция ортогональна к собственным функциям всех более низких состояний. Пусть уровни энергии расположены в возрастающей последовательности:  $E_0, E_1, E_2, \dots$ . Тогда легко убедиться, что коль скоро функция  $\psi$  ортогональна к  $u_{E_i}$  при  $i = 0, 1, \dots, n$ , все соответствующие коэффициенты разложения  $A_{E_i}$  в (27.1) равны нулю. Неравенство типа (27.4) можно получить из (27.2), заменяя в сумме справа каждое собственное значение  $E$  на  $E_{n+1}$ ; при этом среднее значение энергии дает верхний предел  $E_{n+1}$ .

<sup>1)</sup> Метод был впервые применен Рэлеем в 1873 г. в связи с задачей о вычислении частот колебаний механических систем (см. [11], § 88); см. также книгу Морза и Фешбаха [7], раздел 9.4.

<sup>2)</sup> Изложение обобщенного метода, позволяющего найти как верхний, так и нижний пределы, имеется в работах Като [12] и Темпла [13].

Пробная функция вида  $\psi = u_{E_0} \int \bar{u}_{E_0} \psi d\tau$ , очевидно, ортогональна к  $u_{E_0}$ . Поэтому если собственная функция основного состояния известна либо в результате точного решения задачи, либо в достаточно хорошем приближении из расчета вариационным методом, то можно вычислить и верхний предел энергии первого возбужденного состояния. Таким же путем легко найти и пробные функции, ортогональные к любому числу известных собственных функций.

Иногда оказывается возможным разделить собственные функции оператора энергии на такие группы, что функции одной из них ортогональны ко всем функциям другой. Пусть существует эрмитов оператор  $F$ , коммутирующий с гамильтонианом:  $(FH - HF = 0)$ ; тогда по теореме § 21 матрицы  $F$  и  $H$  можно одновременно привести к диагональному виду, и собственные функции у них могут быть общими. При этом любые две собственные функции оператора  $F$ , принадлежащие различным его собственным значениям, взаимно ортогональны<sup>1)</sup>. Следовательно; пробная функция, составленная из собственных функций  $F$ , принадлежащих только одному его собственному значению, ортогональна ко всем собственным функциям, принадлежащим другим собственным значениям  $F$ . Поэтому с ее помощью можно получить верхний предел для наименьшего уровня энергии, связанного с данным собственным значением  $F$ . Эти соображения полезны в тех случаях, когда собственные функции оператора  $F$  характеризуются каким-либо простым свойством, позволяющим легко их различать. Таким свойством может быть, например, симметрия, если  $F$  есть оператор четности или момента количества движения. Тогда легко выписать пробную функцию, соответствующую данной четности или данному моменту количества движения, что позволяет найти верхний предел для минимальной энергии соответствующего состояния.

**Основное состояние атома гелия.** В качестве первого примера применим вариационный метод с простой пробной функцией для вычисления верхнего предела энергии основного состояния атома гелия. Атом гелия состоит из ядра с зарядом  $+2e$  и двух электронов; в соответствии с (16.1) гамильтониан (если пренебречь движением ядра) имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - 2e^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{e^2}{r_{12}}, \quad (27.6)$$

где  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — радиусы-векторы первого и второго электронов, введенные из ядра, а  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  — расстояние между электронами.

<sup>1)</sup> Это утверждение явно доказано для оператора энергии [см. (10.4)]; доказательство легко переносится на случай любого эрмитового оператора.

В отсутствие взаимодействия между электронами собственная функция основного состояния данной системы представляла бы собой произведение двух нормированных водородных функций  $u_{100}(\mathbf{r}_1) u_{100}(\mathbf{r}_2)$ , определяемых формулой (16.24) при  $Z = 2$ ;

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{Z^3}{\pi a_0^3} e^{-(Z/a_0)(r_1+r_2)}. \quad (27.7)$$

Пробную функцию при наличии взаимодействия возьмем также в виде (27.7), но теперь  $Z$  будем рассматривать как параметр, подлежащий варьированию (и, следовательно, уже не обязательно  $Z = 2$ ).

Из результатов задачи 13 гл. IV следует, что в основном состоянии атома водорода средние значения кинетической и потенциальной энергии равны соответственно  $e^2/2a_0$  и  $-e^2/a_0$ ; соответствующая волновая функция равна  $(\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r/a_0}$ . Среднее значение оператора кинетической энергии в состоянии (27.7) проще всего вычислить, замечая, что результат действия оператора Лапласа обратно пропорционален квадрату длины, характерной для данной волновой функции. В случае (27.7) характерная длина в  $Z$  раз меньше, чем для атома водорода; поэтому среднее значение каждого из операторов кинетической энергии в (27.6) равно  $e^2 Z^2/2a_0$ . Аналогично в связи с наличием множителя  $1/r$  среднее значение потенциальной энергии электрона в поле ядра обратно пропорционально характерной длине. Кроме того, в связи с изменением заряда ядра появляется еще дополнительный множитель 2 и в результате получается  $-2e^2 Z/a_0$ .

**Энергия взаимодействия электронов.** Среднее значение энергии взаимодействия между электронами составляет

$$\int \int \bar{\psi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{e^2}{r_{12}} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2 = \left(\frac{Z^3}{\pi a_0^3}\right)^2 e^2 \int \int \frac{1}{r_{12}} e^{-(2Z/a_0)(r_1+r_2)} d\tau_1 d\tau_2. \quad (27.8)$$

Входящий в эту формулу интеграл проще всего вычислить, рассматривая его как взаимную электростатическую энергию двух перекрывающихся сферически симметричных объемных зарядов; это позволяет воспользоваться упрощенными методами, известными из электростатики.

Более общий метод интегрирования, применимый и тогда, когда волновые функции не обладают сферической симметрией, заключается в разложении  $1/r_{12}$  по сферическим функциям

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{12}} &= \frac{1}{r_1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^l P_l(\cos \theta), & r_1 > r_2, \\ \frac{1}{r_{12}} &= \frac{1}{r_2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^l P_l(\cos \theta), & r_1 < r_2; \end{aligned} \quad (27.9)$$



здесь

$$\cos \theta = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2),$$

$\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , а  $\theta_1, \varphi_1$  и  $\theta_2, \varphi_2$  — соответственно<sup>1)</sup> полярные углы векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ .

Можно показать<sup>2)</sup>, что

$$P_l(\cos \theta) = P_l(\cos \theta_1) P_l(\cos \theta_2) + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta_1) P_l^m(\cos \theta_2) \cos m(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (27.10)$$

Если подставить (27.9) и (27.10) в (27.8) и воспользоваться ортогональностью сферических функций, то при интегрировании по полярным углам вектора  $\mathbf{r}_1$  обратятся в нуль все члены, кроме тех, для которых числа  $l$  и  $m$  равны нулю. Тогда интеграл в правой части (27.8) принимает вид

$$(4\pi)^2 \int_0^\infty \left[ \int_0^{r_1} \frac{1}{r_1} e^{-\frac{2Z}{a_0}(r_1+r_2)} r_2^2 dr_2 + \int_{r_1}^\infty \frac{1}{r_2} e^{-\frac{2Z}{a_0}(r_1+r_2)} r_2^2 dr_2 \right] r_1^2 dr_1$$

и легко вычисляется; результат равен  $5\pi^2 a_0^5 / 8Z^5$ . Таким образом, среднее значение энергии взаимодействия электронов составляет  $5e^2 Z / 8a_0$ .

**Вариация параметра  $Z$ .** Итак, среднее значение гамильтониана (27.6) в состоянии, описываемом пробной функцией (27.7), равно

$$\langle H \rangle = \frac{e^2 Z^2}{a_0} - \frac{4e^2 Z}{a_0} + \frac{5e^2 Z}{8a_0} = \frac{e^2}{a_0} \left( Z^2 - \frac{27}{8} Z \right).$$

Дифференцируя по  $Z$ , находим, что минимум  $\langle H \rangle$  достигается при  $Z = 27/16 = 1,69$ . Соответственно наиболее точное значение энергии основного состояния атома гелия, которое можно получить с данной пробной функцией, равно

$$- \left( \frac{27}{16} \right)^2 \frac{e^2}{a_0} = -2,85 \frac{e^2}{a_0}.$$

Для энергии двойной ионизации атома гелия опыт дает значение  $2,904e^2/a_0$ , так что наш результат примерно на 1,9% отличается от истинного. Наиболее тщательные вычисления энергии основного состояния атома гелия, проведенные с помощью вариационного

<sup>1)</sup> Формула (27.9) непосредственно вытекает из вида производящей функции для полиномов Лежандра (14.10). Выражение для  $\cos \theta$  легко получить из формулы для скалярного произведения векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , записанной в прямоугольных координатах.

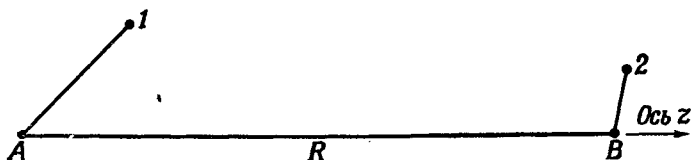
<sup>2)</sup> См. книгу Уиттекера и Ватсона [14], стр. 328.

метода, прекрасно совпадают с опытом<sup>1)</sup>, давая тем самым важное подтверждение справедливости квантовой механики.

Тот факт, что лучшие значения для энергии получаются, если в водородоподобной функции положить  $Z = 27/16 = 1,69$ , а не 2, означает, что каждый электрон экранирует ядро от другого электрона, вследствие чего эффективный заряд ядра уменьшается на  $5/16$  электронного заряда.

Если член  $e^2/r_{12}$ , описывающий взаимодействие электронов, рассматривать как возмущение, то в первом приближении возмущенная энергия, определяемая значением  $\langle H \rangle$  при  $Z = 2$ , равна  $-2,75e^2/a_0$ , что на 5,3% больше экспериментального значения. Очевидно, что вообще вычисления в первом приближении теории возмущений эквивалентны вычислениям вариационным методом, но при не наилучшем выборе пробной функции.

**Силы Ван-дер-Ваальса.** В качестве второго примера применения вариационного метода вычислим силу (далекого) ван-дер-ваальсовского взаимодействия между двумя атомами водорода, находящимися в основных состояниях. Сначала удобно рассмотреть эту задачу с помощью теории возмущений, так как в этом случае легко обнаружить, что на больших расстояниях между атомами главный член в энергии взаимодействия обратно пропорционален шестой степени расстояния. Далее, оказывается, что теория возмущений и вариационный метод дают противоположные пределы для коэффициента при этом члене.



Фиг. 24. Два атома водорода, около ядер которых A и B, удаленных на расстояние R, находятся электроны 1 и 2.

Взаимодействие между атомами дается выражением  $H'$  в формулах (27.11).

Пусть ядра A и B двух атомов водорода покоятся на расстоянии R друг от друга, и ось z параллельна прямой, их соединяющей. Обозначим через  $\mathbf{r}_1$  радиус-вектор первого электрона относительно ядра A, а через  $\mathbf{r}_2$  — радиус-вектор второго электрона относительно ядра B (см. фиг. 24). Тогда гамильтониан для двух

<sup>1)</sup> См. работу Хиллерааса [15]. В работе Зухера и Фоли [16] обсуждается ряд поправок и даются ссылки на более поздние работы. [См. также книгу Гомбаша [37] и статью Фока [38]. — Прим. перев.]

электронов можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H', \\
 H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2}, \\
 H' &= \frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r_{1a}} - \frac{e^2}{r_{1B}} - \frac{e^2}{r_{2A}}.
 \end{aligned} \tag{27.11}$$

Собственная функция невозмущенного гамильтониана  $H_0$  описывает два невзаимодействующих атома водорода в основных состояниях и имеет вид

$$u_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = u_{100}(\mathbf{r}_1) u_{100}(\mathbf{r}_2).$$

Член  $H'$ , характеризующий взаимодействие, мы рассматриваем как возмущение; это имеет смысл, если  $R \gg a_0$ .

Интересуясь лишь главным членом в энергии взаимодействия при больших  $R$ , разложим  $H'$  в ряд по степеням  $1/R$  и ограничимся первыми членами:

$$\begin{aligned}
 H' &= \frac{e^2}{R} \left\{ 1 + \left[ 1 + \frac{2(z_2 - z_1)}{R} + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{R^2} \right]^{-\frac{1}{2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \left( 1 - \frac{2z_1}{R} + \frac{r_1^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left( 1 + \frac{2z_2}{R} + \frac{r_2^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} \approx \\
 &\quad \approx \frac{e^2}{R^3} (x_1 x_2 + y_1 y_2 - 2z_1 z_2). \tag{27.12}
 \end{aligned}$$

Это выражение описывает энергию взаимодействия двух диполей, соответствующих мгновенным конфигурациям электронов в обоих атомах <sup>1)</sup>.

Непосредственно видно, что в состоянии  $u_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  среднее значение главного члена в  $H'$  равно нулю, так как  $u_0$  — четная, а  $H'$  — нечетная функция векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Можно показать также, что в состоянии  $u_0$  равны нулю и средние значения всех (опущенных в  $H'$ ) членов более высокого порядка малости. Действительно, все их можно выразить через сферические функции, порядок которых отличен от нуля. Поэтому основную роль в энергии взаимодействия играет диполь-дипольный член, взятый во втором приближении теории возмущений. В этом приближении энергия взаимодействия пропорциональна  $H'^2$  и, следовательно, главный член в ней ведет себя как  $1/R^6$ .

**Расчет по теории возмущений.** Согласно (25.12), поправка второго порядка к энергии двух атомов водорода равна

$$W(R) = S' \frac{|H'_{0n}|^2}{E_0 - E_n}; \tag{27.13}$$

<sup>1)</sup> Опущенные в разложении (27.12) члены с множителем  $1/R^4$  характеризуют диполь-квадрупольное взаимодействие, члены с множителем  $1/R^5$  — квадратично-квадрупольное взаимодействие, и т. д.

здесь индекс  $n$  означает все состояния системы из двух невозмущенных атомов водорода (включая и непрерывный спектр); основное состояние  $u_0$  не учитывается при суммировании и интегрировании, обозначаемом символом  $S'$ . Поскольку  $E_0 < E_n$ , а числитель в каждом члене (27.13) положителен, то  $W(R)$ , очевидно, меньше нуля. Отсюда следует, что взаимодействие носит характер притяжения и что на больших расстояниях  $R$  потенциал взаимодействия обратно пропорционален  $R^6$ . Можно показать, что оба эти заключения справедливы для любой пары атомов, состояния которых не вырождены и сферически симметричны.

Верхний предел положительной величины —  $W(R)$  можно получить, заменяя все значения  $E_n$  в (27.13) энергией  $E_{n^*}$  низшего возбужденного состояния, для которого матричный элемент  $H'_{0n^*}$  отличен от нуля. Тогда можно знаменатель вынести за знак суммы, а сумму вычислить, пользуясь правилом умножения матриц:

$$S' |H'_{0n}|^2 = S' H'_{0n} H'_{n0} = S H'_{0n} H'_{n0} - H'_{00}{}^2 = (H'^2)_{00} - H'_{00}{}^2.$$

Как уже было указано,  $H'_{00} = 0$  и, следовательно,

$$-W(R) \leq \frac{(H'^2)_{00}}{E_{n^*} - E_0}. \quad (27.14)$$

Как легко убедиться, в состоянии  $n^*$  оба атома возбуждены на уровень с главным квантовым числом 2; таким образом,  $E_0 = -2(e^2/2a_0)$ ,  $E_{n^*} = -2(e^2/8a_0)$  и  $E_{n^*} - E_0 = 3e^2/4a_0$ . Из (27.12)

получаем

$$H'^2 = \frac{e^4}{R^6} (x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + 4z_1^2 z_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 - \dots). \quad (27.15)$$

Поскольку перекрестные члены типа  $x_1 x_2 y_1 y_2$  нечетны относительно одной из компонент векторов  $\mathbf{r}_1$  или  $\mathbf{r}_2$ , то средние значения их равны нулю. Что же касается первых трех членов в скобках в (27.15), то среднее от каждого из них представляет собой произведение двух одинаковых множителей, равных

$$\int x^2 |u_{100}(\mathbf{r})|^2 d\tau = \frac{1}{3} \int r^2 |u_{100}(\mathbf{r})|^2 d\tau = \frac{1}{3\pi a_0^3} \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr = a_0^2;$$

следовательно,  $(H'^2)_{00} = 6e^4 a_0^4 / R^6$ . Подставляя это в (27.14), получаем

$$W(R) \geq -\frac{8e^2 a_0^5}{R^6}. \quad (27.16)$$

**Расчет вариационным методом.** Верхний предел  $W(R)$  всегда можно получить с помощью вариационного метода. Ясно, однако,

что, выбирая пробную функцию  $\psi$ , необходимо использовать некоторые дополнительные соображения. Так, если  $\psi$  не зависит от  $R$ , то среднее значение энергии будет зависеть от  $R$  так же, как  $H'$ , т. е. будет пропорционально  $1/R^3$ . Соответствующий верхний предел не представляет для нас никакой ценности, ибо фактически подлежащей определению величиной является коэффициент при  $1/R^6$ . Удобно выбрать функцию  $\psi$  так, чтобы в ней имелся член, пропорциональный  $H'$ . Тогда в формулу для среднего значения войдут члены, пропорциональные  $H'^2$  и, следовательно, должным образом зависящие от  $R$ .

Возьмем в качестве пробной функции выражение

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = u_{100}(\mathbf{r}_1) u_{100}(\mathbf{r}_2) (1 + AH'),$$

где  $A$  — параметр, подлежащий варьированию. Поскольку функция  $\psi$  не нормирована, воспользуемся соотношением (27.5), а не (27.4). При этом получим

$$E_0 + W(R) \leq \frac{\int \int u_0 (1 + AH') (H_0 + H') u_0 (1 + AH') d\tau_1 d\tau_2}{\int \int u_0^2 (1 + AH')^2 d\tau_1 d\tau_2}, \quad (27.17)$$

где  $u_0$  по-прежнему означает произведение двух волновых функций основного состояния атома водорода, а параметр  $A$  предполагается вещественным. Так как  $u_0$  есть нормированная собственная функция оператора  $H_0$ , принадлежащая собственному значению

$$E_0 = -\frac{e^2}{a_0},$$

и  $H'_{00} = (H'^3)_{00} = 0$ , то правую часть (27.17) можно записать в виде

$$\frac{E_0 + 2A(H'^2)_{00} + A^2(H'H_0H')_{00}}{1 + A^2(H'^2)_{00}}. \quad (27.18)$$

Легко видеть, что матричный элемент  $(H'H_0H')_{00}$  выражается в виде суммы квадратов величин типа  $\int u_{100}(\mathbf{r}) x H_0 x u_{100}(\mathbf{r}) d\tau$ ; непосредственным вычислением можно убедиться, что все они равны нулю.

Поскольку нас интересуют лишь члены порядка  $H'^2$ , разложим знаменатель (27.18) в ряд. Ограничиваясь первыми членами, получаем

$$[E_0 + 2A(H'^2)_{00}][1 + A^2(H'^2)_{00}]^{-1} \approx E_0 + (H'^2)_{00}(2A - E_0 A^2). \quad (27.19)$$

Принимая во внимание, что  $E_0 < 0$ , находим, что минимум выражения (27.19) достигается при  $A = 1/E_0$ . При этом равенство (27.17) принимает вид

$$E_0 + W(R) \leq E_0 + \frac{(H'^2)_{00}}{E_0} = E_0 - \frac{6e^2 a_0^5}{R^6}. \quad (27.20)$$

Таким образом, формулы (27.16) и (27.20) определяют верхний и нижний пределы энергии взаимодействия:

$$-\frac{8e^2 a_0^5}{R^6} \leq W(R) \leq -\frac{6e^2 a_0^5}{R^3}.$$

Более точные вариационные вычисления показывают, что численное значение коэффициента в  $W(R)$  очень близко к  $6,50^1$ .

**Интегральное уравнение для задачи о столкновениях.** Обратимся теперь к применению вариационного метода в теории столкновений. Будем считать рассеивающий потенциал сферически симметричным; тогда волновую функцию можно разложить по парциальным волнам так же, как и в § 19<sup>2</sup>.

Когда скоро известны фазы  $\delta_l$ , дифференциальное эффективное сечение можно вычислить по формуле (19.12). Величины  $\delta_l$  определяются равенством (19.7) через асимптотическое представление радиальной волновой функции:

$$R_l(r) = j_l(kr) + \chi_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} j_l(kr) - \operatorname{tg} \delta_l n_l(kr). \quad (27.21)$$

Подставляя это в радиальное волновое уравнение (26.21), видим, что функция  $\chi_l$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\chi_l}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l = U(r) R_l(r). \quad (27.22)$$

Последнее уравнение является точным — в противоположность уравнению (26.22), которое приближенно справедливо лишь в том случае, когда потенциал можно рассматривать как возмущение. Тем не менее его по-прежнему можно решать с помощью функции Грина. По аналогии с (26.23) выражение для  $\chi_l$  можно записать в виде

$$\chi_l(r) = \int_0^\infty G(r, r') U(r') R_l(r') r'^2 dr', \quad (27.23)$$

где  $G(r, r')$  определяется равенством (26.25).

Подстановка (27.23) в (27.21) приводит к интегральному уравнению для радиальной волновой функции:

$$R_l(r) = j_l(kr) + \int_0^\infty G(r, r') U(r') R_l(r') r'^2 dr'. \quad (27.24)$$

<sup>1</sup>) См. книгу Паулига и Вильсона [17], раздел 47а.

<sup>2</sup>) См. книгу Хюльтена [18] и цитированные там более ранние работы, а также работы Швингера [19, 20]. Настоящее изложение основано на неопубликованных лекциях Швингера (1947 г.); см. также работы Рорлиха и Эйзенштейна [21] и Блатта и Джексона [22]. Обсуждение случая, когда переменные не разделяются, равно как и дальнейшие ссылки, можно найти в работе Джержуоя и Саксона [23]. См. также книгу Морза и Фешбаха [7], раздел 9.4.

Это уравнение полностью эквивалентно дифференциальному уравнению (26.21), но им удобнее пользоваться в качестве исходного пункта для вариационных вычислений. Сравнивая асимптотическую форму (27.24) с (27.21), видим, что фаза определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \delta_l = -k \int_0^{\infty} j_l(kr') U(r') R_l(r') r'^2 dr'. \quad (27.25)$$

Это равенство справедливо лишь при такой нормировке функции  $R_l(r)$ , когда асимптотическое выражение  $R_l$  дается формулой (27.21). В этом случае оно является точным. Его можно аппроксимировать, заменяя в правой части  $R_l(r)$  на  $j_l(kr)$ ; в результате получаем борновское приближение (26.27).

**Вариационный принцип для фаз.** На первый взгляд уравнение (27.25) кажется не слишком полезным, так как оно выражает фазу через радиальную волновую функцию, которую нельзя определить, не зная  $\delta_l$ . Однако можно надеяться улучшить результаты борновского приближения, взяв в качестве  $R_l(r)$  не просто  $j_l(kr)$ , а какую либо более удачную функцию. В практически интересных случаях функция  $U(r)$  обычно имеет достаточно хорошо определенный „радиус действия”, и может показаться, что  $R_l$  нужно определить только в пределах этой области. К сожалению, соотношение (27.25) справедливо только в том случае, когда нормировка функции  $R_l$  соответствует асимптотическому представлению (27.21), так что фактически  $R_l$  нужно знать не только в тех местах, где потенциал заметно отличен от нуля, но и в асимптотической области. Далее, соотношение (27.25) не обладает свойством стационарности, характеризующим правые части (27.4) или (27.5) — последние выражения имеют минимум, когда  $\psi$  совпадает с правильной собственной функцией, в связи с чем ошибка первого порядка малости в пробной функции приводит к ошибке только второго порядка в собственном значении энергии (см. задачу 9).

Было бы желательным переписать уравнение (27.25) в такой форме, чтобы функцию  $R_l$  действительно нужно было знать лишь там, где потенциал заметно отличен от нуля (т. е. чтобы нормировка  $R_l$  была несущественна), и чтобы выражение для  $\operatorname{tg} \delta_l$  было стационарно относительно вариаций  $R_l$ . Первое из этих условий будет выполнено, если  $R_l$  в подинтегральном выражении будет всегда умножаться на  $U(r)$ . Второму условию можно удовлетворить, сделав  $\operatorname{tg} \delta_l$  множителем при выражении, однородном относительно  $R_l$ . Единственное соотношение, которым мы можем воспользоваться, — это уравнение (27.24). Умножим обе части (27.25) на интеграл, стоящий в правой части этого равенства. Тогда левая часть будет выражением первой, а правая — второй степени относительно  $R_l$ . Степень левой части можно сделать равной двум,

если заменить функцию  $j_l(kr)$  ее выражением из (27.24); в результате получается однородное уравнение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_l \left[ \int_0^{\infty} R_l^2(r) U(r) r^2 dr - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_l(r) U(r) G(r, r') U(r') R_l(r') r^2 r'^2 dr dr' \right] = \\ = -k \left[ \int_0^{\infty} j_l(kr) U(r) R_l(r) r^2 dr \right]^2. \end{aligned} \quad (27.26)$$

Полученное соотношение обладает нужными нам свойствами: чтобы пользоваться им, надо знать  $R_l$  лишь там, где потенциал имеет заметную величину, и нормировка  $R_l$  здесь несущественна. Чтобы выяснить, обладает ли полученное выражение свойством стационарности, допустим, что функция  $R_l$  слегка отклоняется от истинной и вычислим вариацию первого порядка в  $\operatorname{tg} \delta_l$  (при наличии свойства стационарности она должна обратиться в нуль).

Пусть в интеграле  $I = \int_0^{\infty} f(r) R_l(r) dr$  функция  $R_l$  меняется произвольным образом. Это изменение можно представить как результат ряда независимых изменений во всех точках  $r$ : последние же можно изобразить с помощью  $\delta$ -функции Дирака. Это эквивалентно замене  $R_l(r)$  на  $R_l(r) + \delta R_l(r_0) \delta(r - r_0)$  и переходу от  $I$  к  $I + f(r_0) \delta R_l(r_0)$ . Таким образом, опуская индекс, можно сказать, что выражение

$$\delta I = f(r) \delta R_l(r)$$

представляет собой вариацию  $I$ , возникающую при вариации  $R_l$  в точке  $r$ .

Применяя этот прием к уравнению (27.26), получаем

$$\begin{aligned} \delta(\operatorname{tg} \delta_l) \left[ \int_0^{\infty} R_l^2(r) U(r) r^2 dr - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_l(r) U(r) G(r, r') U(r') R_l(r') r^2 r'^2 dr dr' \right] + \\ + \operatorname{tg} \delta_l [2R_l(r) U(r) r^2 \delta R_l(r) - \\ - 2U(r) r^2 \delta R_l(r) \int_0^{\infty} G(r, r') U(r') R_l(r') r'^2 dr'] = \\ = -2k j_l(kr) U(r) r^2 \delta R_l(r) \int_0^{\infty} j_l(kr') U(r') R_l(r') r'^2 dr'. \end{aligned}$$



С помощью уравнения (27.24) выражение во вторых квадратных скобках в левой части можно переписать в виде

$$2j_l(kr) U(r) r^2 \delta R_l(r),$$

а правая часть в силу (27.25) равна

$$+ 2 \operatorname{tg} \delta_l j_l(kr) U(r) r^2 \delta R_l(r).$$

Два эти члена взаимно уничтожаются и, следовательно,  $\delta(\operatorname{tg} \delta_l) = 0$ , т. е. выражение (27.26) действительно обладает свойством стационарности.

Заменяя в уравнении (27.26) правильную волновую функцию  $R_l(r)$  пробной функцией  $u(r)$ , можно переписать его в виде

$$k \operatorname{ctg} \delta_l \approx$$

$$\approx \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty u(r) U(r) G(r, r') U(r') u(r') r^2 r'^2 dr dr' - \int_0^\infty u^2(r) U(r) r^2 dr}{\left[ \int_0^\infty j_l(kr) U(r) u(r) r^2 dr \right]^2}. \quad (27.27)$$

Полученное соотношение представляет собой формулировку вариационного принципа для фаз. Однако оно не позволяет оценить верхнюю (или нижнюю) границу  $\delta_l$ , так как, будучи стационарным для правильной волновой функции, выражение (27.27) в общем случае не является ни максимальным, ни минимальным.

**Случай нулевого момента количества движения.** При  $l = 0$  удобно заменить пробную функцию  $u(r)$  на  $v(r) = ru(r)$ . В этом случае функция Грина  $G(r, r') = -(krr')^{-1} \sin kr < \cos kr >$ , и соотношение (27.27) принимает вид

$$k \operatorname{ctg} \delta_0 \approx - \frac{1}{k^{-2} \left[ \int_0^\infty \sin kr U(r) v(r) dr \right]^2} \times \\ \times \left\{ k^{-1} \int_0^\infty v(r) U(r) \left[ \cos kr \int_0^r \sin kr' U(r') v(r') dr' + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin kr \int_r^\infty \cos kr' U(r') v(r') dr' \right] dr + \int_0^\infty v^2(r) U(r) dr \right\}. \quad (27.28)$$

В качестве простого примера применения этого соотношения рассмотрим его предельное выражение, когда  $k$  становится равным

нулю. При нулевой энергии вариационный принцип для фазы дает

$$(k \operatorname{ctg} \delta_0)_0 \approx - \frac{1}{\left[ \int_0^\infty r U(r) v(r) dr \right]^2} \times \\ \times \left\{ \int_0^\infty v(r) U(r) \left[ \int_0^r r' U(r') v(r') dr' + r \int_r^\infty U(r') v(r') dr' \right] dr + \right. \\ \left. + \int_0^\infty v^2(r) U(r) dr \right\}. \quad (27.29)$$

Чтобы проверить это, рассмотрим случай постоянного потенциала с абсолютной величиной  $U$ , действующего внутри сферы радиуса  $a$  (это прямоугольная потенциальная яма или прямоугольный потенциальный барьер). Выберем простую пробную функцию:  $u(r) = \operatorname{const}$  или  $v(r) = r$ . Мы не пользуемся явно условием стационарности (27.29), так как тогда нужно было бы варьировать  $v(r)$ . Это условие учитывается неявным образом в том смысле, что благодаря ему возрастает наше доверие к получаемым оценкам. Интегрирование дает

$$(k \operatorname{ctg} \delta_0)_0 = - \left( \frac{3}{Ua^3} + \frac{6}{5a} \right).$$

В борновском приближении (26.27) для той же величины получаем  $-(3/Ua^3)$ . Точный результат, найденный в § 19, равен  $-(3/Ua^3) + (6/5a)$  плюс члены более высокого порядка малости относительно  $Ua^2$ . Таким образом, как и следовало ожидать, в борновском приближении хорошие результаты получаются лишь при очень малой величине рассеивающего потенциала; вариационный метод, сверх того, дает правильное выражение для следующего члена разложения по степеням потенциала. Аналогично обстоит дело и при учете членов порядка  $k^2 a^2$  (случай малой энергии; см. задачу 1б).

### § 28. Квазиклассическое приближение (приближение Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна)

Исторически правила квантования Бора—Зоммерфельда, введенные в старой квантовой теории [см. (§ 2)], занимают промежуточное положение между классической и квантовой механикой. Интересно отметить, что существует приближенный метод решения уравнения Шредингера, выявляющий связь этого уравнения с правилами квантования. Метод основан на разложении волновой функции в ряд по степеням  $\hbar$ , и, хотя этот ряд оказывается лишь асимптотическим, тем не менее названный метод в некоторых слу-

чаях позволяет явно найти приближенное решение квантово-механической задачи. Его называют обычно квазиклассическим методом или *методом Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна* (сокращенно *ВКБ-методом*), хотя математический прием, лежащий в его основе, использовался еще Лиувиллем, Рэлеем и Джеффрисом<sup>1)</sup>. Его можно применять в тех случаях, когда в результате разделения переменных задача сводится к решению одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Предельный переход к классической механике.** Решение волнового уравнения Шредингера (6.16)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r}) \psi$$

можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{iW(\mathbf{r}, t)/\hbar},$$

где функция  $W$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2\mu} (\text{grad } W)^2 + V - \frac{i\hbar}{2\mu} \nabla^2 W = 0. \quad (28.1)$$

В предельном случае классической механики ( $\hbar \rightarrow 0$ ) равенство (28.1) совпадает с дифференциальным уравнением Гамильтона—Якоби для действия  $W^2$ :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0, \quad \mathbf{p} = \text{grad } W.$$

Поскольку импульс частицы равен градиенту действия, возможные ее траектории ортогональны к поверхностям  $W = \text{const}$ , т. е. (в классическом предельном случае) к поверхностям постоянной фазы волновой функции. Таким образом, при переходе к классической механике „лучи“, связанные с функцией  $\psi$  (траектории, ортогональные к поверхностям постоянной фазы), представляют собой возможные траектории движения частицы.

Если  $\psi$  — собственная функция оператора энергии  $u(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar}$ , то  $W$  можно переписать в виде

$$W(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}) - Et.$$

В этом случае

$$u(\mathbf{r}) = A e^{iS(\mathbf{r})/\hbar}, \quad \frac{1}{2\mu} (\text{grad } S)^2 - [E - V(\mathbf{r})] - \frac{i\hbar}{2\mu} \nabla^2 S = 0. \quad (28.2)$$

<sup>1)</sup> Иногда этот метод называют также методом фазовых интегралов. Оригинальные работы принадлежат Лиувиллю [24], Рэлею [25], Джеффрису [26], Вентцелю [27], Крамерсу [28] и Бриллюэну [29]. Дальнейшие результаты можно найти в книге Кембла [30], § 21 и в работах Лангера [31], Фарри [32], Миллера и Гуда [33]. В настоящем изложении мы следуем работам Крамерса [28] и Лангера [31].

<sup>2)</sup> См. книгу Уиттекера [34], § 142, Голдстейна [35], раздел 9.1.

Квазиклассический метод дает два первых члена (классическое выражение и еще один член) в разложении  $S$  по степеням  $\hbar$  для одномерного случая.

**Приближенные решения.** Основное уравнение, которое нам предстоит рассмотреть, записывается в одной из следующих форм:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2(x) u = 0, \quad k^2 > 0, \quad (28.3)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \kappa^2(x) u = 0, \quad \kappa^2 > 0, \quad (28.4)$$

так что  $k$  и  $\kappa$  всегда вещественны. Эти уравнения эквивалентны одномерному волновому уравнению (8.5), если положить

$$\begin{aligned} k(x) &= +\frac{1}{\hbar} \{2\mu[E - V(x)]\}^{1/2} \quad \text{при} \quad V(x) < E, \\ \kappa(x) &= +\frac{1}{\hbar} \{2\mu[V(x) - E]\}^{1/2} \quad \text{при} \quad V(x) > E. \end{aligned} \quad (28.5)$$

Уравнения (28.3) и (28.4) эквивалентны также радиальному волновому уравнению (19.2), если заменить  $x$  на  $r$ ,  $V(r)$  на

$$V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2},$$

а  $u$  на  $rR_l(r)$ .

Обратимся прежде всего к уравнению (28.3); в дальнейшем мы сумеем обобщить решение и на случай (28.4).

Положим

$$u(x) = Ae^{iS(x)/\hbar}.$$

Подставляя это в (28.3), получаем одномерную форму уравнения (28.2):

$$i\hbar S'' - S'^2 + \hbar^2 k^2 = 0 \quad (28.6)$$

(штрих означает дифференцирование по  $x$ ).

Подставим в (28.6) разложение  $S$  в ряд по степеням  $\hbar$  и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\hbar$ :

$$\begin{aligned} S &= S_0 + \hbar S_1 + \dots - S_0'^2 + 2\mu(E - V) = 0, \\ iS_0'' - 2S_0' S_1' &= 0, \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, находим

$$S_0(x) = \pm \hbar \int^x k(x') dx', \quad S_1(x) = \frac{1}{2} i \ln k(x);$$

постоянные интегрирования здесь опущены, так как их можно включить в коэффициент  $A$ . С данной точностью получаем, следо-

вательно, приближенное решение

$$u(x) = Ak^{-1/2} \exp\left(\pm i \int^x k dx\right), \quad V < E. \quad (28.7)$$

Аналогично в случае (28.4) имеем

$$u(x) = B\kappa^{-1/2} \exp\left(\pm \int^x \kappa dx\right), \quad V > E. \quad (28.8)$$

**Асимптотический характер решений.** О степени точности квазиклассического приближения можно судить, сравнивая абсолютные величины последовательных членов разложения  $S$ ,  $S_0$  и  $\hbar S_1$ . Если  $k(x)$  не равно нулю, то  $S_0$  представляет собой возрастающую функцию  $x$ . Следовательно, отношение  $\hbar S_1/S_0$  мало, если мала величина  $\hbar S'_1/S'_0$ . В связи с этим можно предположить, что выражение (28.7) будет хорошим приближением для таких значений  $x$ , когда

$$\left| \frac{\hbar S'_1}{S'_0} \right| = \left| \frac{k'}{2k^2} \right| \ll 1. \quad (28.9)$$

Поскольку длина волны де Бройля  $\lambda$  в любой точке равна  $2\pi/k$ , неравенство (28.9) можно переписать в виде

$$\left| \frac{\lambda}{4\pi} \left| \frac{dk}{dx} \right| \right| \ll k,$$

это означает, что относительное изменение волнового вектора (или длины волны) на расстоянии  $\lambda/4\pi$  должно быть мало по сравнению с единицей. Поэтому квазиклассический метод полезен лишь при достаточно медленном изменении потенциальной энергии, когда импульс частицы практически постоянен на протяжении многих длин волн.

Такой же критерий получается и в случае (28.8), если только под „длиной волны” понимать здесь расстояние, на котором абсолютная величина  $u(x)$  изменяется в  $e^{2\pi}$  раз.

Условие (28.9), очевидно, нарушается вблизи классических точек поворота, когда  $V(x) = E$ , величины  $k$  и  $\kappa$  равны нулю и „длина волны” становится бесконечной. Поэтому решения (28.7) и (28.8) справедливы лишь асимптотически, т. е. на расстоянии нескольких длин волн от ближайшей точки поворота (если только, как это обычно бывает, длина волны там изменяется медленно). Эти асимптотические решения мало полезны до тех пор, пока мы не знаем, каким образом связать осциллирующее решение (28.7) с экспоненциальным (28.8) при переходе через точку поворота. Установление такой связи необходимо, например, чтобы наложить граничные условия и получить собственные значения оператора энергии. Вывод соответствующих формул связи, к которому мы сейчас и обратимся, составляет центральный пункт квазиклассического метода расчета.

**Решение около точки поворота.** В точке поворота уравнения (28.3) и (28.4) регулярны и, следовательно, имеют решение, аналитическое в этой точке и асимптотически выражающееся формулами (28.7) и (28.8). Обычно такое решение не удастся записать в замкнутом виде. Однако можно несколько видоизменить уравнение и получить точное решение с заданными асимптотическими свойствами.

Не нарушая общности рассмотрения, можно выбрать начало оси  $x$  в одной из точек поворота; временно допустим также, что  $V(x) < E$  справа от точки поворота (т. е. при  $x > 0$ ), и положим  $\xi(x) \equiv \int_0^x k dx$ . Если теперь  $k^2(x) = Cx^n$ , где  $C$  — положительная постоянная, то, как известно, решения уравнения (28.3) имеют вид

$$u(x) = A \xi^{1/2} k^{-1/2} J_{\pm m}(\xi), \quad m = \frac{1}{n+2}, \quad (28.10)$$

где  $J$  — функция Бесселя (это можно проверить прямой подстановкой).

Поведение функции Бесселя при больших значениях аргумента таково, что асимптотически (28.10) совпадает с (28.7).

Поэтому мы постараемся сохранить этот вид решения, вводя в (28.3) дополнительный член  $\theta(x)$ :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (k^2 - \theta) u = 0. \quad (28.11)$$

Подставляя (28.10) в (28.11), видим, что это уравнение удовлетворяется, если положить

$$\theta(x) \equiv \frac{3k'^2}{4k^2} - \frac{k''}{2k} + \left(m^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{k^2}{\xi^2}. \quad (28.12)$$

Разложим  $k^2$  в ряд по степеням  $x$ :

$$k^2(x) = Cx^n (1 + ax + bx^2 + \dots);$$

тогда  $\theta(x)$  тоже можно разложить в ряд. Члены с  $1/x^2$  и  $1/x$  обращаются в нуль, и главный член при  $x \rightarrow 0$  оказывается не зависящим от  $x$ :

$$\theta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3(n+5)a^2}{2(n+4)(n+6)} - \frac{3b}{n+6}. \quad (28.13)$$

Теперь видно, что уравнение (28.11) хорошо аппроксимирует истинное уравнение (28.3). Сходство структуры слагаемых в (28.12) с левой частью критерия (28.9) указывает, что если квазиклассический метод вообще можно применять, то в асимптотической области  $\theta \ll k^2$ . В точке поворота и вблизи нее величиной  $\theta$  нельзя пренебречь по сравнению с  $k^2$ , так как  $k^2$  там обращается в нуль, а  $\theta(0) \neq 0$ . Из (28.13) явствует, однако, что  $\theta(0)$  очень мало,

будучи величиной второго порядка в отклонении  $k^2$  от простого выражения  $Sx^n$ . Поэтому можно ожидать, что для медленно меняющихся функций  $V(x)$  выражение (28.10) будет хорошо аппроксимировать точное решение уравнения (28.3).

**Линейная точка поворота.** Рассмотрим теперь физически наиболее интересный частный случай  $n = 1$ . Типичная линейная точка поворота показана на фиг. 25; уравнение (28.3) справедливо в области 1 ( $x > 0$ ), а (28.4)—в области 2 ( $x < 0$ ). Положим

$$\xi_1 \equiv \int_0^x k dx, \quad \xi_2 \equiv \int_x^0 \kappa dx;$$

тогда при удалении  $x$  от точки поворота как  $\xi_1$ , так и  $\xi_2$  возрастает; это позволяет легко обобщить результаты на тот случай, когда области 1 и 2 меняются местами. В каждой из этих областей два независимых решения запишутся в виде

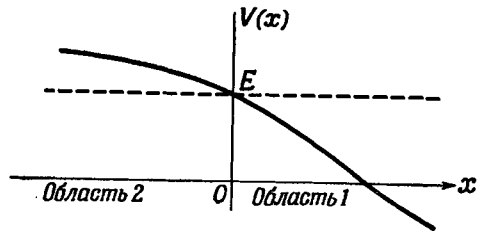
$$\begin{aligned} u_1^\pm(x) &= A_\pm \xi_1^{1/2} k^{-1/2} J_{\pm 1/3}(\xi_1), \\ u_2^\pm(x) &= B_\pm \xi_2^{1/2} \kappa^{-1/2} I_{\pm 1/3}(\xi_2). \end{aligned} \quad (28.14)$$

(Ясно, что в области 2 нужно заменить  $J$  функцией Бесселя мнимого аргумента  $I$ .)

Главные члены разложений при малых  $\xi$  и асимптотических разложений для этих функций имеют вид<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} J_{\pm 1/3}(\xi_1) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} \xi_1\right)^{\pm 1/3}}{\Gamma\left(1 \pm \frac{1}{3}\right)}, \\ J_{\pm 1/3}(\xi_1) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \pi \xi_1\right)^{-1/2} \cos\left(\xi_1 \mp \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right), \\ I_{\pm 1/3}(\xi_2) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} \xi_2\right)^{\pm 1/3}}{\Gamma\left(1 \pm \frac{1}{3}\right)}, \\ I_{\pm 1/3}(\xi_2) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} (2\pi \xi_2)^{-1/2} \left[ e^{\xi_2} + e^{-\xi_2} e^{-(1/2 \pm 1/3)\pi i} \right]. \end{aligned} \quad (28.15)$$

<sup>1)</sup> См. книгу Уиттекера и Ватсона [14], гл. 17.



Фиг. 25. Типичная линейная точка поворота, когда при  $x = 0$   $V(x) = E$ .

В области 1  $E > V(x)$ , в области 2  $E < V(x)$ .

Важно отметить, что в асимптотическом выражении для  $I$  член с  $e^{-\xi_2}$  можно оставить только в том случае, когда выбрана такая линейная комбинация решений  $I_{\pm 1/3}$ , что коэффициент при  $e^{\xi_2}$  равен нулю. Это связано с тем, что мы пренебрегли в асимптотическом разложении членами типа  $e^{\xi_2}/\xi_2$ , по абсолютной величине превышающими  $e^{-\xi_2}$ . Ввиду асимптотического характера квазиклассического приближения невозможно сказать, будет ли при наличии члена, экспоненциально возрастающего с удалением от точки поворота, иметься и экспоненциально убывающий член.

**Формулы связи в точке поворота.** При  $x = 0$  главный член в выражении  $k^2$  равен  $Cx$ , так что

$$k \approx cx^{1/2}, \quad \kappa \approx c|x|^{1/2}, \quad \xi_1 \approx \left(\frac{2c}{3}\right)x^{3/2}, \quad \xi_2 \approx \left(\frac{2c}{3}\right)|x|^{3/2},$$

где  $c = +C^{1/2}$ . Тогда в силу (28.14) и (28.15) поведение функции  $u$  вблизи точки  $x = 0$  определяется формулами:

$$u_1^+ \approx A_+ \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{3}c\right)^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} x, \quad u_1^- \approx A_- \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{3}c\right)^{-1/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)},$$

$$u_2^+ \approx B_+ \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{3}c\right)^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} |x|, \quad u_2^- \approx B_- \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{3}c\right)^{-1/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Отсюда ясно, что  $u_1^+$  непрерывно переходит в  $u_2^+$ , если  $B_+ = -A_+$ , а  $u_1^-$  непрерывно переходит в  $u_2^-$ , если  $B_- = A_-$ .

С помощью этих соотношений между коэффициентами можно найти асимптотические представления типа (28.7) и (28.8) для двух независимых решений  $u^+$  и  $u^-$  в двух областях (произвольные постоянные множители  $A_{\pm}$  опускаются):

$$\begin{aligned} u^+ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\pi k\right)^{-1/2} \cos\left(\xi_1 - \frac{5\pi}{12}\right), \\ u^+ &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -(2\pi\kappa)^{-1/2} \left(e^{\xi_2} + e^{-\xi_2 - \frac{5\pi i}{6}}\right), \\ u^- &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\pi k\right)^{-1/2} \cos\left(\xi_1 - \frac{\pi}{12}\right), \\ u^- &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} (2\pi\kappa)^{-1/2} \left(e^{\xi_2} + e^{-\xi_2 - \frac{\pi i}{6}}\right). \end{aligned} \tag{28.16}$$

Пользуясь (28.16), можно найти асимптотические представления произвольных линейных комбинаций  $u^+$  и  $u^-$ .



**Формулы связи для асимптотических решений.** Удобные формулы, связывающие асимптотические решения в двух областях, можно получить, подбирая соответствующие линейные комбинации функций  $u^+$  и  $u^-$ . Так, комбинация  $u^+$  и  $u^-$  содержит только экспоненциально убывающий член, в связи с чем получается первая формула связи

$$\frac{1}{2} \kappa^{-1/2} e^{-\xi} \rightarrow k^{-1/2} \cos \left( \xi_1 - \frac{\pi}{4} \right). \quad (28.17)$$

Стрелка в этом соотношении означает, что стоящее слева асимптотическое решение в области 2 переходит в стоящее справа асимптотическое решение в области 1, но что обратное необязательно. Это связано с тем, что небольшая ошибка в фазе косинуса приводит к появлению в области 2 доминирующего экспоненциально возрастающего члена<sup>1)</sup>.

Можно найти другую линейную комбинацию  $u^+$  и  $u^-$ , для которой получается вторая формула связи:

$$\sin \eta \kappa^{-1/2} e^{\xi} \leftarrow k^{-1/2} \cos \left( \xi_1 - \frac{\pi}{4} + \eta \right), \quad (28.18)$$

где величина  $\eta$  заметно отлична от нуля и от целого кратного  $\pi$ . Стрелка здесь поставлена потому, что при попытке обращения связи отброшенный экспоненциально убывающий член в области 2 неопределенным образом изменит фазу косинуса в области 1.

**Уровни энергии в потенциальной яме.** Дадим теперь простой пример применения квазиклассического метода, для чего выведем одно из правил квантования Бора—Зоммерфельда. Задача состоит в вычислении уровней энергии для частицы, движущейся в одномерной потенциальной яме (фиг. 26). Допустим, что при любом значении энергии  $E$  имеются две, и только две, классические точки поворота, определяемые из условий:

$$V(x_1) = V(x_2) = E.$$

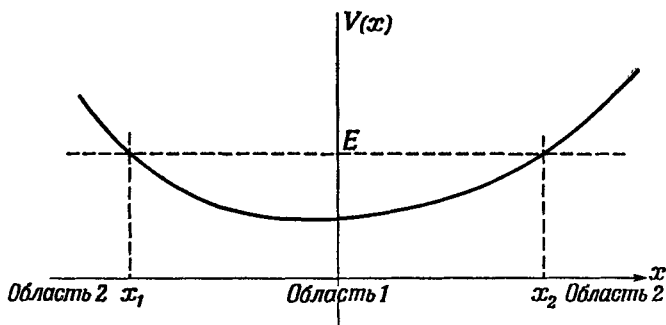
Области  $x < x_1$  и  $x > x_2$  относятся к типу 2; в них, как мы знаем, функция  $u(x)$  должна убывать при удалении от точек поворота, так как в противном случае не будут выполняться граничные условия при  $\pm\infty$ . Поэтому в данных областях имеются лишь экспоненциально убывающие квазиклассические решения.

<sup>1)</sup> Формулу, обратную (28.17), можно употреблять в следующем смысле. Если какой-либо параметр, входящий в решение (например, энергия  $E$ ), изменяется непрерывно, так что в области 1 фаза косинуса в процессе изменения проходит значение  $-\pi/4$ , то для некоторого значения фазы, близкого к  $-\pi/4$ , экспоненциально возрастающий член в области 2 обращается в нуль и остается только экспоненциально убывающий член. Этот результат оказывается полезным, например, при рассмотрении резонансного рассеяния  $\alpha$ -частиц тяжелыми ядрами.

В точке поворота  $x_1$ , отделяющей область типа 2 от области типа 1 (где  $x_1 < x < x_2$ ), можно воспользоваться формулой связи (28.17). Единственное отличие состоит в том, что нижний предел в интеграле  $\xi_1$  нужно взять равным не нулю, а  $x_1$ . Таким образом, справа от точки поворота решение имеет вид (с точностью до произвольного постоянного множителя):

$$k^{-1/2} \cos \left( \int_{x_1}^x k dx - \frac{\pi}{4} \right). \quad (28.19)$$

Этой же формулой связи можно воспользоваться и в точке  $x_2$ , если изменить направление оси  $x$  на обратное и в качестве фиксированного предела в интеграле  $\xi$  взять  $x_2$ , а не нуль; стрелка в (28.17)



Ф и г. 26. Применение квазиклассического метода к задаче о движении в потенциальной яме.

Точки  $x_1$  и  $x_2$  представляют собой линейные точки поворота.

по-прежнему означает, что мы переходим от решения в области 2 к решению в области 1, но теперь последняя находится слева от точки поворота, а первая — справа. Изменим определения  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , полагая

$$\xi_1 = \int_x^{x_1} k dx, \quad \xi_2 = \int_{x_2}^x \kappa dx,$$

так что при удалении от точки поворота эти величины по-прежнему возрастают. В этом случае формулой (28.17) можно пользоваться без каких-либо изменений. Решение слева от данной

точки поворота есть  $k^{-1/2} \cos \left( \int_x^{x_2} k dx - \frac{\pi}{4} \right)$ , что можно переписать

в виде

$$k^{-1/2} \cos \left( \int_{x_1}^x k dx - \frac{\pi}{4} - \eta \right), \quad \eta \equiv \int_{x_1}^{x_2} k dx - \frac{\pi}{2}. \quad (28.20)$$

Как и при качественном обсуждении вопроса о дискретных уровнях в § 8, уровни энергии данной системы можно найти, требуя, чтобы два решения (28.19) и (28.20) в области  $I$  непрерывно переходили друг в друга. Так как интеграл  $\int_{x_1}^{x_2} k dx$  обязательно больше нуля, отсюда, очевидно, следует, что величина  $\eta$  должна быть равна или нулю, или целому кратному  $\pi$ . Соответственно уравнение для определения собственных значений можно записать в виде

$$\int_{x_1}^{x_2} k dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (28.21)$$

Соотношение (28.21) можно применять вплоть до значений  $n$ , соответствующих столь большой энергии  $E$ , что одна или обе точки поворота исчезают.

**Правила квантования.** Подставляя выражение (28.5) для  $k$  в (28.21), получаем одно из правил квантования Бора—Зоммерфельда, использовавшихся в старой квантовой теории :

$$2 \int_{x_1}^{x_2} \{2\mu[E - V(x)]\}^{1/2} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) h; \quad (28.22)$$

здесь в левой части стоит интеграл от импульса  $[2\mu(E - V)]^{1/2}$ , взятый по полному периоду классического движения (т. е. для движения от  $x_1$  к  $x_2$  и обратно к  $x_1$ ). Правая часть представляет собой квантовое значение фазового интеграла, но не с целыми, а с полуцелыми квантовыми числами.

Из решения в форме (28.20) явствует, что  $n$  представляет собой число узлов квазиклассической волновой функции в области между точками поворота. Поскольку в квазиклассическом методе асимптотические решения типа (28.7) справедливы лишь на расстоянии нескольких длин волн от каждой из точек поворота, наша аппроксимация имеет смысл только в том случае, когда между точками поворота укладывается достаточно много длин волн; иначе говоря, число  $n$  должно быть велико по сравнению с единицей. Это оправдывает название метода, так как он оказывается наиболее полезным в почти классической области, когда квантовые числа велики.

Фактически, однако, квазиклассическое приближение в целом ряде случаев может дать достаточно хорошие результаты и для низших квантовых состояний. Так, если применить соотношение (28.22) к гармоническому осциллятору, когда  $V(x) = Kx^2/2$ , то, как известно из старой квантовой теории, правильные уровни энергии получаются для всех квантовых чисел.

**Особые граничные условия.** На идеально твердой стенке (когда  $V$  при  $x = x_0$  скачком увеличивается до  $+\infty$ ) волновая функция должна обращаться в нуль. Поэтому, если  $k$  медленно изменяется вплоть до  $x_0$  (в области типа 1), а другие точки поворота расположены достаточно далеко, то можно воспользоваться асимптотическим решением вида

$$k^{-1/2} \sin \left( \int_{x_0}^x k dx \right).$$

Аналогично, если в точке, удаленной от других точек поворота, потенциал претерпевает конечный скачок, а  $k$  и  $\kappa$  изменяются медленно, то вплоть до точки разрыва  $V$  можно пользоваться асимптотическими решениями. В этой точке нужно затем наложить условия непрерывности волновой функции и ее производной.

Как отмечалось после соотношений (28.5), квазиклассический метод можно применять и для решения радиального волнового уравнения, если только потенциал сферически симметричен. При  $l = 0$  радиальная волновая функция должна быть конечной в точке  $r = 0$  и, следовательно, функция  $u$  должна обращаться там в нуль. Если в этой точке величины  $k$  или  $\kappa$  изменяются медленно, то можно воспользоваться асимптотическими решениями; например, если разность  $E - V(r)$  положительна, имеет конечную величину и медленно меняется вблизи точки  $r = 0$ , то решение имеет вид  $k^{-1/2} \sin \left( \int_0^r k dr \right)$ . Если же при  $r = 0$  эффективная

потенциальная энергия бесконечна, что может быть или следствием сингулярности  $V(r)$  или результатом действия центробежной силы при  $l \neq 0$ , то положение становится более сложным и требует дальнейшего исследования.

### ЗАДАЧИ

1. На одномерный гармонический осциллятор с зарядом  $e$  действует возмущающая сила со стороны электрического поля с напряженностью  $E$ , приложенного в положительном направлении  $x$ . Вычислить изменение каждого уровня энергии во втором приближении теории возмущений. Показать, что эта задача допускает точное решение, и сравнить его с приближенным выражением, полученным при помощи теории возмущений.

2. На одномерный гармонический осциллятор наложено возмущение вида  $\delta x^3$ . Вычислить сдвиг уровней энергии во втором приближении теории возмущений.

3. Рассмотреть эффект Штарка первого порядка в атоме водорода, находящемся в состоянии с  $n = 3$ .

4. Система с тремя невозмущенными состояниями при наличии возмущения характеризуется матрицей энергии

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 & a \\ 0 & E_1 & b \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & E_2 \end{pmatrix},$$

где  $E_2 > E_1$ . Найти возмущенные собственные значения во втором приближении теории возмущений для невырожденного случая. После этого диагонализировать матрицу и найти ее точные собственные значения. Наконец, применить второе приближение теории возмущений для вырожденного случая. Сравнить результаты, полученные в этих трех случаях.

5. Показать, что полное эффективное сечение рассеяния на потенциале, убывающем при больших расстояниях как  $r^{-n}$ , будет конечно тогда и только тогда, когда  $n > 2$ . Провести доказательство: а) при помощи борновского приближения (26.20) и б) с помощью справедливого в борновском приближении выражения для (26.27) (см. примечание 2 на стр. 98).

6. С помощью борновского приближения найти дифференциальное эффективное сечение для рассеяния на потенциале  $V(r) = -V_0 e^{-r/a}$ . Каков в данном случае критерий применимости приближения и при каких условиях он выполняется?

7. Принять, что в некоторой задаче о рассеянии на сферически симметричном потенциале фаза  $\delta_0$  велика и может быть вычислена точно, а все другие фазы малы. Вычислить дифференциальное сечение в борновском приближении (с учетом всех фаз).

8. Исходя из борновского приближения качественно рассмотреть вопрос о рассеянии на кристаллической решетке, состоящей из одинаковых атомов.

9. Пробная функция  $\psi$  мало отличается от собственной функции  $u_E$ , так что  $\psi = u_E + \epsilon \psi_1$ , где  $u_E$  и  $\psi_1$  нормированы и  $\epsilon \ll 1$ . Показать, что  $\langle H \rangle$  отличается от  $E$  только членами порядка  $\epsilon^2$ .

10. Зная, что для некоторого гамильтониана известны  $n - 1$  первых собственных функций, написать формальное выражение для пробной функции, которую можно применять для нахождения верхнего предела  $n$ -го уровня энергии.

11. Найти следующие члены (порядка  $R^{-4}$ ) в разложении (27.12). Показать, что для них диагональный матричный элемент, соответствующий невозмущенному основному состоянию, равен нулю, так что при нахождении вандерваальсовского взаимодействия отсутствует поправка порядка  $R^{-4}$ .

12. Воспользоваться первым отличным от нуля членом в (27.13) для нахождения нижнего предела —  $W(R)$ . Результат сравнить с результатом, получающимся при помощи вариационного метода.

13. Комбинируя теорию возмущений и вариационный метод, как это было сделано в § 27 в связи с теорией сил Ван-дер-Ваальса, найти пределы значений диэлектрической восприимчивости атома водорода в основном состоянии. Диэлектрическая восприимчивость определяется как отношение индуцированного дипольного момента к напряженности приложенного электрического поля или как взятая с обратным знаком вторая производная от возмущенной энергии по напряженности электрического поля  $E$  (при  $E = 0$ ).

14. Частица с массой  $m$  находится в поле с потенциалом, рассмотренным в задаче 6, причем  $\hbar^2/mV_0a^2 = 3/4$ . Применяя пробную функцию  $e^{-ar}$ , при помощи вариационного метода вычислить верхний предел нижнего собственного значения оператора энергии.

15. Пользуясь соотношениями (27.24) и (27.25), вычислить  $\text{tg } \delta_l$  во втором приближении метода Борна. При помощи этого результата найти фазу, соответствующую нулевой энергии в случае однородного потенциала при  $l = 0$ .

16. Учитывая члены порядка  $k^2$  в правой части (27.28) и пользуясь пробной функцией  $v(r) = r$ , при помощи вариационного метода вычислить зна-

чение  $k \operatorname{ctg} \delta_0$  для однородного потенциала. Полученные результаты сравнить с результатом первого борновского приближения, где вычисления проводятся с точностью до членов порядка  $k^2$ , а также с точным решением.

17. Полагая в (27.29)  $v(\vec{r}) = v$ , вычислить значение  $(k \operatorname{ctg} \delta_0)_0$  для экспоненциального потенциала, введенного в задаче 6. Сравнить с результатом первого борновского приближения.

18. Показать, что квазиклассическое приближение дает правильные уровни энергии для всех состояний гармонического осциллятора.

19. Применить квазиклассический метод к задаче об одномерном движении частицы массы  $m$  в поле с потенциалом, который равен  $-V_0$  при  $x = 0$ , линейно зависит от  $x$  в интервале от  $-a$  до  $+a$  и равен нулю при  $|x| > a$ . Полагая  $mV_0a^2/\hbar^2 = 40$ , найти в этом приближении уровни энергии всех связанных состояний.

20. Пользуясь квазиклассическим методом, показать, что в трехмерном случае для притягивающего потенциала, асимптотически убывающего как  $r^{-n}$ , при  $n \leq 2$  имеется бесконечное число связанных состояний.

21. Обсудить вопрос о связи между квазиклассическим приближением и прохождением частиц через „малопрзрачные“ потенциальные барьеры типа, рассматривавшегося в § 17, но не обязательно прямоугольные.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Schrödinger E., Ann. d. Phys., **80**, 437 (1926).
2. Arley N., Borchsenius V., Acta Math., **76**, 261 (1945).
3. Epstein S., Amer. Journ. Phys., **22**, 613 (1954).
4. Van Vleck J. H., Phys. Rev., **33**, 467 (1929).
5. Van Vleck J. H., The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities Oxford, New York, 1932.
6. Born M., Zs. f. Phys., **38**, 803 (1926).
7. Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, New York, 1953.
8. Watson G. N., Theory of Bessel Functions, 2d ed., New York, 1945. (Имеется русский перевод: Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.)
9. Mott N. F., Massey H. S. W., The Theory of Atomic Collisions, 2d ed., Oxford — New York, 1949. (Имеется русский перевод: Н. Мотт, Г. Мессси, Теория атомных столкновений, ИЛ, 1949.)
10. Bullard E. C., Massey H. S. W., Proc. Cambr. Phil. Soc., **26**, 556 (1930).
11. Rayleigh, Theory of Sound, 2d rev. ed., v. 1, London, 1937. (Имеется русский перевод: Рэлей, Теория звука, т. I, М.—Л., 1940; т. II, М.—Л., 1944.)
12. Kato T., Journ. Phys. Soc. Japan, **4**, 334 (1949).
13. Temple G., Proc. Roy. Soc., **211A**, 204 (1952).
14. Whittaker E. T., Watson G. N., A Course of Modern Analysis, 4th ed., Cambridge, London, 1935. (Имеется русский перевод: Е. Уиттекер, Г. Ватсон, Курс современного анализа, М.—Л., 1937.)
15. Hülleraas E. A., Zs. f. Phys., **65**, 209 (1930).
16. Sucher J., Foley H. M., Phys. Rev., **95**, 966 (1954).
17. Pauling L., Wilson E. B., Jr., Introduction to Quantum Mechanics, New York, 1935.

18. Hulthén L., Dixième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Copenhagen, 1946.
19. Schwinger J., Phys. Rev., **72**, 742 (1947).
20. Schwinger J., Phys. Rev., **78**, 135 (1950).
21. Röhrlich F., Eisenstein J., Phys. Rev., **75**, 705 (1949).
22. Blatt J. M., Jackson J. D., Phys. Rev., **76**, 18 (1949).
23. Gerjuoy E., Saxon D. S., Phys. Rev., **94**, 478 (1954).
24. Liouville J., Journ. de Math., **2**, 16, 418 (1837).
25. Rayleigh, Proc. Roy. Soc., **86A**, 207 (1912).
26. Jeffreys H., Proc. London Math. Soc. (2), **23**, 428 (1923).
27. Wentzel G., Zs. f. Phys., **38**, 518 (1926).
28. Kramers H. A., Zs. f. Phys., **39**, 828 (1926).
29. Brillouin L., Compt. Rend., **183**, 24 (1926).
30. Kemble E. C., The Fundamental Principles of Quantum Mechanics, New York, 1937.
31. Langer R. E., Phys. Rev., **51**, 669 (1937).
32. Furry W. H., Phys. Rev., **71**, 360 (1947).
33. Miller S. C., Jr., Good R. H., Jr., Phys. Rev., **91**, 174 (1953).
34. Whittaker E. T., Analytical Dynamics, 3d ed., Cambridge, London, 1927. (Имеется русский перевод: Е. Уиттекер, Аналитическая динамика, М.—Л., 1937.)
35. Goldstein H., Classical Mechanics, Cambridge, 1950. (Имеется русский перевод: Р. Голдстейн, Классическая механика, М.—Л., 1957.)
- 36.\* Иваненко Д. Д., Соколов А. А., Классическая теория поля, М.—Л., 1952.
- 37\*. Гомбаш П., Проблема многих частиц в квантовой механике, ИЛ, 1952.
- 38\*. Фок В., Zs. f. Phys., **61**, 126 (1930).

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

Если гамильтониан зависит от времени, то найти точные решения уравнения Шредингера в общем случае не удастся. Все три приближенных метода, рассматриваемые в настоящей главе, исходят из допущения, что истинный гамильтониан в некотором смысле можно аппроксимировать оператором, не зависящим от времени, причем для него уравнение Шредингера можно решить. Если зависящая от времени часть гамильтониана мала по сравнению с главным (стационарным) членом, то можно использовать метод возмущений. Может также оказаться, что истинный гамильтониан содержит параметры, изменяющиеся или очень медленно (адиабатически), или очень быстро (внезапно) по сравнению с периодами приближенных стационарных решений.

### § 29. Нестационарная теория возмущений

Теория возмущений, применяемая к системе, гамильтониан которой зависит от времени, нередко называется *методом вариации постоянных*<sup>1)</sup>. В нем исходят из сделанного в § 25 допущения о том, что

$$H = H_0 + H', \quad H_0 u_n = E_n u_n, \quad (29.1)$$

причем для невозмущенного гамильтониана  $H_0$  можно в явном виде найти нормированные собственные функции  $u_n$  и собственные значения  $E_n$ , а возмущение  $H'$  мало. Так как теперь  $H'$  зависит от времени, то истинное уравнение Шредингера не имеет стационарных решений, и надо рассматривать уравнение, содержащее производную по времени:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi. \quad (29.2)$$

**Разложение по невозмущенным собственным функциям.** Разложим  $\psi$  по собственным функциям  $u_n e^{-iE_n t/\hbar}$  невозмущенного волнового уравнения, зависящего от времени. Очевидно, коэффициенты

<sup>1)</sup> См. работы Дирака [1].



разложения также будут зависеть от времени :

$$\psi = \mathbf{S} a_n(t) u_n e^{-iE_n t/\hbar}; \quad (29.3)$$

здесь символ  $\mathbf{S}$  означает одновременно суммирование по дискретному и интегрирование по непрерывному спектру. Подставляя (29.3) в (29.2), получаем

$$i\hbar \dot{a}_n u_n e^{-iE_n t/\hbar} + \mathbf{S} a_n E_n u_n e^{-iE_n t/\hbar} = \mathbf{S} a_n (H_0 + H') u_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

(точка означает дифференцирование по времени).

Заменим в правой части этого равенства  $H_0 u_n$  на  $E_n u_n$ , умножим обе части слева на  $\bar{u}_k$ , проинтегрируем полученные выражения по всему пространству и воспользуемся ортонормированностью функций  $u$  :

$$i\hbar \dot{a}_k e^{-iE_k t/\hbar} = \mathbf{S} a_n e^{-iE_n t/\hbar} \int \bar{u}_k H' u_n d\tau.$$

Интеграл в правой части представляет собой матричный элемент возмущения  $H'_{kn}$ . Введем боровскую частоту (угловую) :

$$\omega_{kn} \equiv \frac{E_k - E_n}{\hbar}, \quad (29.4)$$

тогда

$$\dot{a}_k = (i\hbar)^{-1} \mathbf{S} H'_{kn} a_n e^{i\omega_{kn} t}. \quad (29.5)$$

Система уравнений (29.5), взятая для всех значений  $k$ , полностью эквивалентна исходному уравнению Шредингера (29.2); вместо функции точки  $\psi$  роль неизвестной функции теперь играет совокупность коэффициентов разложения  $a_n$ . В связи с данным выбором представления, определяемого собственными функциями невозмущенного гамильтониана, сам оператор  $H_0$  не входит явно в (29.5).

Аппроксимация теории возмущений<sup>3</sup> состоит в замене  $H'$  на  $\lambda H'$  в (29.1) и (29.5) и в последующем разложении  $a_n$  в ряд по степеням  $\lambda$  :

$$a_n = a_n^{(0)} + \lambda a_n^{(1)} + \lambda^2 a_n^{(2)} + \dots \quad (29.6)$$

Как и в § 25, мы допустим, что для значений  $\lambda$ , лежащих в промежутке от 0 до 1, этот ряд представляет аналитическую функцию  $\lambda$ . Поэтому можно подставить его в (29.5), приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , а в конечном результате положить  $\lambda = 1$ . В результате подстановки получаем систему уравнений

$$\dot{a}_k^{(0)} = 0; \quad \dot{a}_k^{(s+1)} = (i\hbar)^{-1} \mathbf{S} H'_{kn} a_n^{(s)} e^{i\omega_{kn} t}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (29.7)$$

В принципе их можно последовательно проинтегрировать и получить приближенные решения с любой заданной степенью точности.

**Первый порядок теории возмущений.** Первое из уравнений (29.7) показывает, что коэффициенты нулевого порядка  $a_k^{(0)}$  не зависят от времени. Их значения представляют собой начальные условия задачи; они характеризуют состояние системы до того, как на нее было наложено возмущение. В настоящем параграфе мы допустим, что лишь один из коэффициентов  $a_k^{(0)}$  не равен нулю. Это означает, что до того, как начало действовать возмущение, система находилась в состоянии с определенной (невозмущенной) энергией<sup>1)</sup>. Результаты, которые мы получим, легко будет обобщить на случай, когда не один, а несколько коэффициентов нулевого порядка отличны от нуля.

Таким образом, положим  $a_k^{(0)} = \delta_{km}$  или  $\delta(k-m)$  в зависимости от того, принадлежит ли состояние  $m$  дискретному или непрерывному спектру. Интегрируя уравнение первого порядка теории возмущений, получаем

$$a_k^{(1)}(t) = (i\hbar)^{-1} \int_{-\infty}^t H'_{km}(t') e^{i\omega_{km}t'} dt'. \quad (29.8)$$

Постоянная интегрирования положена равной нулю, чтобы коэффициент  $a_k^{(1)}$  был равен нулю при  $t = -\infty$ . Если возмущение  $H'$  действует в течение конечного промежутка времени, то после снятия возмущения амплитуда состояния  $u_k$  ( $k \neq m$ ) пропорциональна компоненте Фурье (зависящего от времени) матричного элемента  $H'$ , связывающего данное состояние с начальным, причем угловая частота определяется соотношением (29.4). Это аналогично результату, полученному в борновском приближении для амплитуды рассеяния [см. замечания в связи с формулой (26.18)].

Формула (29.8) принимает особенно простой вид в том случае когда возмущение  $H'$  в промежутке между моментами включения и выключения имеет постоянное значение. Обозначая два указанных момента соответственно через 0 и  $t$ , получаем для амплитуд первого порядка в момент  $t$

$$a_k^{(1)}(t) = -\frac{H'_{km}}{\hbar} \frac{e^{i\omega_{km}t} - 1}{\omega_{km}}. \quad (29.9)$$

Это выражение остается справедливым и во все последующие моменты времени.

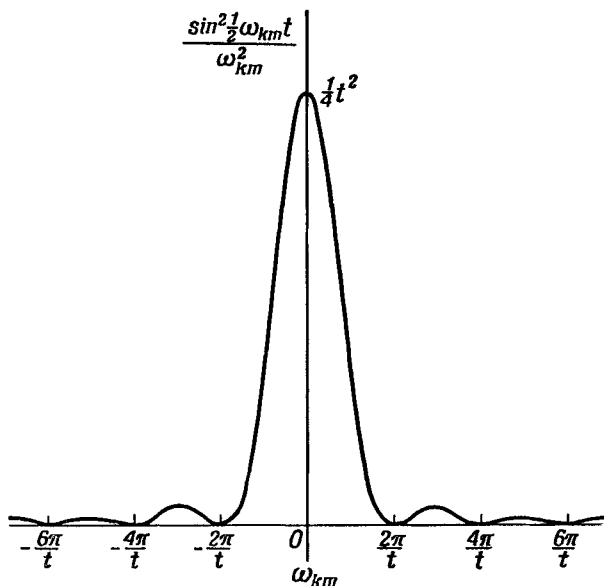
Таким образом, вероятность того, что в момент времени  $t$  система будет находиться в состоянии  $k$ , равна

$$|a_k^{(1)}(t)|^2 = \frac{4 |H'_{km}|^2 \sin^2(\omega_{km}t/2)}{\hbar^2 \omega_{km}^2}.$$

<sup>1)</sup> Это не противоречит соотношению неопределенности (3.3). Действительно, поскольку до начала возмущения прошел бесконечный промежуток времени, начальную энергию системы можно определить со сколь угодно большой степенью точности.

Зависимость множителя  $(1/\omega_{km}^2)\sin^2(\omega_{km}t/2)$  от  $\omega_{km}$  изображена на фиг. 27.

**Физическая интерпретация.** Высота главного пика на фиг. 27 растет пропорционально  $t^2$ , а ширина его убывает обратно пропорционально  $t$ , в связи с чем площадь, ограниченная кривой, пропорциональна  $t$ . Поэтому если имеется несколько состояний  $k$



Ф и г. 27. Зависимость множителя  $\sin^2(\omega_{km}t/2)/\omega_{km}^2$  от  $\omega_{km}$ .

Ордината пропорциональна вероятности (вычисленной в первом приближении теории возмущений) обнаружить систему в состоянии с энергией, отличающейся от энергии начального состояния на  $\hbar\omega_{km}$ .

Указана зависимость масштаба по осям абсцисс и ординат от длительности возмущения  $t$ .

с энергией, почти равной энергии начального состояния  $m$ , а величины  $H'_{km}$  почти не зависят от  $k$ , то вероятность нахождения системы в одном из этих состояний пропорциональна  $t$ . Этот результат представляет физический интерес, так как в конечном счете нам нужно вычислить *вероятность перехода  $w$ , отнесенную к единице времени*, а для этого необходимо, чтобы полная вероятность перехода за время действия возмущения была пропорциональна времени<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Мы допускаем, что полная вероятность перехода во все состояния  $k$  достаточно мала по сравнению с единицей, так что „населенность” состоя-

Отсюда следует, что  $w$  имеет определенное значение лишь в том случае, если конечное состояние  $k$  принадлежит непрерывной или почти непрерывной группе состояний. Разброс энергии конечных состояний ( $E_k = E_m + \hbar\omega_{km}$ ), показанный на фиг. 27, связан с соотношением неопределенности (3.3) между энергией и временем. В самом деле, включение возмущения  $H'$  можно рассматривать как способ измерения энергии системы, основанный на переводе последней в одно из состояний  $k$  (в силу наличия возмущения эта энергия необязательно совпадает с начальной). Необходимое для измерения время равно  $t$ , так что предсказываемая соотношением (3.3) неопределенность в энергии по порядку величины равна  $\hbar/t$ ; это находится в соответствии с шириной главного пика на фиг. 27.

Интересно отметить, что закон сохранения энергии, соответственно дополненный принципом неопределенности, выполняется автоматически, так что его не нужно вводить в качестве специального допущения.

**Вероятность перехода.** Чтобы получить явное выражение для  $w$ , удобно предположить, что система находится в большом кубе периодичности с ребром  $L$  (см. § 10). Тогда собственные функции  $u_n$  будут принадлежать дискретному спектру и могут быть нормированы на единицу в кубе объема  $L^3$ . Рассмотрим теперь некоторую группу конечных состояний  $k$ , энергия которых почти не отличается от начальной, и допустим, что элементы матрицы возмущения  $H'_{kn}$  слабо зависят от  $k$ . Определим плотность конечных состояний  $\varrho(k)$  таким образом, что величина  $\varrho(k)dE_k$  представляет собой число состояний с энергией в интервале  $dE_k$ , и будем считать, что  $\varrho(k)$  также является медленно меняющейся функцией  $k$ .

Вероятность перехода в одно из состояний данной группы, отнесенную к единице времени, можно записать в виде

$$w = t^{-1} \sum_k |a_k^{(1)}(t)|^2 = t^{-1} \int |a_k^{(1)}(t)|^2 \varrho(k) dE_k, \quad (29.10)$$

причем ребро куба  $L$  предполагается настолько большим, что суммирование по  $k$  можно заменить интегрированием по  $E_k$ . Так как наибольший вклад в интеграл вносят уровни, лежащие вблизи точки  $E_k = E_m$ , а функции  $H'_{km}$  и  $\varrho(k)$  изменяются медленно, то их можно вынести за знак интеграла и переписать соот-

---

ния  $w$  заметно не уменьшается. Это эквивалентно первоначальному допущению о малости возмущения, которое означает, что для физически интересных промежутков времени  $t$  начальное состояние изменяется мало. Однако эффект может все же оказаться вполне заметным, если одинаковому воздействию подвергается большое число независимых систем.

ношение (29.10) в виде

$$w = \frac{1}{t} \frac{4 |H'_{km}|^2}{\hbar} \varrho(k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega_{km}t/2)}{\omega_{km}^2} d\omega_{km}; \quad (29.11)$$

здесь индекс  $k$  характеризует типичное состояние из группы состояний, энергия которых близка к  $E_m$ . Интеграл в (29.11) равен

$$\frac{1}{2} t \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \pi t,$$

и окончательно мы получаем

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \varrho(k) |H'_{km}|^2. \quad (29.12)$$

Как и следовало ожидать, эта величина не зависит от  $t$ .

Может существовать несколько различных групп конечных состояний  $k$  с энергией, близкой к  $E_m$ , но таких, что элементы матрицы возмущения  $H'_{km}$  и плотность состояний  $\varrho(k)$ , будучи почти постоянными для состояний одной группы, имеют разные значения для разных групп. В этом случае формула (29.12) дает (отнесенную к единице времени) вероятность перехода в состояния отдельной группы; такой же вид имеют и выражения для вероятности перехода в состояния других групп.

**Эффективное сечение рассеяния.** Применим прежде всего формулу (29.12) для вычисления  $w$  в случае, когда начальное и конечное состояния описываются собственными функциями оператора импульса свободных частиц (плоскими волнами), а роль возмущения играет потенциальная энергия  $V(\mathbf{r})$ . Если получаемый при этом результат выразить через эффективное сечение упругого рассеяния, то, как и следовало ожидать, он будет совпадать с формулами борновского приближения (§ 26). Волновые функции начального и конечного состояний запишем в виде

$$u_m(\mathbf{r}) = L^{-3/2} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}, \quad u_k(\mathbf{r}) = L^{-3/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},$$

где  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}$  — соответственно волновые векторы в начальном и конечном состояниях. В связи с этим элементы матрицы возмущений имеют вид

$$H'_{km} = L^{-3} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = L^{-3} \int V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (29.13)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$ .

Для вычисления плотности конечных состояний заметим, что допустимые значения  $\mathbf{k}$  в кубе периодичности имеют вид  $k_x = 2\pi n_x/L$  и т. д., где  $n$  — целые положительные или отрица-

тельные числа или нуль. Если компоненты волнового вектора лежат в интервале  $(k_x, k_x + dk_x)$  и т. д., то число состояний равно  $(L/2\pi)^3 dk_x dk_y dk_z$ . Для данной энергии имеется много различных конечных состояний  $\mathbf{k}$ , соответствующих различным направлениям вектора  $\mathbf{k}$  при заданной его величине. Обычно матричный элемент (29.13) зависит от направления  $\mathbf{k}$ , так что каждый раз нужно учитывать лишь направления, лежащие внутри малого телесного угла. В связи с этим нас будет интересовать вероятность перехода в бесконечно малый элемент телесного угла  $\sin \theta d\theta d\varphi$ , ориентированного в направлении, характеризуемом полярными углами  $\theta, \varphi$ . Таким образом,  $\varrho(k) dE_k$  есть число состояний в элементе объема  $d\tau_k$ , определяемом данным элементом телесного угла и интервалом абсолютных величин  $dk$ , соответствующим интервалу энергии  $dE_k$ :

$$\varrho(k) dE_k = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Поскольку

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}, \quad \frac{dE_k}{dk} = \frac{\hbar^2 k}{\mu},$$

мы получаем для  $\varrho(k)$ :

$$\varrho(k) = \frac{\mu L^3}{8\pi^3 \hbar^2} k \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (29.14)$$

Полученное таким образом значение  $w$  представляет собой число частиц, рассеянных за единицу времени в элемент телесного угла, при условии, что в объеме  $L^3$  находится одна падающая частица. Последнее означает, что падающий поток равен  $v/L^3$ ,  $v = \hbar k/\mu$  — скорость падающей или (так как энергия сохраняется) рассеянной частицы. Поскольку дифференциальное эффективное сечение определяется отношением числа рассеянных частиц к падающему потоку, мы имеем

$$\sigma(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\mu L^3}{\hbar k} w. \quad (29.15)$$

Подставляя (29.12), (29.13) и (29.14) в (29.15), получаем:

$$\sigma(\theta, \varphi) = \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left| \int V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\tau \right|^2. \quad (29.16)$$

Этот результат соответствует формулам борновского приближения (26.18) и (26.19) и имеет те же пределы применимости.

**Гармоническое возмущение.** Формула (29.8) принимает простой вид также и в другом случае, когда возмущение зависит от времени гармонически в интервале от нуля (момент включения) до  $t$  (момент выключения). Положим

$$H'_{km}(t') = H'_{km}^0 \sin \omega t',$$

тогда в первом приближении для момента времени  $t$  получим

$$a_h^{(1)}(t) = -\frac{H'_{km}}{2i\hbar} \left[ \frac{e^{i(\omega_{km} + \omega)t} - 1}{\omega_{km} + \omega} - \frac{e^{i(\omega_{km} - \omega)t} - 1}{\omega_{km} - \omega} \right]. \quad (29.17)$$

Вероятность обнаружить систему в состоянии  $k$  имеет заметную величину только в том случае, если знаменатель одного из двух слагаемых в (29.17) близок к нулю. Поэтому интерференции между двумя членами не будет, и возмущение будет вызывать лишь переходы, для которых  $\omega_{km} \approx \pm \omega$  (если только соответствующий матричный элемент не обращается в нуль). Полученное ранее условие сохранения энергии  $E_k \approx E_m$  заменяется следующим:

$$E_k \approx E_m \pm \hbar\omega. \quad (29.18)$$

Соотношение (29.18) показывает, что в первом приближении возмущение, гармонически зависящее от времени с угловой частотой  $\omega$ , сообщает системе (или отбирает у нее) энергию  $\hbar\omega$ . Этот результат будет использован в гл. X при качественном рассмотрении процессов излучения.

**Второй порядок теории возмущений.** Если возмущение не зависит от времени, то систему уравнений (29.7) легко решить с точностью до величин второго порядка. Возьмем уравнение с  $s = 1$  и подставим в правую часть выражение (29.9)

$$\dot{a}_k^{(2)} = \frac{i}{\hbar^2} \mathbf{S} \frac{H'_{kn} H'_{nm}}{\omega_{nm}} (e^{i\omega_{km}t} - e^{i\omega_{kn}t}).$$

Интегрируя это уравнение с начальным условием  $a_k^{(2)}(0) = 0$ , получаем для амплитуды второго приближения в момент времени  $t$ :

$$a_k^{(2)}(t) = \hbar^{-2} \mathbf{S} \frac{H'_{kn} H'_{nm}}{\omega_{nm}} \left[ \frac{e^{i\omega_{km}t} - 1}{\omega_{km}} - \frac{e^{i\omega_{kn}t} - 1}{\omega_{kn}} \right]. \quad (29.19)$$

Соотношение (29.19) показывает, что переходы, вероятность которых линейно возрастает со временем, могут иметь место либо при  $\omega_{km} \approx 0$ , либо при  $\omega_{kn} \approx 0$ . В первом случае энергия сохраняется при переходе из начального состояния  $m$  в конечное  $k$ ; во втором случае это может быть и не так. Легко видеть, что второй член в скобках возникает за счет единицы в числителе (29.9), появление которой в свою очередь вызвано начальным условием при  $t = 0$ .

Это начальное условие означает, что возмущение возникает внезапно; таким образом, математическая формулировка задачи наводит на мысль, что переходы второго порядка, при которых энергия не сохраняется, связаны с внезапным появлением возмущения. Полученный результат находится в соответствии

с соотношениями (29.8) и (29.17), которые показывают, что если в разложении возмущения в ряд Фурье имеются компоненты, соответствующие отличным от нуля частотам, то возмущенная система может отдавать или поглощать энергию. В рассматриваемом сейчас случае эти компоненты Фурье недостаточно „сильны”, чтобы обусловить соответствующие переходы в первом приближении, но во втором приближении это оказывается возможным.

В большинстве практических задач внезапное включение возмущения имеет смысл лишь математического приема, упрощающего вычисления. В действительности в подобных случаях возмущение или действует в течение всего времени, или же включается очень медленно, так что при переходах из начального в конечные состояния энергия сохраняется. Задачи, которые можно решать при помощи аппроксимации внезапных возмущений (см. конец § 31), составляют исключение; в этих случаях энергия не обязательно должна сохраняться. В настоящем и в следующем параграфах мы будем рассматривать только переходы с сохранением энергии ( $\omega_{km} \approx 0$ ).

Предположим теперь, что в первом приближении возмущение не вызывает переходов, т. е. в системе нет состояний  $n$  с той же энергией, что и начальная ( $\omega_{nn} \approx 0$ ), и таких, что матричный элемент  $H'_{nm} \neq 0$ . Поскольку  $\omega_{km} \approx 0$ , это означает также, что  $H'_{nm} = 0$ , если  $\omega_{kn} \approx 0$ . В этом случае второй член в скобках (29.19) никогда не достигает заметной величины. Вычисление вероятности перехода  $\omega$  проводится так же, как и в предыдущем параграфе, за исключением того, что коэффициент  $a_k^{(1)}$  заменяется на  $a_k^{(2)}$ ; таким образом, можно пользоваться формулой (29.12), если только заменить в ней матричный элемент  $H'_{km}$  на матричный элемент второго порядка:

$$\mathcal{S} \frac{H'_{kn} H'_{nm}}{E_m - E_n}. \quad (29.20)$$

**Влияние переходов первого порядка.** Если переходы первого порядка все же имеют место, но приводят не в то состояние, которое нас интересует, то можно поступать следующим образом. Второе слагаемое в скобках в (29.19) для состояний  $n$ , энергия которых заметно отлична от  $E_k$  (или  $E_m$ ), по-прежнему пренебрежимо мало, так как частота  $\omega_{km}$  в этом случае велика. Однако теперь могут быть такие состояния  $n$ , для которых энергии  $E_n$ ,  $E_m$  и  $E_k$  близки друг к другу и оба матричных элемента  $H'_{kn}$  и  $H'_{nm}$  не равны нулю. Тогда вторым членом в скобках пренебрегать нельзя, так как без него сумма или интеграл по  $n$  имели бы сингулярность при  $\omega_{nm} = 0$ . Нетрудно видеть, что если частота  $\omega_{nn}$  мала, то для любого значения  $\omega_{km}$  (равного или не равного нулю) все выражение в скобках пропорционально  $\omega_{nm}$  (причем в свою очередь  $\omega_{nm} = \omega_{km} - \omega_{kn}$ ); тогда  $\omega_{nn}$  в числителе и знаме-



натель сокращается и выражение под знаком суммы (или интеграла) становится конечным при  $\omega_{nm} = 0$ <sup>1</sup>).

Покажем теперь, как в этом случае явно вычислить выражение в правой части (29.19), если символ  $\mathcal{S}$  представляет собой интеграл по  $E_n$  или  $\omega_{nm}$ . Разделим интеграл на две части, в одной из которых абсолютная величина  $|\omega_{nm}|$  велика, а в другой невелика по сравнению с  $1/t$ . В первой области вторым слагаемым в (29.19) можно пренебречь, так как модуль  $|\omega_{kn}| = |\omega_{km} - \omega_{nm}|$  также велик по сравнению с  $1/t$  (приближенное равенство  $\omega_{km} \approx 0$  означает, что произведение  $\omega_{km}t$  мало по сравнению с единицей). Таким образом, для этой части интеграла мы получаем

$$\frac{e^{i\omega_{km}t} - 1}{\omega_{km}} \int' \frac{H'_{kn}H'_{nm}}{\omega_{nm}} \varrho(n) \hbar d\omega_{nm}. \quad (29.21)$$

Здесь  $\varrho(n)dE_n$  — число состояний в одной из рассматриваемых групп с энергией в интервале  $dE_n$  около  $E_n$ ; штрих у интеграла означает, что при интегрировании исключается область  $-c/t \leq \leq \omega_{nm} \leq c/t$ , где  $c$  — постоянное число, большое по сравнению с единицей. Если имеется несколько различных групп состояний  $n$ , для которых матричные элементы или плотности состояний различны, то в дальнейшем необходимо провести также суммирование по различным группам.

Во второй области, где  $|\omega_{nm}| \leq c/t$ , мы предположим  $t$  настолько большим, что произведение  $H'_{kn}H'_{nm}\varrho(n)$  можно считать постоянным и вынести его за знак интеграла при  $\omega_{nm} = 0$ . Теперь, чтобы подинтегральное выражение оставалось конечным, необходимо учитывать оба члена в скобках в (29.19). Таким образом, эта часть интеграла равна

$$[\hbar H'_{kn}H'_{nm}\varrho(n)]_{\omega_{nm}=0} \cdot \int_{-c/t}^{c/t} \left[ \frac{e^{i\omega_{km}t} - 1}{\omega_{km}} - \frac{e^{i(\omega_{km} - \omega_{nm})t} - 1}{\omega_{km} - \omega_{nm}} \right] \frac{d\omega_{nm}}{\omega_{nm}}. \quad (29.22)$$

Интеграл, фигурирующий в (29.22), можно вычислить в комплексной плоскости  $\omega_{nm}$ , проводя контур, как показано на фиг. 28. Внутри этого контура нет полюсов подинтегрального выражения, и, следовательно, интеграл по нему равен нулю; таким образом, интеграл в (29.22) будет равен интегралу по

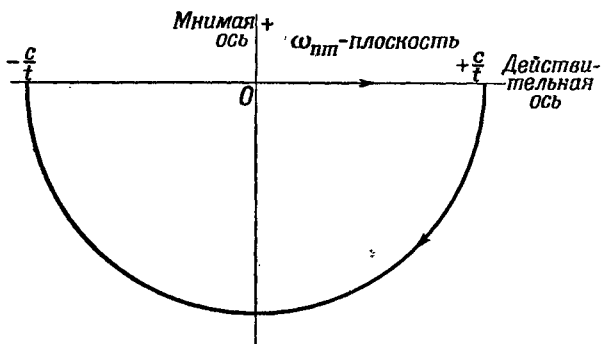
<sup>1</sup> Этот результат носит вполне общий характер и следует из самой структуры метода возмущений, так как в последнем не содержится никаких оснований для появления сингулярностей. Поэтому если возмущение включается не внезапно, а постепенно, так что отмеченные выше трудности с законом сохранения энергии не возникают, то второй член в (29.19), приобретая более сложный вид, по-прежнему будет приводить к уничтожению сингулярности при  $\omega_{nm} = 0$ . Это можно проверить путем непосредственного вычисления.

