

М. ШУБЕРТ
Б. ВИЛЬГЕЛЬМИ

ВВЕДЕНИЕ
В НЕЛИНЕЙНУЮ
ОПТИКУ



Mathematisch-Naturwissenschaftliche
Bibliothek

EINFÜHRUNG
IN DIE
NICHTLINEARE OPTIK

Teil I
Klassische Beschreibung

Von

Dr. MAX SCHUBERT
o. Professor

Dr. BERND WILHELMI
Dozent

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Leipzig
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
1971

М. ШУБЕРТ, Б. ВИЛЬГЕЛЬМИ

ВВЕДЕНИЕ
В НЕЛИНЕЙНУЮ
ОПТИКУ

ЧАСТЬ

I

КЛАССИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Перевод с немецкого
проф. М. А. КОВНЕРА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1973

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Предлагаемая советскому читателю книга — доступный учебник по нелинейной оптике. Она состоит из двух частей. Настоящая, первая часть содержит систематическое изложение основ нелинейной оптики с точки зрения классической электромагнитной теории света. Вторая часть посвящена квантовому рассмотрению.

Книга может служить ценным учебным пособием для аспирантов и студентов соответствующих специальностей. Она полезна также научным работникам и инженерам, занимающимся квантовой электроникой, квантовой оптикой и физикой лазеров.

Разнообразные нелинейные оптические явления возникают в газах, жидкостях и твердых телах, оптические свойства которых изменяются под действием интенсивных световых потоков. Источниками мощного когерентного электромагнитного излучения в широком спектральном диапазоне — от инфракрасных до ультрафиолетовых лучей — служат оптические квантовые генераторы (лазеры), и их создание вызвало к жизни новую область физики — нелинейную оптику.

Стремительное развитие нелинейной оптики и ее многочисленные научные и технические применения находят отражение в постоянно возрастающем количестве статей, публикуемых во многих журналах. Интерес к нелинейной оптике проявляется и в том, что в различных вузах читаются в настоящее время специальные курсы лекций по этой новой физической дисциплине.

Очевидно, существует необходимость в учебном пособии, в котором были бы систематически изложены основы теории взаимодействия мощных световых потоков с материальными средами и описаны наиболее важные нелинейные оптические явления.

Этой важной цели служит книга известных ученых из ГДР М. Шуберта и Б. Вильгельми, написанная на основании оригинальных исследований авторов и курсов их лекций в Йенском университете им. Шиллера.

Книга состоит из двух частей. Предлагаемый советскому читателю перевод первой части содержит интерпретацию нелинейной оптики, основанную на классической электромагнитной теории света. С возникновением нелинейной оптики сама эта теория наполнилась новым содержанием, обогатилась целым рядом новых положений и получила стимул к дальнейшему развитию.

Редакция литературы по физике

Вторая часть посвящена квантовомеханической теории нелинейных оптических явлений.

В доступной форме и в то же время с полной математической строгостью в книге рассмотрены наиболее важные нелинейнооптические эффекты: генерация высших гармоник и суммарных и разностных частот, оптический эффект Керра, самофокусировка и самоканализация световых лучей, вынужденное и обращенное комбинационное рассеяние, вынужденное рассеяние Бриллюэна, параметрическое усиление волн и многие другие. Большое достоинство книги заключается в том, что основные положения теории излагаются в непосредственной связи с соответствующими экспериментами, а описываемые эффекты иллюстрируются конкретными оптическими схемами и численными примерами.

Авторы разработали и применили в книге весьма рациональную символику для обозначения векторов и тензоров различных рангов. Помещенный в начале книги алфавитный указатель всех применяемых латинских и греческих обозначений значительно облегчает чтение.

В книге уделено должное внимание крупному вкладу, внесенному советскими учеными в становление и развитие нелинейной оптики.

Книга полезна для инженеров, исследователей, конструкторов оптических приборов, ученых, работающих в различных областях применения нелинейной оптики в физике и технике. Она окажет существенную помощь аспирантам и студентам при изучении нелинейной оптики, а также оптики в рамках общего курса физики.

М. А. Ковнер

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Мы приветствуем издание нашей книги по основам нелинейной оптики на русском языке. Надеемся, что она поможет студентам советских вузов, физикам и другим исследователям, работающим над актуальными проблемами нелинейной оптики, ориентироваться в постоянно нарастающем потоке специальной литературы в этой новой области науки.

Как известно, все проблемы нелинейной оптики интенсивно и успешно разрабатываются во многих советских научно-исследовательских учреждениях. В уже появившихся монографиях и в многочисленных оригинальных статьях отражен существенный вклад советских ученых в развитие нелинейной оптики; некоторые из этих работ использованы в нашей книге и указаны в библиографии.

Мы особенно рады тому, что перевод нашей книги выполнен специалистом в области нелинейной оптики проф. М. А. Ковнером.

*М. Шуберт
Б. Вильгельми*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

После создания мощных квантовых генераторов на оптических частотах (лазеров) возникла и в последние годы бурно развивается самостоятельная область исследований — нелинейная оптика. Понятие «нелинейная оптика» охватывает все явления в области высоких (оптических) частот, связанные с нелинейностью материальных уравнений в системе уравнений Максвелла. Большой интерес к этому разделу физики объясняется многими причинами. Нелинейная оптика создала новые возможности для изучения поведения ядер, атомов, молекул и твердых тел в электрических полях высокой напряженности. Кроме того, были найдены новые применения теории излучения и сформулированы законы распространения электромагнитных волн в нелинейных средах. Лазеры нашли необычайно широкие применения в самых различных областях науки и техники. При помощи нелинейных оптических эффектов можно получить новую информацию об отдельных атомах и молекулах и об их взаимодействии в плотных средах. На основании различных нелинейных оптических эффектов удалось создать новые когерентные источники света высокой интенсивности, частично с перестраиваемыми частотами. Кроме того, методы нелинейной оптики могут служить основой для развития других нелинейных теорий.