полуокружности радиуса  $c/t$ , обходимой против часовой стрелки. На этой полуокружности абсолютная величина  $\omega_{nm}$  достаточно велика, чтобы в подинтегральном выражении можно было пренебречь вторым членом по сравнению с первым.

Тогда интеграл легко вычисляется, и мы получаем

$$\pi i \frac{e^{i\omega_{km}t} - 1}{\omega_{km}}. \quad (29.23)$$

При больших  $t$  штрих у интеграла в (29.21) означает, что необходимо брать главное значение<sup>1)</sup>. Поэтому если подставить (29.23)



Ф и г. 28. Контур для вычисления интеграла в (29.22).

в (29.22) и сложить результат с (29.21), то получится выражение, аналогичное (29.21), но с заменой интеграла со штрихом на главное значение, сложенное с умноженным на  $\pi i$  вычетом подинтегрального выражения в точке  $\omega_{nm} = 0$ . Это эквивалентно вычислению интеграла по контуру, идущему вдоль вещественной оси от  $-\infty$  до  $+\infty$  с обходом начала координат снизу. Таким образом, окончательно получаем

$$a_k^{(2)}(t) = \frac{e^{i\omega_{km}t} - 1}{\hbar\omega_{km}} \int_C \frac{H'_{kn}H'_{nm}}{E_n - E_m} \varrho(n) dE_n, \quad (29.24)$$

где контур  $C$  в комплексной плоскости  $E_n$  проходит вдоль вещественной оси, огибая снизу полюс подинтегрального выражения в точке  $E_n = E_m$ . Равенством (29.24) можно пользоваться вместо (29.29), если символ  $\mathfrak{S}$  можно заменить на  $\int \varrho(n) dE_n$ . Сравнение формул (29.24) и (29.9) показывает, что выражением (29.12) для  $w$  можно пользоваться, если заменить матричный элемент  $H'_{km}$  на интеграл (29.24). Последний мы будем иногда называть матричным элементом второго порядка. Пример применения полученных результатов будет дан в следующем параграфе.

<sup>1)</sup> См. книгу Уиттекера и Ватсона [2].

**Промежуточные состояния.** Мы видим, что теория возмущений описывает квантовые переходы уже в первом приближении, если отличен от нуля матричный элемент  $H'_{km}$ , связывающий начальное ( $m$ ) и конечное ( $k$ ) состояния. Если же  $H'_{km} = 0$ , но существует одно или несколько состояний  $n$ , для которых отличны от нуля оба элемента  $H'_{nm}$  и  $H'_{kn}$ , то переходы имеют место во втором приближении.

В связи с этим одно из состояний  $n$  удобно представлять себе как *промежуточное состояние*: под действием возмущения система переходит из  $m$  в  $k$  в два этапа, проходя через состояние  $n$ . При переходе в промежуточное состояние энергия может и не сохраняться, так как это состояние существует лишь временно, а в силу соотношения неопределенности (3.3) его энергию нельзя определить сколько-нибудь точно. Если для некоторых промежуточных состояний энергия сохраняется, то суммирование по этим состояниям (29.20) нужно понимать в соответствии с (29.24).

В некоторых случаях отдельные переходы могут происходить лишь через два или более различных промежуточных состояния; это соответствует третьему или еще более высокому приближению теории возмущений. Если возмущение мало, то обычно разумный результат получается в низшем исчезающем приближении, в то время как учет следующих приближений не только не улучшает этот результат, но иногда может даже привести к ошибочным выводам.

### § 30. Неупругие столкновения

Найденное в предыдущем параграфе выражение для эффективного сечения рассеяния нетрудно обобщить на случай неупругих столкновений, когда сталкивающиеся системы могут обмениваться не только кинетической, но и внутренней энергией. В настоящем параграфе мы применим полученные выше результаты к двум задачам, типичным для процессов первого и второго порядков<sup>1)</sup>. Особенно большой теоретический интерес представляют вычисления, относящиеся ко второй задаче, так как они явно показывают, каким образом частица, описываемая исключительно с помощью плоских волн (собственных функций оператора импульса), может оставлять резко выраженный след в камере Вильсона.

**Выражение для эффективного сечения рассеяния.** Формула (29.12) для вероятности перехода применима и для неупругих

<sup>1)</sup> Примеры, о которых идет речь в настоящем параграфе, можно рассматривать также, несколько обобщая борновское приближение. Такое обобщение на случай процессов первого порядка, сопровождающихся перегруппировкой, дается в § 34. При рассмотрении процессов второго порядка удобнее пользоваться методом вариации постоянных.

столкновений, если только соответствующим образом определить матричный элемент. Мы рассмотрим здесь столкновение быстрого электрона с атомом водорода, находящимся в основном состоянии. Задача состоит в вычислении эффективного сечения рассеяния на определенном угле с переходом атома водорода в определенное возбужденное состояние. При этом мы не будем принимать во внимание возможность обмена местами между бомбардирующим и атомным электронами; такие обменные столкновения обсуждаются в гл. IX.

Невозмущенный гамильтониан представляет собой сумму оператора кинетической энергии бомбардирующего электрона и гамильтониана для атома водорода:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{e^2}{r_2}, \quad (30.1)$$

где  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  представляют собой радиус-векторы соответственно бомбардирующего и атомного электронов. Начало координат совмещено с атомным ядром, движением которого можно пренебречь в силу его большой массы. Роль возмущения играет электростатическая энергия взаимодействия между бомбардирующим электроном и электроном и ядром атома;

$$H' = \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_1}. \quad (30.2)$$

Невозмущенные волновые функции представляют собой собственные функции оператора (30.1). Возьмем их в виде

$$\begin{aligned} L^{-3/2} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_1} u_{100}(\mathbf{r}_2) & \text{ для начального состояния,} \\ L^{-3/2} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_1} u_{200}(\mathbf{r}_2) & \text{ для конечного состояния.} \end{aligned} \quad (30.3)$$

В спектроскопических обозначениях это соответствует атомному переходу  $1S \rightarrow 2S$ . Абсолютная величина волнового вектора электрона после столкновения определяется из закона сохранения энергии

$$k^2 = k_0^2 - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{3e^2}{8a_0}. \quad (30.4)$$

Равенства (30.2) — (30.4) определяют матричный элемент в (29.12):

$$\begin{aligned} H'_{21} = L^{-3} \int \int e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_1} \bar{u}_{200}(\mathbf{r}_2) \left( \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_1} \right) u_{100}(\mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2, \\ \mathbf{K} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k} \end{aligned} \quad (30.5)$$

Дифференциальное эффективное сечение рассеяния можно получить из  $\psi$  тем же путем, что и в предыдущем параграфе. Нужно только помнить, что в выражении для плотности конечных состояний (29.14) фигурирует абсолютная величина  $k$ , а в формуле

для тока бомбардирующих частиц — начальная скорость  $v_0 = \hbar k_0/m$ . Поэтому эффективное сечение

$$\sigma(\theta) = \frac{k}{k_0} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 L^6 |H'_{21}|^2, \quad (30.6)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_0$ .

**Вычисление матричного элемента.** Из выражения для матричного элемента (30.5) явствует, что член  $e^2/r_1$  ничего не вносит в интеграл, так как функции  $u_{100}$  и  $u_{200}$  ортогональны. Этого и следовало ожидать из физических соображений, так как взаимодействие между бомбардирующим электроном и ядром не может привести к возбуждению атомного электрона.

Чтобы проинтегрировать остающийся член по координатам  $\mathbf{r}_1$ , заменим элемент объема  $d\tau_1 d\tau_2$  на  $d\tau_\varrho d\tau_2$ , где  $\varrho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ; как легко видеть, якобиан преобразования равен единице. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_1}}{r_{12}} d\tau_1 &= e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_2} \int \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \varrho}}{\varrho} d\tau_\varrho = \\ &= 2\pi e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 e^{iK_\varrho w} \varrho d\varrho dw = \frac{4\pi}{K} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_2} \int_0^\infty \sin K\varrho d\varrho. \end{aligned}$$

Полярная ось сферической системы координат направлена вдоль вектора  $\mathbf{K}$  (через  $w$  обозначен косинус угла между  $\varrho$  и  $\mathbf{K}$ ). Последний интеграл, строго говоря, не сходится, но его можно вычислить, вводя множитель сходимости  $e^{-\alpha\varrho}$  и переходя затем к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ . Для оправдания этого приема заметим, что если в (30.5) сначала произвести интегрирование по  $\mathbf{r}_2$ , то результат будет убывать как  $1/r_1^2$ , т. е. как  $1/\varrho^2$  для больших  $\varrho$ <sup>1)</sup>, вследствие чего при больших  $\varrho$  подинтегральное выражение ведет себя как  $\sin K\varrho/\varrho$  и интеграл сходится. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_1}}{r_{12}} d\tau_1 &= \frac{4\pi}{K} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty \sin K\varrho e^{-\alpha\varrho} d\varrho = \\ &= \frac{4\pi}{K} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{K}{\alpha^2 + K^2} \right) = \frac{4\pi}{K^2} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_2}. \quad (30.7) \end{aligned}$$

Подставляя (30.7) в (30.5) и пользуясь выражениями для волновых функций атома водорода, приведенными после общей форму-

<sup>1)</sup> Если  $r_1 \gg r_2$ , то главный член в  $1/r_{12}$  есть  $1/r_1$ , а интеграл от этого выражения по  $\mathbf{r}_2$  равен нулю вследствие ортогональности  $u_{100}$  и  $u_{200}$ .

лы (16.24), приходим к интегралу по  $\mathbf{r}_2$ , вычисление которого дает

$$H'_{21} = L^{-3} \frac{16 \sqrt{2} \pi a_0^2 e^2}{\left(K^2 a_0^2 + \frac{9}{4}\right)^3}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}.$$

### Дифференциальное и полное эффективные сечения рассеяния.

Итак, в рассматриваемом случае дифференциальное эффективное сечение рассеяния имеет вид

$$\sigma(\theta) = \frac{k}{k_0} \frac{128 a_0^2}{\left(K^2 a_0^2 + \frac{9}{4}\right)^6}, \quad (30.8)$$

где

$$\begin{aligned} K^2 &= k_0^2 + k^2 - 2k_0 k \cos \theta = \\ &= \left(2k_0 \sin \frac{1}{2} \theta\right)^2 - (k_0 - k)(k_0 + k - 2k_0 \cos \theta). \end{aligned}$$

Вычисления, основанные на теории возмущений, дают наилучшие результаты при  $k_0 a_0 \gg 1$ ; в этом случае  $k$  близко к  $k_0$  и равенство (30.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} (k_0 - k)(k_0 + k) &= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{3e^2}{8a_0} = \frac{3}{4a_0^2}, \\ k_0 + k &\approx 2k_0, \quad k_0 - k \approx \frac{3}{8k_0 a_0^2}. \end{aligned} \quad (30.9)$$

Принимая это во внимание, выражение для  $K^2$  в предельном случае высоких энергий можно записать в виде

$$K^2 \approx \left(4k_0^2 - \frac{3}{2a_0^2}\right) \sin^2 \frac{1}{2} \theta \approx \left(2k_0 \sin \frac{1}{2} \theta\right)^2.$$

Тогда, согласно (30.8), максимум рассеяния имеет место при  $K a_0 \ll 1$ , т. е. при  $\theta \ll 1/k_0 a_0$ . Вне этих пределов  $\sigma(\theta)$  убывает с возрастанием угла приблизительно как  $\text{cosec}^{12} \theta/2$ . Это гораздо более быстрое убывание, чем в случае упругого рассеяния, когда угловая зависимость определяется множителем  $\text{cosec}^4 \theta/2$ . Такое быстрое спадание  $\sigma(\theta)$  характерно для неупругих столкновений.

Чтобы найти полное эффективное сечение, нужно с помощью точного выражения для  $K^2$  заменить элемент телесного угла  $2\pi \sin \theta d\theta$  на  $2\pi K dk / k_0 k$  пределы интегрирования при этом будут  $k_0 - k$  и  $k_0 + k$ . Тогда интеграл (30.8) можно вычислить в явном виде. Однако, как только что было показано, при больших энергиях главный вклад в интеграл вносит область вблизи нижнего предела, и в соответствии с (30.9)

$$(k_0 - k)^2 a_0^2 \approx \frac{9}{64 k_0^2 a_0^2} \ll \frac{9}{4}.$$

Таким образом, главный член в выражении для полного сечения при больших энергиях можно получить, интегрируя по  $K$

в пределах от нуля до бесконечности:

$$\sigma \approx \frac{128\pi}{5k_0^2} \left(\frac{2}{3}\right)^{10}. \quad (30.10)$$

Эффективные сечения упругого рассеяния, а также рассеяния с возбуждением других атомных состояний можно найти, вводя в матричный элемент (30.5) вместо  $u_{200}$  другие конечные волновые функции и видоизменяя соответствующим образом равенство (30.4). Полное эффективное сечение упругого рассеяния при высоких энергиях оказывается равным  $7\pi/3k_0^2$ , что примерно в пять раз больше сечения (30.10). Процессы возбуждения состояний с  $n = 2$ ,  $l = 1$  (т. е. переход  $1S \rightarrow 2P$ ) проще всего рассматривать выбирая ось квантования для конечных состояний ( $m = 0, \pm 1$ ) в направлении переданного импульса  $\mathbf{K}$ . Таким путем можно показать, что возбуждаться может лишь состояние  $(210)$ , так как при  $m = \pm 1$  в силу наличия множителей  $e^{\pm i\varphi}$  матричные элементы обращаются в нуль. Физически это связано с тем, что бомбардирующий электрон, изменение импульса которого направлено вдоль  $\mathbf{K}$ , не может передать атомному электрону момент количества движения в том же направлении. Эффективное сечение соответствующего столкновения при большой энергии оказывается равным

$$\sigma \approx \frac{576\pi}{k_0^2} \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \ln(4k_0 a_0). \quad (30.11)$$

Появление логарифмического множителя в (30.11) связано с добавочным множителем  $1/K^2$  в выражении для дифференциального эффективного сечения рассеяния. Таким образом, по сравнению с переходом  $1S \rightarrow 2S$  дифференциальное эффективное сечение для перехода  $1S \rightarrow 2P$  оказывается более значительным для малых углов, а полное сечение рассеяния при высоких энергиях убывает с ростом энергии не так быстро.

**Образование следа в камере Вильсона.** На первый взгляд кажется удивительным, что быстрый электрон, обладающий, по-видимому, определенным импульсом и, следовательно, не допускающий локализации в точке, все же может образовывать резкий след в камере Вильсона. Это явление можно рассматривать с различных точек зрения. В соответствии с теоремой Эренфеста (§ 7) электрон можно характеризовать с помощью волнового пакета, центр тяжести которого движется, как классическая частица. Если длина волны достаточно мала, то размеры пакета и его расплывание с течением времени также могут быть малы; тогда пакет будет взаимодействовать только с теми атомами, которые лежат поблизости от траектории его центра. Это значит, что состояние электрона описывается суперпозицией плоских волн; следовательно, в импульсе его имеется некоторая неопре-

деленность, что дает возможность с достаточной точностью определить его положение.

Другой подход состоит в том, что электрон описывается плоской волной с точно заданным импульсом, а его взаимодействие с первым возбуждаемым или ионизируемым атомом рассматривается как измерение координаты, которое производится с неопределенностью порядка размеров атома. После взаимодействия состояние электрона описывается волновым пакетом только что рассмотренного типа; если первый атом велик по сравнению с длиной волны, то этот пакет хорошо локализован.

Мы здесь подробно рассмотрим картину, в которой электрон и атомы газа в камере Вильсона считаются частями единой системы, так что взаимодействие с атомами уже не рассматривается как измерение координаты электрона, изменяющее его волновую функцию<sup>1)</sup>. Для простоты допустим, что в системе имеются всего два атома (в основных состояниях), причем их ядра расположены далеко друг от друга и фиксированы в пространстве. В этом предположении мы вычислим эффективное сечение для таких процессов, когда оба атома возбуждаются, а электрон претерпевает неупругое рассеяние. Считая начальную энергию электрона достаточно большой, можно воспользоваться теорией возмущений, причем в данном случае нужно взять второе приближение. Расчет интересен как сам по себе, так и по своему результату, представляя собой поучительный пример применения теории возмущений, развитой в § 29.

В результате оказывается, что эффективное сечение рассеяния будет очень мало, исключая случай, когда начальный импульс электрона почти параллелен как линии, соединяющей ядра, так и конечному импульсу. Отклонение от параллельности (в радианах) по порядку величины не должно превышать отношения длины волны электрона к размерам атома. Этот результат аналогичен результату, полученному выше при рассмотрении неупругого столкновения быстрого электрона с атомом водорода, когда углы рассеяния в основном не превышали, грубо говоря,  $1/k_0 a_0$ . Это согласуется также с описанием процесса в терминах волновых пакетов, так как локализация электрона в интервале  $a$ , характеризующем размеры атома, в направлении, перпендикулярном направлению движения, приводит к неопределенности  $\hbar/a$  у соответствующей компоненты импульса и, следовательно, к угловому разбросу порядка  $\hbar/ap \approx 1/k_0 a$ .

**Постановка задачи.** Без потери общности ядро первого атома можно расположить в начале координат, а ядро второго — в точке  $\mathbf{R}$ . Атомы предполагаются настолько удаленными друг от друга,

<sup>1)</sup> См. также книгу Гейзенберга [3], стр. 66.



что взаимодействием между ними можно пренебречь. Тогда невозмущенный гамильтониан равен сумме оператора кинетической энергии падающего электрона и невозмущенных гамильтонианов для обоих атомов. Роль возмущения играет сумма энергии взаимодействия  $H'_1$  и  $H'_2$  между падающим электроном и первым и вторым атомами. В начальном состоянии оба атома находятся в основных состояниях  $u_0$  с энергиями  $\varepsilon_0$ , а волновой вектор падающего электрона равен  $\mathbf{k}_0$ . В конечном состоянии первый атом находится в состоянии  $u_n$  с энергией  $\varepsilon_n$ , второй атом — в состоянии  $u_m$  с энергией  $\varepsilon_m$ ; волновой вектор электрона равен  $\mathbf{k}_{nm}$ .

Очевидно, в первом приближении теории возмущений интересующий нас переход не может иметь места. Он, однако, возможен во втором приближении, причем имеются две группы промежуточных состояний. В первой из них первый атом находится в состоянии  $u_n$ , второй — в состоянии  $u_0$ , а волновой вектор рассеиваемого электрона равен  $\mathbf{k}_{n0}$ . Во второй группе первый атом находится в состоянии  $u_0$ , второй — в состоянии  $u_m$ , а волновой вектор электрона есть  $\mathbf{k}_{0m}$ . Таким образом, матричный элемент второго порядка (29.20) имеет вид

$$\sum_{\mathbf{k}_{n0}} \frac{(H_2)_{nm, n0} (H_1)_{n0, 00}}{E_{00} - E_{n0}} + \sum_{\mathbf{k}_{0m}} \frac{(H_1)_{nm, 0n} (H_2)_{0m, 00}}{E_{00} - E_{0m}}, \quad (30.12)$$

$$E_{00} = 2\varepsilon_0 + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}, \quad E_{n0} = \varepsilon_n + \varepsilon_0 + \frac{\hbar^2 k_{n0}^2}{2m},$$

$$E_{0m} = \varepsilon_0 + \varepsilon_m + \frac{\hbar^2 k_{0m}^2}{2m}.$$

Мы вычислим здесь явно только первую сумму, а затем покажем, как нужно изменить результат, чтобы найти и вторую сумму. Входящие в сумму матричные элементы равны

$$(H'_2)_{nm, n0} = L^{-3} \int \int \bar{u}_m(2) e^{-i\mathbf{k}_{nm} \cdot \mathbf{r}} H'_2(2, \mathbf{r}) u_0(2) e^{i\mathbf{k}_{n0} \cdot \mathbf{r}} d\tau_2 d\tau,$$

$$(H'_1)_{n0, 00} = L^{-3} \int \int \bar{u}_n(1) e^{-i\mathbf{k}_{n0} \cdot \mathbf{r}'} H'_1(1, \mathbf{r}') u_0(1) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}'} d\tau_1 d\tau'.$$

(30.13)

Здесь цифрами 1 и 2 обозначены все внутренние координаты первого и второго атомов,  $d\tau_1$  и  $d\tau_2$  представляют собой соответствующие элементы объема, векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  являются переменными интегрирования, характеризующими положение падающего электрона относительно начала координат (им соответствуют элементы объема  $d\tau$  и  $d\tau'$ ). В первой из формул (30.13) произведено интегрирование по координатам 1, во второй — по координатам 2; результат в обоих случаях равен единице.

**Вычисление суммы по  $\mathbf{k}$ .** Если подставить матричные элементы (30.13) в первую сумму (30.12) и поменять местами сумми-

рование и интегрирование, то необходимо будет вычислить сумму

$$\sum_{\mathbf{k}_{n0}} \frac{e^{i\mathbf{k}_{n0} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k_{n0}^2 - \kappa^2}, \quad \kappa^2 \equiv k_0^2 - \frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon_n - \varepsilon_0). \quad (30.14)$$

Если длина ребра куба  $L$  достаточно велика, то суммирование можно заменить интегрированием

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int \frac{e^{i\mathbf{k}_{n0} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k_{n0}^2 - \kappa^2} d\tau_{\mathbf{k}_{n0}}. \quad (30.15)$$

Интеграл в (30.15) имеет такой же вид, как и в выражении для функции Грина свободной частицы (26.12); нужно лишь должным образом определить правило обхода особой точки подынтегрального выражения  $k_{n0} = \kappa$ .

Данная особенность относится к типу, рассматривавшемуся в конце предыдущего параграфа; она связана с возможностью переходов первого порядка, при которых возбуждается только один атом. Как видно из (29.24), интеграл по абсолютной величине вектора  $\mathbf{k}_{n0}$  следует брать по вещественной оси, от нуля до бесконечности, обходя особую точку снизу. После интегрирования по углам подынтегральное выражение будет четной функцией  $k_{n0}$ , и, следовательно, контур можно отразить в начале координат. Полученный при этом контур будет в точности совпадать с контуром, использованным при вычислении функции Грина (26.13) и изображенным на фиг. 21, а. Поэтому из предыдущих результатов мы сразу получаем явное выражение для суммы (30.14):

$$\frac{L^3}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (30.16)$$

**Матричный элемент второго порядка.** Матричные элементы (30.13) удобно переписать, вводя новые функции:

$$F_m(\mathbf{r}-\mathbf{R}) = \int \bar{u}_m(2) H'_2(2, \mathbf{r}) u_0(2) d\tau_2, \\ F_n(\mathbf{r}') = \int \bar{u}_n(1) H'_1(1, \mathbf{r}') u_0(1) d\tau_1.$$

Эти функции заметно отличны от нуля лишь в том случае, если аргументы их достаточно малы (по порядку величины не превышают „атомного радиуса“). Положим

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{R},$$

тогда практически весь вклад в первую сумму в (30.12) определяется малыми значениями  $r'$  и  $r''$ . Поэтому при определении главной части (30.16) при больших  $R$  можно приближенно положить

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = |\mathbf{R} + \mathbf{r}'' - \mathbf{r}'| \approx R + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}''}{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'}{R}, \\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} \approx R^{-1}.$$

В этом приближении первая сумма в (30.12) принимает вид

$$-\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi L^3} \frac{e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{nm}) \cdot \mathbf{R}}}{R} \int F_n(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}'} d\tau' \times \\ \times \int F_m(\mathbf{r}'') e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{nm}) \cdot \mathbf{r}''} d\tau'', \quad (30.17)$$

где  $\mathbf{k}$  — вектор, параллельный  $\mathbf{R}$ , с абсолютной величиной  $k$ , определяемой формулой (30.14).

Аналогично для второй суммы в (30.12) получим

$$-\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi L^3} \frac{e^{i(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{R}}}{R} \int F_n(\mathbf{r}') e^{-i(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_{nm}) \cdot \mathbf{r}'} d\tau' \times \\ \times \int F_m(\mathbf{r}'') e^{i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}''} d\tau'', \quad (30.18)$$

где вектор  $\mathbf{k}'$  параллелен  $\mathbf{R}$ , а его абсолютная величина определяется формулой (30.14) с заменой  $\varepsilon_n$  на  $\varepsilon_m$ .

Чтобы найти дифференциальное эффективное сечение, нужно составить сумму выражений (30.17) и (30.18), подставить ее вместо  $H'_{21}$  в (30.6) и заменить там  $k$  на  $k_{nm}$ . По закону сохранения энергии

$$k_{nm}^2 = k_0^2 - \frac{2m}{\hbar^2} (\varepsilon_n + \varepsilon_m - 2\varepsilon_0).$$

**Обсуждение формулы для эффективного сечения.** Интегралы, фигурирующие в (30.17) и (30.18), обладают характерной структурой, связанной с особенностями применения теории возмущений к задаче о столкновениях. Они очень малы, за исключением тех случаев, когда абсолютное значение волнового вектора в показателе степени по порядку величины не превышает  $1/a$ , где  $a$  — константа порядка линейных размеров атома (лишь при этом функции  $F$  заметно отличны от нуля). Отсюда следует, что выражение (30.17) заметно отлично от нуля, только если векторы  $\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_{nm}$  почти одинаковы как по величине, так и по направлению. Поскольку падающий электрон, по предположению, движется быстро, абсолютные значения этих векторов во всяком случае почти одинаковы. Поэтому эффективное сечение будет заметно отлично от нуля только при условии, что векторы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{k}_{nm}$  почти параллельны  $\mathbf{k}_0$ . Легко видеть, что допустимое угловое отклонение векторов от параллельности по порядку величины составляет  $1/k_0 a$ .

Аналогично выражение (30.18) заметно отлично от нуля только в том случае, когда вектор  $\mathbf{k}'$  и, следовательно, вектор  $\mathbf{R}$  почти антипараллельны  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}_{nm}$ ; при этом оба последних вектора почти параллельны друг другу.

Оба выражения вместе показывают, что вероятность возбуждения двух атомов имеет заметную величину лишь в том случае, когда линия, соединяющая ядра, почти параллельна направлению

движения падающего электрона. Очевидно также, что эффективное сечение убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между двумя атомами  $R$ , как и следовало ожидать.

### § 31. Адиабатическое приближение и аппроксимация внезапных возмущений

В этом параграфе мы рассмотрим приближенные методы, в которых определенные условия накладываются не на величину зависящей от времени части гамильтониана, а на скорость ее изменения со временем. Если гамильтониан с течением времени меняется очень медленно, то можно ожидать, что приближенными решениями уравнения Шредингера будут стационарные собственные функции оператора энергии, вычисленные в данный момент времени (собственные функции „мгновенного” гамильтониана). Таким образом, какая-либо собственная функция, найденная для некоторого момента времени, непрерывно переходит в соответствующую собственную функцию для более позднего момента времени (адиабатическое приближение). Если же гамильтониан изменяет свой вид за очень короткий промежуток времени, то можно ожидать, что волновая функция при этом изменится незначительно, хотя коэффициенты разложения ее по собственным функциям начального и конечного гамильтонианов могут быть совершенно различными (аппроксимация внезапных возмущений). Мы выясним, в какой степени применимы приближения обоих указанных типов.

**Разложение по мгновенным собственным функциям оператора энергии.** Рассмотрим прежде всего адиабатическое приближение и попытаемся решить уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(t) \psi, \quad (31.1)$$

где  $H(t)$  — медленно меняющаяся функция<sup>1)</sup>. Собственные функции оператора энергии в каждый данный момент времени предполагаются известными:

$$H(t) u_n(t) = E_n(t) u_n(t). \quad (31.2)$$

Предположим также, что функции  $u_n$  ортонормированы, собственные значения не вырождены и принадлежат дискретному спектру; фазы функций  $u_n$  будут выбраны позднее.

Пусть в нулевой момент времени волновая функция известна; для более поздних моментов времени положим

$$\psi = \sum_n a_n(t) u_n(t) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \right]. \quad (31.3)$$

<sup>1)</sup> См. работы Борна и Фока [4] и Гюттингера [5].

Подставляя это в (31.1), получаем

$$i\hbar \sum_n \left( \dot{a}_n u_n + a_n \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} a_n u_n E_n \right) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \right] = \\ = H \sum_n a_n u_n \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \right].$$

Так как, согласно (31.2),  $Hu_n = E_n u_n$ , то последний член слева взаимно уничтожается с правой частью. Умножая слева на  $\bar{u}_k$  и интегрируя по всем координатам системы (что обозначается символом  $\int d\tau$ ), получаем

$$\dot{a}_k = - \sum_n a_n \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^t (E_k - E_n) dt' \right] \int \bar{u}_k \frac{\partial u_n}{\partial t} d\tau. \quad (31.4)$$

Теперь попытаемся найти такое выражение для интеграла в правой части (31.4), которому было бы легче дать физическое истолкование. Дифференцируя соотношения (31.2) по  $t$ , получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} u_n + H \frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial E_n}{\partial t} u_n + E_n \frac{\partial u_n}{\partial t}.$$

Умножая слева на  $\bar{u}_k$  и интегрируя по координатам, получаем

$$\int \bar{u}_k \frac{\partial H}{\partial t} u_n d\tau + \int \bar{u}_k H \frac{\partial u_n}{\partial t} d\tau = E_n \int \bar{u}_k \frac{\partial u_n}{\partial t} d\tau, \quad k \neq n. \quad (31.5)$$

Пользуясь соотношением (22.10) и учитывая, что оператор  $H$  эрмитов, второй интеграл в левой части (31.5) можно переписать следующим образом:

$$\int \bar{u}_k H \frac{\partial u_n}{\partial t} d\tau = \int (H\bar{u}_k) \frac{\partial u_n}{\partial t} d\tau = E_k \int \bar{u}_k \frac{\partial u_n}{\partial t} d\tau.$$

Подставляя полученное выражение в (31.5), получаем для интеграла в правой части (31.4)

$$\int \bar{u}_k \frac{\partial u_n}{\partial t} d\tau = - \frac{\int \bar{u}_k \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right) u_n d\tau}{E_k - E_n}, \quad n \neq k. \quad (31.6)$$

**Выбор фаз.** Чтобы переписать уравнение (31.4) в желательной для нас форме, нужно знать выражение для интеграла

$$\int \bar{u}_n \frac{\partial u_n}{\partial t} d\tau.$$

Сейчас мы покажем, что этот интеграл является чисто мнимым и что его можно сделать равным нулю, если соответствующим

образом выбрать зависимость фазы функции  $u_n$  от  $t$ . Дифференцируя нормировочный интеграл для  $u_n$ , получаем

$$0 = \frac{d}{dt} \int \bar{u}_n u_n d\tau = \int \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} u_n d\tau + \int \bar{u}_n \frac{\partial u_n}{\partial t} d\tau.$$

Поскольку интегралы, стоящие справа, комплексно сопряжены друг с другом, каждый из них должен быть чисто мнимым:

$$\int \bar{u}_n \frac{\partial u_n}{\partial t} d\tau = i\alpha(t).$$

Изменим теперь фазу функции  $u_n$  на некоторую величину  $\gamma(t)$ . Это можно сделать, поскольку в любой момент времени фазы собственных функций произвольны. Для новой собственной функции  $u'_n \equiv u_n e^{i\gamma(t)}$  имеем

$$\int \bar{u}'_n \frac{\partial u'_n}{\partial t} d\tau = \int \bar{u}_n e^{-i\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (u_n e^{i\gamma}) d\tau = i\alpha(t) + i \frac{d}{dt} \gamma(t). \quad (31.7)$$

Таким образом, если положить  $\gamma(t) = -\int_0^t \alpha(t') dt'$ , то интеграл в левой части (31.7) обратится в нуль. В дальнейшем мы будем считать, что функция  $u_n$  всюду, в том числе и в (31.6), заменена на  $u'_n$ , причем штрихи будут опускаться.

Полагая, как и выше,  $\hbar\omega_{kn} = E_k - E_n$ , подставим (31.6) в (31.4),

$$\dot{a}_k = \sum'_n \frac{a_n}{\hbar\omega_{kn}} \left[ \exp \left( i \int_0^t \omega_{kn} dt' \right) \right] \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{kn}. \quad (31.8)$$

Штрих у знака суммы означает, что слагаемое с  $n = k$  исключается из суммирования. Последний член в правой части представляет собой  $kn$ -й матричный элемент оператора  $\partial H / \partial t$ .

**Адиабатическое приближение.** Система уравнений (31.8) в точности эквивалентна уравнению Шредингера (31.1), коль скоро  $k$  принимает все возможные значения. Допуская, что все величины ( $a_n$ ,  $\omega_{kn}$ ,  $u_n$ ,  $\partial H / \partial t$ ) в правой части (31.8) не меняются со временем, оценим порядок величины  $a_k$ . Допустим также, что при  $t = 0$  система находилась в состоянии  $m$ ; тогда можно положить  $a_n = \delta_{nm}$ . Таким образом, мы получаем

$$\dot{a}_k \approx \frac{1}{\hbar\omega_{km}} \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{km} e^{i\omega_{km}t}, \quad k \neq m,$$

откуда после интегрирования имеем

$$a_k(t) \approx \frac{1}{i\hbar\omega_{km}^2} \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{km} (e^{i\omega_{km}t} - 1), \quad k \neq m. \quad (31.9)$$

В пределах принятых выше аппроксимаций из формулы (31.9) следует, что даже если  $H$  изменяется со временем на конечную

величину, что амплитуды вероятности всех состояний, кроме начального, осциллируют, не обнаруживая регулярных изменений даже за длительное время. Соответственно, если изменение гамильтониана за боровский период для перехода  $m \rightarrow k$  мало по сравнению с разностью энергий этих состояний, то вероятность перехода будет мала. Изменение амплитуды  $k$ -го состояния за большой промежуток времени по порядку величины равно отношению двух указанных величин:

$$|a_k| \sim \left| \frac{(1/\omega_{km}) (\partial H/\partial t)}{E_k - E_m} \right|. \quad (31.10)$$

**Связь с теорией возмущений.** Особое положение возникает в том случае, когда частота изменения гамильтониана почти совпадает с частотой одного из переходов, скажем  $\omega_{km}$ . Это — случай резонанса, и в соответствии с § 29 можно ожидать, что даже небольшое изменение  $H$  может привести к заметным изменениям амплитуды  $a_k$  для большого промежутка времени. В этом случае соотношение (31.10) уже не выполняется, пренебрегать зависимостью  $\partial H/\partial t$  от времени нельзя и переход от (31.8) к (31.9) оказывается неоправданным.

Чтобы более тщательно рассмотреть этот случай, допустим, что лишь небольшая часть гамильтониана осциллирует с угловой частотой  $\omega$ , близкой к  $\omega_{km}$

$$H = H_0 + H' \sin \omega t, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \omega H' \cos \omega t,$$

где оператор  $H'$  мал по сравнению с  $H_0$ , причем как  $H'$ , так и  $H_0$  не зависят от времени. Если теперь пренебречь зависимостью  $a_n$ ,  $\omega_{kn}$  и  $u_n$  от времени и положить, как и выше,  $a_n = \delta_{nm}$ , то система (31.8) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &\approx \frac{\omega H'_{km} \cos \omega t}{\hbar \omega_{km}} e^{i \omega_{km} t} = \\ &= \frac{\omega H'_{km}}{2\hbar \omega_{km}} [e^{i(\omega_{km} + \omega)t} + e^{i(\omega_{km} - \omega)t}]. \end{aligned}$$

Она легко интегрируется; в результате получим

$$a_k(t) \approx \frac{\omega H'_{km}}{2i\hbar \omega_{km}} \left[ \frac{e^{i(\omega_{km} + \omega)t} - 1}{\omega_{km} + \omega} + \frac{e^{i(\omega_{km} - \omega)t} - 1}{\omega_{km} - \omega} \right]. \quad (31.11)$$

Отсюда следует, что адиабатическое приближение (31.10) оказывается непригодным, если  $\omega_{km} \approx \pm \omega$ , так как в этом случае выражение (31.11) систематически возрастает с течением времени. Если  $\omega_{km}$  близко к  $+\omega$ , то можно пренебречь первым членом в скобках и отношение  $\omega/\omega_{km}$ , входящее в множитель перед скобками, заменить на  $+1$ ; если же  $\omega_{km}$  близко к  $-\omega$ , то можно пренебречь вторым членом в скобках, а  $\omega/\omega_{km}$  заменить на  $-1$ . В обоих слу-

чаях формула (31.11) согласуется с результатом теории возмущений (29.17).

**Скачкообразное изменение  $H$ .** В качестве введения к аппроксимации внезапных возмущений рассмотрим случай скачкообразного изменения гамильтониана от одного значения к другому, причем как первое, так и второе значения постоянны во времени. Пусть  $H = H_0$  при  $t < 0$  и  $H = H_1$  при  $t > 0$ , причем

$$H_0 u_n = E_n u_n, \quad H_1 v_m = E_m v_m,$$

и функции  $u$  и  $v$  образуют полную ортонормированную систему. (Они необязательно принадлежат дискретному спектру.) Общее решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \text{Sa}_n u_n e^{-iE_n t/\hbar}, & t < 0, \\ \psi &= \text{Sb}_m v_m e^{-iE_m t/\hbar}, & t > 0, \end{aligned} \quad (31.12)$$

где коэффициенты  $a$  и  $b$  не зависят от времени.

Так как волновое уравнение (31.1) первого порядка по времени, то во всех точках пространства при  $t = 0$  волновая функция (но не ее производная по времени) должна быть непрерывной функцией времени. Это позволяет выразить величины  $b$  через  $a$ , приравнявая оба решения (31.12) при  $t = 0$ . Умножая на какую-нибудь из функций  $\bar{v}$  и интегрируя затем по координатам, получаем

$$b_m = \text{Sa}_n \int \bar{v}_m u_n d\tau. \quad (31.13)$$

Появление конечных состояний  $m$ , энергия которых отлична от начальной, связано с тем, что внезапно изменяющийся гамильтониан имеет компоненты Фурье, соответствующие нулевым частотам (см. § 29).

**Аппроксимация внезапных возмущений.** Аппроксимация внезапных возмущений заключается в применении соотношений (31.13) для случая, когда гамильтониан изменяется за очень короткий, но конечный промежуток времени  $t_0$ . Чтобы оценить возникающую при этом ошибку в коэффициенте  $b_m$ , рассмотрим задачу, которая хотя и является несколько искусственной, но зато допускает простое формальное решение. Пусть  $H = H_0$  при  $t < 0$ ,  $H = H_1$  при  $t > t_0$  и  $H = H_i$  при  $0 < t < t_0$ . Промежуточный гамильтониан, предполагаемый не зависящим от времени, имеет полную ортонормированную систему собственных функций

$$H_i w_k = E_k w_k.$$

Истинное решение можно (с постоянными коэффициентами) разложить по функциям  $w$ :

$$\psi = \text{Sc}_k w_k e^{-iE_k t/\hbar}, \quad 0 < t < t_0,$$



Условие непрерывности при  $t = 0$  дает

$$c_k = \mathbf{S}_n a_n \int \bar{w}_k u_n d\tau. \quad (13.14)$$

Аналогично, используя условие непрерывности при  $t = t_0$  и принимая во внимание (31.14), получаем

$$\begin{aligned} b_m &= \mathbf{S}_k c_k \int \bar{v}'_m w'_k d\tau' e^{-i(E_k - E_m)t_0/\hbar} = \\ &= \mathbf{S}_k \mathbf{S}_n a_n \int \bar{w}_m u_n d\tau \int \bar{v}'_m w'_k d\tau' e^{-i(E_k - E_m)t_0/\hbar} = \\ &= \mathbf{S}_n a_n \int \int \bar{v}'_m [\mathbf{S}_k w'_k \bar{w}_k e^{-i(E_k - E_m)t_0/\hbar}] u_n d\tau d\tau', \quad (31.15) \end{aligned}$$

где штрих означает другую группу переменных интегрирования. В силу условия полноты (10.11) выражение в скобках в последнем члене (31.15) при  $t_0 = 0$  равно произведению  $\delta$ -функций от разности штрихованных и нештрихованных координат; при этом выражение для  $b_m$  совпадает с (31.13), как это и должно быть.

Разница между точным (31.15) и приближенным (31.13) выражениями для  $b_m$  определяется разностью между  $\exp[-i(E_k - E_m)t_0/\hbar]$  и единицей. Эта разность мала, если время  $t_0$  мало по сравнению со всеми периодами  $\hbar/(E_k - E_m)$ , соответствующими состояниям  $k$  и  $m$ , в которые может попасть система при изменении  $H$ .

Полезным критерием применимости указанного приближения можно считать малость  $t_0$  по сравнению с периодами начальных состояний, так как новые состояния, характеризующиеся значительно меньшими периодами (т. е. более высокими энергиями), возбуждаются с относительно малыми амплитудами. В тех случаях, когда апроксимация внезапных возмущений оказывается полезной, ошибка в коэффициенте  $b_m$  (а следовательно, и в определении  $\psi$ ) по порядку величины равна отношению  $t_0$  к типичному начальному периоду.

**Временное возмущение.** Интересным примером применения соотношения (31.15) является случай, когда начальный и конечный гамильтонианы одинаковы ( $H_1 = H_0$ ,  $v_m = u_m$ ) и в начальный момент система находится в определенном состоянии  $n$ . Тогда, если время  $t_0$  настолько мало, что указанный выше критерий выполняется, экспоненциальное выражение в последнем члене (31.15) можно разложить в ряд, ограничившись двумя первыми членами:

$$\begin{aligned} b_m &\approx \int \int \bar{u}'_m \mathbf{S}_k w'_k \bar{w}_k \left[ 1 - \frac{it_0}{\hbar} (E_k - E_m) \right] u_n d\tau d\tau' = \\ &= \int \int \bar{u}'_m \mathbf{S}_k w'_k \bar{w}_k \left[ 1 - \frac{it_0}{\hbar} (E_k - E_m) \right] u_n d\tau d\tau'. \end{aligned}$$

Пользуясь условием полноты и ортогональностью функций  $u_m$  и  $u_n$  при  $m \neq n$ , а также принимая во внимание равенство  $E_m \bar{u}_m = H_0 \bar{u}_m$

и соотношение (22.10), это выражение можно переписать в виде

$$b_m \approx -\frac{i t_0}{\hbar} \int \bar{u}_m (H_i - H_0) u_n d\tau, \quad m \neq n. \quad (31.16)$$

Формулу (31.16) можно обобщить на тот случай, когда оператор  $H_i$  зависит от времени. Для этой цели надо заменить  $H_i t_0$  на  $\int_0^{t_0} H_i dt$ ; результат по-прежнему справедлив с точностью до величин первого порядка относительно  $t_0$ .

Следует заметить, что формула (31.16) для  $b_m$  может оказаться полезной также и в том случае, когда оператор  $H_i - H_0$  не мал по сравнению с  $H_0$ ; важно лишь, чтобы выполнялся общий критерий применимости аппроксимации внезапных возмущений (т. е. чтобы значение  $t_0$  было достаточно мало). С другой стороны, теория возмущений, развитая в § 29, полезна, если к гамильтониану добавляется небольшое зависящее от времени возмущение, действующее в течение длительного промежутка времени.

**Возмущение гармонического осциллятора.** В качестве простого примера применения приближенных методов, развитых в настоящем параграфе, рассмотрим линейный гармонический осциллятор, у которого положение точки равновесия  $a(t)$  зависит от времени. Гамильтониан этой системы имеет вид

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} K [x - a(t)]^2.$$

В каждый данный момент времени собственные функции оператора энергии имеют вид (13.13) [со сдвигом точки равновесия в положение  $a(t)$ ], а уровни энергии те же, что и в § 13:

$$u_n(x) = N_n H_n[\alpha(x - a)] e^{-\alpha^2(x - a)^2/2}, \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c.$$

Предположим сначала, что точка равновесия движется медленно, и исследуем, когда можно применять адиабатическое приближение. Если первоначально осциллятор находится в основном состоянии ( $n = 0$ ), то матричный элемент производной от гамильтониана по времени  $\partial H / \partial t = -K \dot{a} (x - a)$  отличен от нуля лишь для первого возбужденного состояния. При помощи (13.18) можно получить

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{10} = -\frac{K \dot{a}}{\alpha \sqrt{2}} = -K \dot{a} \left(\frac{1}{2} \hbar\right)^{1/2} (Km)^{-1/4}.$$

Подставляя это значение в соотношение (31.9), видим, что коэффициент перед зависящим от времени множителем в выражении для

амплитуды первого возбужденного состояния равен

$$\frac{K\dot{a}}{\hbar\omega} \left(\frac{1}{2}\hbar\right)^{1/2} = \frac{\dot{a}}{(2\hbar\omega_c/m)^{1/2}}.$$

Физический смысл этого равенства можно понять, замечая, что по порядку величины знаменатель равен максимальной скорости гипотетического классического осциллятора, энергия которого равна нулевой. Поэтому адиабатическое приближение является удовлетворительным, если скорость движения точки равновесия мала по сравнению со скоростью классического осциллятора. Легко видеть, что для  $n$ -го возбужденного состояния скорость точки равновесия должна быть мала по сравнению с соответствующей скоростью классического осциллятора, деленной на  $n$ .

Аппроксимацией внезапных возмущений можно пользоваться (для основного состояния осциллятора), если время, необходимое для перемещения точки равновесия из одного стационарного положения в другое, мало по сравнению с  $1/\omega_c$ . Пусть точка равновесия сдвигается на расстояние  $a$  в направлении движения, тогда как из (31.13) видно, что амплитуда вероятности  $n$ -го состояния после перемещения равна

$$\frac{\alpha^{1/2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_n(x-a) e^{-\alpha^2 x^2/2} dx = \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_n(x) e^{-\alpha^2(x+a)^2/2} dx.$$

С точностью до знака у  $a$  этот интеграл совпадает с выражением для коэффициента  $A_n$  в разложении (13.21); он уже вычислялся с помощью производящей функции для полиномов Эрмита (13.10). Результаты § 13 показывают, что с наибольшей вероятностью возбуждаются состояния, для которых классическая амплитуда колебаний по порядку величины равна перемещению  $a$ . Это согласуется с соответствующим классическим результатом.

### ЗАДАЧИ

1. Атом водорода, находящийся в основном состоянии, помещен между пластинами конденсатора. На последние подается импульс напряжения, в связи с чем в конденсаторе возникает однородное электрическое поле, изменяющееся со временем по закону:

$$\mathbf{E} = 0, \quad t < 0, \quad \mathbf{E} = E_0 e^{-t/\tau}, \quad t > 0.$$

В первом приближении теории возмущений вычислить вероятность того, что спустя большой промежуток времени атом окажется в состоянии  $2S$  (200). Чему равна вероятность перехода в одно из состояний  $2P$ ?

2. К конденсатору, рассмотренному в задаче 1, приложено переменное напряжение с угловой частотой  $\omega > me^4/2\hbar^2$ . Вычислить отнесенную к единице времени вероятность ионизации атома водорода. Считать (только в данной задаче), что в ионизованном состоянии волновая функция электрона имеет вид плоской волны.

3. Обобщить соотношение (29.20) на тот случай, когда переходы могут происходить лишь в третьем приближении теории возмущений. Считать, что энергии всех промежуточных состояний отличны как от начального, так и от конечного значений.

4. С помощью теории возмущений найти дифференциальное эффективное сечение для столкновений с переходом атома водорода из состояния  $1S$  в  $2S$ . Проинтегрировав это выражение, найти полное эффективное сечение и показать, что таким путем получается результат (30.11), справедливый при высокой энергии падающих частиц.

5. С помощью теории возмущений найти дифференциальное эффективное сечение для столкновений, при которых атом водорода переходит из состояния  $1S$  в  $2P$ . Показать, что полное эффективное сечение рассеяния дается выражением (30.11), полученным в предположении о высокой энергии падающих частиц.

6. Обсудить замечание, сделанное в конце предпоследнего абзаца § 31. В частности, на основании физических соображений разъяснить, почему условие малости скорости точки равновесия по сравнению со скоростью соответствующего классического осциллятора не является достаточным для применимости адиабатического приближения.

7. При каких условиях решение волнового уравнения  $\psi(t)$  выражается через решение для начального момента времени и через гамильтониан  $H$  по формуле  $\psi(t) = [\exp(-iHt/\hbar)] \psi(0)$ ? Показать, что, вообще говоря, фигурирующий в показателе степени оператор  $Ht$  нельзя заменить на  $\int_0^t H dt'$ .

Показать, однако, что с точностью до величин первого порядка малости относительно  $t_0$  в формуле (31.16) можно заменить  $Ht_0$  на  $\int_0^{t_0} H dt$ .

8. Ядро атома водорода с массовым числом 3 является радиоактивным; оно испускает электрон с энергией, не превышающей 17 000 эв, превращаясь в ядро атома гелия с тем же массовым числом. Показать, что к внеядерному электрону, первоначально находившемуся в атоме водорода, можно применять аппроксимацию внезапных возмущений, в то время как другие приближенные методы приводят в данном случае к худшим результатам. Предполагая, что первоначально атом водорода находится в состоянии  $1S$ , определить численное значение вероятности обнаружить получающийся ион атома гелия в состояниях  $1S$ ,  $2S$  и  $2P$ . Качественно рассмотреть вопрос о балансе энергии в этом процессе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **112A**, 661 (1926); **114A**, 243 (1927).
2. Whittaker E. T., Watson G. N., A Course of Modern Analysis, 4th ed., Cambridge, London, 1935. (Имеется русский перевод: Е. Уиттекер, Г. Ватсон, Курс современного анализа, М.—Л., 1934.)
3. Heisenberg W., The Physical Principles of the Quantum Theory, Chicago, 1930. (Имеется русский перевод: В. Гейзенберг, Физические принципы квантовой теории, М.—Л., 1932.)
4. Born M., Fock V., Zs. f. Phys., **51**, 165 (1928).
5. Güttinger P., Zs. f. Phys., **73**, 169 (1931).

## ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ И СПИН

Развитая выше квантовая теория частиц страдает тремя недостатками. Во-первых, предполагалось, что при одновременном описании двух или более частиц, например электрона и протона в атоме водорода (§ 16) или падающего и атомного электронов, претерпевающих неупругое столкновение (§ 30), частицы можно отличить друг от друга. Это допущение справедливо в первом примере, так как масса и электрический заряд электрона и протона различны. Однако во втором случае нет наблюдаемой разницы между падающим и атомным электронами; последствия этой *тождественности* частиц должны учитываться в самом формализме теории. Во-вторых, в теории пренебрегают внутренним *спиновым моментом количества движения* (или просто *спином*), которым фактически обладают некоторые встречающиеся в природе частицы<sup>1)</sup>. В-третьих, до сих пор мы не принимали во внимание требований специальной теории относительности. Роль последней, очевидно, должна быть заметна при описании частиц, движущихся со скоростями, близкими к скорости света.

В настоящей главе излагаются способы устранения первых двух недостатков и рассматриваются некоторые примеры. Релятивистским эффектам будет посвящена гл. XII.

### § 32. Тожественные частицы

Тожественные частицы невозможно различить по какому-либо внутреннему свойству, так как в противном случае они не были бы полностью тождественны. В классической механике, где существуют вполне определенные траектории отдельных частиц, можно в принципе различить тождественные частицы, отличающиеся друг от друга только траекториями, так как за каждой из частиц можно следить в продолжение всего опыта. В квантовой механике вследствие конечного размера и распыливания волновых пакетов, описывающих отдельные частицы, зачастую невозможно различить тождественные частицы по их положению, особенно если они

<sup>1)</sup> Впервые наличие спина у электронов было открыто Уленбеком и Гаудсмитом [1].

заметно взаимодействуют друг с другом. Это относится, в частности, к электронам одного и того же атома, когда описание с помощью движущихся волновых пакетов оказывается полностью непригодным. Однако электроны различных атомов, которые достаточно удалены друг от друга, с большой степенью точности можно считать различными. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые эффекты, возникающие при квантовомеханическом рассмотрении систем из двух или более частиц и связанные с тождественностью частиц. Далее будут рассмотрены другие эффекты, в которых существенную роль играет спин.

**Физический смысл тождественности.** Принципиальная невозможность различить тождественные частицы<sup>1)</sup> в большинстве случаев, рассматриваемых квантовой механикой, может приводить к эффектам, не имеющим классических аналогий. Рассмотрим, например, упругое столкновение двух тождественных частиц, взаимодействующих друг с другом по определенному закону, и сравним его со столкновением двух различных частиц, взаимодействующих по тому же закону.

При классическом описании эти опыты принципиально друг от друга не отличаются, поскольку как в первом, так и во втором случаях рассеивающую и рассеиваемую частицы можно отличить друг от друга. Однако практически это обычно бывает возможно лишь во втором опыте. Таким образом, согласно классической механике, дифференциальное эффективное сечение, измеряемое в первом опыте, равно сумме соответствующих сечений для рассеивающих и рассеиваемых частиц во втором опыте. В соответствующем квантовомеханическом случае тождественные частицы в первом опыте нельзя различить по их траекториям, так как невозможно локализовать частицы, не нарушая при этом процесса рассеяния. Таким образом, различие между рассеивающей и рассеиваемой частицами не имеет физического смысла и простое классическое соотношение между результатами обоих опытов может и не иметь места.

Под *тождественными* мы будем понимать такие частицы, при перестановке которых в любых возможных условиях физическое состояние системы остается неизменным. Иногда тождественные частицы можно отличить друг от друга, например в тех случаях, когда описывающие их волновые пакеты не перекрываются. Частицы можно различить также, если они обладают спином, значение которого сохраняется при столкновении.

Будем считать, что проекция спина на некоторую ось не меняется при столкновении. В этом случае можно различать частицы, если соответствующие проекции их спинов различны. Естественно,

<sup>1)</sup> Фактически дело, конечно, не в наших экспериментальных возможностях, а в объективных свойствах частиц. — *Прим. перев.*

подобные результаты должны сами собой вытекать из того формализма, который будет развит ниже.

**Симметричные и антисимметричные волновые функции.** Уравнение Шредингера для системы  $n$  тождественных частиц имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(1, 2, \dots, n; t) = H(1, 2, \dots, n) \psi(1, 2, \dots, n; t), \quad (32.1)$$

где каждое число характеризует все координаты частицы (пространственные и спиновые).

Гамильтониан, очевидно, симметричен относительно любой перестановки своих аргументов. Действительно, в силу тождественности частиц их можно менять местами, не меняя гамильтониана.

Уравнение (32.1) имеет два типа решений, свойства симметрии которых представляют особый интерес. Если волновая функция не меняется при перестановке любой пары частиц, чему соответствует перестановка аргументов, то она называется *симметричной*. Если же при перестановке любой пары частиц знак  $\psi$  изменяется, то волновая функция называется *антисимметричной*. Покажем теперь, что с течением времени характер симметрии волновой функции не изменяется. Пусть в некоторый момент времени  $t$  функция  $\psi_S$  симметрична. Тогда функция  $H\psi_S$  тоже симметрична, и из уравнения (32.1) следует, что симметрична и производная  $\partial\psi_S/\partial t$ . Поскольку в момент  $t$  волновая функция  $\psi_S$  и ее производная по времени симметричны, волновая функция будет симметричной и в более поздний момент  $t + dt$ , ибо она равна  $\psi_S + (\partial\psi_S/\partial t) dt$ . Такой процесс последовательного интегрирования волнового уравнения можно в принципе продолжать сколь угодно долго, и мы видим, что функция  $\psi_S$  все время будет оставаться симметричной. Аналогично, если функция  $\psi_A$  в некоторый момент времени антисимметрична, то антисимметричными будут и  $H\psi_A$  и  $\partial\psi_A/\partial t$ . Интегрируя аналогичным образом волновое уравнение, убеждаемся, что волновая функция  $\psi_A$  будет оставаться антисимметричной все время.

Это доказательство не изменится, если аргументами  $H$  и  $\psi$  будут координаты тождественных частиц, входящих в две или более различные группы; поэтому если волновая функция симметрична или антисимметрична по отношению к перестановке координат тождественных частиц, входящих в каждую группу, то характер симметрии ее не изменится со временем. В связи с этим различные группы тождественных частиц, встречающихся в природе, могут обладать определенными свойствами симметрии, что и имеет место в действительности; при этом опытные данные однозначно говорят о том, что электроны, протоны и нейтроны описываются антисимметричными волновыми функциями.

**Линейные комбинации несимметризованных функций.** Покажем теперь, каким образом можно получить  $\psi_S$  и  $\psi_A$  из функции  $\psi$ , представляющей собой общее несимметризованное решение уравнения (32.1). Если совершить какую-либо перестановку аргументов  $\psi$ , то в результате вновь получится решение уравнения (32.1). Действительно, уравнение (32.1) не изменится, если в обеих его частях совершить одну и ту же перестановку (такая перестановка означает лишь изменение нумерации частиц), а оператор  $H$  симметричен, т. е. не меняется при перестановке аргументов; поэтому для функции  $\psi$  с переставленными аргументами получится уравнение, совпадающее с уравнением (32.1). Таким путем из любого решения можно получить  $n!$  решений, соответствующих каждой из  $n!$  перестановок  $n$  аргументов функции  $\psi$ . Любая линейная комбинация этих функций, также будет решением волнового уравнения (32.1).

Беря сумму всех линейно независимых функций, полученных из первоначальной с помощью различных перестановок, получим симметричную (ненормированную) волновую функцию  $\psi_S$ . Действительно, при перестановке любой пары частиц одно из слагаемых переходит в другое и наоборот, так что полная волновая функция остается неизменной. Антисимметричную (ненормированную) волновую функцию можно найти, складывая все решения, полученные из первоначального в результате четного числа перестановок, и вычитая все решения, полученные в результате нечетного числа перестановок. Если при перестановке какой-либо пары частиц решение не меняется, то из него, очевидно, нельзя получить отличную от нуля антисимметричную волновую функцию. Если гамильтониан не зависит от времени, то можно найти стационарные решения

$$\psi(1, 2, \dots, n; t) = u(1, 2, \dots, n) e^{-iEt/\hbar},$$

где

$$[H(1, 2, \dots, n) - E] u(1, 2, \dots, n) = 0.$$

Из сказанного выше ясно, что все решения, получаемые одно из другого перестановкой аргументов, образуют вырожденную совокупность. Это вырождение называется *обменным*. При  $n = 2$  можно получить  $2! = 2$  перестановки, которым соответствуют функции  $u(1, 2)$  и  $u(2, 1)$ . Беря в выражении

$$u(1, 2) \pm u(2, 1) \quad (32.2)$$

верхний и нижний знаки, получим соответственно симметричную и антисимметричную линейные комбинации. При  $n = 3$  имеется  $3! = 6$  перестановок, которым соответствуют функции

$u(1, 2, 3)$ ,  $u(2, 1, 3)$ ,  $u(3, 2, 1)$ ,  $u(1, 3, 2)$ ,  $u(2, 3, 1)$  и  $u(3, 1, 2)$ . Симметричную и антисимметричную линейные комбинации полу-



чим, беря верхний и нижний знак в выражении

$$[u(1, 2, 3) + u(2, 3, 1) + u(3, 1, 2)] \pm \\ \pm [u(2, 1, 3) + u(1, 3, 2) + u(3, 2, 1)]. \quad (32.3)$$

Из двух решений (32.2) можно составить все собственные функции, обменно вырожденные с  $u(1, 2)$ . С другой стороны, при  $n = 3$  есть четыре линейно независимые собственные функции, которые нельзя получить из двух функций (32.3). Эти дополнительные решения, всегда имеющие место при  $n > 2$ , можно выбрать таким образом, чтобы они обладали определенными свойствами симметрии, напоминающими свойства симметричного и антисимметричного решения, но более сложные; однако они, по-видимому, не описывают встречающихся в природе частиц.

**Различимость тождественных частиц.** Следует ожидать, что коль скоро координаты частиц не могут принимать одинаковых значений, результаты опыта не должны зависеть от характера симметрии волновой функции. При этом частицы все же можно различить — либо пространственно, либо по проекциям спина — несмотря на их тождественность. Естественно, в этом случае волновая функция двух частиц  $u(1, 2)$  может быть отлична от нуля, лишь если координата 1 лежит в некоторой области  $A$ , а координата 2 — в области  $B$ , причем области  $A$  и  $B$  не перекрываются.

Плотность вероятности координат в состоянии с волновой функцией  $u(1, 2)$  равна  $|u(1, 2)|^2$ , а выражения для плотности вероятности, определяемые симметризованными волновыми функциями (32.3), имеют вид

$$|u(1, 2) \pm u(2, 1)|^2 = |u(1, 2)|^2 + |u(2, 1)|^2 \pm 2 \operatorname{Re}[u(1, 2)\bar{u}(2, 1)], \quad (32.4)$$

где символ  $\operatorname{Re}$  означает вещественную часть. Если теперь функция  $u(1, 2)$  удовлетворяет только что сформулированному условию, то член в скобках везде равен нулю и правая часть (32.4) становится равной  $|u(1, 2)|^2 + |u(2, 1)|^2$ .

Таким образом, плотность вероятности, определяемая какой-либо из симметризованных волновых функций (32.2), равна сумме плотностей, определяемых отдельно функциями  $u(1, 2)$  и  $u(2, 1)$ . Совершенно такой же результат получился бы и для не тождественных частиц, если бы в процессе опыта не делалась попытка их различить. Таким образом, интерференционные эффекты между волновыми функциями, входящими в обменно вырожденную совокупность, действительно исчезают, если области изменения координат частиц не перекрываются.

**Принцип Паули.** Во многих задачах можно получить полезное нулевое приближение, пренебрегая взаимодействием между части-

цами, образующими рассматриваемую систему. Приближенный (невозмущенный) гамильтониан представляет собой сумму одинаковых гамильтонианов отдельных частиц:

$$H_0(1, 2, \dots, n) = H'_0(1) + H'_0(2) + \dots + H'_0(n), \quad (32.5)$$

а его приближенная собственная функция равна произведению собственных функций отдельных частиц:

$$\begin{aligned} u(1, 2, \dots, n) &= v_\alpha(1) v_\beta(2) \dots v_\nu(n), \\ E &= E_\alpha + E_\beta + \dots + E_\nu, \\ H'_0(1) v_\alpha(1) &= E_\alpha v_\alpha(1), \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (32.6)$$

Если рассматриваемые частицы представляют собой электроны, то вместо функции  $u$ , определяемой равенством (32.6), необходимо взять соответствующую антисимметричную линейную комбинацию. Проще всего представить ее в виде детерминанта, составленного из функций  $v$ :

$$u_A(1, 2, \dots, n) = \begin{vmatrix} v_\alpha(1) & v_\alpha(2) & \dots & v_\alpha(n) \\ v_\beta(1) & v_\beta(2) & \dots & v_\beta(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_\nu(1) & v_\nu(2) & \dots & v_\nu(n) \end{vmatrix}. \quad (32.7)$$

Ясно, что (ненормированная) функция  $u_A$  (32.7) представляет собой антисимметричное решение приближенного волнового уравнения  $(H_0 - E) u_A = 0$ .

Выражение (32.7) обладает интересной особенностью: оно обращается в нуль, если две (или более) функции  $v$  одинаковы. Мы имеем здесь частный случай высказанного ранее общего утверждения, согласно которому антисимметричную волновую функцию нельзя получить из решения, не меняющегося при перестановке любых двух частиц. Поэтому приближенный гамильтониан  $H_0$  не имеет решений, для которых в каком-либо из состояний  $\alpha, \beta, \dots, \nu$  находится более одного электрона. Этот результат известен как *принцип исключения*<sup>1)</sup>; впервые он был введен Паули [2] в качестве постулата, позволяющего объяснить периодическую систему химических элементов (см. § 38).

**Связь со статистической механикой.** Из несимметризованных решений нулевого приближения можно составить как симметрич-

<sup>1)</sup> В русской литературе более употребителен термин „принцип Паули“. — *Прим. перев.*

ную, так и антисимметричную волновую функцию. Легко видеть, что симметричное (ненормированное) решение дается суммой функций, полученных в результате всех возможных перестановок чисел  $1, 2, \dots, n$  между отдельными „одночастичными” функциями  $v_\alpha, v_\beta, \dots, v_\nu$ . Такая волновая функция является единственной; чтобы задать ее, достаточно указать, сколько частиц находится в каждом из состояний  $\alpha, \beta, \dots$ . Аналогично антисимметричная волновая функция полностью определяется заданием числа частиц в каждом отдельном состоянии. Фундаментальное статистическое различие между частицами, описываемыми антисимметричными и симметричными волновыми функциями, заключается в том, что в первом случае в каждом состоянии может быть не более одной частицы, тогда как во втором число частиц в каждом состоянии не ограничено ( $0, 1, 2, \dots$ ).

Состояния ряда систем многих частиц, не взаимодействующих (или слабо взаимодействующих) друг с другом, можно определять одним из указанных выше способов. Исследование таких систем составляет предмет квантовой *статистической механики*. Если частицы описываются антисимметричными волновыми функциями, то говорят, что они подчиняются *статистике Ферми — Дирака*; частицы, описываемые симметричными волновыми функциями, подчиняются *статистике Бозе — Эйнштейна*<sup>1)</sup>.

Из частиц, статистика которых точно известна, электроны, протоны и нейтроны<sup>2)</sup> описываются статистикой Ферми — Дирака, а  $\pi$ -мезоны — статистикой Бозе — Эйнштейна<sup>3)</sup>.

Световые кванты или фотоны в той мере, в какой их можно рассматривать как частицы, также подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, хотя их описание с помощью волновой функции не является полезным. Далее, комплексы частиц, столь тесно связанных друг с другом, что весь комплекс можно рассматривать как единую частицу, также описываются симметричными или антисимметричными волновыми функциями.

Так, например, ядро атома гелия состоит из тесно связанных друг с другом двух протонов, двух нейтронов и неопределенного числа  $\pi$ -мезонов. Если рассматривать систему ядер гелия, взаимодействие между которыми настолько слабо, что можно пренебречь его влиянием на внутреннее движение ядер, то движение центров тяжести ядер приближенно можно описывать с помощью симметричной волновой функции. Перестановку двух атомов гелия можно представить как результат перестановки двух пар протонов, двух пар нейтронов и нескольких  $\pi$ -мезонов. Поскольку точная волновая функция антисимметрична относительно всех протонов и всех нейт-

<sup>1)</sup> См., например, книгу Толмэна [3], гл. 10.

<sup>2)</sup> А также  $\mu$ -мезоны. — *Прим. перев.*

<sup>3)</sup> См., например, гл. 4 книги Маршака [4].

ронов, то в результате первых четырех перестановок приближенная волновая функция не изменится; относительно  $\pi$ -мезонов волновая функция симметрична, и, следовательно, остальные перестановки также ее не изменят. Обобщая эти рассуждения, приходим к выводу, что слабо взаимодействующие „частицы” (ядра, атомы или молекулы) подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, если полное число содержащихся в каждой из них электронов, протонов и нейтронов является четным, и статистике Ферми — Дирака, если каждая из них содержит нечетное число этих частиц<sup>1)</sup>.

**Столкновения тождественных частиц.** Из § 16 и 18 известно, что при наличии только сил взаимодействия движение системы двух частиц можно разделить на перемещение центра инерции системы и на движение одной частицы относительно другой. Очевидно, что при перестановке двух тождественных частиц радиус-вектор центра инерции [равный  $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ , так как массы частиц одинаковы] остается неизменным, а относительные координаты ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ) меняют знак. Учет спинов мы отложим до следующего параграфа, а сейчас посмотрим, какую роль играет симметрия или антисимметрия пространственной части волновой функции двух тождественных частиц, испытывающих упругое столкновение.

Асимптотическое выражение для несимметризованной волновой функции, характеризующей рассеяние частиц, в системе координат центра инерции дается формулой (18.10):

$$u(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikz} + r^{-1} f(\theta, \varphi) e^{ikr}, \quad (32.8)$$

где  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  — полярные координаты вектора  $\mathbf{r}$ . Так как сферическими координатами вектора  $-\mathbf{r}$  будут  $r$ ,  $\pi - \theta$ ,  $\varphi + \pi$ , то в силу (32.8) асимптотические выражения симметричной и антисимметричной волновых функций имеют вид

$$(e^{ikz} \pm e^{-ikz}) + [f(\theta, \varphi) \pm f(\pi - \theta, \varphi + \pi)]r^{-1} e^{ikr}; \quad (32.9)$$

здесь верхний знак соответствует симметричной, а нижний — антисимметричной волновой функции.

Как показано в § 18, дифференциальное эффективное сечение в системе центра инерции равно квадрату абсолютной величины выражения в фигурных скобках (32.9):

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2 + |f(\pi - \theta, \varphi + \pi)|^2 \pm 2 \operatorname{Re} [f(\theta, \varphi) \bar{f}(\pi - \theta, \varphi + \pi)]. \quad (32.10)$$

Чтобы убедиться в правильности принятой нормировки, заметим, что в классическом предельном случае, когда тождественные ча-

<sup>1)</sup> Более строгое изложение, приводящее к тем же выводам, было дано Эрэнфестом и Оппенгеймером [5].

стицы различимы и последний (интерференционный) член в (32.10) отсутствует, сечение  $\sigma(\theta, \varphi)$  становится в точности равным сумме эффективных сечений для рассеиваемых ( $|f(\theta, \varphi)|^2$ ) и рассеивающих ( $|f(\pi - \theta, \varphi + \pi)|^2$ ) частиц, как это и должно быть.

Очевидно, что в обычном случае, когда функция  $f$  не зависит от  $\varphi$ , сечение рассеяния в единичный телесный угол симметрично относительно направления  $\theta = 90^\circ$  (в системе центра инерции). Из формулы (18.7) при  $\gamma = 1$  нетрудно видеть, что в лабораторной системе координат сечение рассеяния, отнесенное к единице угла (но не к единице телесного угла), равно

$$\sigma_{\perp}(\theta_0) \sin \theta_0 = 4 \cos \theta_0 \sin \theta_0 \{ |f(2\theta_0)|^2 + |f(\pi - 2\theta_0)|^2 \pm 2 \operatorname{Re}[f(2\theta_0)\bar{f}(\pi - 2\theta_0)] \}.$$

Это выражение симметрично относительно направления  $\theta_0 = 45^\circ$ .

### § 33. Спиновый момент количества движения

Изложенную в предыдущем параграфе теорию тождественных частиц необходимо теперь дополнить, включив в нее спиновый момент количества движения частицы. В § 24 было показано, что оператор  $\mathbf{M}$ , свойства которого характерны для момента количества движения, допускает бесконечное число матричных представлений. Для каждого представления величину  $\mathbf{M}^2$  и одну из компонент  $\mathbf{M}$ , например  $M_z$ , можно привести к диагональному виду; собственными значениями этих операторов будут соответственно  $j(j+1)\hbar^2$  и система чисел  $j\hbar, (j-1)\hbar, \dots, -j\hbar$ , где  $2j$  — нуль или положительное целое число. Если отказаться от представления  $\mathbf{M}$  в виде  $(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ , где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$  соответственно радиус-вектор и импульс частицы, то оператор  $\mathbf{M}^2$  может коммутировать с гамильтонианом частицы. В этом случае  $\mathbf{M}^2$ , а следовательно, и  $j$  являются интегралами движения и характеризуют частицу в любой момент времени. Соответствующий внутренний момент количества движения называется *спином* частицы. Имея дело со спином, мы будем заменять  $\mathbf{M}$  на  $\mathbf{S}$ , а  $j$  на  $s$ .

**Связь между спином и статистикой.** Как отмечалось в § 24, для электронов, протонов и нейтронов  $s = 1/2$ , а для  $\pi$ -мезонов  $s = 0$ . Комплексы достаточно крепко связанных друг с другом частиц тоже можно рассматривать как „частицы” и характеризовать определенной величиной полного внутреннего момента количества движения, если взаимодействие между ними не влияет заметно на внутреннее движение в комплексах и относительную ориентацию спинов составляющих их элементарных частиц. Здесь дело обстоит совершенно так же, как и со статистикой комплексов, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Правило сложения моментов, рассмотренное в § 24, можно обобщить, определив возможные значения полного внутреннего момента количества движения, который мы будем называть *спином*, для любого комплекса элементарных частиц. Пусть комплекс содержит  $n$  частиц со спином половина ( $s = 1/2$ ), и произвольное число частиц со спином нуль ( $s = 0$ ). Если внутренним орбитальным моментом количества движения этих частиц можно пренебречь, то при  $n$  четном (нечетном)  $s$  может принимать все целые (полуцелые) значения от 0 ( $1/2$ ) до  $n/2$ . Можно показать, что орбитальное квантовое число — всегда целое (или нуль)<sup>1)</sup>; при его учете максимальное значение  $s$  возрастает, но по-прежнему  $s$  равно нулю или целому числу при четном  $n$  или половине нечетного целого числа при нечетном  $n$ .

Мы видим, таким образом, что как для известных элементарных частиц, так и для их комплексов, обладающих определенным спином, существует однозначная связь между спином и статистикой. Частицы или комплексы с нулевым или целым спином описываются симметричными волновыми функциями и подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, а частицы или комплексы с полуцелым спином описываются антисимметричными волновыми функциями и подчиняются статистике Ферми — Дирака. Теоретические соображения, основанные на релятивистской квантовой механике<sup>2)</sup>, позволяют ожидать наличия такой связи также и для других элементарных частиц, которые, как можно предполагать, существуют, но спины и статистика которых еще неизвестны (другие мезоны и нейтрино).

**Спиновые матрицы и собственные функции.** Чтобы включить спин в формализм, развитый в § 32, нужно предположить, что каждое из чисел  $1, 2, \dots, n$ , входящих в аргументы  $\psi$  и  $u$ , характеризует не только три пространственные координаты частицы, но также и ее спиновую координату. Спиновая координата отличается от пространственных в том отношении, что для частицы (или комплекса частиц) со спином  $s$  она принимает только  $2s + 1$  значений, тогда как каждая пространственная координата может принимать бесконечное число значений. Таким образом, „спиновое пространство“ состоит из конечного числа точек. Спиновая волновая функция отдельной частицы полностью определяется заданием  $2s + 1$  чисел, тогда как пространственная волновая функция задается бесконечно бесконечной системой чисел (представляет собой непрерывную функцию пространственных координат)<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> В § 14 и 24 показано, что это верно для не взаимодействующих частиц, движущихся в центральном силовом поле; результаты, однако, не изменяются и при наличии взаимодействия между частицами.

<sup>2)</sup> См. работу Паули [6].

<sup>3)</sup> Если пространственные и спиновые движения достаточно сильно связаны друг с другом, то пространственная волновая функция может зависеть от спиновой координаты; в этом случае необходимо задать  $2s + 1$  пространственных функций.

Удобный набор ортонормированных спиновых функций одной частицы дают нам нормированные собственные функции матриц  $M^2$  и  $M_z$  (24.15). Эти собственные функции представляют собой матрицы с одним столбцом и  $(2s + 1)$  строками, все элементы которых, кроме одного, равны нулю. Если, например,  $s = 3/2$ , то, как легко видеть, четыре спиновые собственные функции имеют вид

$$v\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v\left(-\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (33.1)$$

Соответствующие им собственные значения  $S_z$  равны  $3/2 \hbar$ ,  $1/2 \hbar$ ,  $-1/2 \hbar$  и  $-3/2 \hbar$ . Свойство ортонормированности легко проверить, умножая по обычному правилу эрмитово сопряженное значение спиновой функции на эту же или на другую функцию:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

и т. д.

Если известно несимметризованное решение, то симметричную и антисимметричную волновые функции системы многих частиц с учетом спина можно получить методом, изложенным в предыдущем параграфе. Иногда несимметризованные решения удобно выбирать в виде собственных функций квадрата оператора полного спина системы  $(S_1 + S_2 + \dots + S_n)^2$  и  $z$ -компоненты этого же оператора  $S_{1z} + S_{2z} + \dots + S_{nz}$ . Если гамильтониан не содержит членов, описывающих взаимодействие спина с орбитальным моментом, то эти величины являются интегралами движения. Кроме того, выбранные таким образом функции оказываются полезными в качестве волновых функций нулевого приближения, если только спиновые взаимодействия достаточно малы, и их можно рассматривать как возмущение. Поскольку в отсутствие спиновых взаимодействий любое решение можно представить в виде линейной комбинации собственных функций оператора полного спина, то подобный выбор несимметризованных решений не нарушает общности рассмотрения.

**Столкновения тождественных частиц.** Теперь, предполагая, что взаимодействие между частицами не зависит от спина, можно исследовать его влияние на характер столкновений тождественных частиц или их комплексов. Поскольку для каждой частицы имеется  $2s + 1$  спиновых собственных функций, то для двух частиц суще-

ствуует всего  $(2s + 1)^2$  независимых спиновых функций, каждая из которых получается перемножением спиновых функций отдельных частиц.

Вместо этих произведений можно пользоваться любыми их линейно независимыми комбинациями, число которых равно  $(2s + 1)^2$ . Последние удобно разделить на три класса. Первый класс составляют произведения одночастичных функций, соответствующих одинаковым спиновым состояниям частиц, т. е. одному и тому же собственному значению  $m\hbar$  оператора  $S_z$ :

$$v_1(m) v_2(m), \quad -s \leq m \leq s.$$

Здесь индексами нумеруются частицы: всего существует, очевидно,  $2s + 1$  таких состояний. Во втором классе содержатся суммы произведений:

$$v_1(m') v_2(m'') + v_1(m'') v_2(m'), \quad m' \neq m''.$$

Всего существует  $s(2s + 1)$  таких состояний. Третий класс образован разностями произведений:

$$v_1(m') v_2(m'') - v_1(m'') v_2(m'), \quad m' \neq m''.$$

Число таких состояний также равно  $s(2s + 1)$ .

Очевидно, функции первых двух классов симметричны, а третьего класса — антисимметричны относительно перестановки спиновых координат. Таким образом, из полного числа  $(2s + 1)^2$  состояний имеется  $(s + 1)(2s + 1)$  симметричных и  $s(2s + 1)$  антисимметричных состояний.

При целом (полуцелом)  $s$  полная волновая функция симметрична (антисимметрична). Следовательно, симметричной спиновой функции соответствует симметричная (антисимметричная) функция пространственных координат; антисимметричной же спиновой функции соответствует антисимметричная (симметричная) функция пространственных координат. Таким образом, если при столкновениях все спиновые состояния появляются с одинаковыми вероятностями<sup>1)</sup>, то при целом  $s$  относительное число столкновений, описываемых волновой функцией (32.9) с верхним знаком, будет равно  $(s + 1)/(2s + 1)$ , а число столкновений, описываемых этой функцией с нижним знаком, будет составлять  $s/(2s + 1)$ .

Этот результат можно объединить с аналогичным результатом для полуцелого спина, переписывая формулу (32.10)

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 + \frac{(-1)^{2s}}{2s + 1} 2\text{Re}[f(\theta)\bar{f}(\pi - \theta)] \quad (33.2)$$

(здесь предполагается, что функция  $f$  не зависит от  $\varphi$ ).

Формулу (33.2) можно вывести также с помощью сделанного ранее замечания о том, что частицы можно отличить друг от друга,

<sup>1)</sup> См. примечание 1 на стр. 278.



если компоненты спина у них различны; в этом случае интерференционный член в (32.10) обращается в нуль. Относительное число столкновений, в которых участвуют частицы с различными компонентами спина, равно  $2s/(2s + 1)$ . В остальных случаях, доля которых составляет  $1/(2s + 1)$ , частицы имеют одинаковые компоненты спина, и симметрия или антисимметрия пространственной волновой функции (верхний или нижний знак в интерференционном члене) определяется в зависимости от того, будет ли спин целым или полуцелым.

**Спиновые функции электрона.** В остальной части этой главы будут рассматриваться только спиновые функции для электрона ( $s = 1/2$ ). Спиновые матрицы в данном случае даются первыми двумя выражениями (24.15). Их можно записать в виде  $\mathbf{S} = \hbar\sigma/2$ , где величины

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (33.3)$$

называются *спиновыми матрицами Паули* [7]. По аналогии с (33.1) нормированные собственные функции оператора  $S_z$  можно записать в виде

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (33.4)$$

причем соответствующие собственные значения суть  $\hbar/2$  и  $-\hbar/2$ . Оба выражения (33.4) являются собственными функциями оператора  $S^2$ , принадлежащими собственному значению  $3/4 \hbar^2$ .

Поскольку нам придется в дальнейшем выписывать произведения спиновых функций различных электронов, удобно ввести следующие сокращенные обозначения:

$$v_1\left(\frac{1}{2}\right) v_2\left(-\frac{1}{2}\right) v_3\left(\frac{1}{2}\right) v_4\left(\frac{1}{2}\right) = (+ - + +) \text{ и т. д.};$$

при этом для первой частицы собственное значение оператора  $S_{1z}$  равно  $\hbar/2$ , для второй — собственное значение  $S_{2z}$  равно  $-\hbar/2$  и т. д. Оператор  $S_1$  действует на спиновые функции только первой частицы.

Из (33.3) и (33.4) легко получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_x(+)&= (-), & \sigma_y(+)&= i(-), & \sigma_z(+)&= (+), \\ \sigma_x(-)&= (+), & \sigma_y(-)&= -i(+), & \sigma_z(-)&= -(-). \end{aligned} \quad (33.5)$$

Для двух электронов имеются четыре линейно независимые спиновые функции:  $(++)$ ,  $(+-)$ ,  $(-+)$ ,  $(--)$ . Они ортонормированы, так как ортонормированными являются спиновые функции одной частицы (33.4). Как отмечалось выше, часто оказывается удобным составлять из них линейные комбинации, являющиеся собственными функциями операторов  $(S_1 + S_2)^2$  и  $S_{1z} + S_{2z}$ . С помощью

(33.5) можно проверить, что приводимые ниже линейные комбинации ортонормированы и принадлежат указанным здесь собственным значениям:

$$\begin{array}{rcc}
 & (S_1 + S_2)^2 & S_{1z} + S_{2z} \\
 (+ +) & 2\hbar^2 & \hbar \\
 2^{-\frac{1}{2}} [(+ -) + (- +)] & 2\hbar^2 & 0 \\
 (- -) & 2\hbar^2 & -\hbar \\
 2^{-\frac{1}{2}} [(+ -) - (- +)] & 0 & 0
 \end{array} \quad (33.6)$$

Интересно отметить, что совокупность первых трех двухэлектронных спиновых функций (33.6) во всех отношениях аналогична спиновой функции одной „частицы” со спином  $s = 1$ , а последняя из функций (33.6) аналогична спиновой функции „частицы” со спином  $s = 0$ <sup>1)</sup>. Действительно, они не только принадлежат должным собственным значениям квадрата и  $z$ -компоненты оператора полного спина, но, сверх того, и результат действия  $x$ - и  $y$ -компонент оператора полного спина на триплетную спиновую функцию согласуется с соответствующими матрицами во второй строке (24.15). Здесь мы имеем пример сложения моментов количества движения: согласно § 24, при объединении двух систем, у каждой из которых момент количества движения равен  $\frac{1}{2}$ , получается система с моментом, равным нулю или единице.

**Атом гелия.** В § 27 основное состояние атома гелия рассматривалось с точки зрения вариационного метода. Рассмотрим теперь основное и первое возбужденное состояния атома гелия с помощью развитой в § 25 более простой теории возмущений в первом приближении. При этом мы будем пренебрегать силами, зависящими от спина, но учтем эффекты симметрии, определяемые спинами двух электронов. В качестве невозмущенных собственных функций возьмем произведения водородных функций  $u_{nlm}$  (при  $Z = 2$ ), причем нас главным образом будет интересовать не нахождение точных уровней энергии, а классификация состояний по их симметрии и по свойствам спина.

В спектроскопических обозначениях основное состояние атома гелия имеет вид  $1s^2$ ; состояния обоих электронов характеризуются при этом водородными функциями  $u_{100}$ . Поскольку пространственная волновая функция системы симметрична, она должна умножаться на антисимметричную синглетную спиновую функцию,

<sup>1)</sup> Первые три состояния называются *триплетными*, а последнее — *синглетным*. В старой квантовой теории триплетному состоянию соответствует параллельное, а синглетному — антипараллельное расположение спинов электронов.

соответствующую нулевому полному спину [последняя строчка в (33.6)].

Для первого возбужденного состояния атома гелия пространственная волновая функция в нулевом приближении восьмикратно вырождена. Соответствующие конфигурации суть  $1s2s$  и  $1s2p$ . В отсутствие обменного вырождения первое состояние было бы не вырождено, а второе — трехкратно вырождено (так как существуют три состояния  $2p$ ). Обменное вырождение удваивает число состояний, так как электроны можно переставить местами (один из них может занимать состояние  $1s$ , а другой — состояние  $2s$  или  $2p$ ). Для простоты рассмотрим здесь только двукратно вырожденное (вследствие обмена) состояние  $1s2s$ ; легко показать (см. задачу 7), что состояния  $1s2p$  можно рассматривать отдельно.

Энергия возмущения обусловлена электростатическим отталкиванием электронов (и равна  $e^2/r_{12}$ ), а невозмущенные волновые функции имеют вид  $u_{100}(\mathbf{r}_1)u_{200}(\mathbf{r}_2)$  и  $u_{100}(\mathbf{r}_2)u_{200}(\mathbf{r}_1)$ . Пока что спин можно не принимать во внимание, так как мы пренебрегаем зависящими от спина силами; позднее мы умножим результат на соответствующие спиновые функции, которые будут выбраны так, чтобы полная волновая функция была антисимметричной. Матрица возмущения в данном случае имеет структуру (25.16); ее можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} J & K \\ K & J \end{pmatrix}, \quad (33.7)$$

где

$$\begin{aligned} J &= \int \int \bar{u}_{100}(\mathbf{r}_1) \bar{u}_{200}(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{r_{12}} u_{100}(\mathbf{r}_1) u_{200}(\mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2, \\ K &= \int \int \bar{u}_{100}(\mathbf{r}_1) \bar{u}_{200}(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{r_{12}} u_{100}(\mathbf{r}_2) u_{200}(\mathbf{r}_1) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (33.8)$$

Величина  $J$  часто называется *кулоновской*, а  $K$  — *обменной энергией*.

Приводя матрицу (33.7) к диагональному виду, подобно тому, как это делалось в § 25 (см. задачу об эффекте Штарка в атоме водорода), находим ее собственные значения. Последние оказываются равными  $J + K$  и  $J - K$ . Им соответствуют нормированные собственные функции

$$\begin{aligned} &2^{-1/2} [u_{100}(\mathbf{r}_1) u_{200}(\mathbf{r}_2) + u_{100}(\mathbf{r}_2) u_{200}(\mathbf{r}_1)] \\ \text{и} \\ &2^{-1/2} [u_{100}(\mathbf{r}_1) u_{200}(\mathbf{r}_2) - u_{100}(\mathbf{r}_2) u_{200}(\mathbf{r}_1)]. \end{aligned}$$

Первая из них симметрична относительно пространственных координат, и потому ее нужно умножить на антисимметричную (синглетную) спиновую функцию. Вторая функция антисимметрична относительно перестановки  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  и должна умножаться на одну из спиновых функций, образующих триплет в (33.6). Поскольку

интеграл  $K$  оказывается положительным, синглетное спиновое состояние соответствует значительно большей энергии, чем триплет. Это обусловлено не наличием сил, зависящих от спина, а связью между электростатическим взаимодействием и спином за счет принципа Паули (т. е. за счет антисимметрии полных волновых функций).

**Спиновые функции для трех электронов.** При рассмотрении обменного рассеяния электронов атомами гелия, которое будет дано в следующем параграфе, нам потребуются собственные функции оператора полного спина трех электронов, аналогичные функциям (33.6) для двух электронов. Можно рассматривать эти три электрона как сумму одного и двух электронов, в том смысле, что спиновую функцию одного электрона ( $s = 1/2$ ) можно комбинировать как с триплетной ( $s = 1$ ), так и с синглетной ( $s = 0$ ) двухэлектронными функциями. В первом случае правило сложения моментов (§ 24) показывает, что для трех электронов мы должны получить две группы спиновых функций, соответствующих  $s = 1/2$  и  $s = 3/2$ ; во втором случае получается одна группа трехэлектронных спиновых функций, соответствующих  $s = 1/2$ . Таким образом, можно ожидать, что существует одна *квартетная* группа спиновых состояний ( $s = 3/2$ ) и две различных *дублетных* группы ( $s = 1/2$ ), так что общее число трехэлектронных спиновых состояний равно  $4 + 2 + 2 = 8$ . Их, разумеется, можно представить в виде линейных комбинаций  $2^3 = 8$  произведений спиновых функций отдельных электронов.

Легко показать, что приводимые ниже восемь линейных комбинаций ортонормированы и принадлежат указанным здесь собственным значениям:

$$\begin{array}{r}
 (S_1 + S_2 + S_3)^2 S_{1z} + S_{2z} + S_{3z} \\
 \begin{array}{l}
 (+ + +) \\
 3^{-1/2} [(+ + -) + (+ - +) + (- + +)] \\
 3^{-1/2} [(- - +) + (- + -) + (+ - -)] \\
 (- - -) \\
 6^{-1/2} [(+ + -) + (+ - +) - 2(- + +)] \\
 6^{-1/2} [(- - +) + (- + -) - 2(+ - -)] \\
 2^{-1/2} [(+ + -) - (+ - +)] \\
 2^{-1/2} [(- - +) - (- + -)]
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \frac{15}{4} \hbar^2 \\
 \frac{15}{4} \hbar^2 \\
 \frac{15}{4} \hbar^2 \\
 \frac{15}{4} \hbar^2 \\
 \frac{3}{4} \hbar^2 \\
 \frac{3}{4} \hbar^2 \\
 \frac{3}{4} \hbar^2 \\
 \frac{3}{4} \hbar^2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \frac{3}{2} \hbar \\
 \frac{1}{2} \hbar \\
 -\frac{1}{2} \hbar \\
 -\frac{3}{2} \hbar \\
 \frac{1}{2} \hbar \\
 -\frac{1}{2} \hbar \\
 \frac{1}{2} \hbar \\
 -\frac{1}{2} \hbar
 \end{array}
 \quad (33.9)$$

Первые четыре (квартетные) состояния симметричны относительно перестановки любой пары частиц. Разбиение четырех дублетных состояний на две пары является произвольным; здесь оно сделано таким образом, чтобы первая пара дублетных состояний была симметрична, а вторая — антисимметрична по отношению к перестановке частиц 2 и 3. При такой записи дублеты не обладают симметрией по отношению к перестановке двух других частиц.

### § 34. Столкновения с перераспределением частиц

В § 30 с помощью теории возмущений были вычислены эффективные сечения упругого и неупругого рассеяния электронов атомами водорода. При этом предполагалось, что обменом падающего и атомного электронов можно пренебречь. В настоящем параграфе будет рассмотрена роль обмена с учетом спина и принципа Паули. По-прежнему мы будем пользоваться теорией возмущений, которая особенно полезна при столкновениях частиц большой энергии<sup>1)</sup>. Сначала с помощью борновского приближения (§ 26) мы рассмотрим вообще столкновения с перераспределением частиц, затем покажем, каким образом этот метод связан с изложенной в § 29 нестационарной теорией возмущений, и, наконец, применим теорию к обменным столкновениям электронов с атомами водорода и гелия.

#### Обозначения для столкновений с перераспределением частиц.

В общем случае бинарное столкновение с перераспределением можно охарактеризовать как столкновение системы  $A$ , находящейся в состоянии  $m$ , с системой  $B$ , находящейся в состоянии  $n$ , причем в результате получаются система  $C$  в состоянии  $s$  и система  $D$  в состоянии  $t$ . Предполагается, что как системы  $A$ ,  $B$ , так и системы  $C$ ,  $D$  образованы из тех же самых частиц, т. е. в процессе столкновения не происходит исчезновения или появления новых частиц и не участвуют фотоны; однако в результате столкновения частицы могут обмениваться местами. Для обозначения всех внутренних координат систем (включая спин) мы будем пользоваться буквами  $A, B, C, D$ ; векторы, соединяющие центры инерции систем  $A, B$  и  $C, D$ , будут обозначаться соответственно через  $\mathbf{r}_{ab}$  и  $\mathbf{r}_{cd}$ ; приведенные массы, характеризующие относительное движение до и после столкновения, суть  $M_{ab} = M_a M_b / (M_a + M_b)$  и  $M_{cd} = M_c M_d / (M_c + M_d)$ . Вычисление будет проводиться в системе координат центра инерции, переход к лабораторной системе можно осуществить с помощью общих соотношений, полученных в § 18.

<sup>1)</sup> Другие методы, применимые для столкновений с низкой энергией, рассматриваются в книге Мотта и Мессии [8], гл. 10 и 11.

В § 32 было показано, что подобные вычисления можно проводить так, как если бы частицы были различными. Лишь в конце образуются линейные комбинации обменно вырожденных волновых функций, обладающие должными свойствами симметрии относительно перестановок тех или иных тождественных частиц. Симметризация будет проводиться в отдельных примерах, рассматриваемых в конце настоящего параграфа. Для общей же задачи, которую мы сейчас рассматриваем, мы найдем только приближенную несимметризованную волновую функцию.

Задача состоит в решении волнового уравнения

$$(H - E)\psi = 0, \quad (34.1)$$

где гамильтониан можно записать одним из двух способов:

$$H = H_{ab} + H'_{ab} = H_{cd} + H'_{cd}. \quad (34.2)$$

Невозмущенный гамильтониан начальной и конечной систем имеет вид

$$\begin{aligned} H_{ab} &= H_a + H_b + T_{ab}, & T_{ab} &= -\frac{\hbar^2}{2M_{ab}} \nabla_{ab}^2, \\ H_{cd} &= H_c + H_d + T_{cd}, & T_{cd} &= -\frac{\hbar^2}{2M_{cd}} \nabla_{cd}^2, \end{aligned} \quad (34.3)$$

где операторы  $T$  соответствуют кинетической энергии относительного движения в системе центра инерции. Волновые функции невозмущенных состояний начальной и конечной систем представляют собой (известные) решения волновых уравнений

$$\begin{aligned} (H_a - E_{am}) u_{am}(A) &= 0, & (H_b - E_{bn}) u_{bn}(B) &= 0, \\ (H_c - E_{cs}) u_{cs}(C) &= 0, & (H_d - E_{dt}) u_{dt}(D) &= 0. \end{aligned} \quad (34.4)$$

Члены взаимодействия  $H'_{ab}$  и  $H'_{cd}$  рассматриваются как малые возмущения.

Точное решение всегда можно разложить по функциям  $u_{cs}(C) u_{dt}(D)$  полной ортонормированной системы, причем коэффициенты разложения будут зависеть от относительных координат  $\mathbf{r}_{cd}$ :

$$\psi = \sum_{s,t} u_{cs}(C) u_{dt}(D) v_{st}(\mathbf{r}_{cd}). \quad (34.5)$$

Нам предстоит найти приближенные выражения для функций  $v_{st}(\mathbf{r}_{cd})$ , соответствующие конечным внутренним состояниям  $s$  и  $t$  систем  $C$  и  $D$  и получающиеся из невозмущенного начального состояния

$$\begin{aligned} \psi_0 &= u_{am}(A) u_{bn}(B) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{ab}}, \\ k_0^2 &= \frac{2M_{ab}}{\hbar^2} (E - E_{am} - E_{bn}). \end{aligned} \quad (34.6)$$

**Борновское приближение.** Подставляя функцию  $\psi$  (34.5) в волновое уравнение (34.1) и учитывая равенства (34.2) — (34.4), получаем

$$\sum_{s, t} u_{cs}(C) u_{dt}(D) (T_{cd} + E_{cs} + E_{dt} - E) v_{st}(\mathbf{r}_{cd}) = -H'_{cd}\psi. \quad (34.7)$$

Если теперь умножить (34.7) слева на  $\bar{u}_{cs}(C)\bar{u}_{dt}(D)$  и проинтегрировать по всем координатам  $C$  и  $D$ , то в силу ортонормированности функций  $u$  все члены слева обращаются в нуль, исключая случай  $s = s'$  и  $t = t'$ . Опуская штрихи, запишем полученное выражение в виде

$$(T_{cd} + E_{cs} + E_{dt} - E) v_{st}(\mathbf{r}_{cd}) = - \int \int \bar{u}_{cs}(C) \bar{u}_{dt}(D) H'_{cd}\psi d\tau_c d\tau_d. \quad (34.8)$$

Это можно переписать в форме, аналогичной (26.4):

$$\begin{aligned} (-\nabla_{cd}^2 - k^2) v_{st}(\mathbf{r}_{cd}) &= - \frac{2M_{cd}}{\hbar^2} \int \int u_{cs}(C) \bar{u}_{dt}(D) H'_{cd}\psi d\tau_c d\tau_d, \\ k^2 &= \frac{2M_{cd}}{\hbar^2} (E - E_{cs} - E_{dt}). \end{aligned} \quad (34.9)$$

Соотношения (34.9) при всех  $s$  и  $t$  представляют собой систему точных уравнений, из которой в принципе можно найти все функции  $v_{st}$ . Здесь дело обстоит так же, как и в случае уравнения (26.4), приближенное решение которого мы нашли, заменяя в правой части точную волновую функцию невозмущенной. В данном случае мы получим приближенное решение (34.9), заменяя функцию  $\psi$  на  $\psi_0$  из (34.6); тогда правая часть будет известна, и неоднородное уравнение для  $v_{st}$  легко будет решено с помощью соответствующей функции Грина. Подстановка  $\psi_0$  вместо  $\psi$  эквивалентна допущению, что взаимодействие между начальными невозмущенными системами  $A$  и  $B$  очень мало. Это означает, что не только мала вероятность перехода  $A, B \rightarrow C, D$ , но, кроме того,  $\psi_0$  хорошо аппроксимирует точную волновую функцию, даже если системы  $A$  и  $B$  близки друг к другу или перекрываются. В практических случаях трудно найти эффективный критерий применимости данного приближения, хотя полезные результаты, вероятнее всего, будут получаться, когда энергия  $E$  велика по сравнению с энергиями взаимодействия, входящими в оператор  $H'_{ob}$ .

С помощью функции Грина (26.15) решение неоднородного уравнения (34.9), в котором  $\psi$  заменено на  $\psi_0$ , записывается в виде

$$\begin{aligned} v_{st}(\mathbf{r}'_{cd}) &= - \frac{M_{cd}}{2\pi\hbar^2} \int \int \int |\mathbf{r}'_{cd} - \mathbf{r}_{cd}|^{-1} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}'_{cd} - \mathbf{r}_{cd})} \times \\ &\times \bar{u}_{cs}(C) \bar{u}_{dt}(D) H'_{cd} u_{am}(A) u_{bn}(B) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{ab}} d\tau_c d\tau_d d\tau_{cd}. \end{aligned} \quad (34.10)$$

Интегрирование здесь проводится по всем нештрихованным координатам; элемент интегрирования можно представить в виде  $d\tau_c d\tau_d d\tau_{cd}$

или  $d\tau_a d\tau_b d\tau_{ab}$ ; сокращенно мы будем обозначать его просто через  $d\tau$ .

Если системы  $C$  и  $D$  достаточно удалены друг от друга, то асимптотически функция (34.10) примет вид

$$v_{st}(\mathbf{r}'_{cd}) \xrightarrow{r'_{cd} \rightarrow \infty} g_{st}(\theta, \varphi) r'_{cd}{}^{-1} e^{ikr'_{cd}},$$

$$g_{st}(\theta, \varphi) = -\frac{M_{cd}}{2\pi\hbar^2} \int \bar{u}_{cs}(C) \bar{u}_{dt}(D) e^{-ik \cdot \mathbf{r}_{cd}} \times \quad (34.11)$$

$$\times H'_{cd} u_{am}(A) u_{bn}(B) e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}_{ab}} d\tau.$$

Здесь  $\theta$  и  $\varphi$  — полярные углы вектора  $\mathbf{r}'_{cd}$ , а  $\mathbf{k}$  — вектор, параллельный  $\mathbf{r}'_{cd}$ ; его абсолютная величина определяется формулой (34.9). Функция (34.6) нормирована таким образом, что „падающий поток” систем  $A$  и  $B$  совпадает с их начальной относительной скоростью  $v_0 = \hbar k_0 / M_{ab}$ , а нормировка функций (34.5) и (34.11) такова, что радиальный расходящийся поток систем  $C$  и  $D$  (отнесенный к единице телесного угла) равен  $v |g_{st}(\theta, \varphi)|^2$ . Здесь  $v$  есть относительная скорость в конечном состоянии  $v = \hbar k / M_{cd}$ . Таким образом, дифференциальное эффективное сечение для столкновений  $A, B \rightarrow C, D$  принимает вид

$$\sigma_{st}(\theta, \varphi) = \frac{v}{v_0} |g_{st}(\theta, \varphi)|^2. \quad (34.12)$$

**Неортогональность начальных и конечных состояний.** Выражение для эффективного сечения (34.12) содержит некоторую неопределенность, связанную с тем обстоятельством, что волновая функция начального состояния  $\psi_0$ , вообще говоря, не ортогональна к функции  $\psi_f = u_{cs}(C) u_{dt}(D) e^{ik \cdot \mathbf{r}_{cd}}$ , комплексно сопряженное значение которой входит также в выражение для  $g_{st}(\theta, \varphi)$ . Можно сказать, что функция  $\psi_f$  описывает конечное состояние, в котором системы  $C$  и  $D$  движутся в направлении  $\theta, \varphi$ . Будучи собственными функциями разных невозмущенных гамильтонианов (соответственно  $H_{ab}$  и  $H_{cd}$ ), начальная и конечная волновые функции необязательно должны быть взаимно ортогональны. Если они не ортогональны, то добавление к  $H'_{cd}$  постоянной потенциальной энергии (соответствующей нулевой силе) изменяет выражение для  $g_{st}(\theta, \varphi)$ . Этого можно добиться, прибавив к обеим частям уравнения (34.7) функцию  $\psi$ , умноженную на произвольную константу; при этом изменится также значение  $E$ . Чтобы избежать этого произвола, определим  $H'_{cd}$  как энергию взаимодействия между системами  $C$  и  $D$ , которая обращается в нуль при стремлении  $r_{cd}$  к бесконечности; таким путем однозначно определяется аддитивная постоянная. Таким же образом определяется и  $H'_{ab}$ .

Интересно отметить, что в интеграл для  $g_{st}(\theta, \varphi)$  вместо  $H'_{cd}$  можно подставить  $H'_{ab}$ . Действительно, этот интеграл равен



$\int \varphi_f H'_{cd} \psi_0 d\tau$ . С помощью (22.10) его можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \varphi_f H'_{cd} \psi_0 d\tau &= \int \overline{(H'_{cd} \varphi_f)} \psi_0 d\tau = \\ &= \int [(H - H_{cd}) \varphi_f] \psi_0 d\tau = \int \varphi_f H \psi_0 d\tau - E \int \varphi_f \psi_0 d\tau \end{aligned}$$

(здесь принято во внимание, что  $H_{cd} \varphi_f = E \varphi_f$ ). Аналогично, пользуясь равенством  $H_{ab} \psi_0 = E \psi_0$ , можно показать, что последнее выражение равно  $\int \varphi_f H'_{ab} \psi_0 d\tau$ . Поэтому, если функции  $\psi_0$  и  $\varphi_f$  являются собственными функциями невозмущенных гамильтонианов  $H_{ab}$  и  $H_{cd}$ , то мы имеем

$$\int \varphi_f H'_{cd} \psi_0 d\tau = \int \varphi_f H'_{ab} \psi_0 d\tau. \quad (34.13)$$

Из соотношения (34.13), например, следует, что если  $H'_{ab} = 0$ , то и  $g_{si}(\theta, \varphi) = 0$ , даже если оператор  $H'_{cd}$  не равен нулю и начальное и конечное состояния не ортогональны. Этого и следовало ожидать, так как при  $H'_{ab} = 0$  взаимодействие между сталкивающимися системами  $A$  и  $B$  отсутствует и переходы не возникают.

**Связь с нестационарной теорией возмущений.** Формулу (34.12) можно вывести также методом вариации постоянных (см. § 29). Разложим волновую функцию  $\psi$  по невозмущенным волновым функциям конечного состояния  $\varphi_f = u_{cs}(C) u_{dt}(D) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{cd}}$ , где индекс  $f$  есть совокупность индексов  $s$  и  $t$ , характеризующих соответственно состояния систем  $C$  и  $D$ , а  $\mathbf{k}$  — волновой вектор относительного движения:

$$\psi = \sum_f a_f(t) \varphi_f e^{-iE_f t/\hbar}. \quad (34.14)$$

Волновое уравнение, зависящее от времени, имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi = (H_{cd} + H'_{cd}) \psi. \quad (34.15)$$

Подставляя сюда (34.14) и принимая во внимание равенство  $(H_{cd} - E_f) \varphi_f = 0$ , получаем

$$i\hbar \sum_f \dot{a}_f \varphi_f e^{-iE_f t/\hbar} = \sum_f a_f H'_{cd} \varphi_f e^{-iE_f t/\hbar}. \quad (34.16)$$

Это уравнение можно упростить, умножая его слева на  $\overline{\varphi_f}$ , и интегрируя результат по всем координатам; поскольку функции  $\varphi_f$  ортонормированы, мы получим

$$i\hbar \dot{a}_f = \sum_f a_f \int \overline{\varphi_f} H'_{cd} \varphi_f d\tau \cdot e^{i(E_f - E_f) t/\hbar}. \quad (34.17)$$

Система уравнений (34.17) является точной. Сделаем теперь два предположения, которые в совокупности эквивалентны замене

функции  $\psi$  функцией  $\psi_0$  в правой части (34.9), как это делается в борновском приближении. Во-первых, допустим, что возмущение  $H'_{cd}$  мало; в силу (34.13) в нашем случае это эквивалентно допущению о малости  $H'_{ab}$ , которое делается в борновском приближении. В связи с этим в правую часть (34.17) можно подставить невозмущенные амплитуды  $a_f^{(0)}$ , что позволит вычислить возмущенные амплитуды первого приближения  $a_f^{(1)}$ . Во-вторых, предположим, что волновую функцию начального состояния  $\psi_0 e^{-iEt/\hbar}$  можно разложить только по таким (вырожденным) функциям  $\psi_f$ , энергия которых  $E_f$  совпадает с начальной  $E$ . Тем самым мы предполагаем, что  $\psi_0$  является собственной функцией конечного невозмущенного гамильтониана  $H_{cd}$ , равного  $H_{ab} + H_{ab} - H'_{cd}$ ; поскольку фактически  $\psi_0$  есть собственная функция оператора  $H_{ab}$ , это предположение эквивалентно также допущению о малости возмущения  $H'_{ab}$  и  $H'_{cd}$ .

Теперь можно заменить  $E_f$  на  $E$  во временном множителе, входящем в (34.17), и вынести этот множитель за знак суммы по  $f$ . Невозмущенные амплитуды  $a_f^{(0)}$  определяются равенством  $\psi_0 = \sum_f a_f^{(0)} \psi_f$ ,

т. е.

$$a_f^{(0)} = \int \bar{\psi}_f \psi_0 d\tau. \quad (34.18)$$

С помощью формулы (34.18) и условия полноты ортонормированной системы функций  $\psi_f$  сумму по  $f$  можно переписать в виде

$$\sum_f \int \bar{\psi}_f H'_{cd} \psi_f d\tau \int \bar{\psi}_f \psi_0 d\tau = \int \bar{\psi}_f H'_{cd} \psi_0 d\tau.$$

Таким образом, в первом приближении уравнение (34.17) принимает вид

$$i\hbar \dot{a}_f^{(1)} = \int \bar{\psi}_f H'_{cd} \psi_0 d\tau \cdot e^{i(E_f - E)t/\hbar}. \quad (34.19)$$

Уравнение (34.19) можно решать тем же методом, что и уравнение (29.7); в результате получается формула (34.12) для дифференциального эффективного сечения.

**Обменные столкновения электронов с атомами водорода.** В качестве первого простого примера столкновений с перераспределением, в которых существенны как спин, так и свойство тождественности частиц, рассмотрим упругое рассеяние электронов атомами водорода. В задачах такого типа нам должны быть известны асимптотические выражения несимметризованных волновых функций при всех перестановках тождественных частиц<sup>1)</sup>. Волновую функцию с правильными свойствами симметрии можно найти методами, изложенными в § 32. Найдем прежде всего асимптотическое выражение волновой функции как при рассеянии падаю-

<sup>1)</sup> См. работу Оппенгеймера [9].

щего электрона, так и при обмене его с атомным электроном. Воспользуемся борновским приближением; спиновыми взаимодействиями будем пренебрегать.

В несимметризованной волновой функции падающий и атомный электроны обозначаются соответственно цифрами 1 и 2. Асимптотическое выражение стационарной волновой функции  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , соответствующей необменному упругому рассеянию частиц с полной энергией  $E$ , дается произведением водородной волновой функции  $u_{100}(\mathbf{r}_2)$  для электрона 2 в основном состоянии на волновую функцию электрона 1, состоящую из падающей и рассеянной волн:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \xrightarrow{r_1 \rightarrow \infty} [e^{ik_0 r_1} + r_1^{-1} e^{ik_0 r_1} f(\theta_1)] u_{100}(\mathbf{r}_2),$$

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = E + \frac{me^4}{2\hbar^2}. \quad (34.20)$$

На основании результатов § 26 и 30 амплитуда рассеяния имеет вид

$$f(\theta_1) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \int e^{-ik \cdot \mathbf{r}_1} \bar{u}_{100}(\mathbf{r}_2) \left( \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_1} \right) e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}_1} u_{100}(\mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (34.21)$$

где  $\mathbf{k}$  — вектор с абсолютной величиной  $k_0$ , направление которого характеризуется углом  $\theta_1$  (функция  $f$  не зависит от азимутального угла  $\varphi_1$ ).

Асимптотическое выражение функции  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , соответствующее упругому обменному рассеянию, дается произведением водородной волновой функции  $u_{100}(\mathbf{r}_1)$  для электрона 1 в основном состоянии на волновую функцию электрона 2; последняя имеет вид расходящейся волны:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \xrightarrow{r_2 \rightarrow \infty} r_2^{-1} e^{ik_0 r_2} g(\theta_2) u_{100}(\mathbf{r}_1). \quad (34.22)$$

В этом случае плоская волна отсутствует, поскольку электрон 2 является атомным. Амплитуда обменного рассеяния в соответствии с (34.11) равна

$$g(\theta_2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \int e^{-ik \cdot \mathbf{r}_2} \bar{u}_{100}(\mathbf{r}_1) \left( \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_2} \right) e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}_1} u_{100}(\mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (34.23)$$

(абсолютная величина вектора  $\mathbf{k}$  равна  $k_0$ , а направление его характеризуется углом  $\theta_2$ ).

Теперь, умножая  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  на соответствующие спиновые функции, нужно составить антисимметричную волновую функцию. В качестве спиновых функций можно взять систему, указанную сразу после формулы (33.5); проще, однако, исходить из четырех симметризованных линейных комбинаций (33.6). Не предполагая какой-либо связи между спинами падающего и атомного электронов, можно взять любую из этих систем функций, вычислить сечение рассеяния для каждого из четырех спиновых состояний, а затем найти среднее значение, приписывая всем состояниям

одинаковые веса<sup>1)</sup>. Первые три спиновые функции (33.6) симметричны, и их нужно умножить на антисимметричную пространственную функцию  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ ; четвертая спиновая функция антисимметрична, и ее нужно умножить на сумму

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1).$$

**Дифференциальное эффективное сечение.** При больших значениях одной из координат электрона, например  $r_1$ , асимптотические выражения для симметризованных волновых функций получаются из (34.20) и (34.22).

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \pm \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) &\xrightarrow{r_1 \rightarrow \infty} [e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} + \\ &+ r_1^{-1} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} f(\theta_1) \pm r^{-1} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} g(\theta_1)] u_{100}(\mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (34.24)$$

Первые два члена в скобках справа получаются из первого слагаемого в левой части, третий член — из второго слагаемого. Для одной четверти всех столкновений эффективное сечение должно вычисляться с верхним знаком, а для трех четвертей — с нижним. Таким образом, мы получим

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4} |f(\theta) + g(\theta)|^2 + \frac{3}{4} |f(\theta) - g(\theta)|^2. \quad (34.25)$$

Формулу (34.25) можно вывести и не обращаясь явно к спиновым функциям. Достаточно лишь, как и в случае (33.2), использовать сделанное ранее замечание о том, что частицы с разными значениями компонент спина являются различимыми. Для 50% всех столкновений компоненты спинов электронов различны и эффективное сечение рассеяния равно просто сумме  $|f(\theta)|^2 + |g(\theta)|^2$  прямого и обменного эффективных сечений. В остальных 50% столкновений электроны неразличимы, и необходимо использовать антисимметричную пространственную функцию. Таким образом,

<sup>1)</sup> Это следует из основной гипотезы квантовой статистики (см., например, книгу Толмэна [3], § 84). Можно показать, что в подобных статистических вычислениях можно пользоваться любой из двух ортонормированных систем волновых функций (в нашей задаче две данные системы функций являются полными по отношению к спинам двух электронов). Как было показано в § 22, две системы функций, например  $v_n$  и  $u_k$ , связаны унитарным преобразованием  $v_n = \sum_k S_{kn} u_k$ , где  $S$  — унитарная матрица. Поэтому

$$\sum_n |v_n|^2 = \sum_{n, k, k'} S_{kn} \bar{S}_{k'n} u_k \bar{u}_{k'} = \sum_{k, k'} \delta_{kk'} u_k \bar{u}_{k'} = \sum_k |u_k|^2.$$

Поскольку вероятность данного события (например, рассеяния в определенном направлении) пропорциональна квадрату волновой функции, среднее значение получается одним и тем же при усреднении по смеси волновых функций любой системы.

мы получаем

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2} (|f(\theta)|^2 + |g(\theta)|^2) + \frac{1}{2} |f(\theta) - g(\theta)|^2,$$

что, как нетрудно видеть, совпадает с (34.25).

Интеграл вида  $\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} F(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  будет мал, если  $ka \gg 1$  (предполагается, что  $F$  — непрерывная функция  $\mathbf{r}$ , малая при  $r > a$ ). Поскольку интегралы по  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  в формуле (34.23) относятся именно к этому типу, можно ожидать, что при  $ka_0 \gg 1$  функция  $g$  будет мала по сравнению с  $f$ . Но именно в этом случае борновское приближение является наиболее удовлетворительным. Таким образом, следует ожидать, что обменные поправки к формулам § 30 для эффективного сечения будут довольно малы.

**Обменные столкновения с атомами гелия.** При рассмотрении упругого рассеяния электронов атомами гелия в основном состоянии удобнее пользоваться сразу и пространственной и спиновой волновыми функциями. Как было показано в § 33, два электрона в атоме гелия находятся в симметричном пространственном и антисимметричном (синглетном) спиновом состоянии. Поэтому если бомбардирующий электрон обозначить цифрой 1, а атомные электроны — цифрами 2 и 3, то невозмущенная волновая функция имеет вид  $e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_1} u_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) v(1, 2, 3)$ , где  $u_0$  — симметричная пространственная функция нормального состояния, а  $v(1, 2, 3)$  — спиновая функция, антисимметричная относительно электронов 2 и 3. Восемь спиновых функций трехэлектронной системы (33.9) сгруппированы в зависимости от их симметрии по отношению к электронам 2 и 3; очевидно, функция  $v(1, 2, 3)$  должна быть одной из компонент последнего дублета в (33.9).

В первом приближении асимптотические выражения возмущенных волновых функций с учетом спина имеют вид

$$\begin{aligned} \psi(1, 2, 3) &\xrightarrow{r_1 \rightarrow \infty} [e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_1} + r_1^{-1} f(\theta_1)] u_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) v(1, 2, 3), \\ \psi(1, 2, 3) &\xrightarrow{r_2 \rightarrow \infty} r_2^{-1} g'(\theta_2) u_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) v(2, 3, 1), \\ \psi(1, 2, 3) &\xrightarrow{r_3 \rightarrow \infty} r_3^{-1} g'(\theta_3) u_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) v(3, 1, 2), \end{aligned} \quad (34.26)$$

где антисимметрия имеет место только по отношению к электронам 2 и 3. Здесь

$$\begin{aligned} f(\theta_1) = & -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \int \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} \bar{u}_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \times \\ & \times \left( \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{13}} - \frac{2e^2}{r_1} \right) e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_1} u_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

и спиновый член  $v^*(1, 2, 3) v(1, 2, 3) = 1$  опущен. Далее,

$$g'(\theta_2) = g(\theta_2) v^*(2, 3, 1) v(1, 2, 3),$$

$$g(\theta_2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \int \int e^{-ik \cdot r_2} \bar{u}_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) \times$$

$$\times \left( \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{23}} - \frac{2e^2}{r_2} \right) e^{ik_0 \cdot r_1} u_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3; \quad (34.27)$$

выражение для  $g'(\theta_3)$  имеет аналогичный вид. Произведение спиновых функций в (34.27) легко вычисляется с помощью одноэлектронных функций (33.4), если только учесть, что функция  $v^*$  эрмитово сопряжена с  $v$ . Примем в качестве  $v(1, 2, 3)$  предпоследнюю спиновую функцию в (33.9); тогда получим

$$v^*(2, 3, 1) v(1, 2, 3) = 2^{-1/2} [(-+ +)^* - (+ + -)^*] \times$$

$$\times 2^{-1/2} [(+ + -) - (+ - +)] = -\frac{1}{2}. \quad (34.28)$$

Полностью антисимметричная волновая функция получается из  $\psi(1, 2, 3)$  по формуле (32.3) с нижним знаком. Поскольку функция  $\psi$  уже антисимметрична относительно двух последних аргументов, ясно, что члены в первой и во второй скобках в (32.3) будут одинаковы. Асимптотическое выражение волновой функции при больших значениях координат одного из электронов, например  $r_1$ , получается из соотношения (34.26) и (34.28):

$$\psi(1, 2, 3) + \psi(2, 3, 1) + \psi(3, 1, 2) \xrightarrow{r_1 \rightarrow \infty} \{ e^{ik_0 \cdot r_1} + r_1^{-1} e^{ik_0 r_1} \times$$

$$\times [f(\theta_1) - \frac{1}{2}g(\theta_1) - \frac{1}{2}g(\theta_1)] \} u_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) v(1, 2, 3). \quad (34.29)$$

Отсюда находим дифференциальное эффективное сечение рассеяния:

$$\sigma(\theta) = |f(\theta) - g(\theta)|^2. \quad (34.30)$$

Формулу (34.30), как и формулы (33.2) и (34.25), можно вывести и не обращаясь явно к спиновым функциям. В основном состоянии атома гелия спины двух атомных электронов антипараллельны (синглет). Следовательно, спин падающего электрона будет параллелен спину одного и антипараллелен спину другого атомного электрона. При упругом столкновении обмен со вторым электроном невозможен, так как в противном случае оба атомных электрона оказались бы в одинаковом спиновом состоянии и в силу принципа Паули атом должен был бы перейти в возбужденное состояние. Иначе говоря, падающий электрон может обмениваться только с неотличимым от него атомным электроном, откуда следует, что необходимо пользоваться антисимметричной комбинацией простой ( $f$ ) и обменной ( $g$ ) амплитуд рассеяния. Это и дает формулу (34.30).

Отсутствие спиновых взаимодействий возбуждение триплетного состояния атома гелия при столкновениях с электронами может происходить только за счет обмена падающего электрона с одним из атомных. В этом случае амплитуда простого рассеяния ( $f$ ) отсутствует и, следовательно, интерференции между амплитудами простого и обменного рассеяния не возникает.

### ЗАДАЧИ

1. Показать, что если между функциями  $v_a, v_b, \dots, v_n$  существует линейная зависимость, то антисимметричная волновая функция, определяемая формулой (32.7), обращается в нуль.

2. Показать, что если волновая функция  $u(1, 2, \dots, n)$  является собственной функцией симметричного гамильтониана и принадлежит невырожденному собственному значению, то она или симметрична, или антисимметрична. Доказательство дать сначала для случая  $n = 2$ , затем для  $n = 3$ , и, наконец, указать, каким образом можно его обобщить на случай произвольного  $n$ .

3. Проверить, действительно ли спиновые волновые функции (33.6) являются собственными функциями операторов  $(S_1 + S_2)^2$  и  $S_{1z} + S_{2z}$ , принадлежащими указанным собственным значениям. Показать также, что результат действия  $x$ - и  $y$ -компонент оператора полного спина на эти функции согласуется с соответствующими матрицами (24.15).

4. Провести вычисления, указанные в задаче 3, для спиновых функций, определяемых формулами (33.9).

5. Найти собственные функции квадрата оператора полного спина и его  $z$ -компоненты для четырехэлектронной системы. Показать, что полученные состояния можно сгруппировать в один квинтет, три триплета и два синглета. (Указание: за исходные взять триплетные и синглетные спиновые функции для двух пар электронов; воспользоваться матрицами (24.15) и соответствующими матрицами для  $j = 2$ .)

6. С помощью формулы (33.2) написать выражение для эффективного сечения рассеяния протонов протонами в системе координат центра инерции. Считать, что кулоновское взаимодействие имеет место вплоть до  $r = 0$ . Рассмотреть вопрос об эффективном сечении в классическом предельном случае ( $\hbar \rightarrow 0$ ), обратив особое внимание на углы, близкие к  $\theta = 90^\circ$ . Показать, что если усреднить дифференциальное эффективное сечение по произвольному малому, но конечному угловому интервалу, то интерференционный член обращается в нуль.

7. Показать, что при вычислении уровней энергии атома гелия в первом приближении теории возмущений (§ 33) конфигурации  $1s2p$  и  $1s2s$  можно рассматривать независимо.

8. Какой вид имела бы волновая функция невозмущенного состояния атома гелия, если бы электроны подчинялись статистике Бозе — Эйнштейна и спин каждого из них равнялся  $\hbar$ ?

9. Написать невозмущенную волновую функцию основного состояния нейтрального атома лития.

10. Непосредственным вычислением показать, что формулу (34.25) можно получить в предположении, что падающий и атомный электроны описываются четырьмя спиновыми волновыми функциями  $(++)$ ,  $(+-)$ ,  $(-+)$  и  $(--)$ , а не их триплетными и синглетной линейными комбинациями (см. примечание 1 на стр. 278).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Uhlenbeck G. E., Goudsmit S., Naturwiss., **13**, 953 (1925); Nature, **117**, 264 (1926).
2. Pauli W., Zs. f. Phys., **31**, 765 (1925).
3. Tolman R. C., The Principles of Statistical Mechanics, Oxford, New York, 1938.
4. Marshak R. E., Meson Physics, New York, 1952.
5. Ehrenfest P., Oppenheimer J. R., Phys. Rev., **37**, 333 (1931).
6. Pauli W., Phys. Rev., **58**, 716 (1940). (Имеется русский перевод в книге В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.)
7. Pauli W., Zs. f. Phys., **43**, 601 (1927).
8. Mott N. F., Massey H. S. W., The Theory of Atomic Collisions, 2d ed., Oxford, New York, 1949. (Имеется русский перевод, Н. Мотт, Г. Мессе, Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951.)
9. Oppenheimer J. R., Phys. Rev., **32**, 361 (1928).



## ПОЛУКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

До сих пор мы не рассматривали вопросов, связанных с взаимодействием частиц с электромагнитным излучением. Как и следовало ожидать, последовательное рассмотрение, согласующееся с развитой ранее квантовой теорией частиц, возможно лишь на основе квантовых уравнений движения электромагнитного поля, аналогичных уравнениям Максвелла. Действительно, только в этом случае в рамки общей теории можно включить квантовую гипотезу Планка. Изложение основ квантовой теории излучения мы отложим до гл. XIV. В настоящей же главе электромагнитное поле будет рассматриваться классически, а частицы, с которыми оно взаимодействует, — квантовомеханически. Такое полуклассическое рассмотрение по необходимости является неполным и не вполне удовлетворительным, хотя оно в принципе и проще квантовой электродинамики, излагаемой в гл. XIV. Мы увидим, что данное приближение позволяет наглядно и правильно описать влияние внешнего поля излучения на систему частиц (поглощение и вынужденное испускание), но не дает правильного представления о влиянии частиц на поле (спонтанное излучение). Тем не менее и в последнем случае результаты классического рассмотрения удастся корректно (хотя и не вполне убедительно) перенести в квантовую теорию.

### § 35. Поглощение и вынужденное испускание

Чтобы получить уравнение Шредингера для частицы с массой  $m$  и зарядом  $e$ , движущейся в электромагнитном поле с потенциалами  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  при наличии добавочной потенциальной энергии  $V$ , нужно добавить к правой части уравнения (23.24) член  $V\psi$ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{ie\hbar}{mc} \mathbf{A} \cdot \text{grad} + \frac{ie\hbar}{2mc} (\text{div} \mathbf{A}) + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 + e\varphi + V \right] \psi. \quad (35.1)$$

Здесь  $V$  представляет собой потенциальную энергию, ответственную за связанные состояния частицы (в случае электрона эта энергия имеет электростатическое происхождение); потенциалы  $\mathbf{A}$

и  $\varphi$  характеризуют электромагнитное поле, величина которого достаточно мала, чтобы соответствующие члены в (35.1) можно было рассматривать как возмущение. Последнее вызывает переходы между различными стационарными состояниями частицы в поле  $V$ , и задача состоит в вычислении соответствующих вероятностей. Сначала мы обсудим некоторые свойства поля и рассмотрим решения его уравнений, имеющие вид плоских волн.

**Уравнения Максвелла.** В гауссовой системе единиц уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \rho, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (35.2)$$

Беря дивергенцию от второго и производную по времени от третьего уравнения, получим уравнение непрерывности для плотности электрического заряда  $\rho$  и плотности тока  $\mathbf{J}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (35.3)$$

Напряженности электрического и магнитного полей можно выразить через потенциалы по формулам (23.15):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (35.4)$$

откуда видно, что первое и четвертое из уравнений (35.2) удовлетворяются тождественно. Соотношения (35.4) не определяют потенциалов однозначно, так как напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , очевидно, не изменятся, если заменить  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  новыми потенциалами  $\mathbf{A}'$  и  $\varphi'$ :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (35.5)$$

где  $\chi$  — произвольная функция  $\mathbf{r}$  и  $t$  (см. также задачу 3).

Подставляя (35.4) во второе и третье уравнения (35.2), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} + \nabla^2 \varphi &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (35.6)$$

Пользуясь прямоугольными координатами, для вектора  $\mathbf{A}$  можно написать

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

где последний член представляет собой вектор, компоненты которого получаются применением оператора Лапласа к соответствующим

щим компонентам  $\mathbf{A}$ . Применяя градиентное<sup>1)</sup> преобразование (35.5), переводящее  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ , в  $\mathbf{A}'$ ,  $\varphi'$ , можно упростить уравнения (35.6), если наложить на новые потенциалы условие Лоренца:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0. \quad (35.7)$$

При этом функция  $\chi$ , осуществляющая градиентное преобразование, должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (35.8)$$

Уравнения (35.6) теперь принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t^2} &= - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ \nabla^2 \varphi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} &= - 4\pi \rho. \end{aligned} \quad (35.9)$$

**Плоские электромагнитные волны.** Если  $\mathbf{J} = 0$  и  $\rho = 0$  (совершенно пустое пространство), то, как можно показать, не нарушая общности, функцию, осуществляющую градиентное преобразование, можно выбрать так, что  $\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0$  и  $\varphi' = 0$  для любых  $\mathbf{r}$  и  $t$  (см. задачу 1). Тогда для  $\mathbf{A}'$  и, следовательно, для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  получаются решения в виде плоских волн. В этом случае, опуская штрихи, мы получаем

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (35.10)$$

Типичное решение (35.10) имеет вид плоской волны, представляемой вещественным потенциалом с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и вещественным вектором поляризации  $|\mathbf{A}_0|$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 2 |\mathbf{A}_0| \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha) = \mathbf{A}_0 [e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] + \text{к. с.} \quad (35.11)$$

Здесь „к. с.“ означает комплексно сопряженное выражение, а постоянный комплексный вектор  $\mathbf{A}_0$  определяется как  $|\mathbf{A}_0| e^{i\alpha}$ . Первое из уравнений (35.10) выполняется, если  $\omega = kc$ , где  $k$  — абсолютная величина вектора  $\mathbf{k}$ ; из второго уравнения следует, что вектор  $\mathbf{A}_0$  перпендикулярен  $\mathbf{k}$ .

Напряженности электрического и магнитного полей, характеризующихся векторным потенциалом (35.11), имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -2k |\mathbf{A}_0| \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha), \\ \mathbf{H} &= -2\mathbf{k} \times |\mathbf{A}_0| \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Иногда употребляется также термин „калибровочное преобразование“. О различном выборе потенциалов в соответствии с (35.5) говорят как о различной их калибровке. — *Прим. перев.*

Вектор Пойнтинга ( $c/4\pi$ )  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , очевидно, параллелен вектору  $\mathbf{k}$ , а его абсолютная величина, усредненная по периоду колебаний  $2\pi/\omega$ , равна

$$\frac{\omega^2}{2\pi c} |\mathbf{A}_0|^2. \quad (35.12)$$

Здесь  $|\mathbf{A}_0|^2$  представляет собой скалярное произведение вектора  $\mathbf{A}_0$  на самого себя ( $|\mathbf{A}_0| \cdot |\mathbf{A}_0|$ ) или же скалярное произведение  $\mathbf{A}_0$  на комплексно сопряженный вектор  $(\mathbf{A}_0 \cdot \bar{\mathbf{A}}_0)$ . Выражение (35.12) определяет интенсивность<sup>1)</sup> плоской волны (35.11).

**Применение теории возмущений.** Вернемся теперь к уравнению (35.1) и вычислим вероятность перехода между стационарными состояниями, обусловленную векторным потенциалом (35.11); последний мы будем рассматривать как малое возмущение. Теперь в правой части (35.1) третий ( $\text{div } \mathbf{A}$ ) и пятый ( $\varphi$ ) члены равны нулю. Далее, отношение второго члена к первому и четвертого ко второму по порядку величины равно  $eA/cp$ , где  $p$  — импульс частицы. Оценка этого отношения для практически интересного случая дана в задаче 4; результат оказывается столь малым, что использование теории возмущений является оправданным. Таким образом, в первом приближении теории возмущений можно пренебречь членом  $e^2 \mathbf{A}^2/2mc^2$  и переписать уравнение (35.1) в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + H') \psi, \\ H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}), \quad H' = \frac{ie\hbar}{mc} \mathbf{A} \cdot \text{grad}. \quad (35.13)$$

Поступая так же, как в § 29, разложим  $\psi$  по стационарным собственным функциям  $u_k(\mathbf{r})$  невозмущенного гамильтониана  $H_0$ ; коэффициенты разложения  $a_k(t)$  при этом будут зависеть от времени. Если первоначально система находилась в состоянии  $n$  и возмущение начало действовать в момент  $t = 0$ , то в момент времени  $t$  в первом приближении мы получим [ср. с (29.17)]

$$a_k^{(1)}(t) = -\frac{H'_{kn}{}^0}{\hbar} \frac{e^{i(\omega_{kn} - \omega)t} - 1}{\omega_{kn} - \omega} - \frac{H'_{kn}{}^0}{\hbar} \frac{e^{i(\omega_{kn} + \omega)t} - 1}{\omega_{kn} + \omega}, \\ H'_{kn}{}^0 = \frac{ie\hbar}{mc} \int \bar{u}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{A}_0 \cdot \text{grad } u_n d\tau, \\ H'_{kn}{}^0 = \frac{ie\hbar}{mc} \int \bar{u}_k e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \bar{\mathbf{A}}_0 \cdot \text{grad } u_n d\tau. \quad (35.14)$$

Как уже отмечалось в § 29, вероятность нахождения системы в состоянии  $k$  имеет заметную величину лишь в том случае, когда знаменатель одного из членов в (35.14) практически равен нулю.

<sup>1)</sup> В нашей литературе чаще употребляется термин „поток энергии“. — Прим. перев.

Интерференция между двумя членами отсутствует: первый из них существен при  $E_k \approx E_n + \hbar\omega$ , а второй при  $E_k \approx E_n - \hbar\omega$ . Поэтому вероятность обнаружить систему в состоянии  $k$ , энергия которого больше энергии начального состояния приблизительно на  $\hbar\omega$ , будет пропорциональна  $|H'_{kn}{}^0|^2$ , а вероятность обнаружить систему в состоянии  $k'$ , энергия которого меньше начальной энергии на соответствующую величину, будет пропорциональна  $|H'_{k'n}{}^0|^2$ .

**Вероятность перехода.** В § 29 было показано, что вероятность перехода, отнесенная к единице времени, не зависит от времени лишь в том случае, если конечные состояния распределены непрерывно или образуют группу очень близко расположенных дискретных уровней. Это связано с характером представленной на фиг. 27 зависимости вероятности перехода  $|a_k^{(1)}(t)|^2$  от энергии: пропорциональна  $t$  не ордината, соответствующая той или иной абсциссе, а вся площадь под кривой.

Равным образом и в рассматриваемой сейчас задаче вероятность перехода, отнесенная к единице времени, будет постоянной, если падающее излучение монохроматично (частота  $\omega$  строго определена) и конечные состояния образуют непрерывную (или дискретную, но с очень малыми интервалами) группу. В результате мы получим формулу (29.12), в которой матричный элемент  $H'_{km}$  нужно заменить на  $H'_{kn}{}^0$  или  $H'_{k'n}{}^0$ . Однако часто представляет интерес вычисление вероятности перехода между двумя дискретными состояниями. Если в этом случае падающее излучение строго монохроматично, то вероятность перехода, отнесенная к единице времени, с течением времени не будет оставаться постоянной и будет заметно зависеть от разности между  $\omega$  и величиной

$$|\omega_{kn}| = \frac{|E_k - E_n|}{\hbar}.$$

В этом случае мы допустим, что излучение занимает целый интервал частот, причем между различными компонентами Фурье нет никаких фазовых соотношений. Тогда излучение можно характеризовать интенсивностью, отнесенной к единичному интервалу (постоянной в окрестности  $|\omega_{kn}|^2$ ).

В этом случае вероятность обнаружить систему в конечном состоянии будет пропорциональна  $|H'_{kn}{}^0|^2$  или  $|H'_{k'n}{}^0|^2$ , что в свою очередь пропорционально  $|A_0|^2$  и, следовательно, интенсивности. Если интенсивность, приходящаяся на малый интервал частот  $\Delta\omega$ , равна  $I(\omega)\Delta\omega$ , то в силу (35.12) можно положить

$$|A_0|^2 = \frac{2\pi c}{\omega^2} I(\omega) \Delta\omega, \quad (35.15)$$

<sup>1)</sup> Обсуждение случая, когда интенсивность вблизи точки  $(\omega_{kn})$  не постоянна, см. в книге Гайтлера [1], § 20.

где  $A_0$  — амплитуда векторного потенциала в интервале частот  $\Delta\omega$ . Тогда вероятность перехода системы в состояние с более высокой энергией ( $E_k \approx E_n + \hbar\omega$ ) к моменту времени  $t$  оказывается равной

$$|a_k^{(1)}(t)|^2 = \sum_{\omega} \frac{4 |H_{kn}^{i0}|^2 \sin^2 [(\omega_{kn} - \omega) t/2]}{\hbar^2 (\omega_{kn} - \omega)^2} = \\ = \sum_{\omega} \frac{8\pi e^2}{m^2 c \omega^2} I(\omega) \Delta\omega \left| \int \bar{u}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \text{grad}_A u_n d\tau \right|^2 \frac{\sin^2 [(\omega_{kn} - \omega) t/2]}{(\omega_{kn} - \omega)^2}, \quad (35.16)$$

где символ  $\text{grad}_A$  означает компоненту градиента в направлении вектора поляризации  $A_0$ . Поскольку между различными компонентами Фурье нет фазовых соотношений, вклады различных интервалов частот в вероятность перехода оказываются аддитивными.

Все интервалы частот  $\Delta\omega$  в (35.16) можно выбрать бесконечно малыми и перейти от суммирования к интегрированию. Поскольку временной множитель имеет острый максимум при  $\omega = \omega_{kn}$ , другие зависящие от  $\omega$  величины можно вынести за знак интеграла и интегрировать по  $\omega$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  [так, как это делалось при переходе от (29.10) к (29.11)]. Таким образом, отнесенная к единице времени вероятность перехода в состояние с более высокой энергией оказывается равной

$$\frac{1}{t} |a_k^{(1)}(t)|^2 = \frac{8\pi e^2}{m^2 c \omega_{kn}^2} I(\omega_{kn}) \times \\ \times \left| \int \bar{u}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \text{grad}_A u_n d\tau \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 [(\omega_{kn} - \omega) t/2]}{t (\omega_{kn} - \omega)^2} d\omega = \\ = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2 c \omega_{kn}^2} I(\omega_{kn}) \left| \int \bar{u}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \text{grad}_A u_n d\tau \right|^2, \quad (35.17)$$

где абсолютная величина вектора  $\mathbf{k}$  теперь равна  $\omega_{kn}/c$ .

Аналогичное выражение получается и для отнесенной к единице времени вероятности перехода в состояние с более низкой энергией ( $E_k \approx E_n - \hbar\omega$ ):

$$\frac{4\pi^2 e^2}{m^2 c \omega_{nk}^2} I(\omega_{nk}) \left| \int \bar{u}_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \text{grad}_A u_n d\tau \right|^2. \quad (35.18)$$

В этом случае абсолютная величина вектора  $\mathbf{k}$  равна  $\omega_{nk}/c$ .

**Истолкование в терминах поглощения и испускания.** Формулы (35.17) и (35.18) определяют (отнесенные к единице времени) вероятности переходов между стационарными состояниями под действием классического поля излучения. Эти выражения можно теперь истолковать в терминах поглощения и испускания квантов электромагнитного излучения. Следует предположить, что такие кванты (элементарные порции энергии поля излучения) действи-

тельно существуют и что энергия поля и частицы в сумме сохраняется. Переходя под влиянием излучения с круговой частотой  $\omega_{kn}$  в более высокое состояние, частица приобретает энергию  $E_k - E_n$ . Соответствующий квант энергии равен  $\hbar\omega_{kn} = E_k - E_n$ , так что каждому переходу частицы в более высокое состояние естественно сопоставить *поглощение* одного кванта.

Аналогично переход с уменьшением энергии связан с испусканием одного кванта, энергия которого соответствует частоте поля излучения. В соответствии с (35.18) вероятность испускания пропорциональна интенсивности наличного излучения. Поэтому такой процесс называется *вынужденным испусканием*.

Иногда оказывается удобным переписать выражение (35.18) в виде перехода, обратного фигурирующему в (35.17). Последняя формула описывает переход из начального (более низкого) состояния  $n$  в конечное (верхнее) состояние  $k$ ; выражение (35.18) будет соответствовать обратному переходу, если заменить там  $n$  на  $k$ , а  $k'$  на  $n$ . Тогда вместо (35.18) мы получим

$$\frac{4\pi^2 e^2}{m^2 c \omega_{kn}^2} I(\omega_{kn}) \left| \int \bar{u}_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \text{grad}_A u_k d\tau \right|^2. \quad (35.19)$$

Покажем теперь, что интеграл, входящий в (35.19), с точностью до знака совпадает с комплексно сопряженным значением интеграла, входящего в (35.17). Именно, интегрируя по частям [или же пользуясь (22.10)], представим его в виде<sup>1)</sup>

$$- \int u_k \text{grad}_A [\bar{u}_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] d\tau.$$

Сюда входит только составляющая градиента в направлении вектора поляризации  $\mathbf{A}_0$ . Поскольку волновой вектор  $\mathbf{k}$  перпендикулярен  $\mathbf{A}_0$ , оператор  $\nabla_A$  фактически не действует на  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  и, следовательно, интеграл в (35.19) равен

$$- \int u_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \text{grad}_A \bar{u}_n d\tau.$$

По абсолютной величине это выражение совпадает с интегралом в (35.17).

Поскольку правые части (35.17) и (35.19) совпадают, вероятности прямого и обратного переходов между любыми двумя состояниями под действием одного и того же поля излучения также оказываются одинаковыми.

**Дипольные переходы<sup>2)</sup>.** В большинстве практически интересных случаев длина волны излучения во много раз превышает линейные

<sup>1)</sup> Применяя соотношение (22.10), следует помнить, что эрмитовым является оператор  $i\text{grad}$ , а не просто  $\text{grad}$ .

<sup>2)</sup> Автор употребляет термин „электрические дипольные переходы“. В переводе использован более часто встречающийся в нашей литературе термин „дипольные переходы“. — *Прим. перев.*

размеры области, в которой волновая функция частицы заметно отлична от нуля. Это означает, что всюду, где функции  $u_n$  и  $u_k$  дают заметный вклад в интеграл, величина  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , входящая в экспоненциальное выражение в интеграле (35.17), мала по сравнению с единицей. Поэтому с хорошим приближением  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  можно заменить на единицу. Получающийся интеграл можно упростить, выразив его через матричный элемент импульса частицы:

$$\int \bar{u}_k \text{grad}_A u_n d\tau = \frac{i}{\hbar} \int \bar{u}_k p_A u_n d\tau = \frac{i}{\hbar} (p_A)_{kn};$$

здесь  $p_A$  — компонента импульса частицы  $\mathbf{p}$  в направлении поляризации падающего излучения. Как видно из матричной теории (§ 23), матрица импульса для невозмущенной частицы имеет вид  $\mathbf{p} = m(d\mathbf{r}/dt)$ . Таким образом, в силу (23.27) имеем

$$\frac{1}{m} (\mathbf{p})_{kn} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r})_{kn} = \frac{i}{\hbar} (E_k - E_n) (\mathbf{r})_{kn} = i\omega_{kn} (\mathbf{r})_{kn}.$$

В этом приближении формула (35.17) принимает вид

$$\int \bar{u}_k \text{grad}_A u_n d\tau = -\frac{m}{\hbar} \omega_{kn} (r_A)_{kn} = -\frac{m}{\hbar} \omega_{kn} \int \bar{u}_k r_A u_n d\tau, \quad (35.20)$$

где  $r_A$  — компонента вектора  $\mathbf{r}$  в направлении поляризации. Выражение (35.20), разумеется, можно вывести и без помощи матричных методов (см. задачу 3).

Переходы, вероятности которых можно вычислить, подставляя (35.20) в (35.17), называются дипольными. Такое название связано с тем, что в этом случае вероятность перехода зависит только от матричного элемента дипольного момента частицы  $e\mathbf{r}$ <sup>1)</sup>. В дипольном приближении вероятности перехода для поглощения и вынужденного испускания, отнесенные к единице времени, принимают вид

$$\frac{4\pi^2 e^2}{\hbar^2 c} I(\omega_{kn}) |(r_A)_{kn}|^2. \quad (35.21)$$

Удобно обозначить через  $(\mathbf{r})_{kn}$  вектор, компоненты которого в декартовой системе координат равны  $kn$ -м матричным элементам  $x$ ,  $y$  и  $z$ , и положить

$$|(\mathbf{r})_{kn}|^2 = (\mathbf{r})_{kn} \cdot \bar{(\mathbf{r})}_{kn}. \quad (35.22)$$

Это выражение представляет собой скалярное произведение  $(\mathbf{r})_{kn}$  на комплексно сопряженный вектор. Дело в том, что обычно существует несколько пар состояний  $k$  и  $n$ , для которых векторы  $(\mathbf{r})_{kn}$

<sup>1)</sup> Величина  $e\mathbf{r}$  представляет собой дипольный момент частицы с зарядом  $e$  относительно произвольно расположенного начала координат; добавление  $\mathbf{k}$  постоянного вектора (что соответствует сдвигу начала координат) не изменяет матричного элемента (35.20), так как функции  $u_k$  и  $u_n$  ортогональны.



направлены различно, а величины  $|\mathbf{r}|_{kn}^2$  одинаковы<sup>1)</sup>. Тогда, если  $\Theta$  — угол между  $(\mathbf{r})_{kn}$  и направлением поляризации падающего излучения, то в выражении (35.21) множитель  $|(\mathbf{r}_A)_{kn}|^2$  можно заменить на  $|\mathbf{r}|_{kn}^2 \cos^2 \Theta$  и провести усреднение по всем значениям  $\Theta$ . Среднее значение (35.21) для таких пар состояний равно

$$\frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2 c} I(\omega_{kn}) |\mathbf{r}|_{kn}|^2. \quad (35.23)$$

**Запрещенные переходы.** Может случиться, что для некоторых состояний  $k$  и  $n$  дипольный матричный элемент  $(\mathbf{r})_{kn}$  равен нулю. В этом случае приближенная замена  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  единицей в интеграле (35.17) уже не является оправданной. Экспоненциальное выражение можно разложить в степенной ряд:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 1 + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \frac{1}{2!}(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})^2 + \dots$$

или в ряд по сферическим функциям [типа (19.9)]:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = j_0(kr) + 3ij_1(kr)P_1(\cos\theta) - 5j_2(kr)P_2(\cos\theta) + \dots,$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{r}$ . Второй ряд более удобен, если, как это обычно бывает, волновые функции  $u_k$  и  $u_n$  можно выразить через сферические функции. В обоих случаях при  $kr \ll 1$  главный член  $n$ -го порядка пропорционален  $(kr)^n$  [см. первую из формул (15.7)]. Поэтому коль скоро дипольный матричный элемент обращается в нуль, а следующий за ним член в каждом из рядов отличен от нуля, то матричный элемент умножается на величину порядка  $ka$ , где  $a$  — линейный размер области, в которой волновая функция частицы заметно отлична от нуля. Переход подобного типа называется *запрещенным*, так как его вероятность отличается множителем  $(ka)^2$  от вероятности дипольного или *разрешенного перехода*, а  $ka \ll 1$ . Последовательные члены в разложениях соответствуют дипольному, квадрупольному и т. д. переходам и содержат все более и более высокие степени  $ka$ .

Если оба состояния  $u_k$  и  $u_n$  сферически симметричны, то интеграл

$$\int \bar{u}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \text{grad}_A u_n d\tau$$

тождественно равен нулю. Чтобы убедиться в этом, введем в качестве переменных интегрирования декартовы координаты с осью  $x$ , параллельной вектору поляризации. При этом  $\text{grad}_A u_n$  будет нечетной, а  $u_k$  — четной функцией  $x$ ; вектор  $\mathbf{k}$  перпендикулярен направлению поляризации и, следовательно, лежит в плоскости  $yz$ ; таким

<sup>1)</sup> Если, например, частица движется в области со сферически симметричным потенциалом  $V(r)$ , то состоянию  $k$  может соответствовать квантовое число  $l=0$ , а состояниям  $n$  — квантовое число  $l=1$ , причем магнитное квантовое число  $m$  будет принимать три значения  $(0, \pm 1)$ .

образом,  $e^{ik \cdot r} = e^{i(k_y y + k_z z)}$  не зависит от  $x$ . Поэтому подинтегральное выражение в целом будет нечетной функцией  $x$ , и интеграл (35.17) обращается в нуль. Переходы между этими состояниями называются *строго запрещенными*, так как соответствующие вероятности, определяемые формулой (35.17), равны нулю. Но переходы могут все-таки возникать за счет членов более высокого порядка малости относительно возмущения  $H'$ , определяемого формулой (35.13); в таких вычислениях в  $H'$  необходимо включить и отброшенный ранее член  $e^2 A^2 / 2mc^2$ . Однако с помощью квантовой электродинамики можно показать, что в таких переходах более высокого порядка участвует более одного кванта, так что эти переходы уже не являются простыми процессами испускания или поглощения, в которых энергия кванта равна разности энергий невозмущенных состояний частицы.

### § 36. Спонтанное излучение

Классический заряженный осциллятор может либо отбирать энергию у поля излучения, либо, наоборот, отдавать ему свою энергию в зависимости от соотношения фаз между колебаниями поля и осциллятора. Эти эффекты аналогичны поглощению и вынужденному испусканию, рассмотренным в предыдущем параграфе. Кроме того, классический осциллятор излучает энергию и самопроизвольно, независимо от того, имеется ли внешнее поле излучения или нет. В настоящем параграфе мы рассчитаем электромагнитное излучение классического осциллирующего распределения электрических токов и зарядов в отсутствие внешних полей. Чтобы вычислить затем вероятность *спонтанного излучения*, полученные формулы несколько произвольно будут переписаны в терминах квантовых матричных элементов. Справедливость полученных результатов будет подтверждена сравнением их с формулой Планка для спектрального распределения теплового излучения в полости.

**Классическое поле излучения.** Распределение электрических токов и зарядов можно полностью охарактеризовать заданием плотности тока  $\mathbf{J}$ , поскольку плотность заряда  $\rho$  связана с  $\mathbf{J}$  уравнением непрерывности (35.3). Аналогично в пустом пространстве вдали от зарядов и токов электромагнитное поле полностью характеризуется заданием любого из векторов  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ , так как они связаны уравнениями (35.2). Беря ротор от первого из уравнений (35.9), легко находим волновое уравнение для  $\mathbf{H}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{J}. \quad (36.1)$$

Таким образом, в уравнение для  $\mathbf{H}$  входит только  $\mathbf{J}$ , тогда как в аналогичное уравнение для  $\mathbf{E}$  входят как  $\mathbf{J}$ , так и  $\rho$  (хотя послед-

ную величину, разумеется, можно исключить). Перейдем теперь к решению уравнения (36.1) для  $\mathbf{H}$ . Будем считать, что все три декартовы компоненты вектора  $\mathbf{J}$  гармонически колеблются с одинаковой частотой  $\omega$ , но необязательно с одинаковой фазой:

$$J_x(\mathbf{r}, t) = 2 |J_x(\mathbf{r})| \cos(\omega t - \eta_x) = J_x(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{к. с.},$$

$$J_x(\mathbf{r}) = |J_x(\mathbf{r})| e^{i\eta_x}. \quad (36.2)$$

Аналогичные выражения имеют место для  $y$ - и  $z$ -компонент.

Интересуясь только стационарными решениями для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  с той же частотой  $\omega$ , положим

$$E_x(\mathbf{r}, t) = 2 |E_x(\mathbf{r})| \cos(\omega t - \xi_x) = E_x(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{к. с.},$$

$$H_x(\mathbf{r}, t) = 2 |H_x(\mathbf{r})| \cos(\omega t - \zeta_x) = H_x(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{к. с.},$$

$$E_x(\mathbf{r}) = |E_x(\mathbf{r})| e^{i\xi_x}, \quad H_x(\mathbf{r}) = |H_x(\mathbf{r})| e^{i\zeta_x},$$

Аналогичные выражения имеют место для  $y$ - и  $z$ -компонент. В пустом пространстве вектор  $\mathbf{E}$  выражается через  $\mathbf{H}$  с помощью второго уравнения (35.2):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{ic}{\omega} \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (36.4)$$

С учетом (36.2) и (36.3) уравнение (36.1) принимает вид

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (36.5)$$

Это — неоднородное уравнение типа (26.5); его решение, записанное с помощью функции Грина (26.15), имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\text{rot } \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'. \quad (36.6)$$

Формула (36.6) определяет запаздывающее решение уравнения (36.5); на больших  $r$  оно описывает расходящуюся волну, зависящую от  $r$  и  $t$  по закону

$$\frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} + \text{к. с.}$$

Таким образом, поле, создаваемое данным элементом тока, проявляется в точке  $r$  лишь спустя некоторый промежуток времени, т. е. колебания его запаздывают по сравнению с колебаниями  $\mathbf{J}$ .

**Асимптотическое выражение.** Нам предстоит вычислить энергию и момент количества движения, уносимые полем. Ниже будет показано, что энергию можно найти, зная лишь главный член (порядка  $1/r$ ) в асимптотическом разложении напряженности поля; для вычисления же момента количества движения нужно еще рассмот-

реть некоторые члены порядка  $1/r^2$ . Зависящую от  $r$  часть подинтегрального выражения в (36.6) можно разложить в ряд по степеням  $1/r$ :

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r' \cos \theta + \frac{1}{2} ikr'^2 \sin^2 \theta}{r} \right) e^{ik(r-r' \cos \theta)}, \quad (36.7)$$

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}$ . Подставляя (36.7) в (36.6) и принимая во внимание (36.4), мы полностью определим асимптотический вид электромагнитного поля с точностью до членов порядка  $1/r^2$ .

**Излученная энергия.** Вектор Пойнтинга, характеризующий поток энергии, равен

$$\frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)].$$

С помощью формул (36.3) получаем для типичной компоненты вектора  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ , полученного усреднением вектора Пойнтинга по периоду колебаний:

$$\begin{aligned} P_z(\mathbf{r}) &= \frac{c}{\pi} \{ |\mathbf{E}_x(\mathbf{r})| |\mathbf{H}_y(\mathbf{r})| [\cos(\omega t - \xi_x) \cos(\omega t - \zeta_y)]_{\text{ср. вр.}} - \\ &\quad - |\mathbf{E}_y(\mathbf{r})| |\mathbf{H}_x(\mathbf{r})| [\cos(\omega t - \xi_y) \cos(\omega t - \zeta_x)]_{\text{ср. вр.}} \} = \\ &= \frac{c}{2\pi} \{ |\mathbf{E}_x(\mathbf{r})| |\mathbf{H}_y(\mathbf{r})| \cos(\xi_x - \zeta_y) - |\mathbf{E}_y(\mathbf{r})| |\mathbf{H}_x(\mathbf{r})| \cos(\xi_y - \zeta_x) \}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание аналогичные выражения для двух других компонент, можно записать этот вектор в виде

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{c}{2\pi} \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \overline{\mathbf{H}(\mathbf{r})}], \quad (36.8)$$

где символ  $\text{Re}$  означает вещественную часть. Нас интересуют теперь только те члены в выражении для потока энергии, которые убывают как  $1/r^2$ , поскольку именно они определяют излученную энергию. Следовательно, в выражениях для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  нам будут нужны только члены порядка  $1/r$ .

Декартову систему координат, в которой выписываются явные выражения компонент напряженностей поля, удобно выбрать так, чтобы ось  $z$  была параллельна вектору  $\mathbf{r}$ , проведенному от центра распределения зарядов и токов до точки, в которой измеряются напряженности поля. Тогда на основании (36.4), (36.6) и (36.7) мы получаем с точностью до членов порядка  $1/r$  (где теперь  $r = z$ )

$$\begin{aligned} H_x &\rightarrow -\frac{ik}{rc} e^{ikr} \int J_y(\mathbf{r}') e^{-ikhz'} d\tau', & E_x &\rightarrow \frac{ik}{rc} e^{ikr} \int J_x(\mathbf{r}') e^{-ikhz'} d\tau', \\ H_y &\rightarrow \frac{ik}{rc} e^{ikr} \int J_x(\mathbf{r}') e^{-ikhz'} d\tau', & E_y &\rightarrow \frac{ik}{rc} e^{ikr} \int J_y(\mathbf{r}') e^{-ikhz'} d\tau', \\ H_z &\rightarrow 0, & E_z &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (36.9)$$

Чтобы исключить производные от компонент  $\mathbf{J}$ , было произведено интегрирование по частям. Из формулы (36.9) видно, что

в асимптотической области векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны направлению распространения поля. Видно также, что поляризация испускаемого излучения связана с распределением тока; далее, оказывается, что излучение энергии обусловлено лишь компонентами тока, перпендикулярными направлению распространения. Подставляя (36.9) в (36.8), получаем

$$P_z = \frac{k^2}{2\pi r^2 c} \left( \left| \int J_x e^{-ikz'} d\tau' \right|^2 + \left| \int J_y e^{-ikz'} d\tau' \right|^2 \right). \quad (36.10)$$

Обобщая эту формулу, можно найти среднее значение потока энергии в направлении вектора  $\mathbf{k}$ :

$$\frac{k^2}{2\pi r^2 c} \left| \int J_{\perp \mathbf{k}}(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d\tau' \right|^2, \quad (36.11)$$

где  $J_{\perp \mathbf{k}}$  — компонента вектора  $\mathbf{J}$ , перпендикулярная  $\mathbf{k}$ .

**Дипольное излучение.** Формула (36.11) дает точное выражение для энергии, излучаемой классическим распределением тока (36.2). Как и в § 35, в предельном случае больших длин волн справедлива дипольная аппроксимация: при  $kr' \ll 1$  в подинтегральном выражении  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}$  заменяется единицей. Поток энергии при этом равен

$$\frac{k^2}{2\pi r^2 c} \left| \int J_{\perp \mathbf{k}}(\mathbf{r}') d\tau' \right|^2. \quad (36.12)$$

В том же приближении из формул (36.9) вытекает, что поляризация излучения (характеризуемая направлением вектора напряженности электрического поля) определяется вектором полного тока  $\mathbf{J}_0 \equiv \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau'$ . Если  $\mathbf{J}_0$  имеет лишь одну компоненту в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, то излучение будет линейно поляризованным. Если в этой плоскости имеются две компоненты  $\mathbf{J}_0$ , перпендикулярные друг другу и сдвинутые по фазе на  $90^\circ$  (так что одна получается из другой умножением на  $i$ ), то излучение будет поляризованным по кругу, и т. д.

Если  $\mathbf{J}_0$  имеет только одну компоненту, то угловое распределение излучения можно найти, заменяя величину  $\left| \int J_{\perp \mathbf{k}}(\mathbf{r}') d\tau' \right|^2$  в (36.12) на

$$(\mathbf{J}_0 \cdot \bar{\mathbf{J}}_0) \sin^2 \theta = |\mathbf{J}_0|^2 \sin^2 \theta,$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{J}_0$  и  $\mathbf{k}$ ;  $|\mathbf{J}_0|^2$  сокращенно означает скалярное произведение вектора  $\mathbf{J}_0$  на комплексно сопряженный вектор. Тогда полная излученная энергия получается интегрированием выражения (36.12) по поверхности сферы радиуса  $r$  и равна

$$\frac{4k^2}{3c} |\mathbf{J}_0|^2. \quad (36.13)$$

Выражение (36.13) справедливо и при наличии у  $J_0$  нескольких компонент, причем фазы последних необязательно одинаковы (см. задачу II).

**Момент количества движения.** Момент количества движения, излучаемый в единицу времени, равен вращающему моменту, действующему на большую идеально поглощающую сферу с центром в источнике излучения. Средний поток энергии равен  $P$ , так что плотность энергии (для данного направления) есть  $(1/c)P$ , а плотность импульса составляет  $(1/c^2)P$ . Поскольку излучение распространяется со скоростью  $c$ , вращающий момент, действующий на бесконечно малый элемент идеально поглощающей поверхности  $dA$ , перпендикулярный вектору  $\mathbf{r}$ , равен векторному произведению  $\mathbf{r}$  на плотность импульса, умноженному на  $cdA$ :

$$\frac{dA}{c} (\mathbf{r} \times \mathbf{P}).$$

Интегрируя эту величину по поверхности радиуса  $r$ , находим момент количества движения, излучаемый источником в единицу времени. При этом существуют только касательные к сфере компоненты вектора  $\mathbf{P}$ , т. е. в обозначениях (36.9) величины  $P_x$  и  $P_y$  (ось  $z$  направлена вдоль  $\mathbf{r}$ ).

Если бы компоненты  $E_z$  и  $H_z$  были равны нулю, то тангенциальные составляющие  $P_x$  и  $P_y$  тоже были бы равны нулю, и излучение момента количества движения не имело бы места. Третье и шестое из выражений (36.9) говорят лишь о том, что радиальные компоненты напряженностей поля (параллельно оси  $z$ ) представляют собой величины меньшего порядка, чем  $1/r$ ; фактически они имеют порядок  $1/r^2$ . Это означает, что при больших  $r$  компоненты  $P_x$  и  $P_y$  убывают как  $1/r^3$ . При этом полный момент количества движения, поглощаемый большой сферой, не зависит от  $r$ , так как выражение для момента количества движения определяется величиной  $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ , а поверхность поглощающей сферы пропорциональна  $r^2$ .

Таким образом, необходимо найти члены порядка  $1/r^2$  в выражениях для  $E_z$  и  $H_z$ , но не в выражениях для других компонент напряженности поля:

$$\begin{aligned} H_z &\rightarrow \frac{ik}{r^2c} e^{ikr} \int [y' J_c(\mathbf{r}') - x' J_y(\mathbf{r}')] e^{-ikhz'} d\tau', \\ E_z &\rightarrow \frac{1}{r^2c} e^{ikr} \int [2J_z(\mathbf{r}') + ikx' J_c(\mathbf{r}') +iky' J_y(\mathbf{r}')] e^{-ikhz'} d\tau'. \end{aligned} \quad (36.14)$$

Формулы (36.9) и (36.14) позволяют точно вычислить величину излучаемого момента количества движения<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Более общее обсуждение данного вопроса можно найти в книге Блатта и Вайскопфа [2], приложение Б.

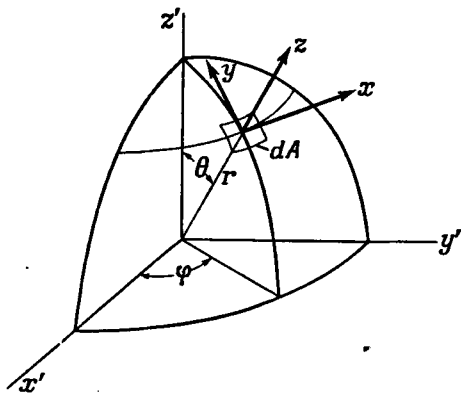
**Дипольный случай.** В дипольном приближении выражения для  $P_x$  и  $P_y$  принимают более простой вид, так как в этом случае в формулах (36.9) и (36.14) нужно оставить лишь члены наименьшего порядка относительно  $kr'$ . Легко видеть, что, например, в выражении для  $P_x$  главным членом будет не  $(c/2\pi) \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y \mathbf{H}_z)$ , а  $-(c/2\pi) \operatorname{Re}(\mathbf{E}_z \mathbf{H}_y)$ . С точностью до членов низшего порядка относительно  $kr'$  получим

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{k}{\pi r^2 c} \operatorname{Re} \left( i \int J_z d\tau' \int \bar{J}_x d\tau' \right), \\ P_y &= \frac{k}{\pi r^2 c} \operatorname{Re} \left( i \int J_z d\tau' \int \bar{J}_y d\tau' \right). \end{aligned} \quad (36.15)$$

Равенства (36.15) написаны в системе координат, связанной с элементом поглощающей поверхности  $dA$ , положение которого характеризуется вектором  $\mathbf{r}$ .

Чтобы найти компоненты момента количества движения относительно некоторой фиксированной в пространстве оси, эти формулы нужно переписать для произвольной декартовой системы. Эта операция в принципе подобна переходу от выражения (36.10) для потока энергии к более общей формуле (36.11), но более сложна.

Выберем новую фиксированную декартову систему координат  $x', y', z'$ . Положение старых осей в новой системе зависит от  $r$  (см. фиг. 29) следующим образом: ось  $z$  параллельна  $\mathbf{r}$ , и в новой



Фиг. 29. Соотношение между нештрихованной и штрихованной системами координат, использованными в выражениях (36.15) и (36.16).

системе координат ее положение характеризуется углами  $\theta, \varphi$ . Ось  $y$  перпендикулярна  $\mathbf{r}$  и лежит в плоскости, содержащей  $\mathbf{r}$  и  $z'$ ; наконец, ось  $x$  перпендикулярна плоскости, содержащей  $\mathbf{r}$  и  $z'$ . Для вычисления вклада в  $z'$ -ю компоненту момента количества движения, обусловленного поглощением в элементе поверхности

$$dA = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

взятом в точке  $\mathbf{r}$ , нужно знать лишь величину  $P_x$ , определяемую формулой (36.15). При помощи компонент полного вектора тока  $\mathbf{J}_0$  в новой системе координат это выражение можно переписать

в виде

$$P_x = \frac{k}{\pi r^3 c} \operatorname{Re} [i (J_{0x'} \sin \theta \cos \varphi + J_{0y'} \sin \theta \sin \varphi + J_{0z'} \cos \theta) \times \\ \times (\bar{J}_{0y'} \cos \varphi - \bar{J}_{0x'} \sin \varphi)]. \quad (36.16)$$

Плечо компоненты  $P_x$  относительно оси  $z'$  равно  $r \sin \theta$ ; таким образом, дифференциал соответствующей компоненты момента количества движения

$$dM_{z'} = \frac{1}{c} r \sin \theta P_x r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (36.17)$$

Подставляя (36.16) в (36.17) и интегрируя по полярным углам, находим

$$M_{z'} = \frac{4ik}{3c^2} (J_{0x'} \bar{J}_{0y'} - J_{0y'} \bar{J}_{0x'}). \quad (36.18)$$

Отсюда следует, что излучение некоторой компоненты момента количества движения зависит только от перпендикулярных ей составляющих вектора  $\mathbf{J}_0$ . Более того, должны иметься две взаимно перпендикулярные компоненты, колеблющиеся с некоторой разностью фаз. Действительно, если обе величины  $J_{0x'}$  и  $J_{0y'}$  вещественны (или просто синфазны), то выражение в скобках в (36.18) равно нулю. Таким образом, линейный диполь (у которого  $\mathbf{J}_0$  имеет лишь одну компоненту) не излучает момента количества движения. При данном значении  $|\mathbf{J}_0|^2$  излучение уносит максимальный момент количества движения, если вектор  $\mathbf{J}_0$  имеет две равные по абсолютной величине, взаимно перпендикулярные составляющие, сдвинутые по фазе на  $90^\circ$  (а третья компонента равна нулю). Пусть отличные от нуля компоненты направлены по осям  $x'$  и  $y'$ . Тогда можно положить  $J_{0y'} = iJ_{0x'}$  и формула (36.18) принимает вид

$$M_{z'} = \frac{8k}{3c^2} |J_{0x'}|^2 = \frac{4k}{3c^2} |\mathbf{J}_0|^2; \quad (36.19)$$

две другие компоненты вектора  $\mathbf{M}$  равны нулю.

Сравнение формул (36.13) и (36.19) показывает, что максимальный момент количества движения, излучаемый диполем в единицу времени, равен излучаемой энергии, умноженной на  $1/kc = 1/\omega$ . Будучи перенесено в квантовую теорию, это соотношение показывает, что излучаемый диполем квант энергии  $\hbar\omega$  уносит момент количества движения, не превышающий  $\hbar$ .

**Переход от классической к квантовой теории.** Перейдем теперь от классической формулы (36.13) для энергии, излучаемой диполем, к соответствующему квантовому выражению. Для этого нужно найти квантовый аналог вектора полного тока  $\mathbf{J}_0$  и связать излучаемую энергию с вероятностью перехода между состояниями излучающей частицы.



Поскольку излучение энергии связано с переходом из верхнего состояния  $u_k$  в нижнее состояние  $u_n$ , то вектор  $\mathbf{J}$  нужно заменить плотностью тока, связанной с переходом из  $k$  в  $n$ . Плотность тока естественно представить в виде произведения плотности заряда на скорость, вместо которой можно взять оператор импульса, деленный на массу —  $(i\hbar/m) \text{grad}$ . В стационарном состоянии плотность заряда следует приравнять заряду частицы, умноженному на плотность вероятности координат  $e|\psi|^2$ . Нас, однако, интересуют переходы между состояниями, поэтому мы заменим это выражение на  $e\bar{u}_n u_k$ . Характер действия оператора  $\text{grad}$ , фигурирующего в формуле для скорости, на волновые функции, описывающие плотность заряда, определяется с помощью соображений, приведенных в § 7 [см. (7.3)]. Таким путем получается величина, заменяющая классическую плотность тока:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) \rightarrow -\frac{ie\hbar}{m} \bar{u}_n(\mathbf{r}) \text{grad} u_k(\mathbf{r}). \quad (36.20)$$

Мы предположим, что переход к квантовой теории осуществляется подстановкой (36.20) во все полученные выше классические соотношения<sup>1)</sup>.

Интегрируя (36.20) по координатам, получим полный вектор тока:

$$\mathbf{J}_0 = -\frac{ie\hbar}{m} \int \bar{u}_n \text{grad} u_k d\tau = -ie\omega_{nk} \int \bar{u}_n \mathbf{r} u_k d\tau = ie\omega_{kn} \overline{(\mathbf{r})_{kn}}. \quad (36.21)$$

[Мы воспользовались здесь равенством (35.20).] Излучаемую энергию можно найти, подставляя (36.21) в (36.13). Мы рассматриваем получающееся выражение как произведение числа самопроизвольных переходов  $k \rightarrow n$  в единицу времени на энергию кванта  $\hbar\omega_{kn} = \hbar(E_k - E_n)$ , излучаемого при каждом переходе. Соответственно вероятность спонтанного излучения, отнесенная к единице времени, принимает вид (мы используем соотношение  $\omega_{kn} = kc$ )

$$\frac{4e^2 k^2 \omega_{kn}}{3\hbar c} |(\mathbf{r})_{kn}|^2 = \frac{4e^2 \omega_{kn}^3}{3\hbar c^3} |(\mathbf{r})_{kn}|^2. \quad (36.22)$$

**Формула распределения Планка.** Переход от классического выражения (36.13) к квантовому (36.22) не является достаточно убедительным. Однако в справедливости полученного результата можно убедиться, показав, что из равенств (36.22) и (35.23) получается формула Планка для спектрального распределения интенсивности теплового излучения в полости. Именно таким путем

<sup>1)</sup> Экспоненциальное выражение в (36.11) можно поместить как справа, так и слева от оператора  $\text{grad}$ , так как в формулу входит лишь перпендикулярная вектору  $\mathbf{k}$  составляющая градиента.

было впервые найдено соотношение между вероятностями поглощения и вынужденного и спонтанного излучения<sup>1)</sup>.

Пусть стенки полости с излучением состоят из частиц с зарядом  $e$  и массой  $m$ , движущихся (в связанных состояниях) под действием потенциала  $V$  [того же типа, что и в (35.1)]. Если эти частицы находятся в равновесии с тепловым излучением при абсолютной температуре  $T$ , то в любом интервале частот в единицу времени должно испускаться столько же квантов, сколько их поглощается. Число квантов с частотой  $\omega_{kn}$ , испускаемых в единицу времени, определяется суммой выражений (35.23) и (36.22), умноженной на число частиц в верхнем состоянии  $k$ . Число квантов, поглощенных за это же время, равно произведению (35.23) на число частиц в нижнем состоянии  $n$ . Однако, как известно из статистической механики<sup>2)</sup>, при равновесии отношение чисел частиц в верхнем и нижнем состояниях составляет  $e^{-(E_k - E_n)/\kappa T}$ , где  $\kappa$  — постоянная Больцмана. Поэтому, опуская индексы у  $\omega_{kn}$ , получаем

$$e^{-\hbar\omega/\kappa T} \left[ \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2 c} I(\omega) |(\mathbf{r})_{kn}|^2 + \frac{4e^2 \omega^3}{3\hbar c^3} |(\mathbf{r})_{kn}|^2 \right] = \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2 c} I(\omega) |(\mathbf{r})_{kn}|^2.$$

Решая это уравнение относительно  $I(\omega)$ , находим

$$I(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1)}. \quad (36.23)$$

Интересно отметить, что из выражения для  $I(\omega)$  выпадают параметры  $e$ ,  $m$  и  $(\mathbf{r})_{kn}$ , характеризующие испускающую и поглощающую системы.

Совпадение (36.23) с формулой Планка показывает, что наша теория дает правильное значение отношения (35.23) к (36.22). Следовательно, если верна первая из этих формул, то верна и вторая.

**Ширина линии.** При испускании электромагнитных волн классический осциллятор теряет энергию, и, следовательно, амплитуда его колебаний убывает со временем. Соответственно напряженность излучаемого им поля с течением времени затухает по закону  $e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_0 t + \alpha)$ . Разлагая это выражение в интеграл Фурье, находим спектральную плотность излучения осциллятора. Для круговой частоты  $\omega$  интенсивность излучения, отнесенная к единичному интервалу частот, оказывается пропорциональной величине

$$\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4} \gamma^2}. \quad (36.24)$$

<sup>1)</sup> См. работу Эйнштейна [3]. Коэффициент  $A$  у Эйнштейна определяется равенством (36.22), а коэффициент  $B$  — выражением (35.23), деленным на плотность энергии излучения  $I(\omega_{kn})/c$  (сюда входит круговая частота  $\omega_{kn}$ , а не обычная частота, равная  $\omega_{kn}/2\pi$ ).

<sup>2)</sup> См., например, книгу Толмэна [4], гл. 4. (См. также книги [12, 13]. — Прим. перев.)

В соответствии с (36.24) интенсивность излучаемой спектральной линии равна половине максимального значения при  $\omega = \omega_0 \pm (\gamma/2)$ . Величина  $\gamma$  называется *естественной шириной линии*; в случаях, представляющих практический интерес, она мала по сравнению с  $\omega_0$ .

Очевидно, ширина линии равна удвоенной величине начального значения логарифмической производной амплитуды классического осциллятора по времени (или начальному значению логарифмической производной от энергии осциллятора). Представляется естественным связать скорость убывания энергии классического осциллятора со скоростью убывания вероятности того, что соответствующая квантовая система находится в начальном верхнем состоянии. Если это сделать, то квантовым аналогом классической естественной ширины линии  $\gamma$  будет (отнесенная к единице времени) начальная вероятность перехода со спонтанным излучением, определяемая формулой (36.22)<sup>1)</sup>.

Указанное соотношение между вероятностью перехода и шириной линии можно качественно (но зато в более общем виде) получить с помощью соотношения неопределенности (3.3). Обратная величина вероятности перехода в единицу времени по порядку величины равна времени пребывания квантовой системы в верхнем состоянии. Следовательно, определение энергии верхнего состояния должно производиться за время, не слишком превышающее его время жизни  $1/\gamma$ . В соответствии с соотношением неопределенности это означает, что точность определения энергии не может заметно превышать постоянную Планка, деленную на время жизни, т. е. величину  $\hbar\gamma$ . Если неопределенность энергии верхнего состояния будет равна этой величине, то неопределенность частоты излучения (уширение линии) будет равно  $\gamma$ . В общем случае квантовый уровень энергии уширяется при наличии любых процессов, сокращающих его время жизни: уровень будет идеально резким только в том случае, если время жизни соответствующего состояния бесконечно велико (истинно стационарное состояние).

Переписывая выражение (36.22) для  $\gamma$  в виде

$$\frac{\gamma}{\omega_{kn}} = \frac{4}{3} \frac{e^2}{\hbar c} k^2 |(\mathbf{r})_{kn}|^2,$$

можно получить качественное представление об естественной ширине линии дипольного излучения квантовой системы. Множитель  $e^2/\hbar c$  представляет безразмерную постоянную, значение которой очень близко к  $1/137$ <sup>2)</sup>, если  $e$  — заряд электрона. Что касается множителя  $k^2 |(\mathbf{r})_{kn}|^2$ , то, применяя дипольное приближе-

<sup>1)</sup> Дальнейшее обсуждение вопроса о ширине линии см. в книге Гайтлера [1].

<sup>2)</sup> Эта величина представляет собой *постоянную тонкой структуры*, появляющуюся в теории тонкой структуры атомных уровней энергии (см. гл. XII).

ние, мы уже предположили, что он мал по сравнению с единицей. Поэтому можно ожидать, что отношение ширины линии к частоте будет очень мало (для типичных атомных дипольных линий это величина порядка  $10^{-6}$ ).

### § 37. Некоторые применения теории излучения

В настоящем параграфе мы применим развитую выше полуклассическую теорию излучения к определению правил отбора для разрешенных переходов, а также к теории эффекта Черенкова. Последний вопрос, во-первых, представляет определенный практический интерес и во-вторых, позволит показать, как надо вычислять излучение от распределения токов, изменяющихся со временем не по гармоническому закону. В заключение будет рассмотрена теория фотоэффекта.

**Правила отбора для одной частицы.** Из рассмотрения вопроса о запрещенных переходах, проведенного в § 35, видно, что, если дипольный матричный элемент  $(\mathbf{r})_{kn}$  обращается в нуль, то вероятности поглощения и вынужденного излучения уменьшаются по крайней мере в  $(ka)^2$  раз по сравнению с вероятностью разрешенных переходов. Эти же замечания относятся и к вероятности спонтанного излучения, так как при подстановке выражения (36.20) для  $\mathbf{J}$  интеграл в (36.11) будет равен интегралу (35.19).

Условия, которым должны удовлетворять функции  $u_k$  и  $u_n$ , чтобы дипольный матричный элемент был отличен от нуля, называются *правилами отбора*; их можно легко сформулировать в том случае, когда потенциал  $V$ , входящий в невозмущенный гамилтониан (35.13), является сферически симметричным. В § 14 было показано, что при этом собственные функции оператора энергии можно записать в виде произведений радиальных функций на сферические  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , определяемые формулой (14.16). Матричный элемент  $(\mathbf{r})_{kn}$  представляет собой вектор, декартовы компоненты которого суть соответствующие матричные элементы  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Последняя величина равна интегралу  $\int \bar{u}_k r \cos \theta u_n d\tau$ , который можно переписать в виде произведения интеграла по  $r$  на интеграл

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \bar{Y}_{lm}(\theta, \varphi) \cos \theta Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (37.1)$$

Здесь штрихованными и нештрихованными индексами обозначены квантовые числа момента количества движения соответственно для нижнего состояния  $u_n$  и для верхнего состояния  $u_k$ .

Интеграл по  $\varphi$  в выражении (37.1) имеет вид

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m' - m)\varphi} d\varphi$$

и, следовательно, отличен от нуля, лишь если  $m' = m$ . Поэтому с точностью до численного множителя интеграл (37.1) можно переписать в виде

$$\int_{-1}^1 w P_l^m(w) P_l^m(w) dw, \quad w = \cos \theta. \quad (37.2)$$

При помощи производящей функции (14.13) для присоединенных функций Лежандра можно показать, что

$$w P_l^m(w) = \frac{l+|m|}{2l+1} P_{l-1}^m(w) + \frac{l-|m|+1}{2l+1} P_{l+1}^m(w).$$

Подставляя это выражение в (37.2) и принимая во внимание условие ортогональности (14.15), получаем, что матричный элемент  $z$  отличен от нуля лишь в том случае, когда  $m' = m$  и  $l' = l \pm 1$ . Аналогично можно показать, что матричный элемент величины  $x+iy$  отличен от нуля, только если  $m' = m-1$  и  $l' = l \pm 1$ , а матричный элемент  $x-iy$  — в том случае, если  $m' = m+1$  и  $l' = l \pm 1$ . Этими правилами отбора определяются возможные разрешенные дипольные переходы для одной заряженной частицы, движущейся в центральном силовом поле.

**Поляризация испускаемого излучения.** Как уже указывалось в связи с формулой (36.12), поляризация испускаемого излучения определяется полным вектором тока  $\mathbf{J}_0$ , т. е. [в силу (36.21)] дипольным матричным элементом. Если значения  $l$  в начальном и конечном состояниях отличаются на единицу, а квантовое число  $m$  (относительно оси  $z$ ) — одно и то же, то отличными от нуля будут лишь матричные элементы оператора  $z$ . Если смотреть со стороны плоскости  $xu$ , то излучение будет линейно поляризовано в направлении оси  $z$ , тогда как в направлении оси  $z$  излучения не будет вообще. Если магнитные квантовые числа начального и конечного состояний отличаются на единицу, то  $x$ - и  $y$ -компоненты дипольного матричного элемента будут сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ , а  $z$ -компонента обратится в нуль. При этом волны, распространяющиеся вдоль оси  $z$ , поляризованы по кругу, а если смотреть со стороны плоскости  $xu$ , то излучение будет линейно поляризовано в направлении, перпендикулярном оси  $z$ . Эти результаты представляют интерес в связи с вопросом о поляризации излучения атомов, помещенных в магнитное поле (см. рассмотрение эффекта Зеемана, § 39).