В процессе развития нелинейной оптики появилось очень большое число статей и книг по различным ее проблемам. Ориентация в этой литературе и ее освоение затрудняются тем, что до сих пор имеется мало монографий и почти отсутствуют книги учебного характера. Задачей предлагаемой читателю первой части, относя-

щейся к классическому описанию нелинейной оптики, и последующей второй части, в которой содержится квантовомеханическое описание нелинейных оптических явлений, является восполнение этого пробела. Обе части не претендуют на исчерпывающее изложение проблем нелинейной оптики и служат для предварительного ознакомления читателя с основами новой области, с ее специфическими методами и с ее применениями, что позволит читателю в дальнейшем без затруднений ориентироваться в специальной литературе, а также послужит стимулом для собственных размышлений.

Настоящая книга возникла в связи с лекционной и исследовательской деятельностью авторов в области нелинейной оптики. Пользуясь соответствующей литературой и собственными расчетами, мы попытались представить материал книги в замкнутой форме.

Адекватное представление взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными волнами требует, вообще говоря, применения квантовомеханических методов. Поэтому на первый взгляд может показаться удивительным, что первая часть нашей книги посвящена исключительно классическому описанию. Основанием для этого являются успехи относительно наглядных и легко сравнимых с экспериментальным материалом классических теорий при объяснении многих важных явлений нелинейной оптики. Эти теории занимают важное место в современной литературе. Хорошая применимость классических теорий объясняется тем, что структура классических уравнений в известной мере совпадает со структурой уравнений квантовой механики.

В первой части детально представлены основы общей классической теории и наиболее важные физические модели. Последующее описание нелинейных электронных эффектов и эффектов, связанных с относительным движением электронов и ядер, ограничено примерами, которые могут быть рассмотрены в наиболее простых условиях. Применение изложенных общих основ к более сложным случаям может быть предоставлено читателю.

В начале книги дано объяснение всех важных общих условных обозначений (например, характеристики

тензоров и преобразований Фурье), которое должно значительно облегчить чтение и понимание книги. Кроме того, дается список всех применяемых символов.

Во всей книге применяется Международная система единиц (СИ), но в приложении указаны переводные коэффициенты для перехода к гауссовой системе единиц. Если книга в целом обращена к ученым, инженерам, преподавателям, а также к студентам, проводящим исследования в этой области и изучающим специальные предметы, то первая часть, кроме того, может служить дополнением к существующей учебной литературе по «линейной» электродинамике и оптике и поэтому предназначается также для студентов-физиков, изучающих эти дисциплины.

Авторы благодарны проф. Г. Веберу и дипломированному инженеру И. Виттигу за ценные дискуссии. Мы были бы весьма признательны всем читателям за критические замечания по предлагаемой книге.

Иена, осень 1970

*М. Шуберт,
Б. Вильгельми*

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛЫ

Применяемые в настоящей части обозначения и символы подробно объяснены в тех разделах, в которых они встречаются. Для наглядности и чтобы облегчить читателю использование отдельных формул, ниже приводится сводка всех обозначений и символов. Указанные символы физических величин единообразно используются на протяжении всей книги.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

X. . . . Тензоры.

Тензор n -го ранга обозначается буквой, у которой справа внизу ставятся n жирных точек. Например, X обозначает вектор, а $X..$ — тензор второго ранга. Встречаются комбинации следующего типа: а) образование вектора из тензора и векторов. Например, выражение $Y. = X.... U.V.W.$ следует понимать как запись в компонентах

$$Y_i = \sum_{j,k,l} X_{ijkl} U_j V_k W_l \quad (i, j, k, l \text{ означают индексы } x, y, z);$$

- б) скалярное произведение двух векторов $X.Y.$;
- в) векторное произведение двух векторов $X.\times Y.$;
- г) дивергенция вектора $\nabla.X.$;
- д) ротор вектора $\nabla.\times X.$;
- е) градиент скаляра $\nabla.X.$

Обозначение тензоров n -го ранга при помощи точек позволяет применять для однотипных величин различных рангов, например восприимчивостей, один и тот же буквенный символ (одинаковый тип записи), благодаря чему формулы с величинами различных порядков становятся более наглядными. Как видно из приведенного выше примера, такое представление позволяет легко перейти к компонентной записи.

Для наиболее простого представления нелинейных свойств по возможности применяются однокомпонентные модели (например, выделяется x -направление). В этих случаях, если не может возникнуть недоразумение, тензорные точки или индексы опускаются (например, выражение $Y_x = X_{xxxx} U_x V_x W_x$ заменяется на $Y = XUVW$).

$X^{(n)}$ Порядок.

$X^{(n)}$ есть часть X , получающаяся в n -м порядке при итерационном процессе. $X^{(1)} = X^{(Л)}$ применяется также для обозначения линейной части, а $X^{(n)} = X^{(НЛ)}$ при $n > 1$ означает нелинейную часть.