**Сохранение момента количества движения.** Как показано при обсуждении формул (36.18) и (36.19), максимальное значение момента количества движения, уносимого излучаемым квантом, равно  $\hbar$ ; кроме того, если при этом  $J_{0y} = iJ_{0z}$ , то момент количества движения направлен вдоль оси  $z$ . Из формул (36.21) ясно, что в этом случае  $(y)_{kn} = i(x)_{kn}$  или  $(y)_{kn} = -i(x)_{kn}$ . Но, с другой

стороны,

$$x = r \sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{2} r \sin \theta (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}),$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi = -\frac{1}{2} i r \sin \theta (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}).$$

Рассмотрение интеграла по  $\varphi$  в (37.1) показывает теперь, что указанное соотношение между матричными элементами  $x$  и  $y$  справедливо лишь в том случае, когда магнитное квантовое число в начальном состоянии  $u_r$  на единицу больше, чем в конечном состоянии  $u_n$ . Пользуясь равенством (14.23), мы видим, что при таком переходе  $z$ -компонента момента количества движения частицы уменьшается на  $\hbar$ . Поэтому общий момент количества движения излучающей частицы и испускаемого кванта сохраняется.

Этот результат основан на соотношении (36.20) между классической и квантовой плотностями тока. Из успешного вывода формулы Планка (§ 36) следует, что во всяком случае абсолютная величина  $J$  правильно передается выражением (36.20). Данное выше доказательство закона сохранения момента количества движения показывает, кроме того, что и фазы начального и конечного состояний в (36.20) выбраны правильно; если бы, например, вектор  $J$  был пропорционален  $\bar{u}_r \text{ grad } u_n$ , то результат предыдущего абзаца был бы иным.

Если при переходе магнитное квантовое число не изменяется, то отличным от нуля будет лишь матричный элемент  $z$ ; в этом случае из формулы (36.18) вытекает, что квант не уносит с собой никакого момента количества движения. На первый взгляд могло бы показаться, что это противоречит изменению орбитального квантового числа  $l$  на единицу. Но  $x$ - и  $y$ -компоненты момента количества движения не коммутируют с  $z$ -компонентой (которая в данном случае равна  $m\hbar$  и остается неизменной), так что их нельзя определить точно. Средние значения их в состояниях, описываемых квантовыми числами  $l$  и  $m$ , равны нулю, так как соответствующие матрицы не имеют диагональных элементов [см. соотношения (24.15)]. Поэтому в данном случае нет наблюдаемых изменений каких-либо компонент момента, откуда следует, что среднее значение момента количества движения, уносимого квантом, должно быть равно нулю. Мы можем представить себе дело таким образом, что в стационарном состоянии  $x$ - и  $y$ -компоненты момента количества движения частицы флуктуируют около нуля, так что их средние значения равны нулю (хотя средние значения их квадратов отличны от нуля). Изменения  $l$  соответствуют изменению средних значений этих квадратов.

**Правила отбора для систем из многих частиц.** Если квантово-механическая система состоит из нескольких невзаимодействующих друг с другом частиц, то полный гамильтониан равен просто

сумме членов типа  $H_0 + H'$ , определяемых соотношениями (35.13). Собственные функции невозмущенного оператора энергии представляют собой произведения собственных функций отдельных частиц, рассмотренные в § 32 (их можно и не симметризовать, если частицы не тождественны). Очевидно, матричный элемент, фигурирующий в первом приближении теории возмущений (применяемой в § 35 в связи с вопросами о поглощении и вынужденном испускании), содержит многократный интеграл вида

$$\int \int \dots \int \bar{u}_{a'}(1) \bar{u}_{b'}(2) \dots \\ \dots [H'(1) + H'(2) + \dots] u_a(1) u_b(2) \dots d\tau_1 d\tau_2 \dots$$

Поскольку для данной частицы различные функции  $u$  ортогональны, этот интеграл будет отличен от нуля лишь в том случае, когда все одночастичные функции  $u_{a'}$ , ..., кроме одной, равны соответствующим функциям  $u_a$ , ... Поэтому при переходе может измениться состояние только одной из частиц, вследствие чего правила отбора (для центрального силового поля) в точности совпадают с полученными выше для одной частицы. Поскольку с помощью формулы Планка вероятность спонтанного излучения можно выразить через этот же интеграл, то указанные правила отбора будут справедливы не только для поглощения и вынужденного излучения, но также и для спонтанного излучения.

Если система состоит из нескольких заряженных частиц, взаимодействием между которыми пренебречь уже нельзя, то правила отбора нужно основывать на общих законах сохранения момента количества движения и четности. Результаты § 35 и 36 нетрудно обобщить таким образом, чтобы показать, что если длина волны излучения велика по сравнению с размерами системы, то главную роль будет играть матричный элемент полного дипольного момента  $e_1 r_1 + e_2 r_2 + \dots$ .

Как указывалось при обсуждении формулы (36.19), момент количества движения кванта, испускаемого колеблющимся диполем, не может превышать  $\hbar$ ; этот классический результат, полученный для произвольного распределения токов, не изменится и в том случае, когда диполь образован из нескольких частиц. Вопрос о сохранении полного момента количества движения кванта и излучающей системы осложняется тем обстоятельством, что все изложение носит полуклассический характер. Последовательное рассмотрение в рамках квантовой электродинамики приводит к строгому правилу отбора, основанному на указанном законе сохранения. Согласно этому правилу, квантовое число полного момента количества движения излучающей системы может либо оставаться неизменным, либо изменяться на единицу. Исключение составляет случай, когда и в начальном и в конечном состояниях это квантовое число равно нулю. В этом случае волновые функции начального и

конечного состояний будут сферически симметричны; обобщая соображения, изложенные к конце § 35, получим, что радиационные переходы между этими состояниями не просто запрещены, а строго запрещены (т. е. в первом приближении теории возмущений между ними невозможны не только дипольные, но и вообще любые переходы).

Обсуждение вопроса о четности в связи с формулой (23.26) показывает, что если полный гамильтониан не изменяется при инверсии координат всех частиц, то все его собственные функции характеризуются определенной четностью. Таким свойством обладают все известные гамильтонианы<sup>1</sup>. С другой стороны, оператор дипольного момента является, очевидно, нечетным относительно инверсии всех координат. Следовательно, его матричные элементы отличны от нуля лишь в том случае, если четности начального и конечного состояний противоположны. Это правило отбора известно под названием правила Лапорта.

**Эффект Черенкова.** Легко показать, что заряженная частица, свободно движущаяся в пустом пространстве, не излучает энергии. При заданной энергии электромагнитное излучение обладает наибольшим импульсом в том случае, когда оно распространяется в одном направлении; при этом отношение импульса к энергии равно  $1/c$ . Релятивистское соотношение между полной энергией  $E$  (включающей энергию покоя) и абсолютной величиной импульса движущейся свободной частицы  $p$  имеет вид

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

где  $m$  — масса покоя<sup>2</sup>. Дифференцируя это соотношение, получаем  $2EdE = 2pc^2dp$ , так что при излучении отношение потери импульса к потере энергии составляет

$$\frac{dp}{dE} = \frac{E}{pc^2} = \frac{1}{c} \left[ 1 + \left( \frac{mc}{p} \right)^2 \right]^{1/2};$$

эта величина всегда больше  $1/c$ . Поэтому свободно движущаяся частица не может излучать, так как в противном случае не могли бы одновременно выполняться законы сохранения энергии и импульса.

Положение изменяется, если имеются другие частицы, которые могут принять на себя избыток импульса. Так, например, электрон, связанный в атоме или проходящий поблизости от атомного ядра, может излучать; последний случай обычно рассматривается как отклонение электрона ядром и испускание электромагнитных волн ускоренно движущимся электроном. Интересный пример, в кото-

<sup>1</sup>) В рамках нерелятивистской квантовой механики. — *Прим. перев.*

<sup>2</sup>) См., например, книгу Бергмана [5], гл. 6. (См. также книгу Ландау и Лифшица [14]. — *Прим. перев.*)



ром вследствие наличия вещества законы сохранения могут выполняться, дает равномерное движение заряженной частицы в среде с показателем преломления  $n$ , когда скорость частицы  $v$  больше скорости света в среде:

$$v > \frac{c}{n}. \quad (37.3)$$

Излучение быстрого электрона, скорость которого удовлетворяет неравенству (37.3), наблюдалось Черенковым<sup>1)</sup>. Теория эффекта Черенкова<sup>2)</sup>, основанная на классической теории излучения, излагается ниже<sup>3)</sup>. Такой подход будет удовлетворительным, если свойства среды можно охарактеризовать с помощью показателя преломления.

**Выражение для плотности тока.** Допустим, что размеры движущегося заряда малы по сравнению с интересующими нас длинами волн. Тогда, если частица с зарядом  $e$  находится в момент  $t = 0$  в начале координат и движется вдоль оси  $z$  со скоростью  $v$ , то плотность тока можно записать в виде

$$\begin{aligned} J_x(\mathbf{r}, t) &= J_y(\mathbf{r}, t) = 0, \\ J_z(\mathbf{r}, t) &= ev\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt); \end{aligned} \quad (37.4)$$

здесь  $\delta$  — функция Дирака, введенная в § 11. Поскольку в § 36 теория излучения основывалась на предположении, что плотность тока зависит от времени по гармоническому закону, разложим  $J_z$  в интеграл Фурье:

$$J_z(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} [J_{z\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{к. с.}] d\omega. \quad (37.5)$$

Коэффициент Фурье, соответствующий частоте  $\omega$ , дается формулой

$$J_{z\omega}(\mathbf{r}) = \frac{e}{2\pi} \delta(x)\delta(y) e^{i\omega z/v}. \quad (37.6)$$

Чтобы убедиться в этом, подставим (37.6) в (37.5):

$$\begin{aligned} J_z(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{2\pi} \delta(x)\delta(y) \int_0^{\infty} [e^{i\omega[(z/v)-t]} + e^{-i\omega[(z/v)-t]}] d\omega = \\ &= \frac{e}{2\pi} \delta(x)\delta(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[(z/v)-t]} d\omega, \end{aligned}$$

что в силу (11.10) и пятой из формул (11.13) согласуется с (37.4).

<sup>1)</sup> См. работу Черенкова [6]. (Или работы [16, 17]. — Прим. перев.)

<sup>2)</sup> См. работы Франка и Тамма [7] и Тамма [8].

<sup>3)</sup> Подробное изложение классической теории эффекта Черенкова можно найти в монографии Иваненко и Соколова [17]; см. также обзорную статью Джелли [18]. — Прим. перев.

**Разложение напряженностей поля излучения в интеграл Фурье.** По аналогии с (37.5) выражения для напряженностей электрического и магнитного полей можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int_0^{\infty} [\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{к. с.}] d\omega, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \int_0^{\infty} [\mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{к. с.}] d\omega. \end{aligned} \quad (37.7)$$

В силу уравнений Максвелла векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  зависят от  $\mathbf{J}$  линейно; поэтому каждая из компонент Фурье  $\mathbf{E}_{\omega}$  и  $\mathbf{H}_{\omega}$  связана с соответствующей компонентой плотности тока  $J_{z\omega}$ . Вектор Пойнтинга, соответствующий (37.7), равен

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{\omega'}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega+\omega')t} + \\ &+ \overline{\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r})} \times \overline{\mathbf{H}_{\omega'}(\mathbf{r})} e^{i(\omega+\omega')t} + \mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}) \times \overline{\mathbf{H}_{\omega'}(\mathbf{r})} e^{-i(\omega-\omega')t} + \\ &+ \overline{\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r})} \times \mathbf{H}_{\omega'}(\mathbf{r}) e^{i(\omega-\omega')t}] d\omega d\omega'. \end{aligned} \quad (37.8)$$

Формулой (37.8) можно воспользоваться для нахождения спектрального распределения энергии излучения. Если акт испускания занимает время, малое по сравнению с обычными лабораторными масштабами, то распределение испускаемой энергии по частотам обычно представляет больший интерес, чем распределение во времени. Поэтому проинтегрируем (37.8) по времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получив тем самым полный поток энергии. Поскольку время  $t$  входит только в показатели степеней, то в силу формулы (11.10) мы получим  $\delta$ -функции от частот. При последующем интегрировании по  $\omega'$  первые два члена в подинтегральном выражении ничего не дадут, а последние два члена примут вид

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) dt &= \\ &= \frac{1}{2} c \int_0^{\infty} [\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}) \times \overline{\mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r})} + \overline{\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r})} \times \mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r})] d\omega. \end{aligned} \quad (37.9)$$

Подинтегральное выражение в (37.9) равно удвоенному значению вещественной части произведения  $\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}) \times \overline{\mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r})}$  и в соответствии с (36.8) его можно обозначить через  $(4\pi/c) \mathbf{P}_{\omega}(\mathbf{r})$ . Поскольку (37.9) имеет вид интеграла по частоте, величина  $2\pi \mathbf{P}_{\omega}(\mathbf{r}) d\omega$  представляет собой поток энергии в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

Будем считать, что рассматриваемая среда представляет собой однородный изотропный диэлектрик, характеризуемый ди-

электрической проницаемостью  $\epsilon$ . Это означает, что в формулах § 35 и 36 константу  $c$  надо заменить на  $c/\epsilon^{1/2} = c/n$  ( $n$ —показатель преломления среды, равный  $\epsilon^{1/2}$ ), а вместо  $\mathbf{k}$  нужно взять произведение  $n\mathbf{k}^1$ . Поэтому в наших обозначениях формула (36.11) принимает вид

$$P_{k_0}(\mathbf{r}) = \frac{nk^2}{2\pi r^2 c} \left| \int J_{\perp k_0}(\mathbf{r}') e^{-in\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d\tau' \right|^2; \quad (37.10)$$

здесь  $P_{k_0}$ — компонента вектора  $\mathbf{P}_0$  в направлении наблюдения (т. е. параллельно  $\mathbf{k}$  или  $\mathbf{r}$ ), а абсолютная величина  $\mathbf{k}$  равна прежнему значению  $\omega/c$ .

**Излученная энергия.** Пусть направление наблюдения характеризуется полярными углами  $\theta$ ,  $\varphi$  относительно оси  $z$ . Тогда скалярное произведение  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'$  в (37.10) равно

$$k(x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi + z' \cos \theta)$$

$$\text{и } J_{\perp k_0} = J_{z_0} \sin \theta.$$

Подставив (37.6) в (37.10), найдем поток энергии, отнесенный к единичному интервалу частоты:

$$\begin{aligned} 2\pi P_{k_0}(\mathbf{r}) &= 2\pi \frac{nk^2}{2\pi r^2 c} \frac{e^2}{4\pi^2} \sin^2 \theta \left| \int \int \int \delta(x') \delta(y') \exp(i\omega z'/v) \times \right. \\ &\times \exp[-in\mathbf{k}(x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi + z' \cos \theta)] dx' dy' dz' \left. \right|^2 = \\ &= \frac{ne^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{4\pi^3 c^3 r^2} \left| \int \exp\left[i\omega z' \left(\frac{1}{v} - \frac{n \cos \theta}{c}\right)\right] dz' \right|^2. \end{aligned} \quad (37.11)$$

Чтобы придать выражению (37.11) определенный смысл, можно принять, что частица излучает только на конечном участке своего пути, длина которого равна  $L$ . Тогда интеграл по  $z'$  можно брать, например, от  $-L/2$  до  $L/2$ .

Простой расчет дает для квадрата интеграла в (37.11):

$$\frac{4 \sin^2 \left[ \frac{1}{2} \omega L \left( \frac{1}{v} - \frac{n \cos \theta}{c} \right) \right]}{\omega^2 \left( \frac{1}{v} - \frac{n \cos \theta}{c} \right)^2}. \quad (37.12)$$

При больших  $L$  это выражение будет иметь резкий максимум, если знаменатель равен нулю, т. е. если

$$\cos \theta_0 = \frac{c}{nv}. \quad (37.13)$$

<sup>1)</sup> Как можно подсчитать, показатель преломления  $n$  должен быть таким, чтобы величина  $c/n$  представляла собой фазовую, а не групповую скорость света в среде (см. работы Тамма [8], § 5 или Мотца и Шиффа [9]).

Таким образом, частица излучает внутрь конуса в направлении своего движения, причем угол при вершине конуса убывает с уменьшением  $nv/c$ . Поскольку при  $v < c/n$  угол  $\theta_0$  становится мнимым, то при нарушении условия (37.3) излучение отсутствует. В частности, излучение отсутствует при  $n = 1$  (в пустом пространстве), поскольку  $v$  всегда меньше  $c$ . Тот факт, что выражение (37.12) не обращается в нуль при  $\cos\theta < 1$ , даже если  $v < c/n$ , связан с конечностью длины пути частицы  $L$ . Действительно, в начале пути частице сообщается определенная скорость, а в конце его частица останавливается. Таким образом, частица испытывает известное ускорение, благодаря чему излучение становится возможным.

Полная энергия излучения дается интегралом от (37.11) по поверхности сферы радиуса  $r$ . При его вычислении, как и в случае (29.11), можно, учитывая остроту максимума подинтегрального выражения, распространить интеграл по  $\cos\theta$  на всю бесконечную область, а  $\sin^2\theta$  заменить на  $\sin^2\theta_0$ , где  $\theta_0$  дается формулой (37.13). Интеграл от выражения (37.12) равен  $4\pi^2 c L r^2 / n\omega$ . Подставив это выражение в (37.11), найдем, что полная энергия, излучаемая частицей на расстоянии  $L$  и отнесенная к единичному интервалу частот, составляет

$$\frac{\omega e^2 L \sin^2 \theta_0}{c^2} = \frac{\omega e^2 L}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2}\right).$$

Соответственно число квантов с частотой в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , испускаемых на единице пути частицей с зарядом  $e$ , движущейся со скоростью  $v$  в диэлектрике с показателем преломления  $n$ , дается выражением

$$\frac{e^2}{\hbar c^2} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2}\right) d\omega = \frac{1}{137} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2}\right) \frac{d\omega}{c} \quad (37.14)$$

( $e$  — заряд электрона). Следовательно, число квантов в единичном интервале частот зависит от  $\omega$  только через  $n$ . Выражение (37.14) показывает, что при движении очень быстрых электронов ( $v \approx c$ ) в воде ( $n \approx 1,33$ ) на 1 см пути испускается около 230 квантов видимого света (длина волны от 4000 до 7500 Å).

**Фотоэффект.** Если на систему, содержащую связанные заряженные частицы, падают кванты достаточно высокой энергии, то имеется конечная вероятность разрушения системы. В случае атомов этот процесс обычно называется *фотоэффектом*, в случае ядер — *фоторасщеплением*. В качестве примера рассмотрим вырывание электрона из атома под действием фотона с энергией  $\hbar\omega > \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — энергия основного состояния электрона.) В начальном состоянии волновая функция электрона равна  $u_0(\mathbf{r})$ , а кинети-

ческая энергия в конечном состоянии есть

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar\omega - \varepsilon. \quad (37.15)$$

Пусть излучение падает в положительном направлении вдоль оси  $z$  и поляризовано так, что вектор напряженности электрического поля параллелен оси  $x$ . Матричный элемент перехода определяется при этом второй из формул (35.14)

$$H'_{k0} = \frac{ie\hbar}{mc} \int \bar{u}_k e^{i\omega z/c} A_0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) d\tau. \quad (37.16)$$

Допустим, что конечное состояние с достаточной точностью представляется плоской волной

$$u_k(\mathbf{r}) = L^{-3/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

Это эквивалентно предположению о применимости борновского приближения для описания рассеяния электрона остающимся ионом.

Тогда, интегрируя выражение (37.16) по частям, получаем

$$H'_{k0} = -\frac{e\hbar A_0 k_x}{m c L^{3/2}} \int u_0 e^{i(\omega z/c - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\tau.$$

На основании формул (29.12) и (29.14) вероятность перехода в единицу времени из связанного состояния в ионизованное равна

$$w = \frac{m k L^3}{4\pi^2 \hbar^3} |H'_{k0}|^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Для дальнейшего оказывается удобным ввести вектор передаваемого атому импульса  $\hbar \mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K} = \left( \frac{\omega}{c} \right) \mathbf{1}_z - \mathbf{k}, \quad (37.17)$$

где  $\mathbf{1}_z$  — единичный вектор, параллельный оси  $z$ . Дифференциальное эффективное сечение фотоэффекта равно вероятности  $w$ , деленной на величину падающего потока фотонов. Последняя получается делением интенсивности (35.12) на  $\hbar\omega$  и, следовательно,

$$\sigma(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{e^2 k k_x^2}{2\pi m c \omega} \left| \int u_0 e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} d\tau \right|^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (37.18)$$

**Угловое распределение.** Угловое распределение вырываемых фотоэлектронов определяется двумя множителями в (37.18). Первый множитель  $k_x^2$  показывает, что распределение электронов относительно направления поляризации падающего излучения будет характеризоваться квадратом косинуса. Если излучение не поляризовано, то  $k_x^2$  нужно заменить на  $(k_x^2 + k_y^2)/2$ , в силу чего распределение относительно направления падающего потока

будет характеризоваться квадратом синуса. В обоих случаях вырываемые электроны движутся преимущественно под прямыми углами к направлению падающего пучка фотонов.

На угловое распределение влияет также вектор передачи импульса  $\mathbf{K}$ , фигурирующего в подинтегральном выражении (37.18). В § 26 было показано, что интегралы типа (37.18), вообще говоря, убывают при увеличении  $K$  (см., например, фиг. 23). Наименьшую величину вектор  $\mathbf{K}$  будет иметь в том случае, когда вектор  $\mathbf{k}$  направлен вдоль оси  $z$ . Таким образом, наличие вектора  $\mathbf{K}$  в (37.18) приводит к смещению максимума дифференциального сечения в направлении вперед. Однако этот эффект будет заметен, лишь если  $k$  и  $\omega/c$  сравнимы по величине. Временно допуская, что величиной  $\varepsilon$  в (37.15) можно пренебречь, получаем

$$\frac{\omega}{ck} \approx \frac{\hbar k}{2mc} = \frac{v}{2c},$$

где  $v$  — скорость вырываемого электрона. Таким образом, смещение максимума сечения вперед происходит при большой энергии фотонов и вырываемых электронов, в связи с чем величиной  $\varepsilon$ , как и предполагалось выше, действительно можно пренебречь<sup>1)</sup>.

**Эффективное сечение фотоэффекта на атомах.** Рассмотрим теперь частный случай, когда фотоэлектрон вырывается из нижнего состояния ( $K$ - или  $1s$ -оболочки) атома. Тогда начальной волновой функцией  $u_0(\mathbf{r})$  будет функция  $u_{100}(r, \theta, \varphi)$ . В соответствии с (16.24) она имеет вид

$$u_0(r) = (\pi a^3)^{-1/2} e^{-r/a}, \quad a = \frac{a_0}{Z}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}. \quad (37.19)$$

Поскольку функция  $u_0$  сферически симметрична, интеграл по угловым переменным в (37.18) легко берется, и мы получаем

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{8\pi e^2 k k_x^2}{m c \omega K^2} \left| \int_0^\infty u_0(r) \sin Kr \cdot r dr \right|^2. \quad (37.20)$$

Подстановка (37.19) в (37.20) дает

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{32e^2 a^3 k k_x^2}{m c \omega (1 + K^2 a^2)^4}. \quad (37.21)$$

В конце § 26 указывалось, что применение борновского приближения оказывается наиболее оправданным, когда энергия высока и  $Ze^2/\hbar v \ll 1$ . В рассматриваемом теперь случае  $\varepsilon = Z^2 e^2 / 2a_0$ , так что  $\hbar^2 k^2 / 2m\varepsilon = (\hbar v / Ze^2)^2$ , поэтому величиной  $\varepsilon$  в (37.15) можно пренебречь. Поскольку, как показано выше, в этом случае  $\omega/ck \approx$

<sup>1)</sup> Величины  $k$  и  $\omega/c$  могут быть также очень близки друг к другу вблизи границы фотоэффекта, когда  $\hbar\omega$  лишь немного больше  $\varepsilon$ . Однако в этом случае борновское приближение непригодно.

$\approx v/2c$ , величина  $K$ , определяемая равенством (37.17), приближенно равна  $k(1 - v\cos\theta/2c)$ . Кроме того,  $ka = \hbar v/Ze^2 \gg 1$ , следовательно, множитель  $1 + K^2 a^2$  в знаменателе формулы (37.21) можно приближенно заменить на  $k^2 a^2 (1 - v\cos\theta/c)$ . Таким образом, окончательно получается следующее выражение для дифференциального сечения фотоэффекта при высоких энергиях:

$$\sigma(\theta, \varphi) \approx \frac{32e^2}{m\omega(ka)^5} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{4v}{c} \cos \theta\right). \quad (37.22)$$

Поскольку электрон рассматривался в нерелятивистском приближении; отношение  $v/c$  должно быть достаточно мало по сравнению с единицей, в связи с чем в формуле (37.22) опущены члены порядка  $v^2/c^2$ .

Интегрируя по углам, находим полное эффективное сечение

$$\sigma \approx \frac{128\pi}{3} \frac{e^2}{m\omega(ka)^5}. \quad (37.23)$$

Из соотношений (37.15) и (37.19) следует, что сечение  $\sigma$  пропорционально  $Z^5/(\hbar\omega)^{1/2}$ . Применяя (37.23), необходимо помнить, что величина  $\sigma$  представляет собой полное сечение для каждого из  $K$ -электронов в отдельности, в связи с чем полное сечение фотоэффекта на  $K$ -оболочке вдвое превышает это значение.

Интересно отметить, что как главный член в (37.22), соответствующий пренебрежению величиной  $v/c$  по сравнению с единицей, так и все выражение (37.23) получаются в рассмотренном в § 35 дипольном приближении. В этом приближении множитель  $e^{i\omega z/c}$  в (37.16) заменяется единицей.

**Улучшение борновского приближения.** Рассмотренные вычисления в двух отношениях связаны с первым приближением теории возмущений. Во-первых, матричный элемент (37.16) считается малым, так что взаимодействие между электроном и электромагнитным полем рассматривается с точностью до величин первого порядка. Во-вторых, предполагается, что в конечном состоянии волновая функция электрона имеет вид плоской волны, т. е. считается, что влиянием потенциала иона в этом случае можно пренебречь. Что касается первого допущения, то в этом случае улучшить вычисления очень трудно, да и едва ли стоит это делать, так как взаимодействие между электроном и полем излучения действительно очень слабо. Наоборот, от второго предположения можно отказаться; связанную с этим некоторую затрату труда следует считать оправданной, так как полученный результат будет справедлив и в области низких энергий и при больших значениях  $Z$ ; другими словами, параметр  $Ze^2/\hbar v$  в этом случае не обязательно должен быть мал по сравнению с единицей.

В случае фотоэффекта на атоме водорода для описания конечного состояния можно пользоваться рассмотренными в § 20 куло-

новскими волновыми функциями общего типа; с их помощью можно получить также хорошее приближение и для фотоэффекта на  $K$ -оболочках более тяжелых элементов. На первый взгляд могло бы показаться, что правильная функция должна иметь вид (20.2), т. е. асимптотически должна складываться из плоской волны и расходящейся рассеянной волны<sup>1)</sup> [см. (20.9)]. В действительности, однако, оказывается, что асимптотически волновая функция конечного состояния должна состоять из плоской и сходящейся сферической волн.

Качественно причина этого состоит в следующем<sup>2)</sup>. Цель данного расчета заключается в том, чтобы определить вероятность перехода, при котором электрон испускается в направлении распространения плоской волны. Однако если конечное состояние характеризуется плоской и расходящейся сферической волнами, то можно ожидать, что часть амплитуды рассеяния связана с электронами, направление движения которых отличается от направления распространения плоской волны, поскольку расходящаяся сферическая волна учитывает возможность движения во всех направлениях. Наоборот, часть амплитуды вероятности, соответствующая испусканию электрона в данном направлении, будет включена в результаты, относящиеся к другим направлениям распространения, поскольку характерные для них расходящиеся волны вносят свой вклад и в вероятность для рассматриваемого направления. Избежать этих осложнений можно, только выбирая волновую функцию конечного состояния так, чтобы в ней вообще не было расходящейся сферической волны. Это возможно только при условии, что асимптотическое выражение волновой функции будет складываться из плоской и расходящейся сферической волн.

### ЗАДАЧИ

1. Показать, что если  $\operatorname{div} \mathbf{J} = \rho = 0$ , то наиболее общее решение уравнений Максвелла можно выразить через такие потенциалы, для которых  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \varphi = 0$ .

2. Показать, что уравнению (35.1) соответствует плотность вероятности, определяемая формулой (7.1), и найти выражение для плотности тока вероятности, заменяющее (7.3).

3. Показать, что если градиентное преобразование (35.5) сопровождается преобразованием  $\psi' = \psi e^{i\mathbf{e}\mathbf{x}/\hbar c}$ , то вид волнового уравнения (35.1) не изменяется.

4. Оценить порядок величины отношения  $eA/cp$ , где  $e$  — заряд электрона,  $p$  — импульс электрона в первом возбужденном состоянии атома водорода,  $A$  — абсолютная величина векторного потенциала для видимой части спектра,

<sup>1)</sup> В действительности на бесконечности фаза плоской волны искажается, так что в кулоновском случае мы не получим в точности плоской волны.

<sup>2)</sup> См. книгу Зоммерфельда [10]. Дальнейшее обсуждение и ссылки на более поздние работы можно найти в работе Брейта и Бете [11].



соответствующей излучению черного тела при температуре несколько тысяч градусов Цельсия.

5. С помощью волнового уравнения проверить справедливость формулы (35.20), не пользуясь при этом матричными методами.

6. Пусть вынужденное испускание обусловлено действием изотропного поля такой интенсивности, что в области вблизи частоты перехода имеется по одному кванту на каждое состояние поля. Показать, что в этом случае вероятности вынужденного и спонтанного излучения одинаковы.

7. Атом водорода в первом возбужденном состоянии ( $2P$ ) помещен в полость с равновесным тепловым излучением. При какой температуре вероятности спонтанного и вынужденного испускания будут равны?

8. Вычислить отнесенную к единице времени вероятность спонтанного излучения для атома водорода в первом возбужденном состоянии (в сек. $^{-1}$ ).

9. Каковы правила отбора для разрешенных переходов линейного гармонического осциллятора? Чему равна отнесенная к единице времени и выраженная в сек. $^{-1}$  вероятность спонтанного перехода для осциллятора, находящегося в первом возбужденном состоянии (значения  $e$ ,  $m$  и  $\omega$  те же, что и в задаче 6)?

10. Показать, что если соответствующий радиационный переход разрешен, то в выражении для эффективного сечения возбуждения одноэлектронного атома при столкновениях с электронами всегда присутствует логарифмический множитель типа множителя, фигурирующего в (30.11). Найти простейшее соотношение между дифференциальным сечением для возбуждения атома электронным ударом и соответствующей вероятностью спонтанного излучения (переход считать разрешенным).

11. С помощью выражения для потока излученной энергии в дипольном приближении (36.12) найти угловое распределение излучения для случая, когда  $J_{0y} = iJ_{0x}$ ,  $J_{0z} = 0$ . Показать, что полная излученная энергия по-прежнему дается формулой (36.13).

12. Исходя из (37.5), найти общее выражение для  $J_{z\omega}(\mathbf{r})$  через  $J_z(\mathbf{r}, t)$ . Последнюю величину считать вещественной. Пользуясь этим результатом, проверить справедливость соотношения (37.6) для случая, когда  $J_z(\mathbf{r}, t)$  дается формулой (37.4).

13. Как поляризовано излучение Черенкова? Уносится ли в этом случае с излучением момент количества движения?

14. Предположить, что взаимодействие между нейтроном и протоном в дейтроне можно охарактеризовать прямоугольной потенциальной ямой при  $a = 0$  ( $\delta$ -взаимодействие), причем единственное связанное состояние соответствует значениям  $l = 0$  и  $\varepsilon = 2,23 Mэв$ . Показать, что если волновую функцию конечного состояния взять в виде плоской волны, то при вычислении эффективного сечения для фоторасщепления это не приведет к ошибкам. Найти дифференциальное и полное эффективные сечения для неполяризованных фотонов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Heitler W., The Quantum Theory of Radiation, 3d ed., Oxford — NewYork, 1954. (Имеется русский перевод: В. Г а й т л е р, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.)
2. Blatt J. M., Weisskopf V. F., Theoretical Nuclear Physics, NewYork, 1952. (Имеется русский перевод: Дж. Б л а т т, В. В а й с к о п ф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954.)
3. Einstein A., Phys. Zs., 18, 121 (1917).
4. Tolman R. C., The Principles of Statistical Mechanics, Oxford — NewYork, 1938.

5. Bergman P. G., *Introduction to the Theory of Relativity*, New York, 1942. (Имеется русский перевод: П. Бергман, Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947.)
6. Черенков П. А., *Phys. Rev.*, **52**, 378 (1937).
7. Франк И. М., Тамм И. Е., *ДАН СССР*, **14**, 109 (1937).
8. Тамм И. Е., *Journ. of Phys. (СССР)*, **1**, 439 (1939).
9. Motz H., Schiff L. I., *Amer. Journ. Phys.*, **21**, 258 (1953).
10. Sommerfeld A., *Atombau und Spektrallinien*, Bd. 2, Braunschweig, 1939. (Имеется русский перевод: А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, т. 2, М.—Л., 1954.)
11. Breit G., Bethe H. A., *Phys. Rev.*, **93**, 888 (1954).
- 12\*. Левич В. Г., Введение в статистическую физику, М.—Л., 1954.
- 13\*. Леонтович М. А., Статистическая физика, М.—Л., 1944.
- 14\*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М.—Л., 1948.
- 15\*. Черенков П. А., *ДАН СССР*, **2**, 451 (1934).
- 16\*. Черенков П. А., Труды Физ. института АН СССР, **2**, № 4 (1944).
- 17\*. Иваненко Д. Д., Соколов А. А., Классическая теория поля, М.—Л., 1951.
- 18\*. Джелли Д., Усп. физич. наук, **58**, 231 (1956).

## АТОМЫ, МОЛЕКУЛЫ И АТОМНЫЕ ЯДРА

В этой главе мы не ставим своей целью дать полное описание свойств атомных систем. Здесь будет рассмотрено относительно небольшое число задач, возникающих при изучении строения вещества и выбранных потому, что они представляют интересные и поучительные примеры применения квантовой механики. Задачи сгруппированы по отдельным темам; кроме того, в текст включено достаточное количество пояснительного материала. Таким образом, изложение является вполне связным, хотя и ограниченным в объеме.

### § 38. Приближения, используемые в теории атома<sup>1)</sup>

В § 16 и 27 были рассмотрены основные состояния двух самых легких атомов: водорода и гелия. Вариационные вычисления, аналогичные вычислениям, описанным для атома гелия, проводились и для других легких атомов. В настоящем параграфе описываются некоторые приближения, применявшиеся при рассмотрении более тяжелых атомов. Атомы щелочных элементов рассматриваются отдельно в § 39.

**Приближение центрального поля.** Исходным пунктом вычислений для всех атомов, кроме самых легких, является *приближение центрального поля*. В этом приближении предполагается, что каждый атомный электрон движется в поле, характеризуемом сферически симметричной потенциальной энергией  $V(r)$ , определяемой ядром и всеми другими электронами. Приближение будет хорошим в том случае, когда отклонение потенциальной энергии отдельного электрона от  $V(r)$ , вызванное прохождением поблизости других электронов, будет относительно мало. Это и в самом деле имеет место, так как постоянный ядерный потенциал примерно в  $Z$  раз больше флуктуирующего потенциала, определяемого проходящими поблизости электронами. Кроме того, последний лишь весьма слабо (по закону обратной пропорциональ-

<sup>1)</sup> Более подробное обсуждение вопросов, рассматриваемых в настоящем и следующем параграфах, можно найти в монографии Кондона и Шортли [1].

ности) зависит от расстояния. В связи с этим возникают две основные задачи: во-первых, вычисление центрального поля; во-вторых, определение поправок к получаемым с его помощью приближенным результатам. Но прежде чем рассматривать эти задачи, мы обсудим некоторые общие свойства центрального поля.

На больших расстояниях  $r$  от ядра потенциальная энергия нейтрального атома  $V(r)$  имеет кулоновский вид  $-e^2/r$ , поскольку при удалении электрона, для которого измеряется потенциал, остается отдельный положительно заряженный ион. В § 16 было показано, что в атоме водорода, когда потенциальная энергия при всех  $r$  равна  $-e^2/r$ , электрон имеет бесконечное число дискретных уровней энергии, характеризуемых квантовыми числами  $n$ ,  $l$  и  $m$ . Для потенциальной энергии  $V(r)$  также можно ожидать наличия бесконечного числа уровней энергии, поскольку при больших  $n$  волновая функция электрона вблизи ядра будет мала и главную роль будет играть вид  $V(r)$  при больших  $r$ . Однако между этими двумя случаями имеется важное различие, заключающееся в том, что вырождение водородных состояний, соответствующих различным  $l$  при данном  $n$ , в некулоновском центральном поле снимается. Это связано с тем, что при малых значениях момента количества движения электрон в среднем ближе подходит к ядру, а там притяжение сильнее, чем когда  $V(r) = -e^2/r$ , так как ядро уже не так полно экранируется другими электронами. Поэтому при заданном  $n$  состояния с меньшим значением  $l$  будут обладать аглебраически меньшей энергией. С другой стороны, вырождение по азимутальному квантовому числу  $m$  не снимается, так как оно имеет место в любом сферически симметричном поле.

Вследствие наличия спина состояние электрона в центральном поле задается четырьмя квантовыми числами:  $n, l, m_l$  и  $m_s$ . Орбитальные квантовые числа  $l$  и  $m_l$  — те же, что и  $l$  и  $m$  в атоме водорода; число  $m_s = \pm 1/2$  характеризует ориентацию спина, а  $n$  представляет собой естественное обобщение главного квантового числа, фигурирующего в водородной задаче. Соотношение (16.14) показывает, что величина  $n-l-1$  представляет собой число узлов радиальной части волновой функции атома водорода; такое определение  $n$  переносится и на случай произвольного центрального поля, так что  $l$  не превышает  $n-1$ .

**Периодическая система элементов.** В соответствии с принципом Паули (см. обсуждение вопроса об антисимметрии волновых функций в § 32) данной конкретной системой определенных выше четырех квантовых чисел может обладать только один электрон в атоме. При увеличении  $Z$  электроны заполняют последовательные состояния с низшей энергией; атом находится в основном

состоянии (в приближении центрального поля), если в нем нет не заполненных электронами состояний, энергия которых меньше чем в каком-либо из заполненных состояний. В силу вырождения по квантовым числам  $m_l$  и  $m_s$  оболочка, определяемая числами  $n$  и  $l$ , может содержать  $2(2l+1)$  электронов одной и той же энергии. Отсюда ясно, что конфигурацию электронов в атоме, находящемся в основном состоянии, можно описать, задавая число электронов в каждой оболочке. В приближении центрального поля все оболочки, в которых вообще есть электроны, будут заполнены, кроме, возможно, оболочки с наибольшей энергией.

Химические свойства атомов определяются главным образом наименее сильно связанными, или *валентными*, электронами, находящимися в оболочке с наибольшей энергией. Наиболее важными факторами являются число занятых и незанятых состояний в ней и разность энергий между данной и следующей более высокой (незаполненной) оболочкой. Например, если верхняя оболочка заполнена и разность энергий между ней и более высокой оболочкой имеет заметную величину, то в химическом отношении атом имеет тенденцию оставаться инертным, так как в этом случае переход электронов на другие атомы (или приход электронов с них), необходимый для образования молекулы, происходит с трудом. Квазипериодическая повторяемость структуры верхних оболочек по мере возрастания атомного номера  $Z$  обуславливает существование *периодической системы* химических элементов.

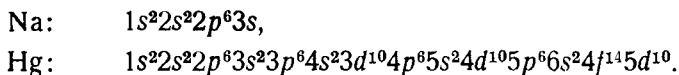
В обычных спектроскопических обозначениях квантовое число  $n$ , характеризующее оболочку, записывается числом,  $l$  — буквой, а число электронов в оболочке характеризуется численным индексом. Система буквенных обозначений для  $l$  имеет вид [ниже указано максимальное число электронов в оболочке  $2(2l+1)$ ]

$$l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

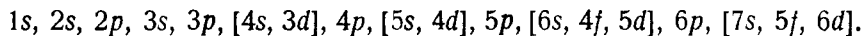
$$s, p, d, f, g, h, \dots$$

$$2(2l+1) = 2, 6, 10, 14, 18, 22, \dots$$

Например, электронные конфигурации основных состояний атомов натрия ( $Z = 11$ ) и ртути ( $Z = 80$ ) записываются следующим образом:



Электронные конфигурации основных состояний многих элементов можно получить, зная только последовательность, в которой возрастают энергии оболочек. Сведения о ней можно получить из спектроскопических данных; оказывается, что эта последовательность имеет вид



В скобки заключены оболочки, имеющие почти одинаковую энергию, так что они необязательно заполняются в указанном порядке. Близость энергий этих оболочек связана с тем, что увеличение  $n$  и уменьшение  $l$  приводит к противоположным результатам. Так, состояние  $4s$  (которое в атоме водорода лежит выше, чем  $3d$ ) сдвигается вниз благодаря тому, что при малом моменте количества движения электрон глубже проникает внутрь атома. Внутри каждой скобки  $s$ -оболочка всегда заполняется первой, хотя она может терять один или оба электрона по мере заполнения других указанных в скобках оболочек. Исключая оболочки, стоящие в скобках, указанный здесь порядок заполнения всегда соблюдается.

В табл. 2 приведены электронные конфигурации основных состояний всех элементов<sup>1)</sup>. В данном атоме заполнены все оболочки, выписанные сверху и слева от занимаемой им клетки в таблице. Поскольку при заполнении  $d$ -оболочек изменяется число  $s$ -электронов, столбцы „ $d$ “ подразделены так, чтобы это число было указано. Две группы атомов с частично заполненными  $f$ -оболочками (в основных состояниях) обозначены звездочкой (\*) (редкоземельные элементы) и крестиком (†) (наиболее тяжелые элементы). В первой группе заполнена оболочка  $6s$ , во второй —  $7s$ ; распределение электронов в  $d$ - и  $f$ -оболочках каждой группы показано в нижней части таблицы. Данные для элементов, атомные номера которых заключены в скобки, получены экстраполяцией или основаны на результатах анализа спектров соседних элементов.

Некоторые периодические закономерности заслуживают особого внимания. Элемент, у которого в какой-либо  $s$ -оболочке (кроме  $1s$ ) находится только один электрон, представляет собой щелочной металл, а предыдущие элементы (у которых заполнена  $1s$ -оболочка или  $p$ -оболочка) — инертные газы. Элементы с одинаковым числом электронов в  $p$ -оболочке обладают аналогичными химическими свойствами. Это особенно заметно проявляется в случае галогенов, в  $p$ -оболочках которых имеется лишь по одному свободному состоянию. Свойства элементов с заполненными  $2s$ - и  $3s$ -оболочками, за которыми следуют  $p$ -оболочки (Be и Mg), несколько отличаются от

<sup>1)</sup> Эта таблица заимствована из книги Кондона и Шортли [1]. Обзор последних данных, относящихся к редким землям (лантаноидам), имеется в работе Меггерса [2]. (См. также книгу Ельяшевича [32]. — *Прим. перев.*) Данные для наиболее тяжелых естественных элементов и для искусственных трансурановых элементов (актиноидов) приведены по Сиборгу (см. [3], гл. 8.). В последние годы ряд элементов получил новые названия: ниобий (Nb, 41), технеций (Tc, 43), прометий (Pm, 61), астатин (At, 85), франций (Fr, 87), нептуний (Np, 93), плутоний (Pu, 94), америций (Am, 95), кюрий (Cm, 96), беркелий (Bk, 97) и калифорний (Cf, 98). Элементы с атомными номерами 99 и 100 также выделены, но еще не получили названий. [Это было написано в 1955 г. В настоящее время элементы с атомными номерами 99 и 100 получили название эйнштейний (En) и фермий (Fm). Недавно был открыт также элемент с атомным номером 101, получивший название меделевий (Md). — *Прим. перев.*]

## Электронные конфигурации атомов в основном состоянии

	<i>s</i>	<i>s</i> <sup>2</sup>	<i>p</i>	<i>p</i> <sup>2</sup>	<i>p</i> <sup>3</sup>	<i>p</i> <sup>4</sup>	<i>p</i> <sup>5</sup>	<i>p</i> <sup>6</sup>	<i>d</i>	<i>d</i> <sup>2</sup>	<i>d</i> <sup>3</sup>	<i>d</i> <sup>4</sup>	<i>d</i> <sup>5</sup>	<i>d</i> <sup>6</sup>	<i>d</i> <sup>7</sup>	<i>d</i> <sup>8</sup>	<i>d</i> <sup>9</sup>	<i>d</i> <sup>10</sup>		
1 <i>s</i>	H 1	He 2																		
2 <i>s</i>	Li 3	Be 4																		
2 <i>p</i>			B 5	C 6	N 7	O 8	F 9	Ne 10												
3 <i>s</i>	Na 11	Mg 12																		
3 <i>p</i>			Al 13	Si 14	P 15	S 16	Cl 17	Ar 18												
4 <i>s</i> , 3 <i>d</i>	K 19	Ca 20							4 <i>s</i> <sup>0</sup>											
									4 <i>s</i>											
									4 <i>s</i> <sup>2</sup>	Sc 21	Ti 22	V 23			Cr 24	Fe 26	Co 27	Ni 28		
4 <i>p</i>			Ga 31	Ge 32	As 33	Se 34	Br 35	Kr 36												
5 <i>s</i> , 4 <i>d</i>	Rb 37	Sr 38							5 <i>s</i> <sup>0</sup>											
									5 <i>s</i>											
									5 <i>s</i> <sup>2</sup>	Y 39	Zr 40			Cb 41	Mo 42	Tc 43	Ru 44	Rh 45		
5 <i>p</i>			In 49	Sn 50	Sb 51	Te 52	I 53	Xe 54												
6 <i>s</i> , 4 <i>f</i> , 5 <i>d</i>	Cs 55	Ba 56							6 <i>s</i> <sup>0</sup>											
									6 <i>s</i>											
									6 <i>s</i> <sup>2</sup>	La* 57	Hf 72	Ta 73	W 74	Re 75	Os 76			Ir 77	Pt 78	Au 79
6 <i>p</i>			Tl 81	Pb 82	Bi 83	Po 84	At 85	Rn 86												
7 <i>s</i> , 5 <i>f</i> , 6 <i>d</i>	Fr 87	Ra 88							7 <i>s</i> <sup>0</sup>											
									7 <i>s</i>											
									7 <i>s</i> <sup>2</sup>	Ac 89	Th* 90									

*4 <i>f</i> :	5 <i>d</i> <sup>0</sup>	Ge (58)	Pr (59)	Nd 60	Pm (61)	Sm 62	Eu 63			Tb (65)	Dy (66)	Ho (67)	Er (68)	Tu 69	Yb 70
	5 <i>d</i>							Gd 64							
	<i>f</i>	<i>f</i> <sup>2</sup>	<i>f</i> <sup>3</sup>	<i>f</i> <sup>4</sup>	<i>f</i> <sup>5</sup>	<i>f</i> <sup>6</sup>	<i>f</i> <sup>7</sup>	<i>f</i> <sup>8</sup>	<i>f</i> <sup>9</sup>	<i>f</i> <sup>10</sup>	<i>f</i> <sup>11</sup>	<i>f</i> <sup>12</sup>	<i>f</i> <sup>13</sup>	<i>f</i> <sup>14</sup>	
†5 <i>f</i> :	6 <i>d</i> <sup>0</sup>					Np 93	Pu 94	Am 95			Bk 97	Cf 98			
	6 <i>d</i>	Pa 91	U 92						Cm (96)						

свойств щелочноземельных элементов, у которых за заполненными  $s$ -оболочками следуют  $d$ - и  $f$ -оболочки. При заполнении  $4s$ - и  $3d$ -оболочек получаются элементы, в известной мере похожие на те, у которых заполнены  $5s$ - и  $4d$ -оболочки. Элементы, у которых все оболочки заполнены (Zn, Cd и Hg), вполне подобны друг другу; точно так же весьма сходны друг с другом и благородные металлы (Cu, Ag и Au), у которых для заполнения всех оболочек не хватает одного  $s$ -электрона.

**Статистическая модель Томаса—Ферми**<sup>1)</sup>. Вернемся теперь к первой задаче, возникающей в связи с приближением центрального поля. Для определения потенциальной энергии  $V(r)$  применялись два метода. Здесь мы обсудим первый метод, предложенный Томасом [4] и Ферми [5], тогда как второй метод (метод Хартри) будет рассмотрен в дальнейшем. *Статистическая модель Томаса—Ферми* основана на предположении, что на расстоянии порядка длины волны электрона потенциал  $V(r)$  изменяется достаточно медленно; поэтому внутри объема, в котором относительные изменения потенциала невелики, может находиться большое число электронов. Тогда электроны, которые, как отмечалось в § 32, подчиняются статистике Ферми—Дирака, можно рассматривать с помощью статистической механики. При нормальных температурах энергия теплового движения  $kT$  очень мала по сравнению с  $V(r)$  (исключая точки вблизи границы атома, где вероятность пребывания электрона мала). В этом случае из статистики Ферми—Дирака следует, что электронные состояния заполняются в порядке возрастания их энергий (как и предполагалось выше). Отличие излагаемого метода от более общего подхода (см. начало настоящего параграфа) состоит в добавочном допущении о практическом постоянстве  $V(r)$  в области, содержащей большое число электронов.

В § 11 было показано, что число электронных состояний в кубе с ребром  $L$ , на границе которого волновая функция подчиняется периодическим граничным условиям, равно  $(L/2\pi)^3 dk_x dk_y dk_z$ . Чтобы учесть возможность существования двух спиновых состояний, это выражение нужно умножить на 2; тогда число состояний с абсолютной величиной импульса  $p = \hbar k$ , меньшей или равной  $p_0$ , будет равно

$$2 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \int_0^{p_0/\hbar} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{p_0^3 L^3}{3\pi^2 \hbar^3}.$$

Если все эти состояния заняты, то концентрация электронов с кинетической энергией не больше  $p_0^2/2m$  составит  $p_0^3/3\pi^2 \hbar^3$ . На расстоя-

<sup>1)</sup> Более подробное изложение вопроса можно найти в монографии Гомбаша [33]. — *Прим. перев.*



нии  $r$  от ядра максимальная кинетическая энергия электронов должна быть равна  $-V(r)$ , так как в противном случае электроны покинули бы атом. Таким образом, мы получаем соотношение между концентрацией электронов  $n(r)$  и потенциальной энергией:

$$n(r) = \frac{[-2mV(r)]^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}. \quad (38.1)$$

Электростатический потенциал  $V(r)/e$  определяется также с помощью уравнения Пуассона, в которое входит плотность заряда  $en(r)$ :

$$\frac{1}{e} \nabla^2 V = \frac{1}{er^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -4\pi en(r). \quad (38.2)$$

Равенства (38.1) и (38.2) представляют собой систему уравнений для функций  $n$  и  $V$ . Для нейтрального атома с атомным номером  $Z$  граничные условия можно выразить только через  $V(r)$ . При  $r \rightarrow 0$  потенциальная энергия обусловлена в основном ядром, и, следовательно,  $V(r) \rightarrow -Ze^2/r$ . При  $r \rightarrow \infty$  суммарный заряд внутри сферы радиуса  $r$  должен быть равен нулю; поэтому  $V$  убывает быстрее, чем  $1/r$ , и  $rV(r) \rightarrow 0$ . Это граничное условие на бесконечности отличается от граничного условия, принимавшегося выше, когда мы предполагали, что асимптотически  $V$  ведет себя как  $-e^2/r$ . Дело в том, что раньше функция  $V$  представляла собой потенциальную энергию одного из атомных электронов, тогда как потенциал Томаса—Ферми действует на бесконечно малый пробный заряд. Различие между обоими потенциалами подчеркивает статистический характер приближения Томаса—Ферми. Выражение для  $V$  становится точным в пределе, когда  $m$  стремится к бесконечности, а  $e \rightarrow 0$ , причем произведение  $m^3 e^4$  остается постоянным; в этом случае длина волны электрона обращается в нуль, а концентрация частиц становится бесконечно большой. В этом пределе потенциал остается постоянным на протяжении многих длин волн, и число частиц достаточно велико, чтобы можно было применять статистическую механику.

**Вычисление потенциала.** Исключая  $n(r)$  из (38.1) и (38.2), получаем уравнение для функции  $-V(r)$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d(-V)}{dr} \right] = \frac{4e^2 [-2mV(r)]^{3/2}}{3\pi\hbar^3}. \quad (38.3)$$

Это уравнение и указанные выше граничные условия удобно записать в безразмерной форме, в которой величины  $Z$ ,  $E$ ,  $m$  и  $\hbar$  входят только в масштабные коэффициенты. Положим

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \chi, \quad r = bx, \quad (38.4)$$

$$b = \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{me^2 Z^{1/3}} = \frac{0,885a_0}{Z^{1/3}}$$

где  $a_0 = \hbar^2/me^2$ . Подставляя эти выражения в (38.3), получаем

$$x^{1/2} \frac{d^2 \chi}{dx^2} = \chi^{3/2}, \quad (38.5)$$

где

$$\chi = 1 \text{ при } x = 0 \text{ и } \chi = 0 \text{ при } x = \infty.$$

Наиболее точное решение уравнения (38.5) было найдено Бушем и Колдуэллом [6] с помощью дифференциального анализатора; результаты представлены в табличной форме.

Из формулы (38.4) следует, что если под „радиусом” атома понимать радиус сферы, внутри которой содержится определенная часть всех электронов (см. задачу 1), то этот радиус будет обратно пропорционален кубическому корню из атомного номера. При помощи (38.4) можно также показать, что приближение Томаса—Ферми дает тем лучшие результаты, чем больше атомный номер. Потенциальная энергия на расстоянии атомного радиуса пропорциональна  $Z^{1/3}$ , так что типичная длина волны электрона пропорциональна  $Z^{-2/3}$ . Расстояние, в пределах которого относительно изменение потенциала имеет заданную величину, пропорционально атомному радиусу, т. е.  $Z^{-1/3}$ . Таким образом, относительное изменение потенциала на длине волны электрона пропорционально  $Z^{-1/3}$  и, следовательно, убывает с ростом  $Z$ . Кроме того, поскольку число электронов равно  $Z$ , то с ростом  $Z$  становится все более оправданным применение статистического метода.

**Самосогласованное поле Хартри.** Второй метод нахождения центрального поля предложен Хартри [7]. Он основан на предположении, что каждый электрон движется в центральном поле и последнее можно вычислить, зная потенциал ядра и волновые функции всех других электронов, причем плотность заряда электрона предполагается равной плотности вероятности его координат, умноженной на  $e$ . Для каждого электрона, находящегося в своем центральном поле, решается уравнение Шредингера, и получаемые таким путем волновые функции затем согласовываются с полями, для которых проводились вычисления. Таким образом,  $k$ -й электрон описывается нормированной волновой функцией  $u_k(\mathbf{r}_k)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_k^2 - \frac{Ze^2}{r_k} + \sum_{j \neq k} \int |u_j(\mathbf{r}_j)|^2 \frac{e^2}{r_{jk}} d\tau_j \right] u_k(\mathbf{r}_k) = \varepsilon_k u_k(\mathbf{r}_k), \quad (38.6)$$

где  $r_{jk} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|$ . Если в атоме имеется  $Z$  электронов, то (38.6) представляет собой систему  $Z$  нелинейных интегродифференциальных уравнений, служащих для определения  $Z$  функций  $u_k(\mathbf{r}_k)$ . Непосредственное решение этих уравнений не представляется возможным, в связи с чем Хартри применил метод последовательных приближений.

В этом методе априори выбирается потенциальная энергия, аппроксимирующая второй и третий члены в (38.6); для нее вычисляются волновые функции электронов, а затем с помощью этих функций находятся новые потенциалы для каждого электрона. Этот процесс продолжается до тех пор, пока с достаточно большой точностью не получатся самосогласованные значения потенциалов. Основная аппроксимация при этом состоит в усреднении третьего члена в (38.6) по направлениям вектора  $\mathbf{r}_k$  (чтобы сделать потенциальную энергию сферически симметричной). Тогда решения (38.6) можно представить в виде произведений радиальных функций на сферические. Кроме того, вводится еще одно упрощающее предположение, согласно которому все электроны в данной оболочке движутся в одном и том же потенциальном поле и описываются одинаковыми радиальными волновыми функциями.

Очевидно, в приближении Хартри не учитывается корреляция между положениями электронов, так как волновая функция всей системы представляется здесь просто в виде произведения одноэлектронных функций:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_Z) = u_1(\mathbf{r}_1) u_2(\mathbf{r}_2) \dots u_Z(\mathbf{r}_Z). \quad (38.7)$$

Из (38.7) ясно также, что не производится антисимметризация волновых функций. Антисимметрия волновых функций учитывается только в том отношении, что квантовые числа одноэлектронных состояний  $u_k$  выбираются с учетом принципа Паули.

**Связь с вариационным методом.** Покажем теперь, что приближение Хартри получается с помощью вариационного метода, если в качестве пробной функции взять (38.7)<sup>1)</sup>. Если учесть взаимодействие между электронами, но пренебречь членами, характеризующими связь спина с орбитой (см. ниже), то волновое уравнение примет вид

$$H\psi = E\psi, \quad (38.8)$$

$$H = \sum_k \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_k^2 - \frac{Ze^2}{r_k} \right) + \sum_{j>k} \sum_k \frac{e^2}{r_{jk}},$$

где символ  $j > k$  под знаком двойной суммы означает, что она берется по всем различным парам индексов  $j$  и  $k$ . Задача состоит в минимизации среднего значения  $H$ .

Из (38.7) и (38.8) получим с учетом нормировки функций  $u_k$

$$\int \dots \int \bar{\psi} H \psi d\tau_1 \dots d\tau_Z = \sum_k \int \bar{u}_k(\mathbf{r}_k) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_k^2 - \frac{Ze^2}{r_k} \right) u_k(\mathbf{r}_k) d\tau_k +$$

$$+ \sum_{j>k} \sum_k \int \int \bar{u}_j(\mathbf{r}_j) \bar{u}_k(\mathbf{r}_k) \frac{e^2}{r_{jk}} u_j(\mathbf{r}_j) u_k(\mathbf{r}_k) d\tau_j d\tau_k. \quad (38.9)$$

<sup>1)</sup> См. работы Слэтера [8] и Фока [9].

Наилучшее значение  $\psi$ , при котором (38.9) достигает минимума, получается при варьировании в этом выражении отдельно каждой из функций  $u_k$ . Зависимость (38.9) от какой-либо из одноэлектронных функций  $u_k$  определяется членами

$$\begin{aligned} & \int \bar{u}_k(\mathbf{r}_k) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_k^2 - \frac{Ze^2}{r_k} \right) u_k(\mathbf{r}_k) d\tau_k + \\ & + \sum_{j \neq k} \int \int \bar{u}_j(\mathbf{r}_j) \bar{u}_k(\mathbf{r}_k) \frac{e^2}{r_{jk}} u_j(\mathbf{r}_j) u_k(\mathbf{r}_k) d\tau_j d\tau_k = \\ & = \int \bar{u}_k(\mathbf{r}_k) H_k u_k(\mathbf{r}_k) d\tau_k, \quad (38.10) \\ & H_k = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_k^2 - \frac{Ze^2}{r_k} + \sum_{j \neq k} \int |u_j(\mathbf{r}_j)|^2 \frac{e^2}{r_{jk}} d\tau_j. \end{aligned}$$

Интеграл в (38.10) представляет собой среднее значение оператора  $H_k$  в состоянии  $u_k$ . Из результатов § 27 следует, что минимум этого интеграла достигается в том случае, когда  $u_k$  является собственной функцией  $H_k$ , принадлежащей наименьшему собственному значению  $\epsilon_k$ :

$$H_k u_k = \epsilon_k u_k. \quad (38.11)$$

Поскольку уравнения (38.11) и (38.6) совпадают, мы видим, что действительно волновые функции Хартри с точки зрения вариационного метода являются наилучшими из функций, которые можно записать в виде (38.7).

Соответствующая энергия дается интегралом (38.9), который с помощью (38.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int \int \dots \int \bar{\psi} H \psi d\tau_1 \dots d\tau_Z = \\ & = \sum_k \epsilon_k - \sum_{j > k} \sum_k \int \int |u_j(\mathbf{r}_j)|^2 |u_k(\mathbf{r}_k)|^2 \frac{e^2}{r_{jk}} d\tau_j d\tau_k. \quad (38.12) \end{aligned}$$

Поскольку при суммировании по  $\epsilon_k$  члены, характеризующие электростатическое взаимодействие между электронами, учитываются дважды, то в соотношении (38.12) вычитается соответствующий член. Таким образом, энергию атома нельзя считать равной просто сумме всех  $\epsilon_k$ , хотя величина  $\epsilon_k$ , грубо говоря, и характеризует энергию удаления  $k$ -го электрона. Впрочем, последнее утверждение не совсем верно, так как при удалении электрона изменяется самосогласованное поле, а следовательно, изменяются волновые функции и значения  $\epsilon$  для остающихся электронов. Однако для внутренних оболочек (рентгеновские уровни)  $\epsilon_k$  оказывается очень хорошим приближением к энергии вырывания электрона.

**Поправки к приближению центрального поля.** Вернемся теперь ко второй задаче, упоминавшейся в начале настоящего параграфа, а именно к нахождению поправок к приближенным резуль-

татам, полученным для центрального поля. В приближении центрального поля опускаются два члена: во-первых, разность между действительной и усредненной энергиями электростатического взаимодействия между электронами, во-вторых, энергия спин-орбитальной связи. Последняя представляет собой энергию взаимодействия спина с орбитальным движением каждого из электронов и может быть записана в виде

$$\sum_k \xi(r_k) L_k \cdot S_k. \quad (38.13)$$

Здесь  $L_k$  — оператор орбитального момента количества движения  $k$ -го электрона, равный  $\mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k$ ; свойства его совпадают со свойствами рассмотренного в § 24 оператора  $M$ . Собственные значения  $L_k^2$  и  $L_{kz}$  для  $k$ -го электрона, равные соответственно  $l(l+1)\hbar^2$  и  $m_l\hbar$ , характеризуются квантовыми числами  $l$  и  $m_l$ . Оператор  $S_k$  представляет собой введенный в § 33 спин  $k$ -го электрона и равен  $1/2\hbar\sigma_k$ . Функция  $\xi(r)$  выражается через потенциальную энергию для центрального поля  $V(r)$  следующим образом<sup>1)</sup>:

$$\xi(r) = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (38.14)$$

При вычислении эффектов, обусловленных этими членами, мы допустим, что возмущенные собственные функции, представляющие собой, вообще говоря, линейные комбинации волновых функций различных электронных конфигураций, фактически содержат главным образом вклад лишь от какой-нибудь одной конфигурации. Из формулы (25.9) видно, что это действительно имеет место, если элементы матрицы возмущения, содержащие функции различных конфигураций, малы по сравнению с разностями невозмущенных энергий отдельных конфигураций.

Можно показать, что часть суммы в (38.13), соответствующая замкнутым электронным оболочкам, равна нулю. Действительно, для всех электронов в данной оболочке функция  $\xi$  одна и та же, и вклады от членов с различными знаками  $m$  и  $m_s$  взаимно уничтожаются. Поэтому электроны в заполненных оболочках можно не принимать во внимание и производить суммирование лишь по остающимся электронам. В связи с задачей об основном и первом возбужденном состояниях атомов щелочных металлов представляет интерес случай, когда вне заполненных оболочек находится только один электрон; этот случай будет подробно рассмотрен в следующем параграфе. Здесь же мы кратко рассмотрим более общий случай,

<sup>1)</sup> См. работу Томаса [10]. Это выражение получается на основе теории относительности и будет выведено таким путем в гл. XII. Впервые это выражение было получено в рамках представления о прецессии спина электрона. Эта прецессия имеет отчасти электромагнитное происхождение (прецессия Лармора), а отчасти получается из релятивистской кинематики (прецессия Томаса).

причем всегда будем предполагать, что каждое атомное состояние описывается какой-нибудь одной конфигурацией электронов.

**Схема  $LS$ -связи.** В приближении центрального поля в общем случае существует целый ряд вырожденных состояний, принадлежащих одной и той же конфигурации и отличающихся друг от друга значениями квантовых чисел  $m_l$  и  $m_s$  отдельных электронов. Задача теории сложных спектров заключается в определении линейных комбинаций антисимметризованных волновых функций, осуществляющих диагонализацию матрицы возмущения с точностью до величин первого порядка (см. § 25), а также в определении соответствующих возмущенных уровней энергии.

Наиболее часто встречается так называемый *случай связи Реселя — Саундерса* [11], когда отброшенные выше члены электростатического взаимодействия больше энергии спин-орбитальной связи. Состояния с одинаковой конфигурацией можно классифицировать по значениям любой динамической переменной, коммутирующей с гамильтонианом и потому являющейся интегралом движения (см. § 23). Если учесть все возмущения, то истинными интегралами движения будут только полная четность и полный момент количества движения электронов  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = \sum_k (\mathbf{L}_k + \mathbf{S}_k). \quad (38.15)$$

Сохранение полного момента  $\mathbf{J}$  связано с тем, что его компоненты канонически сопряжены с углами, характеризующими ориентацию атома как целого, а эти углы не входят в гамильтониан изолированного атома. Если мы будем учитывать электростатические возмущения, но сможем пренебречь энергией спин-орбитального взаимодействия, то те же соображения показывают, что интегралами движения будут в отдельности полный орбитальный момент количества движения  $\mathbf{L}$  и полный спиновый момент количества движения  $\mathbf{S}$ . Хотя в этом приближении силы не зависят от спина, однако отдельные слагаемые  $\mathbf{S}_k$  не обязаны сохраняться, так как в силу антисимметрии волновых функций спины связываются с электростатической энергией (см. рассмотрение возбужденных состояний атома гелия в § 33).

Состояние можно характеризовать с помощью квантовых чисел  $J$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $M_L$  и  $M_S$ , связанных с собственными значениями операторов момента количества движения:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= J(J+1)\hbar^2, & J_z &= M\hbar, \\ \mathbf{L}^2 &= L(L+1)\hbar^2, & L_z &= M_L\hbar, \\ \mathbf{S}^2 &= S(S+1)\hbar^2, & S_z &= M_S\hbar. \end{aligned} \quad (38.16)$$

В тех случаях, когда мы пренебрегаем энергией спин-орбитальной связи, электростатическое взаимодействие приводит к расщеплению

состояний с различными  $L$ ; иногда вследствие принципа Паули оказываются допустимыми лишь некоторые значения  $S$ . Из остальных четырех квантовых чисел независимыми являются только два, так что состояние можно характеризовать, задавая либо числа  $L, S, M_L, M_S$ , либо  $L, S, J, M$ . Поскольку как пространственная, так и спиновая части гамильтониана сферически симметричны, энергия не зависит от „ориентационных” квантовых чисел  $M_L$  и  $M_S$  и мы имеем  $(2L + 1)(2S + 1)$  вырожденных состояния. При заданных  $L$  и  $S$  собственные функции, характеризуемые квантовыми числами  $J$  и  $M$ , представляют собой линейные комбинации функций, принадлежащих различным  $M_L$  и  $M_S$ , поэтому такое же вырождение имеется и в представлении  $LSJM$ . Поскольку отдельные числа  $L_k$  „связываются” друг с другом, образуя полный орбитальный момент  $L$ , а отдельные  $S_k$  независимо от этого образуют полный спин  $S$ , то мы имеем дело с так называемой *схемой  $LS$ -связи*.

Если теперь учесть энергию спин-орбитального взаимодействия, то величины  $J$  и  $M$  по-прежнему будут интегралами движения, тогда как  $L$  и  $S$  уже не будут сохраняться. Однако мы допустим, что вследствие электростатического взаимодействия состояния с различными  $L$  и  $S$  в достаточной степени разделяются, так что их смещением за счет спин-орбитальной связи можно пренебречь. Это аналогично сделанному ранее допущению о том, что различные конфигурации в центральном поле в достаточной степени разделены и, следовательно, можно пренебречь их смещением из-за электростатического взаимодействия. В силу спин-орбитального взаимодействия состояния с различными  $J$  в представлении  $LSJM$  теперь расщепляются, но энергия по-прежнему не зависит от  $M$ , так что имеется  $2J + 1$  вырожденных состояний. В случае Ресселя — Саундерса состояние обычно записывается формулой типа  ${}^4D_{3/2}$ , где индекс слева вверху характеризует *кратность состояния*, равную  $2S + 1$ , буква (теперь уже заглавная) означает орбитальный момент  $L$  (в соответствии с указанной ранее схемой), а индекс внизу указывает значение  $J$ ; в данном примере  $S = 3/2$ ,  $L = 2$  и  $J = 1/2$ . Поскольку  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ , то из соображений, приведенных в конце § 24, следует, что  $J$  может быть равно только одному из чисел:

$$L + S, \quad L + S - 1, \quad \dots, \quad |L - S|.$$

**Правила отбора.** Правила отбора для случая связи Ресселя — Саундерса можно получить на основании результатов § 37. В переходе участвует только один электрон, так что конфигурация изменяется только в связи с изменением одного из  $l$  на единицу; при этом изменяется также и четность. Поскольку дипольный момент не зависит от спинов, а для различных  $S$  спиновые функции ортогональны (см. задачу 4), то в разрешенных переходах значение  $S$  не изменяется. Далее из закона сохранения момента количества

движения для атома и поля излучения следует, что каждое из чисел  $J$  и  $L$  либо вообще не меняется, либо изменяется на единицу. Переходы между состояниями с  $J = 0$  строго запрещены.

Иногда в спектрах встречаются линии, соответствующие переходам между состояниями различной кратности (т. е. переходам с изменением  $S$ ). Это означает, что схема  $LS$ -связи отчасти нарушается. Примером является очень интенсивная резонансная линия 2537 Å ртути, соответствующая переходу  ${}^3P_1 \rightarrow {}^1S_0$ . Последний разрешен по четности и квантовым числам  $J, L$ , но запрещен по  $S$ . Однако вследствие спин-орбитального взаимодействия происходит смешение состояния  ${}^3P_1$  с более высоким синглетным состоянием ( $S=0$ ) с теми же значениями  $J$  и четности; это и делает возможным дипольный переход.

**Схема  $jj$ -связи.** Аппроксимация, противоположная случаю  $LS$ -связи, основана на предположении, что энергия спин-орбитального взаимодействия велика по сравнению с электростатической. Если последней можно пренебречь, то каждый электрон вместо величин  $nlm_l m_s$  можно будет характеризовать квантовыми числами  $nljm$ , где  $(L_k + S_k)^2 = j(j+1)\hbar^2$  и  $L_{kz} + S_{kz} = m\hbar$ . Тогда электростатическая энергия приводит к расщеплению состояний с различными  $J$ .

Поскольку в данном случае спиновый и орбитальный моменты количества движения складываются в полный момент и состояния классифицируются по квантовым числам  $j$ , эта схема носит название  $jj$ -связи. Она представляет интерес главным образом для тяжелых атомов, где из-за большой величины  $V(r)$  энергия спин-орбитального взаимодействия (38.13) становится главной частью возмущения.

### § 39. Атомы щелочных металлов

Конфигурация электронов в основном состоянии атома щелочного металла характеризуется несколькими заполненными оболочками, вне которых находится один  $s$ -электрон (состояние  ${}^2S_{1/2}$ ). Внутренняя конфигурация (типа инертного газа) настолько стабильна, что все атомные состояния, кроме самых возбужденных, можно отнести за счет только валентного электрона. Иначе говоря, атомы щелочных металлов в очень хорошем приближении можно рассматривать в рамках модели одного электрона, движущегося в сферически симметричном некулоновском поле с потенциальной энергией  $V(r)$ . В данном параграфе мы найдем уровни энергии и интенсивности спектральных линий для разрешенных переходов как в отсутствие, так и при наличии внешнего магнитного поля.

**Дублетное расщепление.** Электронную конфигурацию атома щелочного металла можно характеризовать заданием двух квантовых чисел  $nl$ . Поскольку в данном случае речь идет лишь об одном



электроне, возмущение электростатического типа, рассмотренное в предыдущем параграфе, будет отсутствовать. В отсутствие внешнего поля гамильтониан, включающий энергию спин-орбитального взаимодействия (38.13), имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + \xi(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, \quad (39.1)$$

где  $\xi(r)$  дается формулой (38.14). Как и в § 38, мы пренебрежем смешением различных конфигураций из-за спин-орбитального взаимодействия, а соответствующий член в гамильтониане будем рассматривать как возмущение, снимающее  $m_l$  и  $m_s$ -вырождения внутри каждой из конфигураций. Полный момент количества движения валентного электрона  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  представляет собой интеграл движения (см. задачу 5), так что состояния можно характеризовать вместо чисел  $m_l m_s$  числами  $j m$ , где  $\mathbf{J}^2 = j(j+1) \hbar^2$  и  $J_z = m \hbar$ . Энергии состояний с разными значениями  $j$  различны, но имеется еще  $(2j+1)$ -кратное вырождение, связанное с различными возможными значениями  $m$ . В дальнейшем мы рассмотрим и вопрос о снятии  $m$ -вырождения в магнитном поле.

Разность энергий между состояниями с различными  $j$  обусловлена членом с  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  в (39.1); ее можно найти, вычисляя среднее значение (т. е. диагональный матричный элемент) этого оператора [см. (25.8)].

Воспользуемся операторным соотношением

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}. \quad (39.2)$$

Поскольку  $l$ ,  $j$  и  $s$  являются хорошими<sup>1)</sup> квантовыми числами для одного электрона ( $s = 1/2$ ), то из (39.2) можно найти диагональный матричный элемент оператора  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ :

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})_{ij, ij} = \frac{1}{2} \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \hbar^2. \quad (39.3)$$

Если  $l$  не равно нулю, то  $j$  может принимать значения  $l + 1/2$  или  $l - 1/2$ . Поэтому в первом приближении теории возмущений среднее значение  $\xi(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  составляет

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} l \zeta_{nl}, & \text{если } j = l + \frac{1}{2}, \\ & -\frac{1}{2} (l+1) \zeta_{nl}, & \text{если } j = l - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (39.4)$$

$$\zeta_{nl} \equiv \hbar^2 \int_0^\infty |R_{nl}(r)|^2 \xi(r) r^2 dr, \quad l > 0;$$

<sup>1)</sup> „Хорошими“ квантовыми числами принято называть собственные значения операторов, коммутирующих (или почти коммутирующих) с гамильтонианом. — *Прим. перев.*

здесь  $R_{nl}(r)$  — нормированная радиальная часть невозмущенной собственной функции для конфигурации  $nl$ . Поскольку потенциальная энергия  $V(r)$  характеризует притяжение, то как функция  $\xi(r)$ , определяемая формулой (38.14), так и величины  $\zeta_{nl}$  положительны. Поэтому из равенств (39.4) следует, что состоянию с большим значением  $j$  соответствует и более высокая энергия. Пара состояний<sup>1)</sup> называется *дублетом*; дублетный характер имеют не слишком сильно возбужденные уровни атомов щелочных металлов, кроме уровней с  $l = 0$ , когда  $j$  может равняться только  $1/2$ .

Величину дублетного расщепления можно вычислить при помощи (39.4), если известна радиальная функция. Грубую оценку зависимости дублетных расщеплений от  $n$  можно получить с помощью водородных волновых функций (16.24), допуская при этом, что  $V(r)$  имеет кулоновский вид —  $Ze^2/r$ . Подстановка соответствующих выражений в (38.14) и (39.4) дает с помощью производящей функции для полиномов Лагерра (16.21):

$$\zeta_{nl} = \frac{\hbar^2 Ze^2}{2m^2 c^2} \int_0^\infty \frac{1}{r} R_{nl}^2(r) dr = \frac{e^2 \hbar^2 Z^4}{2m^2 c^2 a_0^3 n^3 l(l+1/2)(l+1)}. \quad (39.5)$$

Этот результат верен только при  $l > 0$ ; сингулярность функции  $\xi(r)$  при  $r = 0$  приводит к расходимости интеграла, входящего в  $\zeta_{n0}$ , так что в этом случае приближение теории возмущений оказывается непригодным. Из (39.4) и (39.5) в неплохом согласии с опытом следует, что дублетное расщепление пропорционально  $n^{-3}$ . Однако эта простая теория совсем не определяет абсолютной величины дублетного расщепления и его зависимости от  $l$ , так как эффективное значение  $Z$  трудно оценить, и, кроме того,  $Z$  заметно зависит от  $l$ , вследствие различной степени проникновения электронов в область вблизи ядра<sup>2)</sup>.

**Интенсивность дублета.** Вычислим теперь относительные интенсивности двух линий дублета, соответствующих разрешенным переходам  ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$  и  ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ . Будем считать, что радиальные волновые функции в обоих возбужденных  ${}^2P$ -состояниях одинаковы. Переходы подобного типа дают главные серии в спектрах щелочных металлов. Вероятности самопроизвольных переходов определяются по формуле (36.22), так что если вероятность нахождения атома в обоих  $P$ -состояниях одинакова, то наблюдаемые интенсивности будут пропорциональны квадратам дипольных матричных

<sup>1)</sup> С данным  $l$ . — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Влияние спин-орбитального взаимодействия на уровни энергии атома водорода будет получено в следующей главе как часть точного релятивистского выражения.

элементов<sup>1)</sup>. Зависимость возбужденных  ${}^2P$ -состояний и основного  ${}^2S$ -состояния от угловых и спиновых координат электрона описывается линейными комбинациями произведений четырех сферических функций  $Y_{1,1}(\theta, \varphi)$ ,  $Y_{1,0}(\theta, \varphi)$ ,  $Y_{1,-1}(\theta, \varphi)$  и  $Y_{0,0}(\theta, \varphi)$  на две спиновые функции (+) и (-) (сферические и спиновые функции рассмотрены в § 14 и 33). Эти линейные комбинации должны представлять собой собственные функции операторов  $J^2$  и  $J_z$ . Их можно получить из спиновых функций трехэлектронной системы, приведенных в конце § 33. Заменим  $S_1$  на  $S$ ,  $S_2 + S_3$  на  $L$ , а спиновые функции (33.6) для второго и третьего электронов на сферические функции  $Y_{1,1}$ ,  $Y_{1,0}$ ,  $Y_{1,-1}$  и  $Y_{0,0}$  (см. задачу 3 в гл. IX). Тогда непосредственно получаем

$$\begin{aligned}
 {}^2P_{3/2} & \left\{ \begin{array}{ll} m = \frac{3}{2} & (+) Y_{1,1}, \\ \frac{1}{2} & 3^{-1/2} [2^{1/2} (+) Y_{1,0} + (-) Y_{1,-1}], \\ -\frac{1}{2} & 3^{-1/2} [2^{1/2} (-) Y_{1,0} + (+) Y_{1,-1}], \\ -\frac{3}{2} & (-) Y_{1,-1}; \end{array} \right. \\
 {}^2P_{1/2} & \left\{ \begin{array}{ll} m = \frac{1}{2} & 3^{-1/2} [(+) Y_{1,0} - 2^{1/2} (-) Y_{1,-1}], \\ -\frac{1}{2} & 3^{-1/2} [(-) Y_{1,0} - 2^{1/2} (+) Y_{1,-1}]; \end{array} \right. \\
 {}^2S_{1/2} & \left\{ \begin{array}{ll} m = \frac{1}{2} & (+) Y_{0,0}, \\ -\frac{1}{2} & (-) Y_{0,0}. \end{array} \right. \quad (39.6)
 \end{aligned}$$

Волновые функции (39.6) можно использовать для вычисления матричных элементов координат  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$  и  $z = r \cos \theta$ . Допустим, что все радиальные функции, на которые можно умножить (39.6), одинаковы, так что радиальные части интегралов в матричных элементах дают просто общий множитель. Угловые части интегралов легко вычисляются с помощью явных выражений (14.16) для функций  $Y^2$ . Произведения спиновых функций подчиняются простым правилам:

$$(+)^* (+) = 1, \quad (-)^* (+) = 0,$$

<sup>1)</sup> Разность энергий между двумя верхними состояниями настолько мала, что фигурирующий в (36.22) множитель  $\omega^3$  не меняет отношения интенсивностей заметным образом.

<sup>2)</sup> В общем случае, когда в задачу входят сферические функции  $Y_{lm}$  с  $l > 1$ , часто бывает удобнее пользоваться формулой Гонта для интеграла от произведения трех сферических функций; см. книгу Кондона и Шортли [1].

и т. д. Таким путем получаются следующие значения квадратов абсолютных величин указанных матричных элементов (за единицу измерения принята  $1/18$  часть общего радиального множителя):

$$\begin{array}{l}
 {}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{от } m = \frac{3}{2} \text{ до } m = \frac{1}{2} \quad |x|^2 = |y|^2 = 3, |z|^2 = 0, \\
 \text{от } \frac{3}{2} \text{ до } -\frac{1}{2} \quad |x|^2 = |y|^2 = |z|^2 = 0, \\
 \text{от } \frac{1}{2} \text{ до } \frac{1}{2} \quad |x|^2 = |y|^2 = 0, |z|^2 = 4, \\
 \text{от } \frac{1}{2} \text{ до } -\frac{1}{2} \quad |x|^2 = |y|^2 = 1, |z|^2 = 0;
 \end{array} \right. \quad (39.7) \\
 \\
 {}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{от } m = \frac{1}{2} \text{ до } m = \frac{1}{2} \quad |x|^2 = |y|^2 = 0, |z|^2 = 2, \\
 \text{от } \frac{1}{2} \text{ до } -\frac{1}{2} \quad |x|^2 = |y|^2 = 2, |z|^2 = 0.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Аналогичные результаты получаются также для переходов из состояний с  $m = -1/2$  и  $-3/2$ ; они полностью согласуются с выведенными в § 37 правилами отбора по  $m$ .

Из выражений (39.7) вытекает, что в указанных единицах сумма интенсивностей всех линий, соответствующих переходам из четырех состояний  ${}^2P_{3/2}$ , равна 6. Следует ожидать, что эти суммы будут одинаковы, так как состояния с разными  $m$  отличаются друг от друга только ориентацией момента количества движения, что не должно влиять на интенсивность. Полная интенсивность переходов из каждого из двух  ${}^2P_{1/2}$ -состояний также равна 6. Равенство полных интенсивностей для переходов из состояний, характеризуемых данными значениями  $L$  и  $S$ , является общим свойством  $LS$ -связи, благодаря этому экспериментально наблюдаемая интенсивность, соответствующая переходам из всех вырожденных по  $m$  состояний оказывается пропорциональной  $2J + 1$ <sup>1)</sup>. В рассмотренном здесь примере отношение интенсивностей двух линий дублета равно 2 : 1. Это наблюдается для низших дублетов щелочных металлов, тогда как для верхних дублетов отношение интенсивностей превышает 2. Дело в том, что фактически спин-орбитальное взаимодействие смешивает различные конфигурации ( ${}^2P$ -состояния с одинаковыми  $j$ , но с разными  $n$ ); степень этого смешения различна для различных  $j$ , в силу чего две радиальные функции не совпадают. Небольшая примесь верхнего состояния малой интенсивности к нижним  ${}^2P$ -состояниям большой интенсивности вызывает лишь незначительный эффект, тогда как в противоположном случае отношение интенсивностей дублетных линий значительно изменяется<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> См. книгу Кондона и Шортли [1], стр. 233.

<sup>2)</sup> См. работу Ферми [12].

**Влияние магнитного поля**<sup>1)</sup>. Рассмотрим теперь вопрос о влиянии магнитного поля на уровни энергии и вероятности переходов в атомах щелочных металлов.

Поскольку  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , векторный потенциал *постоянного* магнитного поля можно выбрать в виде

$$\mathbf{A} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r}\right). \quad (39.8)$$

Дивергенция выражения (39.8) равна нулю, так что в гамильтониан (23.24) входят лишь следующие члены с  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \frac{ie\hbar}{mc} \mathbf{A} \cdot \text{grad} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 &= -\frac{e}{2mc} (\mathbf{H} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{8mc^2} (\mathbf{H} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{r}) = \\ &= -\frac{e}{2mc} \mathbf{H} \cdot \mathbf{L} + \frac{e^2}{8mc^2} H^2 r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (39.9)$$

Здесь  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  и  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{H}$ ;  $e$  — отрицательный заряд электрона.

Электрон обладает также внутренним магнитным моментом, параллельным спиновой оси. Абсолютную величину его можно определить, сравнивая с опытом рассматриваемую ниже теорию эффекта Зеемана. В согласии с релятивистской теорией Дирака (см. гл. XII), она оказывается равной  $e\hbar/2mc$ , т. е. произведению  $e/mc$  на спиновый момент количества движения электрона. Таким образом, отношение магнитного момента к механическому в этом случае в два раза больше, чем для классического распределения заряда с постоянным отношением плотности заряда к плотности массы. Поскольку магнитный момент равен  $(e/mc)\mathbf{S}$ , в магнитном поле появляется добавочная энергия

$$-\frac{e}{mc} \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}. \quad (39.10)$$

Для обычно получаемых в лаборатории значений  $\mathbf{H}$  отношение энергии (39.9) к кинетической очень мало (см. задачу 7). Поэтому влияние магнитного поля на волновые функции и уровни энергии можно рассматривать в рамках теории возмущений. В большинстве случаев нужно учитывать только линейные члены. Однако для очень сильных полей и удаленных орбит могут представить интерес и квадратичные члены (см. ниже обсуждение квадратичного эффекта Зеемана). Диамагнитная восприимчивость также определяется членами  $\mathbf{H}^2$  в энергии.

**Случай слабого поля.** Ограничимся пока только эффектами первого порядка по  $\mathbf{H}$ . Тогда с учетом (39.9) и (39.10) гамильто-

<sup>1)</sup> См. работу Гейзенберга и Иордана [13].

ниан (39.1) принимает вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + \xi(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \varepsilon(L_z + 2S_z), \quad \varepsilon \equiv -\frac{eH}{2mc} \quad (39.11)$$

(магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ ). Магнитное поле можно считать слабым или сильным в зависимости от того, будет ли последнее слагаемое (39.11) мало или велико по сравнению с энергией спин-орбитальной связи. В случае слабого поля обычно говорят об *эффекте Зеемана*, в случае сильного — об *эффекте Пашена — Бака*, хотя иногда первым термином обозначают и все магнитные эффекты.

Для слабого поля можно воспользоваться волновыми функциями (39.6), т. е. собственными функциями операторов  $\mathbf{J}^2$  и  $J_z$ . Легко проверить, что недиагональные матричные элементы оператора магнитной энергии

$$\varepsilon(L_z + 2S_z) = \varepsilon(J_z + S_z)$$

отличны от нуля только для состояний с разными  $j$ , но не для состояний с одинаковыми  $j$  и разными  $m$ . Поскольку разности энергий между состояниями с различными  $j$  относительно велики, мы пренебрежем этими матричными элементами. Таким образом, матрица магнитной энергии диагональна по  $m$  при всех значениях  $j$ , и сдвиги уровней для каждого из состояний (39.6) будут определяться средними значениями магнитной энергии в этих состояниях. Матрица  $J_z$  при этом всегда диагональна, так что соответствующее среднее значение равно  $m\hbar$ . Среднее значение  $S_z$  можно найти при помощи (33.5), принимая во внимание ортонормированность спиновых и сферических функций. Например, в состоянии  ${}^2P_{3/2}$  при  $m = 1/2$  среднее значение  $S$  равно

$$\begin{aligned} \int \int 3^{-1/2} [2^{1/2}(+) * \bar{Y}_{1,0} + (-) * \bar{Y}_{1,1}] \frac{1}{2} \hbar \sigma_z 3^{-1/2} [2^{1/2}(+) Y_{1,0} + (-) Y_{1,1}] \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \\ = \frac{\hbar}{6} \int \int [2^{1/2}(+) * \bar{Y}_{1,0} + (-) * \bar{Y}_{1,1}] [2^{1/2}(+) Y_{1,0} - (-) Y_{1,1}] \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \\ = \frac{\hbar}{6} (2 - 1) = \frac{\hbar}{6}. \end{aligned}$$

Таким образом, магнитная энергия этого состояния составляет  $\varepsilon\hbar(1/2 + 1/6) = 2/3\varepsilon\hbar$ . Этот и аналогичные результаты для других состояний (39.6) можно выразить с помощью *фактора Ланде*  $g$ , при этом магнитная энергия будет равна

$$\varepsilon\hbar mg, \quad (39.12)$$

где  $g = 4/3$  для  ${}^2P_{3/2}$ ,  $g = 2/3$  для  ${}^2P_{1/2}$  и  $g = 2$  для  ${}^2S_{1/2}$ .

Интенсивности переходов в слабом поле определяются непосредственно формулами (39.7). Как показано в § 37, при изменении  $m$  на единицу излучение, распространяющееся в направлении поля,

поляризовано по кругу, а если смотреть со стороны плоскости  $xу$ , то имеет место линейная поляризация перпендикулярно направлению поля; в этом случае говорят о  $\sigma$ -компонентах излучения (от немецкого слова *senkrecht* — перпендикулярный). Если квантовое число  $m$  не изменяется при переходе, то в направлении поля излучение отсутствует, а при наблюдении со стороны плоскости  $xу$  оказывается поляризованным параллельно полю ( $\pi$ -компоненты). При наблюдении со стороны плоскости  $xу$  интенсивность  $\pi$ -компоненты в (39.7) пропорциональна  $|z|^2$ , а интенсивность  $\sigma$ -компоненты пропорциональна  $|x|^2$  или  $|y|^2$  (но не их сумме).

**Случай сильного поля.** Поле называется сильным, если магнитная энергия в выражении (39.11) велика по сравнению с энергией спин-орбитальной связи. В этом случае состояния с данной конфигурацией  $nl$  лучше характеризовать числами  $m$  и  $m_s$ , а не  $j$  и  $m$ , как в (39.6): При этом матрица магнитной энергии оказывается диагональной и элементы ее равны

$$\epsilon \hbar (m_l + 2m_s). \quad (39.13)$$

Если временно пренебречь энергией спин-орбитального взаимодействия, то восемь волновых функций, соответствующих (39.6), имеют вид [в правом столбце указаны сдвиги энергии (39.13) при данных  $m_l$  и  $m_s$ ],

$${}^2P \begin{cases} (+) Y_{1,1} & 2\epsilon \hbar, \\ (+) Y_{1,0} & \epsilon \hbar, \\ (+) Y_{1,-1} & 0, \\ (-) Y_{1,1} & 0, \\ (-) Y_{1,0} & -\epsilon \hbar, \\ (-) Y_{1,-1} & -2\epsilon \hbar, \end{cases} \quad (39.14)$$

$${}^2S \begin{cases} (+) Y_{0,0} & \epsilon \hbar, \\ (-) Y_{0,0} & -\epsilon \hbar. \end{cases}$$

Если магнитное поле очень велико, то спин-орбитальное взаимодействие проще всего рассматривать как возмущение, причем невозмущенные волновые функции имеют вид (39.14). Вместо этого мы рассмотрим общий случай произвольного отношения магнитной энергии к энергии спин-орбитальной связи. Для этой цели следует рассмотреть матрицу двух последних членов в (39.11) в каком-нибудь из представлений — (39.6) или (39.14). Собственные значения матрицы дают уровни энергии, а преобразование, приводящее матрицу к диагональному виду, служит для определения волновых функций (см. § 22). Будем исходить из представления (39.14). Сразу же видно, что волновые функции  ${}^2S$ -состояний совпадают

с функцией  ${}^2S_{1/2}$  в (39.6). Для этих двух состояний можно пренебречь влиянием спин-орбитального взаимодействия, так как оно не смещает их друг относительно друга; сдвиги энергии за счет магнитного поля равны  $\pm \epsilon \hbar$ . Аналогично первая и последняя из шести волновых функций  ${}^2P$  совпадают с функциями  ${}^2P_{3/2}$  в (39.6) при  $m = \pm 3/2$ ; соответствующие энергии равны  $1/2 \zeta \pm 2\epsilon \hbar$ , где  $\zeta$  определяется формулой (39.4).