$\text{ПФ}\{X(t)\} = {}^1X(f)$ Преобразование Фурье

Операция преобразования Фурье обозначается ПФ. В частотном представлении результат преобразования Фурье над величиной $X(t)$, взятой во временном представлении, обозначается ${}^1X(f)$. Таким образом, применяется один и тот же буквенный символ, но с прямым штрихом слева вверху. (Тем самым указывается возможным использовать для одной и той же величины во временном и частотном представлении один и тот же символ.)

{КК} Комплексно сопряженная часть.

Символ {КК} означает комплексно сопряженное выражение от стоящей перед ним величины (или суммы величин). Например, $X + \{\text{КК}\} = X + X^*$.

{МФ} Часть с «отрицательными частотами».

Если сумма какой-либо величины и ее комплексно сопряженного выражения подвергается преобразованию Фурье, то ее фурье-образ обозначается {МФ}. Например,

$$\text{ПФ}\{X(t) + \{\text{КК}\}\} = {}^1X(f) + \{\text{МФ}\}.$$

$\hat{X}(f)$ Амплитуды колебаний.

Если какая-либо величина $X(t)$ колеблется с частотой f , то в соответствии с формулой

$$X(t) = \frac{1}{2} \hat{X}(f) e^{i2\pi ft} + \{\text{КК}\}$$

она представляется своей амплитудой колебаний $\hat{X}(f)$ (в общем случае комплексной). Амплитуды колебаний всюду в книге обозначаются диакритическим знаком (\wedge) над соответствующим буквенным символом.

$\bar{X}(f; t, r)$ Волновые амплитуды.

Для волновых процессов зависящая от координат и времени величина $X(t, r)$ может быть представлена в виде

$$X(t, r) = \frac{1}{2} \bar{X}(f; t, r) e^{i[2\pi ft - 2\pi q \cdot r]} + \{\text{КК}\},$$

где q и $\bar{X}(f; t, r)$ обозначают соответственно волновой вектор и волновую амплитуду. Волновые амплитуды везде характеризуются чертой над соответствующим буквенным символом.

$\langle \dots \rangle$ Усреднение по временному интервалу.

$\langle \dots \rangle_r$ Усреднение по области пространства.

$\langle \dots \rangle_0$ Усреднение по ориентациям молекул.

$\langle \langle \dots \rangle \rangle$ Усреднение по пространству и времени.
 \approx Приблизительное равенство.
 \simeq Величины одного порядка.

СОКРАЩЕНИЯ

Re Вещественная часть
 Im Мнимая часть

$$X = \text{Re} \{X\} + i \text{Im} \{X\}$$

НЛО Нелинейная оптика.

СИМВОЛИКА

(Для специальных величин указаны те места в книге, в которых они введены и где даны более детальные объяснения.)

Латинские основные символы

A — поверхность.
 dA — направленный элемент поверхности (1.11).
 \hat{A}_M — специальная колебательная амплитуда [уравнение (2.42-2)].
 \hat{A}_v — специальная колебательная амплитуда [уравнение (2.52-2)].
 \bar{A}_v, \bar{A}'_v — специальные волновые амплитуды [уравнения (2.52-3), (2.52-4)].
 \mathcal{A} — работа, выполненная в единице объема некоторой системы за единицу времени.
 a — целое число.
 a_i — постоянные коэффициенты в дифференциальном операторе (П1).
 B — магнитная индукция.
 b — целое число.
 $b_1 = \pm 1$.

$C^{(\dots)}, \bar{C}, C'$ — вспомогательные величины («константы»), применяемые только в том месте, где они введены и объяснены.

c — скорость света в вакууме ($c = 2,997928 \times 10^8$ м·с⁻¹).

c_i, \bar{c} — константы в специальном дифференциальном уравнении (1.231).

D — электрическое смещение (1.11).

\mathcal{D} — дифференциальный оператор в уравнении колебаний (1.11).

$${}^1\mathcal{D}_{tr}(f) = i2\pi f + \Gamma_{tr} \quad (2.61).$$

$${}^1\mathcal{D}_{lo}(f) = i2\pi f + \Gamma_{lo} \quad (2.62).$$

d — плотность слоя.

d_{mn} — восприимчивости в обозначениях Фойхта (1.22).

E — напряженность электрического поля.

E' — напряженность электрического поля между точечными зарядами (микроскопическое поле) (1.11).

$E_{(w)}$ — напряженность эффективного электрического поля (2).

$E_{\text{атом}}$ — напряженность внутреннего поля (2.2).

$\bar{E}_2, \bar{E}_3, \bar{E}_{(2)+}, \bar{E}_{(2)}$ — специальные величины амплитуд при параметрических эффектах (3.32).

$\hat{E}^{(+)}, \hat{E}^{(-)}$ — амплитуды циркулярно поляризованного света (4.11).

\bar{E}_1 — начальное значение волновой амплитуды стоксовой волны (4.3).

$\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ — импульсные значения E [например, $E(t) = \mathcal{E}\delta(t)$; 1.211].

e — элементарный электрический заряд ($e > 0$) ($1,60206 \cdot 10^{-19}$ А·с).

e — единичные векторы в направлении амплитуд поля.

e'_i — специальные коэффициенты разложения (1.321).

- $F_{(a)}$ — специальные собственные функции [уравнение (1.32-3)].
- \mathcal{F}_k — специальный функционал (1.31).
- f — частота.
- \bar{f} — граничная частота (1.321).
- f_0 — резонансная частота атомной системы (1.11).
- $f_A = f_{+1}$ — антистоксова частота.
- f_E — электронная частота (2.2).
- f_G — частота «рассеянной» волны.
- f_L — лазерная частота.
- f_M — частота колебания молекулы (2.4).
- f_m — частота модуляции (2.62).
- f_q — частота поперечного поля, циркулярно поляризованного (2.61).
- f_r — резонансная частота ядерного спина в магнитном поле (2.6).
- $f_S = f_{-1}$ — стоксова частота.
- f_v — частота колебания акустической волны (2.5).
- g — коэффициент усиления мощности $(\langle S(z) \rangle = \langle S(0) \rangle e^{gz})$ (1.31).
- g_B, g_R — коэффициенты усиления мощности для вынужденного бриллюэновского и комбинационного рассеяния.
- g_K — гиромагнитное отношение для атомного ядра.
- H_0 — напряженность магнитного поля.
- H_g — напряженность постоянного магнитного поля (2.61).
- H_q — напряженность циркулярно поляризованного магнитного поперечного поля (2.61).
- H'_z — напряженность модулирующего поля в направлении z .
- $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ — напряженности магнитного поля (2.62).

- h — постоянная Планка ($6,6254 \cdot 10^{-34}$ Вт·с²).
- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ($1,0544 \cdot 10^{-34}$ Вт·с²).
- I — момент количества движения ядра.
- i — мнимая единица.
- j — плотность тока.
- K — сила.
- k, k', k'', \dots — силовые постоянные (например, $K = kx + k'x^2 + \dots$).
- k_E — силовая постоянная электронного движения (2.2).
- k_M — силовая постоянная молекулярного колебания (2.41).
- \mathcal{K} — постоянная Керра (2.32).
- k — постоянная Больцмана ($1,38049 \times 10^{-23}$ Вт·с/К).
- L — мощность (в частном случае мощность излучения).
- $L_{\text{полн}}$ — мощность излучения, рассеянного ансамблем молекул (2.41).
- L_j — мощность излучения j -й молекулы (2.41).
- L_K — критическая мощность [уравнение (4.13-9)].
- \mathcal{L} — функция Лагранжа.
- \mathcal{L}' — плотность Лагранжа.
- \mathcal{L}'_w и \mathcal{L}'_{GE} — специальные части плотности Лагранжа (2.51).
- l — длина.
- dl — элемент линии (1.11).
- δl — расстояние между двумя импульсами (3-1).
- Δl — разность хода (2.32).
- l_F — фокусное расстояние [уравнение (4.13-10)].
- l_K — фазовая когерентная длина (3.21).

M_s — намагниченность.

M_g — равновесная намагниченность (2.61).

$M'_z = M_z - M_g$.

\mathcal{M} — приведенная масса (для двухатомной молекулы с одинаковыми атомами $\mathcal{M} = 1/2 m_A$) (2.4).

m — масса частицы.

m_A — масса атома или атомного остова.

m_E — масса электрона ($9,1083 \cdot 10^{-31}$ кг).

m_i — целые числа (1.21).

N — число частиц.

ΔN — число частиц в элементе объема.

n — порядок нелинейного эффекта.

$n^{(\dots)}$ — показатель преломления.

$n^{(L)}$ — показатель преломления в линейной оптике.

$n^{(L) (i)}(f)$ — линейный показатель преломления для волны с частотой f и направлением поляризации i .

$n_o^{(L)}, n_{ao}^{(L)}$ — линейный показатель преломления для обыкновенной и необыкновенной волн.

$n_{||}, n_{\perp}$ — показатель преломления света, поляризованного параллельно и перпендикулярно некоторому избранному направлению (2.3).

$\left. \begin{aligned} \delta n_{||} &= n_{||} - n^{(L)} \\ \delta n_{\perp} &= n_{\perp} - n^{(L)} \end{aligned} \right\}$ изменения показателей преломления (2.3).

$n^{(2)} = \frac{\delta n_{||}}{|\vec{E}|^2}$ — специальный материальный параметр (2.3).

P_s — электрическая поляризация.

$P_{(w)}^{(L)}, P_{(w)}^{(NL)}$ — линейная и нелинейная относительно $E_{(w)}$ части поляризации (2.31).

$P_{\sigma E}$ — специальная зависящая от давления часть поляризации (2.51).

$Q(\tau)$ — функция системы для диэлектрика (1.111).

$Q_P(\tau)$ — функция системы для процесса в плазме (2.1).

$Q_M(\tau)$ — функция системы при молекулярном колебании (2.4).

$q_s(f)$ — волновой вектор для частоты f . $|q_s(f)| = f/v$ или $|q_s(f)| = f/v$.

$q_s^{(i)}(f)$ — волновой вектор для частоты f и для направления поляризации i .

$q_{(0)}, q_{(ao)}$ — волновой вектор для обыкновенной и необыкновенной волн.

\bar{q} — граничная частота для пространственных частот (1.321).

q_e — электрический заряд.

$q_r = -q$ — пространственная частота (1.32).

R — равновесное расстояние между двумя частицами.

R' — атомное расстояние.

r_s — радиус-вектор.

\mathcal{R} — специальный функционал («остаточный член») [уравнение (1.11-12)].

r_e — коэффициент отражения.

r_B — эффективный радиус пучка (4.13).

S_s — вектор Пойнтинга.

s_{ai} — матрица преобразования координат (1.22).

S_{ai} — матрица преобразования симметрии (1.22).

T — промежуток времени.

T_G — время затухания (память).