Четыре остающиеся волновые функции  ${}^2P$  комбинируются попарно в зависимости от того, будет ли число  $m = m_l + m_s$  равно  $1/2$  или  $-1/2$ . Достаточно рассмотреть одну из этих пар, например ту, для которой  $m = 1/2$ , так что волновые функции имеют вид  $(+)$  $Y_{1,0}$  и  $(-)$  $Y_{1,1}$ . Матрицу магнитной и спин-орбитальной энергии, построенную на этих функциях, можно найти с помощью матриц момента количества движения (24.15); мы получаем

$$\begin{pmatrix} \epsilon \hbar & 2^{-1/2} \zeta \\ 2^{-1/2} \zeta & -\frac{1}{2} \zeta \end{pmatrix}. \quad (39.15)$$

В соответствии с замечаниями после уравнений (21.19) собственные значения матрицы (39.15) определяются из векового уравнения

$$\begin{vmatrix} \epsilon \hbar - \lambda & 2^{-1/2} \zeta \\ 2^{-1/2} \zeta & -\frac{1}{2} \zeta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left(\frac{1}{2} \zeta - \epsilon \hbar\right) \lambda - \frac{1}{2} \zeta (\epsilon \hbar + \zeta) = 0.$$

Таким путем находим сдвиги уровней данных состояний:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \epsilon \hbar - \frac{1}{2} \zeta \pm \left( \epsilon^2 \hbar^2 + \epsilon \hbar \zeta + \frac{9}{4} \zeta^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (39.16)$$

В предельных случаях слабого и сильного поля для верхнего и нижнего знаков в (39.16) получим

$$\begin{aligned} \lambda_+ &\rightarrow \frac{1}{2} \zeta + \frac{2}{3} \epsilon \hbar \quad \text{и} \quad \lambda_- \rightarrow -\zeta + \frac{1}{3} \epsilon \hbar \quad \text{для} \quad \frac{\epsilon \hbar}{\zeta} \rightarrow 0, \\ \lambda_+ &\rightarrow \epsilon \hbar \quad \text{и} \quad \lambda_- \rightarrow -\frac{1}{2} \zeta \quad \text{для} \quad \frac{\zeta}{\epsilon \hbar} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (39.17)$$

Отсюда следует, что для верхнего знака в (39.16) в случае слабого поля будет получаться состояние  $j = 3/2$ ,  $m = 1/2$ , а в случае сильного поля — состояние  $m_l = 0$ ,  $m_s = 1/2$ . Аналогично если в (39.16) взять нижний знак, то для слабого поля будет получаться состояние  $j = 1/2$ ,  $m = 1/2$ , а для сильного поля — состояние  $m_l = 1$ ,  $m_s = -1/2$ .

Чтобы найти интенсивности переходов в общем случае, нужно вычислить матричные элементы координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ , используя для этого собственные функции оператора  $\xi(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \epsilon (L_z + 2S_z)$ .



Таковыми являются первая, шестая, седьмая и восьмая из функций (39.14), а также линейные комбинации других четырех функций, определяемые с помощью матрицы, диагонализующей (39.15).

**Квадратичный эффект Зеемана.** Для очень сильных магнитных полей и для удаленных орбит, характеризуемых большими значениями  $n$ , становятся заметными эффекты второго порядка по  $H$ . Из формулы (39.5) ясно, что при больших  $n$  влияние спин-орбитального взаимодействия очень мало и разумное приближение можно получить, полностью пренебрегая этой частью энергии. В этом случае спин электрона коммутирует с гамильтонианом, так что число  $m_s$  является интегралом движения и на спин можно не обращать внимания. Гамильтониан (39.11) при этом заменяется оператором

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + \varepsilon L_z + \frac{1}{2} m \varepsilon^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (39.18)$$

Поскольку оператор  $L_z = -i\hbar \partial/\partial \varphi$  коммутирует с (39.18), то  $m_l$  представляет собой хорошее квантовое число и член  $\varepsilon L_z$  приводит только к смещению каждого уровня энергии на  $\varepsilon \hbar m_l$ . Поэтому при больших  $n$  нужно учесть только влияние последнего члена в (39.18),  $H' = \frac{1}{2} m \varepsilon^2 r^2 \sin^2 \theta$ , причем числа  $m_l$  и  $m_s$  имеют заданные значения<sup>1)</sup>

Из результатов § 16 следует, что эффективный радиус атома водорода, грубо говоря, пропорционален  $n^2$ . Для состояний атомов щелочных металлов, характеризуемых большими значениями  $n$ , функция  $V(r)$  практически совпадает с кулоновской и волновые функции очень близки к водородным. Поэтому  $H'$  возрастает приблизительно как  $n^4$ . Это означает, что при достаточно больших значениях  $n$  это квантовое число уже не является хорошим. Для несколько меньших значений  $n$  орбитальный момент  $l$  может не быть интегралом движения. Дело в том, что матрица  $H'$  имеет недиагональные матричные элементы, связывающие состояния с различными  $l$ , а невозмущенные уровни энергии расположены очень близко (они не вырождены только потому, что при наименьших значениях  $l$  волновые функции проникают во внутренние заполненные оболочки). В этой области возмущенные уровни энергии можно получить путем диагонализации матрицы  $H'$  при заданных значениях  $n$ ,  $m_l$  и  $m_s$ , причем  $n - |m_l|$  строк и столбцов матрицы нумеруются числами  $l$ . Структура матрицы  $H'$  получается с помощью формулы Гонта (см. примечание 2 на стр. 333). Поскольку  $\sin^2 \theta$  можно выразить через сферические функции порядка 0 и 2, отличны от нуля будут только те матричные элементы  $H'_{ll'}$ , для которых  $l - l' = 0, \pm 2$ . Таким образом, матрица  $H'$  имеет вид

<sup>1)</sup> См. работу Шиффа и Снайдера [14].

(если, например,  $m_l = 0$ )

$$\begin{pmatrix} H'_{00} & 0 & H'_{02} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & H'_{11} & 0 & H'_{13} & 0 & \dots \\ H'_{20} & 0 & H'_{22} & 0 & H'_{24} & \dots \\ 0 & H'_{31} & 0 & H'_{33} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & H'_{42} & 0 & H'_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (39.19)$$

Матрица (39.19) эквивалентна двум независимым матрицам с  $n/2$  строками и столбцами, в одной из которых числа  $l$  — четные, а в другой — нечетные. При больших  $n$  непосредственная диагонализация этих матриц очень затруднительна. Однако получающиеся уровни энергии оказываются настолько близкими, что спектроскопически их различить невозможно. Поэтому не имеет особого смысла определять отдельные уровни энергии. В этом случае на опыте наблюдается одна расширенная „линия”, возникающая в результате переходов между основным состоянием  ${}^2S (l = 0)$  и группой состояний, получаемых в результате диагонализации матрицы (39.19). Разрешенные переходы происходят только в состояния с  $l = 1$ , примешанные ко всем собственным функциям матрицы (39.19), так что  $m_l$  может равняться только 0,  $+1$  или  $-1$ . Это, как мы теперь покажем, позволяет найти „центр тяжести” линии и ее среднеквадратичную ширину без диагонализации матрицы  $H'$ .

Невозмущенные волновые функции можно выбрать так, чтобы матрица  $H'$  была вещественной. Тогда унитарная матрица  $S$ , диагонализующая  $H'$ , также может быть вещественной, и равенство (21.20) или (22.6) можно записать в виде

$$SH'S^* = E, \quad (39.20)$$

где матрица  $E$  диагональна. Для матричных элементов это дает

$$\sum_{k,l} S_{ik} H'_{kl} S_{jl} = E_i \delta_{ij}.$$

Новые собственные функции  $u_i$ , принадлежащие собственным значениям оператора энергии  $E_i$ , можно выразить через невозмущенные волновые функции  $v_l$  при помощи формулы (22.3):

$$u_i = \sum_l S_{il} v_l.$$

Если теперь пренебречь зависимостью вероятности радиационного перехода от энергии (в пределах малого интервала энергий в данной группе состояний), то вероятность перехода будет пропорциональна квадрату коэффициента при  $v_l$  в каждой из функций  $u_i$ , т. е. вели-

чине  $S_{i1}^2$ . Поэтому вес уровня энергии  $E_i$  пропорционален  $S_{i1}^2$ . Поскольку уравнение, обратное (39.20), имеет вид  $H' = S^*ES$ , центр тяжести группы из возмущенных уровней энергии определяется соотношением

$$E_{\text{ср.}} = \sum_i E_i S_{i1}^2 = H'_{11}.$$

Аналогично для среднеквадратичной ширины линии найдем

$$\sum_i (E_i - E_{\text{ср.}})^2 S_{i1}^2 = \sum_i E_i^2 S_{i1}^2 - E_{\text{ср.}}^2 = \sum_l H'_{1l}^2 - E_{\text{ср.}}^2 = H'_{13}^2.$$

Таким образом, надо вычислить только два элемента матрицы  $H'$ . Очевидно, что как смещение (если не обращать внимания на множитель  $e\hbar m_l$ ), так и ширина линии пропорциональны  $H^2$ .

## § 40. Молекулы

Молекулы построены значительно сложнее атомов, и, соответственно, их количественная квантовомеханическая теория гораздо менее разработана. В настоящем параграфе после рассмотрения общих особенностей молекулярных уровней энергии будет произведен простой расчет молекулы водорода, а затем дана несколько более общая трактовка двухатомных молекул<sup>1)</sup>.

**Классификация уровней.** Все приближения, применяемые в теории молекул, основаны на том обстоятельстве, что масса ядра значительно больше массы электрона. Как мы вскоре увидим, отсюда следует, что энергия движения ядер много меньше энергии движущихся вокруг них электронов. Поскольку период движения по порядку величины равен постоянной Планка, деленной на энергию этого движения, то „ядерные” периоды в соответствующее число раз больше электронных. Поэтому при исследовании движения электронов расположение ядер с хорошим приближением можно считать фиксированным. Далее, движение ядер можно рассматривать в предположении, что для каждой мгновенной их конфигурации состояние системы электронов является стационарным (адиабатическое приближение).

Можно ожидать, что существует стабильная равновесная конфигурация ядер, когда они расположены не слишком близко друг к другу (так как будучи заряжены положительно, они отталки-

<sup>1)</sup> Более подробное рассмотрение см. в книгах Герцберга [15] и Паулинга и Вильсона [16], гл. 10, 12 и 13. (На русском языке более подробно с квантовомеханической теорией молекул можно познакомиться по книгам Волькенштейна [34], Эйринга, Уолтера и Кимбалла [35] и Герцберга [36, 37]. Теория колебаний молекул, лежащая на грани между квантовой и классической механикой, детально излагается в монографии Волькенштейна, Ельшевича и Степанова [38]. — *Прим. перев.*)

ваются на малых расстояниях), но и не слишком далеко друг от друга (так как если молекула существует, то такие состояния не являются наиболее стабильными). Тогда ядерные движения можно разделить на поступательное движение, вращение квазитвердой равновесной конфигурации и, наконец, внутренние колебания атомов относительно равновесных положений. Как и в случае атомов, поступательное движение аналогично движению свободной частицы [см. замечания в связи с уравнениями (16.5)]; оно не приводит к каким-либо результатам, отличным от классических.

Таким образом, молекулярные уровни энергии можно разделить на *электронные, колебательные и вращательные*. Оценим относительный порядок величины энергии различных уровней. Обозначим через  $a$  величину порядка линейных размеров молекулы. Тогда энергия  $E_e$ , связанная с движением валентного электрона (т. е. электрона, занимающего, грубо говоря, весь объем молекулы, а не связанного во внутренней оболочке вблизи ядра), по порядку величины будет равна  $\hbar^2/ma^2$ , где  $m$  — масса электрона. В этом можно убедиться с помощью тех же соображений, что и в начале § 9. Действительно, неопределенность импульса электрона по порядку величины должна составлять по меньшей мере  $\hbar/a$ ; следовательно, минимальная кинетическая энергия равна

$$E_e \sim \frac{\hbar^2}{ma^2}. \quad (40.1)$$

Если  $a$  составляет несколько ангстрем, то эта энергия соответствует частотам перехода, лежащим в видимой и ультрафиолетовой областях спектра.

Для оценки колебательной энергии будем рассматривать каждое нормальное колебание как колебание классического осциллятора с коэффициентом упругости  $K_0$  и массой  $M$ . Последняя по порядку величины равна массе ядра. Для оценки  $K_0$  заметим, что изменение энергии при нормальном колебании с амплитудой, близкой к  $a$ , будет порядка электронной энергии  $E_e$ , так как при таком большом смещении ядер электронная волновая функция должна существенно исказиться. Таким образом,  $K_0 \sim E_e/a^2$ . Тогда в соответствии с (13.8) и (40.1) энергия достаточно слабо возбужденного нормального колебания будет

$$E_v \sim \hbar \left( \frac{K_0}{M} \right)^{1/2} \sim \frac{\hbar^2}{(mM)^{1/2} a^2} \sim \left( \frac{m}{M} \right)^{1/2} E_e. \quad (40.2)$$

Грубо говоря,  $E_v$  в 100 раз меньше  $E_e$ , и соответствующие частоты лежат в ближней инфракрасной области.

Для оценки вращательной энергии  $E_r$  заметим, что момент инерции молекулы по порядку величины равен  $Ma^2$ . Следует ожидать, что при не слишком сильном вращении момент количества движе-

ния имеет величину порядка  $\hbar$ , так что

$$E_r \sim \frac{\hbar^2}{Ma^2} \sim \frac{m}{M} E_e. \quad (40.3)$$

Эта величина примерно в 100 раз меньше  $E_v$  и соответствует переходам в далекой инфракрасной области.

На основании (40.2) и (40.3) можно ожидать, что электронные, колебательные и вращательные уровни энергии можно получить в качестве последовательных членов разложения по степеням малого параметра  $m/M$  (значение которого обычно лежит в интервале от  $10^{-3}$  до  $10^{-4}$ ). Борн и Оппенгеймер [17] показали, что дело действительно обстоит именно таким образом. В качестве параметра разложения названные авторы применяли отношение типичной амплитуды колебаний ядер к межядерному расстоянию (порядок которого равен  $a$ ). Для осциллятора с энергией  $E_v$  и коэффициентом упругости  $K_0$  смещение по порядку величины составляет

$$\left(\frac{E_v}{K_0}\right)^{1/2} \sim a \left(\frac{E_v}{E_e}\right)^{1/2},$$

так что параметр разложения равен

$$\left(\frac{E_v}{E_e}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}. \quad (40.4)$$

По отношению к этому параметру электронная энергия будет нулевого порядка, колебательная энергия — второго, а вращательная — четвертого порядка малости. Члены первого и третьего порядков в разложении энергии обращаются в нуль.

**Волновое уравнение.** Уравнение Шредингера для стационарных состояний молекулы имеет вид

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 - \sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \nabla_j^2 + V\right) \psi = E\psi. \quad (40.5)$$

Здесь  $n$  — число электронов,  $N$  — число ядер,  $V$  — сумма энергий электростатического взаимодействия всех возможных пар электронов и ядер. Очевидно, кинетическая энергия ядер представляет величину четвертого порядка относительно параметра (40.4). Если ею пренебречь, то волновая функция  $\psi$  будет содержать координаты ядер  $\mathbf{R}_j$  только параметрически, и уравнение (40.5) будет определять зависимость волновой функции от координат  $(\mathbf{r}_i)$  электронов, движущихся в поле фиксированных ядер. В этом случае функция  $\psi$  приближенно совпадает с  $u_{R_j}(\mathbf{r}_i)$ , а соответствующее собственное значение оператора энергии равно  $U(\mathbf{R}_j)$ . Исследуя движения ядер, можно рассматривать  $U(\mathbf{R}_j)$  как потенциальную энергию в уравнении для ядерной волновой функции  $w(\mathbf{R}_j)$ .

Поэтому запишем  $\psi$  в форме

$$\psi(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_j) = u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i) w(\mathbf{R}_j), \quad (40.6)$$

где функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 + V \right) u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i) = U(\mathbf{R}_j) u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i). \quad (40.7)$$

Для каждой ядерной конфигурации функция  $U(\mathbf{R}_j)$  получается как собственное значение уравнения (40.7). В общем случае может существовать несколько решений, соответствующих различным электронным состояниям молекулы, и нужно следить за тем, чтобы с изменением  $\mathbf{R}_j$  функции  $u$  и  $U$  изменялись непрерывно (особенно если система вырождена). Подставляя (40.6) в (40.5) и принимая во внимание (40.7), получаем

$$\left[ -\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \nabla_j^2 + U(\mathbf{R}_j) \right] \psi = E\psi.$$

Это можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i) \left[ -\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \nabla_j^2 + U(\mathbf{R}_j) - E \right] w(\mathbf{R}_j) = \\ = \sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} [w(\mathbf{R}_j) \nabla_j^2 u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i) + 2 \operatorname{grad}_j w(\mathbf{R}_j) \cdot \operatorname{grad}_j u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i)]. \quad (40.8) \end{aligned}$$

Если пренебречь зависимостью  $u$  от  $\mathbf{R}_j$ , то правая часть уравнения (40.8) обращается в нуль и мы получаем приближенное волновое уравнение, описывающее движение ядер:

$$\left[ -\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \nabla_j^2 + U(\mathbf{R}_j) \right] w(\mathbf{R}_j) = Ew(\mathbf{R}_j). \quad (40.9)$$

Физически допустимость пренебрежения членами  $\operatorname{grad}_j u$  связана с малостью амплитуды колебаний ядер по сравнению с равновесными расстояниями между ними [т. е. с малостью параметра (40.4)]; это означает, что при движении ядер электронная часть волновой функции  $u$  не изменяется заметным образом. Борн и Оппенгеймер дали формальное доказательство того, что это приближение оправдано до тех пор, пока не возбуждаются слишком высокие колебательные и вращательные состояния.

**Молекула водорода.** Из всего изложенного ясно, что в связи с вопросом о строении молекул возникают две различные задачи. Первая из них состоит в решении уравнения (40.7), что необходимо для нахождения электронных волновых функций и потенциальной

энергии ядер  $U(R_j)$ . Вторая сводится к решению „ядерного” уравнения (40.9). Первую задачу можно решить только в самых простых случаях. В качестве примера рассмотрим в общих чертах приближенное решение для молекулы водорода, полученное Гайтлером и Лондоном [18]. Затем, сделав простые допущения о виде потенциальной энергии  $U$ , мы обсудим вопрос о решении уравнения (40.9) для произвольной двухатомной молекулы.

В случае молекулы водорода единственной ядерной координатой  $R_j$ , входящей в уравнение (40.7), будет абсолютная величина расстояния между двумя ядрами водорода  $R$ . Гамильтониан дается формулой (27.11) (см. фиг. 24). Однако в данном случае расстояние  $R$  отнюдь не велико по сравнению с „радиусом атома”

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

Поэтому аппроксимациями типа (27.11) и (27.12) здесь нельзя пользоваться. Тем не менее приближенная волновая функция, представляемая простым произведением двух водородных функций основного состояния, дает поразительно хорошие результаты. Это связано с учетом обменного вырождения (см. § 32): одновременно используются обе вырожденные волновые функции, для одной из которых электрон 1 находится около ядра  $A$  и электрон 2 — около ядра  $B$ , а для другой — электрон 1 находится около ядра  $B$ , а электрон 2 — около ядра  $A$ . В работе Гайтлера и Лондона впервые было показано, что правильной линейной комбинации невозмущенных вырожденных волновых функций соответствует значительно меньшая энергия, чем каждой из этих функций в отдельности. Этот факт составляет основу современной теории *гомеоплярной связи*. Указанное свойство вырождения иногда называют *резонансом*<sup>1)</sup>. Аналогичная ситуация возникает при взаимодействии двух классических осцилляторов, находящихся в резонансе (т. е. имеющих одинаковые невозмущенные частоты). В результате этого взаимодействия возникают два нормальных колебания с более низкой и с более высокой частотами. Аналогично взаимодействие между двумя резонирующими (вырожденными) состояниями в квантовой механике приводит к возникновению более низкого (а также и более высокого) собственного значения оператора энергии<sup>2)</sup>. Разумеется, может существовать и более двух вырожденных невозмущенных состояний, и вырождение необязательно должно быть обменного типа.

<sup>1)</sup> В данном случае смысл слова „резонанс” имеет лишь отдаленное сходство со смыслом аналогичного термина, применявшегося в § 19 в связи с задачей о рассеянии.

<sup>2)</sup> С критическими замечаниями, которые встретила „теория резонанса” в применении к теории химического строения, читатель может познакомиться, например, по книге Волькенштейна [34], гл. 5. — *Прим. перев.*

**Потенциальная энергия ядер.** Для молекулы водорода уравнение (40.7) имеет вид

$$[H - U(R)] u_R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0,$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + e^2 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{2B}} - \frac{1}{r_{1B}} - \frac{1}{r_{2A}} \right). \quad (40.10)$$

Будем искать  $U(R)$ , исходя из приближенных волновых функций

$$u_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = u_A(\mathbf{r}_1) u_B(\mathbf{r}_2),$$

$$u_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = u_A(\mathbf{r}_2) u_B(\mathbf{r}_1), \quad (40.11)$$

где  $u_A$  и  $u_B$  — волновые функции основного состояния атома водорода [ $u_{100}$  в обозначениях (16.24)], относящиеся соответственно к ядрам  $A$  и  $B$ . Прежде всего необходимо заметить, что  $u_1$  и  $u_2$  в (40.11) представляют собой собственные функции различных невозмущенных гамильтонианов и развитая в § 25 теория возмущений для вырожденного случая здесь не применима. В этом состоит отличие данной задачи от случая атома гелия [ср. замечания в связи с (33.7)], когда две обменно вырожденные волновые функции удовлетворяли одному и тому же невозмущенному уравнению Шредингера.

Мы можем, однако, воспользоваться изложенным в § 27 вариационным методом. В качестве пробной функции естественно принять произвольную линейную комбинацию функций  $u_1$  и  $u_2$ :

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = u_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + A u_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (40.12)$$

где  $A$  — параметр, подлежащий варьированию. Подставляя (40.12) в (27.5), получаем

$$U(R) \leq \frac{(1 + A^2)H_{11} + 2AH_{12}}{1 + A^2 + 2A\gamma}, \quad \gamma \equiv \iint u_1 u_2 d\tau_1 d\tau_2,$$

$$H_{11} = H_{22} \equiv \iint u_1 H u_1 d\tau_1 d\tau_2, \quad (40.13)$$

$$H_{12} = H_{21} \equiv \iint u_1 H u_2 d\tau_1 d\tau_2.$$

Эти соотношения между матричными элементами легко установить с помощью равенства (22.10), если только учесть, что функции  $u$  вещественны, а оператор  $H$  эрмитов и симметричен по отношению к двум электронам.

Как матричные элементы, так и интеграл  $\gamma$  зависят от  $R$ . При любом заданном значении  $R$  производная от правой части (40.13) по  $A$  равна

$$\frac{2(1 - A^2)(H_{12} - \gamma H_{11})}{(1 + A^2 + 2A\gamma)^2}.$$

Это выражение обращается в нуль при  $A = \pm 1$ . Так как при  $A$ , равном  $-\infty$ ,  $0$  и  $+\infty$ , правая часть (40.13) равна  $H_{11}$ , то одна из точек  $A = \pm 1$  должна соответствовать минимуму, а другая —

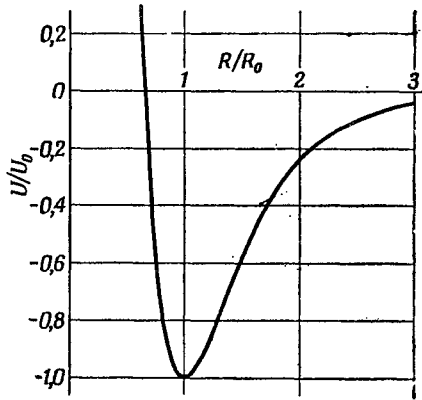


максимуму  $U(R)$ . Интегралы в (40.13) можно выразить через табулированные функции, причем минимальное среднее значение  $H$  соответствует  $A = +1$ :

$$\psi = u_1 + u_2, \\ U(R) \leq \frac{H_{11} + H_{12}}{1 + \gamma}. \quad (40.14)$$

Вид функции (40.14), определяющей верхний предел  $U(R)$ , характерен вообще для потенциальной энергии ядер двухатомной молекулы (см. фиг. 30) и находится в хорошем согласии с опытом<sup>1)</sup>. Поскольку функция  $\psi$  в (40.14) симметрична относительно перестановки пространственных координат электронов, ее нужно умножить на антисимметричную (синглетную) спиновую функцию, определяемую последней строкой в (33.6).

Интересно сравнить свойства симметрии основного состояния молекулы водорода и возбужденных состояний атома гелия (§ 33) исходя из наглядных соображений. При параллельных спинах электроны в соответствии с принципом Паули должны находиться в различных пространственных состояниях, вследствие чего они будут в среднем удалены друг от друга. По этой причине, например, в возбужденном состоянии ( $1s 2s$ ) атома гелия уменьшается электростатическое отталкивание электронов и понижается их энергия. В результате триплетные состояния в атоме гелия имеют тенденцию располагаться ниже, чем синглетные (для той же электронной конфигурации; в основном состоянии дело обстоит иначе, так как конфигурация  $1s^2$  может быть только синглетной). С другой стороны, в основном состоянии молекулы водорода наименьшая энергия, соответствующая наиболее прочной связи, достигается в том случае, когда электроны концентрируются между двумя ядрами. Действительно, при этом отталкивание между электронами с избытком компенсируется притяжением их к обоим ядрам. Для этого электроны должны быть в среднем близки в пространстве, что возможно, когда их спины антипараллельны. Таким образом, молекула образуется именно в синглетном состоянии.



Фиг. 30. Потенциал Морза (40.16) при  $a = \frac{1}{2} R_0$ .

<sup>1)</sup> См. книгу Паулинга и Вильсона [16], раздел 43а.

**Потенциал Морза.** Перейдем теперь к общему случаю двухатомных молекул и рассмотрим характер решений уравнения (40.9), описывающего движения ядер. Если массы ядер равны  $M_1$  и  $M_2$ , а координаты вектора взаимного расстояния  $\mathbf{R}$  будут  $R, \theta, \varphi$ , то уравнение для относительного движения [см. (16.5)] примет вид

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(R) \right] w(R, \theta, \varphi) = E w(R, \theta, \varphi), \quad (40.15)$$

где  $M = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$  — приведенная масса.

Эмпирическим путем было показано, что потенциальную энергию ядер в низших электронных состояниях реальных двухатомных молекул с достаточной точностью можно описывать с помощью простой аналитической функции, содержащей три свободных параметра:

$$U(R) = U_0 [e^{-2(R-R_0)/a} - 2e^{-(R-R_0)/a}]. \quad (40.16)$$

Выражение (40.16) называется *потенциалом Морза* [19]; график его изображен на фиг. 30. При больших  $R$  функция  $U$  экспоненциально стремится к нулю, при  $R = R_0$  достигает минимума (равного  $-U_0$ ) и, наконец, при стремлении  $R$  к нулю принимает большое положительное значение, если только „ширина” области притяжения  $a$  несколько меньше равновесного расстояния  $R_0$ .

Потенциальная энергия на фиг. 30 имеет вид, которого и следовало ожидать для двухатомной молекулы. За нуль энергии произвольно выбрано ее значение, соответствующее удаленным друг от друга нейтральным атомам; тогда при возрастании  $R$  функция  $U$  сначала становится отрицательной вследствие действия сил Ван-дер-Ваальса<sup>1)</sup>. На меньших расстояниях силы Ван-дер-Ваальса сменяются значительно более интенсивным притяжением Гайтлера — Лондона.

При еще большем сближении ядер (атомных остовов) возникает отталкивание, приводящее к возрастанию потенциала  $U$ , который в конце концов становится большим и положительным<sup>2)</sup>.

**Вращение и колебания двухатомных молекул.** В сферических координатах уравнение (40.15), как и (14.1), допускает разделение переменных:

$$w(R, \theta, \varphi) = \frac{\chi(R)}{R} Y_{KMK}(\theta, \varphi).$$

<sup>1)</sup> Одной из неточностей потенциала Морза является замена вандерваальсовского члена  $1/R^6$  (см. § 27) экспоненциальным выражением. Однако при таких больших  $R$  поведение  $U$  мало влияет на молекулярные уровни энергии.

<sup>2)</sup> В противоположность истинному взаимодействию потенциал Морза остается конечным при  $R = 0$ .

Здесь  $K$  и  $M_K$  представляют собой квантовые числа момента количества движения, аналогичные числам  $l$  и  $m$  для одной частицы в центральном поле. Радиальное уравнение имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2\chi}{dR^2} + W(R)\chi = E\chi, \quad (40.17)$$

$$W(R) = U(R) + \frac{\hbar^2 K(K+1)}{2MR^2}, \quad K=0, 1, 2, \dots$$

Это есть волновое уравнение для одномерного движения частицы с массой  $M$  и потенциальной энергией  $W(R)$ ; при  $R=0$  функция  $\chi$  должна обращаться в нуль. При не слишком больших  $K$  вид функции  $W(R)$  будет в основном подобен виду функции  $U$ , изображенной на фиг. 30. В этом случае нас интересуют главным образом малые колебания около положения равновесия, соответствующего минимуму  $W$ . Пусть последний достигается в точке  $R_1$  (совпадающей с  $R_0$ , только если  $K=0$ ). Тогда, разлагая  $W$  в ряд Тейлора около точки  $R_1$ , мы получаем

$$W(R) = W_0 + \frac{1}{2} K_0 (R - R_1)^2 + b(R - R_1)^3 + c(R - R_1)^4 \quad (40.18)$$

(члены более высокого порядка отброшены). Если пренебречь также членами с  $b$  и  $c$  и продолжить область возможных значений  $R$  до  $-\infty$ , то (40.17) превратится в уравнение для линейного гармонического осциллятора (с добавочным членом  $W_0$  в энергии). Это приближение будет хорошим при не слишком больших значениях *вращательного квантового числа  $K$  и колебательного квантового числа  $v$* . Несколько лучшее приближение можно получить, рассматривая в (40.18) члены с  $b$  и  $c$  как возмущение, наложенное на осциллятор. Как известно (см. задачу 2 гл. VII), член, содержащий  $b$ , приводит только к эффекту второго порядка, а член с  $c$  дает отличный от нуля результат уже в первом приближении теории возмущений (среднее значение этого слагаемого можно вычислить с помощью матричных методов, используемых в задаче 6 гл. VI). Поэтому вклады обоих членов в энергию имеют одинаковый порядок величины.

**Уровни энергии.** Таким образом, в первом исчезающем приближении собственные значения уравнения (40.17) принимают вид

$$E = W_0 + \hbar \left(\frac{K_0}{M}\right)^{1/2} \left(v + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar^2 b^2}{MK_0^2} \left[\frac{15}{4} \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] + \\ + \frac{3\hbar^2 c}{2MK_0} \left[\left(v + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right], \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (40.19)$$

Величины  $W_0$ ,  $K_0$ ,  $b$  и  $c$  можно разложить по степеням  $K(K+1)$  с коэффициентами, зависящими от параметров функции  $U(R)$ .

Если  $U$  имеет вид (40.16), то мы получаем

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 + \frac{\hbar^2 K(K+1)a^2}{2MR_0^3 U_0}, \\ W_0 &= -U_0 + \frac{\hbar^2 K(K+1)}{2MR_0^2} - \frac{\hbar^4 K^2(K+1)^2 a^2}{4M^2 R_0^6 U_0}, \\ K_0 &= \frac{2U_0}{a^2} - \frac{3\hbar^2 K(K+1)}{MR_0^3 a^2} \frac{a}{R_0} \left(1 - \frac{a}{R_0}\right), \\ b &= -\frac{U_0}{a^3}, \quad c = \frac{7U_0}{12a^4}. \end{aligned} \quad (40.20)$$

Здесь оставлено столько членов, сколько нужно, чтобы получить  $E$  с точностью до величин второго порядка относительно  $(v + 1/2)$  и  $K(K+1)$ .

Первая из формул (40.20) описывает растяжение молекул при вращении. Вторая формула представляет (с точностью до величин второго порядка малости) сумму равновесной ( $-U_0$ ) и вращательной энергии. В первом приближении вращательная энергия равна  $\hbar^2 K(K+1)/2I_0$ , где  $I_0 = MR_0^2$  — момент инерции молекулы относительно оси, перпендикулярной линии, соединяющей ядра. Это есть энергия жесткого ротатора (см. задачу 12). Третья формула (40.20) описывает изменение коэффициента упругости при растяжении. В рассматриваемом приближении поправками к растяжению, связанными с ангармоническими членами, содержащими  $b$  и  $c$ , можно пренебречь. Разлагая второй член в правой части (40.19) с помощью выражения для  $K_0$ , получаем

$$\hbar \left(\frac{2U_0}{Ma^2}\right)^{1/2} \left(v + \frac{1}{2}\right) \left[1 - \frac{3\hbar^2 K(K+1)}{4MR_0^3 U_0} \frac{a}{R_0} \left(1 - \frac{a}{R_0}\right)\right].$$

Последние два слагаемых в (40.19) дают поправку второго порядка к колебательной энергии:

$$\left(-\frac{15}{16} + \frac{7}{16}\right) \frac{\hbar^2}{Ma^2} \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2Ma^2} \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (40.21)$$

(постоянные слагаемые взаимно уничтожаются).

Ясно видно, что значения энергии вращательных и колебательных уровней по порядку величины соответствуют оценкам, сделанным в начале настоящего параграфа. При возрастании  $v$  или  $K$  расстояния между уровнями становятся меньше, чем это предсказывается простыми моделями жесткого ротатора и гармонического осциллятора.

**Влияние тождественности ядер.** Если ядра в двухатомной молекуле тождественны, то волновая функция должна быть симметрична или антисимметрична относительно перестановки их пространственных и спиновых координат, в зависимости от того, является ли спин ядра целым или полуцелым (см. § 33). Из результа-

тов § 14 очевидно, что четность ядерной волновой функции определяется ее угловой частью  $Y_{KM_K}(\theta, \varphi)$ . Последняя является четной или нечетной в зависимости от четности или нечетности числа  $K$ . Перестановка пространственных координат двух ядер эквивалентна изменению знака вектора взаимного расстояния  $\mathbf{R}$ , так что пространственная симметрия волновой функции определяется ее четностью. Таким образом, если спин ядра целый, то спиновая функция должна быть симметричной при четном  $K$  и антисимметричной при нечетном  $K$ ; при полуцелом ядерном спине дело обстоит как раз наоборот.

Как было показано в § 33, для двух ядер со спинами  $I\hbar$  полное число спиновых состояний  $(2I + 1)^2$  можно разделить на  $(I + 1)(2I + 1)$  симметричных и  $I(2I + 1)$  антисимметричных состояний. Поэтому в газе, находящемся в статистическом равновесии, отношение чисел молекул с четным и нечетным  $K$  будет составлять  $(I + 1)/I$  при  $I$ , равном нулю или целому числу, и  $I/(I + 1)$  при полуцелом  $I$ <sup>1)</sup>. Этот эффект приводит к изменению интенсивностей вращательных полос в спектрах двухатомных молекул с одинаковыми ядрами. Таким путем можно определить как спин, так и статистику соответствующих ядер; результаты находятся в соответствии с общими выводами § 33.

## § 41. Атомные ядра

Применение квантовой механики к исследованию строения атомных ядер во всех случаях, кроме самых простейших, наталкивается на большие математические трудности. В настоящем параграфе мы кратко опишем некоторые общие свойства ядер и затем рассмотрим ядерную задачу двух тел<sup>2)</sup>.

**Общие свойства ядер.** Атомные ядра состоят из протонов и нейтронов<sup>3)</sup>, обозначаемых общим термином *нуклоны*. Другие частицы (мезоны, электроны), которые могут лишь временно существовать в ядре, обычно игнорируются в теориях строения ядра. Протоны представляют собой ядра атомов водорода, а нейтроны — частицы с примерно той же массой, как и протоны, с теми же

<sup>1)</sup> Разумеется, если расстояние между вращательными уровнями не мало по сравнению с энергией теплового движения  $kT$ , в это отношение войдет еще множитель Больцмана.

<sup>2)</sup> Дальнейшее рассмотрение теории ядра см. в книгах Бете [20], Розенфельда [21], Гамова и Критчфилда [22], Ферми [23], Блатта и Вайскопфа [24] и Сакса [25] и в статье Бора и Моттельсона [26]. (См. также книги Ландау и Смородинского [39], Ахиезера и Померанчука [40], Соколова и Иваненко [41], Росси [42] и монографию под редакцией Сегре [43]. — *Прим. перев.*)

<sup>3)</sup> Идея о том, что атомные ядра состоят из протонов и нейтронов, впервые была высказана Иваненко. — *Прим. перев.*

спином и статистикой (спин  $1/2\hbar$ , статистика Ферми—Дирака), но без электрического заряда. Ядро можно характеризовать его зарядом  $Ze$ , где  $Z$  — целое число и  $e$  — положительный заряд протона, и массой  $M$  (за единицу принимается  $1/16$  часть массы  $O^{16}$  — изотопа кислорода с массовым числом 16).

Масса  $M$  всегда близка к некоторому целому числу  $A$ , называемому *массовым числом*. Число нейтронов в ядре равно  $A - Z$ . Таким образом, дейтрон  $H^2$  (ядро тяжелого водорода) состоит из одного протона и одного нейтрона,  $\alpha$ -частица  $He^4$  (ядро атома гелия) — из двух протонов и двух нейтронов, а ядро атома золота  $Au^{197}$  — из 79 протонов и 118 нейтронов.

Согласно теории относительности, если составить разность между суммой масс  $Z$  протонов и  $A - Z$  нейтронов и массой  $M$  того же ядра и умножить ее на квадрат скорости света в пустоте, то получится энергия, выделяющаяся при объединении отдельных нуклонов в ядро. Она называется *энергией связи* данного ядра; ее удобно измерять в миллионах электрон-вольт ( $Mэв$ ).

*Радиус ядра  $R$*  представляет довольно хорошо определенную величину. Его можно измерить несколькими способами, используя, например, данные о рассеянии нейтронов, протонов и электронов большой энергии. Экспериментально найдено, что энергия связи и объем, отнесенные к одному нуклону, примерно постоянны для большинства элементов периодической системы. Первая из этих величин приблизительно равна  $8 Mэв$ , а вторая обычно записывается в виде  $R = r_0 A^{1/3}$ , где  $r_0$  колеблется от 1,2 до  $1,4 \cdot 10^{-13}$  см. Приближенное постоянство энергии связи и объема на один нуклон называют свойством ядерного насыщения.

**Взаимодействие между двумя нуклонами.** Наиболее важную проблему физики ядра составляет определение параметров, характеризующих энергию взаимодействия между двумя нуклонами. Может оказаться, что, коль скоро эти параметры будут найдены, задача об определении структуры ядер, более тяжелых, чем дейтрон, сведется только к чрезвычайно сложному упражнению по квантовой механике. Это было бы аналогично случаю, с которым приходится иметь дело при изучении строения атомов и молекул, где известно, что взаимодействие определяется в основном законом Кулона. С другой стороны, может оказаться также, что задание одного только закона взаимодействия двух нуклонов принципиально недостаточно для определения структуры тяжелых ядер. Так будет обстоять дело, если при сближении трех, четырех и более нуклонов будут возникать добавочные (не парные) взаимодействия, особенности которых нельзя найти, изучая систему двух нуклонов. Вопрос о том, существуют ли заметные взаимодействия такого типа, пока остается открытым, и мы здесь не будем его больше обсуждать.

Остальная часть этой главы будет посвящена рассмотрению системы двух нуклонов. Мы будем предполагать, что основную роль при этом играют короткодействующие силы. Разумно предположить, что радиус действия их значительно меньше размеров тяжелых ядер; вычисления типа приводимых ниже показывают, что по порядку величины он составляет  $2 \cdot 10^{-13}$  см. Кроме того, мы допустим пока, что потенциальная энергия  $V(r)$  зависит только от расстояния  $r$  между нуклонами. Таким образом, прежде всего нужно решить уравнение Шредингера для относительного движения двух частиц с приведенной массой  $\mu$  и потенциальной энергией  $V(r)$ . Поскольку массы нейтрона и протона почти одинаковы, приведенная масса  $\mu$  очень близка к половине массы нуклона.

**Система нейтрон — протон.** Предположим для простоты, что  $V(r)$  имеет вид прямоугольной потенциальной ямы (см. фиг. 13):  $V(r) = -V_0$  при  $r < a$  и  $V(r) = 0$  при  $r > a$ . В § 15 было показано, что в области с таким потенциалом частица с массой  $\mu$  не имеет связанных состояний, если только не выполняется условие  $V_0 a^2 > \pi^2 \hbar^2 / 8\mu$ . Для системы из нейтрона и протона величина  $\pi^2 \hbar^2 / 8\mu$  равна  $1,01 \cdot 10^{-24}$  Мэв  $\cdot$  см<sup>2</sup>. Если положить  $a = 2,00 \cdot 10^{-13}$  см, то для того, чтобы было возможно существование дейтрона, константа  $V_0$  должна превышать 25,2 Мэв. Поскольку дейтрон имеет лишь одно связанное состояние, разумно допустить, что оно соответствует случаю  $l = 0$ . Тогда из решения задачи 7 гл. IV следует, что экспериментально измеряемая энергия связи, равная 2,23 Мэв, получается при  $V_0 = 36,1$  Мэв. Формула (19.28) дает теперь эффективное сечение рассеяния нейтронов очень низкой энергии протонами. Пренебрегая энергией  $E$  по сравнению с  $V_0$ , получаем  $\sigma = 3,5 \cdot 10^{-24}$  см<sup>2</sup>. Опыт дает для нейтронов с энергией в несколько электрон-вольт  $\sigma \approx 20,4 \cdot 10^{-24}$  см<sup>2</sup>. Названная энергия достаточно мала, чтобы ею можно было пренебречь по сравнению с  $V_0$ , и в то же время достаточно велика, чтобы энергия связи протона в молекуле водорода не играла роли. Объяснение указанного расхождения, основанное на учете зависимости сил взаимодействия нейтрон — протон от спинового состояния, было предложено в 1935 г. Е. Вигнером (не опубликовано). Известно, что спин дейтрона равен  $\hbar$ , так что его спиновое состояние представляет триплет. Однако, как указывалось в § 34 в связи с обменными столкновениями электронов с атомами водорода, в 75% всех столкновений нейтронов с протонами состояния будут триплетными, а в 25% — синглетными. Противоречие будет устранено, если эффективное сечение рассеяния в синглетном состоянии принять равным  $70,8 \cdot 10^{-24}$  см<sup>2</sup>.

Если допустить, что в синглетном состоянии параметр взаимодействия  $a$  также равен  $2,00 \cdot 10^{-13}$  см, то, как следует из формулы (19.28), такое сечение будет получаться при  $V_0$ , равном 23,6

или 27,0 Мэв. Очевидно, мы имеем здесь резонансное рассеяние, рассматривавшееся в § 19, и два эти потенциала соответствуют виртуальному и связанному синглетным состояниям. Вопрос о том, какой из потенциалов правилен, нельзя решить исходя из зависимости эффективного сечения от энергии падающих нейтронов. Действительно, в § 19 показано, что как в том, так и в другом случае при  $l = 0$  эффективное сечение  $\sigma$  монотонно убывает с ростом  $E$  и различие в поведении обеих функций недостаточно сильно. Из других соображений вытекает, что синглетное состояние является виртуальным, так что глубина, соответствующая данной ширине, составляет 23,6 Мэв<sup>1)</sup>.

**Потенциал произвольной формы.** Потенциальная энергия взаимодействия между двумя нуклонами характеризуется малым радиусом действия  $a$  и большой величиной  $V_0$ . Здесь величины  $a$  и  $V_0$  относятся не только к прямоугольному потенциальному барьеру, но и вообще определяют расстояние, в пределах которого  $V(r)$  заметно отличается от нуля, и абсолютную величину  $V(r)$  в этой области. Для столкновений с не слишком большой энергией (вплоть до нескольких Мэв) величина  $ka$  достаточно мала по сравнению с единицей [ $k = (2\mu E)^{1/2}/\hbar$ ,  $E$  — кинетическая энергия в системе центра инерции]. Если, например,  $a = 2 \cdot 10^{-13}$  см, то  $ka$  равно единице, когда в лабораторной системе энергия падающего нуклона составляет около 20 Мэв. Поэтому для не слишком больших энергий нужно принимать во внимание только парциальную волну с  $l = 0$ . Далее, как  $E$ , так и энергия связи дейтрона  $\epsilon$  достаточно малы по сравнению с  $V_0$ . Отсюда следует, что в области действия ядерных сил вид радиальной волновой функции при  $l = 0$  лишь в незначительной степени зависит от энергии, тогда как вне этой области волновая функция имеет простой асимптотический вид. Это позволяет думать, что как энергия связи, так и характер рассеяния при малых энергиях в таком поле зависят главным образом от его „силы”, приближенно характеризуемой величиной  $V_0 a^2$ , и от расстояния до тех точек, где волновая функция принимает асимптотический вид (это расстояние приближенно характеризуется параметром  $a$ ).

Оказывается, что действительно, коль скоро преобладают силы притяжения и они достаточно велики, любой потенциал с малым радиусом действия можно охарактеризовать двумя параметрами. В качестве последних можно выбрать „силу” потенциала и радиус действия; совместно они определяют энергию связанного состояния —  $\epsilon$  и зависимость фазы рассеяния от энергии при не слиш-

<sup>1)</sup> Этот результат получен главным образом по данным о рассеянии очень медленных нейтронов в орто- и параводороде; на возможность такого определения впервые указали Швингер и Теллер [27].



ком больших значениях  $E^1$ . Таким образом, можно ожидать, что в опытах с низкими энергиями будут определяться только эти два параметра, но не форма потенциала  $V(r)$ ; экспериментальные результаты подтверждают это предположение.

**Соотношения для фаз.** Мы будем рассматривать исключительно парциальную волну с  $l = 0$ . Обозначим через  $u(r)$  произведение  $r$  на радиальную волновую функцию. Нормировка  $u$  выбрана таким образом, что вне области действия ядерных сил асимптотическое выражение этой функции имеет вид

$$u(r) \rightarrow \psi(r), \quad (41.1)$$

где

$$\psi(r) \equiv \frac{\sin(kr + \delta)}{\sin \delta} \quad (41.2)$$

при всех  $r$ . Фаза  $\delta$  согласуется с определением (19.8), и полное эффективное сечение, как и в случае (19.13), равно

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta. \quad (41.3)$$

Волновые уравнения для некоторых значений энергии  $E_1$  и  $E_2$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dr^2} + k_1^2 u_1 - U u_1 &= 0, \\ \frac{d^2 u_2}{dr^2} + k_2^2 u_2 - U u_2 &= 0, \end{aligned} \quad (41.4)$$

где  $U(r) = 2\mu V(r)/\hbar^2$ . Умножим первое из уравнений (41.4) на  $u_2$ , второе — на  $u_1$  и разность между полученными выражениями проинтегрируем по  $r$  от нуля до значения  $r = R$ , несколько превышающего радиус действия потенциала:

$$\left( u_2 \frac{du_1}{dr} - u_1 \frac{du_2}{dr} \right) \Big|_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R u_1 u_2 dr. \quad (41.5)$$

Уравнения, которым удовлетворяют функции  $\psi$ , совпадают с (41.4) при  $U = 0$ . Поэтому уравнение (41.5) справедливо также и для функций  $\psi$ :

$$\left( \psi_2 \frac{d\psi_1}{dr} - \psi_1 \frac{d\psi_2}{dr} \right) \Big|_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R \psi_1 \psi_2 dr. \quad (41.6)$$

<sup>1)</sup> Этот результат установлен Швингером с помощью вариационного метода и изложен в неопубликованных лекциях (1947 г.), хотя предположения о его справедливости высказывались раньше. В своем изложении мы следуем работе Бете [28]. (См. также книгу Ландау и Смородинского [39]. — *Прим. перев.*)

Вычтем теперь (41.5) из (41.6); тогда значения левых частей на верхнем пределе  $R$  взаимно уничтожаются, так как  $u(R) = \psi(R)$ . Поэтому можно перейти к пределу  $R \rightarrow \infty$ , и мы получим

$$\begin{aligned} \left( \psi_1 \frac{d\psi_2}{dr} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{dr} \right)_{r=0} - \left( u_1 \frac{du_2}{dr} - u_2 \frac{du_1}{dr} \right)_{r=0} = \\ = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^{\infty} (\psi_1 \psi_2 - u_1 u_2) dr. \end{aligned} \quad (41.7)$$

В силу (41.2) первый член в скобках равен  $k_2 \operatorname{ctg} \delta_2 - k_1 \operatorname{ctg} \delta_1$ . Выражение во второй скобке в левой части равно нулю, так как  $u(0) = 0$ . Таким образом, (41.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} k_2 \operatorname{ctg} \delta_2 - k_1 \operatorname{ctg} \delta_1 = \frac{1}{2} (k_2^2 - k_1^2) \varrho(E_1, E_2), \\ \varrho(E_1, E_2) \equiv 2 \int_0^{\infty} (\psi_1 \psi_2 - u_1 u_2) dr. \end{aligned} \quad (41.8)$$

Представляют интерес два частных случая равенства (41.8). Во-первых, заменим  $E_1$  на  $-\varepsilon$ ,  $\psi_1(r)$  на  $\psi_0(r) \equiv e^{-\beta r}$ , где  $\beta^2 = 2\mu\varepsilon/\hbar^2$ , и  $u_1(r)$  — на волновую функцию основного состояния  $u_0(r)$ , нормированную аналогично (41.1). Тогда получим

$$\begin{aligned} k_2 \operatorname{ctg} \delta_2 + \beta = \frac{1}{2} (k_2^2 + \beta^2) \varrho(-\varepsilon, E_2), \\ \varrho(-\varepsilon, E_2) \equiv 2 \int_0^{\infty} (\psi_0 \psi_2 - u_0 u_2) dr. \end{aligned} \quad (41.9)$$

Во-вторых, положим энергию  $E_1$  равной нулю:

$$\begin{aligned} k_2 \operatorname{ctg} \delta_2 + \frac{1}{a_t} = \frac{1}{2} k_2^2 \varrho(0, E_2), \\ \varrho(0, E_2) \equiv 2 \int_0^{\infty} (\psi_0 \psi_2 - u_0 u_2) dr, \\ \psi_0 \equiv 1 - \frac{r}{a_t}, \quad \frac{1}{a_t} = - \lim_{E \rightarrow 0} (k \operatorname{ctg} \delta) \end{aligned} \quad (41.10)$$

(индексы у  $u_0$  и  $\psi_0$  означают, что энергия равна нулю). Величина  $a_t$  называется *длиной рассеяния*; согласно (41.3), эффективное сечение при нулевой энергии равно  $4\pi a_t^2$ . Индекс у  $a_t$  означает, что данное значение относится к триплетному, а не к синглетному состоянию.

**Эффективный радиус действия.** Соотношения (41.8), (41.9) и (41.10) являются точными. Исходя из общего вида потенциальной энергии, заменим теперь  $\varrho$  приближенным выражением. Ясно, что в силу (41.1) подинтегральное выражение в  $\varrho$  обращается в нуль вне области действия ядерных сил. В области действия потенциала

все функции  $\psi$  очень близки к единице, так как там произведения  $kr$  и  $\beta r$  малы по сравнению с единицей; кроме того, все функции  $u$  почти одинаковы, так как  $U$  много больше, чем  $k^2$  или  $\beta^2$ . Таким образом,  $\varrho$  слабо зависит от своих аргументов, и при вычислении ее можно брать любые удобные значения энергии. Соответственно, в качестве приближенного выражения для  $\varrho$  возьмем

$$r_0 \equiv \varrho(0, 0) = 2 \int_0^{\infty} (\psi_0^2 - u_0^2) dr. \quad (41.11)$$

Эта величина называется *эффективным радиусом действия*. Эффективный радиус действия можно было бы определить и иначе, полагая, например,

$$\varrho(-\varepsilon, -\varepsilon) = 2 \int_0^{\infty} (\psi_g^2 - u_g^2) dr. \quad (41.12)$$

В задаче 17 показано, что эффективные радиусы действия, вычисленные для типичного случая по формулам (41.11) и (41.12), совпадают друг с другом с точностью до нескольких процентов.

В указанном приближении фаза, определяемая равенством (41.9), составляет

$$k \operatorname{ctg} \delta + \beta \approx \frac{1}{2} r_0 (k^2 + \beta^2) \quad (41.13)$$

(индекс 2 опущен). С другой стороны, из (41.10) находим

$$k \operatorname{ctg} \delta + \frac{1}{a_t} \approx \frac{1}{2} r_0 k^2. \quad (41.14)$$

Сравнивая (41.13) и (41.14), получаем следующую связь между  $a_t$ ,  $\beta$  и триплетным эффективным радиусом действия  $r_0$ :

$$\frac{1}{a_t} \approx \beta - \frac{1}{2} r_0 \beta^2. \quad (41.15)$$

Если положить  $1/\beta = 4,28 \cdot 10^{-13}$  см, что соответствует значению  $\varepsilon = 2,23$  Мэв и  $a_t = 5,34 \cdot 10^{-13}$  см, то формула (41.15) дает  $r_0 \approx 1,70 \cdot 10^{-13}$  см.

Любую из величин  $\beta$  и  $a_t$  можно считать параметром, характеризующим силу потенциала, а  $r_0$  — параметром, определяющим радиус действия; однако  $\beta$  и  $a_t$  достаточно отличаются друг от друга, так что определение любых двух из трех данных величин позволяет определить и третью. Таким образом, согласно этой теории эффективного радиуса, все свойства потенциала, характеризующие энергию связи нуклонов и рассеяние при не слишком больших энергиях, определяются только двумя параметрами. Опытные данные показывают, что это действительно имеет место, и, таким образом, подтверждают лежащее в основе всей теории предположение о сильном взаимодействии на малых расстояниях.

**Обменные операторы.** Отмеченную выше спиновую зависимость сил взаимодействия между нейтроном и протоном можно выразить с помощью оператора спинового обмена  $\frac{1}{2}(1 + \sigma_N \cdot \sigma_P)$ , где  $\sigma_N$  и  $\sigma_P$  — спиновые матрицы Паули (33.3) соответственно для нейтрона и протона. Как показано в задаче 18, подобный оператор умножает триплетную (симметричную) спиновую функцию на  $+1$ , а синглетную (антисимметричную) на  $-1$ . Из предыдущего следует, что коэффициент при обменной части взаимодействия между нейтроном и протоном равен примерно одной пятой коэффициента при части, не связанной с обменом спинами.

Оператор пространственного обмена <sup>1)</sup> при четном  $l$  умножает волновую функцию на  $+1$ , а при нечетном  $l$  на  $-1$ ; он не влияет на полученные до сих пор результаты, так как все они относились к случаю  $l = 0$ . В § 19 было показано, что при более высокой энергии рассеиваемых частиц заметную роль может играть парциальная волна с  $l = 1$ . Если фаза  $\delta_1$  мала, а фазами более высокого порядка можно пренебречь, то формулу (19.32) приближенно можно представить в виде

$$\sigma(\theta) \approx \frac{1}{k^2} (\sin^2 \delta_0 + 3 \delta_1 \sin 2\delta_0 \cos \theta).$$

Для достаточно высоких значений энергии, когда фаза  $\delta_1$  уже заметна, величина  $\delta_0$  вероятнее всего лежит в пределах от  $0$  до  $90^\circ$ , а знак части, характеризующей угловую асимметрию, определяется знаком  $\delta_1$ .

Если взаимодействие в основном не связано с пространственным обменом, то при  $l = 1$  потенциал будет отрицательным (притягивающим), и фаза  $\delta_1$  будет положительна. В этом случае нейтроны, падающие на протоны, будут рассеиваться в основном вперед как в системе центра инерции, так и в лабораторной системе. Если, наоборот, главную роль во взаимодействии играет оператор пространственного обмена, то при  $l = 1$  потенциал будет отталкивающим, а фаза  $\delta_1$  будет отрицательна. При этом в системе центра инерции нейтроны будут рассеиваться главным образом назад, а в лабораторной системе — под прямым углом к направлению падения; протоны отдачи в обеих системах координат будут двигаться в основном в направлении первичного пучка. Наглядно этот процесс можно рассматривать как рассеяние за счет обычных сил, но сопровождаемое переходом нейтрона в протон и наоборот.

Опыты по рассеянию нейтронов больших энергий показывают, что в системе центра инерции дифференциальное эффективное сечение почти симметрично относительно направления  $90^\circ$ . Если бы оно было в точности симметрично, то вернее и проще всего было бы

<sup>1)</sup> Его ввел Майорана [29] в качестве модификации первоначального предложения Гейзенберга [30].

считать, что обращаются в нуль все фазы либо для четного, либо для нечетного  $l$  (см. задачу 19). Первый случай невозможен, так как известно, что  $\delta_0 \neq 0$ . Таким образом, приближенно взаимодействие нейтрон — протон, связанное с пространственным обменом, имеет вид так называемого *взаимодействия Сербера*: коэффициенты при обменной и необменной частях потенциальной энергии равны по величине и имеют одинаковые знаки, так что в состояниях с нечетными  $l$  взаимодействие отсутствует.

**Рассеяние протонов протонами.** Рассеяние быстрых протонов в водороде можно рассматривать методами, изложенными в § 20, если только соответствующим образом учесть тождественность и спин двух сталкивающихся протонов (см. § 33). Если энергия взаимодействия имеет чисто кулоновский вид, то, комбинируя выражения (20.10) и (33.2), мы получаем *формулу Мотта* [31], которая в системе центра инерции имеет вид

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{e^2}{2\mu v^2}\right)^2 \left\{ \operatorname{cosec}^4 \frac{1}{2} \theta + \sec^4 \frac{1}{2} \theta - \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} \theta \sec^2 \frac{1}{2} \theta \cos \left[ \frac{e^2}{\hbar v} \ln \left( \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \theta \right) \right] \right\}. \quad (41.16)$$

Здесь  $\mu$  — половина массы протона и  $v$  — относительная скорость протонов. Эта формула согласуется с опытными данными только при энергиях бомбардировки, меньших 0,2 Мэв; при более высоких значениях энергии протоны сближаются столь тесно, что становится заметным специфически ядерное взаимодействие. Вплоть до энергии в несколько Мэв в формуле (20.24) нужно учитывать только член с  $\delta_0$ . Следует помнить, что в силу принципа Паули парциальная волна с  $l = 0$  соответствует синглетному спиновому состоянию. Таким образом, данные о триплетном взаимодействии протонов с протонами можно получить лишь из опытов с быстрыми протонами. Для синглетных взаимодействий можно применять теорию эффективного радиуса <sup>1)</sup>, что дает примерно такие же параметры, как и для синглетного взаимодействия протона с нейтроном.

### ЗАДАЧИ

1. В рамках модели Томаса — Ферми найти выражение для плотности электронов  $n(r)$  через безразмерную функцию  $\chi$  и показать, что радиус сферы, внутри которой содержится заданная часть всех электронов, пропорционален  $Z^{-1/3}$ .

2. С помощью метода неопределенных множителей Лагранжа показать, что условие стационарности интеграла в (38.9), где функции  $u$  варьируются, но остаются нормированными, дается уравнением (38.11).

<sup>1)</sup> См. работу Бете [28].

3. В случае связи Ресселя — Саундерса для двух  $p$ -электронов ( $l = 1$ )  $L$  может принимать значения 0, 1 или 2, а  $S$  — значения 0 или 1. Все ли комбинации  $L$  и  $S$  допустимы, если значения  $n$  у двух электронов различны? Будут ли все они возможны при одинаковых значениях  $n$ ?

4. Показать, что в случае связи Ресселя — Саундерса спиновые собственные функции оператора  $S^2$ , принадлежащие различным значениям квантового числа  $S$ , будут ортогональны. С помощью метода, аналогичного применявшемуся в § 10, показать, что собственные функции оператора энергии, соответствующие различным собственным значениям, будут ортогональны.

5. Показать непосредственным вычислением, что оператор  $J = L + S$  коммутирует с  $L \cdot S$ , а следовательно, и с гамилтонианом (39.1).

6. С помощью матриц  $M$ , определяемых равенствами (24.15), показать, что волновые функции (39.6) принадлежат указанным там собственным значениям операторов  $J^2$  и  $J_z$ .

7. Оценить отношение линейно зависящего от  $H$  члена в (39.9) к кинетической энергии для атома водорода в магнитном поле с напряженностью  $10^5$  эрстед.

8. Оценить напряженность магнитного поля, при которой в атоме щелочного металла возмущающие члены в (39.11) имеют одинаковую величину.

9. Для слабого магнитного поля построить диаграмму относительно расположения и интенсивностей зеемановских  $\pi$ - и  $\sigma$ -компонент для переходов  $^2P \rightarrow ^2S$  в атоме щелочного металла. Построить аналогичную диаграмму для сильного поля.

10. Показать, что при колебаниях молекулы отношение пути, пройденного ядрами за период электронного движения, к размерам молекулы по порядку величины составляет  $(m/M)^{3/4}$ , а при вращении равно  $(m/M)$ . Оправдывают ли эти результаты применение адиабатического приближения?

11. Приближается ли при больших  $R$  межядерный потенциал (40.14), найденный для молекулы водорода, к выражению  $-1/R^6$ , полученному в § 27? Если нет, то почему?

12. Вывести и решить волновое уравнение для жесткого ротатора, т. е. системы, у которой кинетическая энергия вращения относительно некоторой оси равна нулю, а момент инерции относительно перпендикулярных ей осей одинаков.

13. Вывести правила отбора для переходов между вращательными уровнями энергии двухатомной молекулы.

14. Рассмотреть правила отбора для колебательных переходов в двухатомной молекуле с одинаковыми и с различными ядрами.

15. Подсчитать вклады членов пятой и шестой степеней в колебательную энергию двухатомной молекулы (40.18). Показать, что ими действительно можно было пренебречь при вычислении части энергии (40.21), пропорциональной  $(v + 1/2)^2$ . Необходимые для расчета матричные элементы величин  $x^5$  и  $x^6$  для гармонического осциллятора найти с помощью матричных методов.

16. Предположить, что в синглетном и триплетном состояниях взаимодействие между нейтроном и протоном одинаково и его можно охарактеризовать с помощью прямоугольной потенциальной ямы. Можно ли тогда найти такое значение  $a$ , для которого будут правильно получаться как энергия связи дейтрона ( $l = 0$ ), так и эффективное сечение рассеяния медленных нейтронов? Если да, то чему оно будет равно?

17. Исходя из известного значения энергии связи дейтрона и полагая  $a = 2,00 \cdot 10^{-13}$  см, вычислить с помощью (41.11) и (41.12) эффективный радиус для триплетного взаимодействия, характеризуемого прямоугольной потенциальной ямой. Сравнить полученные результаты друг с другом и со значением  $r_0$ , приводимым в тексте.

18. Показать, что оператор спинового обмена  $1/2(1 + \sigma_N \cdot \sigma_P)$  действительно обладает свойствами, указанными в тексте.

19. Предположить, что дифференциальное эффективное сечение рассеяния нейтронов протонами в системе центра инерции симметрично относительно направления, проведенного под углом  $90^\circ$  к падающему пучку. Различием между триплетным и синглетным взаимодействиями пренебречь. Показать, что это эквивалентно требованию, чтобы для всех углов  $\theta$  выполнялось соотношение

$$\sum_l \sum_{l'} (2l + 1) (2l' + 1) \sin \delta_l \cdot \sin \delta_{l'} \cdot \cos(\delta_l - \delta_{l'}) P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = 0,$$

где все  $l$  — четные, а все  $l'$  — нечетные. Показать, что для выполнения этого равенства необходимо и достаточно, чтобы  $\delta_l = 0 \pmod{\pi}$  или  $\delta_l = \eta \pmod{\pi}$ , а все  $\delta_{l'}$  равны или  $0 \pmod{\pi}$ , или  $\eta + \pi/2 \pmod{\pi}$ , где  $\eta$  — произвольное число<sup>1)</sup>. Показать также, что если только одна из фаз  $\delta_{l'}$  отлична от  $0 \pmod{\pi}$ , то необходимым и достаточным условием выполнения приведенного выше соотношения будет равенство всех  $\delta_l$  или  $0 \pmod{\pi}$ , или  $\delta_{l'} + \pi/2 \pmod{\pi}$ .

20. С помощью результатов § 20 найти, как относится сечение рассеяния протонов протонами в том случае, когда отлична от нуля только фаза  $\delta_0$ , к сечению Мотта, определяемому формулой (41.16).

21. Невырожденная волновая функция  $\psi_0$  основного состояния атома или ядра принадлежит определенному значению квантового числа  $J_0$ , определяющего полный момент количества движения. Пользуясь тем, что в состоянии  $\psi$  диагональный матричный элемент оператора  $\Omega$  равен нулю, если  $\overline{\psi} \Omega \psi$  не обладает сферической симметрией, показать, что среднее значение  $\Omega$  в состоянии  $\psi_0$  также равно нулю, если только в разложении функции  $\Omega \psi_0$  по собственным функциям оператора  $J^2$  нет члена, соответствующего квантовому числу  $J_0$ . Показать также, что если не выполняется условие  $J_0 \geq 1/2$ , то среднее значение оператора  $\Omega$  для  $2^l$ -мультипольного электрического или магнитного момента равно нулю (см. конец § 25).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Condon E. U., Shortley G. H., The Theory of Atomic Spectra, Cambridge — London — New York, 1935. (Имеется русский перевод: Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, 1949.)
2. Meggers W. F., Science, **105**, 514 (1947).
3. Seaborg G. T., статья в сборнике „Modern Physics for the Engineer”, ed. L. N. Ridenour, New York, 1954.
4. Thomas L. H., Proc. Cambr. Phil. Soc., **23**, 542 (1927).
5. Fermi E., Zs. f. Phys., **48**, 73 (1928).
6. Bush V., Caldwell S. H., Phys. Rev., **38**, 1898 (1931).
7. Hartree D. R., Proc. Cambr. Phil. Soc., **24**, 111 (1928).
8. Slater J. C., Phys. Rev., **35**, 210 (1930).
9. Фок В., Zs. f. Phys., **61**, 126 (1930).
10. Thomas L. H., Nature, **117**, 514 (1926).
11. Russell H. N., Saunders F. A., Astrophys. Journ., **61**, 38 (1925).
12. Fermi E., Zs. f. Phys., **59**, 680 (1929).
13. Heisenberg W., Jordan P., Zs. f. Phys., **37**, 263 (1926).
14. Schiff L. I., Snyder H., Phys. Rev., **55**, 59 (1939).

<sup>1)</sup> Символ  $\text{mod } \pi$  означает, что к предыдущему выражению можно прибавить  $\pi$ , умноженное на произвольное целое число.

15. Herzberg G., *Molecular Spectra and Molecular Structure*, 2d ed. New York, 1950.
16. Pauling L., Wilson E. B., Jr., *Introduction to Quantum Mechanics*, New York, 1935.
17. Born M., Oppenheimer J. R., *Ann. d. Phys.*, **84**, 457 (1927).
18. Heitler W., London F., *Zs. f. Phys.*, **44**, 455 (1927).
19. Morse P. M., *Phys. Rev.*, **34**, 57 (1929).
20. Bethe H. A., *Elementary Nuclear Theory*, New York, 1947. (Имеется русский перевод: Г. Бете, Лекции по теории ядра, ИЛ, 1949.)
21. Rosenfeld L., *Nuclear Forces*, New York, 1948.
22. Gamow G., Critchfield C. L., *Theory of Atomic Nucleus and Nuclear Energysources*, Oxford — New York, 1949.
23. Fermi E., *Nuclear Physics*, Chicago, 1950. (Имеется русский перевод: Э. Ферми, Ядерная физика, ИЛ, 1951.)
24. Blatt J. M., Weisskopf V. F., *Theoretical Nuclear Physics*, New York, 1952. (Имеется русский перевод: Д ж. Б л а т т, В. В а й с к о п ф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954.)
25. Sachs R. G., *Nuclear Theory*, Cambridge, 1953.
26. Bohr A., Mottelson B. R., *Kgl. Danske Vid. Sels. Mat.-fys. Medd.*, **27**, 16 (1953).
27. Schwinger J., Teller E., *Phys. Rev.*, **52**, 286 (1937).
28. Bethe H. A., *Phys. Rev.*, **76**, 38 (1949).
29. Majorana E., *Zs. f. Phys.*, **82**, 137 (1933).
30. Heisenberg W., *Zs. f. Phys.*, **77**, 1 (1932).
31. Mott N. F., *Proc. Roy Soc.*, **126A**, 259 (1930).
- 32\*. Ельяшевич М. А., Спектры редких земель, М. —Л., 1953.
- 33\*. Гомбаш П., Статистическая теория атома и ее применения, ИЛ, 1951.
- 34\*. Волькенштейн М. В., Строение и физические свойства молекул, Изд. АН СССР, 1955.
- 35\*. Эйринг Г., Уолтер Дж., Кимбалл Дж., Квантовая химия, ИЛ, 1948.
- 36\*. Герцберг Г., Спектры и строение двухатомных молекул, ИЛ, 1949.
- 37\*. Герцберг Г., Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул, ИЛ, 1949.
- 38\*. Волькенштейн М. В., Ельяшевич М. А., Степанов Б. И., Колебания молекул, т. 1 и 2, М. —Л., 1949.
- 39\*. Ландау Л. Д., Смородинский Я. А., Лекции по теории атомного ядра, М. —Л., 1955.
- 40\*. Ахиезер А., Померанчук И., Некоторые вопросы теории ядра, М. —Л., 1950.
- 41\*. Соколов А. А., Иваненко Д. Д., Квантовая теория поля, М. —Л., 1952.
- 42\*. Росси Б., Частицы больших энергий, ИЛ, 1955.
- 43\*. Экспериментальная ядерная физика, под ред. Э. Сегре, т. 1 и 2, ИЛ, 1955.



## РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

В настоящей главе нерелятивистское уравнение Шредингера будет обобщено на случай движения частицы со скоростью, близкой к скорости света. Это обобщение можно произвести различными путями, и все они совместимы с формулами преобразования Лоренца, известными из специальной теории относительности<sup>1)</sup>. Характерной особенностью релятивистских волновых уравнений является то, что спин частицы вводится в теорию с самого начала, и его нельзя добавлять впоследствии, как это сделал Паули в рамках нерелятивистской теории Шредингера. Эта особенность служит полезным критерием, позволяющим судить, можно ли применять то или иное уравнение для описания частиц определенного вида. Мы рассмотрим два релятивистских уравнения: во-первых, предложенное Шредингером уравнение для частиц со спином нуль, которое впоследствии было применено для описания  $\pi$ -мезонов, и, во-вторых, уравнение Дирака для частицы со спином  $1/2$ , описывающее электрон. При обсуждении этих уравнений мы будем уделять основное внимание вытекающим из них следствиям и не будем пытаться доказать их инвариантность относительно преобразований Лоренца. Поэтому мы не будем пользоваться более изящными четырехмерными обозначениями специальной теории относительности, а воспользуемся по-прежнему трехмерными векторными обозначениями. В инвариантности уравнения обычно можно убедиться по его симметрии относительно пространственных координат и времени.

### § 42. Релятивистское уравнение Шредингера

Вводя свое нерелятивистское волновое уравнение, Шредингер предложил также обобщенное уравнение, учитывающее требования специальной теории относительности<sup>2)</sup>. Оно естественно вытекает из релятивистского обобщения нерелятивистской фор-

<sup>1)</sup> Обзор специальной теории относительности можно найти, например, в книгах Бергмана [1], ч. 1 или Толмэна [2], гл. 2—4. (См. также книгу Ландау и Лифшица [10]. — *Прим. перев.*)

<sup>2)</sup> См. работу Шредингера [3], § 6.

мулы классической динамики:

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (42.1)$$

Как известно, в теории относительности зависимость энергии свободной частицы от импульса вместо (42.1) принимает вид

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4, \quad (42.2)$$

причем теперь в  $E$  входит и энергия покоя  $mc^2$ . В соответствии с (6.13) заменим величины  $E$  и  $p$  операторами

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow -i\hbar \text{grad}. \quad (42.3)$$

**Свободная частица.** Подобно тому как подстановка выражений (42.3) в (42.1) приводит к уравнению (6.11), так и релятивистское волновое уравнение для свободной частицы можно получить, подставляя выражения (42.3) в (42.2) и действуя полученным оператором на волновую функцию  $\psi(\mathbf{r}, t)$ . В результате будем иметь

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi + m^2 c^4 \psi. \quad (42.4)$$

Уравнение (42.4) допускает решения в виде плоских волн

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (42.5)$$

Они представляют собой собственные функции операторов  $E$  и  $p$ , определяемых выражениями (42.3), и принадлежат, соответственно, собственным значениям  $\hbar\omega$  и  $\hbar\mathbf{k}$ . Выражение (42.5), очевидно, удовлетворяет уравнению (42.4), если

$$\hbar\omega = \pm (\hbar^2 c^2 \mathbf{k}^2 + m^2 c^4)^{1/2}. \quad (42.6)$$

Положительный и отрицательный знаки перед корнем в (42.6) соответствуют неопределенности знака энергии, имеющей место и в классической формуле (42.2). Пока что мы возьмем только положительное значение квадратного корня, а к решениям с отрицательной энергией вернемся в конце § 44.

Выражения для плотности заряда и тока можно найти так же, как и в § 7. Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) + \text{div } \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (42.7)$$

инвариантно относительно преобразований Лоренца. Умножим (42.4) слева на  $\bar{\psi}$ , а комплексно сопряженное уравнение — слева на  $\psi$  и вычтем второе уравнение из первого. Вводя вещественные величины

$$P(\mathbf{r}, t) = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right), \quad (42.8)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} (\bar{\psi} \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \bar{\psi}),$$

получаем для них уравнение (42.7). Выражение (42.8) для  $S$  совпадает с нерелятивистской формулой (7.3), а выражение для  $P$ , как можно показать, в нерелятивистском приближении переходит в (7.1) (см. задачу 2). Следует отметить что значение  $P$  (42.8) не является определенно положительным, и потому его нельзя интерпретировать как плотность вероятности координат. Однако его можно умножить на  $e$  и интерпретировать как плотность электрического заряда, ибо последняя, оставаясь вещественной, может иметь любой знак.

**Электромагнитные потенциалы.** Чтобы включить в волновое уравнение взаимодействие с электромагнитным полем, можно воспользоваться тем обстоятельством, что потенциалы  $\varphi$  и  $(1/c)\mathbf{A}$  имеют такие же трансформационные свойства, как  $E$  и  $\mathbf{p}$ . Пусть частица обладает зарядом  $e$ . По аналогии с нерелятивистским выражением (23.14), заменим (42.2) равенством

$$(E - e\varphi)^2 = (c\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2c^4. \quad (42.9)$$

Подставляя сюда (42.3), получаем

$$\begin{aligned} & \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2ie\hbar\varphi \frac{\partial}{\partial t} - ie\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} + e^2\varphi^2 \right) \psi = \\ & \doteq [ -\hbar^2 c^2 \nabla^2 + 2ie\hbar c \mathbf{A} \cdot \text{grad} + ie\hbar c (\text{div } \mathbf{A}) + e^2 \mathbf{A}^2 + m^2 c^4 ] \psi. \end{aligned} \quad (42.10)$$

Теперь можно установить связь между уравнением (42.10) и соответствующим нерелятивистским уравнением (23.24). Произведем в (42.10) замену

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi'(\mathbf{r}, t) e^{-imc^2 t/\hbar} \quad (42.11)$$

и допустим, что результат действия оператора  $i\hbar(\partial/\partial t)$  на  $\psi'$  по порядку величины равен  $e\varphi\psi'$  (и мал по сравнению с  $mc^2\psi'$ ). Это означает, что из полной энергии вычитается энергия покоя, предполагаемая большой по сравнению с остающейся частью энергии. Дифференцируя (42.11) по времени, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left( \frac{\partial \psi'}{\partial t} - \frac{imc^2}{\hbar} \psi' \right) e^{-imc^2 t/\hbar}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \left( \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t^2} - \frac{2imc^2}{\hbar} \frac{\partial \psi'}{\partial t} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi' \right) e^{-imc^2 t/\hbar}. \end{aligned}$$

Первыми членами в каждой из этих производных можно пренебречь, равно как и двумя последними слагаемыми в левой части (42.10); тогда она примет вид

$$\left( 2i\hbar mc^2 \frac{\partial \psi'}{\partial t} + m^2 c^4 \psi' - 2emc^2 \varphi \psi' \right) e^{-imc^2 t/\hbar}.$$

Очевидно, в этом приближении уравнение (42.10) совпадает с (23.24), если заменить  $\psi'$  на  $\psi$ .

Не нарушая инвариантности теории, невозможно включить в уравнение (42.10) спиновые матрицы Паули (33.3). Это и неудивительно, так как они преобразуются как компоненты трехмерного, а не четырехмерного вектора, а  $\psi$  имеет не две компоненты [как спиновые функции (33.4)], а только одну. Таким образом, релятивистское уравнение Шредингера описывает частицу без спина.

Из вида соотношения (42.9) следует, что к уравнению (42.10) нельзя произвольно прибавить член „потенциальной энергии”, подобно тому, как это делалось в уравнении (23.24). Прежде всего необходимо исследовать трансформационные свойства любого такого члена относительно преобразований Лоренца. Если он преобразуется как часть четырехмерного вектора, то и остальная часть этого вектора также должна входить в уравнение по тому же закону, по которому  $\varphi$  и  $(1/c) \mathbf{A}$  входят в (42.9). Если же он инвариантен относительно преобразований Лоренца, то его можно добавить к энергии покоя  $mc^2$ .

**Разделение переменных.** Если потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  не зависят от времени, то переменные  $\mathbf{r}$  и  $t$  в уравнении (42.10) разделяются. Полагая

$$\psi(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar}$$

и подставляя это выражение в (42.10), получаем

$$(E - e\varphi)^2 u = [-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + 2ie\hbar c \mathbf{A} \cdot \text{grad} + ie\hbar c (\text{div} \mathbf{A}) + e^2 \mathbf{A}^2 + m^2 c^4] u. \quad (42.12)$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда  $\mathbf{A} = 0$ , а функция  $\varphi(\mathbf{r})$  сферически симметрична. Тогда уравнение (42.12) принимает вид

$$(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) u(\mathbf{r}) = [E - e\varphi(\mathbf{r})]^2 u(\mathbf{r}) \quad (42.13)$$

и допускает разделение переменных в сферических координатах (см. § 14):

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$\left[ -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = \left[ \frac{(E - e\varphi)^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right] R, \quad l=0, 1, 2, \dots \quad (42.14)$$

Если положить  $E = mc^2 + E'$  и допустить, что величины  $E'$  и  $e\varphi$  пренебрежимо малы по сравнению с  $mc^2$ , то (42.14) сводится к нерелятивистскому радиальному уравнению. При этом выражение в скобках в правой части (42.14) будет равно  $(2m/\hbar^2)(E' - e\varphi)$ , как и должно быть.

**Уровни энергии в кулоновском поле.** Если положить  $e\varphi = -Ze^2/r$ , то с помощью результатов § 16 легко найти точное решение урав-

нения (42.14). Полученное уравнение могло бы характеризовать атом водорода, если бы спин частицы, им описываемой, не был равен нулю (такая частица не может быть электроном).

Положим  $\varrho = \alpha r$ , тогда уравнение (42.14) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\varrho^2} \frac{d}{d\varrho} \left( \varrho^2 \frac{dR}{d\varrho} \right) + \left( \frac{\lambda}{\varrho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1) - \gamma^2}{\varrho^2} \right) R = 0, \quad (42.15)$$

$$\gamma \equiv \frac{Ze^2}{\hbar c}, \quad \alpha^2 \equiv \frac{4(m^2 c^4 - E^2)}{\hbar^2 c^2}, \quad \lambda \equiv \frac{2E\gamma}{\hbar c \alpha}.$$

Это уравнение будет совпадать с (16.7), если заменить в нем  $l(l+1)$  на  $l(l+1) - \gamma^2$ . Параметр  $\lambda$  определяется из граничных условий, накладываемых на функцию  $R$  при  $\varrho = \infty$ , а  $E$  можно выразить через  $\lambda$ , исключая  $\alpha$  из последних двух уравнений (42.15):

$$E = mc^2 \left( 1 + \frac{\gamma^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2}. \quad (42.16)$$

Так же, как и в случае (16.7), можно установить, что в данном случае решения, конечные при  $\varrho = 0$  и  $\infty$ , существуют лишь при условии

$$\lambda = n' + s + 1, \quad (42.17)$$

где  $n'$  — нуль или положительное целое число, а  $s$  — неотрицательный корень уравнения

$$s(s+1) = l(l+1) - \gamma^2. \quad (42.18)$$

Очевидно, имеются два корня

$$s = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} [(2l+1)^2 - 4\gamma^2]^{1/2}, \quad (42.19)$$

один из которых при  $l > 0$  положителен, а другой отрицателен. При  $l = 0$  оба корня  $s$  отрицательны; однако константа  $\gamma$  очень мала (если  $e$  — заряд электрона, то  $\gamma$  очень близка к  $Z/137$ ), так что для значений  $Z$ , представляющих физический интерес,  $s$  близко к нулю [если взять верхний знак в (42.19)]. Кроме того, хотя вблизи точки  $r = 0$  функция  $R(r)$  ведет себя как  $r^s$  и, следовательно, имеет сингулярность в начале координат, интеграл от функции  $P(\mathbf{r})$ , определяемой формулой (42.8), сходится, так что полный электрический заряд остается конечным. Таким образом, при всех  $l$  мы будем брать верхний знак (42.19). Тогда равенство (42.17) дает

$$\lambda = n' + \frac{1}{2} + \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 - \gamma^2 \right]^{1/2}. \quad (42.20)$$

Формулы (42.16) и (42.20) описывают тонкую структуру нерелятивистских уровней энергии (16.15). В этом можно убедиться,

разлагая выражения для энергии в ряд по степеням  $\gamma^2$ . С точностью до членов порядка  $\gamma^4$  получаем

$$E = mc^2 \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{2n^2} - \frac{\gamma^4}{2n^4} \left( \frac{n}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right], \quad (42.21)$$

где  $n = n' + l + 1$  — полное квантовое число, определяемое равенством (16.14) и принимающее только положительные целые значения. Первый член в правой части (42.21) представляет энергию покоя. Второй член

$$- \frac{mc^2 \gamma^2}{2n^2} = - \frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

соответствует (16.15). Третий член характеризует энергию тонкой структуры и снимает  $l$ -вырождение состояний с данным значением  $n$ . Как видно из (42.21), полная „ширина” системы подуровней, образующих тонкую структуру, составляет (при данном  $n$ )

$$\frac{mc^2 \gamma^4}{n^3} \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}}. \quad (42.22)$$

Эта величина значительно превышает экспериментально наблюдаемую в спектре атома водорода.

### § 43. Релятивистское уравнение Дирака

Исходным пунктом для нахождения релятивистского волнового уравнения Дираку<sup>1)</sup> послужила гамильтонова форма волнового уравнения (23.1):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = H\psi(\mathbf{r}, t). \quad (43.1)$$

Классический релятивистский гамильтониан свободной частицы дается положительным квадратным корнем из правой части (42.2). Однако, если подставить его в (43.1) и заменить  $\mathbf{p}$  оператором  $-i\hbar \text{grad}$ , то получающееся волновое уравнение будет несимметрично по отношению к временной и пространственным производным, а потому не будет релятивистски инвариантно. В связи с этим Дирак видоизменил гамильтониан так, чтобы и пространственные производные входили в него линейно.

<sup>1)</sup> См. работу Дирака [4] или его книгу [5], гл. 11. (Более подробно с теорией Дирака можно познакомиться также по книгам Фока [11], де-Бройли [12], Паули [13, 14], Соколова и Иваненко [15] и Корсона [16]. В последней книге содержится подробная библиография, относящаяся как к уравнению Дирака, так и к другим релятивистским волновым уравнениям. Несколько иной подход имеется в работах [17, 18]. — Прим. перев.)

**Уравнение для свободной частицы.** Простейший гамильтониан, линейный относительно импульса и массы, имеет вид

$$H = -\alpha \cdot \mathbf{p} - \beta mc^2. \quad (43.2)$$

Подставляя это выражение в (43.1), получаем волновое уравнение

$$(E + \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)\psi = 0$$

или

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \alpha \cdot \text{grad} + \beta mc^2 \right) \psi = 0. \quad (43.3)$$

Рассмотрим теперь четыре величины  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  и  $\beta$ . Если уравнение (43.3) описывает свободную частицу, то в гамильтониане не должно быть членов, зависящих от пространственных координат или от времени. Действительно, наличие их означало бы соответствующую зависимость энергии, что приводило бы к возникновению сил. Производные по координатам и времени, фигурирующие в  $E$  и  $\mathbf{p}$ , также не могут входить в  $\alpha$  и  $\beta$ , так как уравнение (43.3) должно быть линейно относительно этих производных. Итак, величины  $\alpha$  и  $\beta$  не зависят от  $\mathbf{r}, t, \mathbf{p}$  и  $E$  и, следовательно, коммутируют со всеми этими переменными. Это еще не означает, что  $\alpha$  и  $\beta$  представляют собой числа, так как они могут не коммутировать друг с другом.

Дополнительные сведения об  $\alpha$  и  $\beta$  можно получить, потребовав, чтобы любое решение (43.3) удовлетворяло и релятивистскому уравнению Шредингера (42.4) (обратное — необязательно). Это требование является разумным, так как в отсутствие внешних полей для волновых пакетов, удовлетворяющих (43.3) и характеризующих движение „почти классической“ частицы, должно выполняться классическое соотношение (42.2) между энергией, импульсом и массой (см. задачу 1). Поэтому умножим уравнение (43.3) слева на  $(E - \alpha \cdot \mathbf{p} - \beta mc^2)$ ; при этом получим

$$\begin{aligned} & \{E^2 - c^2 [\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 + (\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x) p_x p_y + \\ & \quad + (\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y) p_y p_z + (\alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z) p_z p_x] - m^2 c^4 \beta^2 - \\ & - mc^3 [(\alpha_x \beta + \beta \alpha_x) p_x + (\alpha_y \beta + \beta \alpha_y) p_y + (\alpha_z \beta + \beta \alpha_z) p_z] \} \psi = 0. \end{aligned} \quad (43.4)$$

Здесь подразумевается, что  $E$  и  $\mathbf{p}$  выражены через дифференциальные операторы по формулам (42.3). Уравнение (43.4) совпадает с (42.4), если величины  $\alpha, \beta$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \alpha_x^2 &= \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1, \\ \alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x &= \alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y = \alpha_x \alpha_z + \alpha_z \alpha_x = 0, \\ \alpha_x \beta + \beta \alpha_x &= \alpha_y \beta + \beta \alpha_y = \alpha_z \beta + \beta \alpha_z = 0. \end{aligned} \quad (43.5)$$

Про такие четыре величины говорят, что они попарно *антикоммутируют* и квадраты их равны единице.

Поскольку  $\alpha$  и  $\beta$  не коммутируют, а антикоммутируют друг с другом, они не могут быть числами. В гл. VI мы видели, что величины такого типа можно выразить с помощью матриц, причем матричное представление оказывается удобным при проведении вычислений. Прежде всего заметим, что поскольку гамильтониан (43.2) эрмитов, то эрмитовыми должны быть и все четыре матрицы  $\alpha$ ,  $\beta$ . Следовательно, они являются квадратными. Задача заключается в том, чтобы найти явный вид этих матриц в каком-нибудь представлении, когда, например, одна из них диагональна (в связи с чем другие матрицы уже не будут диагональны, так как они не коммутируют с данной). Простоты ради потребуем, чтобы представление имело наименьший возможный ранг.

**Матрицы  $\alpha$  и  $\beta$ .** Квадрат каждой из четырех матриц равен единице, и, следовательно, их собственные значения равны  $+1$  и  $-1$ . Потребуем (вполне произвольно), чтобы матрица  $\beta$  была диагональной, и расположим ее строки и столбцы так, чтобы все собственные значения, равные  $+1$ , были сгруппированы в матрицу ранга  $n$ , а все собственные значения, равные  $-1$ , — в матрицу ранга  $m$ . Поскольку  $\beta$  антикоммутирует с  $\alpha$ , она не может быть постоянной и, следовательно, оба числа,  $n$  и  $m$ , должны быть отличны от нуля. Схематически  $\beta$  можно представить в виде

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (43.6)$$

что сокращенно изображает матрицу

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots \end{array} \right). \quad (43.7)$$

Сплошные линии в (43.7) разделяют входящие в (43.6) субматрицы  $1$ ,  $0$ ,  $0$  и  $-1$ <sup>1)</sup>.

Рассмотрим теперь матричное уравнение  $\alpha_x \beta + \beta \alpha_x = 0$ ,  $jl$ -й элемент которого имеет вид

$$(\alpha_x)_{ji}(\beta_j + \beta_i) = 0.$$

<sup>1)</sup> Матрицы  $1$  и  $0$  совпадают с единичной и нулевой матрицами  $1$  и  $0$ , определенными в § 21.



Здесь  $\beta_j$  и  $\beta_l$  представляют собой два собственных значения матрицы  $\beta$ , расположенные в соответствии с (43.6) или (43.7). Если  $\beta_j = \beta_l$ , то  $(\alpha_x)_{jl} = 0$ ; с другой стороны, если знаки  $\beta_j$  и  $\beta_l$  противоположны, то  $(\alpha_x)_{jl}$  не обязательно должно быть равно нулю. Поэтому матрицу  $\alpha_x$  можно записать в виде

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{x1} \\ \alpha_{x2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (43.8)$$

где  $\alpha_{x1}$  имеет  $n$  строк и  $m$  столбцов, а  $\alpha_{x2}$  имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов. Поскольку при возведении (43.8) в квадрат получается единичная матрица, мы имеем

$$\alpha_{x1}\alpha_{x2} = 1, \quad \alpha_{x2}\alpha_{x1} = 1. \quad (43.9)$$

Единичная матрица в правой части первого из уравнений (43.9) имеет  $n$  строк и столбцов, а во втором уравнении —  $m$  строк и столбцов. Легко показать, что коль скоро  $n$  и  $m$  равны 1 и 2 или 2 и 1, то невозможно найти матрицы, удовлетворяющие соотношениям (43.9). Поэтому рассмотрим две возможности, приводящие к матрицам минимального ранга<sup>1)</sup>:  $n = m = 1$  и  $n = m = 2$ . Матрицы  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$  можно, очевидно, записать в таком же виде, как и (43.8).

Мы уже получили три матрицы вида (43.6) или (43.8) при  $n = m = 1$ . Это спиновые матрицы Паули (33.3):

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (43.10)$$

Они подчиняются соотношениям

$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z, \quad (43.11)$$

а также двум другим, получающимся циклической перестановкой  $x$ ,  $y$  и  $z$ . У любой матрицы с двумя строками и столбцами имеется четыре элемента, так что ее можно представить в виде линейной комбинации четырех линейно независимых матриц  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и 1. В связи с этим легко показать, что нельзя найти матрицу, антикоммутирующую со всеми тремя матрицами (43.10).

Поэтому рассмотрим случай  $n = m = 2$  и положим для простоты  $\alpha_{x1} = \alpha_{x2}$  и т. д. Соотношения (43.9) теперь примут вид  $\alpha_{x1}^2 = 1$ , а равенство  $\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x = 0$  перейдет в  $\alpha_{x1}\alpha_{y1} + \alpha_{y1}\alpha_{x1} = 0$ . Из этих и других аналогичных соотношений, получаемых циклической перестановкой  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , сразу же получим, что  $\alpha_{x1}$  можно прирав-

<sup>1)</sup> Матрицы более высокого ранга соответствуют частицам со спином, превышающим  $1/2$ .

нять  $\sigma_x$  и т. д. Таким образом, находим явные представления матриц  $\beta$ ,  $\alpha$ :

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (43.12)$$

Очевидно, эти матрицы эрмитовы. Для краткости будем обозначать их следующим образом:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}. \quad (43.13)$$

Здесь каждый „элемент” представляет собой матрицу с двумя строками и столбцами<sup>1)</sup>.

**Решения для свободной частицы.** Теперь, когда величины  $\alpha$  и  $\beta$  представлены в виде матриц, уравнение (43.3) будет иметь смысл, только если и сама волновая функция  $\psi$  является матрицей с четырьмя строками и одним столбцом:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \\ \psi_3(\mathbf{r}, t) \\ \psi_4(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (43.14)$$

Тогда уравнение (43.3) фактически представляет собой систему четырех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, линейных и однородных относительно четырех компонент  $\psi$ .

Будем искать решения в виде плоских волн:

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) = u_j e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (43.15)$$

где  $u_j$  — числа. Выражения (43.15) являются собственными функциями операторов энергии и импульса (42.3), принадлежащими соответственно собственным значениям  $\hbar\omega$  и  $\hbar\mathbf{k}$ . Подставляя (43.15)

<sup>1)</sup> Релятивистский характер уравнения Дирака становится более явным, если уравнение (43.3) умножить слева на  $\beta$ . Это увеличивает симметрию между производными по пространственным координатам и по времени, так как четыре матрицы  $\beta$ ,  $\beta\alpha$  имеют такие же свойства, как и  $\beta$ ,  $\alpha$ .

и (43.12) в (43.3),<sup>†</sup> получаем систему алгебраических уравнений для  $u_j$ , где теперь  $E = \hbar\omega$  и  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  — числа:

$$\begin{aligned} (E + mc^2)u_1 + cp_z u_3 + c(p_x - ip_y)u_4 &= 0, \\ (E + mc^2)u_2 + c(p_x + ip_y)u_3 - cp_z u_4 &= 0, \\ (E - mc^2)u_3 + cp_z u_1 + c(p_x - ip_y)u_2 &= 0, \\ (E - mc^2)u_4 + c(p_x + ip_y)u_1 - cp_z u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (43.16)$$

Эта система уравнений однородна относительно  $u_j$  и имеет решения, только если детерминант из коэффициентов обращается в нуль. Этот детерминант равен

$$(E^2 - m^2c^4 - c^2\mathbf{p}^2)^2,$$

и, следовательно, связь энергии с импульсом имеет вид (42.2).

Чтобы при заданном импульсе  $\mathbf{p}$  получить явные решения, нужно выбрать определенный знак энергии, например положить

$$E_+ = + (c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4)^{1/2}.$$

Тогда мы будем иметь два линейно независимых решения, которые удобно записать в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{cp_z}{E_+ + mc^2}, & u_2 &= -\frac{c(p_x + ip_y)}{E_+ + mc^2}, & u_3 &= 1, & u_4 &= 0, \\ u_1 &= -\frac{c(p_x - ip_y)}{E_+ + mc^2}, & u_2 &= \frac{cp_z}{E_+ + mc^2}, & u_3 &= 0, & u_4 &= 1. \end{aligned} \quad (43.17)$$

Аналогично выбрав перед квадратным корнем отрицательный знак

$$E_- = - (c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4)^{1/2},$$

получим два других решения, которые запишем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, & u_2 &= 0, & u_3 &= \frac{cp_z}{-E_- + mc^2}, & u_4 &= \frac{c(p_x + ip_y)}{-E_- + mc^2}, \\ u_1 &= 0, & u_2 &= 1, & u_3 &= \frac{c(p_x - ip_y)}{-E_- + mc^2}, & u_4 &= -\frac{cp_z}{-E_- + mc^2}. \end{aligned} \quad (43.18)$$

Каждое из этих четырех решений можно нормировать, умножая на величину

$$\left\{ 1 + \left[ \frac{c^2\mathbf{p}^2}{(E_+ + mc^2)^2} \right] \right\}^{-1/2};$$

тогда  $\psi^*\psi = 1$ , где  $\psi^*$  — матрица с одной строкой и четырьмя столбцами, эрмитово сопряженная с  $\psi$ .

Ясно, что решения (43.17) соответствуют положительной, а решения (43.18) — отрицательной энергии. В нерелятивистском случае, когда энергия  $E_+ = -E_-$  близка к  $mc^2$  и велика по сравнению с  $c|\mathbf{p}|$ , для решений с положительной энергией функции  $u_1$  и  $u_2$

по порядку величины в  $c/v$  раз меньше  $u_3$  и  $u_4$  ( $v$  — скорость движения частицы); для решений с отрицательной энергией соотношения обратны. Чтобы выяснить, в чем состоит физическое различие между двумя решениями, соответствующими данному знаку энергии, введем три новые спиновые матрицы  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  и  $\sigma'_z$  с четырьмя строками и столбцами

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (43.19)$$

В начале § 44 мы увидим, что матрицу  $1/2 \hbar \sigma'$  можно рассматривать как оператор спина. В пренебрежении малыми компонентами волновой функции легко убедиться, что  $\psi$  есть собственная функция оператора  $\sigma'_z$ , принадлежащая к собственному значению  $+1$  для первых решений (43.17) и (43.18) и к собственному значению  $-1$  для вторых решений.

**Плотности заряда и тока.** Чтобы получить уравнение непрерывности, умножим (43.3) слева на  $\psi^*$ , а эрмитово сопряженное уравнение

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + i\hbar c (\text{grad } \psi^*) \cdot \alpha + \psi^* \beta mc^2 = 0$$

— справа на  $\psi$  и вычтем результаты один из другого. Тогда если ввести вещественные величины

$$P(\mathbf{r}, t) = \psi^* \psi, \quad \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = -c \psi^* \alpha \psi, \quad (43.20)$$

то получится уравнение (42.7). Выражение для  $P$  имеет нерелятивистский вид (7.1); поскольку величина  $P$  не отрицательна, ее можно интерпретировать как плотность вероятности координат. Можно показать, что в нерелятивистском случае выражение (43.20) для  $\mathbf{S}$  переходит в (7.3) (см. задачу 6). Оператор  $-c\alpha$  непосредственно связан со скоростью частицы. Действительно, вычислим с помощью (23.2) производную по времени от радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Пользуясь выражением (43.2) для гамильтониана и перестановочными соотношениями (23.16), получаем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i\hbar} (xH - Hx) = -c\alpha_x. \quad (43.21)$$

Таким образом, собственные значения компонент оператора скорости равны  $\pm c$ . Этот результат можно сделать физически наглядным с помощью соотношения неопределенности (3.1). Очень точное определение мгновенного значения скорости [которая, согласно (43.21), в релятивистской теории отличается от импульса] требует точного измерения координат частицы для двух слегка отличающихся моментов времени. Такое точное измерение координат означает, что импульс частицы остается полностью неизвестным, вследствие чего все его значения примерно равновероятны. Таким

образом, очень большие импульсы будут значительно более вероятны, чем малые, а это соответствует близости скорости частицы к скорости света.

**Электромагнитные потенциалы.** Члены с электромагнитными потенциалами можно релятивистски инвариантным образом ввести в (43.3); производя обычную замену  $c\mathbf{p} \rightarrow c\mathbf{p} - e\mathbf{A}$  и  $E \rightarrow E - e\varphi$  (предполагается, что уравнение описывает частицу с зарядом  $e$ ). Тогда мы получим

$$[E - e\varphi + \alpha \cdot (c\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta mc^2] \psi = 0. \quad (43.22)$$

Здесь через  $E$  и  $\mathbf{p}$  обозначены операторы (42.3). Умножая это уравнение слева на

$$[E - e\varphi - \alpha \cdot (c\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - \beta mc^2],$$

можно привести его к виду, аналогичному (42.10). В результате получим

$$\{(E - e\varphi)^2 - [\alpha \cdot (c\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 - m^2c^4 + (E - e\varphi) \alpha \cdot (c\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - \alpha \cdot (c\mathbf{p} - e\mathbf{A}) (E - e\varphi)\} \psi = 0. \quad (43.23)$$

Второй оператор в (43.23) можно преобразовать с помощью соотношения

$$(\alpha \cdot \mathbf{B})(\alpha \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + i\sigma'(\mathbf{B} \times \mathbf{C}), \quad (43.24)$$

где  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  коммутируют с  $\alpha$ , но необязательно коммутируют друг с другом (см. задачу 7). В данном случае  $\mathbf{B} = \mathbf{C} = (c\mathbf{p} - e\mathbf{A})$ . Воспользуемся также равенством

$$(c\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (c\mathbf{p} - e\mathbf{A}) = -ce(\mathbf{A} \times \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{A}) = ie\hbar c \operatorname{rot} \mathbf{A} = ie\hbar c \mathbf{H}$$

[см. (23.15)]. Подставляя это выражение в (43.24), получаем

$$[\alpha \cdot (c\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 = (c\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\hbar c \sigma' \cdot \mathbf{H}.$$

Два последних оператора в (43.23) можно переписать в виде [вновь принимая во внимание (23.15)]

$$\begin{aligned} -e\alpha \cdot (E\mathbf{A} - \mathbf{A}E) - ce\alpha \cdot (\varphi\mathbf{p} - \mathbf{p}\varphi) &= \\ &= -ie\hbar\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - ie\hbar c\alpha \cdot \operatorname{grad} \varphi = ie\hbar c\alpha \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Тогда вместо уравнения (43.23) находим

$$[(E - e\varphi)^2 - (c\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2c^4 + e\hbar c \sigma' \cdot \mathbf{H} + ie\hbar c\alpha \cdot \mathbf{E}] \psi = 0. \quad (43.25)$$

Здесь первые три члена в точности совпадают с (42.9). Физический смысл последних двух слагаемых удобно выяснить, переходя к нерелятивистскому случаю.

Для этой цели можно было бы поступить точно так же, как и в случае уравнения (42.10). Можно, однако, и просто положить

$$E = E' + mc^2, \quad (43.26)$$

считая затем  $E'$  и  $e\varphi$  малыми по сравнению с  $mc^2$ ; это эквивалентно подстановке (42.11) с последующим пренебрежением соответствующими членами. Тогда приближенно получаем

$$(E - e\varphi)^2 - mc^4 \approx 2mc^2 (E' - e\varphi),$$

и уравнение (43.25) принимает вид

$$E'\psi = \left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{H} - \frac{ie\hbar}{2mc} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} \right] \psi. \quad (43.27)$$

Если выделить в  $\psi$  множитель  $e^{-imc^2t/\hbar}$ , то  $E'$  будет эквивалентно оператору  $i\hbar(\partial/\partial t)$ , действующему на остальную часть волновой функции. Таким образом, (43.27) представляет собой нерелятивистское уравнение Шредингера (23.24), в которое входят два дополнительных члена, содержащих непосредственно напряженности  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ .

Член, содержащий  $\mathbf{H}$ , имеет вид энергии магнитного диполя с моментом  $(e\hbar/2mc) \boldsymbol{\sigma}'$ . Ранее [см. (43.17)] было показано, что при  $E > 0$  в нерелятивистском случае третья и четвертая компоненты волновой функции свободной частицы велики по сравнению с первой и второй. Пользуясь уравнением (43.22), легко показать, что это имеет место и в общем случае, когда частица подвержена действию полей. Как видно из (43.19), действие матрицы  $\boldsymbol{\sigma}'$  на четырехкомпонентную волновую функцию сводится к действию  $\boldsymbol{\sigma}$  только на большие компоненты. Таким образом, две большие компоненты в (43.27) вместе с членом, содержащим  $\mathbf{H}$ , дают в точности нерелятивистское уравнение со спиновыми матрицами Паули и с правильным значением магнитного момента электрона [см. (39.10)].

Покажем теперь, что в практически интересных случаях член с  $\mathbf{E}$  в (43.27) по порядку величины равен  $(v^2/c^2) e\varphi$  и в нерелятивистском пределе им можно пренебречь<sup>1)</sup>. Прежде всего заметим, что среднее значение  $\boldsymbol{\alpha}$  по порядку величины равно  $(v/c) \int \boldsymbol{\psi}^* \boldsymbol{\psi} d\tau$ , так как, согласно (43.13),  $\boldsymbol{\alpha}$  перемешивает большие и малые компоненты (раньше было также показано, что  $-\boldsymbol{\alpha}$  есть оператор скорости). Если линейные размеры содержащей электрон системы обозначить через  $a$ , то  $e\varphi$  по порядку величины равно  $eEa$  и  $\hbar/a \sim \sim p \sim mv$ . Таким образом, отношение членов с  $\mathbf{E}$  к  $e\varphi$  в (43.27) составляет (по порядку величины)

$$\frac{e\hbar v E}{mc^2} \frac{1}{eEa} \sim \frac{v^2}{c^2}.$$

<sup>1)</sup> Для сферически симметричного электростатического потенциала он обуславливает спин-орбитальное взаимодействие, энергия которого по порядку величины действительно равна  $(v/c)^2 e\varphi$  [см. (44.8)].

В противоположность этому при рассмотрении соотношений (39.9) и (39.10) мы уже видели, что член с  $\mathbf{H}$  в (43.27) имеет такой же порядок величины, как и другие магнитные члены, линейные относительно  $\mathbf{A}$ . В то время как член с  $\mathbf{E}$  в (43.27) в нерелятивистском приближении нужно опустить, в релятивистском уравнении (43.25) он играет существенную роль, обеспечивая инвариантность относительно преобразований Лоренца.

#### § 44. Уравнение Дирака в центральном поле

В предыдущем параграфе наличие магнитного момента у электрона было установлено с помощью перехода к нерелятивистскому приближению, где, как было показано, появляется ожидаемая магнитная энергия. Сам по себе спин электрона не несет энергии, и его можно наблюдать только благодаря связи с орбитальным движением. В начале настоящего параграфа мы попытаемся выявить эту связь двумя путями: во-первых, используя закон сохранения полного момента количества движения, и, во-вторых, вычислив энергию спин-орбитального взаимодействия, введенную в § 38. В обоих случаях будут использованы такие потенциалы  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ , при которых момент количества движения электрона сохраняется; это означает, что поле является центральным ( $\mathbf{A} = 0$  и потенциал  $\varphi$  сферически симметричен). В конце параграфа мы проведем разделение переменных в уравнении Дирака для случая произвольного центрального поля и найдем уровни энергии атома водорода.

**Спиновый момент количества движения.** Если  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(r)$ , то уравнение (43.22) можно переписать в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (44.1)$$

$$H = -c\alpha \cdot \mathbf{p} - \beta mc^2 + V,$$

где  $V = e\varphi$ . Можно было бы ожидать, что в подобном центральном поле орбитальный момент количества движения  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  является интегралом движения. Чтобы выяснить этот вопрос, вычислим при помощи (23.2) и (23.16) производную от  $\mathbf{L}$  по времени:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dL_x}{dt} &= L_x H - H L_x = -c\alpha \cdot [(y p_z - z p_y) \mathbf{p} - \mathbf{p} (y p_z - z p_y)] = \\ &= i\hbar c (\alpha_z p_y - \alpha_y p_z). \end{aligned} \quad (44.2)$$

Здесь принято во внимание, что оператор  $\mathbf{L}$  коммутирует с любой сферически симметричной функцией, в том числе и с  $V(r)$ . Ясно видно, что  $\mathbf{L}$  отнюдь не коммутирует с  $H$  и потому не является интегралом движения. Однако из физических соображений следует ожидать, что в центральном силовом поле возможно определить

сохраняющийся полный момент количества движения. Это означает, что нужно найти другой оператор, коммутатор  $x$ -компоненты которого с  $H$  равен правой части (44.2), взятой со знаком минус. Сумма этого оператора с  $L$  будет тогда интегралом движения, и ее можно будет интерпретировать как оператор полного момента количества движения.

Легко видеть, что искомый оператор кратен матрице  $\sigma'$ , определяемой соотношением (43.19). В силу (43.11) и (43.13)  $\sigma'_x$  коммутирует с  $\alpha_x$  и с  $\beta$ , хотя и не коммутирует с другими компонентами  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sigma'_x \alpha_y - \alpha_y \sigma'_x &= \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_z \\ i\sigma_z & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_z \\ -i\sigma_z & 0 \end{pmatrix} = 2i\alpha_x. \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить производную по времени от  $\sigma'$ :

$$i\hbar \frac{d\sigma'_x}{dt} = \sigma'_x H - H \sigma'_x = -2ic (\alpha_x p_y - \alpha_y p_x). \quad (44.3)$$

Из (44.2) и (44.3) следует, что величина  $L + \frac{1}{2}\hbar\sigma'$  коммутирует с  $H$ , в связи с чем и ее можно считать полным моментом количества движения. При этом оператор

$$S = \frac{1}{2} \hbar \sigma' \quad (44.4)$$

мы будем называть спиновым моментом количества движения электрона.

**Разложение по степеням  $v/c$ . Энергия спин-орбитального взаимодействия.** Покажем теперь, что выражение для энергии спин-орбитального взаимодействия (38.13) само собой вытекает из уравнения Дирака. Можно показать, что по порядку величины этот член отличается от потенциальной энергии множителем  $(v/c)^2$ :

$$\frac{1}{V} \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) \sim \frac{1}{V} \frac{1}{m^2c^2} \frac{V}{a^2} pa\hbar \sim \frac{v^2}{c^2},$$

где  $a$  характеризует линейные размеры системы и

$$\frac{\hbar}{a} \sim p \sim mv.$$

Таким образом, приближение, которое привело нас к уравнению (43.27), в данном случае является недостаточным.

Чтобы получить последовательную аппроксимацию, пользуясь более привычными нам двухкомпонентными волновыми функциями, заменим в (44.1)  $\psi$  на  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , подразумевая под этими величинами



соответственно две первые и две последние компоненты функции  $\psi$ . Допустим, что совокупность  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в целом представляет нерелятивистскую собственную функцию оператора энергии; это означает, что величина

$$E = E' + mc^2$$

рассматривается как число, а не как оператор. Кроме того,  $E'$  и  $V$  предполагаются малыми по сравнению с  $mc^2$ . Тогда волновое уравнение примет вид

$$\begin{aligned} (E' + 2mc^2 - V) \psi_1 + c\sigma \cdot \mathbf{p} \psi_2 &= 0, \\ (E' - V) \psi_2 + c\sigma \cdot \mathbf{p} \psi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (44.5)$$

где  $\mathbf{p}$  — по-прежнему оператор. Первое из этих уравнений показывает, что функция  $\psi_1$  по порядку величины равна  $(v/c) \psi_2$ . Поэтому есть смысл исключить  $\psi_1$ , получив уравнение только для  $\psi_2$ . Подставляя выражение

$$\psi_1 = -(E' + 2mc^2 - V)^{-1} c\sigma \cdot \mathbf{p} \psi_2$$

во второе из уравнений (44.5), получаем

$$E' \psi_2 = \frac{1}{2m} (\sigma \cdot \mathbf{p}) \left(1 + \frac{E' - V}{2mc^2}\right)^{-1} (\sigma \cdot \mathbf{p}) \psi_2 + V \psi_2. \quad (44.6)$$

До сих пор никаких приближений не делалось.

Искомая аппроксимация получается разложением в ряд по степеням  $(E' - V)/2mc^2$  с точностью до членов наименьшего порядка. Легко получить следующие соотношения:

$$\left(1 + \frac{E' - V}{2mc^2}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{E' - V}{2mc^2},$$

$$\mathbf{p}V = V\mathbf{p} - i\hbar \operatorname{grad} V,$$

$$(\sigma \cdot \operatorname{grad} V) (\sigma \cdot \mathbf{p}) = (\operatorname{grad} V) \cdot \mathbf{p} + i\sigma \cdot [(\operatorname{grad} V) \times \mathbf{p}].$$

С их помощью уравнение (44.6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} E' \psi_2 &= \left[ \left(1 - \frac{E' - V}{2mc^2}\right) \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V \right] \psi_2 - \\ &- \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} (\operatorname{grad} V) \cdot (\operatorname{grad} \psi_2) + \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} \sigma \cdot [(\operatorname{grad} V) \times \mathbf{p} \psi_2]. \end{aligned} \quad (44.7)$$

Если функция  $V$  сферически симметрична, то возможны дальнейшие упрощения. Воспользуемся соотношениями

$$(\operatorname{grad} V) \cdot \operatorname{grad} = \frac{dV}{dr} \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\operatorname{grad} V = \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{r}$$

и заметим, что разность  $E' - V$  приблизительно равна  $\mathbf{p}^2/2m$ ; точность этого приближения достаточна для того, чтобы член второго порядка  $(E' - V)\mathbf{p}^2$  в (44.7) можно было заменить на  $\mathbf{p}^4/2m$ . Тогда уравнение (44.7) можно переписать в виде

$$E'\psi_2 = \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + V - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2} \frac{dV}{dr} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \right] \psi_2, \quad (44.8)$$

где  $\mathbf{S} = 1/2\hbar\boldsymbol{\sigma}$  и  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .

Первый и третий члены в правой части (44.8) дают нерелятивистское уравнение Шредингера. Второй член имеет вид классической релятивистской поправки к массе, которую можно получить, разлагая в ряд квадратный корень из (42.2):

$$E' = E - mc^2 = (c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4)^{1/2} - mc^2 \approx \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2}.$$

Последний член представляет собой энергию спин-орбитального взаимодействия (38.14), которая, как мы теперь видим, автоматически получается из уравнения Дирака. Четвертый член дает релятивистскую поправку к потенциальной энергии и не имеет классического аналога. Поскольку он не зависит от момента количества движения, наличие его гораздо труднее проверить экспериментально, чем существование энергии спин-орбитального взаимодействия<sup>1)</sup>.

**Разделение переменных.** В сферических координатах уравнение Дирака для центрального поля допускает точное разделение переменных. Вследствие взаимозависимости орбитального и спинового моментов количества движения эта процедура здесь более сложна, чем для уравнения Шредингера.

Начнем с определения операторов радиального импульса и скорости

$$p_r = r^{-1}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\hbar), \quad \alpha_r = r^{-1}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}). \quad (44.9)$$

Как можно показать, оба они эрмитовы. Определим также оператор  $k$ , который, как мы вскоре увидим, связан с полным моментом количества движения

$$\hbar k = \beta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar), \quad (44.10)$$

где  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . При помощи соотношения (43.24) непосредственной подстановкой можно показать, что

$$\alpha_r p_r + i\hbar r^{-1} \alpha_r \beta k = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}.$$

В связи с этим гамильтониан (44.1) принимает вид

$$H = -c\alpha_r p_r - \frac{i\hbar c}{r} \alpha_r \beta k - \beta mc^2 + V. \quad (44.11)$$

<sup>1)</sup> Дальнейшее обсуждение вопроса об этом члене можно найти в книге Кондона и Шортли [6].

При помощи определений (44.9) и (44.10) и соотношений, найденных в § 43, можно получить равенства:

$$\alpha_r k - k \alpha_r = 0, \quad \beta k - k \beta = 0, \quad p_r k_r - k p_r = 0.$$

Отсюда видно, что оператор  $k$  коммутирует с гамильтонианом (44.11) и потому является интегралом движения. Возводя (44.10) в квадрат, можно получить собственные значения  $k$ :

$$\hbar^2 k^2 = (\sigma' \cdot \mathbf{L})^2 + 2\hbar(\sigma' \cdot \mathbf{L}) + \hbar^2 = \left(\mathbf{L} + \frac{1}{2}\hbar\sigma'\right)^2 + \frac{1}{4}\hbar^2. \quad (44.12)$$

Выражение  $(\mathbf{L} + \frac{1}{2}\hbar\sigma')^2$  представляет собой квадрат оператора полного момента количества движения, и его собственные значения равны  $j(j+1)\hbar^2$ , где  $j$  — половина нечетного положительного целого числа. Таким образом, собственные значения  $k^2$  равны  $(j + \frac{1}{2})^2$  и  $k$  может равняться  $\pm 1, \pm 2, \dots$

Выберем представление, в котором матрицы  $H$  и  $k$  диагональны и изображаются соответственно числами  $E$  и  $k$ . При этом величины  $\alpha_r$  и  $\beta$  можно представить в виде эрмитовых матриц, удовлетворяющих соотношениям

$$\alpha_r^2 = \beta^2 = 1, \quad \alpha_r \beta + \beta \alpha_r = 0$$

(справедливость их легко проверить). Эти матрицы могут иметь по две строки и по два столбца. Можно положить, например

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_r = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (44.13)$$

Угловая и спиновая части волновой функции определяются теперь требованием, чтобы  $\psi$  была собственной функцией оператора  $k$  в (44.10). Для таких задач, как вычисление уровней энергии, нужна только радиальная часть; в соответствии с (44.13) она имеет две компоненты, которые мы запишем в виде

$$\begin{pmatrix} r^{-1}F(r) \\ r^{-1}G(r) \end{pmatrix}. \quad (44.14)$$

Радиальное уравнение для электрона, движущегося в центральном поле, получается в результате подстановки (44.13) и (44.14) в волновое уравнение с гамильтонианом (44.11). Пользуясь соотношением

$$p_r = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right),$$

получаем

$$\begin{aligned} (E + mc^2 - V)F - \hbar c \frac{dG}{dr} - \frac{\hbar ck}{r} G &= 0, \\ (E - mc^2 - V)G + \hbar c \frac{dF}{dr} - \frac{\hbar ck}{r} F &= 0. \end{aligned} \quad (44.15)$$

Удобно ввести обозначения

$$\alpha_1 = \frac{mc^2 + E}{\hbar c}, \quad \alpha_2 = \frac{mc^2 - E}{\hbar c}, \quad \varrho = \alpha r, \quad (44.16)$$

$$\alpha = + (\alpha_1 \alpha_2)^{1/2} = \frac{(m^2 c^4 - E^2)^{1/2}}{\hbar c}.$$

Тогда уравнения (44.15) принимают вид

$$\left(\frac{d}{d\varrho} + \frac{k}{\varrho}\right) G - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} - \frac{V}{\hbar c \alpha}\right) F = 0, \quad (44.17)$$

$$\left(\frac{d}{d\varrho} - \frac{k}{\varrho}\right) F - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha} + \frac{V}{\hbar c \alpha}\right) G = 0.$$

**Атом водорода.** Найдем собственные значения энергии, полагая в (44.17)  $V(r) = -Ze^2/r$ . Величина  $V/\hbar c \alpha$  запишется теперь в виде  $-\gamma/\varrho$ , где  $\gamma \equiv Ze^2/\hbar c$ . Будем поступать так же, как и в § 16, полагая

$$F(\varrho) = f(\varrho)e^{-\varrho}, \quad G(\varrho) = g(\varrho)e^{-\varrho}. \quad (44.18)$$

Уравнения для функций  $f$  и  $g$  имеют вид

$$g' - g + \frac{kg}{\varrho} - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\gamma}{\varrho}\right) f = 0, \quad (44.19)$$

$$f' - f - \frac{kf}{\varrho} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha} - \frac{\gamma}{\varrho}\right) g = 0.$$

Решения их будем искать в виде степенных рядов:

$$f = \varrho^s (a_0 + a_1 \varrho + \dots), \quad a_0 \neq 0, \quad (44.20)$$

$$g = \varrho^s (b_0 + b_1 \varrho + \dots), \quad b_0 \neq 0.$$

Поскольку при  $r = 0$  выражения (44.14) предполагаются конечными, следует ожидать, что  $s \geq 1$ . Однако, как и в случае релятивистского уравнения Шредингера (42.15) для кулоновского поля, можно допустить и несколько меньшее значение  $s$ , если только сходится интеграл по объему от  $\psi^* \psi$ .

Подставим (44.20) в (44.19) и (при  $\nu > 0$ ) приравняем нулю коэффициенты при  $\varrho^{s+\nu-1}$

$$(s + \nu + k)b_\nu - b_{\nu-1} - \gamma a_\nu - \frac{\alpha_1}{\alpha} a_{\nu-1} = 0, \quad (44.21)$$

$$(s + \nu - k)a_\nu - a_{\nu-1} + \gamma b_\nu - \frac{\alpha_2}{\alpha} b_{\nu-1} = 0.$$

Если  $\nu = 0$ , то аналогичные уравнения будут иметь вид

$$(s + k)b_0 - \gamma a_0 = 0, \quad (44.22)$$

$$(s - k)a_0 + \gamma b_0 = 0.$$

Система (44.22) имеет отличные от нуля решения  $a_0$  и  $b_0$ , только если детерминант из коэффициентов обращается в нуль. Это дает

$$s = \pm (k^2 - \gamma^2)^{1/2}. \quad (44.23)$$

В силу граничного условия в начале координат здесь следует взять верхний знак.

Умножая первое уравнение (44.21) на  $\alpha$ , второе уравнение на  $\alpha_1$  и вычитая одно из другого, найдем соотношение между  $a_\nu$  и  $b_\nu$ :

$$b_\nu [\alpha(s + \nu + k) - \alpha_1 \gamma] = \alpha_1 [\alpha_1(s + \nu - k) + \alpha \gamma] \quad (44.24)$$

[здесь использованы выражения (44.16)]. Теперь можно исследовать поведение решений при больших  $r$ . Если ряды в (44.20) не обрываются, то это поведение определяется членами высшего порядка, так что постоянным множителем можно пренебречь по сравнению с  $\nu$ . Таким образом, уравнения (44.21) и (44.24) дают

$$a_\nu \approx \frac{2}{\nu} a_{\nu-1}, \quad b_\nu \approx \frac{2}{\nu} b_{\nu-1}.$$

Это означает, что оба ряда асимптотически ведут себя как  $e^{2r}$  и регулярные решения получатся только в том случае, когда ряды обрываются. Пусть это имеет место при  $\nu = n'$ , так что  $a_{n'+1} = b_{n'+1} = 0$ . Тогда оба уравнения (44.21) приводят к соотношению

$$\alpha_1 a_{n'} = -\alpha b_{n'}, \quad n' = 0, 1, 2, \dots \quad (44.25)$$

Полагая в (44.24)  $\nu = n'$  и принимая во внимание (44.25), найдем уровни энергии. В силу (44.16) имеем

$$2\alpha(s + n') = \gamma(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{2E\gamma}{\hbar c}.$$

Возводя это выражение в квадрат, получаем

$$(m^2 c^4 - E^2)(s + n')^2 = E^2 \gamma^2$$

и, следовательно,

$$E = mc^2 \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{(s + n')^2} \right]^{-1/2}. \quad (44.26)$$

Соотношения (44.23) и (44.26) эквивалентны формуле, впервые выведенной Зоммерфельдом [7] на основе старой квантовой теории. Эта формула находится в очень хорошем согласии с наблюдаемым спектром атома водорода<sup>1)</sup>. Если разложить (44.26) в ряд по степеням  $\gamma^2$ , то наличие тонкой структуры становится очевидным. С точностью до членов порядка  $\gamma^4$  получим результат, напоминающий (42.21), но несколько отличающийся от него:

$$E = mc^2 \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{2n^2} - \frac{\gamma^4}{2n^4} \left( \frac{n}{|k|} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (44.27)$$

<sup>1)</sup> Имеется, однако, небольшое, но важное отклонение от этой формулы; см. работу Лэмба [8].

Здесь  $n = n' + |k|$  — полное квантовое число, фигурирующее в (16.14), а  $|k|$  принимает целые положительные значения. Из (44.27) легко найти, что при данном  $n$  „ширина” системы подуровней, образующих тонкую структуру, составляет

$$\frac{mc^2\gamma^4}{n^3} \frac{n-1}{2n}.$$

Эта величина много меньше получающейся из релятивистского уравнения Шредингера [см. (42.22)] и „хорошо” согласуется с опытом.

**Классификация уровней энергии.** При  $n' > 0$  допустимы все положительные и отрицательные целые значения  $k$  [как видно из формулы (44.12),  $k$  не может быть равно нулю]. Однако при  $n' = 0$  может возникнуть противоречие между соотношениями (44.22) и (44.25); действительно, они дают соответственно

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{\gamma}{s+k} \quad \text{и} \quad \frac{b_0}{a_0} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}. \quad (44.28)$$

Поскольку  $s < |k|$ , первое из этих выражений будет положительным или отрицательным в зависимости от того, положительно или отрицательно число  $k$ , тогда как второе выражение всегда отрицательно. Поэтому если  $n' = 0$ , то  $k$  может принимать только отрицательные значения.

До сих пор мы показали только, что значение  $j$ , характеризующее уровень энергии, равно  $|k| - 1/2$ . Чтобы связать с уровнем энергии значение орбитального квантового числа  $l$ , следует перейти к нерелятивистскому приближению, считая  $l$  хорошим квантовым числом. Поскольку в этом случае  $G$  много больше  $F$ , в (44.10) можно заменить  $\beta$  на  $-1$  и  $\sigma'$  на  $\sigma$ . Тогда

$$\left(L + \frac{1}{2} \hbar \sigma\right)^2 = [l(l+1) + \frac{3}{4}] \hbar^2 + \hbar \sigma \cdot L.$$

Это выражение равно  $j(j+1) \hbar^2$ . Таким образом, мы получаем

$$k = l(l+1) - j(j+1) - \frac{1}{4} = \begin{cases} -l-1, & j = l + \frac{1}{2}, \\ l, & j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим, например, уровни энергии в атоме водорода для случая  $n = 3$ . Радиальное квантовое число  $n'$  может равняться 0, 1 или 2, а  $k$  может быть равно  $\pm(3 - n')$ , исключая случай

$n' = 0$ , когда  $k$  может равняться только — 3. В нерелятивистской классификации уровни энергии будут

$n'$	$k$	$l$	$j$	
0	—3	2	$\frac{5}{2}$	${}^2D_{5/2}$
1	2	2	$\frac{3}{2}$	${}^2D_{3/2}$
1	—2	1	$\frac{3}{2}$	${}^2P_{3/2}$
2	1	1	$\frac{1}{2}$	${}^2P_{1/2}$
2	—1	0	$\frac{1}{2}$	${}^2S_{1/2}$

В силу (44.23) и (44.26) состояния с одинаковыми значениями  $|k|$  или  $j$  имеют одинаковую энергию. Из формулы (44.27) видно, что энергия возрастает с увеличением  $|k|$ .

**Состояния с отрицательной энергией.** Мы видели, что релятивистские уравнения Шредингера и Дирака допускают решения, для которых частица имеет отрицательную кинетическую энергию и отрицательную массу покоя. Они соответствуют отрицательному знаку перед квадратным корнем из правой части классического выражения (42.2). В квантовой теории пренебрегать решениями с отрицательной энергией, как это делалось в классической механике, уже нельзя, поскольку ничто не мешает заряженной частице совершить радиационный переход из состояния с положительной в состояние с отрицательной энергией.

Дирак предложил считать, что все состояния с отрицательной энергией, получающиеся в результате решения уравнения (43.22), целиком заполнены. В этом случае принцип Паули исключает возможность подобных переходов. Соответственно в состоянии вакуума плотность электронов с отрицательной энергией бесконечно велика. Предполагается, что с этими электронами не связаны какие-либо электромагнитные или гравитационные эффекты; однако отклонения от нормального состояния, когда один или несколько уровней отрицательной энергии оказываются вакантными, могут быть наблюдаемы. Следует ожидать, что отсутствие отрицательно заряженного электрона с отрицательными массой и кинетической энергией будет проявляться как положительно заряженная частица с такими же (по абсолютной величине) положительными массой и кинетической энергией. Таким путем можно сформулировать „дырочную” теорию *позитрона*.

Однако при наличии столь большого числа электронов мы уже не имеем теории одной частицы, как это предполагалось при

выводе волнового уравнения. Исходя из уравнения Дирака, можно развить теорию позитрона и построить теорию многих частиц, используя формализм квантованных полей, обсуждаемый в следующей главе.

На первый взгляд могло бы показаться, что для релятивистского уравнения Шредингера нельзя применить тот же метод, так как это уравнение описывает частицы с нулевым спином, подчиняющиеся не принципу Паули, а статистике Бозе—Эйнштейна. Однако Паули и Вайскопф [9] показали, что в этом случае энергия квантованного поля всегда положительна, хотя фигурирующий в волновом уравнении параметр  $E$  может быть и отрицательным. С другой стороны, плотность заряда в квантованном поле может иметь любой знак в соответствии с неопределенностью знака  $P$ , о которой говорилось в связи с (42.8). Обе рассмотренные в настоящей главе теории предсказывают существование частиц с положительными энергиями и с обоими знаками электрического заряда. Однако наличие спина у частицы следует из уравнения Дирака, откуда вытекает, что именно оно описывает электроны.

### ЗАДАЧИ

1. Показать, что для общего решения уравнения (42.4), имеющего вид волнового пакета, средние значения  $E^2$  и  $\mathbf{p}^2$  связаны соотношением  $\langle E^2 \rangle = c^2 \langle \mathbf{p}^2 \rangle + m^2 c^4$ . Рассмотреть связь между этим результатом и классическим уравнением (42.2).

2. Исходя из нерелятивистского приближения, связанного с (42.11) и приводимыми далее соображениями, показать, что выражение (42.8) для  $P$  в пределе переходит в (7.1).

3. Решить релятивистское уравнение Шредингера для притягивающего потенциала, имеющего вид прямоугольной потенциальной ямы глубины  $V_0$  и радиуса  $a$  (предварительно сформулировать условия непрерывности при  $r = a$ ). При данном  $a$  найти явное выражение для минимального значения потенциала  $V_0$ , для которого частица с массой  $m$  может находиться в связанном состоянии.

4. Непосредственным путем показать, что волновые функции (43.17) и (43.18) не являются собственными функциями какой-либо из компонент спинного момента количества движения  $\hbar \sigma / 2$ .

5. Показать, что любую двухрядную матрицу можно представить в виде линейной комбинации  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и 1. Используя этот результат, показать, что нельзя найти матрицу, антикоммутирующую со всеми компонентами  $\sigma$ .

6. Показать, что выражение для плотности тока (43.20) в пределе совпадает с соответствующим нерелятивистским выражением (в качестве  $\psi$  взять волновую функцию свободной частицы).

7. При помощи выражений (43.11), (43.13) и (43.19) проверить справедливость соотношения (43.24).

8. Доказать, что операторы  $\alpha_r$  и  $k$ , определяемые равенствами (44.9) и (44.10), коммутируют друг с другом и  $\hbar^2 k^2$  дается правой частью формулы (44.12).

9. Обсудить вопрос о связи между членом  $\alpha \cdot \mathbf{E}$ , фигурирующим в (43.27), и энергией спин-орбитального взаимодействия.

10. Показать, что отрицательный знак перед квадратным корнем, который может появиться при получении формул (42.16) и (44.26), в действительности не соответствует связанным состояниям.



11. Показать явно, что исключение  $b_0/a_0$  из двух уравнений (44.28) при  $n' = 0$  дает правильные уровни энергии только при  $k < 0$  (но не при  $k > 0$ ).

12. В релятивистских теориях Шредингера и Дирака применить правила отбора  $\Delta l = \pm 1$ ,  $\Delta j = 0, \pm 1$  для нахождения частот разрешенных переходов в кулоновском поле между состояниями с  $n = 2$  и  $n = 3$ . В частности, показать, что во второй теории имеется семь линий, пять из которых различны, а в первой теории — три линии, удаленные друг от друга на значительно большее расстояние.

13. Решить уравнение Дирака для притягивающего потенциала, имеющего вид потенциальной ямы глубины  $V_0$  и радиуса  $a$ , сформулировав предварительно условия непрерывности при  $r = a$ . При заданном  $a$  найти в явном виде минимальное значение потенциала  $V_0$ , для которого частица с массой  $m$  может находиться в связанном состоянии. Результат сравнить с ответом к задаче 3.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bergmann P. G., Introduction to the Theory of Relativity, Part I, New York, 1946. (Имеется русский перевод: П. Бергман, Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947.)
2. Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford — New York, 1934.
3. Schrödinger E., Ann. d. Phys., **81**, 109 (1926).
4. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **117A**, 610 (1928).
5. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 3d ed., Oxford — New York, 1947. (Имеется русский перевод 2-го издания: П. Дирак, Основы квантовой механики, М.—Л., 1937.)
6. Condon E. U., Shortley G. H., The Theory of Atomic Spectra, Cambridge—London, 1935. (Имеется русский перевод: Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, 1949.)
7. Sommerfeld A., Ann. d. Phys., **51**, 1 (1916).
8. Lamb W. E., Rep. on Progr. in Phys., **14**, 19 (1951).
9. Pauli W., Weisskopf V., Helv. Phys. Acta, **7**, 709 (1934).
- 10\*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М.—Л., 1948.
- 11\*. Фок В. А., Начала квантовой механики, Кубуч, 1932.
- 12\*. де Бройли Л., Магнитный электрон, ОНТИ, 1936.
- 13\*. Паули В., Общие принципы волновой механики, М.—Л., 1947.
- 14\*. Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.
- 15\*. Соколов А. А., Иваненко Д. Д., Квантовая теория поля, М.—Л., 1952.
16. Corson E. M., Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave-Equations, London — Glasgow, 1953.
- 17\*. Зайцев Г. А., ЖЭТФ, **28**, 530 (1955).
- 18\*. Зайцев Г. А., ДАН СССР, **113**, 1248 (1957).

## КВАНТОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

В излагавшейся до сих пор квантовомеханической теории мы имели дело с такими системами, которые в классическом предельном случае можно было считать состоящими из частиц. Теперь нам предстоит обобщить теорию таким образом, чтобы ее можно было применять к электромагнитному полю, обеспечивая тем самым основу для построения последовательной квантовой теории излучения. Благодаря квантованию волнового поля последнее приобретает некоторые корпускулярные свойства; так, в случае электромагнитного поля мы получаем теорию световых квантов (фотонов). Метод квантования можно применить также и к  $\psi$ -полю, описываемому нерелятивистским уравнением Шредингера (6.16) или же одним из релятивистских уравнений, (42.4) или (43.3). Как мы увидим (см. § 46), теория одной частицы переходит при этом в теорию многих частиц; в нерелятивистском случае это эквивалентно переходу от уравнения (6.16) к уравнению (16.1) или (32.1). В силу этой эквивалентности может показаться, что квантование  $\psi$ -поля дает просто другой формальный подход к задаче многих частиц. Однако новый формализм может описывать и такие процессы, при которых происходит возникновение или уничтожение частиц (радиоактивный  $\beta$ -распад, взаимодействие мезона с нуклоном).

Настоящая и следующая главы должны служить введением в квантовую теорию поля<sup>1)</sup>. В § 45 мы начнем с обсуждения классического и квантового уравнений движения волнового поля, не специализируя при этом его природу. В качестве первого примера в § 46 будет дано применение развитой методики к уравнению (6.16), поскольку в этом случае рассмотрение относительно просто и не усложнено условием релятивистской инвариантности. Квантование уравнения Дирака (43.3) проводится в § 47. Производилось также квантование и некоторых других волновых уравнений (включая релятивистское уравнение Шредингера), но

<sup>1)</sup> Дальнейшее рассмотрение можно найти в книгах Вентцеля [1], Гейзенберга [2], приложение, § 9—12, Дирака [3], гл. 10 и 12, а также в работах Голдстейна [4], гл. 11 и Корбена и Стэля [5], стр. 210—212. (См. также книги Соколова и Иваненко [13] и Ахиезера и Берестецкого [14]. — *Прим. перев.*)

эти вопросы представляют интерес главным образом в связи с теорией мезонов и здесь не рассматриваются. Электромагнитному полю посвящена следующая глава.

### § 45. Классические и квантовые уравнения поля

В § 23 был развит общий метод квантования уравнений движения классической системы. Мы исходим из функции Лагранжа и убеждаемся в том, что с ее помощью получают правильные классические уравнения. Далее с помощью функции Лагранжа находятся импульсы, канонически сопряженные с координатами системы, и вводится функция Гамильтона. Затем, заменяя классические скобки Пуассона квантовыми, мы получаем квантовые уравнения движения из соответствующих классических уравнений Гамильтона. Покажем теперь, каким образом можно перенести этот подход без каких-либо изменений на случай волнового поля  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , которое мы временно будем считать вещественным<sup>1)</sup>.

**Координаты поля.** Волновое поле характеризуется своими амплитудами в любой точке пространства и в любой момент времени, подобно тому, как система частиц характеризуется координатами  $q_i$ , определяющими положение частиц, и зависимостью  $q_i$  от времени. Поле, очевидно, имеет бесконечное число степеней свободы и аналогично системе бесконечного числа частиц. Поэтому за координаты поля естественно принять амплитуды  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , взятые во всех точках  $\mathbf{r}$ ; они аналогичны рассматривавшимся в § 23 координатам частиц  $q_i(t)$ .

Такой подход, однако, не обязателен. Вместо него можно было бы разложить  $\psi$  по какой-либо полной ортонормированной системе функций  $u_h$ :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum a_h(t) u_h(\mathbf{r}). \quad (45.1)$$

Здесь коэффициенты разложения  $a_h$  можно рассматривать как координаты поля и писать уравнения поля либо для  $\psi$ , либо для  $a_h$ . В данном параграфе в качестве координат поля мы будем применять амплитуды  $\psi(\mathbf{r}, t)$ . При рассмотрении некоторых других вопросов удобнее будет пользоваться коэффициентами  $a_h$ .

**Уравнения Лагранжа.** Функция Лагранжа  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ , использованная в § 23, представляет собой функцию времени и функционал от возможных траекторий  $q_i(t)$  частиц системы. Истинные траектории получаются из вариационного принципа (23.3):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0.$$

<sup>1)</sup> См. [6, 7].

Аналогично можно ожидать, что функция Лагранжа для поля является функционалом от амплитуды  $\psi(\mathbf{r}, t)$ . Обычно ее можно представить в виде интеграла по всему пространству от *плотности лагранжиана*  $L$ :

$$L = \int \mathbf{L}(\psi, \text{grad } \psi, \dot{\psi}, t) d\tau, \quad (45.2)$$

где  $\dot{\psi} = \partial\psi/\partial t$ . Наличие  $\text{grad } \psi$  в аргументе  $L$  обусловлено непрерывной зависимостью  $\psi$  от  $\mathbf{r}$  (несчетно бесконечное число степеней свободы). В аргумент могли бы также входить и производные более высокого порядка от  $\psi$ , но в задачах, представляющих физический интерес, они, по-видимому, не появляются. Вариационный принцип, соответствующий (23.3), имеет вид

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int \mathbf{L} dt d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \int (\delta L) dt d\tau = 0, \quad (45.3)$$

где варьирование совершается при условиях

$$\delta\psi(\mathbf{r}, t_1) = \delta\psi(\mathbf{r}, t_2) = 0. \quad (45.4)$$

Если плотность лагранжиана  $L$  имеет вид, указанный в (45.2), то ее вариацию можно записать в форме

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta\psi + \sum_{xyz} \frac{\partial L}{\partial (\partial\psi/\partial x)} \delta \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \delta\dot{\psi}, \quad (45.5)$$

где суммирование по  $x, y, z$  означает сумму членов, получающихся заменой  $x$  на  $y$  и  $z$ . Через  $\delta\dot{\psi}$  обозначена разность между первоначальным и проварьированным значениями  $\dot{\psi}$ ; она, очевидно, равна производной по времени от вариации  $\psi$ . Это и аналогичное выражение для  $\delta(\partial\psi/\partial x)$  можно переписать в виде

$$\delta\dot{\psi} = \frac{\partial}{\partial t} (\delta\psi), \quad \delta \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta\psi).$$

Тогда уравнение (45.3) примет вид

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \left[ \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta\psi + \sum_{xyz} \frac{\partial L}{\partial (\partial\psi/\partial x)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\psi) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial}{\partial t} (\delta\psi) \right] dt d\tau = 0. \quad (45.6)$$

Члены под знаком суммы здесь можно проинтегрировать по частям по пространственным координатам; при этом интеграл по поверхности обращается в нуль либо вследствие достаточно быстрого убывания  $\psi$  на больших расстояниях, либо в силу периодических граничных условий на стенках большого, но конечного ящика. Последний член в (45.6) можно проинтегрировать по частям по  $t$ , причем граничные члены обращаются в нуль в силу (45.4). Таким образом, уравнение (45.6) можно переписать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi} - \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial\psi/\partial x)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) \right\} \delta\psi dt d\tau = 0. \quad (45.7)$$

Поскольку условие (45.3) имеет место для произвольных вариаций  $\delta\psi$  во всех точках пространства, равенство (45.7) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial x)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = 0. \quad (45.8)$$

Последнее представляет собой классическое уравнение поля, вытекающее из плотности лагранжиана  $L(\psi, \text{grad } \psi, \dot{\psi}, t)$ .

**Функциональная производная.** Чтобы дальше проследить аналогию с механикой частиц, желательно переписать уравнение (45.8) таким образом, чтобы в него входила сама функция Лагранжа  $L$ , а не ее плотность  $L$ . Поскольку совокупность значений  $\psi$  и  $\dot{\psi}$  во всех точках аналогична системе  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  в теории частиц, необходимо ввести производные от  $L$  по  $\psi$  и  $\dot{\psi}$ , взятые в отдельных точках.

Такие производные называются *функциональными* и обозначаются символами  $\delta L / \delta \psi$  и  $\delta L / \delta \dot{\psi}$ <sup>1)</sup>. Чтобы получить выражения для этих производных, можно разделить пространство на малые ячейки и заменить интегрирование по объему суммированием по всем этим ячейкам. Обозначим индексом  $i$  средние значения величин типа  $\psi$ ,  $\text{grad } \psi$  и  $\dot{\psi}$  для  $i$ -й ячейки, а объем ячейки обозначим через  $\delta\tau_i$ . Тогда выражение

$$\sum_i L[\psi_i, (\text{grad } \psi)_i, \dot{\psi}_i, t] \delta\tau_i$$

в пределе, когда все  $\delta\tau_i$  стремятся к нулю, совпадает с  $L$ .

Аналогично интегрирование по времени в (45.6) или (45.7) можно заменить суммированием

$$\sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi} - \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial x)} \right] \right\}_i \delta\psi_i \delta\tau_i + \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right)_i \delta\dot{\psi}_i \delta\tau_i,$$

где вариация  $L$  теперь получается в результате независимых вариаций  $\psi_i$  и  $\dot{\psi}_i$ . Предположим, что все  $\delta\psi_i$  и  $\delta\dot{\psi}_i$  равны нулю, за исключением  $\delta\psi_j$ . Функциональную производную от  $L$  по  $\psi$  в точке, находящейся в  $j$ -й ячейке, естественно связать с отношением  $\delta L$  и  $\delta\psi_j$ . Положим, по определению,

$$\frac{\delta L}{\delta \psi} = \lim_{\delta\tau_j \rightarrow 0} \frac{\delta L}{\delta\psi_j \delta\tau_j} = \frac{\partial L}{\partial \psi} - \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial x)} \right]. \quad (45.9)$$

<sup>1)</sup> По поводу другого способа изложения см. абзац, следующий за формулой (27.26).

Аналогично функциональная производная от  $L$  по  $\psi$  получается приравниванием нулю всех  $\delta\psi_i$  и  $\delta\dot{\psi}_i$ , кроме  $\delta\dot{\psi}_j$ :

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}} = \lim_{\Delta\tau_j \rightarrow 0} \frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}_j \Delta\tau_j} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}. \quad (45.10)$$

Здесь опять точка  $\mathbf{r}$ , в которой вычисляется функциональная производная, находится внутри  $j$ -й ячейки.

Подставляя (45.9) и (45.10) в (45.8), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}} - \frac{\delta L}{\delta\psi} = 0. \quad (45.11)$$

Это очень напоминает уравнения Лагранжа для системы частиц (23.4).

**Уравнения Гамильтона.** Как и в механике частиц, импульс, канонически сопряженный с  $\psi_j$ , можно определить как отношение  $\delta L$  к бесконечно малому приращению  $\delta\dot{\psi}_j$  при условии, что все другие вариации  $\delta\dot{\psi}_i$  и все  $\delta\psi_i$  равны нулю. Таким образом, мы получим

$$P_j = \frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}_j} = \Delta\tau_j \left( \frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}} \right)_j. \quad (45.12)$$

Из (45.11) и (45.12) следует, что

$$\dot{P}_j = \Delta\tau_j \left( \frac{\delta L}{\delta\psi} \right)_j. \quad (45.13)$$

По аналогии с (23.5) находим следующее выражение для функции Гамильтона:

$$H = \sum_i P_i \dot{\psi}_i - L = \sum_i \left( \frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}} \right)_i \dot{\psi}_i \delta\tau_i - L. \quad (45.14)$$

Запишем  $H$  в виде объемного интеграла от *плотности гамильтониана*  $\mathbf{H}$  и допустим, что ячейки достаточно малы, так что разностью между интегралом по объему и соответствующей суммой по ячейкам можно пренебречь. В результате получим

$$H = \int \mathbf{H} d\tau, \quad \mathbf{H} = \pi\dot{\psi} - L, \quad \pi \equiv \frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}. \quad (45.15)$$

С приближенной функцией Гамильтона, определяемой равенствами (45.12)—(45.14), можно оперировать совершенно так же, как с функцией Гамильтона для системы частиц. Вместо того чтобы доказывать это, будем пользоваться точной функцией Гамильтона, определяемой формулой (45.15) и представляющей собой (после исключения  $\dot{\psi}$ ) функционал от  $\psi$  и  $\pi$ . Классические уравнения Гамильтона будут выведены отсюда без представления о ячейках.

В силу (45.11) и (45.15) вариация  $L$ , получающаяся в результате варьирования  $\psi$  и  $\dot{\psi}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \delta L &= \int \left( \frac{\delta L}{\delta \psi} \delta \psi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}} \delta \dot{\psi} \right) d\tau = \int (\dot{\pi} \delta \psi + \pi \delta \dot{\psi}) d\tau = \\ &= \int [\delta(\pi \dot{\psi}) + \dot{\pi} \delta \psi - \dot{\psi} \delta \pi] d\tau = \delta H + \delta L + \int (\dot{\pi} \delta \psi - \dot{\psi} \delta \pi) d\tau. \end{aligned} \quad (45.16)$$

Вариация  $H$  при соответствующем варьировании  $\psi$  и  $\pi$  есть

$$\delta H = \int \left( \frac{\delta H}{\delta \psi} \delta \psi + \frac{\delta H}{\delta \pi} \delta \pi \right) d\tau. \quad (45.17)$$

Из определения функциональных производных (см. выше) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \psi} &= \frac{\partial H}{\partial \psi} - \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial (\partial \psi / \partial x)}, \\ \frac{\delta H}{\delta \pi} &= \frac{\partial H}{\partial \pi} - \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial (\partial \pi / \partial x)}. \end{aligned} \quad (45.18)$$

Сравнивая уравнения (45.16) и (45.17) при произвольных вариациях  $\delta \psi$  и  $\delta \pi$ , получаем классические уравнения Гамильтона для поля:

$$\dot{\psi} = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \quad \dot{\pi} = - \frac{\delta H}{\delta \psi}. \quad (45.19)$$

Теперь можно найти уравнения Гамильтона, позволяющие определить, как меняется со временем функционал  $F$  от  $\psi$  и  $\pi$ . Представим  $F$  в виде объемного интеграла от соответствующей плотности функционала  $F(\psi, \pi)$ , причем для простоты будем предполагать, что она не зависит явно от времени и от градиентов  $\psi$  или  $\pi$ . На основании полученных ранее результатов можно показать, что

$$\dot{F} = \int \left( \frac{\delta F}{\delta \psi} \dot{\psi} + \frac{\delta F}{\delta \pi} \dot{\pi} \right) d\tau = \int \left( \frac{\delta F}{\delta \psi} \frac{\delta H}{\delta \pi} - \frac{\delta F}{\delta \pi} \frac{\delta H}{\delta \psi} \right) d\tau \equiv \{F, H\}. \quad (45.20)$$

Это уравнение служит также определением скобок Пуассона для двух функционалов от переменных поля. Правая часть (45.20) не изменится, если  $F$  будет зависеть также от  $\text{grad } \psi$  или  $\text{grad } \pi$  (см. задачу 2). Из соотношения (45.20) вытекает, что если функция  $H$  не зависит явно от времени, то она является интегралом движения. В этом случае  $H$  есть полная энергия поля.

**Квантовые условия для поля.** Аналогия между координатами и импульсами частиц  $q_i, p_i$ , с одной стороны, и средними по объему ячейки от  $\psi_i, P_i$ , с другой, указывает на то, что в качестве правил перестановки для поля можно принять соотношения

$$[\psi_i, \psi_j] = [P_i, P_j] = 0, \quad [\psi_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (45.21)$$

Здесь скобки Пуассона определены в соответствии с (23.9). Это означает, что теперь волновое поле рассматривается уже не как функция, а как оператор, который, как и в § 23, можно представить в виде матрицы.

Допустим теперь, что объем ячейки очень мал. Тогда с помощью (45.12) и (45.15) соотношения (45.21) можно выразить через  $\psi$  и  $\pi$ :

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{r}, t), \psi(\mathbf{r}', t)] &= [\pi(\mathbf{r}, t), \pi(\mathbf{r}', t)] = 0, \\ [\psi(\mathbf{r}, t), \pi(\mathbf{r}', t)] &= i\hbar\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \end{aligned}$$

где  $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1/\delta\tau_i$ , если  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  лежат внутри одной и той же ячейки; в противном случае  $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ . Функция  $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  обладает тем свойством, что интеграл  $\int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\tau$  равен среднему значению  $f$  для ячейки, внутри которой находится  $\mathbf{r}'$ . Таким образом, в пределе, когда объемы ячеек стремятся к нулю,  $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  можно заменить трехмерной  $\delta$ -функцией Дирака  $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ , определяемой соотношением (11.14). Тогда правила перестановки для канонических переменных поля примут вид

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{r}, t), \psi(\mathbf{r}', t)] &= [\pi(\mathbf{r}, t), \pi(\mathbf{r}', t)] = 0, \\ [\psi(\mathbf{r}, t), \pi(\mathbf{r}', t)] &= i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (45.22)$$

Уравнение движения для любой квантовой динамической переменной  $F$  получается, как и в § 23, путем замены в (45.20) классической скобки Пуассона на квантовую:

$$i\hbar\dot{F} = [F, H]. \quad (45.23)$$

Если известны явные выражения  $F$  и  $H$  через  $\psi$  и  $\pi$ , то скобку Пуассона можно вычислить с помощью (45.22). Таким образом, равенства (45.22) и (45.23) полностью описывают поведение квантового поля, характеризуемого гамильтонианом  $H$ .

**Поля с несколькими компонентами.** До сих пор в настоящем параграфе мы имели дело с полями, которые можно описывать с помощью одной вещественной амплитуды. Если поле характеризуется несколькими компонентами  $\psi_1, \psi_2, \dots$ , то плотность лагранжиана имеет вид

$$L(\psi_1, \text{grad } \psi_1, \dot{\psi}_1, \psi_2, \text{grad } \psi_2, \dot{\psi}_2, \dots, t).$$

При этом если все компоненты поля  $\psi_1, \psi_2, \dots$  варьируются независимо, то для каждой из них вариационный принцип (45.3) приводит к уравнению вида (45.8) или (45.11). Для каждой компоненты  $\psi_s$  можно аналогично (45.15) определить канонически сопряженный импульс  $\pi_s = \partial L / \partial \dot{\psi}_s$ . Плотность гамильтониана имеет вид

$$H = \sum_s \pi_s \dot{\psi}_s - L, \quad (45.24)$$



а уравнения Гамильтона представляют собой систему двух уравнений типа (45.19), записанных для всех значений  $s$ . Уравнение (45.23) остается неизменным, а правила перестановки (45.22) заменяются следующими:

$$\begin{aligned} [\psi_s(\mathbf{r}, t), \psi_{s'}(\mathbf{r}', t)] &= [\pi_s(\mathbf{r}, t), \pi_{s'}(\mathbf{r}', t)] = 0, \\ [\psi_s(\mathbf{r}, t), \pi_{s'}(\mathbf{r}', t)] &= i\hbar \delta_{ss'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (45.25)$$

Непосредственный интерес представляет случай одного комплексного поля  $\psi$ , для которого можно написать

$$\psi = 2^{-1/2}(\psi_1 + i\psi_2), \quad \bar{\psi} = 2^{-1/2}(\psi_1 - i\psi_2), \quad (45.26)$$

где функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  вещественны. Покажем прежде всего, что уравнения вида (45.8), получаемые независимым варьированием  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , эквивалентны уравнениям, полученным в результате варьирования  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . В силу соотношений (45.26) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \psi} = 2^{-1/2} \left( \frac{\partial}{\partial \psi_1} - i \frac{\partial}{\partial \psi_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} = 2^{-1/2} \left( \frac{\partial}{\partial \psi_1} + i \frac{\partial}{\partial \psi_2} \right).$$

Таким образом, сумма и разность уравнения для  $\psi_1$  и умноженного на  $i$  уравнения для  $\psi_2$  дают уравнения Лагранжа, получаемые при независимом варьировании  $\bar{\psi}$  и  $\psi$  в интеграле (45.3). Аналогичным путем легко показать, что импульсы, канонически сопряженные соответственно с  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , равны<sup>1)</sup>:

$$\pi = 2^{-1/2}(\pi_1 - i\pi_2) \quad \text{и} \quad \bar{\pi} = 2^{-1/2}(\pi_1 + i\pi_2). \quad (45.27)$$

Тогда  $\pi_1 \dot{\psi}_1 + \pi_2 \dot{\psi}_2 = \pi \dot{\psi} + \bar{\pi} \dot{\bar{\psi}}$  и функция Гамильтона остается неизменной. Из соотношений (45.25) (где  $s = 1$  и  $2$ ), (45.26) и (45.27) можно получить правила перестановки для  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\pi$  и  $\bar{\pi}$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{r}, t), \pi(\mathbf{r}', t)] &= i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\bar{\psi}(\mathbf{r}, t), \bar{\pi}(\mathbf{r}', t)] &= i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (45.28)$$

тогда как все другие пары переменных коммутируют.

## § 46. Квантование нерелятивистского уравнения Шредингера

Применим прежде всего развитый выше метод квантования поля к нерелятивистскому уравнению Шредингера (6.16). Это означает, что мы будем рассматривать (6.16) как классическое уравнение движения некоторой жидкости. Как мы увидим, теория квантованных полей эквивалентна уравнению Шредингера для системы многих частиц типа (16.1) или (32.1). По этой причине квантование поля

<sup>1)</sup> См. примечание 1 на стр. 396.

называют также *вторичным квантованием*. При терминологии первичным квантованием является переход от классической механики частицы к уравнению (6.16).

**Уравнения Лагранжа и Гамильтона.** Плотность лагранжиана можно взять в виде:

$$L = i\hbar\bar{\psi}\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \text{grad } \bar{\psi} \cdot \text{grad } \psi - V(\mathbf{r}, t) \bar{\psi}\psi. \quad (46.1)$$

Как показано в конце предыдущего параграфа, при выводе уравнений Лагранжа функции  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  можно варьировать независимо. Уравнение типа (45.8), получаемое при варьировании  $\psi$ , имеет вид

$$-i\hbar\dot{\bar{\psi}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \bar{\psi} + V(\mathbf{r}, t) \bar{\psi}.$$

Оно комплексно сопряжено с уравнением (6.16). Последнее получается варьированием по  $\bar{\psi}$ :

$$i\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r}, t) \psi. \quad (46.2)$$

Импульс, канонически сопряженный с  $\psi$ , равен

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\bar{\psi}. \quad (46.3)$$

Однако величина  $\dot{\bar{\psi}}$  не входит в плотность лагранжиана и, следовательно, импульс  $\bar{\pi}$  тождественно равен нулю<sup>1)</sup>. Поэтому второе из правил перестановки (45.28) (или соответствующее классическое соотношение, выраженное с помощью скобки Пуассона) не может удовлетворяться, в связи с чем величины  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\pi}$  нельзя рассматривать как канонически сопряженные переменные. Их, однако, легко исключить из функции Гамильтона, так как  $\bar{\pi}$  в нее не входит, а функция  $\bar{\psi}$  связана с  $\pi$  по формуле (46.3)<sup>2)</sup>.

Плотность гамильтониана есть

$$H = \pi\dot{\psi} - L = -\frac{i\hbar}{2m} \text{grad } \pi \cdot \text{grad } \psi - \frac{i}{\hbar} V\pi\psi. \quad (46.4)$$

<sup>1)</sup> Из обозначений (45.27) не следует с необходимостью, что  $\bar{\pi}$  комплексно сопряжено с  $\pi$ , так как эти величины определяются как канонические импульсы. Легко видеть, что если функция  $L$  вещественна, то величины  $\pi$  и  $\bar{\pi}$  действительно являются комплексно сопряженными, в этом случае импульсы  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , фигурирующие в (45.27), также будут вещественными.

<sup>2)</sup> Вывод о том, что  $\pi$  можно отождествить с  $\bar{\psi}$ , связан с наличием в волновом уравнении (46.2) только первой производной по времени, так как в этом случае при помощи волнового уравнения  $\dot{\psi}$  можно выразить через  $\psi$  и ее пространственные производные. Если же в волновое уравнение входит вторая производная по времени, то функции  $\psi$  и  $\dot{\psi}$  будут независимы. В этом случае импульс  $\pi$  связан с  $\dot{\bar{\psi}}$ , а не с  $\bar{\psi}$ , и как  $\psi$ ,  $\pi$ , так и  $\dot{\bar{\psi}}$ ,  $\bar{\pi}$  будут представлять собой пары канонически сопряженных переменных. Нерелятивистское уравнение Шредингера и уравнение Дирака относятся к первому типу, релятивистское уравнение Шредингера — ко второму.

Уравнения Гамильтона, вытекающие из (45.19) и (45.18), имеют вид

$$\dot{\psi} = -\frac{i}{\hbar} V\psi + \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2\psi, \quad \dot{\pi} = \frac{i}{\hbar} V\pi - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2\pi.$$

Первое из этих уравнений совпадает с (46.2), а второе [с учетом (46.3)] комплексно сопряжено с ним. Таким образом, мы показали, исходя из классической теории поля, что плотность лагранжиана (46.1) и вытекающие из нее функция Гамильтона и канонические переменные согласуются с волновым уравнением (6.16) или (46.2).

**Квантовые условия.** Мы получим квантовые условия, допустив, что гамильтониан дается объемным интегралом (46.4), уравнения движения имеют вид (45.23), а первое из соотношений (45.28) представляет собой квантовое условие, накладываемое на волновое поле. Поскольку  $\psi$  является теперь не классической функцией, а оператором, то и функцию  $\bar{\psi}$  следует считать не комплексно, а эрмитово сопряженной с  $\psi$ . Поэтому в соответствии с § 21 мы будем обозначать этот оператор через  $\psi^*$ . Для удобства заменим  $\pi$  на  $i\hbar\psi^*$  с помощью (46.3); тогда гамильтониан примет вид

$$H = \int \left( \frac{\hbar^2}{2m} \text{grad } \psi^* \cdot \text{grad } \psi + V\psi^*\psi \right) d\tau. \quad (46.5)$$

Пользуясь (21.14) и (21.15), можно показать, что оператор  $H$  эрмитов.

Квантованный гамильтониан, определяемый формулой (46.5), характеризует полную энергию поля; его не следует смешивать с оператором энергии отдельной частицы (22.2), описываемой волновым уравнением (6.16) или (23.1). До сих пор мы не дали явного представления для операторов  $\psi$  и  $H$  и потому не можем сказать, на что они действуют. Пока мы имеем дело с уравнениями движения, выбор частного представления не является необходимым, но его желательно сделать, имея в виду последующее физическое истолкование развитого формализма.

Правила перестановки имеют вид

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')] &= [\psi^*(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r}')] = 0, \\ [\psi(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r}')] &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (46.6)$$

Отсутствие аргумента  $t$  у переменных поля означает, что они относятся к одному и тому же моменту времени<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Правила перестановки для величин, относящихся к различным моментам времени, представляют интерес в связи с релятивистскими теориями (см. § 47).

Подставляя  $\psi$  вместо  $F$  в (45.23), получим

$$i\hbar\dot{\psi} = [\psi, H] = \left[ \psi, \int \frac{\hbar^2}{2m} \text{grad}'\psi^{*'} \cdot \text{grad}'\psi' d\tau' \right] + \left[ \psi, \int V'\psi^{*'}\psi' d\tau' \right], \quad (46.7)$$

где штрихи означают, что в качестве переменной интегрирования вместо  $\mathbf{r}$  берется  $\mathbf{r}'$ . Второй член в правой части легко вычисляется при помощи (46.6), и мы получаем

$$\begin{aligned} \int V'(\psi\psi^{*'}\psi' - \psi^{*'}\psi'\psi) d\tau' &= \int V'(\psi\psi^{*'} - \psi^{*'}\psi)\psi' d\tau' = \\ &= \int V'\psi'\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = V\psi \quad (46.8) \end{aligned}$$

( $\psi$  коммутирует с классической функцией  $V$ ). Для вычисления первого члена в правой части (46.7) упростим его, проинтегрировав по частям:

$$\int \text{grad}'\psi^{*'} \cdot \text{grad}'\psi' d\tau' = - \int \psi^{*'} \nabla'^2 \psi' d\tau'.$$

Поверхностный интеграл обращается в нуль либо в силу быстрого убывания  $\psi$  на бесконечности, либо вследствие периодических граничных условий, накладываемых на  $\psi$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \left[ \psi, \int \text{grad}'\psi^{*'} \cdot \text{grad}'\psi' d\tau' \right] &= - \left[ \psi, \int \psi^{*'} \nabla'^2 \psi' d\tau' \right] = \\ &= - \int [\psi, \psi^{*'}] \nabla'^2 \psi' d\tau' = - \int (\nabla'^2 \psi') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = - \nabla^2 \psi. \quad (46.9) \end{aligned}$$

Подстановка (46.8) и (46.9) в (46.7) приводит к (46.2); таким образом, уравнения, получаемые в классической и в квантовой теориях поля, согласуются друг с другом. Аналогичное вычисление показывает, что из равенства  $i\hbar\dot{\psi}^{*'} = [\psi^{*'}, H]$  получается уравнение, эрмитово сопряженное с (46.2); непосредственно видно, что если оператор  $H$  эрмитов, то оно эрмитово сопряжено и с уравнением  $i\hbar\dot{\psi} = [\psi, H]$ .

Если  $V$  не зависит от  $t$ , то и  $H$  не зависит от времени явно, и из уравнения (45.23) видно, что  $H$  является интегралом движения. Поэтому энергия поля сохраняется. Другой интересный оператор дается выражением  $N = \int \psi^{*'}\psi d\tau$ . Мы допустим, что он представляет число частиц в поле. Отметим прежде всего, что оператор  $N$  эрмитов. Его производная по времени равна

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{N} &= [N, H] = \\ &= \left[ \int \psi^{*'}\psi d\tau, \int \left( \frac{\hbar^2}{2m} \text{grad}'\psi^{*'} \cdot \text{grad}'\psi' + V'\psi^{*'}\psi' \right) d\tau' \right]. \quad (46.10) \end{aligned}$$

Результат коммутирования  $N$  с оператором  $V$  можно записать в виде

$$\int \int V'(\psi^{*'}\psi\psi^{*'}\psi' - \psi^{*'}\psi'\psi^{*'}\psi) d\tau d\tau'.$$

При помощи соотношений (46.6) выражение в скобках под знаком интеграла преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} \psi^* \psi \psi'^* \psi' - \psi'^* \psi' \psi^* \psi &= \psi^* [\psi'^* \psi + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \psi' - \psi'^* \psi' \psi^* \psi = \\ &= \psi'^* \psi^* \psi' \psi + \psi^* \psi' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \psi'^* \psi' \psi^* \psi = \\ &= \psi'^* [\psi' \psi^* - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \psi + \psi^* \psi' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \psi'^* \psi' \psi^* \psi = 0 \end{aligned}$$

(здесь принято во внимание, что  $\delta$ -функция отлична от нуля только при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ). Аналогичное, но несколько более сложное вычисление показывает, что

$$[\psi^* \psi, \text{grad}' \psi'^* \cdot \text{grad}' \psi'] = [\psi^* \text{grad}' \psi' - (\text{grad}' \psi'^*) \psi] \cdot \text{grad}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Интеграл от этого выражения по  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  равен нулю. Таким образом, из (46.10) следует, что  $N$  — интеграл движения

Можно показать также, что интегралами движения являются и правила перестановки, так что если они имеют место в какой-нибудь один момент времени, то они будут верны и в любой другой момент.

**$N$ -представление.** Выберем теперь такое представление, в котором оператор  $N$  диагонален. Поскольку оператор  $N$  эрмитов, его собственные значения вещественны. Это представление удобно в общем виде ввести при помощи разложения по ортонормированным функциям  $u_k(\mathbf{r})$  типа (45.1). Для определенности будем считать индекс  $k$  дискретным. Положим

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_k a_k(t) u_k(\mathbf{r}), \quad \psi^*(\mathbf{r}, t) = \sum_k a_k^*(t) \bar{u}_k(\mathbf{r}), \quad (46.11)$$

где  $u_k$  — численные функции от пространственных координат, а  $a_k$  — операторы, зависящие от времени. Уравнения (46.11) можно решить относительно  $a_k$ :

$$a_k(t) = \int \bar{u}_k(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) d\tau, \quad a_k^* = \int u_k(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}, t) d\tau.$$

Таким образом, умножая обе части второго из правил перестановки (46.6) на  $\bar{u}_k(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}')$  и интегрируя по  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ , получаем, принимая во внимание ортонормированность функций  $u_k$

$$[a_k(t), a_l^*(t)] = \int \int \bar{u}_k(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau d\tau' = \delta_{kl}. \quad (46.12)$$

Таким же путем легко убедиться, что операторы  $a_k$  и  $a_l$ , а также  $a_k^*$  и  $a_l^*$  коммутируют при всех  $k$  и  $l$ . Подстановка (46.11) в выражение для  $N$  показывает, что

$$N = \sum_k N_k, \quad \text{где } N_k = a_k^* a_k. \quad (46.13)$$

Легко видеть, что все  $N_k$  коммутируют друг с другом, и, следовательно, их можно одновременно привести к диагональному виду.

Чтобы найти представление, в котором как  $N$ , так и все  $N_k$  диагональны, запишем операторы  $a_k$  в виде

$$a_k = 2^{-1/2}(q_k + ip_k), \quad a_k^* = 2^{-1/2}(q_k - ip_k), \quad (46.14)$$

где операторы  $q_k$  и  $p_k$  эрмитовы. Это всегда возможно, так как, обращая уравнения (46.14), мы имеем

$$q_k = 2^{-1/2}(a_k + a_k^*), \quad p_k = -i2^{-1/2}(a_k - a_k^*),$$

а эти операторы, очевидно, эрмитовы. Из соотношения (46.12) вытекает, что

$$[q_k, q_l] = [p_k, p_l] = 0, \quad [q_k, p_l] = i\delta_{kl} \quad (46.15)$$

и

$$N_k = \frac{1}{2}(p_k^2 + q_k^2) - \frac{1}{2}. \quad (46.16)$$

Уравнения (46.15) и (46.16) имеют то преимущество по сравнению с эквивалентными им соотношениями (46.12) и (46.13), что их решения уже были однажды получены в связи с задачей о линейном гармоническом осцилляторе. Теперь мы покажем, что с помощью некоторых результатов § 13 можно найти явные выражения для матриц  $p_k$  и  $q_k$ , причем матрицы  $N_k$  будут диагональны.

**Связь с гармоническим осциллятором.** Квантовое движение частицы с массой  $m$  под действием силы —  $Kx$ , где  $x$  — смещение из положения равновесия, рассматривалось в § 13 с точки зрения уравнения Шредингера. Как показано в § 22 и 23, решение этой задачи эквивалентно диагонализации матрицы энергии

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2,$$

где координата  $x$  и канонически сопряженный импульс  $p$  удовлетворяют правилу перестановки типа (23.13):

$$[x, p] = i\hbar.$$

Для собственных значений оператора энергии была получена формула (13.8):

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В представлении, в котором энергия диагональна, матрица  $x$  дается выражением (13.18)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Эти результаты можно получить также при помощи только матричных методов, не решая явно уравнения Шредингера (см. книгу Дирака [3], § 34).

Если теперь отождествить  $x$  с  $q_k$ ,  $p$  с  $p_k$ , а  $\hbar$ ,  $m$  и  $K$  положить равными единице, то мы сразу же увидим, что оператор  $N_k + 1/2$  совпадает с энергией осциллятора и собственные значения его равны  $n_k + 1/2$ , где  $n_k$  — положительное целое число или нуль. Тогда в силу (13.18) отличные от нуля матричные элементы  $q_k$  будут иметь вид

$$(q_k)_{n_k, n_k+1} = (q_k)_{n_k+1, n_k} = \left(\frac{n_k + 1}{2}\right)^{1/2} \quad (46.17)$$

(все прочие матричные элементы  $q_k$  обращаются в нуль). Матрицу  $p_k$  можно вычислить методом, использованным при выводе (13.18). Мы получаем

$$(p_k)_{n_k, n_k+1} = -(p_k)_{n_k+1, n_k} = -i\left(\frac{n_k + 1}{2}\right)^{1/2}, \quad (46.18)$$

а все остальные матричные элементы равны нулю. Теперь при помощи (46.14) можно найти матричные представления для операторов  $a_k$  и  $a_k^*$ :

$$(a_k)_{n_k, n_k+1} = (a_k^*)_{n_k+1, n_k} = (n_k + 1)^{1/2}. \quad (46.19)$$

Все другие матричные элементы обращаются в нуль. Поскольку при  $l \neq k$  величины  $q_k$ ,  $p_k$ ,  $a_k$ ,  $a_k^*$  коммутируют с  $N_l$ , из соотношений (46.17), (46.18) и (46.19) следует, что отличные от нуля матричные элементы связывают пары состояний, для которых все другие  $n_l$  одинаковы.

В задаче о гармоническом осцилляторе матрицу  $x$  можно связать с системой волновых функций  $u_n(x)$ , определяемых равенством (13.13), так что

$$x_{nn'} = \int \bar{u}_n(x) x u_{n'}(x) dx.$$

Можно ожидать, что матрицы  $q_k$ ,  $p_k$ ,  $a_k$  и  $a_k^*$  также будут аналогичным образом связаны с некоторыми величинами, играющими роль волновых функций в квантовой теории поля. Эти величины мы будем называть *волновыми функционалами*  $\Psi$  от чисел  $n_k$ ; их можно представлять в виде матриц с одним столбцом, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} \Psi^*(n_1, \dots, n_k, \dots) \Psi(n'_1, \dots, n'_k, \dots) &= \delta_{n_1 n'_1} \dots \delta_{n_k n'_k}, \\ \Psi^*(n_1, \dots, n_k, \dots) a_k \Psi(n'_1, \dots, n'_k, \dots) &= \\ &= (n_k + 1)^{1/2} \delta_{n_1 n'_1} \dots \delta_{n_k+1, n'_k} \dots, \quad (46.20) \\ \Psi^*(n_1, \dots, n_k, \dots) a_k^* \Psi(n'_1, \dots, n'_k, \dots) &= \\ &= n_k^{1/2} \delta_{n_1 n'_1} \dots \delta_{n_k-1, n'_k} \dots \end{aligned}$$

[в соответствии с (46.19)]. Равенства (46.20) эквивалентны утверждению о том, что волновые функционалы  $\Psi$  ортонормированы и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} a_k \Psi(n_1, \dots, n_k, \dots) &= n_k^{1/2} \Psi(n_1, \dots, n_k - 1, \dots), \\ a_k^* \Psi(n_1, \dots, n_k, \dots) &= (n_k + 1)^{1/2} \Psi(n_1, \dots, n_k + 1, \dots). \end{aligned} \quad (46.21)$$

**Физическая интерпретация.** Рассматривая  $N$  как оператор полного числа частиц квантованного поля, естественно допустить, что  $N_k$  есть оператор числа частиц в состоянии, описываемом функцией  $u_k(\mathbf{r})$ . Таким образом, мы приходим к результату, что при точном измерении числа частиц, находящихся в каком-либо состоянии, должно получаться положительное целое число или нуль. Тогда из формулы (46.13) следует, что это имеет место и для полного числа частиц.

Хотя  $N$  представляет собой интеграл движения, числа  $N_k$  таковыми быть не обязаны. Подставляя  $N_k$  в (45.23) вместо  $F$ , получаем

$$i\hbar N_k = [a_k^* a_k, H].$$

Гамильтониан  $H$  можно выразить через  $a_k$ , подставляя (46.11) в (46.5):

$$\begin{aligned} H &= \sum_{jl} a_j^* a_l \int \left( \frac{\hbar^2}{2m} \text{grad } \bar{u}_j \cdot \text{grad } u_l + V \bar{u}_j \cdot u_l \right) d\tau = \\ &= \sum_{jl} a_j^* a_l \int \bar{u}_j \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) u_l d\tau. \end{aligned} \quad (46.22)$$

При помощи соотношения (46.12) легко показать, что данный оператор  $N_k$  будет интегралом движения в том и только в том случае, когда в (46.22) будут равны нулю все объемные интегралы, для которых  $j$  или  $l$  совпадает с  $k$ . Эти интегралы представляют собой матричные элементы гамильтониана одной частицы (22.2). Таким образом, необходимое и достаточное условие, при котором  $N_k$  является интегралом движения, состоит в обращении в нуль всех недиагональных матричных элементов гамильтониана, содержащих функцию  $u_k$ <sup>1)</sup>.

Особенно интересен случай, когда  $u_k$  представляют собой собственные функции оператора (22.2), принадлежащие собственным значениям  $E_k$ . При этом интегралы в (46.22) равны  $E_l \delta_{jl}$  и гамильтониан поля принимает вид

$$H = \sum_k a_k^* a_k E_k = \sum_k N_k E_k. \quad (46.23)$$

<sup>1)</sup> Этот результат квантовой теории поля тесно связан с соответствующим результатом, содержащимся в (29.5) и относящимся к амплитуде вероятности для отдельной частицы.



В данном конкретном  $N$ -представлении оператор  $H$  также диагонален, волновому функционалу  $\Psi(n_1, \dots, n_k, \dots)$  соответствует собственное значение оператора полной энергии  $\sum_k n_k E_k$ . Очевидно, в этом случае все  $N_k$  суть интегралы движения.

Первое из соотношений (46.21) позволяет интерпретировать  $a_k$  как оператор уничтожения частицы в состоянии  $k$ , так как он превращает волновой функционал в кратное другого функционала, для которого числа частиц в данном состоянии меньше на единицу. Аналогично  $a_k^*$  можно рассматривать как оператор порождения, так как он увеличивает число частиц в состоянии  $k$  на единицу.

### Связь с уравнением Шредингера для системы многих частиц.

Теория квантованного поля тесно связана с уравнением Шредингера для системы многих частиц, рассмотренным в § 32. Если  $u_k$  представляют собой собственные функции гамильтониана одной частицы (22.2), то теория поля показывает, что существуют стационарные решения, в которых число частиц, находящихся в  $k$ -м состоянии  $n_k$ , представляет собой целую положительную величину или нуль, а энергия равна  $\sum_k n_k E_k$ . Каждое решение можно

охарактеризовать при помощи волнового функционала  $\Psi(n_1, \dots, n_k, \dots)$ , причем все функционалы  $\Psi$  образуют полную систему и для каждой последовательности чисел  $n_1, \dots$  имеется только одно решение. Если взаимодействие между частицами отсутствует, то стационарные волновые функции системы многих частиц, аналогичные функциям  $\psi$  (32.1), можно записать в виде произведения волновых функций  $u_k(\mathbf{r}) e^{-iE_k t/\hbar}$  отдельных частиц. Задавая число частиц, находящихся в каждом состоянии, можно однозначно определить линейные комбинации таких произведений, симметричные по отношению к перестановке координат любой пары частиц. Число частиц в каждом состоянии снова равно положительной целой величине или нулю, а полная энергия дается суммой энергий всех частиц.

Итак, развитая в настоящем параграфе теория квантованного поля эквивалентна уравнению Шредингера для нескольких взаимодействующих частиц, если брать при этом только симметричные решения. Таким образом, мы приходим к теории частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна. Можно показать, что обе теории будут полностью эквивалентны и при наличии взаимодействия между частицами<sup>1)</sup>.

Естественно спросить, нельзя ли как-либо видоизменить формализм теории квантованного поля, с тем чтобы получить теорию частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака.

<sup>1)</sup> См. книгу Гейзенберга [2], приложение, § 11.

Как показано в § 32, систему таких частиц можно описать с помощью волновой функции, антисимметричной относительно перестановки координат<sup>1)</sup> любых двух частиц. Соответствующую линейную комбинацию произведений одночастичных волновых функций можно однозначно определить, задавая число частиц в каждом состоянии, при условии, что эти числа могут принимать только значения нуль и единица. Таким образом, искомое видоизменение теории состоит в ограничении возможных собственных значений операторов  $N_k$  только нулем и единицей.

**Соотношения антикоммутиации.** Из предыдущего ясно, что область изменения собственных значений операторов  $N_k$  определяется правилами перестановки операторов  $a_k, a_k^*$ . Так из (46.12) следует, что числа  $N_k$  могут принимать любые целые неотрицательные значения. Но соотношения (46.12) вытекают из правил перестановки (46.6) для  $\psi$  и  $\psi^*$ . Поэтому, желая получить теорию частиц, подчиняющихся принципу Паули, нужно видоизменить равенства (46.6). При этом естественно потребовать, чтобы в том случае, когда гамильтониан имеет вид (46.5), квантовым уравнением движения для  $\psi$  было волновое уравнение (46.2).

Иордан и Вигнер [8] нашли, что искомое видоизменение состоит в замене в (45.22) и (46.6) коммутаторов

$$[A, B] \equiv AB - BA$$

на *антикоммутаторы*

$$[A, B]_+ \equiv AB + BA.$$

Это означает, что соотношения (46.6) заменяются следующими:

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')]_+ &= \psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}') + \psi(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}) = 0, \\ [\psi^*(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r}')]_+ &= \psi^*(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r}') + \psi^*(\mathbf{r}')\psi^*(\mathbf{r}) = 0, \\ [\psi(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r}')]_+ &= \psi(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r}') + \psi^*(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (46.24)$$

Тогда из (46.11) и (46.24) непосредственно вытекает, что

$$\begin{aligned} [a_k, a_l]_+ &= a_k a_l + a_l a_k = 0, \\ [a_k^*, a_l^*]_+ &= a_k^* a_l^* + a_l^* a_k^* = 0, \\ [a_k, a_l^*]_+ &= a_k a_l^* + a_l^* a_k = \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (46.25)$$

Как и раньше, положим  $N_k = a_k^* a_k$  и заметим, прежде всего, что операторы  $N_k$  коммутируют друг с другом, вследствие чего

<sup>1)</sup> Имеются в виду как пространственные, так и спиновые координаты — *Прим. перев.*

их можно одновременно привести к диагональному виду. Собственные значения их можно найти из матричного уравнения

$$N_k^2 = a_k^* a_k a_k^* a_k = a_k^* (1 - a_k^* a_k) a_k = a_k^* a_k = N_k, \quad (46.26)$$

при получении которого были использованы соотношения (46.25). Если матрица  $N_k$  приведена к диагональному виду и имеет собственные значения  $n'_k, n''_k, \dots$ , то ясно, что  $N_k^2$  также диагональна и собственные значения ее равны  $n'^2_k, n''^2_k, \dots$ . Поэтому матричное уравнение (46.26) эквивалентно алгебраическим уравнениям для собственных значений

$$n'^2_k = n'_k, \quad n''^2_k = n''_k, \quad \dots$$

Эти квадратные уравнения имеют по два корня, равных 0 и 1. Поэтому собственные значения каждого из операторов  $N_k$  равны 0 и 1, и частицы подчиняются принципу Паули. Как и раньше, собственные значения оператора  $N = \sum_k N_k$  представляют собой положительные целые числа (или нуль). Найденные выше выражения для гамильтониана (46.22) и (46.23) остаются неизменными, а собственные значения оператора энергии равны  $\sum_k n_k E_k$ .