T_E — время установления колебания.

t — временная координата.

t_0 — специальный момент времени (1.111).

\mathcal{T} — абсолютная температура.

- U — преобразование обращения времени (1.231).
- U_p — потенциальная энергия.
- U'_p, U''_p — специальная часть потенциальной энергии (2.4).
- \mathcal{U} — специальное преобразование в частотном представлении (1.231).
- u — смещение в упругой среде (2.51).
- V — объем.
- V' — характеристический объем усреднения (1.11).
- v — фазовая скорость акустической волны.
- v_q — колебательное квантовое число (4.21).
- W — плотность вероятности.
- w — фазовая скорость световой волны.
- w' — групповая скорость света.
- \mathcal{W} — теплота, подведенная к единице объема системы в единицу времени.
- X — координата в молекулярной системе координат.
- \tilde{X} — специальная константа в интеграле уравнения колебаний (2.41).
- x, x' — пространственные координаты.
- Y — координата в молекулярной системе координат.
- y, y' — пространственные координаты.
- $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_1$ — не зависящее от частоты усиление при электронном эффекте (2.22).
- \mathcal{Y}_M — не зависящее от частоты усиление при эффекте молекулярного колебания (2.42).
- Z — координата в молекулярной системе координат.
- z, z' — пространственные координаты.
- Греческие основные символы*
- α — поляризуемость.
- α_k — поляризуемость специальных молекул.

- $\alpha_{(1)\dots}$ — тензор поляризуемости при $X = 0$.
- $\alpha_{(1)\dots} = \left(\frac{\delta \alpha_{\dots}}{\delta X} \right)_{X=0}$.
- β — параметр разложения.
- Γ — константа трения [сила трения = $-m\Gamma(d/dt)r$.] (1.11).
- Γ_E — константа трения при электронном движении (2.21).
- Γ_M — константа трения при молекулярном колебании (2.41).
- Γ_P — константа трения при процессе в плазме (2.1).
- $\Gamma' = m\Gamma$ (1.11).
- γ — плотность распределения частиц.
- γ_P — число фотонов на единицу площади в единицу времени (4.22).
- Δ — знак разности.
- $\delta(\dots)$ — дельта-функция Дирака.
- δ_{ij} — символ Кронекера.
- ϵ_0 — диэлектрическая постоянная вакуума ($8,85416 \cdot 10^{-12}$ А·с/В·м).
- ϵ — (относительная) диэлектрическая постоянная.
- $\epsilon^{(1)}$ — диэлектрическая постоянная в линейной оптике.
- ϵ_{\parallel} — диэлектрическая постоянная для света, поляризованного параллельно заданному направлению (2.3).
- ϵ_{\perp} — диэлектрическая постоянная для света, поляризованного перпендикулярно заданному направлению (2.3).
- $\epsilon_{(0)}$ — диэлектрическая постоянная для $\sigma = 0$ (2.51).
- $\epsilon_{(1)} = \left(\frac{d\epsilon}{d\sigma} \right)_{\sigma} = 0$ (2.51).
- $\eta(f)$ — коэффициент усиления амплитуды [$\bar{A}(f; z) = \bar{A}(f; 0)e^{\eta z}$].

- η_R — коэффициент усиления амплитуды при эффекте комбинационного рассеяния [уравнение (4.22-7)].
- $\tilde{\eta}$, $\bar{\eta}$ — специальные вещественные коэффициенты усиления амплитуды (1.32).
- η' — специальный коэффициент усиления амплитуды [уравнение (3.32-3)].
- $\eta'' = \eta' \sqrt{1 - \left(\frac{\pi \Delta q}{\eta'}\right)^2}$.
- θ — угол между (молекулярной или пробной) осью Z и (пространственной) осью z .
- $\theta'_{+1} = \theta'_A$ — угол между направлениями распространения лазерной и антистоксовой волн.
- θ'_G — угол между направлениями распространения лазерной и рассеянной волн.
- $\theta'_{-1} = \theta'_S$ — угол между направлениями распространения лазерной и стоксовой волн.
- θ' — угол между направлениями лазерного луча и наблюдения.
- ϕ — угол между (молекулярной или пробной) осью X и (пространственной) осью x .
- χ — восприимчивость (1.1).
- $\chi^{(n)} \dots$ — восприимчивость n -го порядка [тензор $(n+1)$ -го ранга].
- $\hat{\chi}$ — восприимчивость в постоянных электрических полях (1.11).
- $\bar{\chi}$ — восприимчивость в преобразованной системе координат $(\tau'_1, \tau'_2, \dots)$ (1.12).
- χ_1 — восприимчивость при взаимодействии излучения с ядерным спином (2.61).
- Λ — модуль упругости (2.51).
- λ — длина волны.
- λ_0 — длина волны в вакууме.
- λ_G — длина «рассеянной» волны (4.3).
- μ_0 — индукционная константа $(1,256637 \cdot 10^{-6} \text{ В} \cdot \text{с} / \text{А} \cdot \text{м})$.
- μ — относительная магнитная проницаемость.