**Уравнения движения.** Чтобы найти квантовое уравнение движения для  $\psi$  в случае гамильтониана (46.5), нужно решить, остается ли в силе общий вид (45.23) уравнения движения. Указанное уравнение было получено заменой в (45.20) классических скобок Пуассона на квантовые (т. е. на коммутаторы). Основанием для такой записи служила аналогия с теорией частиц, излагаемой в § 23, тождественность алгебраических свойств (23.12) для скобок обоого рода и, наконец, излагающиеся в гл. VI (задача 10) соображения соответствия. Таким образом, отказ от уравнения (45.23) означает также и отказ от классического уравнения (45.20). Поскольку многие интересующие нас величины (число частиц, энергия и т. д.) имеют вполне определенные классические аналоги, мы по-прежнему будем писать квантовое уравнение движения в виде (45.23).

Соответственно для оператора  $\psi$  мы получим уравнение (46.7), где теперь при вычислении правой части нужно использовать соотношения антикоммутации (46.24). Поэтому соотношение (46.8) заменяется следующим:

$$\begin{aligned} \int V' (\psi \psi^* \psi' - \psi^* \psi' \psi) d\tau' &= \int V' (\psi \psi^* + \psi^* \psi) \psi' d\tau' = \\ &= \int V' \psi' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = V\psi. \end{aligned}$$

Аналогичное преобразование первого члена в правой части (46.7) не изменяет правой части (46.9). Поэтому при замене коммутаторов на антикоммутаторы волновое уравнение (46.2) остается неизменным. Легко показать также, что как  $N$ , так и значения антикоммутаторов в (46.24) представляют собой интегралы движения.

**Физический смысл антикоммутации.** Поскольку антикоммутаторы не обладают алгебраическими свойствами скобок Пуассона, можно заключить, что величины  $\psi$  и  $a_k$ , удовлетворяющие соотношениям (46.24) и (46.25), не имеют классических аналогов. Это, однако, не означает отсутствия таких аналогов у операторов  $N$  и  $H$ : последние представляют собой билинейные комбинации  $\psi$  или  $a_k$  и коммутируют друг с другом.

Эти выводы можно подтвердить физическими соображениями. Чтобы амплитуду поля можно было измерить классическим путем, она должна быть достаточно велика, а для этого необходимо, чтобы в одном и том же состоянии было очень много частиц (тогда их поля когерентны). Следовательно, такие частицы должны подчиняться статистике Бозе — Эйнштейна. Так, например, можно утверждать, что световые кванты (фотоны) подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, ибо известно, что действительно можно создать сильные электрические и магнитные поля и измерить их классическим путем. С другой стороны, в случае электронов в металле, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака, величины типа энергии, заряда и плотность тока можно измерить классически, поскольку они допускают представление в виде билинейных комбинаций амплитуд поля, тогда как амплитуда электронного поля сама по себе не является измеримой<sup>1)</sup>.

**Представление антикоммутирующих операторов  $a_k$ .** Явное представление операторов, фигурирующих в (46.25), легко получить в гипотетическом, но поучительном случае, когда система имеет только одно состояние. Тогда задача сводится к решению матричных уравнений

$$a^2 = a^{*2} = 0, \quad aa^* + a^*a = 1, \quad N = a^*a. \quad (46.27)$$

Но такие уравнения уже решались в задаче 3 в гл. VI. Мы уже видели [см. (46.26)], что  $N^2 = N$ , так что собственные значения  $N$  равны 0 и 1. Если вырождение отсутствует, то  $N$  можно представить в виде диагональной матрицы

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (46.28)$$

<sup>1)</sup> Возможность классически измерить амплитуду поля какой-либо заряженной частицы (подчиняющейся статистике Бозе — Эйнштейна или Ферми — Дирака) означает, что  $\psi$  входит в  $H$  линейно, так как в этом случае энергия должна зависеть не только от билинейных комбинаций  $\psi$ , но и от самой функции. Это в свою очередь означает, что в гамильтониан входят члены, линейные относительно  $a_k$  или  $a_k^*$  и, следовательно, возможно уничтожение или порождение отдельных заряженных частиц. Поэтому, если в теории имеет место закон сохранения электрического заряда, то  $\psi$  нельзя измерить классическим путем.

Интересно отметить, что матрицу  $a$  нельзя диагонализировать, так как  $N$  имеет отличное от нуля собственное значение. В противном случае первое из уравнений (46.27) означало бы, что квадраты всех собственных значений  $a$  равны нулю. Это означало бы, что  $a$ , а потому также  $a^*$  и  $N$ , тождественно равны нулю и, следовательно, матрица  $N$  ни в каком представлении не могла бы иметь вид (46.28).

Явные выражения матриц  $a$  и  $a^*$ , согласующиеся с (46.27) и (46.28), имеют вид

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (46.29)$$

Два волновых функционала, описывающие два возможных состояния данной системы, можно представить в виде

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (46.30)$$

Легко видеть, что первому из них принадлежит нулевое собственное значение оператора  $N$ , а второму — собственное значение, равное 1. Из (46.29) и (46.30) легко получаются соотношения:

$$a\Psi(n) = n\Psi(1-n), \quad a^*\Psi(n) = (1-n)\Psi(1-n), \quad n = 0, 1. \quad (46.31)$$

Поэтому  $a$  и  $a^*$  снова играют роль соответственно операторов уничтожения и порождения.

В практически встречающихся задачах число состояний системы бесконечно, и выписывать явные матричные представления типа (46.28) — (46.30) оказывается неудобным. Однако можно найти результат действия операторов  $a_k$  и  $a_k^*$  на волновой функционал  $\Psi(n_1, \dots, n_k, \dots)$ , соответствующий собственному значению  $n_k$  (0 или 1) оператора  $N_k$ . Искомые соотношения имели бы вид (46.31), если бы не то обстоятельство, что система подобных уравнений (с дополнительными индексами) не удовлетворяет первым двум равенствам (46.25).

В связи с этим мы поступим следующим образом. Расположим состояния системы в произвольном, но определенном порядке:  $1, 2, \dots, k$ . Тогда действие операторов  $a_k$  или  $a_k^*$  на  $\Psi$  с точностью до знака определяется равенствами (46.31), причем появление знака плюс или минус в правой части зависит от четности или нечетности числа занятых состояний, предшествующих состоянию  $k$ . Иначе говоря, вместо соотношений (46.21) получаем

$$\begin{aligned} a_k \Psi(n_1, \dots, n_k, \dots) &= \theta_k n_k \Psi(n_1, \dots, 1 - n_k, \dots), \\ a_k^* \Psi(n_1, \dots, n_k, \dots) &= \theta_k (1 - n_k) \Psi(n_1, \dots, 1 - n_k, \dots), \end{aligned} \quad (46.32)$$

$$\theta_k = (-1)^{\nu_k}, \quad \nu_k = \sum_{j=1}^{k-1} n_j.$$

Вычислим, например, результат действия операторов  $a_k a_l$  и  $a_l a_k$  на волновой функционал  $\Psi$ , причем для определенности будем считать  $l > k$ . Если при каждой операции результат отличен от нуля, то в первоначальном волновом функционале оба числа  $n_k$  и  $n_l$  должны равняться единице. При действии оператора  $a_k a_l$  освобождается сначала  $l$ -е, а затем  $k$ -е состояние и появляется множитель  $\theta_l \theta_k$ . При действии оператора  $a_l a_k$  освобождается сначала  $k$ -е состояние, так что  $\theta_k$  остается неизменным. Но в этом случае при освобождении  $l$ -го состояния в предыдущих состояниях имеется на одну частицу меньше, чем раньше, так как  $k$ -е состояние теперь уже свободно (тогда как раньше оно было занято). Соответственно изменяется знак  $\theta_l$ . В результате в соответствии с первым из соотношений (46.25) мы получим

$$a_k a_l \Psi = - a_l a_k \Psi.$$

Аналогично можно показать, что соотношения (46.32) согласуются с результатом действия двух других операторных уравнений (46.25) на произвольный функционал  $\Psi$ . Поскольку совокупность волновых функционалов характеризует все возможные состояния системы многих частиц, они образуют полную систему, и из (46.32) вытекает справедливость операторных уравнений (46.25).

### § 47. Квантование уравнения Дирака

В качестве второго примера рассмотрим квантование релятивистского уравнения Дирака (43.3), описывающего свободный электрон. Уравнение для одной частицы снова будем рассматривать как классическое уравнение поля. Соответствующая теория квантованного поля описывает движение многих невзаимодействующих свободных электронов.

**Уравнения Лагранжа и Гамильтона.** Волновая функция Дирака  $\psi$  имеет четыре компоненты, которые мы обозначим через  $\psi_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). В качестве плотности лагранжиана можно взять выражение

$$L = \sum_j \psi_j \left( i\hbar \dot{\psi}_j - i\hbar c \sum_l \alpha_{jl} \cdot \text{grad } \psi + mc^2 \sum_l \beta_{jl} \psi_l \right), \quad (47.1)$$

где матрицы  $\alpha_{jl}$  и  $\beta_{jl}$  имеют вид (43.12). Теперь следует воспользоваться обобщением теории поля на случай нескольких компонент (см. конец § 45). Варьируя  $\psi_l$  — одну из компонент  $\psi$ , получаем уравнение типа (45.8):

$$mc^2 \sum_j \psi_j \beta_{jl} + i\hbar c \sum_j \text{grad } \psi_j \cdot \alpha_{jl} - i\hbar \dot{\psi}_l = 0. \quad (47.2)$$

Четыре уравнения типа (47.2) можно записать в виде одного уравнения

$$-i\hbar\psi^* + i\hbar c \operatorname{grad} \psi^* \cdot \alpha + mc^2 \psi^* \beta = 0,$$

где  $\psi^*$  — матрица, эрмитово сопряженная с  $\psi$  и содержащая одну строку и четыре столбца. Это уравнение эрмитово сопряжено с (43.3). Аналогичным путем легко показать, что при варьировании (независимом) по компонентам  $\varphi_j$  получаются четыре уравнения, которые совместно можно записать в виде

$$i\hbar\dot{\varphi} - i\hbar c \alpha \cdot \operatorname{grad} \varphi + mc^2 \beta \varphi = 0, \quad (47.3)$$

совпадающем с уравнением Дирака (43.3).

Импульс, канонически сопряженный с  $\varphi_j$ , есть

$$\pi_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_j} = i\hbar \dot{\varphi}_j. \quad (47.4)$$

Как и в случае нерелятивистского уравнения Шредингера, импульс  $\bar{\pi}_j$ , канонически сопряженный с  $\varphi_j$ , тождественно равен нулю; поэтому  $\varphi_j$  следует исключить из гамильтониана при помощи (47.4). При этом плотность гамильтониана будет равна

$$H = \sum_j \pi_j \dot{\varphi}_j - L = c \sum_{jl} \pi_j \alpha_{jl} \cdot \operatorname{grad} \varphi_l + \frac{imc^2}{\hbar} \sum_{jl} \pi_j \beta_{jl} \varphi_l. \quad (47.5)$$

Легко показать (см. задачу 12), что первое из уравнений Гамильтона (45.19) приводит к уравнению (47.3), второе [с учетом (47.4)] — к эрмитово сопряженному уравнению. Этим завершается доказательство согласованности выражений (47.1), (47.4) и (47.5) с уравнением Дирака.

**Квантовые условия.** Как и в случае нерелятивистского уравнения Шредингера, гамильтониан удобно переписать с помощью соотношения (47.4):

$$\begin{aligned} H &= \int \left( i\hbar c \sum_{jl} \dot{\varphi}_j \alpha_{jl} \cdot \operatorname{grad} \varphi_l - mc^2 \sum_{jl} \dot{\varphi}_j \beta_{jl} \varphi_l \right) d\tau = \\ &= \int (i\hbar c \psi^* \alpha \cdot \operatorname{grad} \psi - mc^2 \psi^* \beta \psi) d\tau. \end{aligned} \quad (47.6)$$

Выражение (47.6) является вещественным, хотя это и трудно сказать по его внешнему виду. В этом можно убедиться, проинтегрировав по частям половину первого члена, для чего удобно переписать интеграл в виде

$$H = \int \left[ \frac{1}{2} i\hbar c (\psi^* \alpha \cdot \operatorname{grad} \psi - \operatorname{grad} \psi^* \cdot \alpha \psi) - mc^2 \psi^* \beta \psi \right] d\tau. \quad (47.7)$$

Интеграл по поверхности обращается в нуль либо вследствие обращения  $\varphi$  в нуль на бесконечности, либо в силу периодических граничных условий.

В § 32 мы уже видели, что электроны подчиняются принципу Паули. Поэтому при квантовании поля мы будем считать, что компоненты  $\varphi$  подчиняются соотношениям антикоммутиации. Последние с помощью (47.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} [\varphi_j(\mathbf{r}), \varphi_i(\mathbf{r}') ]_+ &= [\varphi_j^*(\mathbf{r}), \varphi_i^*(\mathbf{r}') ]_+ = 0, \\ [\varphi_j(\mathbf{r}), \varphi_i^*(\mathbf{r}') ]_+ &= \delta_{jl} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (47.8)$$

Замена  $\varphi_j$  на  $\varphi_j^*$  связана с тем, что теперь компоненты  $\varphi_j$  представляют собой не функции, а операторы. Под  $\varphi^*$  мы подразумеваем матрицу с одной строкой и четырьмя столбцами, элементами которой являются операторы  $\varphi_j^*$ .

Квантовое уравнение движения для  $\varphi$  получается заменой в (45.23)  $F$  на  $\varphi_j$ , причем гамильтониан  $H$  дается формулой (47.6) или (47.7):

$$i\hbar\dot{\varphi}_i = \left[ \varphi_j, \int \left( i\hbar c \sum_{kl} \varphi_k^* \alpha_{kl} \cdot \text{grad}' \varphi_l' - mc^2 \sum_{kl} \varphi_k^* \beta_{kl} \varphi_l' \right) d\tau' \right]. \quad (47.9)$$

Штрихи означают, что в качестве переменной интегрирования вместо  $\mathbf{r}$  берется  $\mathbf{r}'$ . При помощи соотношений (47.8) второй член в правой части можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left[ \varphi_j, \int -mc^2 \sum_{kl} \varphi_k^* \beta_{kl} \varphi_l' d\tau' \right] &= \\ &= -mc^2 \sum_{kl} \beta_{kl} \int [\varphi_j, \varphi_k^* \varphi_l'] d\tau' = \\ &= -mc^2 \sum_{kl} \beta_{kl} \int (\varphi_j \varphi_k^* \varphi_l' - \varphi_k^* \varphi_l' \varphi_j) d\tau' = \\ &= -mc^2 \sum_{kl} \beta_{kl} \int (\varphi_j \varphi_k^* + \varphi_k^* \varphi_j) \varphi_l' d\tau' = \\ &= -mc^2 \sum_{kl} \beta_{kl} \delta_{jk} \int \varphi_l' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = -mc^2 \sum_l \beta_{jl} \varphi_l. \end{aligned}$$

Первый член в правой части (47.9) вычисляется таким же образом, поскольку  $\varphi_j$  антикоммутирует как с  $\varphi_l'$ , так и с  $\text{grad}' \varphi_l'$ .

$$\left[ \varphi_j, \int i\hbar c \sum_{kl} \varphi_k^* \alpha_{kl} \cdot \text{grad}' \varphi_l' d\tau' \right] = i\hbar c \sum_l \alpha_{jl} \cdot \text{grad} \varphi_l.$$

Таким образом, четыре уравнения типа (47.9) эквивалентны уравнению Дирака (47.3). Аналогичный расчет показывает, что



из четырех уравнений  $i\hbar\dot{\psi}_j^* = [\psi_j^*, H]$  получается уравнение, эрмитово сопряженное с (47.3).

Оператор полного числа  $N$  электронов в поле можно записать в виде

$$N = \int \psi^* \psi d\tau = \int \sum_j \psi_j^* \psi_j d\tau. \quad (47.10)$$

Этот оператор эрмитов. Нетрудно показать также, что

$$i\hbar\dot{N} = [N, H] = 0,$$

т. е.  $N$  является интегралом движения (см. задачу 13). Как и в нерелятивистской теории (§ 46), можно показать, что значения антикоммутиров в (47.8) не изменяются с течением времени.

**$N$ -представление.** Чтобы найти представление, в котором оператор  $N$  диагонален, оказывается удобным разложить  $\psi$  по плоским волнам, удовлетворяющим уравнению Дирака для свободного электрона. Весь расчет протекает так же, как и в предыдущем параграфе, но несколько осложняется наличием нескольких компонент у дираковского поля. Различные компоненты мы по-прежнему будем обозначать индексами  $j$  или  $l$  (принимающими четыре значения). Волновой вектор плоской волны (равный импульсу, деленному на  $\hbar$ ) будем обозначать через  $\mathbf{k}$ . Будем считать, что плоские волны подчиняются периодическим граничным условиям на стенках куба с ребром  $L$ .

В § 43 мы видели, что каждому значению  $\mathbf{k}$  соответствуют четыре решения, которые мы будем различать индексом  $s$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ). Таким образом, решение уравнения Дирака для одного свободного электрона характеризуется величинами  $\mathbf{k}$  и  $s$ . Полная система таких решений, ортонормированная в кубе объема  $L^3$ , имеет вид

$$v_j(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}) = u_j(\mathbf{k}, s) L^{-3/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (47.11)$$

Здесь величины  $u_j(\mathbf{k}, s)$  представляют собой числа, которые можно найти, умножая четыре значения  $u_j$ , определяемые формулами (43.17) и (43.18), на указанный там нормирующий множитель. Два решения (43.17) мы будем обозначать, полагая  $s$  равным 1 и 2; они соответствуют двум ориентациям спина при положительном значении энергии

$$E_{\mathbf{k}s} = +(\hbar^2 c^2 \mathbf{k}^2 + m^2 c^4)^{1/2}, \quad s = 1, 2. \quad (47.12)$$

Два решения (43.18) соответствуют отрицательному значению энергии:

$$E_{\mathbf{k}s} = -(\hbar^2 c^2 \mathbf{k}^2 + m^2 c^4)^{1/2}, \quad s = 3, 4. \quad (47.13)$$

Легко видеть, что соотношения ортонормированности для функций  $v_j$ , определяемых формулой (47.11), имеют вид

$$\int \sum_j \bar{v}_j(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}) v_j(\mathbf{k}', s'; \mathbf{r}) d\tau = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \quad (47.14)$$

По аналогии с (46.11) разложим  $\psi_j$  и  $\psi_j^*$  по функциям  $v_j$ :

$$\begin{aligned} \psi_j(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}s} a(\mathbf{k}, s; t) v_j(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}), \\ \psi_j^*(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}s} a^*(\mathbf{k}, s; t) \bar{v}_j(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (47.15)$$

Коэффициенты  $a$  и  $a^*$  представляют собой квантовомеханические операторы, зависящие от времени. При помощи условия ортонормированности (47.14) легко показать, что соотношения антикоммутиации (47.8) эквивалентны условиям

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}, s; t), a(\mathbf{k}', s'; t)]_+ &= [a^*(\mathbf{k}, s; t), a^*(\mathbf{k}', s'; t)]_+ = 0, \\ [a(\mathbf{k}, s; t), a^*(\mathbf{k}', s'; t)]_+ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \end{aligned} \quad (47.16)$$

Подставляя (47.15) в (47.10), находим

$$N = \sum_{\mathbf{k}s} N_{\mathbf{k}s}, \quad \text{где } N_{\mathbf{k}s} = a^*(\mathbf{k}, s; t) a(\mathbf{k}, s; t). \quad (47.17)$$

Из результатов § 46 следует, что собственные значения операторов  $N_{\mathbf{k}s}$  равны 0 и 1, так что в каждом состоянии (характеризуемом ориентацией спина, значением импульса и знаком энергии) может находиться не более одного электрона. Можно выписать также и явные выражения для  $a$ , подобные (46.32).

Подставляя (47.15) в гамильтониан поля (47.6), получаем

$$\begin{aligned} H &= \sum_{jl} \int (i\hbar c \psi_j^* a_{jl} \cdot \text{grad } \psi_l - mc^2 \psi_j^* \beta_{jl} \psi_l) d\tau = \\ &= \sum_{jl} \int \sum_{\mathbf{k}s} \sum_{\mathbf{k}'s'} a^*(\mathbf{k}, s; t) a(\mathbf{k}', s'; t) \bar{v}_j(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}) \times \\ &\quad \times (i\hbar c a_{jl} \cdot \text{grad} - mc^2 \beta_{jl}) v_l(\mathbf{k}', s'; \mathbf{r}) d\tau. \end{aligned}$$

Из уравнений (43.16) следует, что функции  $v_j$ , определяемые формулой (47.11), удовлетворяют равенству

$$\sum_l (i\hbar c a_{jl} \cdot \text{grad} - mc^2 \beta_{jl}) v_l(\mathbf{k}', s'; \mathbf{r}) = E_{\mathbf{k}'s'} v_j(\mathbf{k}', s'; \mathbf{r}).$$

На основании (47.14) мы получаем

$$H = \sum_{\mathbf{k}s} a^*(\mathbf{k}, s; t) a(\mathbf{k}, s; t) E_{\mathbf{k}s} = \sum_{\mathbf{k}s} N_{\mathbf{k}s} E_{\mathbf{k}s}, \quad (47.18)$$

где  $E_{\mathbf{k}s}$  имеют вид (47.12) и (47.13). Поскольку операторы  $N_{\mathbf{k}s}$  коммутируют друг с другом, а следовательно, и с  $H$ , отсюда непосредственно вытекает, что числа  $N_{\mathbf{k}s}$  представляют собой интегралы движения.

**Состояния с отрицательной энергией и позитроны.** Все результаты, полученные до сих пор в настоящем параграфе, не зависят от того, коммутируют или антикоммутируют различные операторы  $\psi$  и  $a$ . Поэтому может показаться, что теория Дирака способна описывать как частицы с целым спином подчиняющиеся статистике Бозе — Эйнштейна, так и электроны, подчиняющиеся принципу Паули. Однако легко видеть, что оператор энергии поля (47.18) имеет отрицательные собственные значения сколь угодно большой абсолютной величины, соответствующие электронам в состояниях с отрицательной энергией ( $s = 3, 4$ ). Существование подобных собственных значений означает, что при учете электромагнитных взаимодействий равновесное состояние поля вообще невозможно, так как электрон будет излучать фотоны, переходя при этом в состояния со все более низкой энергией. Если предположить, что частицы подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, то избежать этой трудности невозможно.

Дирак предложил<sup>1)</sup> исключить из теории нежелательные переходы в состояния с отрицательной энергией, предположив, что в нормальном состоянии вакуума все состояния с положительной энергией свободны, а все состояния с отрицательной энергией заняты :

$$N_{k1} = N_{k2} = 0, N_{k3} = N_{k4} = 1 \text{ для всех } k. \quad (47.19)$$

Это состояние поля является равновесным, так как в силу принципа Паули переходы в состояния с отрицательной энергией невозможны. Кроме того, предполагается, что бесконечная плотность электронов с отрицательной энергией не дает каких-либо наблюдаемых электромагнитных или гравитационных эффектов, но отклонения от вакуумных значений (47.19) можно наблюдать обычным образом. Поэтому из операторов полной энергии ( $H$ ) и полного заряда ( $eN$ ), где  $e$  — заряд электрона (отрицательный), следует вычесть вакуумные значения этих величин :

$$\sum_k \sum_{s=3,4} E_{ks} \text{ и } \sum_k \sum_{s=3,4} e.$$

В результате для полного наблюдаемого заряда получаем выражение :

$$e \sum_k \left( \sum_{s=1,2} N_{ks} - \sum_{s=3,4} N'_{ks} \right), N'_{ks} \equiv 1 - N_{ks} = a(\mathbf{k}, s; t) a^*(\mathbf{k}, s; t). \quad (47.20)$$

Собственное значение нового оператора  $N'_{ks}$  равно нулю (единице), если состояние  $ks$  заполнено (свободно). Аналогично для полной наблюдаемой энергии имеем :

$$\sum_k \left( \sum_{s=1,2} N_{ks} E_{ks} + \sum_{s=3,4} N'_{ks} |E_{ks}| \right). \quad (47.21)$$

<sup>1)</sup> См. также [9].

В силу (47.20) каждая частица с положительной энергией ведет себя как отрицательно заряженный электрон, тогда как *отсутствии* частицы с отрицательной энергией проявляется как положительно заряженный электрон. При этом (47.21) показывает, что наблюдаемая энергия положительна и равна сумме положительных членов для всех частиц с положительной энергией и для всех отсутствующих частиц с отрицательной энергией. Поэтому „дырки” среди занятых состояний с отрицательной энергией естественно истолковывать как положительно заряженные электроны или позитроны. Из соотношения (47.13) между энергией и импульсом вытекает, что позитроны имеют такую же массу покоя, что и электроны. На основе этой теории Дирак предсказал существование позитронов до их открытия в космических лучах<sup>1)</sup>.

Мы видели, что теорию Дирака, описывающую частицы со спином  $\hbar/2$ , можно квантовать только в соответствии с принципом Паули. Этот вывод представляет собой частный случай общего результата, полученного Паули [10], согласно которому частицы с нулевым или целым спином подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, а частицы с полуцелым спином — статистике Ферми — Дирака. Связь между спином и статистикой может быть установлена только для релятивистских теорий. Например, состояния с отрицательной энергией, не позволяющие квантовать уравнение Дирака по статистике Бозе — Эйнштейна, появляются только в релятивистской теории, а нерелятивистское уравнение Шредингера в § 46 успешно квантовалось обоими способами.

### Соотношения антикоммутации для различных моментов времени.

Все использовавшиеся до настоящего времени соотношения коммутации и антикоммутации относились к величинам, взятым в один и тот же момент времени. Однако в релятивистской теории есть основания интересоваться такими соотношениями и для величин, соответствующих различным моментам времени. При помощи таких соотношений можно исследовать причинные связи между событиями, происходящими в различные моменты времени в разных точках пространства, и тем самым изучать релятивистские свойства теории поля в целом.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим какую-нибудь физически наблюдаемую величину (например, плотность числа частиц или заряда), которую можно изобразить оператором, зависящим от  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Интересно выяснить, при каких условиях ее можно изме-

<sup>1)</sup> Дальнейшее обсуждение формальных аспектов теории позитрона можно найти в книге Вентцеля [1], гл. 5. (См. также работы Иваненко и Соколова [13] и Ахизера и Берестецкого [14]. — *Прим. перев.*)

речь в различных точках пространства — времени так, чтобы одно измерение не мешало другому. Такие измерения можно произвести, если операторы, характеризующие наблюдаемую величину в разных точках, коммутируют друг с другом. В этом случае соответствующие матрицы можно одновременно привести к диагональному виду, и, следовательно, оба измерения дадут точные результаты (собственные значения). Можно ожидать, что величины, взятые в различных точках пространства, но в один и тот же момент времени, будут коммутировать, так как никакое действие не может быть передано на конечное расстояние за нулевой промежуток времени. В нерелятивистской теории это необязательно должно иметь место, так как в ней не налагается ограничений на скорость передачи взаимодействия. В релятивистской же теории следует ожидать коммутации любых величин, если расстояние между точками, в которых они взяты, превышает умноженный на  $c$  соответствующий промежуток времени. Поэтому соотношения коммутации или антикоммутации для величин, взятых в различные моменты времени, могут служить для непосредственной физической проверки релятивистского характера теории, тогда как в нерелятивистской теории они не представляют большого интереса.

Обобщение соотношений антикоммутации (47.8) или (47.16) на случай разных моментов времени удобно произвести с помощью уравнений движения для операторов  $a$ . В силу (45.23), (47.16) и (47.18) имеем

$$\begin{aligned}i\hbar\dot{a}(\mathbf{k}, s; t) &= [a(\mathbf{k}, s; t), H] = E_{\mathbf{k}s}a(\mathbf{k}, s; t), \\i\hbar\dot{a}^*(\mathbf{k}, s; t) &= [a^*(\mathbf{k}, s; t), H] = -E_{\mathbf{k}s}a^*(\mathbf{k}, s; t).\end{aligned}$$

Эти уравнения легко интегрируются, и мы получаем

$$\begin{aligned}a(\mathbf{k}, s; t) &= a(\mathbf{k}, s; 0)e^{-iE_{\mathbf{k}s}t/\hbar}, \\a^*(\mathbf{k}, s; t) &= a^*(\mathbf{k}, s; 0)e^{iE_{\mathbf{k}s}t/\hbar}.\end{aligned}\tag{47.22}$$

Равенства (47.16) справедливы для того случая, когда оба момента времени совпадают. Эти моменты можно принять за начало отсчета времени; тогда на основании (47.22) находим

$$\begin{aligned}[a(\mathbf{k}, s; t), a(\mathbf{k}', s'; t')]_+ &= [a^*(\mathbf{k}, s; t) a^*(\mathbf{k}', s'; t')]_+ = 0, \\[a(\mathbf{k}, s; t), a^*(\mathbf{k}', s'; t')]_+ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'} e^{iE_{\mathbf{k}s}(t'-t)/\hbar}.\end{aligned}\tag{47.23}$$

Подставляя (47.23) в (47.15), можно вычислить соотношения антикоммутации для операторов  $\psi$ , взятых в различные моменты времени. Ясно, что

$$[\psi_j(\mathbf{r}, t), \psi_i(\mathbf{r}', t')]_+ = [\psi_j^*(\mathbf{r}, t), \psi_i^*(\mathbf{r}', t')]_+ = 0.\tag{47.24}$$

Антикоммутатор  $\psi$  и  $\psi^*$  принимает вид

$$\begin{aligned} [\psi_j(\mathbf{r}, t), \psi_l^*(\mathbf{r}', t')]_+ &= \\ &= \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'s's'} [a(\mathbf{k}, s; t), a^*(\mathbf{k}', s'; t')]_+ v_j(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}) \bar{v}_l(\mathbf{k}', s'; \mathbf{r}') = \\ &= \sum_{\mathbf{k}s} v_j(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}) \bar{v}_l(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}') e^{iE_{\mathbf{k}s}(t'-t)/\hbar}. \end{aligned} \quad (47.25)$$

Если бы энергия  $E_{\mathbf{k}s}$  не имела различных знаков при различных  $s$ , то последнюю сумму можно было бы сразу упростить с помощью условия полноты

$$\sum_s u_j(\mathbf{k}, s) \bar{u}_l(\mathbf{k}, s) = \delta_{jl}, \quad (47.26)$$

вытекающего из выражений (43.17) и (43.18).

Однако соотношением (47.26) все же можно воспользоваться, если переписать экспоненциальные выражения в (47.25) так, чтобы индекс  $s$  не входил туда явно. Положим

$$\begin{aligned} e^{-iE_{\mathbf{k}s}\tau/\hbar} &= \cos \frac{E_{\mathbf{k}s}\tau}{\hbar} - i \sin \frac{E_{\mathbf{k}s}\tau}{\hbar} = \\ &= \cos \frac{|E_{\mathbf{k}s}|\tau}{\hbar} - \frac{iE_{\mathbf{k}s}}{\hbar} \frac{\sin(|E_{\mathbf{k}s}|\tau/\hbar)}{|E_{\mathbf{k}s}|/\hbar}, \end{aligned}$$

где  $\tau = t - t'$ ,  $k_0 = mc/\hbar$ , а величина  $|E_{\mathbf{k}s}|/\hbar = +c(k^2 + k_0^2)^{1/2}$  не зависит от  $s$ . Это выражение можно переписать в виде

$$e^{-iE_{\mathbf{k}s}\tau/\hbar} = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{iE_{\mathbf{k}s}}{\hbar} \right) \frac{\sin c\tau(k^2 + k_0^2)^{1/2}}{c(k^2 + k_0^2)^{1/2}}.$$

Остающийся множитель  $E_{\mathbf{k}s}$  можно заменить оператором

$$E_{\mathbf{k}s} v_j(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}) = \sum_{j'} (i\hbar c \alpha_{j'l} \cdot \text{grad} - mc^2 \beta_{j'l}) v_{l'}(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}).$$

Подставляя в (47.25) и пользуясь (47.26), получаем

$$\begin{aligned} [\psi_j(\mathbf{r}, t), \psi_l^*(\mathbf{r}', t')]_+ &= \sum_{\mathbf{k}, s} \bar{v}_l(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}') \times \\ &\times \sum_{j'} \left( \delta_{j'l'} \frac{\partial}{\partial \tau} + c \alpha_{j'l'} \cdot \text{grad} + i c k_0 \beta_{j'l'} \right) v_{l'}(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}) \frac{\sin c\tau(k^2 + k_0^2)^{1/2}}{c(k^2 + k_0^2)^{1/2}} = \\ &= \left( \delta_{jl} \frac{\partial}{\partial \tau} + c \alpha_{jl} \cdot \text{grad} + i c k_0 \beta_{jl} \right) \sum_{\mathbf{k}} L^{-3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{\sin c\tau(k^2 + k_0^2)^{1/2}}{c(k^2 + k_0^2)^{1/2}} = \\ &= \left( \delta_{il} \frac{\partial}{\partial t} + c \alpha_{jl} \cdot \text{grad} + i c k_0 \beta_{jl} \right) D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \end{aligned} \quad (47.27)$$

где

$$D(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{\mathbf{k}} L^{-3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{\sin ct(k^2 + k_0^2)^{1/2}}{c(k^2 + k_0^2)^{1/2}}. \quad (47.28)$$

Можно показать, что при  $t' = t$  выражение (47.27) переходит в третье из соотношений (47.8) (см. задачу 14).

**Правила перестановки для плотности заряда.** В теории Дирака без модификации (47.20), учитывающей наличие позитронов, плотность заряда дается выражением

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) = e \sum_j \psi_j^*(\mathbf{r}, t)\psi_j(\mathbf{r}, t).$$

Чтобы выяснить, в какой степени измерения  $\rho$  в различных точках пространства — времени влияют друг на друга, нужно вычислить коммутатор

$$[\rho(\mathbf{r}, t), \rho(\mathbf{r}', t')] = e^2 \sum_{jl} [\psi_j^*(\mathbf{r}, t)\psi_j(\mathbf{r}, t)\psi_l^*(\mathbf{r}', t')\psi_l(\mathbf{r}', t') - \psi_l^*(\mathbf{r}', t')\psi_l(\mathbf{r}', t')\psi_j^*(\mathbf{r}, t)\psi_j(\mathbf{r}, t)].$$

При помощи (47.24) и (47.27) его можно привести к виду

$$[\rho(\mathbf{r}, t), \rho(\mathbf{r}', t')] = e^2 \sum_{jl} \psi_j^*(\mathbf{r}, t)\psi_l(\mathbf{r}', t') \left( \delta_{jl} \frac{\partial}{\partial t} + ca_{jl} \cdot \text{grad} + ick_0\beta_{jl} \right) \times \\ \times D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') - \text{э. с.},$$

где э. с. означает эрмитово сопряженное выражение. Вообще говоря,  $\rho(\mathbf{r}, t)$  коммутирует с  $\rho(\mathbf{r}', t')$ , только если  $D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = 0$ , что заставляет нас исследовать структуру функции  $D$ . Для этой цели заменим сумму по  $\mathbf{k}$  в (47.28) интегралом<sup>1)</sup> [ср. (11.14)]:

$$D(\mathbf{r}, t) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{\sin ct(k^2 + k_0^2)^{1/2}}{c(k^2 + k_0^2)^{1/2}} d\tau_{\mathbf{k}}. \quad (47.29)$$

Интегрирование по полярным углам вектора  $\mathbf{k}$  легко выполняется, и мы получаем

$$D(\mathbf{r}, t) = (2\pi^2rc)^{-1} \int_0^{\infty} k(k^2 + k_0^2)^{-1/2} \sin kr \cdot \sin ct(k^2 + k_0^2)^{1/2} dk = \\ = -(4\pi^2rc)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 + k_0^2)^{-1/2} \cos kr \cdot \sin ct(k^2 + k_0^2)^{1/2} dk.$$

Подстановка  $k = k_0 \text{ sh } x$  дает

$$D(\mathbf{r}, t) = -(4\pi^2rc)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(k_0 r \text{ sh } x) \sin(k_0 ct \text{ ch } x) dx. \quad (47.30)$$

<sup>1)</sup> См. работу Дирака [11].

Подинтегральное выражение в (47.30) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \sin(k_0 ct \cdot \operatorname{ch} x + k_0 r \operatorname{sh} x) + \frac{1}{2} \sin(k_0 ct \cdot \operatorname{ch} x - k_0 r \cdot \operatorname{sh} x). \quad (47.31)$$

Дальнейшее преобразование зависит от соотношения между величинами  $ct$  и  $r$ . Допустим сначала, что  $ct > r$  ( $r > 0$  всегда); тогда можно положить

$$k_0 ct \operatorname{ch} x \pm k_0 r \operatorname{sh} x = k_0 (c^2 t^2 - r^2)^{1/2} \operatorname{ch}(x \pm \theta), \quad \operatorname{th} \theta \equiv \frac{r}{ct},$$

и интеграл в (47.30) примет вид

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[z \operatorname{ch}(x + \theta)] dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[z \operatorname{ch}(x - \theta)] dx,$$

$$z \equiv k_0 (c^2 t^2 - r^2)^{1/2}. \quad (47.32)$$

Это выражение совпадает с одним из интегральных представлений функции Бесселя<sup>1)</sup>:

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(z \operatorname{ch} x) dx.$$

Оба интеграла в (47.32) одинаковы; их сумма равна  $\pi J_0(z)$ . Очевидно, при  $ct < 0$ ,  $|ct| > r$  интеграл в (47.30) равен  $-\pi J_0(z)$ .

Чтобы рассмотреть случай, когда  $ct$  лежит между  $r$  и  $-r$ , предположим сначала, что  $r > ct > 0$ . Аргументы синусов в (47.31) преобразуем следующим образом:

$$k_0 ct \operatorname{ch} x \pm k_0 r \operatorname{sh} x = \pm k_0 (r^2 - c^2 t^2)^{1/2} \operatorname{sh}(x \pm \theta'), \quad \operatorname{th} \theta' \equiv \frac{ct}{r}.$$

Тогда интеграл в (47.30) примет вид

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[z' \operatorname{sh}(x + \theta')] dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[z' \operatorname{sh}(x - \theta')] dx,$$

$$z' \equiv k_0 (r^2 - c^2 t^2)^{1/2}.$$

Так как подинтегральные выражения здесь представляют собой нечетные функции от  $x + \theta'$  и  $x - \theta'$ , то оба интеграла обращаются в нуль. Таким образом, интеграл в (47.30) равен

$$\begin{aligned} & \pi J_0[k_0 (c^2 t^2 - r^2)^{1/2}] \quad \text{для } ct > r, \\ & 0 \quad \text{для } r > ct > -r, \\ & -\pi J_0[k_0 (c^2 t^2 - r^2)^{1/2}] \quad \text{для } -r > ct. \end{aligned} \quad (47.33)$$

Тем самым показано, что измерения плотности заряда в двух различных точках пространства — времени не будут влиять друг на друга тогда и только тогда, когда пространственное

<sup>1)</sup> См. книгу Уиттекера и Ватсона [12].



расстояние между точками превышает  $|ct|$ . В этом случае никаким физическим способом нельзя передать возмущение из одной точки в другую.

В четырехмерном пространстве — времени тгперповерхности  $ct = \pm r$  образуют *световой конус*, представляющий собой геометрическое место всех световых импульсов, проходящих через пространственную точку  $\mathbf{r} = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Заметим, что если  $r$ , увеличиваясь, пересекает световой конус при  $t \leq 0$ , то выражение (47.33) скачком изменяется от  $\pm \pi$  до 0. Это позволяет получить явное выражение для  $D(\mathbf{r}, t)$  в точках, бесконечно близких к световому конусу. Производная от скачкообразно возрастающей функции есть  $\delta$ -функция (со знаком „плюс”); таким образом, в силу (47.30) получаем

$$D(\mathbf{r}, t) \approx (4\pi r c)^{-1} [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)], \quad ct \approx \pm r. \quad (47.34)$$

Интересно отметить, что если в соотношение (47.27) подставить функцию  $D$  из (47.34), то при  $t = 0$  правая часть (47.27) переходит в  $\delta_{,jl} \delta(\mathbf{r})$ . Это показывает, что в пределе (47.27) совпадает с третьим из соотношений (47.8), как, разумеется, и должно быть (см. также задачу 14). Чтобы убедиться в этом, отметим, что при  $t = 0$  члены  $(ca_{,jl} \text{ grad} + ick_0 \beta_{,jl}) D(\mathbf{r}, t)$  обращаются в нуль, так как при  $t = 0$  в (47.34) две  $\delta$ -функции взаимно уничтожаются. Однако член  $(\partial/\partial t)D(\mathbf{r}, t)$  при  $t = 0$  обращается в  $-(2\pi r)^{-1} \delta'(r)$ . Покажем теперь, что эта величина эквивалентна  $\delta(\mathbf{r})$ . Пусть  $f(\mathbf{r})$  — непрерывная функция с непрерывным градиентом в точке  $\mathbf{r} = 0$ . Тогда

$$\int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) d\tau = f(0).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} - \int f(\mathbf{r}) (2\pi r)^{-1} \delta'(r) d\tau &= - \int_0^{\infty} f(r) (2\pi r)^{-1} \delta'(r) 4\pi r^2 dr = \\ &= - \int_0^{\infty} f(r) 2r \delta'(r) dr = - \int_{-\infty}^{\infty} f(r) r \delta'(r) dr. \end{aligned} \quad (47.35)$$

В силу четвертого равенства (11.13) выражение  $r\delta'(r)$  можно заменить на  $-\delta(r)$ , и, следовательно, интеграл в (47.35) равен  $f(0)$ .

### ЗАДАЧИ

1. При помощи соотношений (45.12)—(45.14) показать, что в „приближении ячеек” классические уравнения Гамильтона для поля совпадают с уравнениями Лагранжа.

2. Показать, что уравнение  $\dot{F} = \{F, H\}$  справедливо и тогда, когда плотность функционала  $F$  зависит не только от  $\psi$  и  $\pi$ , но и от  $\text{grad } \psi$  и  $\text{grad } \pi$ .

3. Волновую функцию  $\psi(\mathbf{r}_e, t)$  можно рассматривать как функционал, которому соответствует плотность  $\psi(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)$ . Аналогично можно рас-

сматривать и сопряженный с  $\psi$  импульс  $\pi$ . Показать, что, воспользовавшись этими выражениями, можно получить из (45.20) правильные уравнения движения для  $\psi$  и  $\pi$ . При их помощи вычислить также выражения для коммутаторов  $\psi$  и  $\pi$  в различных точках пространства, но в один и тот же момент времени.

4. Подробно показать, что результат коммутирования оператора  $N$  с кинетической энергией  $\text{grad } \psi^* \cdot \text{grad } \psi$  в (46.10) равен нулю и что коммутатор (46.6) не зависит от времени.

5. Исходя из соотношений (46.14) и (46.15) и из решения задачи 1 гл. VI, показать, что матрицу оператора  $a_k$ , определяемого соотношением (46.11), нельзя привести к диагональному виду.

6. Обобщить соотношение (46.11) и последующие формулы на случай непрерывного изменения индекса  $k$ . Затем, используя результат задачи 2 гл. III, показать, что результат измерения числа частиц в бесконечно малой окрестности любой точки равен положительному целому числу или нулю.

7. Показать, что если функционалы  $\Psi$  ортонормированы, то соотношения (46.21) и (46.20) полностью эквивалентны друг другу.

8. Показать, что алгебраические свойства антикоммутаторов отличаются от свойств квантовых и классических скобок Пуассона.

9. В тексте показано, что амплитуда электронного поля не может быть классически измерена, так как электроны подчиняются принципу Паули и несут электрический заряд. Объяснить, почему можно наблюдать дифракционную картину, возникающую при рассеянии электронов от кристалла, хотя она представляет собой результат интерференции электронных волн.

10. Показать, что для частиц, подчиняющихся статистике Ферми—Дирака, в нерелятивистском случае величина  $N$  представляет собой интеграл движения.

11. Рассмотреть систему частиц Ферми—Дирака, которая может находиться в двух состояниях. Получить явные выражения для матриц  $a$  и  $\Psi$ , аналогичные (46.29) и (46.30).

12. Показать, что в теории Дирака некантованные уравнения Гамильтона согласуются с соответствующими уравнениями Лагранжа.

13. Показать, что оператор  $N$ , определяемый соотношением (47.10), коммутирует с гамильтонианом дираковского поля (47.6).

14. Показать, что соотношение антикоммутации (47.27), связывающее операторы  $\psi$  и  $\psi^*$  в различных точках пространства — времени, при совпадении моментов времени переходит в третье соотношение (47.8). (Заменить сумму по  $\mathbf{k}$  в (47.28) интегралом (47.29) и воспользоваться представлением  $\delta$ -функции, данным в § 11.)

15. Показать, что как при квантовании нерелятивистского уравнения Шредингера, так и в квантованной теории Дирака получается соотношение  $[e(\mathbf{r}, t), e(\mathbf{r}', t)] = 0$ .

16. Показать, что если волновые функционалы удовлетворяют уравнениям шредингеровского типа

$$i\hbar\dot{\Psi} = H\Psi, \quad -i\hbar\dot{\Psi}^* = \Psi^*H,$$

то для производной по времени от матричного элемента любого оператора  $F$  справедлива формула (45.23). [Сравнить с переходом от (23.1) и (23.2).] Показать также, что если система  $\Psi$  приводит к диагональному виду как  $H$ , так и  $N$ , то  $\Psi$  гармонически зависит от времени с частотой, определяемой соответствующим собственным значением  $H$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. W e n t z e l G., Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Vienna, 1943. (Имеется русский перевод: Г. В е н т ц е л ь, Введение в квантовую теорию волновых полей, М.—Л., 1947.)

2. Heisenberg W., *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Chicago, 1930. (Имеется русский перевод: В. Гейзенберг, *Физические принципы квантовой теории*, М.—Л., 1932.)
3. Dirac P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, 3d ed., Oxford — New York, 1947. (Имеется русский перевод 2-го издания: П. Дирак, *Основы квантовой механики*, М.—Л., 1937.)
4. Goldstein H., *Classical Mechanics*, Cambridge, 1950. (Имеется русский перевод: Р. Голдстейн, *Классическая механика*, М.—Л., 1957.)
5. Corben H. C., Stehle P., *Classical Mechanics*, New York, 1950.
6. Heisenberg W. Pauli W., *Zs. f. Phys.*, **56**, 1 (1929).
7. Heisenberg W., Pauli W., *Zs. f. Phys.*, **59**, 168 (1930).
8. Jordan P., Wigner E., *Zs. f. Phys.*, **47**, 631 (1928).
9. Oppenheimer J. R., *Phys. Rev.*, **35**, 562 (1930).
10. Pauli W., *Phys. Rev.*, **58**, 716 (1940). (Имеется русский перевод в книге: В. Паули, *Релятивистская теория элементарных частиц*, ИЛ, 1947.)
11. Dirac P. A. M., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **30**, 150 (1934).
12. Whittaker E. T., Watson G. N., *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge—London, 1935. (Имеется русский перевод 3-го издания: Е. Уиттекер, Г. Ватсон, *Курс современного анализа*, М.—Л., 1937.)
- 13\*. Соколов А. А., Иваненко Д. Д., *Квантовая теория поля*, М.—Л., 1952.
- 14\*. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., *Квантовая электродинамика*, М.—Л., 1953.
- 15\*. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., *Введение в теорию квантовых полей*, М.—Л., 1957.

## КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Применим теперь развитый в предыдущей главе метод квантования к электромагнитному полю. В этом случае в классической волновой теории нет даже намека на фотоны, тогда как квантовая теория успешно объясняет корпускулярно-волновой дуализм, обсуждавшийся в гл. I. Удобно рассмотреть сначала электромагнитное поле в вакууме (§ 48) и лишь затем учесть взаимодействие между полем и электронами (§ 49). В § 50 решаются некоторые задачи, иллюстрирующие теорию<sup>1)</sup>. Поскольку мы не ставим своей задачей установить инвариантность теории относительно преобразований Лоренца, мы будем всегда пользоваться не четырехмерными, а трехмерными обозначениями.

### § 48. Электромагнитное поле в вакууме

Будем следовать методике, развитой в § 45. Уравнения движения электромагнитного поля являются уравнения Максвелла, и мы начнем с нахождения функции Лагранжа, вариация которой приводит к этим уравнениям. Зная функцию Лагранжа, можно ввести канонические импульсы и составить функцию Гамильтона. Квантование производится путем замены классических скобок Пуассона квантовыми. Мы не будем рассматривать возможность антикоммутиации амплитуд поля, так как из опыта известно, что сильные электрические и магнитные поля можно изменить классическим путем и что фотоны подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна.

**Уравнения Лагранжа.** Уравнения Максвелла для вакуума можно получить, если в (35.2) приравнять нулю  $\rho$  и  $\mathbf{J}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (48.1)$$

<sup>1)</sup> Более подробное изложение можно найти в работах, указанных в примечании 1 на стр. 388, а также в обзорных статьях Ферми [1] и Розенфельда [2], в книге Гайтлера [3] и в лекциях Дайсона [4].

Функцию Лагранжа удобнее всего выразить через потенциалы  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ , частично определяемые равенствами

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (48.2)$$

Как отмечалось в § 35, эти формулы не определяют потенциалов полностью, так как напряженности электрического и магнитного полей (48.2) не изменяются при градиентном преобразовании потенциалов.

Плотность лагранжиана можно записать в виде

$$\mathbf{L} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi \right)^2 - \frac{1}{8\pi} (\text{rot } \mathbf{A})^2. \quad (48.3)$$

Если величины  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  и  $\varphi$  рассматриваются как переменные поля, то уравнения Лагранжа следуют из (45.8). Вариация по компонентам  $\mathbf{A}$  дает три уравнения, которые совместно можно записать в виде

$$-\frac{1}{4\pi} \text{rot rot } \mathbf{A} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi \right) = 0.$$

Это есть не что иное, как второе из уравнений (48.1). Варьируя по  $\varphi$ , получаем

$$-\frac{1}{4\pi} \text{div} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi \right) = 0,$$

что совпадает с третьим уравнением (48.1). Два других уравнения Максвелла автоматически вытекают из определения потенциалов (48.2).

**Уравнения Гамильтона.** На основании (45.15) и (48.3) можно определить импульс, канонически сопряженный с  $A_x$ ;

$$P_x = \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \quad (48.4)$$

Аналогичные выражения получаются и для двух других импульсов. Поскольку  $\varphi$  не входит в плотность лагранжиана, импульс, канонически сопряженный с  $\varphi$ , тождественно равен нулю. Так же обстояло дело с функцией  $\bar{\psi}$  в нерелятивистском уравнении Шредингера (§ 46) и в уравнении Дирака (§ 47); как и там, это означает, что потенциал  $\varphi$  нельзя рассматривать как переменную поля и надо исключить его из функции Гамильтона<sup>1)</sup>.

Равенство (45.24) дает плотность функции Гамильтона

$$\mathbf{H} = \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{L} = 2\pi c^2 \mathbf{P}^2 + \frac{1}{8\pi} (\text{rot } \mathbf{A})^2 - c\mathbf{P} \cdot \text{grad } \varphi \quad (48.5)$$

<sup>1)</sup> По поводу другого подхода см. работу Дирака, Фока и Подольского [5].

[производная  $\partial A/\partial t$  при помощи (48.4) заменена членами, содержащими  $\mathbf{P}$ ]. Уравнения Гамильтона (45.19) имеют вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 4\pi c^2 \mathbf{P} - c \operatorname{grad} \varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (48.6)$$

Первое из них совпадает с (48.4). Его необходимо было получить снова, так как в гамильтоновском формализме мы имеем дело только с выражением (48.5) и с каноническими переменными  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$ . Теперь можно воспользоваться этим уравнением, чтобы определить величину  $\mathbf{E} = -4\pi c \mathbf{P}$ . Тогда, если определить также  $\mathbf{H}$  как  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ , второе уравнение (48.6) совпадает со вторым уравнением Максвелла (48.1). Первое и четвертое уравнения (48.1) удовлетворяются автоматически — по определению  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Третье уравнение Максвелла нельзя получить как уравнение Гамильтона, связанное с выражением (48.5). Однако можно условиться придавать смысл лишь таким решениям уравнений Гамильтона, для которых в некоторый определенный момент времени  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  или  $\operatorname{div} \mathbf{P} = 0$ . Если при этом удастся показать, что приведенные равенства представляют собой интегралы движения, то принятое условие будет непротиворечиво и отбираемые таким путем решения образуют замкнутую совокупность. Согласно второму из уравнений (48.6), производная по времени от  $\operatorname{div} \mathbf{P}$  равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0.$$

Поскольку уравнения поля являются уравнениями первого порядка по времени, это означает, что, наложив условие  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  в один момент времени, мы действительно обеспечиваем справедливость третьего из уравнений (48.1) в любой другой момент.

Отсюда видно, что последний член в (48.5) ничего не вносит в гамильтониан. Действительно, интегрируя по частям, интеграл по объему можно преобразовать к виду  $c \int \varphi \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau = 0$ ; поверхностный интеграл обращается в нуль либо в силу достаточно быстрого убывания  $\mathbf{P}$  на больших расстояниях, либо вследствие периодических граничных условий, наложенных на  $\mathbf{P}$  на стенках большого куба. Таким образом, гамильтониан поля имеет вид

$$H = \int \left[ 2\pi c^2 \mathbf{P}^2 + \frac{1}{8\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 \right] d\tau \quad (48.7)$$

и потенциал  $\varphi$  в него не входит. Этот результат находится в соответствии с обычным выражением для полной энергии электромагнитного поля  $(1/8\pi) \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d\tau$ .

**Квантовые уравнения.** Квантование классического электромагнитного поля производится следующим образом. Будем исходить из гамильтониана (48.7) и канонических переменных поля  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{P}$ .

Поскольку потенциал  $\varphi$  более не входит в наши формулы, удобно выбрать калибровку так, чтобы  $\varphi = 0$ . Уравнение движения для любой величины имеет вид (45.23), и правила перестановки переменных поля (45.25) в данном случае записываются в виде

$$\begin{aligned} [A_s(\mathbf{r}, t), A_{s'}(\mathbf{r}', t)] &= [P_s(\mathbf{r}, t), P_{s'}(\mathbf{r}', t)] = 0, \\ [A_s(\mathbf{r}, t), P_{s'}(\mathbf{r}', t)] &= i\hbar \delta_{ss'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (48.8)$$

Каждый из индексов  $s, s'$  может равняться  $x, y$  или  $z$ .

Уравнение движения для какой-нибудь компоненты  $A$ , например  $A_x$ , имеет вид

$$i\hbar \dot{A}_x(\mathbf{r}, t) = [A_x(\mathbf{r}, t), H]$$

(аналогичные уравнения имеют место для  $A_y$  и  $A_z$ ). Компонента  $A_x$  коммутирует с членом  $(\text{rot } \mathbf{A})^2$  в гамильтониане, а также с суммой  $P_y^2 + P_z^2$ , входящей в  $\mathbf{P}^2$ . Таким образом, нужно лишь прокоммутировать  $A_x$  с  $P_x^2$ . В результате получится (умноженный на  $2\pi c^2$ ) интеграл по  $\mathbf{r}'$  от  $[A_x, P_x'^2]$  (штрих означает, что аргументом является не  $\mathbf{r}$ , а  $\mathbf{r}'$ ):

$$\begin{aligned} [A_x(\mathbf{r}, t), P_x'^2(\mathbf{r}', t)] &= A_x P_x'^2 - P_x'^2 A_x = \\ &= [P_x' A_x + i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] P_x' - P_x'^2 A_x = \\ &= P_x' [P_x' A_x + i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] + i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') P_x' - P_x'^2 A_x = \\ &= 2i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') P_x(\mathbf{r}', t). \end{aligned}$$

Интегрируя по  $\mathbf{r}'$ , находим

$$i\hbar \dot{A}_x(\mathbf{r}, t) = 2\pi c^2 \int 2i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') P_x(\mathbf{r}', t) d\tau' = 4\pi c^2 i\hbar P_x(\mathbf{r}, t). \quad (48.9)$$

Это совпадает с соответствующим классическим уравнением, а именно с первым из уравнений (48.6) при  $\varphi = 0$ .

Уравнение движения для компоненты  $P_x$  имеет вид

$$i\hbar \dot{P}_x(\mathbf{r}, t) = [P_x(\mathbf{r}, t), H].$$

(аналогичные уравнения имеют место для  $P_y$  и  $P_z$ ). Величина  $P_x$  не коммутирует только с той частью подинтегрального выражения  $H$ , которая содержит сумму квадратов  $y$ - и  $z$ -компонент  $\text{rot } \mathbf{A}$ . Вычисление соответствующего коммутатора производится непосредственно, но является несколько утомительным (см. задачу 1). В результате получается выражение для  $\dot{\mathbf{P}}$ , соответствующее второму из уравнений (48.6). Таким образом, если положить по определению  $\mathbf{E} = -4\pi c \mathbf{P}$  и  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , то квантовые уравнения для  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$  будут совпадать с первым, вторым и четвертым уравнениями Максвелла (48.1).

Подобно классическому случаю, третье уравнение Максвелла нужно рассматривать как *дополнительное условие*. Если в какой-либо момент времени  $\operatorname{div} \mathbf{P} = 0$ , то это соотношение будет выполняться и в любой другой момент времени, так как производная от него по времени равна нулю. Тогда из (48.9) видно, что производная по времени от  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  всегда равна нулю, т. е. что  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  сохраняется. Удобно воспользоваться оставшейся у нас свободой в выборе калибровки так, чтобы в некоторый момент времени  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  была всюду равна нулю. Тогда  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  будет равна нулю всюду и в любой момент времени. Ясно, однако, что это дополнительное условие не совместимо с правилами перестановки (48.8). Например, поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{P} = 0$ , коммутатор  $A_x$  и  $\operatorname{div} \mathbf{P}$  должен был бы обращаться в нуль; однако в силу (48.8) он равен

$$[A_x(\mathbf{r}, t), \operatorname{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}', t)] = i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Возникновение такого несоответствия не может вызывать удивления. Действительно, в уравнении (48.8) предполагается существование трех независимых пар канонических переменных, в то время как условия  $\operatorname{div} \mathbf{P} = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  оставляют только две линейно независимые пары. Поэтому следует изменить правила перестановки так, чтобы они соответствовали дополнительному условию.

Это сделано в задаче 2. Оказывается, что коммутатор  $A(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{P}(\mathbf{r}', t)$  не обращается в нуль при конечных значениях  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . На первый взгляд могло бы показаться что это противоречит физическому принципу, согласно которому измерения, проводимые в один и тот же момент времени в различных точках пространства, не должны влиять друг на друга (см. § 47). Однако векторный потенциал  $\mathbf{A}$  сам по себе не является физической величиной; непосредственно доступны измерению только напряженности электрического и магнитного полей. Покажем теперь с помощью (48.8), что правила перестановки для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют названному принципу и, кроме того, согласуются с дополнительным условием  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Можно показать также (см. задачу 3), что такие же результаты получатся, если воспользоваться видоизмененными правилами перестановки, приведенными в задаче 2.

**Правила перестановки для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .** Напряженности электрического и магнитного полей определяются соотношениями

$$\mathbf{E} = -4\pi c \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (48.10)$$

Пусть правила перестановки для  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$  имеют вид (48.8). Сразу же видно, что

$$[E_s(\mathbf{r}, t), E_{s'}(\mathbf{r}', t)] = [H_s(\mathbf{r}, t), H_{s'}(\mathbf{r}', t)] = 0, \quad (48.11)$$



где индексы  $s, s'$  принимают значения  $x, y, z$ . Коммутатор параллельных составляющих  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  равен

$$[\mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}_x(\mathbf{r}', t)] = -4\pi c \left[ P_{xy} \left( \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} \right) \right] = 0 \quad (48.12)$$

(аналогичное соотношение имеет место для  $y$ - и  $z$ -компонент). С другой стороны, для перпендикулярных составляющих  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  мы получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}_y(\mathbf{r}', t)] &= -4\pi c \left[ P_{xy} \left( \frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} \right) \right] = \\ &= -4\pi c \frac{\partial}{\partial z'} [P_{xy} A'_x] = 4\pi c i \hbar \frac{\partial}{\partial z'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (48.13)$$

Аналогичные соотношения для других пар компонент получаются циклической перестановкой  $x, y, z$ .

Из (48.11) сразу же следует, что  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  коммутирует со всеми компонентами  $\mathbf{E}$ . При помощи (48.13) можно найти коммутатор  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  с компонентами  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned} [\operatorname{div} \mathbf{E}, \mathbf{H}'_x] &= \left[ \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y}, \mathbf{H}'_x \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z}, \mathbf{H}'_x \right] = \\ &= 4\pi c i \hbar \left[ -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z'} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y'} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (48.14)$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y'} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial y} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

правая часть (48.14) обращается в нуль. Таким образом,  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  коммутирует с  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и, следовательно, с гамильтонианом, который, согласно (48.7), можно записать в виде

$$H = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d\tau. \quad (48.15)$$

Это означает, что  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  представляет собой интеграл движения. Следовательно, если эта величина в какой-либо момент времени всюду равна нулю, то она обращается в нуль и во всех пространственно-временных точках.

Как и следовало ожидать, вместо первоначально развитого канонического формализма, основанного на переменных  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$ , можно использовать правила перестановки (48.11) — (48.13) и выражение для гамильтониана (48.15). Мы уже видели, что  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  является интегралом движения. Аналогичный расчет показывает, что сохраняется и  $\operatorname{div} \mathbf{H}$ , так что ее тоже можно сделать равной нулю во всех пространственно-временных точках. Тогда

первые два уравнения Максвелла (48.1) получаются как частные случаи общего уравнения движения (45.23) (см. задачу 5) :

$$i\hbar\dot{\mathbf{E}}_x = [\mathbf{E}_x, H] = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{E}_x, (\mathbf{H}'_y{}^2 + \mathbf{H}'_z{}^2)] d\tau' = i\hbar c (\text{rot } \mathbf{H})_x, \quad (48.16)$$

$$i\hbar\dot{\mathbf{H}}_x = [\mathbf{H}_x, H] = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}_x, (\mathbf{E}'_y{}^2 + \mathbf{E}'_z{}^2)] d\tau' = -i\hbar c (\text{rot } \mathbf{E})_x.$$

**Представление через плоские волны.** В ряде применений оказывается полезным представление потенциалов и полей при помощи полной ортонормированной системы плоских волн. Последние представляют собой векторные функции  $\mathbf{r}$ , поляризованные перпендикулярно волновому вектору (так что выполняются условия  $\text{div } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{P} = 0$ ), и имеют вид

$$\mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) = L^{-3/2} \varepsilon_{k\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \lambda = 1, 2.$$

Векторы  $\mathbf{k}$  выбираются в соответствии с (11.3), так что функции  $\mathbf{u}_{k\lambda}$  удовлетворяют периодическим граничным условиям на стенках куба объемом  $L^3$ . Величины  $\varepsilon_{k\lambda}$  представляют собой единичные векторы, образующие вместе с  $\mathbf{k}$  праввинтовую систему, так что  $\mathbf{k} \cdot \varepsilon_{k\lambda} = 0$  и  $\text{div } \mathbf{u}_{k\lambda} = 0$ . Легко проверить, что условие ортонормированности принимает вид

$$\int \bar{\mathbf{u}}_{k\lambda} \cdot \mathbf{u}_{k'\lambda'} d\tau = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Разложим  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$  по функциям  $\mathbf{u}_{k\lambda}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \sum'_{k\lambda} [q_{k\lambda}(t) \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) + q_{k\lambda}^*(t) \bar{\mathbf{u}}_{k\lambda}(\mathbf{r})], \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \sum'_{k\lambda} [p_{k\lambda}(t) \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) + p_{k\lambda}^*(t) \bar{\mathbf{u}}_{k\lambda}(\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (48.17)$$

Операторы  $q_{k\lambda}^*$  и  $p_{k\lambda}^*$  эрмитово сопряжены соответственно с  $q_{k\lambda}$  и  $p_{k\lambda}$ , так что операторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$  эрмитовы. Штрихи показывают, что суммирование производится по половине  $\mathbf{k}$ -пространства, вследствие чего плоские волны  $\bar{\mathbf{u}}_{k\lambda}$  не совпадают с  $\mathbf{u}_{-k\lambda}$ .

Возьмем правила перестановки для  $q$  и  $p$  в виде

$$[q_{k\lambda}(t), p_{k'\lambda'}(t)] = [q_{k\lambda}^*(t), p_{k'\lambda'}(t)] = i\hbar \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (48.18)$$

(все другие пары коммутируют) и убедимся, что отсюда вытекают должные правила перестановки для  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$ . Очевидно, что

$$[A_s(\mathbf{r}, t), A_{s'}(\mathbf{r}', t)] = [P_s(\mathbf{r}, t), P_{s'}(\mathbf{r}', t)] = 0.$$

На основании (48.17) и (48.18) мы получим также

$$\begin{aligned}
 [A_s(\mathbf{r}, t), P_{s'}(\mathbf{r}', t)] &= \sum_{\mathbf{k}\lambda}' \sum_{\mathbf{k}'\lambda'}' \{ [q_{\mathbf{k}\lambda}(t), p_{\mathbf{k}'\lambda}^*(t)] u_{\mathbf{k}\lambda, s}(\mathbf{r}) \bar{u}_{\mathbf{k}'\lambda', s'}(\mathbf{r}') + \\
 &+ [q_{\mathbf{k}\lambda}^*(t), p_{\mathbf{k}'\lambda'}(t)] \bar{u}_{\mathbf{k}\lambda, s}(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}'\lambda', s'}(\mathbf{r}') \} = \\
 &= i\hbar L^{-3} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda, s} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda, s'} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \quad (48.19)
 \end{aligned}$$

Индексы  $s, s'$  означают декартовы компоненты векторов; у последней суммы в (48.19) штрих отсутствует, так как сумма со штрихом по  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$  эквивалентна обычному суммированию по всему  $\mathbf{k}$ -пространству.

При наличии трех взаимно перпендикулярных векторов  $\varepsilon_{\mathbf{k}\lambda}$  три числа  $\varepsilon_{\mathbf{k}\lambda, s}$  представляли бы собой направляющие косинусы, характеризующие направление  $s$ ; при этом мы имели бы  $\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda, s} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda, s'} = \delta_{ss'}$ . Поскольку фактически имеется только два единичных вектора  $\varepsilon_{\mathbf{k}\lambda}$ , перпендикулярных друг другу и  $\mathbf{k}$ , можно написать

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda, s} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda, s'} = \delta_{ss'} - \frac{k_s k_{s'}}{k^2}.$$

Мы имеем также

$$k_s k_{s'} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = \frac{\partial}{\partial r_s} \frac{\partial}{\partial r'_{s'}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')},$$

Подставляя эти выражения в (48.19) и переходя при больших  $L$  от суммирования к интегрированию  $\left( L^{-3} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow (2\pi)^{-3} \int d\tau_{\mathbf{k}} \right)$ , можно переписать (48.19) в виде

$$\begin{aligned}
 [A_s(\mathbf{r}, t), P_{s'}(\mathbf{r}', t)] &= i\hbar \delta_{ss'} \left[ (2\pi)^{-3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\tau_{\mathbf{k}} \right] - \\
 &- i\hbar \frac{\partial}{\partial r_s} \frac{\partial}{\partial r'_{s'}} \left[ (2\pi)^{-3} \int \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\tau_{\mathbf{k}} \right]; \quad (48.20)
 \end{aligned}$$

здесь первое выражение в квадратных скобках равно  $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  второе слагаемое представляет собой функцию Грина  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  определяемую равенством (26.12). Согласно (26.15), она равна  $(4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)^{-1}$ . Таким образом, коммутатор (48.20) принимает вид

$$[A_s(\mathbf{r}, t), P_{s'}(\mathbf{r}', t)] = i\hbar \delta_{ss'} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{i\hbar}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r_s} \frac{\partial}{\partial r'_{s'}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right), \quad (48.21)$$

что соответствует предположению, сделанному в задаче 2. Остальные коммутаторы обращаются в нуль. Этим подтверждается правильность выбора правил перестановки (48.18).

**Энергия квантованного поля.** Подставляя (48.17) в гамильтониан поля (48.7) и принимая во внимание, что операторы  $q_{\mathbf{k}\lambda}$  и  $q_{\mathbf{k}\lambda}^*$  и  $p_{\mathbf{k}\lambda}$  и  $p_{\mathbf{k}\lambda}^*$  коммутируют друг с другом, получаем

$$H = \sum'_{\mathbf{k}\lambda} \left( 4\pi c^2 p_{\mathbf{k}\lambda} p_{\mathbf{k}\lambda}^* + \frac{k^2}{4\pi} q_{\mathbf{k}\lambda} q_{\mathbf{k}\lambda}^* \right). \quad (48.22)$$

Здесь мы учли, что суммирование производится по половине  $\mathbf{k}$ -пространства, в связи с чем все интегралы типа  $\int \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}'\lambda'} dt$  обращаются в нуль.

Найдем теперь собственные значения  $H$  с учетом правил перестановки (48.18). Это можно сделать, выбирая такие линейные комбинации амплитуд плоских волн, в которых  $H$  формально приводится к сумме энергий ряда гармонических осцилляторов (см. § 46). Каждая пара индексов  $\mathbf{k}, \lambda$  теперь соответствует двум линейно поляризованным плоским волнам, распространяющимся в противоположных направлениях вдоль оси  $\mathbf{k}$ . Таким образом новые линейные комбинации  $q_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}$  и  $p_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}$  должны иметь вид

$$a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - kct)}, \quad a_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + kct)}, \quad (48.23)$$

где  $a_{\mathbf{k}\lambda}$  и  $a_{\mathbf{k}\lambda}^*$  — операторы, не зависящие от  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Первое из этих выражений описывает плоскую волну с положительной круговой частотой  $kc$ , распространяющуюся параллельно вектору  $\mathbf{k}$ , а второе эрмитово сопряжено с выражением для плоской волны той же частоты, распространяющейся в противоположном направлении.

Руководствуясь замечаниями, сделанными в предыдущем параграфе, определим теперь зависимость  $q_{\mathbf{k}\lambda}$  и  $p_{\mathbf{k}\lambda}$  от времени. Уравнения движения для этих величин в соответствии с (45.23) имеют вид

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{q}_{\mathbf{k}\lambda} &= [q_{\mathbf{k}\lambda}, H] = 4\pi i \hbar c^2 p_{\mathbf{k}\lambda}, \\ i\hbar \dot{p}_{\mathbf{k}\lambda} &= [p_{\mathbf{k}\lambda}, H] = -\frac{i\hbar k^2}{4\pi} q_{\mathbf{k}\lambda}. \end{aligned} \quad (48.24)$$

Исключая  $p_{\mathbf{k}\lambda}$ , найдем уравнение второго порядка для  $q_{\mathbf{k}\lambda}$ :

$$\ddot{q}_{\mathbf{k}\lambda} = 4\pi c^2 \dot{p}_{\mathbf{k}\lambda} = -k^2 c^2 q_{\mathbf{k}\lambda}.$$

Оно легко интегрируется; в результате получим по образцу (48.23)

$$q_{\mathbf{k}\lambda}(t) = a_{\mathbf{k}\lambda} e^{-ikct} + a_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{ikct}. \quad (48.25)$$

Теперь первое уравнение (48.24) дает

$$p_{\mathbf{k}\lambda}(t) = -\frac{ik}{4\pi c} a_{\mathbf{k}\lambda} e^{-ikct} + \frac{ik}{4\pi c} a_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{ikct}. \quad (48.26)$$

Равенства (48.25) и (48.26) позволяют найти  $a$  и  $a^*$ :

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}\lambda} &= \frac{1}{2} \left( q_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{4\pi i c}{k} p_{\mathbf{k}\lambda} \right) e^{i\mathbf{k}c t}, \\ a'_{\mathbf{k}\lambda} &= \frac{1}{2} \left( q_{\mathbf{k}\lambda} - \frac{4\pi i c}{k} p_{\mathbf{k}\lambda} \right) e^{-i\mathbf{k}c t}. \end{aligned} \quad (48.27)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для эрмитово сопряженных операторов. На основании (48.27) и (48.18) можно найти правила перестановки для  $a$ ,  $a^*$ :

$$[a_{\mathbf{k}\lambda}, a'^*_{\mathbf{k}'\lambda'}] = [a'_{\mathbf{k}\lambda}, a^*_{\mathbf{k}'\lambda'}] = \frac{2\pi\hbar c}{k} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (48.28)$$

(все другие пары операторов коммутируют). Эти соотношения, как и следовало ожидать, не зависят от времени.

Подставляя (48.25) и (48.26) в гамильтониан (48.22), получаем

$$H = \sum'_{\mathbf{k}\lambda} \frac{k^2}{2\pi} (a_{\mathbf{k}\lambda} a^*_{\mathbf{k}\lambda} + a'^*_{\mathbf{k}\lambda} a'_{\mathbf{k}\lambda}). \quad (48.29)$$

Если, по определению, положить

$$N_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{k}{2\pi\hbar c} a^*_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}, \quad N'_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{k}{2\pi\hbar c} a'^*_{\mathbf{k}\lambda} a'_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (48.30)$$

то из результатов § 46 следует, что собственные значения операторов  $N_{\mathbf{k}\lambda}$  и  $N'_{\mathbf{k}\lambda}$  равны 0, 1, 2, ... Гамильтониан (48.29) в переменных  $N$  принимает вид

$$H = \sum'_{\mathbf{k}\lambda} \hbar c k (N_{\mathbf{k}\lambda} + N'_{\mathbf{k}\lambda} + 1). \quad (48.31)$$

Из выражений (48.23) и (48.25) видно, что  $a'_{\mathbf{k}\lambda}$  можно отождествить с  $a_{-\mathbf{k}\lambda}$ , а  $N'_{\mathbf{k}\lambda}$  — с  $N_{-\mathbf{k}\lambda}$ . Тогда в сумме (48.31) можно отказаться от суммирования только по половине  $\mathbf{k}$ -пространства, и мы получаем окончательно

$$H = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar c k \left( N_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (48.32)$$

Равенство (48.32) эквивалентно квантовой гипотезе Планка: энергия каждой плоской электромагнитной волны составляет целое кратное элементарного кванта  $h\nu = \hbar kc$ . Однако, кроме энергии квантов, имеется еще нулевая энергия гармонических осцилляторов. Каждое состояние поля вносит в нее вклад, равный половине кванта, а так как число состояний бесконечно, то бесконечна и нулевая энергия. Однако появление ее не встречает возражений, так как она не взаимодействует с заряженными частицами<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. также замечания, следующие за формулой (50.17).

**Импульс квантованного поля.** Плотность импульса электромагнитного поля равна вектору Пойнтинга  $(c/4\pi) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , деленному на  $c^2$ . В связи с этим полный импульс поля можно выразить через канонические переменные с помощью (48.10):

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H} d\tau = - \int \mathbf{P} \times (\text{rot } \mathbf{A}) d\tau.$$

Подставляя сюда выражения (48.17), (48.25), (48.26) и (48.30), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= i \sum'_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{k} (p_{\mathbf{k}\lambda} q_{\mathbf{k}\lambda}^* - p_{\mathbf{k}\lambda}^* q_{\mathbf{k}\lambda}) = \\ &= \frac{1}{4\pi c} \sum'_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{k} \mathbf{k} [(a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^* + a_{\mathbf{k}\lambda}^* a_{\mathbf{k}\lambda}) - (a_{\mathbf{k}\lambda}^* a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^*)] = \\ &= \sum'_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \mathbf{k} \left[ \left( N_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) - \left( N'_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \right] = \sum'_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \mathbf{k} N_{\mathbf{k}\lambda}, \end{aligned} \quad (48.33)$$

где, как и при переходе от (48.31) к (48.32), на область суммирования более не накладывается ограничений. В данном случае для плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях, члены, соответствующие нулевой энергии, сокращаются.

Формулы (48.32) и (48.33) показывают, что энергия и импульс плоской волны квантуются, причем единица энергии равна  $\hbar k c$ , а единица импульса —  $\hbar \mathbf{k}$ . В § 50 будет также явно показано, что взаимодействие между веществом и излучением позволяет объяснить как интерференцию света, так и дискретные свойства световых квантов.

**Оператор  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  в представлении плоских волн.** В следующих двух параграфах при рассмотрении взаимодействия электронов с электромагнитным полем нам придется иметь дело с векторным потенциалом. Поэтому нужно получить выражение для  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  в представлении плоских волн, характеризуемом собственными значениями  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  операторов  $N_{\mathbf{k}\lambda}$ . Волновой функционал в этом представлении можно записать в виде  $\Psi(\dots n_{\mathbf{k}\lambda} \dots)$ ; он описывает состояние электромагнитного поля, в котором имеется  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  световых квантов с импульсом  $\hbar \mathbf{k}$  и поляризацией  $\varepsilon_{\mathbf{k}\lambda}$ . На основании (48.28) и результатов § 46 операторы  $a_{\mathbf{k}\lambda}$  и  $a_{\mathbf{k}\lambda}^*$  обладают свойствами

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}\lambda} \Psi(\dots n_{\mathbf{k}\lambda} \dots) &= \left( \frac{2\pi \hbar c n_{\mathbf{k}\lambda}}{k} \right)^{1/2} \Psi(\dots n_{\mathbf{k}\lambda} - 1 \dots), \\ a_{\mathbf{k}\lambda}^* \Psi(\dots n_{\mathbf{k}\lambda} \dots) &= \left( \frac{2\pi \hbar c (n_{\mathbf{k}\lambda} + 1)}{k} \right)^{1/2} \Psi(\dots n_{\mathbf{k}\lambda} + 1 \dots). \end{aligned} \quad (48.34)$$

В силу (48.17) и (48.25) имеем

$$\begin{aligned}
 A(\mathbf{r}, t) &= L^{-3/2} \sum'_{\mathbf{k}\lambda} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda} [(a_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a'_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \\
 &+ (a_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a'_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] = \\
 &= L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda} [a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{k}ct)} + a_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{k}ct)}]. \quad (48.35)
 \end{aligned}$$

Здесь опять отождествление  $a'_{\mathbf{k}\lambda}$  с  $a_{-\mathbf{k}\bar{\lambda}}$  позволяет производить суммирование по всем значениям  $\mathbf{k}$ . Легко видеть, что выражение (48.35) для векторного потенциала является эрмитовым, как это и должно быть. Из соотношений (48.34) следует, что величины  $a_{\mathbf{k}\lambda}$  и  $a_{\mathbf{k}\lambda}^*$  представляют собой соответственно операторы уничтожения и порождения светового кванта в состоянии  $\mathbf{k}, \lambda$ . Поэтому линейный по  $A$  член в гамильтониане описывает испускание и поглощение световых квантов.

**Правила перестановки операторов, взятых в различные моменты времени.** Правила перестановки (48.11)—(48.13) для компонент  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  интересно обобщить на случай различных моментов времени<sup>1)</sup>. Как и в случае квантованного уравнения Дирака (§ 47), полученные результаты показывают, при каких условиях измерения электромагнитного поля в различных пространственно-временных точках влияют друг на друга.

Подобно (48.35), легко выразить  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  через операторы  $a_{\mathbf{k}\lambda}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} ik\varepsilon_{\mathbf{k}\lambda} [a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{k}ct)} - a_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{k}ct)}], \\
 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} i(\mathbf{k} \times \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda}) [a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{k}ct)} - a_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{k}ct)}]. \quad (48.36)
 \end{aligned}$$

В силу (48.28) коммутатор двух декартовых компонент напряженности электрического поля равен

$$\begin{aligned}
 [E_s(\mathbf{r}, t), E_{s'}(\mathbf{r}', t')] &= L^{-3} \sum_{\mathbf{k}\lambda} 4\pi i \hbar c k \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda, s} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda, s'} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varrho} - k\tau), \quad (48.37) \\
 \boldsymbol{\varrho} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad \tau = t - t'.
 \end{aligned}$$

Суммирование по состояниям поляризации  $\lambda$  можно провести так же, как и в случае (48.19):

$$\begin{aligned}
 \sum_{\lambda} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda, s} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda, s'} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varrho} - k\tau) &= \frac{1}{k^2} (k^2 \delta_{ss'} - k_s k_{s'}) \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varrho} - k\tau) = \\
 &= \frac{1}{k^2} \left[ \frac{\partial_{ss'}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial r_s} \frac{\partial}{\partial r'_{s'}} \right] \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varrho} - k\tau). \quad (48.38)
 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Это обобщение получено Иорданом и Паули [6].

Суммирование по  $\mathbf{k}$  при больших  $L$  можно заменить интегрированием:

$$\begin{aligned} L^{-3} \sum_{\mathbf{k}} k^{-1} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - kc\tau) &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3} \int k^{-1} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - kc\tau) d\tau_{\mathbf{k}} = \\ &= (2\pi)^{-3} \int (2ik)^{-1} (e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - ikc\tau} - e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} + ikc\tau}) d\tau_{\mathbf{k}} = \\ &= (2\pi)^{-3} \int (2ik)^{-1} (e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - ikc\tau} - e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} + ikc\tau}) d\tau_{\mathbf{k}} = \\ &= - (2\pi)^{-3} \int k^{-1} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}} \sin kc\tau \cdot d\tau_{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Последнее выражение мы обозначим через  $-cD_0(\boldsymbol{\rho}, \tau)$ , где  $D_0$  отличается от функции  $D$  в (47.29) только тем, что  $k_0$  в данном случае равно нулю.

Равенства (47.30) и (47.33) показывают, что  $D_0(\boldsymbol{\rho}, \tau)$  получается в результате действия оператора  $-(4\pi^2 \rho c)^{-1} (\partial/\partial \rho)$  на функцию, равную  $+\pi$  для  $c\tau > \rho$ , нулю для  $\rho > c\tau > -\rho$  и  $-\pi$  для  $-\rho > c\tau$ . Таким образом,  $D_0$  имеет вид (47.34) при всех  $\rho$  (а не только в бесконечно малой окрестности точки  $|\mathbf{c}\tau|$ ):

$$D_0(\boldsymbol{\rho}, \tau) = (4\pi \rho c)^{-1} [\delta(\rho - c\tau) - \delta(\rho + c\tau)], \quad \rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \quad (48.39)$$

В силу (48.37) и (48.38) получаем

$$\begin{aligned} [E_s(\mathbf{r}, t), E_{s'}(\mathbf{r}', t')] &= \\ &= -4\pi i \hbar c^2 \left[ \frac{\delta_{ss'}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial r_s} \frac{\partial}{\partial r'_s} \right] D_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'). \end{aligned} \quad (48.40)$$

Таким же образом можно найти коммутатор двух компонент напряженности магнитного поля

$$[H_s(\mathbf{r}, t), H_{s'}(\mathbf{r}', t')] = [E_s(\mathbf{r}, t), E_{s'}(\mathbf{r}', t')]. \quad (48.41)$$

Пользуясь (48.36), можно получить также правила перестановки для компонент  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned} [E_s(\mathbf{r}, t), H_{s'}(\mathbf{r}', t')] &= \\ &= L^{-3} \sum_{\mathbf{k}} 4\pi i \hbar c k (\varepsilon_{k1,s} \varepsilon_{k2,s'} - \varepsilon_{k2,s} \varepsilon_{k1,s'}) \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - kc\tau). \end{aligned} \quad (48.42)$$

Очевидно, что при  $s = s'$  выражение (48.42) обращается в нуль; таким образом, параллельные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей коммутируют друг с другом во всех пространственно-временных точках. При  $s \neq s'$  можно положить  $s = x$ ,  $s' = y$ . Оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  образуют праввинтовую систему, так что

$$\varepsilon_{k1,x} \varepsilon_{k2,y} - \varepsilon_{k2,x} \varepsilon_{k1,y} = (\varepsilon_{k1} \times \varepsilon_{k2})_z = \frac{k_z}{k}.$$



Поступая так же, как при переходе от (48.37) к (48.40), получаем

$$[E_x(\mathbf{r}, t), H_y(\mathbf{r}', t')] = 4\pi i \hbar c \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t'} D_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'). \quad (48.43)$$

Индексы  $x, y, z$  в (48.43) можно подвергнуть циклической перестановке.

Поскольку во все эти перестановочные соотношения входит функция  $D_0$ , определяемая формулой (48.39), ясно, что все компоненты напряженностей электромагнитного поля коммутируют всюду, кроме бесконечно малой окрестности светового конуса  $c(t - t') = \pm |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Поэтому, если две пространственно-временные точки не могут быть связаны световым сигналом, то напряженности поля в этих точках коммутируют друг с другом и допускают одновременное точное измерение. Это показывает, что квантованное электромагнитное поле распространяется с классической скоростью света  $c$ . Вопрос о связи между этими перестановочными соотношениями и принципом неопределенности был рассмотрен Бором и Розенфельдом [7].

### § 49. Взаимодействие электронов с электромагнитным полем

В § 47 было проведено квантование релятивистского волнового уравнения Дирака для свободных электронов. Объединим теперь эту теорию свободных электронов с квантовой теорией электромагнитного поля в вакууме, рассмотренной в § 48. В результате получается так называемая *квантовая электродинамика*, описывающая взаимодействие электронов с электромагнитным полем.

**Уравнения Лагранжа и Гамильтона.** Прежде всего нужно найти функцию Лагранжа, варьирование которой дает (уже известные нам) уравнения движения электронного и электромагнитного полей. Уравнение Дирака для электронного поля имеет вид (43.22):

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - e \varphi \psi + \alpha \cdot (-i \hbar c \text{grad } \psi - e \mathbf{A} \psi) + mc^2 \beta \psi = 0, \quad (49.1)$$

где  $e$  — заряд электрона, т. е. отрицательное число. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля имеют вид (35.2):

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, & \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi \rho, & \text{div } \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (49.2)$$

Плотности электрического заряда и тока, фигурирующие в (49.2), даются равенствами (43.20):

$$\rho = e \psi^* \psi, \quad \mathbf{J} = -e c \psi^* \boldsymbol{\alpha} \psi. \quad (49.3)$$

Мы предполагаем пока, что плотности  $\rho$  и  $\mathbf{J}$  связаны только с электронами. Уравнение непрерывности (35.3) можно получить, умножая (49.1) слева на  $\psi^*$ , эрмитово сопряженное уравнение — справа на  $\psi$  и вычитая результаты один из другого.

Искомая функция Лагранжа равна сумме соответствующих функций для электронного и электромагнитного полей с заменой (в первом случае) операторов  $i\hbar(\partial/\partial t)$  и  $-i\hbar c \text{grad}$  соответственно на  $i\hbar(\partial/\partial t) - e\varphi$  и  $-i\hbar c \text{grad} - e\mathbf{A}$ . Таким образом, в силу (47.1) и (48.3) имеем

$$L = \int \psi^* \left[ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - e\varphi \psi + \alpha \cdot (-i\hbar c \text{grad} - e\mathbf{A}) \psi + mc^2 \beta \psi \right] d\tau + \\ + \frac{1}{8\pi} \int \left[ \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi \right)^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right] d\tau. \quad (49.4)$$

Можно показать, что вариация (49.4) по  $\psi^*$  дает уравнение (49.1), вариация по  $\psi$  — эрмитово сопряженное уравнение, а вариация по  $\mathbf{A}$  [с учетом (49.3) и (48.2)] приводит к уравнениям (49.2) (см. задачу 9).

Функция Лагранжа (49.4) обладает недостатками, отмеченными ранее в связи с (47.1) и (48.3). Поскольку величины  $\psi^*$  и  $\psi$  не входят в (49.4), для них нельзя определить канонически сопряженные импульсы и, следовательно,  $\psi^*$  и  $\psi$  нельзя рассматривать как канонические координаты в теории Гамильтона. Как и прежде, импульсы, канонически сопряженные с  $\psi_j$  и  $\mathbf{A}_r$ , равны соответственно  $i\hbar \bar{\varphi}_j$  и  $\mathbf{P} = (4\pi c)^{-1} [(1/c)(\partial \mathbf{A}_r / \partial t) + (\partial \varphi / \partial \mathbf{x})]$ . Таким образом, гамильтониан принимает вид

$$H = \int \left( i\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) d\tau - L = \\ = \int \psi^* [\alpha \cdot (i\hbar c \text{grad} + e\mathbf{A}) \psi + e\varphi \psi - mc^2 \beta \psi] d\tau + \\ + \int \left[ 2\pi c^2 \mathbf{P}^2 + \frac{1}{8\pi} (\text{rot } \mathbf{A})^2 - c\mathbf{P} \cdot \text{grad } \varphi \right] d\tau \quad (49.5)$$

(здесь  $\psi^*$  фигурирует не как координата, а как канонический импульс).

Нетрудно показать, что уравнениями Гамильтона для  $\psi$  и для канонически сопряженного импульса  $i\hbar \bar{\varphi}_j$  являются соответственно (49.1) и эрмитово сопряженное уравнение. Уравнения Гамильтона для  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$  имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 4\pi c^2 \mathbf{P} - c \text{grad } \varphi, \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \text{rot rot } \mathbf{A} - e\varphi^* \alpha \varphi. \quad (49.6)$$

Таким образом, если, как и прежде, положить, по определению,  $\mathbf{E} = -4\pi c\mathbf{P}$  и  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , то мы получим первое, второе и четвертое уравнения Максвелла (49.2).

**Исключение  $\varphi$ .** Как и в § 48, третье из уравнений (49.2) надо рассматривать как дополнительное условие. Поэтому нас будут интересовать лишь те решения уравнений Гамильтона, которые в некоторый момент времени удовлетворяют условию  $\text{div } \mathbf{E} - 4\pi e\psi^*\psi = 0$ . Если производная по времени от этого соотношения равна нулю, то оно будет справедливо во все моменты времени, и указанный отбор решений будет возможен и непротиворечив. На основании второго уравнения (49.6) и определения вектора  $\mathbf{E}$  мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{E} - 4\pi e\psi^*\psi) = 4\pi e \left[ c \text{div} (\psi^* \alpha \psi) - \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) \right].$$

В силу определений (49.3) и уравнения непрерывности для плотности заряда и тока это выражение обращается в нуль.