- μ — магнитный дипольный момент ядра.
- $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (x, y, z)$ — пространственные координаты.
- ρ — плотность среды.
- ρ_a — коэффициент поглощения
- $$(\rho_a = -\text{Im} \{ \sqrt{\epsilon^{(J)}} \}).$$
- σ — давление (отрицательное напряжение) (2.51).
- τ — временная координата.
- τ_E — время жизни электронного состояния.
- Φ_x — угол поворота вокруг оси x .
- Φ_z — угол поворота вокруг оси z .
- φ — фазовый угол.
- φ_i — фазовый угол при колебании с частотой f_i .
- χ — восприимчивости (множитель пропорциональности между амплитудами поляризации или намагниченности и соответствующими произведениями амплитуд напряженностей поля) (1.213).
- $\chi^{(n)} \dots$ — восприимчивость n -го порядка [тензор $(n+1)$ -го ранга].
- χ_K — магнитная восприимчивость при ядерном резонансе (2.62).
- χ_R — резонансное значение восприимчивости в процессе комбинационного рассеяния (4.22).
- $\chi_{(w)}^{(L)}, \chi_{(w)}^{(NL)}$ — восприимчивости в $P_{(w)}^{(A)}(E_{(w)})$ или $P_{(w)}^{(NL)}(E_{(w)})$ (2.3).
- $\delta\chi^{(L)} = \delta\chi^{(1)}$ — изменение линейной восприимчивости.
- Ψ — угол.
- Ψ_D — угол поворота эллипса поляризации (4.12).
- Ψ_0 — предельный угол полного внутреннего отражения (4.13).
- Ψ_B — угол дифракции.

- Ω — угол раствора (телесный угол).
 $\omega = 2\pi f$ — круговая частота.
 ω_0 — резонансная круговая частота атомной системы (1.11).
 $\omega_A = \omega_{+1}$ — антистоксова круговая частота.
 ω_E — электронная круговая частота (2.2).
 ω_G — круговая частота «рассеянной» волны.
 ω_L — круговая частота лазера.
 ω_M — круговая частота колебания молекулы (2.41).
 ω_m — круговая частота модуляции (2.62).
 ω_q — круговая частота циркулярно поляризованного поперечного поля (2.61).
 ω_r — круговая резонансная частота ядерного спина в магнитном поле (2.61).
 $\omega_S = \omega_{-1}$ — стоксова круговая частота.
 ω_v — круговая частота колебания акустической волны (2.51).
 $\Delta\omega$ — ширина линии.

ВВЕДЕНИЕ

Классическое описание оптических и вообще электродинамических явлений осуществляется на основе уравнений Максвелла, в которых влияние среды учитывается в определенных материальных соотношениях. В случае электрических явлений к ним относится соотношение между вектором поляризации P и вектором напряженности электрического поля E , а в случае магнитных явлений — соотношение между вектором намагниченности M и вектором напряженности магнитного поля H . В общем случае величина P состоит из двух частей, одна из которых зависит от E линейно, а другая — нелинейно; аналогичным свойством обладают магнитные величины. Те явления, которые могут быть описаны линейной частью, относятся к линейной электродинамике (оптике); все явления, для которых существенную роль играет обусловленная свойствами среды нелинейная зависимость от напряженности поля, принадлежат к нелинейной электродинамике (оптике). Этому классическому феноменологическому подразделению можно сопоставить более точную характеристику нелинейной оптики в рамках квантовомеханического рассмотрения (см. часть II).

Нелинейные зависимости поляризации и намагниченности от напряженностей поля были известны уже в прошлом столетии. При этом следует иметь в виду явления с участием полей с относительно низкими, т. е. не принадлежащими к оптической области, частотами; с другой стороны, были известны также процессы, при которых показатели преломления световых волн зависят от полей с низкими частотами и в предельном случае от статических полей. К первой категории принадлежат,

например, парамагнитные и диэлектрические явления, при которых намагниченность или поляризация возрастают с увеличением полей медленнее, чем по линейному закону, вследствие явлений насыщения. Еще более характерны нелинейные свойства ферромагнитных и сегнетоэлектрических веществ, для которых соотношения между M и H или между P и E описываются типичными кривыми гистерезиса. Ко второй категории принадлежат, например, эффекты Поккельса и Керра, в которых вещественная часть диэлектрической постоянной или показатель преломления для оптических частот изменяются в электрических полях более низких (не оптических) частот. При помощи этих эффектов можно изменять состояние поляризации света в среде под влиянием внешними (статическими) полей, что используется во многих оптических устройствах. Перечисленные эффекты можно безусловно отнести к нелинейной электродинамике, но они не являются типичными эффектами нелинейной оптики, поскольку определяются участием в нелинейном взаимодействии полей с низкими частотами.

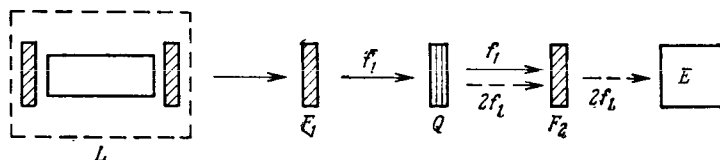
Типичные эффекты нелинейной оптики, т. е. такие, в которых участвуют лишь поля с оптическими частотами, были открыты только после создания лазеров. Вскоре после опубликования основополагающих работ Н. Г. Басова, А. М. Прохорова и Ц. Г. Таунса были созданы твердотельные лазеры (лазер на рубине, Т. Г. Мейман, 1960) и газовые лазеры (гелий-неоновый лазер, А. Джаван, В. Р. Беннетт, Д. Р. Эрриотт, 1961), которые затем постоянно совершенствовались и дополнялись лазерами новых типов. Благодаря этим работам в настоящее время существуют интенсивные когерентные источники света, частоты которых охватывают широкий спектральный диапазон от ультрафиолетовой до далекой инфракрасной области. При стационарном режиме с лазерами различных типов достигаются мощности от 10^{-1} до 10^3 Вт (при этом первое место занимает лазер на CO_2 , работающий на длине волны $\lambda = 10,6$ мкм). Значительно более высокие мощности достигаются в импульсном режиме, особенно при использовании модуляции добротности. Рубиновый или неодимовый лазерный осциллятор с переключаемой добротностью (длины волн 0,69 и

1,06 мкм) может, например, излучать импульсы длительности 10^{-9} с с мощностью, достигающей 10^8 Вт. В настроенных активных средах удалось усилить эти импульсы до 10^{10} Вт. Столь же высокие мощности, как при последующем усилении наносекундных импульсов, может излучать сам осциллятор на так называемых ультракоротких импульсах. Они создаются путем синхронизации многих лазерных мод. Наиболее короткие из полученных в настоящее время импульсов имеют длительность порядка 10^{-13} с, так что упомянутые мощности могут достигаться при относительно низких энергиях импульсов. Для нелинейных эффектов важны не сами мощности, а мощности на единицу площади, т. е. интенсивности, поскольку именно они определяют напряженность лазерного излучения, как малая расходимость светового пучка. Оно позволяет сконцентрировать излучение на очень малой поверхности и тем самым создать исключительно высокие напряженности поля. Интересно сравнить электрические поля этих световых волн с внутренними полями, действующими на внешние электроны в атомах и молекулах и имеющими порядок 10^{11} В/м. Напряженности поля такого порядка соответствуют плотности излучения около 10^{19} Вт/м². Такие и более высокие плотности в настоящее время уже можно получать от очень мощных лазеров путем фокусировки лазерного света.

В 1961 г. П. А. Франкен с сотрудниками открыли первый нелинейный эффект, в котором участвовали только волны оптических частот. Он заключается в получении второй гармоники. В этом эксперименте свет от рубинового лазера (длина волны 0,694 мкм) падал на кристалл кварца (фиг. 1), а позади кристалла обнаруживался свет удвоенной частоты; измерения с соответствующими комбинациями фильтров позволили доказать, что этот свет действительно возникал в кристалле. Поскольку эти своеобразные взаимодействия вызвали общий интерес с точки зрения физики, а также в связи с перспективными возможностями применения нелинейной оптики, с 1961 г. эта область систематически исследовалась при постоянно возрастающих затратах. При

этом одно за другим открывались интересные явления. Некоторые из них мы сейчас перечислим с указанием года открытия:

- Двухфотонное поглощение (1961).
- Фотонное эхо и самоиндуцированная прозрачность (1964).
- Получение третьей гармоники (1963).
- Получение второй гармоники путем отражения (1963).
- Получение излучения на суммарных и разностных частотах (1962).
- Оптическое выпрямление (1962).
- Параметрические колебания и усиление (1965).
- Вынужденное комбинационное рассеяние (1962).
- [Перестраиваемые комбинационные лазеры (1969).]
- Вынужденное бриллюэновское рассеяние (1963).
- Вынужденное релеевское рассеяние (1965).
- Оптический эффект Керра (1964).
- Самофокусировка (1964).



Ф и г. 1. Схема установки для получения второй гармоники.
 L — лазер; F_1 F_2 — фильтры, прозрачные только для частот f_1 и $2f_1$; Q — кристалл кварца; E — фотодетектор.

Как видно уже из этого списка, значительное обогащение общей физической науки заключается в новых предсказаниях относительно свойств вещества, связанных с нелинейными частями восприимчивостей, а также в обобщении известных из линейной оптики законов распространения электромагнитных волн.

Глава 1 настоящей части посвящена общему исследованию нелинейных материальных уравнений и материальных параметров и общим методам решения уравнений Максвелла. К модельным представлениям мы будем обращаться только для облегчения понимания отдельных мест. В гл. 2 выводятся материальные уравнения для важных групп физических явлений. Будет

показано, что нелинейные зависимости между поляризацией и напряженностью поля основаны на общих физических соотношениях. При этом рассматриваются характерные свойства существующих носителей заряда, или, иначе говоря, структурных элементов атома. Дается оценка порядков величин важнейших материальных параметров и параметров взаимодействия. В двух следующих главах подробно рассмотрены основные положения и модели применяются для описания типичных эффектов нелинейной оптики. [В этом томе не обсуждаются эффекты, обусловленные (макроскопическими) токами проводимости или одновременной зависимостью электрической поляризации P от E и квазистатического поля H .] Примеры применения подразделены на электронные эффекты и эффекты относительного движения электронов и ядер. Сначала рассматриваются нелинейные эффекты, в которых движение ядер не играет существенной роли и которые поэтому можно объяснить взаимодействиями между излучением и электронами в поле фиксированных ядер. Эти явления, к которым можно, например, отнести излучение на суммарных и разностных частотах, а также параметрические колебания, возникают уже в более низком, т. е. втором порядке нелинейности поляризации относительно напряженности поля. Наконец, в гл. 4 рассматриваются эффекты, для которых существенным является движение ядер при взаимодействии между средой и излучением. В противоположность электронным эффектам эффекты относительного движения электронов и ядер появляются только в третьем порядке зависимости поляризации от напряженности поля. В качестве примеров в гл. 4 описаны явления самофокусировки, вынужденного комбинационного и бриллюэновского рассеяния.