Теперь легко понять, что содержащиеся в правой части (49.5) взаимно уничтожаются. Действительно, второе из них можно проинтегрировать по частям, что дает

$$-c \int \mathbf{P} \cdot \text{grad } \varphi \, d\tau = c \int \varphi \text{div } \mathbf{P} \, d\tau = - \int \varphi \rho \, d\tau.$$

Этот интеграл равен по величине и противоположен по знаку первому содержащему  $\varphi$  члену ( $e \int \varphi \psi^* \psi \, d\tau$ ). Таким образом, потенциал  $\varphi$  не входит в гамильтониан и может быть выбран произвольно. Мы воспользуемся этим произволом для того, чтобы при разделении  $\mathbf{P}$  (или  $\mathbf{E}$ ) на *соленоидальную* и *потенциальную* части последняя выражалась только через  $\varphi$ . Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2, \\ \text{div } \mathbf{P}_1 &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{P}_2 &= 0. \end{aligned} \tag{49.7}$$

Здесь  $\mathbf{P}_1$  представляет собой соленоидальную, а  $\mathbf{P}_2$  — потенциальную части вектора  $\mathbf{P}$ . Если теперь положить  $\mathbf{P}_2 = (4\pi c)^{-1} \text{grad } \varphi$ , то третье уравнение (49.7) удовлетворяется, а первое уравнение (49.6) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 4\pi c^2 \mathbf{P}_1. \tag{49.8}$$

Если теперь равенство  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  выполняется в какой-либо момент времени, то оно будет верно и всегда, так как из (49.8) и второго из уравнений (49.7) следует, что  $(\partial/\partial t) \text{div } \mathbf{A} = 0$ . Поэтому мы выберем калибровку потенциалов так, чтобы  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ .

Потенциал  $\varphi$  вновь появляется в гамильтониане (49.5) через член  $\mathbf{P}^2$ . Учитывая выражение для  $\mathbf{P}_2$  и интегрируя по частям, объемный интеграл от  $\mathbf{P}^2$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int \mathbf{P}^2 d\tau &= \int \mathbf{P}_1^2 d\tau + \int (2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{P}_2 d\tau = \\ &= \int \mathbf{P}_1^2 d\tau + \frac{1}{4\pi c} \int (2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) \cdot \text{grad } \varphi \cdot d\tau = \\ &= \int \mathbf{P}_1^2 d\tau - \frac{1}{4\pi c} \int \varphi \text{div} (2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) d\tau. \end{aligned}$$

Но  $\text{div } \mathbf{P}_1 = 0$ , а из дополнительного условия следует, что  $\text{div } \mathbf{P}_2 = -\varrho/c$ . Поэтому член с  $\mathbf{P}^2$  в гамильтониане принимает вид

$$2\pi c^2 \int \mathbf{P}^2 d\tau = 2\pi c^2 \int \mathbf{P}_1^2 d\tau + \frac{1}{2} \int \varphi \varrho d\tau. \quad (49.9)$$

При нашем выборе  $\varphi$

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi c \text{div } \mathbf{P}_2 = -4\pi \varrho.$$

Это уравнение можно проинтегрировать с помощью функции Грина (26.15), полагая в ней  $k = 0$ . В результате получим

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\varrho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'. \quad (49.10)$$

При помощи (49.9) и (49.10) гамильтониан (49.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} H &= \int \psi^* [\alpha \cdot (i\hbar c \text{grad} + e\mathbf{A}) \psi - mc^2 \beta \psi] d\tau + \\ &+ \int \left[ 2\pi c^2 \mathbf{P}_1^2 + \frac{1}{8\pi} (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right] d\tau + \frac{1}{2} \iint \frac{\varrho(\mathbf{r}, t) \varrho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau d\tau'; \quad (49.11) \end{aligned}$$

здесь

$$\text{div } \mathbf{P}_1 = \text{div } \mathbf{A} = 0 \text{ и } \varrho(\mathbf{r}, t) = e\psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t).$$

Последний член в (49.11) представляет собой энергию кулоновского взаимодействия электрических зарядов, распределенных с плотностью  $\varrho(\mathbf{r}, t)$ . Он получается сам собой, в результате исключения  $\varphi$  из безвихревой части  $\mathbf{P}$ , и не должен вводиться в теорию с помощью особого предположения. Соленоидальные векторы ( $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{A}$ ) обычно называются *поперечной* частью электромагнитного поля, поскольку, как и в § 48, напряженности электрического и магнитного полей в соответствующих плоских волнах перпендикулярны направлению распространения. Безвихревой кулоновский вектор ( $\mathbf{P}_2$ ) называется *продольной* частью поля, так как в силу (49.10) составляющая вектора  $\mathbf{P}_2$  в данной точке, обусловленная находящимся в другой точке бесконечно малым элементом заряда, направлена вдоль вектора, соединяющего две эти точки.

**Квантование полей.** Мы получим квантовую теорию взаимодействующих друг с другом электронного и электромагнитного полей, если допустим, что а) уравнение движения для любой величины имеет вид (45.23), б) компоненты электронного поля подчиняются соотношениям антикоммутации (47.8) и в) для электромагнитного поля справедливы правила перестановки (48.21) с заменой  $\mathbf{P}$  на  $\mathbf{P}_1$ . Будем считать также, что все компоненты  $\psi$  и  $\psi^*$  коммутируют со всеми компонентами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}_1$ .

В классическом случае порядок следования множителей типа  $\psi_j^*$  и  $\psi_l$  в гамильтониане (49.11), разумеется, не имеет значения. Однако в квантовой теории они не коммутируют друг с другом, и результаты вычислений могут зависеть от расположения множителей в гамильтониане. В конце настоящего параграфа мы увидим, что правильный вид гамильтониана получается, если везде, кроме подинтегрального выражения в кулоновском члене, оставить все операторы на своих местах. Указанное подинтегральное выражение содержит член

$$e(\mathbf{r}, t) e(\mathbf{r}', t) = \sum_{j=1}^4 \sum_{l=1}^4 \psi_j^*(\mathbf{r}, t) \psi_j(\mathbf{r}, t) \psi_l^*(\mathbf{r}', t) \psi_l(\mathbf{r}', t), \quad (49.12)$$

вместо которого мы напомним <sup>1)</sup>

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{l=1}^4 \psi_j^*(\mathbf{r}, t) \psi_l^*(\mathbf{r}', t) \psi_l(\mathbf{r}', t) \psi_j(\mathbf{r}, t). \quad (49.13)$$

При помощи соотношений антикоммутации (47.8) можно показать, что выражение (49.12) отличается от (49.13) дополнительным слагаемым

$$\sum_{j=1}^4 \psi_j^*(\mathbf{r}, t) \psi_j(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Поэтому переход от (49.12) к (49.13) эквивалентен вычитанию из гамильтониана (49.11) величины

$$\frac{e^2}{2} \iint \frac{\psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau d\tau'. \quad (49.14)$$

Если  $\psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}', t)$  не обращается в нуль, то это выражение, очевидно, бесконечно; ниже будет показано, что так обстоит дело всегда, исключая случай, когда в поле нет ни одного электрона.

Квантовые уравнения движения вытекают из (45.23), если заметить в гамильтониане (49.11) выражение (49.12) на (49.13). Уравнения электромагнитного поля совпадают с полученными в § 48, с той лишь разницей, что  $\mathbf{P}$  заменяется на  $\mathbf{P}_1$ , и появляется член с электрическим током [как во втором уравнении (49.6)]. Уравнение

<sup>1)</sup> Заметим, что оба выражения (49.12) и (49.13) эрмитовы.

электронного поля совпадает с (49.1), с заменой потенциала  $\varphi$  выражением

$$e \int \frac{\psi^*(\mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'.$$

Можно показать, что производные по времени от антикоммуторов и коммутаторов (47.8) и (48.21) равны нулю, так что, если эти соотношения, как и предполагалось, справедливы в начальный момент времени, то они выполняются и в любой другой момент (см. задачу 11).

**Учет статических полей.** До сих пор мы предполагали, что плотности электрического заряда и тока обусловлены только электронами, описываемыми  $\psi$ -полем Дирака. Статическое распределение заряда легко учесть, добавляя в правую часть третьего из уравнений (49.2) величину  $4\pi\rho_s$ , а в левую часть (49.1) величину  $-e\varphi_s\psi$ , где  $\nabla^2\varphi_s = -4\pi\rho_s$ . Нетрудно видеть, что при этом единственное изменение в гамильтониане (49.11) будет состоять в добавлении члена  $\int e\varphi_s\psi^*\psi d\tau$ .

Наибольший практический интерес представляет тот случай, когда <sup>1)</sup>

$$\varphi_s = -\frac{Ze}{r}.$$

Это соответствует фиксированному (бесконечно тяжелому) точечному ядру с атомным номером  $Z$ , расположенному в начале координат. Добавляя этот потенциал и принимая во внимание замену (49.13), получаем вместо (49.11).

$$H = \int \psi^* \left[ \alpha \cdot (i\hbar c \text{grad} + e\mathbf{A}) \psi - \frac{Ze^2}{r} \psi - mc^2\beta\psi \right] d\tau + \\ + \int \left[ 2\pi c^2 \mathbf{P}_1^2 + \frac{1}{8\pi} (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right] d\tau + \frac{e^2}{2} \iint \sum_{jl} \frac{\psi_j^* \psi_l^* \psi_l \psi_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau d\tau'; \quad (49.15)$$

штрихи здесь означают, что аргументом является вектор  $\mathbf{r}'$ , а не  $\mathbf{r}$ .

**Применение теории возмущений.** Естественно попытаться найти собственные значения гамильтониана (49.15), которые будут представлять собой уровни энергии системы электронов, электромагнитного поля и кулоновского поля ядра. Однако все подобные попытки потерпели неудачу, и есть основания считать, что таких

<sup>1)</sup> Величина  $e$  представляет собой заряд электрона и потому отрицательна.

собственных значений вообще не существует, т. е. данный гамильтониан диагонализировать невозможно. Это заключение связано с теорией возмущений, основанной на предположении о малости заряда  $e$ . Если приравнять  $e$  нулю, то выражение (49.15) будет равно просто сумме гамильтонианов свободного электрона (47.6) и электромагнитного поля в вакууме (48.7). Эти гамильтонианы уже были приведены к диагональному виду; соответствующие собственные значения принадлежат решениям, описывающим системы с заданным числом свободных электронов и световых квантов, не взаимодействующих друг с другом.

При конечных значениях  $e$  ни ядерный член (порядка  $Ze^2$ ), ни кулоновское взаимодействие между электронами (порядка  $e^2$ ) не приводят к трудностям фундаментального характера. Как будет показано ниже, последний член привел бы к *бесконечной электростатической или продольной собственной энергии* (имеющейся также и в классической теории точечных зарядов), если бы мы несколько произвольно не заменили выражение (49.12) на (49.13). Более серьезные трудности обусловлены членом  $ea \cdot A$ , описывающим взаимодействие электронов с поперечным электромагнитным полем. Он обуславливает все процессы взаимодействия электронов со световыми квантами и будет использован в следующем параграфе для рассмотрения актов испускания и поглощения света атомом. Один из результатов этого взаимодействия состоит в появлении у свободного электрона бесконечной *поперечной собственной энергии*, связанной с виртуальным испусканием и поглощением фотонов.<sup>1)</sup> В дальнейшем мы будем игнорировать этот эффект<sup>1)</sup>.

Мы будем пользоваться главным образом методом возмущений и рассмотрим прежде всего матричные элементы кулоновского взаимодействия между электронами, оставляя пока без внимания поперечное электромагнитное поле. Данный пример представляет интерес в том отношении, что он показывает, каким образом исключается бесконечная электростатическая собственная энергия и каким образом квантовая теория поля приводит к обменному взаимодействию между электронами (подчиняющимися статистике Ферми—Дирака и описываемым антисимметричными волновыми функциями). Рассмотрение члена  $ea \cdot A$  в рамках теории возмущений будет произведено в § 50.

**Матричные элементы оператора кулоновского взаимодействия.** Рассмотрим гамильтониан (49.15), исключив из него поперечное

<sup>1)</sup> Релятивистски инвариантный способ вычитания бесконечностей данного типа развит в статьях Томонага [8, 9] и Швингера [10, 11]; см. также работы Фейнмана [12], Дайсона [4, 13] и книгу Гайтлера [3], гл. 6.

электромагнитное поле:

$$H = \int \psi^* \left( i\hbar c \alpha \cdot \text{grad } \psi - \frac{Ze^2}{r} \psi - mc^2 \beta \psi \right) d\tau + \\ + \frac{e^2}{2} \iint \sum_{ji} \frac{\psi_j^* \psi_i^* \psi_i \psi_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau d\tau'. \quad (49.16)$$

Эта аппроксимация оказывается удовлетворительной, пока скорости электронов малы по сравнению со скоростью света, так как тогда вероятность испускания световых квантов довольно мала. В этом случае при описании электронов можно пользоваться нерелятивистским уравнением Шредингера (с учетом спина), хотя мы по-прежнему будем применять уравнение Дирака.

Волновое уравнение для одного электрона в кулоновском поле имеет полную ортонормированную систему собственных функций, которые мы будем обозначать через  $w_j(n, \mathbf{r})$ <sup>1)</sup>:

$$\int \sum_j \bar{w}_j(n, \mathbf{r}) w_j(n', \mathbf{r}) d\tau = \delta_{nn'}, \quad (49.17)$$

$$\sum_j \left( i\hbar c \alpha_{ji} \text{grad} - \frac{Ze^2}{r} \delta_j - mc^2 \beta_{ji} \right) w_j(n, \mathbf{r}) = E_n w_j(n, \mathbf{r}).$$

При  $Z = 0$  эти функции переходят в решения (47.11), соответствующие свободному электрону. Как и в (47.15), разложим  $\psi$  и  $\psi^*$  по функциям  $w$ :

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) = \sum_n b(n, t) w_j(n, \mathbf{r}), \\ \psi_j^*(\mathbf{r}, t) = \sum_n b^*(n, t) \bar{w}_j(n, \mathbf{r}), \quad (49.18)$$

где  $b$  — операторы, подчиняющиеся соотношениям антикоммутиации типа (47.16):

$$[b(n, t), b(n', t)]_+ = [b^*(n, t), b^*(n', t)]_+ = 0, \\ [b(n, t), b^*(n', t)]_+ = \delta_{nn'}. \quad (49.19)$$

Подставляя (49.18) в (47.10) и принимая во внимание условие ортогональности (49.17), получаем

$$N = \int \psi^* \psi d\tau = \sum_n b^*(n, t) b(n, t) = \sum_n N_n, \quad N_n = b^*(n, t) b(n, t).$$

<sup>1)</sup> Эти функции характеризуют как связанные состояния, так и состояния с положительной и отрицательной энергией, принадлежащие непрерывному спектру; последний превращается в дискретный при наложении периодических условий. Индекс  $n$  включает одновременно и спин.



Аналогично первый член в гамильтониане (49.16) принимает вид

$$\sum_n b^*(n, t) b(n, t) E_n = \sum_n N_n E_n. \quad (49.20)$$

Коль скоро второй член в (49.16) рассматривается как возмущение, то интерес представляют его матричные элементы в представлении, в котором первый член диагонален. Подставляя (49.18) в оператор энергии кулоновского взаимодействия, получаем

$$\frac{e^2}{2} \sum_{nn'n''n'''} b^*(n, t) b^*(n', t) b(n'', t) b(n''', t) \times \\ \times \sum_j \int \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \bar{w}_j(n, \mathbf{r}) \bar{w}_l(n', \mathbf{r}') w_l(n'', \mathbf{r}') w_j(n''', \mathbf{r}) d\tau d\tau'. \quad (49.21)$$

Задача состоит в вычислении матричных элементов оператора (49.21), связывающих два произвольных невозмущенных волновых функционала (см. § 46). Поскольку электроны подчиняются принципу Паули, эти функционалы можно определить, указав, какие из одноэлектронных состояний  $n$  являются занятыми. В нашем случае величины  $b$  представляют собой операторы уничтожения, а  $b^*$  — операторы порождения. Поскольку в каждый член (49.21) входят по два оператора каждого типа, интересующие нас матричные элементы будут отличны от нуля только для волновых функционалов, соответствующих одинаковому полному числу электронов, причем все электроны, кроме, может быть, одного или двух, должны быть в одинаковых состояниях. Кроме того, поскольку операторы уничтожения в (49.21) находятся справа от операторов порождения, матричные элементы будут отличны от нуля только для таких функционалов, которые соответствуют наличию двух или более электронов.

Таким образом, для отдельного электрона выражение (49.21) представляет собой нуль-оператор; тем самым исключается бесконечная продольная собственная энергия одного электрона. Покажем теперь, что это исключение связано с заменой (49.12) на (49.13). Разность энергий (49.14) можно записать в виде

$$\frac{e^2}{2} \sum_{nn'} b^*(n, t) b(n', t) \times \\ \times \sum_j \int \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \bar{w}_j(n, \mathbf{r}) w_j(n', \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau d\tau'. \quad (49.22)$$

Поскольку оператор  $b(n', t)$  уничтожает электрон в состоянии  $n'$ , а  $b^*(n, t)$  создает электрон в состоянии  $n$ , для диагональных матричных элементов (49.22)  $n' = n$ . При этом  $b^*(n, t) b(n', t)$  можно заменить на  $N_n \delta_{nn}$ ; следовательно, каждый наличный электрон

вносит бесконечный вклад в среднее значение (49.22). Поэтому замена (49.12) на (49.13) эквивалентна вычитанию из гамильтониана бесконечной электростатической собственной энергии всех электронов.

Среднее значение (или диагональный матричный элемент) оператора (49.21) в состоянии с двумя (или более) электронами представляет собой сумму членов, каждый из которых характеризуется двумя занятыми электронными состояниями. Например, член, соответствующий состояниям 1 и 2, содержит матричные элементы от четырех комбинаций  $b$ , умноженных на соответствующие объемные интегралы; обозначим эти комбинации сокращенно через  $b_2^* b_1^* b_2 b_1$ ,  $b_1^* b_2^* b_2 b_1$ ,  $b_2^* b_1^* b_1 b_2$  и  $b_1^* b_2^* b_1 b_2$ . Из соотношений антикоммутиации (49.19) следует, что второе и третье из этих выражений равны друг другу и противоположны по знаку первому и четвертому выражениям. Далее, в силу (49.19) мы имеем (см. задачу 12)

$$\begin{aligned} \Psi^*(1, 1, \dots) b_1^* b_2^* b_2 b_1 \Psi(1, 1, \dots) &= \\ &= \Psi^*(1, 1, \dots) N_1 N_2 \Psi(1, 1, \dots) = +1. \end{aligned} \quad (49.23)$$

Это равенство показывает, что часть среднего значения (49.21), соответствующая заполненным состояниям 1 и 2, имеет вид

$$\begin{aligned} e^2 \iint |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \sum_j |w_j(1, \mathbf{r})|^2 \sum_l |w_l(2, \mathbf{r}')|^2 d\tau d\tau' - \\ - e^2 \iint |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \sum_j \bar{w}_j(1, \mathbf{r}) w_j(2, \mathbf{r}) \sum_l \bar{w}_l(2, \mathbf{r}') w_l(1, \mathbf{r}') d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (49.24)$$

Второй интеграл в (49.24) называется *обменной энергией*. Он появляется также, если вычислять среднее значение оператора кулоновского взаимодействия с помощью антисимметричной волновой функции типа (32.7).

## § 50. Теория излучения

Квантовая теория излучения состоит в рассмотрении по методу возмущений члена  $e\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}$  (а часто и члена  $Ze^2/r$ ) в гамильтониане (49.15). Производились расчеты ряда физически интересных процессов, описывающихся выражениями различного порядка относительно электрического заряда  $e$ <sup>1)</sup>. В большинстве случаев нет необходимости пользоваться квантованным уравнением Дирака [что предполагается в (49.15)]. Действительно, обычно в каждый

<sup>1)</sup> Детали ряда вычислений и ссылки на оригинальные работы можно найти в книге Гайтлера [3].

данный момент времени рассматривается только один электрон и можно пользоваться теорией § 43.

В настоящем параграфе будут рассмотрены только простейшие процессы испускания и поглощения света атомом, причем мы по-прежнему будем пользоваться полным аппаратом теории квантованных полей. Будем считать, что взаимодействие рассматриваемого электрона с атомным ядром и с другими электронами можно описать с помощью эффективной потенциальной энергии  $V(r)$  типа Хартри (см. § 38). Получаемые выражения совпадают с найденными в гл. X полуклассическим путем. В конце этого параграфа будет показано, каким образом с помощью квантовой электродинамики можно дать количественное объяснение дифракционного опыта, рассматривавшегося в § 2. Уравнения (49.15) или (50.2) описывают как волновые свойства излучения (появление дифракционной картины), так и его корпускулярные свойства (ионизация атома в результате поглощения светового кванта).

**Формулировка в терминах вероятностей переходов.** Квантовая теория поля, развивавшаяся в последних двух главах, основывалась исключительно на гейзенберговской форме уравнений движения для компонент поля (ср. § 23). При таком подходе в центре внимания находятся не состояния системы, а динамические переменные. Однако теперь задача состоит в вычислении вероятностей переходов между состояниями системы электронов и электромагнитного поля, что позволит найти число квантов, испускаемых и поглощаемых атомом в единицу времени. Для этой цели можно воспользоваться нестационарной теорией возмущений (см. § 29), развитой впервые Дираком [14] как раз в связи с данной задачей.

Состояния поля характеризуются волновыми функционалами, подчиняющимися уравнениям типа Шредингера:

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\Psi} &= H\Psi, \\ -i\hbar\dot{\Psi}^* &= \Psi^*H, \end{aligned} \quad (50.1)$$

где гамильтониан  $H$  дается выражением (49.15). В связи с этим можно показать, что временная зависимость матриц, характеризующих динамические переменные типа  $\varphi$  и  $A$ , обусловлена соответствующей зависимостью волновых функционалов  $\Psi$ , применяемых при вычислении матричных элементов (см. задачу 16 гл. XIII). Таким образом, теперь зависимость динамических переменных от времени переносится на волновые функционалы.

Прежде чем идти дальше, упростим гамильтониан, приближенно изобразив действие ядра и других электронов на данный электрон при помощи потенциальной энергии типа Хартри  $V(r)$ . Тогда выра-

жение (49.15) примет вид

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H', \\
 H_0 &= \int \psi^* [i\hbar c \alpha \cdot \text{grad } \psi + V(r) \psi - mc^2 \beta \psi] d\tau + \\
 &+ \int [2\pi c^2 \mathbf{P}_1^2 + \frac{1}{8\pi} (\text{rot } \mathbf{A})^2] d\tau, \\
 H' &= e \int \psi^* \alpha \cdot \mathbf{A} \psi d\tau.
 \end{aligned} \tag{50.2}$$

Невозмущенный гамильтониан  $H_0$  перепишем в другом виде, разложив  $\mathbf{A}$  по плоским волнам, а  $\psi$  по собственным функциям уравнения (49.17), в котором ядерный потенциал  $-Ze^2/r$  заменяется на  $V(r)$ . При помощи (49.20) и (48.32) получим

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \sum_n N_n E_n + \sum_{k\lambda} \hbar c k \left( N_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right), \\
 N_n &= b_n^* b_n, \quad N_{k\lambda} = \frac{k}{2\pi\hbar c} a_{k\lambda}^* a_{k\lambda}.
 \end{aligned} \tag{50.3}$$

Правила перестановки определяются соотношениями (49.19) и (48.28):

$$\begin{aligned}
 [b_n, b_{n'}]_+ &= [b_n^*, b_{n'}^*]_+ = 0, \quad [b_n, b_{n'}^*]_+ = \delta_{nn'}, \\
 [a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'}] &= [a_{k\lambda}^*, a_{k'\lambda'}^*] = 0, \quad [a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'}^*] = \frac{2\pi\hbar c}{k} \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}.
 \end{aligned}$$

Операторы  $a$  и  $b$  коммутируют друг с другом.

Энергию возмущения  $H'$  также можно переписать в другом виде при помощи разложений (49.18) и (48.35). Поскольку теперь переменные поля зависят от времени только через волновые функционалы, в этих разложениях можно приравнять  $t$  произвольной постоянной (например, положить  $t = 0$ ). В результате получим

$$\begin{aligned}
 H' &= eL^{-3/2} \sum_{nn'k\lambda} \int \sum_{jl} b_n^* \bar{w}_j(n, \mathbf{r}) \varepsilon_{k\lambda} \cdot \alpha_{jl} \times \\
 &\times (a_{k\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{k\lambda}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) b_{n'} w_l(n', \mathbf{r}) d\tau.
 \end{aligned} \tag{50.4}$$

Чтобы определить невозмущенные волновые функционалы, нужно задать квантовые числа  $n$  для состояний, занятых электронами, а также числа световых квантов  $n_{k\lambda}$  с данным волновым вектором и поляризацией:

$$\begin{aligned}
 N_n \Psi &= \begin{cases} \Psi, & \text{если состояние } n \text{ занято,} \\ 0, & \text{если состояние } n \text{ свободно.} \end{cases} \\
 N_{k\lambda} \Psi &= n_{k\lambda} \Psi.
 \end{aligned} \tag{50.5}$$

Тогда из уравнений (50.1) (где оператор  $H$  заменен на  $H_0$ ), (50.3) и (50.5) следует, что  $\Psi$  гармонически зависит от времени с частотой

той, определяемой суммой энергий наличных электронов и световых квантов. Вычитая бесконечную нулевую энергию электромагнитного поля, мы видим, что зависимость  $\Psi$  от времени определяется выражением

$$\exp \left[ -\frac{it}{\hbar} \left( \sum'_n E_n + \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar c k n_{\mathbf{k}\lambda} \right) \right], \quad (50.6)$$

где штрих означает, что суммирование производится только по состояниям  $n$ , занятым электронами.

Теперь мы можем применить развитую в § 29 нестационарную теорию возмущений. Из вида выражения (50.6) следует, что имеют место только переходы с сохранением полной энергии электронов и световых квантов. Нам понадобятся матричные элементы оператора  $H'$  в представлении, в котором матрица  $H_0$  диагональна. Для вычисления их можно воспользоваться результатом действия (50.4) на волновые функционалы  $\Psi$ , принимая во внимание соотношения (48.34) для  $a$ , соотношения типа (46.32) для  $b$  и условие ортонормированности, характеризуемое первой формулой (46.20).

**Матричные элементы оператора возмущения.** Энергия возмущения  $H'$ , определяемая равенством (50.4), дается суммой членов, в каждом из которых содержится по одному оператору  $b$  и  $b^*$ , а также либо  $a$ , либо  $a^*$ . Поэтому результат действия  $H'$  на волновой функционал сводится к уничтожению электрона в одном состоянии с последующим порождением электрона в том же или в другом состоянии и к уничтожению или порождению светового кванта. Физически это соответствует переходу электрона в поле с потенциалом  $V(\mathbf{r})$  из одного состояния в другое с одновременным поглощением или испусканием фотона.

Рассмотрим сначала переход с поглощением кванта. Начальный волновой функционал  $\Psi_1 e^{-i\omega_1 t}$  описывает состояние системы, в котором имеется  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  квантов в состоянии  $\mathbf{k}$ ,  $\lambda$  и электрон в состоянии  $n'$  (могут быть также другие кванты и электроны, не принимающие участия в переходе). Конечный волновой функционал  $\Psi_2 e^{-i\omega_2 t}$  описывает состояние системы с  $(n_{\mathbf{k}\lambda} - 1)$  квантами в состоянии  $\mathbf{k}$ ,  $\lambda$  и электроном в новом состоянии  $n$  (кроме того, имеются и другие световые кванты и электроны, если они были в начальном состоянии). Частота перехода  $\omega_{21} \equiv \omega_2 - \omega_1$  дается формулой

$$\hbar\omega_{21} = E_n - E_{n'} - \hbar c k. \quad (50.7)$$

Матричный элемент  $H'$  для этого перехода равен <sup>1)</sup>:

$$H'_{21} = eL^{-3/2} \left( \frac{2\pi\hbar c n_{\mathbf{k}\lambda}}{k} \right)^{1/2} \int \sum_{j\ell} \bar{w}_j(n, \mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \alpha_{j\ell} w_\ell(n', \mathbf{r}) d\tau. \quad (50.8)$$

<sup>1)</sup> Знаковым множителем  $\theta_n \theta_{n'}$ , появляющимся в силу соотношения (46.32), в настоящем параграфе можно пренебречь.

В нерелятивистском случае приближенное выражение для (50.8) можно получить, заменяя одноэлектронные волновые функции Дирака  $w_n(p, \mathbf{r})$  на волновые функции Шредингера  $w_n(\mathbf{r})$ . Из соотношения (43.21) и результата задачи 6 гл. XII следует, что оператор скорости равен  $-c\alpha$ ; в нерелятивистском случае его можно заменить на  $(-i\hbar/m)\text{grad}$ . Тогда матричный элемент (50.8) примет вид

$$H'_{21} = \frac{ie\hbar}{mc} L^{-3/2} \left( \frac{2\pi\hbar c n_{\mathbf{k}\lambda}}{k} \right)^{1/2} \int \bar{w}_n(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \text{grad} w_{n'}(\mathbf{r}) d\tau. \quad (50.9)$$

Множитель  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  можно поместить как до оператора  $\text{grad}$ , так и после него, поскольку в подынтегральное выражение входит только компонента градиента в направлении вектора  $\varepsilon_{\mathbf{k}\lambda}$ , перпендикулярного  $\mathbf{k}$ .

**Вероятность перехода с поглощением.** В дальнейшем мы будем пользоваться нерелятивистским приближением, так как получающиеся в этом случае результаты допускают непосредственное сравнение с результатами гл. X. Амплитуда некоторого волнового функционала в момент времени  $t$  дается формулой (29.9), откуда, принимая во внимание (50.9), получаем (отнесенную к единице времени) полную вероятность поглощения светового кванта в состоянии  $\mathbf{k}, \lambda$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{4 |H'_{21}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2(\omega_{21}t/2)}{\omega_{21}^2} &= \\ = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{8\pi e^2 \hbar n_{\mathbf{k}\lambda}}{m^2 \omega L^3} \left| \int \bar{w}_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \text{grad} w_{n'} d\tau \right|^2 \frac{\sin^2(\omega_{21}t/2)}{\omega_{21}^2 t}. \end{aligned} \quad (50.10)$$

$$\omega \equiv kc.$$

Предположим теперь, как и в § 35, что состояния  $n$  и  $n'$  принадлежат дискретному спектру, а частоты  $\omega$  падающего излучения распределены в некотором интервале около точки  $(E_n - E_{n'})/\hbar$ . Тогда излучение можно охарактеризовать его интенсивностью  $I(\omega) d\omega$  в бесконечно малом интервале частот  $d\omega$ . Суммирование по состояниям поля излучения  $\mathbf{k}, \lambda$  удобно заменить интегрированием по  $\omega$ . Каждый квант дает вклад  $\hbar\omega/L^3$  в плотность энергии, что соответствует возрастанию интенсивности на величину  $\hbar c\omega/L^3$ . Поэтому можно заменить сумму  $\sum_{\mathbf{k}\lambda} \{ \quad \} n_{\mathbf{k}\lambda}$  интегралом

$$\int \{ \quad \} \frac{L^3 I(\omega) d\omega}{\hbar c \omega}. \quad (50.11)$$

Зависящий от времени множитель в правой части (50.10) имеет резкий максимум при  $\omega_{21} = 0$ , что в силу (50.7) эквивалентно равенству

$$\hbar\omega = E_n - E_{n'}.$$

Другие множители изменяются относительно медленно; после замены (50.11) их можно вынести за знак интеграла по  $\omega$ , который тогда принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega_{21}t/2)}{\omega_{21}^2 t} d\omega_{21} = \frac{1}{2} \pi.$$

Поэтому для вероятности поглощения (50.10) находим

$$\frac{4\pi^2 e^2 I(\omega)}{m^2 c \omega^2} \left| \int \bar{w}_n e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \text{grad } w_{n'} d\tau \right|^2, \quad (50.12)$$

что совпадает с соответствующим выражением (35.17), полученным в гл. X.

**Вероятность перехода с излучением.** Соотношение (50.7) означает, что в состоянии  $n$  электрон обладает большей энергией, чем в  $n'$ . Теперь мы можем найти (отнесенную к единице времени) вероятность перехода электрона из состояния  $n$  в  $n'$  с излучением одного светового кванта. При этом существен член с  $a_{\mathbf{k}\lambda}$  в (50.4), и матричный элемент, аналогичный (50.9), имеет вид

$$\frac{i e \hbar}{m c} L^{-3/2} \left( \frac{2\pi \hbar c (n_{\mathbf{k}\lambda} + 1)}{k} \right)^{1/2} \int \bar{w}_n e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \text{grad } w_n d\tau, \quad (50.13)$$

где  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  представляет число световых квантов, первоначально имевшихся в электромагнитном поле в состоянии  $\mathbf{k}$ ,  $\lambda$ . Расчет, аналогичный тому, который привел нас от формулы (50.9) к (50.12), дает следующее выражение для вероятности излучения:

$$\frac{4\pi e^2 I(\omega)}{m^2 c \omega^2} \left| \int \bar{w}_n e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \text{grad } w_n d\tau \right|^2 + \\ + \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{8\pi e^2 \hbar}{m^2 \omega L^3} \left| \int \bar{w}_n e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \text{grad } w_n d\tau \right|^2 \frac{\sin^2(\omega_{21}t/2)}{\omega_{21}^2 t}. \quad (50.14)$$

Два члена здесь, очевидно, обусловлены соответственно слагаемыми  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  и 1 в множителе  $(n_{\mathbf{k}\lambda} + 1)^{1/2}$ , фигурирующем в (50.13). Первый член, пропорциональный интенсивности падающего излучения, совпадает с выражением (35.19) для вероятности вынужденного излучения. Второй член не зависит от интенсивности первоначально имевшегося излучения; покажем теперь, что он совпадает с вероятностью спонтанного излучения, полученной в гл. X.

Для упрощения второго члена в (50.14) заменим суммирование по  $\mathbf{k}$  интегрированием по  $\omega$  или по  $\omega_{21}$ . Для этого нужно

вычислить число состояний электромагнитного поля с круговой частотой в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . В § 11 при рассмотрении периодических граничных условий было показано [см. (11.3)], что число плоских волн с волновыми векторами в интервале  $dk_x dk_y dk_z$  равно  $(L/2\pi)^3 dk_x dk_y dk_z$ . Поэтому, если в некоторой фиксированной системе координат направление волнового вектора  $\mathbf{k}$  характеризовать полярными углами  $\theta, \varphi$ , то число плоских волн с круговой частотой в интервале  $d\omega$  и направлением распространения в телесном угле  $d\theta d\varphi$  будет равно

$$\left(\frac{L^3 \omega^2}{8\pi^3 c^3}\right) \sin \theta d\theta d\varphi d\omega.$$

Как и раньше, во втором члене (50.14) можно произвести интегрирование по  $\omega$ ; в результате получим

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sum_\lambda \frac{e^2 \hbar \omega}{2\pi m^2 c^3} \left| \int \bar{w}_n \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \text{grad } w_n d\tau \right|^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (50.15)$$

Выражение под знаком суммы в (50.15) представляет собой (отнесенную к единице времени) вероятность спонтанного излучения светового кванта с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $\lambda$  в угловой интервал  $d\theta d\varphi$ . Следовательно, выражение (50.15) дает полную вероятность спонтанного излучения при переходе  $n \rightarrow n'$ . Чтобы сравнить ее с соответствующим выражением в § 36, рассмотрим частный случай дипольного излучения, заменяя в связи с этим в подынтегральном выражении  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  на единицу, а grad на  $-(m\omega/\hbar) \mathbf{r}$  [см. (35.20)]. Тогда получим

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sum_\lambda \frac{e^2 \omega^3}{2\pi \hbar c^3} \left| \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \int \bar{w}_n \cdot \mathbf{r} w_n d\tau \right|^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (50.16)$$

Направления поляризации волнового вектора можно выбирать как угодно, лишь бы они были перпендикулярны друг другу и вектору  $\mathbf{k}$ . Пусть одно из них лежит в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и матричного элемента  $(\mathbf{r})_{n'n}$ , а другое — в плоскости, перпендикулярной ей. Тогда будет иметь место излучение только в первом направлении, и в подынтегральное выражение войдет множитель  $\sin^2 \theta$ , где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $(\mathbf{r})_{n'n}$ . Таким образом, поляризация и угловое распределение испускаемого излучения согласуются с найденными в § 36. Полная вероятность спонтанного дипольного излучения в силу (50.16) составляет

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^2 \omega^3}{2\pi \hbar c^3} \sin^2 \theta \left( \overline{\int \bar{w}_n \cdot \mathbf{r} w_n d\tau \cdot \int \bar{w}_n \cdot \mathbf{r} w_n d\tau} \right) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4e^2 \omega^3}{3\hbar c^3} |(\mathbf{r})_{n'n}|^2, \quad (50.17)$$

что совпадает с выражением (36.22).



В квантовой электродинамике вероятности спонтанного и вынужденного излучения получаются единым образом, тогда как в гл. X они вычислялись совершенно различными способами. Как указывалось выше, спонтанное испускание связано с наличием единицы под знаком корня  $(n_{kl} + 1)^{1/2}$ , фигурирующего во второй из формул (48.34). Эта единица в свою очередь получается из правил перестановки (48.28), так что здесь мы имеем дело с чисто квантовым эффектом. С формальной точки зрения можно сказать, что вероятность спонтанного излучения равна вероятности вынужденного излучения, которое имело бы место при наличии в каждом состоянии электромагнитного поля по одному кванту (см. задачу 4 гл. X). Но, согласно (48.32), наименьшая возможная энергия поля соответствует наличию половины кванта в каждом состоянии. Это наводит на мысль, что спонтанное излучение можно было бы рассматривать как результат действия нулевых колебаний электромагнитного поля. Однако нужно отметить, что в отношении переходов с излучением эти колебания оказываются вдвое эффективнее настоящих квантов, а поглощаться они вообще не могут.

**Анализ дифракционного опыта.** В качестве [последнего примера рассмотрим дифракционный опыт, обсуждавшийся в § 2<sup>1)</sup>. Чтобы по возможности упростить вычисления, оставим в установке, изображенной на фиг. 1, только существенные части. Таковыми являются источник света  $S$ , диафрагма с двумя щелями  $A$  и приемник света, который можно располагать в различных точках плоскости  $B$ . Будем считать, что источником служит возбужденный атом, способный испускать световой квант. Пусть роль приемника играет атом другого типа, находящийся в основном состоянии и ионизирующийся при поглощении кванта, испускаемого атомом-источником (фотоэффект). Диафрагма предполагается сделанной из идеально отражающего материала. Атомным строением диафрагмы мы пренебрегаем; роль ее сводится просто к наложению определенных граничных условий на электромагнитное поле.

Интересующий нас физический процесс состоит в том, что первоначально возбужденный атом-источник испускает световой квант, а атом-детектор поглощает его и ионизируется. Однако фактически самый процесс перехода светового кванта нельзя наблюдать, не обращаясь к установке типа изображенной на фиг. 2, а такой эксперимент нас сейчас не интересует. Величиной, которую нам действительно нужно вычислить, является вероятность перехода из состояния, в котором атом-источник возбужден, атом-детектор находится в основном состоянии и кванты отсутствуют, в состояние, где атом-источник не возбужден, атом-приемник ионизован и кванты также отсутствуют. Зная указанную

<sup>1)</sup> См. также работы Рака [16], Гейзенберга [17] и Ферми [1], § 10.

вероятность, мы сумеем ответить на вопрос о том, как зависит вероятность ионизации от положения приемника на плоскости  $B$ , если источник света расположен в точке  $S$ . Мы увидим, что эта вероятность будет пропорциональна интенсивности, вычисляемой по классической электродинамике в предположении, что источник света находится в точке  $S$ . Таким образом, квантовая электродинамика описывает как диффракционную картину, характерную для световых волн, так и вырывание фотоэлектронов, характерное для световых квантов.

Из вида гамильтониана [формулы (50.2) и (50.3)] следует, что электроны различных атомов взаимодействуют друг с другом только через электромагнитное поле. Поэтому интересующий нас процесс описывается лишь вторым приближением теории возмущений<sup>1)</sup>. Поскольку в начале и в конце кванты отсутствуют, в промежуточных состояниях имеется один квант, а атомы либо оба находятся в основных состояниях, либо источник возбужден, а приемник ионизован. Промежуточное состояние первого типа соответствует такому процессу, когда источник переходит в основное состояние, испуская световой квант, а детектор поглощает его и ионизируется. Поскольку в промежуточных состояниях энергия может и не сохраняться, энергия светового кванта не обязана совпадать с энергией возбуждения источника (см. § 29). Промежуточное состояние второго типа соответствует такому процессу, когда детектор ионизируется, испуская световой квант, а источник поглощает его и переходит в основное состояние. Ясно, что в этом случае в промежуточном состоянии энергия не может сохраняться. Матричный элемент второго порядка для всего процесса получается суммированием выражений типа (29.20) по всем возможным промежуточным состояниям светового кванта, принадлежащим к обоим типам.

Принципиальная сторона проводимых далее вычислений не зависит от частных особенностей опыта, схема которого изображена на фиг. 1. Мы не будем явно определять фактически получающуюся диффракционную картину; вместо этого будет показано, что квантовые и классические результаты совпадают для любой установки, состоящей из идеально отражающих диафрагм как со щелями, так и без них. Такой вывод не может вызвать удивления, так как уравнения Максвелла имеют одинаковый вид как в классической, так и в квантовой электродинамике. Тем не менее интересно явно проследить, каким образом получается это сов-

<sup>1)</sup> Мы допускаем, что вероятность спонтанного излучения света атомом-источником достаточно мала, так что справедливы замечания, сделанные в примечании 1 на стр. 229. Тогда полная вероятность перехода, отнесенная к единице времени, будет постоянной, если только промежутки времени достаточно велики, чтобы энергия сохранялась при переходе из начального состояния в конечное.

падение. Ниже будет показано, что при суммировании по промежуточным состояниям светового кванта получается выражение, эквивалентное решению электромагнитного волнового уравнения для точечного источника (функция Грина).

**Представление электромагнитного поля.** В рассматриваемой задаче разложение напряженностей электрического и магнитного полей по плоским волнам, введенное в § 48 и применявшееся ранее в настоящем параграфе, оказывается неудобным, так как плоские волны не удовлетворяют должным граничным условиям на поверхности диафрагмы. Функции, удовлетворяющие этим условиям, очень сложны, и мы не будем пытаться найти для них явные выражения, а просто предположим, что они существуют и образуют полную систему и, следовательно, векторный потенциал можно разложить по ним. Предположение о том, что поверхность диафрагмы является идеально отражающей, означает, что, вообще говоря, эти функции должны быть вещественными. Помещая всю систему в большой, но конечный замкнутый ящик с идеально отражающими стенками, можно добиться того, чтобы наша система функций принадлежала дискретному спектру. Компоненты векторных функций  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$  в декартовой системе координат удовлетворяют волновому уравнению второго порядка

$$\nabla^2 u_{ks} + \frac{\omega_k^2}{c^2} u_{ks} = 0, \quad s = x, y, z, \quad (50.18)$$

причем  $\operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0$ . Поскольку на идеально отражающей поверхности тангенциальные составляющие напряженности электрического поля и векторного потенциала обращаются в нуль, граничное условие имеет вид

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u}_k = 0, \quad (50.19)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности диафрагмы или к стенкам ящика.

Покажем, что если эти функции принадлежат различным собственным значениям  $\omega_k$ , то они ортогональны. Для этой цели умножим уравнение (50.18) на  $u_{k's}(\mathbf{r})$ , соответствующее уравнение для  $u_{k's}(\mathbf{r})$  — на  $u_{ks}(\mathbf{r})$ , вычтем второе из первого и просуммируем результат по  $s = x, y, z$ . В результате с помощью теоремы Грина получим

$$\int_{s=x, y, z} \sum \left( u_{k's} \frac{\partial u_{ks}}{\partial n} - u_{ks} \frac{\partial u_{k's}}{\partial n} \right) dA = \frac{\omega_{k'}^2 - \omega_k^2}{c^2} \int \mathbf{u}_{k'} \cdot \mathbf{u}_k d\tau, \quad (50.20)$$

где  $\partial/\partial n$  означает компоненту градиента в направлении внешней нормали. Поверхностный интеграл в левой части равенства берется как по диафрагме, так и по стенкам ящика. Согласно условию (50.19), тангенциальные компоненты  $\mathbf{u}_k$  обращаются в нуль на

граничных поверхностях, откуда следует, что и тангенциальные производные от этих компонент также равны нулю. Но, поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0$ , производная по нормали от нормальной составляющей вектора  $\mathbf{u}_k$  обращается в нуль. Следовательно, на граничных поверхностях вектор  $\mathbf{u}_k$  перпендикулярен поверхности, а вектор  $\partial \mathbf{u}_k / \partial n$  параллелен ей. Поэтому их скалярное произведение равно нулю, поверхностный интеграл в левой части (50.20) обращается в нуль, и если  $\omega_{k'} \neq \omega_k$ , то  $\int \mathbf{u}_{k'} \cdot \mathbf{u}_k d\tau = 0$ . Равным образом и любые вырожденные решения (50.18) можно выбрать так, чтобы они были взаимно ортогональны, и нормировать решения во всей области. Таким образом, мы имеем

$$\int \mathbf{u}_{k'} \cdot \mathbf{u}_k d\tau = \delta_{kk'}. \quad (50.21)$$

Поступим теперь так же, как и в § 48, разлагая векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$  для поля в вакууме по функциям  $\mathbf{u}_k$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k q_k(t) \mathbf{u}_k(\mathbf{r}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_k p_k(t) \mathbf{u}_k(\mathbf{r}). \quad (50.22)$$

Здесь  $q_k$  и  $p_k$  представляют собой эрмитовы операторы, удовлетворяющие правилам перестановки

$$\begin{aligned} [q_k(t), p_{k'}(t)] &= i\hbar \delta_{kk'}, \\ [q_k(t), q_{k'}(t)] &= [p_k(t), p_{k'}(t)] = 0. \end{aligned} \quad (50.23)$$

Подставляя (50.22) в гамильтониан электромагнитного поля (48.7) и принимая во внимание (50.21), получаем

$$H_{em} = \sum_k 2\pi c^2 p_k^2 + \frac{1}{8\pi} \sum_{kl} q_k q_l \int (\operatorname{rot} \mathbf{u}_k) \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{u}_l) d\tau.$$

Интеграл в правой части можно упростить, интегрируя по частям

$$\int (\operatorname{rot} \mathbf{u}_k) \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{u}_l) d\tau = \int \mathbf{u}_k \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}_l \cdot d\tau$$

(поверхностный интеграл обращается в нуль в силу граничных условий). Это выражение можно еще более упростить, если выразить  $\mathbf{u}_l$  в декартовых координатах и воспользоваться равенствами (50.18) и (50.21):

$$\begin{aligned} \int (\operatorname{rot} \mathbf{u}_k) \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{u}_l) d\tau &= - \int \mathbf{u}_k \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_l d\tau = \\ &= \frac{\omega_l^2}{c^2} \int \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_l d\tau = \frac{\omega_l^2}{c^2} \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Тогда гамильтониан поля принимает вид

$$H_{em} = \sum_k \left( 2\pi c^2 p_k^2 + \frac{\omega_k^2}{8\pi c^2} q_k^2 \right). \quad (50.24)$$

Квантовые уравнения движения для  $q_k$  и  $p_k$  в силу (45.23), (50.23) и (50.24) записываются в виде

$$\dot{q}_k = 4\pi c^2 p_k, \quad \dot{p}_k = -\frac{\omega_k^2}{4\pi c^2} q_k.$$

Эти уравнения легко интегрируются, и мы получаем

$$q_k = a_k e^{-i\omega_k t} + a_k^* e^{i\omega_k t},$$

$$p_k = -\frac{i\omega_k^2}{4\pi c^2} (a_k e^{-i\omega_k t} - a_k^* e^{i\omega_k t}).$$

Здесь  $a_k$  и  $a_k^*$  — операторы, не зависящие от времени; легко проверить, что они подчиняются правилам перестановки типа (48.28):

$$[a_k, a_{k'}^*] = \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k} \delta_{kk'}$$

(все другие пары операторов  $a$  коммутируют). Поэтому  $a_k$  и  $a_k^*$  можно отождествить соответственно с операторами уничтожения и порождения квантов электромагнитного поля в состоянии  $k$ . Гамильтониан (50.24) принимает вид

$$H_{em} = \sum_k \hbar\omega_k \left( N_k + \frac{1}{2} \right), \quad N_k = \frac{\omega_k}{2\pi\hbar c^2} a_k^* a_k.$$

Поскольку  $\omega_k$  соответствует фигурировавшей в § 48 величине  $ck$ , это выражение совпадает с (48.32).

**Матричные элементы.** Матричный элемент второго порядка (29.20) можно записать в виде суммы двух членов, соответствующих двум рассмотренным выше типам промежуточных состояний. Первый из них можно записать в виде

$$\sum_k \frac{(H'_S)_{i, 0k} (H'_S)_{0k, 1}}{E_{S1} - E_{S0} - \hbar\omega_k}, \quad (50.25)$$

где  $(H'_S)_{0k, 1}$  — матричный элемент для перехода атома-источника из возбужденного состояния (с энергией  $E_{S1}$ ) в основное (с энергией  $E_{S0}$ ) с излучением кванта в состоянии  $k$ <sup>1)</sup>:

$$(H'_S)_{0k, 1} = \frac{ie\hbar}{mc} \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k} \right)^{1/2} \int \bar{w}_{S0}(\mathbf{r}') \mathbf{u}_k(\mathbf{r}') \cdot \text{grad}' w_{S1}(\mathbf{r}') d\tau'.$$

<sup>1)</sup> Как и раньше в настоящем параграфе, мы переходим к представлению, в котором зависимость от времени переносится с операторов на волновые функционалы. Это удобнее для применения нестационарной теории возмущений.

Через  $(H'_B)_{i, 0k}$  обозначен матричный элемент для перехода атома-приемника из основного состояния (с энергией  $E_{B0}$ ) в ионизованное (с энергией  $E_{Bi}$ ) с поглощением кванта в состоянии  $k$ :

$$(H'_B)_{i, 0k} = \frac{ie\hbar}{mc} \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k} \right)^{1/2} \int \bar{w}_{B'}(\mathbf{r}) \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \cdot \text{grad } w_{B0}(\mathbf{r}) d\tau.$$

Аналогично второй член можно записать в виде

$$\sum_k \frac{(H'_S)_{0, 1k} (H'_B)_{ik, 0}}{E_{B0} - E_{Bi} - i\omega_k}. \quad (50.26)$$

При помощи полученных ранее результатов легко показать, что

$$(H'_S)_{0, 1k} = (H'_S)_{0', 1}, \quad (H'_B)_{ik, 0} = (H'_B)_{i, 0k}.$$

Как известно из рассмотренной в § 29 нестационарной теории возмущений, вероятность перехода, отнесенная к единице времени, имеет заметную величину, только если при переходе из начального состояния в конечное энергия сохраняется. Поэтому интерес представляют лишь такие ионизованные состояния, для которых

$$E_{Bi} - E_{B0} = E_{S1} - E_{S0}.$$

Обозначая эту разность через  $\hbar\omega$ , можно записать сумму (50.25) и (50.26) в виде

$$\frac{4\pi e^2 \hbar^2}{m^2} \int \int_{s, s' = x, y, z} \bar{w}'_{S0} \frac{\partial w'_{S1}}{\partial r_{s'}} \bar{w}_{B'} \frac{\partial w_{B0}}{\partial r_s} \left[ \sum_k \frac{u_{ks'}(\mathbf{r}') u_{ks}(\mathbf{r})}{\omega_k^2 - \omega^2} \right] d\tau d\tau'. \quad (50.27)$$

Фигурирующие здесь электронные волновые функции  $w$  в достаточной степени локализованы либо около источника, либо около приемника. Интересуясь главным образом макроскопическими наблюдениями, можно считать область, в которой эти функции заметно отличны от нуля, бесконечно малой. Тогда зависимость вероятности перехода от положений источника ( $\mathbf{r}'$ ) и приемника ( $\mathbf{r}$ ) определяется выражением в квадратных скобках в (50.27). При больших размерах „ящика”, в который помещена система, суммирование по  $k$  можно заменить интегрированием по  $\omega_k$ , причем контур  $C$  выбирается в соответствии с (29.24). Плотность состояний  $\varrho(k)$  мы определим так, чтобы величина  $\varrho(k) d\omega_k$  представляла число состояний электромагнитного поля в интервале круговых частот  $d\omega_k$ .

Итак, можно положить

$$[ ] = \int_C \frac{u_{ks'}(\mathbf{r}') u_{ks}(\mathbf{r})}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad \omega_k = P + iR, \quad (50.28)$$

где  $P$  — главное значение интеграла, а  $R$  — умноженный на  $\pi$  вычет подинтегрального выражения в полюсе  $\omega_k = \omega$ . Функции  $P$  и  $R$ , очевидно, вещественны. Вероятность перехода пропорциональна квадрату модуля (50.28), т. е. величине

$$P^2 + R^2. \quad (50.29)$$

**Классическая диффракционная картина.** Полученный только что результат нужно сравнить с классическим выражением для интенсивности света в точке  $\mathbf{r}$  при наличии источника в точке  $\mathbf{r}'$ . Эта интенсивность дается решением волнового уравнения (35.9) для векторного потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , создаваемого плотностью тока  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (50.30)$$

Нужно найти решение уравнения (50.30) для случая, когда плотность тока  $\mathbf{J}$  сосредоточена в малой области пространства и гармонически зависит от времени. Из дальнейшего будет ясно, что в случае чисто гармонической зависимости  $\mathbf{J}$  от времени возникают некоторые аналитические трудности. Поэтому мы сделаем физически естественное допущение о том, что  $\mathbf{J}$  характеризует затухающий осциллятор, а затем перейдем к пределу, когда постоянная затухания становится пренебрежимо малой. Положим, таким образом,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{-\gamma t} \cos \omega t = \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{r}) [e^{(-\gamma+i\omega)t} + e^{(-\gamma-i\omega)t}].$$

В силу линейности уравнения (50.30) его стационарные решения имеют вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{(-\gamma+i\omega)t} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) e^{(-\gamma-i\omega)t}, \quad (50.31)$$

где функция  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{c^2} (\omega + i\gamma)^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (50.32)$$

Последнее можно решить таким же образом, как и неоднородное волновое уравнение (26.7). Разложим  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  по полной системе вещественных векторных функций  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ , удовлетворяющих введенным выше граничным условиям:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_k A_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}). \quad (50.33)$$

Поскольку вектор  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  необязательно веществен [хотя векторный потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , разумеется, является таковым], коэффициенты разложения  $A_k$  могут быть и комплексными. Подставляя (50.33)

в уравнение (50.32) и принимая во внимание (50.18), получаем

$$-\frac{1}{c^2} \sum_k A_k [\omega_k^2 - (\omega + i\gamma)^2] \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}).$$

При помощи условия ортонормированности (50.21) отсюда можно найти коэффициенты  $A_k$ :

$$A_k = \frac{4\pi c}{\omega_k^2 - (\omega + i\gamma)^2} \int \mathbf{u}_k(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (50.34)$$

Подставляя (50.34) в (50.33), получаем следующее выражение для компонент вектора  $A(\mathbf{r})$  в декартовой системе координат:

$$A_s(\mathbf{r}) = 4\pi c \int \sum_{s'} J_{s'}(\mathbf{r}') \left[ \sum_k \frac{u_{ks'}(\mathbf{r}') u_{ks}(\mathbf{r})}{\omega_k^2 - (\omega + i\gamma)^2} \right] d\tau'. \quad (50.35)$$

Поскольку при конечном значении  $\gamma$  полюс подинтегрального выражения лежит над вещественной осью, суммирование в квадратных скобках можно заменить интегрированием по вещественным значениям  $\omega_k$ . В пределе при  $\gamma \rightarrow 0$  полюс оказывается на вещественной оси, и мы получаем интеграл по контуру  $C$  в выражении (29.24). Этот интеграл совпадает с интегралом, входящим в формулу (50.28), так что выражение в квадратных скобках в (50.35) можно заменить на  $P + iR$ . Интенсивность света, измеряемая в точке  $\mathbf{r}$ , пропорциональна среднему по времени от квадрата векторного потенциала (50.31). В пределе при  $\gamma \rightarrow 0$  для малого источника тока, расположенного в точке  $\mathbf{r}'$ , это дает

$$\begin{aligned} & \{[(P + iR)e^{i\omega t} + (P - iR)e^{-i\omega t}]^2\}_{\text{ср. вр.}} = \\ & = 4[(P \cos \omega t - R \sin \omega t)^2]_{\text{ср. вр.}} = 2(P^2 + R^2). \end{aligned}$$

Совпадение этого результата с выражением (50.29) показывает, что вероятность обнаружить ионизованный атом в некоторой точке пространства пропорциональна классическому значению интенсивности света в этой точке.

### ЗАДАЧИ

1. Вычислить коммутатор  $[\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2$  и  $P_x(\mathbf{r}', t)$ . При помощи полученного результата показать, что в случае электромагнитного поля в вакууме уравнение движения для величины  $P$  дается второй из формул (48.6).

2. Показать, что если коммутатор двух компонент  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$  имеет вид

$$[A_s(\mathbf{r}, t), P_{s'}(\mathbf{r}', t)] = i\hbar \delta_{ss'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{i\hbar}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r_s} \frac{\partial}{\partial r_{s'}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right),$$

то величины  $\mathbf{A}$  и  $\text{div } \mathbf{P}$  в различных точках пространства коммутируют друг с другом.

3. Показать, что при замене второй группы правил перестановки (48.8) выражениями из задачи 2 коммутаторы, содержащие напряженности электромагнитного поля, остаются неизменными.



4. Показать, что  $\text{div } \mathbf{H}$  коммутирует с гамильтонианом электромагнитного поля (48.15) и, следовательно, является интегралом движения.

5. Провести вычисления, указанные в (48.16), и показать, что в результате получаются два первых уравнения Максвелла.

6. Вычислить коммутаторы выражений (48.18) с гамильтонианом (48.22) и показать, что правила перестановки (48.18) не изменяются со временем. Это означает, что они согласуются с уравнениями движения.

7. В чем состоит физическое сходство и различие между функцией  $D$ , определяемой формулами (47.30) и (47.33), и функцией  $D_0$ , определяемой формулой (48.39)?

8. Вывести выражение (48.43) для коммутатора  $E_x(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}_y(\mathbf{r}', t')$ .

9. Исходя из выражения (49.4) вывести уравнения Лагранжа для функций  $\psi$ ,  $\psi^*$  и  $\mathbf{A}$ .

10. Найти квантовое уравнение движения для  $\psi$ , предполагая, что гамильтониан дается формулой (49.11) с заменой (49.12) на (49.13). Показать, что если заменить  $\varphi$  на

$$e \int \frac{\psi^*(\mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'}{r - r'}$$

то это уравнение совпадает с (49.1). Какой результат получится, если не делать данной подстановки?

11. Показать, что если гамильтониан определяется так же, как в задаче 10, то значения коммутаторов (47.8) и (48.21) представляют собой интегралы движения.

12. Проверить справедливость равенства (49.23) при помощи соотношений антикоммутиации (49.19), а также при помощи операторных уравнений типа (46.32).

13. Вычислить типичный недиагональный матричный элемент энергии кулоновского взаимодействия (49.21) и показать, что результат совпадает с тем, который получился бы при использовании антисимметричных волновых функций многоэлектронной системы типа (32.7).

14. Провести вычисления последней части § 50, считая, что диафрагма отсутствует и вместо вещественных векторных функций  $u_h(\mathbf{r})$  используются плоские волны с периодическими граничными условиями. Показать в явном виде, что вероятность ионизации атома-приемника обратно пропорциональна квадрату его расстояния от источника. Сравнить это вычисление с рассмотрением вопроса об образовании следа в камере Вильсона в § 30.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fermi E., Rev. Mod. Phys., 4, 87 (1932).
2. Rosenfeld L., Ann. Inst. Henri Poincaré, 1, 25 (1931).
3. Heitler W., The Quantum Theory of Radiation, 3d ed., Oxford — New York, 1954. (Имеется русский перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.)
4. Dyson F. J., Advanced Quantum Mechanics, 2d ed., Cornell Univ., 1954 (mimeографированные лекции).
5. Дирак П. А. М., Фок В., Подольский Б., Sov. Phys., 2, 468 (1932).
6. Jordan P., Pauli W., Zs. f. Phys., 47, 151 (1928).
7. Bohr N., Rosenfeld L., Det. Kgl. Danske Vidensk. Selskab., Mat.-fys. Medd., 12, 8 (1933).

8. Tomonaga S., *Progr. Theor. Phys. (Kyoto)*, **1**, 27 (1946). (Имеется русский перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики”, ИЛ, 1954.)
9. Tomonaga S., *Phys. Rev.*, **74**, 224 (1948). (Имеется русский перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики”, ИЛ, 1954.)
10. Schwinger J., *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948). (Имеется русский перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики”, ИЛ, 1954.)
11. Schwinger J., *Phys. Rev.*, **75**, 651 (1949). (Имеется русский перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики”, ИЛ, 1954.)
12. Feynman R. P., *Phys. Rev.*, **76**, 749, 769 (1949). (Имеется русский перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики”, ИЛ, 1954.)
13. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949).
14. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **112A**, 661 (1926).
15. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **114A**, 243 (1927).
16. Racaň G., *Accad. Lincei Rend.*, **11**, 837, 1100 (1930).
17. Heisenberg W., *Ann. d. Phys.*, **9**, 338 (1931).

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Антикоммутаторы 404, 406  
Антикоммутации соотношения 404, 405, 415, 442  
-- для различных моментов времени 414—417  
Антикоммутирование 369  
Атом, модель Томаса—Ферми 322, 323
- Барьер потенциальный 113, 115  
Бесселя уравнение 97  
-- функции 97, 133, 216, 217, 418  
Бозе—Эйнштейна статистика 262, 264, 386, 406, 413, 414, 421  
Бора постулаты 14  
Борновское приближение 188—195, 313  
-- для обменных столкновений 273, 274  
-- условия применимости 197, 198  
Бра-вектор 165
- Ван-дер-Ваальса силы 204  
Вариационный метод 199—212  
Вековое уравнение 149, 338  
-- в теории возмущений 185  
---- эффекта Штарка 186  
Вектор Пойнтинга 286, 294, 308, 432  
Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна метод 214—222  
Вероятность плотность 35, 85, 86, 259, 299  
Вильсона камера 16, 27, 241, 242  
Вирialа теорема 164  
Водород, атом, уровни энергии 103, 109, 382  
-- молекула 344, 345  
Возмущение 177  
-- адиабатическое 246—252  
-- внезапное 246  
-- временное 251  
-- гармоническое осциллятора 252  
-- гармоническое 232  
-- оператор 447  
-- первого порядка 179  
Возмущений теория 275, 286
- Волновая функция антисимметричная 257, 261  
-- атома водорода 106, 110  
-- возмущенная 228, 232  
-- гармонического осциллятора 83  
-- как унитарная матрица 153  
-- при рассеянии кулоновским полем 138, 141  
-- симметричная 257  
-- спиновая 264, 267, 277, 333, 347, 358  
-- -- синглетная 268, 347, 358  
-- -- -- триплетная 268, 358  
-- статистическая интерпретация 35  
-- стационарная 87  
Волновое число 25  
Волновой вектор 33, 65  
-- пакет 25  
-- классический предел 39, 77  
-- нормированный 72  
-- осциллирующий 87, 88  
-- пространственный 25  
Волновые функции обменно вырожденные 272  
Временный пакет 26  
Вырождение 182  
Вырождение в случае не зависящего от времени возмущения 182—186  
-- и четность 93  
-- электрический дипольный момент 187  
-- кулоновских волновых функций 107, 108  
-- обменное 258, 345,  
-- снятие 182
- Гамильтона метод 151  
-- уравнения 389, 392, 393, 409, 423, 424, 436  
-- для  $A$  и  $P$  437  
-- -- действия 213  
-- функция 157—161, 389—392

- Гамильтониан 201, 392, 402, 424, 427, 436, 438  
 — невозмущенный 177, 238  
 — плотность 392, 397
- Ганкеля функция 99
- Гелий, атом 268  
 — — основное состояние 201—203  
 — — первое возбужденное состояние 269
- Граничные условия 42, 43  
 — — периодические 65, 66, 70, 424
- Грина функция 190—192, 208, 211, 244, 273, 293, 429, 438
- Групповая скорость 27
- Движения интеграл 162  
 — уравнение квантовое 424, 439  
 — — классическое 157
- Дейтрон 352
- Динамика классическая 76
- Динамическая переменная 56, 145  
 — — представление оператором 57  
 — — эрмитовой матрицей 153
- Дирака волновая функция 448  
 —  $\delta$ -функция 66—69  
 — — представление 67  
 — уравнение 369, 372, 377—386, 388, 408—419, 423, 435  
 — — в матричной форме 370—372  
 — — квантование 388, 408—419
- Дифракционный опыт 16, 23  
 — — анализ 451
- Дополнительности принцип 17, 18
- Допплера эффект 21
- Дублет 332, 334  
 — — интенсивность 332
- Запаздывающее решение 293
- Заряд, статическое распределение 440
- Зеемана эффект 95, 303, 336—338  
 — — квадратичный 339
- Излучение 283—314  
 — дипольное 295  
 — поглощение 283—289, 449  
 — поляризация 295, 303, 450  
 — спонтанное 292—300  
 — теория 444  
 — — квантовая 448  
 — — полуклассическая 283—314
- Импульс 38—40, 157  
 — квантованного поля 432  
 — оператор 64, 74
- Импульс, оператор, собственная функция 64, 65  
 — — собственные значения 65  
 $jj$ -связь 330
- Канонические переменные 157, 159  
 — — для поля 393
- Квазиклассический метод, см. Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна метод
- Квант 12
- Квантование вторичное 396  
 — — полей 388, 424—435, 439
- Квантовое число вращательное 349  
 — — гармонического осциллятора 81  
 — — колебательное 349  
 — — магнитное 95  
 — — орбитальное (азимутальное) 95  
 — — полное 104  
 — — радиальное 104
- Квантовые числа параболические 110
- Коммутатор 158, 160  
 — для  $E$  и  $H$  427, 434
- Комптона эффект 13
- Кратность состояния 329
- Кронекера  $\delta$ -символ 60, 66, 147
- Кэт-вектор 165
- Лагерра полиномы 105, 106, 332  
 — — присоединенные 105
- Лагранжа уравнения 389, 396, 408, 422, 435  
 — функция 157, 389
- Лагранжиан 390, 421, 423  
 — плотность 390, 423
- Ланде фактор 336
- Лежандра полиномы 90, 105, 124, 126  
 — — присоединенные 91
- Лоренца преобразования 364, 366, 377, 422  
 — сила 161  
 — условие 285
- $LS$ -связь 328, 329
- Максвелла уравнения 284, 308, 424—426
- Масса приведенная 101, 102
- Массовое число 352
- Матрица, диагонализация 149, 153  
 — диагональная 149  
 — — сумма 147  
 — единичная 147  
 — несингулярная 147  
 — нулевая 147  
 — обратная 147  
 — постоянная 147  
 — сингулярная 147  
 — унитарная 148  
 — шпур 147  
 — эрмитова 148, 150, 153  
 — эрмитово-сопряженная 148

- Матрицы преобразования 151  
 — спиновые 264, 267, 358, 366, 371, 374, 376  
 Мезон 172, 261, 363  
 Минимизирующий пакет 73, 74  
 Момент количества движения 94, 96  
 — — для нескольких электронов 328  
 — — излучения 296, 298, 303  
 — — нулевой 96  
 — — оператор 94, 95, 166  
 — — сложение 172, 173  
 — — спиновый 171, 255, 263, 328, 377, 378  
 — электрический дипольный 187  
 — — квадрупольный 188  
 Неймана сферическая функция 97  
 Неопределенности соотношение 22, 23, 37, 50  
 — принцип 17, 19, 22  
 Непрерывности уравнение 284, 436  
 Нормировка 36, 37, 42  
 — в ящике 58  
 — на  $\delta$ -функцию 67, 75  
 — собственных функций оператора импульса 65  
 Нуклон 351, 352, 357  
 Нуклоны, взаимодействие 352  
 Обмен пространственный, оператор 358  
 — спиновый оператор 358  
 Оператор дифференциальный 33, 38  
 Операторы антикоммутирующие 406  
 Ортонормированность, условие 68  
 — функций 60, 66  
 Осциллятор гармонический 79, 83, 103  
 — — волновые функции, четность 82  
 — — и  $N$ -представление 399, 400  
 — — классический предел 185  
 — — уровни энергии 80  
 Отражения коэффициент 115  
 Потенциальная волна 193  
 Парциальных волн метод 124, 128, 197  
 Паули принцип 259, 260, 318, 385, 386, 410, 414, 443  
 Перестановки правила 166, 397, 399  
 Переход второго порядка 236  
 — запрещенный 291  
 — первого порядка 234  
 — разрешенный 291  
 — строго запрещенный 292, 306  
 Периодическая система элементов 318  
 Планка постоянная 12  
 — формула 300, 304, 305  
 Позитрон 385, 414  
 — дырочная теория 385  
 Поинтинга вектор 286, 294, 308, 432  
 Поле кулоновское, уровни энергии 103, 109  
 — — экранированное 198  
 — электромагнитное 159, 284, 294  
 Порождения оператор 403, 407, 443, 455  
 Потенциал электромагнитный 365, 375  
 Представление энергетическое 164  
 Причинность классическая 17  
 Пробная функция 200  
 Прозрачности коэффициент 115, 116  
 Пуассона скобки 158, 389, 394, 405, 406, 425  
 — уравнение 323  
 Рамзауэра—Таунсенда эффект 130, 131  
 Рассеяние, амплитуда 193  
 — атомом инертного газа 131  
 — кулоновским полем 137—141, 142  
 — — экранированным 198  
 — неупругое 237—245  
 — прямоугольной потенциальной ямой 133, 134, 196  
 — резонансное 134  
 — сечение, см. Сечение рассеяния  
 — сферически симметричным полем 123  
 — твердой сферой 132, 133  
 — тождественных частиц 262, 265  
 Резонанс, теория 345  
 Ресселя—Саундера связь 328  
 Связь гомеоплярная 345  
 Сечение обменное эффективное 280  
 — рассеяния дифференциальное 118, 125, 193, 232, 240, 245, 256, 262, 274, 278, 280, 312, 313  
 Сечение рассеяния эффективное 117, 134, 237, 240, 245, 278, 279, 312  
 — — полное 118, 127, 196, 240, 241, 313  
 Собственная функция 41, 56  
 — — невозмущенного волнового уравнения 226, 238  
 Собственные значения 41, 44, 47  
 — — непрерывные 48, 113  
 Соответствия принцип 15, 27, 40

- Соотношение неопределенности, см.  
 Неопределенности соотношение  
 Спин 255—281, 318, 327, 328, 339, 351  
 — полный, оператор 265  
 Спин-орбитальное взаимодействие 327, 328, 338, 339, 377, 378, 380  
 Столкновение неупругое 237—245  
 — обменное 277, 279  
 — с перераспределением частиц 271—274  
 — теория 113—143  
 — тождественных частиц 262, 263, 265, 266  
 — трехмерное 117  
 — электрона с атомом водорода 276—279  
 — — — гелия 279—281  
 Сферические функции 92, 93, 171  
 Теория относительности специальная 255  
 Тождественность частиц 255, 256, 259, 262, 263, 265, 266  
 Томаса—Ферми модель атома 322, 323  
 — — приближение 323  
 Тонкой структуры постоянная 301  
 Точки поворота 45, 216—221  
 Уничтожения оператор 403, 407, 443, 455  
 Уровни энергин 46, 51  
 — — в магнитном поле 335—341  
 — — возмущенные 186  
 — — дискретные 47  
 — — непрерывные 47  
 — — тонкая структура 367, 383, 384  
 Фазы 127, 128, 132, 209  
 Ферми—Дирака статистика 261, 264, 352, 403, 406, 414, 441  
 Фоторасщепление 310  
 Фотоэффект 13, 310, 312  
 Франка—Герца опыт 13, 14  
 Функционал волновой 401  
 Функциональная производная 391, 392  
 Фурье разложение 228, 234, 308  
 Характеристическая функция 41  
 Характеристическое значение 41  
 Хартри метод 324  
 — потенциальная энергия 445  
 — приближение 325  
 — самосогласованное поле 324  
 Центрального поля приближение 326  
 Черенкова эффект 306, 307  
 Четность 53  
 — оператор 163  
 Ширина линии 300, 301  
 Шредингера уравнение 30—54  
 — — для двух частиц 101  
 — — квантование 395  
 — — релятивистское 363  
 Штарка эффект 185, 269  
 Штерна—Герлаха опыт 13  
 Электродинамика квантовая 422—458  
 Электрон, магнитный момент 335  
 — спиновые функции 267  
 Электроны, взаимодействие с электромагнитным полем 435  
 Энергии оператор 56, 59, 60  
 (См. также Гамильтониан)  
 — — матрица 152, 153  
 Энергия излученная 309  
 — нулевая 81, 82  
 — — электромагнитного поля 430  
 — обменная 269, 444  
 — отрицательная 385, 386, 413  
 — собственная, поперечная и продольная 441  
 — среднее значение 62, 63  
 Эрмита полиномы 82, 83, 105, 181  
 — — производящая функция 82  
 Ядро, радиус 352  
 — энергия связи 352  
 Яма потенциальная прямоугольная 48, 104, 133  
 — — трехмерная 96

## ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции .....	5
Предисловие .....	7
<b>Глава I. Физические основы квантовой механики</b> .....	<b>11</b>
§ 1. Экспериментальные основы .....	12
Недостаточность классической физики (12). Сводка основных опытов и следствий, из них вытекающих (13)	
§ 2. Старая квантовая теория .....	14
Правила квантования Бора—Зоммерфельда (14). Практические трудности (15). Логические трудности (15). Точка зрения квантовой механики (17).	
§ 3. Принцип неопределенности и принцип дополнительности .....	17
Принцип неопределенности (18). Принцип дополнительности (19). Пределы возможностей эксперимента (19).	
§ 4. Обсуждение опытов по измерению физических величин .....	20
Измерение координаты (20). Измерение импульса (21). Диффракционный опыт (22). Обсуждение диффракционного опыта (24).	
§ 5. Воливые пакеты в пространстве и во времени .....	24
Пространственные пакеты (25). Временные пакеты (26). Волновой формализм (27).	
Задачи .....	28
Литература .....	29
<b>Глава II. Волновое уравнение Шредингера</b> .....	<b>30</b>
§ 6. Вывод воливого уравнения .....	30
Бегущие гармонические волны (30). Необходимость найти волновое уравнение (31). Одномерное волновое уравнение (32). Обобщение на случай трех измерений (33). Учет действия сил (34).	
§ 7. Интерпретация волновой функции .....	34
Статистическая интерпретация (35). Нормировка волновой функции $\psi$ (36). Плотность тока вероятности (37). Среднее значение (38). Теорема Эренфеста (39).	

§ 8. Собственные функции' оператора энергии .....	40
Разделение переменных в волновом уравнении (41). Смысл константы разделения $E$ (41). Граничные условия на бесконечности (42). Условия непрерывности (42). Граничные условия в точках, где потенциальная энергия обращается в бесконечность (43). Собственные значения оператора энергии в одномерном случае (44). Дискретные уровни энергии (46). Непрерывные уровни энергии (47). Дискретные и непрерывные собственные значения в трехмерном случае (48).	
§ 9. Одномерная прямоугольная потенциальная яма .....	48
Идеально твердые стенки (49). Конечный скачок потенциала (50). Уровни энергии (51). Четность (53). Упрощенное решение (54).	
Задачи .....	54
Литература .....	55
<b>Глава III. Собственные функции и собственные значения .....</b>	<b>56</b>
§ 10. Физические постулаты и собственные функции оператора энергии .....	56
Представление динамических переменных с помощью операторов (56). Разложение по собственным функциям (57). Оператор полной энергии (58). Нормировка в ящике (58). Свойство ортонормированности собственных функций оператора энергии (59). Вещественность собственных значений оператора энергии (61). Разложение по собственным функциям оператора энергии (61). Условие полноты (62). Вероятность и среднее значение (62). Общее решение уравнения Шредингера (64).	
§ 11. Собственные функции оператора импульса .....	64
Вид собственных функций (65). Нормировка в ящике (65). Дельта-функция Дирака (66). Представление $\delta$ -функции (67). Нормировка на $\delta$ -функцию (67). Некоторые свойства $\delta$ -функции (68). Условие полноты (69). Разложение по собственным функциям оператора импульса (70). Вероятность и среднее значение (70).	
§ 12. Движение свободного волнового пакета в одном измерении..	71
Минимальное значение произведения неопределенностей (71). Форма минимизирующего пакета (73). Коэффициенты разложения по собственным функциям оператора импульса (74). Изменение минимизирующего пакета со временем (75). Классический предельный случай (76).	
Задачи .....	77
Литература .....	78



<b>Глава IV. Дискретные собственные значения. Уровни энергии</b> .....	79
§ 13. Линейный гармонический осциллятор .....	79
Асимптотическое поведение (79). Уровни энергии (80). Нулевая энергия (81). Четность (82). Полиномы Эрмита (82). Волновые функции гармонического осциллятора (83). Соответствие с классической теорией (85). Осциллирующий волновой пакет (87).	
§ 14. Сферически симметричные потенциалы в трехмерном пространстве .....	89
Разделение переменных в волновом уравнении (89). Полиномы Лежандра (91). Сферические функции (92). Четность (93). Момент количества движения (94).	
§ 15. Трехмерная прямоугольная потенциальная яма .....	96
Нулевой момент количества движения (96). Решения во внутренней области при произвольном $l$ (97). Решения во внешней области при произвольном $l$ (99). Уровни энергии (100).	
§ 16. Атом водорода .....	101
Приведенная масса (101). Асимптотическое поведение (102). Уровни энергии (103). Полиномы Лагерра (105). Волновые функции атома водорода (106). Вырождение (107). Разделение переменных в параболических координатах (108). Уровни энергии (109). Волновые функции (110).	
<b>Задачи</b> .....	111
<b>Литература</b> .....	112
<b>Глава V. Непрерывные собственные значения. Теория столкновений</b> .....	113
§ 17. Одномерный прямоугольный потенциальный барьер .....	113
Асимптотическое поведение (114). Нормировка (114). Коэффициенты отражения и прозрачности (115).	
§ 18. Трехмерные столкновения .....	117
Эффективное сечение рассеяния (117). Соотношения между углами в лабораторной системе и системе центра инерции (118). Связь между эффективными сечениями (120). Зависимость от $\gamma$ (120). Асимптотическое поведение (121). Нормировка (122).	
§ 19. Рассеяние сферически симметричным полем .....	123
Асимптотическое поведение (124). Дифференциальное эффективное сечение (125). Полное эффективное сечение (127). Фазы (127). Вычисление фаз (128). Связь между знаками $\delta_l$ и $V(r)$ (129). Эффект Рамзауэра — Таунсенда (130). Рассеяние идеально твердой сферой (132). Рассеяние прямоугольной потенциальной ямой (133). Резонансное рассеяние (134). Угловое распределение при низких энергиях (136).	

§ 20. Рассеяние кулоновским полем .....	137
Параболические координаты (137). Вырожденная гипергеометрическая функция (138). Эффективное сечение рассеяния и нормировка (139). Решения в сферических координатах (140). Искаженное кулоновское поле (141). Классический предельный случай для чисто кулоновского поля (142).	
Задачи .....	143
Литература .....	144
<b>Глава VI. Матричная формулировка квантовой механики</b> .....	<b>145</b>
§ 21. Матричная алгебра .....	145
Сложение и умножение матриц (146). Нулевая, единичная и постоянная матрицы (147). Шпур, детерминант и обратная матрица (147). Эрмитовы и унитарные матрицы (148). Преобразование и диагонализация матриц (148). Матрицы бесконечного ранга (150).	
§ 22. Матрицы в квантовой механике .....	151
Матрица унитарного преобразования (151). Матрица энергии (152). Динамические переменные как эрмитовы матрицы (153). Волновые функции как унитарные матрицы (153). $\mathfrak{r}$ -представление (154). Полезное тождество (155).	
§ 23. Уравнения движения в матричной форме .....	155
Производная по времени от матрицы (155). Классические уравнения Лагранжа и Гамильтона (157). Классические и квантовые скобки Пуассона (158). Квантование классической системы (159). Движение частицы в электромагнитном поле (159). Вычисление коммутаторов (160). Скорость и ускорение заряженной частицы (161). Сила Лоренца (161). Интегралы движения (162). Оператор четности (163). Энергетическое представление (164). Теорема вириала (164). Дираковские обозначения бра и кет (165).	
§ 24. Момент количества движения .....	165
Определение момента количества движения (166). Определение с помощью бесконечно малых вращений (166). Выбор представления (167). Соотношения между матричными элементами (168). Собственные значения $M_z$ (169). Собственные значения $M^2$ . Матрица $L$ (169). Связь со сферическими функциями (171). Спиновый момент количества движения (171). Сложение моментов количества движения (172). Собственные значения $(M_1 + M_2)^2$ (173).	
Задачи .....	174
Литература .....	175

<b>Глава VII. Приближенные методы решения стационарных задач . . . .</b>	<b>177</b>
§ 25. Стационарная теория возмущений . . . . .	177
Невырожденный случай (178). Первый порядок теории возмущений (179). Второй порядок теории возмущений (179). Нормировка функции $\psi$ (180). Применение теории возмущений к гармоническому осциллятору (181). Вырожденный случай (182). Снятие вырождения в первом приближении (182). Снятие вырождения во втором приближении (183). Эффект Штарка первого порядка в атоме водорода (185). Возмущенные уровни энергии (186). Наличие постоянных дипольных моментов (187).	
§ 26. Борновское приближение . . . . .	188
Приближение теории возмущений (188). Функция Грина (189). Функция Грина для свободной частицы (190). Явное вычисление функции Грина (191). Эффективное сечение рассеяния (192). Применение метода возмущений к парциальным волнам (193). Фазы (195). Рассеяние прямоугольной потенциальной ямой (196). Условия применимости борновского приближения (197). Рассеяние экранированным кулоновским полем (198).	
§ 27. Вариационный метод . . . . .	199
Среднее значение энергии (199). Применение к возбужденным состояниям (200). Основное состояние атома гелия (201). Энергия взаимодействия электронов (202). Вариация параметра $Z$ (203). Силы Ван-дер-Ваальса (204). Расчет по теории возмущений (205). Расчет вариационным методом (206). Интегральное уравнение для задачи о столкновениях (208). Вариационный принцип для фаз (209). Случай нулевого момента количества движения (211).	
§ 28. Квазиклассическое приближение (приближение Вентцеля—Крамера—Бриллюэна) . . . . .	212
Предельный переход к классической механике (213). Приближенные решения (214). Асимптотический характер решений (215). Решение около точки поворота (216). Линейная точка поворота (217). Формулы связи в точке поворота (218). Формулы связи для асимптотических решений (219). Уровни энергии в потенциальной яме (219). Правила квантования (221). Особые граничные условия (221).	
Задачи . . . . .	222
Литература . . . . .	224
<b>Глава VIII. Приближенные методы решения нестационарных задач</b>	<b>226</b>
§ 29. Нестационарная теория возмущений . . . . .	226
Разложение по невозмущенным собственным функциям (226). Первый порядок теории возмущений (228). Физическая интер-	

претация (229). Вероятность перехода (230). Эффективное сечение рассеяния (231). Гармоническое возмущение (232). Второй порядок теории возмущений (233). Влияние переходов первого порядка (234). Промежуточные состояния (237).	
§ 30. Неупругие столкновения .....	237
Выражение для эффективного сечения рассеяния (237). Вычисление матричного элемента (239). Дифференциальное и полное эффективные сечения рассеяния (240). Образование следа в камере Вильсона (241). Постановка задачи (242). Вычисление суммы по $k$ (243). Матричный элемент второго порядка (244). Обсуждение формулы для эффективного сечения (245).	
§ 31. Адиабатическое приближение и аппроксимация внезапных возмущений .....	246
Разложение по мгновенным собственным функциям оператора энергии (246). Выбор фаз (247). Адиабатическое приближение (248). Связь с теорией возмущений (249). Скачкообразное изменение $H$ (250). Аппроксимация внезапных возмущений (250). Временное возмущение (251). Возмущение гармонического осциллятора (252).	
Задачи .....	253
Литература .....	254
<b>Глава IX. Тожественные частицы и спин .....</b>	<b>255</b>
§ 32. Тожественные частицы .....	255
Физический смысл тождественности (256). Симметричные и антисимметричные волновые функции (257). Линейные комбинации несимметризованных функций (258). Различимость тождественных частиц (259). Принцип Паули (259). Связь со статистической механикой (260). Столкновения тождественных частиц (262).	
§ 33. Спиновый момент количества движения .....	263
Связь между спином и статистикой (263). Спиновые матрицы и собственные функции (264). Столкновения тождественных частиц (265). Спиновые функции электрона (267). Атом гелия (268). Спиновые функции для трех электронов (270).	
§ 34. Столкновения с перераспределением частиц .....	271
Обозначения для столкновений с перераспределением частиц (271). Борновское приближение (273). Неортогональность начальных и конечных состояний (274). Связь с нестационарной теорией возмущений (275). Обменные столкновения электронов с атомами водорода (276). Дифференциальное эффективное сечение (278). Обменные столкновения с атомами гелия (279).	
Задачи .....	281
Литература .....	282

<b>Глава X. Полуклассическая теория излучения</b> .....	283
§ 35. Поглощение и вынужденное испускание .....	283
Уравнения Максвелла (284). Плоские электромагнитные волны (285). Применение теории возмущений (286). Вероятность перехода (287). Столкновение в терминах поглощения и испускания (288). Дипольные переходы (289). Запрещенные переходы (291).	
§ 36. Спонтанное излучение .....	292
Классическое поле излучения (292). Асимптотическое выражение (293). Излученная энергия (294). Дипольное излучение (295). Момент количества движения (296). Дипольный случай (297). Переход от классической к квантовой теории (298). Формула распределения Планка (299). Ширина линии (300).	
§ 37. Некоторые применения теории излучения .....	302
Правила отбора для одной частицы (302). Поляризация испускаемого излучения (303). Сохранение момента количества движения (303). Правила отбора для систем из многих частиц (304). Эффект Черенкова (306). Выражение для плотности тока (307). Разложение напряженностей поля излучения в интеграл Фурье (308). Излученная энергия (309). Фотоэффект (310). Угловое распределение (311). Эффективное сечение фотоэффекта на атомах (312). Улучшение борновского приближения (313).	
Задачи .....	314
Литература .....	315
<b>Глава XI. Атомы, молекулы и атомные ядра</b> .....	317
§ 38. Приближения, используемые в теории атома .....	317
Приближение центрального поля (317). Периодическая система элементов (318). Статистическая модель Томаса — Ферми (322). Вычисление потенциала (323). Самосогласованное поле Хартри (324). Связь с вариационным методом (325). Поправки к приближению центрального поля (326). Схема <i>LS</i> -связи (328). Правила отбора (329). Схема <i>jj</i> -связи (330).	
§ 39. Атомы щелочных металлов .....	330
Дублетное расщепление (330). Интенсивность дублета (332). Влияние магнитного поля (335). Случай слабого поля (335). Случай сильного поля (337). Квадратичный эффект Зеемана (339).	
§ 40. Молекулы .....	341
Классификация уровней (341). Волновое уравнение (343). Молекула водорода (344). Потенциальная энергия ядер (346). Потен-	

диал Морза (348). Вращение и колебания двухатомных молекул (348). Уровни энергии (349). Влияние тождественности ядер (350).

§ 41. Атомные ядра ..... 351

Общие свойства ядер (351). Взаимодействие между двумя нуклонами (352). Система нейтрон—протон (353). Потенциал произвольной формы (354). Соотношения для фаз (355). Эффективный радиус действия (356). Обменные операторы (358). Рассеяние протонов протонами (359).

Задачи ..... 359

Литература ..... 361

Глава XII. Релятивистские волновые уравнения ..... 363

§ 42. Релятивистское уравнение Шредингера ..... 363

Свободная частица (364). Электромагнитные потенциалы (365). Разделение переменных (366). Уровни энергии в кулоновском поле (366).

§ 43. Релятивистское уравнение Дирака ..... 368

Уравнение для свободной частицы (369). Матрицы  $\alpha$  и  $\beta$  (370). Решения для свободной частицы (372). Плотности заряда и тока (374). Электромагнитные потенциалы (375).

§ 44. Уравнение Дирака в центральном поле ..... 377

Спиновый момент количества движения (377). Разложение по степеням  $v/c$ . Энергия спин-орбитального взаимодействия (378). Разделение переменных (380). Атом водорода (382). Классификация уровней энергии (384). Состояния с отрицательной энергией (385).

Задачи ..... 386

Литература ..... 387

Глава XIII. Квантование волновых полей ..... 388

§ 45. Классические и квантовые уравнения поля ..... 389

Координаты поля (389). Уравнения Лагранжа (389). Функциональная производная (391). Уравнения Гамильтона (392). Квантовые условия для поля (393). Поля с несколькими компонентами (394).

§ 46. Квантование нерелятивистского уравнения Шредингера ..... 395

Уравнения Лагранжа и Гамильтона (396). Квантовые условия (397).  $N$ -представление (399). Связь с гармоническим осциллятором (400). Физическая интерпретация (402). Связь с уравне-

нием Шредингера для системы многих частиц (403). Соотношения антикоммутиаций (404). Уравнения движения (405). Физический смысл антикоммутиации (406). Представление антикоммутирующих операторов  $a_{\alpha}$  (406).

§ 47. Квантование уравнения Дирака ..... 408

Уравнения Лагранжа и Гамильтона (408). Квантовые условия (409).  $N$ -представление (411). Состояния с отрицательной энергией и позитроны (413). Соотношения антикоммутиации для различных моментов времени (414). Правила перестановки для плотности заряда (417).

Задачи ..... 419

Литература ..... 420

Глава XIV. Квантовая электродинамика ..... 422

§ 48. Электромагнитное поле в вакууме ..... 422

Уравнения Лагранжа (422). Уравнения Гамильтона (423). Квантование уравнения (424). Правила перестановки для  $E$  и  $H$  (426). Представление через плоские волны (428). Энергия квантованного поля (430). Импульс квантованного поля (432). Оператор  $A(\mathbf{r}, t)$  в представлении плоских волн (432). Правила перестановки операторов, взятых в различные моменты времени (433).

§ 49. Взаимодействие электронов с электромагнитным полем ..... 435

Уравнения Лагранжа и Гамильтона (435). Исключение  $\varphi$  (437). Квантование полей (439). Учет статических полей (440). Применение теории возмущений (440). Матричные элементы оператора кулоновского взаимодействия (441).

§ 50. Теория излучения ..... 444

Формулировка в терминах вероятностей переходов (445). Матричные элементы оператора возмущения (447). Вероятность перехода с поглощением (448). Вероятность перехода с излучением (449). Анализ дифракционного опыта (451). Представление электромагнитного поля (453). Матричные элементы (455). Классическая дифракционная картина (457).

Задачи ..... 458

Литература ..... 459

Предметный указатель ..... 461