Для наглядного описания и ясного представления наиболее типичных нелинейных явлений мы ограничимся в гл. 3 и 4 преимущественно простейшими условиями и случаями (например, стационарными во времени процессами), хотя в гл. 1 и 2 основные положения теории рассматриваются в значительно более общем виде. Это детальное представление основ должно подготовить читателя к изучению более сложных проблем в

соответствующей литературе и к самостоятельному решению более трудных задач.

На основании описанных в первой части методов и результатов во втором томе будет дано квантовомеханическое представление нелинейной оптики. Взаимодействие света с атомными системами будет рассмотрено полуклассически (квантованные атомные системы и классические поля излучения) и чисто квантовомеханически (квантованные атомные системы и квантованные поля излучения). Для учета механизмов потерь будет также включено взаимодействие между динамическими и диссипативными системами. Содержащиеся во второй части основы позволят дать квантовомеханическое обоснование важнейших классических соотношений нелинейной оптики и детально описать их микроскопический механизм. Это даст возможность вычислить атомные и молекулярные постоянные, введенные в первом томе чисто феноменологически. Аналогично тому, как это было сделано в первой части, представление основ будет дано на примерах наиболее типичных эффектов. Для лучшего понимания будет приведен обзор принципиальных схем и характерных величин для приборов, применяемых в нелинейной оптике.

Глава 1

ОБЩИЕ ОСНОВЫ

После обзора явлений, относящихся к нелинейной оптике (сокращенно обозначаемой НЛО), и краткого описания основных этапов развития этой области обратимся теперь к систематическому применению общих основ классического описания. В § 1 мы рассмотрим общую структуру материальных уравнений, которые вместе с уравнениями Максвелла позволяют изучить взаимодействие электромагнитных полей с материальными средами. Вслед за тем в § 2 детально исследуются общие свойства материальных параметров, восприимчивостей, входящих в эти уравнения. Наконец, последний параграф этой главы посвящен электромагнитным процессам в среде. Обсуждаются методы решения уравнений Максвелла при общих нелинейных материальных соотношениях.

§ 1.1. СТРУКТУРА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Описание нелинейной оптики, как и предшествующей ей линейной оптики, базируется на материальных уравнениях, характеризующих электрические и магнитные свойства вещества. Мы имеем в виду связь между электрической поляризацией P . (или электрическим смещением D .) и напряженностью электрического поля E . и между намагниченностью M . (или магнитной индукцией B .) и напряженностью магнитного поля H .. В данном параграфе рассматривается общая математическая структура этих материальных уравнений, причем основное внимание уделяется электрическому случаю.

Детальное количественное рассмотрение материальных уравнений для важных групп физических явлений выполнено в гл. 2.

1.11. Вывод фундаментальных материальных уравнений

Чтобы выяснить математическую структуру фундаментальных материальных уравнений для классического описания НЛО, рассмотрим взаимодействие электрического поля с диэлектриком.

Будем характеризовать диэлектрик следующей моделью. Пусть в диэлектрике имеются положительные и отрицательные точечные заряды (изображающие световые электроны, ионы и атомные ядра), связанные консервативными силами с определенными положениями равновесия. Более конкретные сведения о природе этих возвращающих сил нам не потребуются. Их тип и величина определяются пространственным строением диэлектрика из его структурных элементов (атомы, ионы, молекулы), а также свойствами структурных элементов самих атомов. Вследствие принятого построения диэлектрика из точечных зарядов он, строго говоря, является неоднородным. Однако в смысле «макроскопической электродинамики», который мы вскоре поясним, диэлектрик все-таки можно считать однородным. Примем также, что он является электрически нейтральным и в нем отсутствует постоянная объемная поляризация.

Представим себе, что на такой диэлектрик действует не зависящее от времени однородное электрическое поле. При этом возникнут силы, действующие на электрические заряды и вызывающие их смещение от положений равновесия. Действующее в диэлектрике электрическое поле E' складывается из внешнего поля и поля, создаваемого самими точечными зарядами. В пространстве между зарядами это поле определяется основными уравнениями электростатики в вакууме:

$$\oint dl \cdot E' = 0, \quad \epsilon_0 \oint \oint dA \cdot E' = \sum_I (q_e)_I, \quad (1.11-1)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая постоянная вакуума, dl , dA — направленные элементы длины и поверхности. Суммирование выполняется по всем содержащимся в объеме точечным зарядам. Напряженность электрического поля сильно изменяется по величине и по направлению от одной точки пространства к другой в зависимости от микроскопических условий. То же самое справедливо и для значений напряженности поля, усредненных по малым элементам объема, если их линейные размеры меньше среднего расстояния между точечными зарядами. Поэтому для описания типичных, макроскопически проявляющихся свойств среды следует рассмотреть соотношения в достаточно большом объеме V' , содержащем в зависимости от природы и плотности материала то или иное большое количество атомных структурных элементов. Этому объему следует приписать средние значения напряженности поля $E = \langle E' \rangle$, и поляризацию P . При этом P имеет смысл суммы всех дипольных моментов в рассматриваемом объеме V' , деленной на V' . Этот объем должен быть выбран достаточно большим для того, чтобы в каждом объеме одинаковой формы и одинаковых размеров в любой области протяженного диэлектрика в достаточном приближении существовала одна и та же зависимость между P и E . Это означает, между прочим, что объем V' содержит по крайней мере один атомный структурный элемент. Для электрического смещения D существует формула

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (1.11-2)$$

Если охарактеризовать конечный объем V' величинами E , P и D , то можно осуществить переход к макроскопической электродинамике в смысле Г. А. Лоренца. Величины D и E могут быть измерены с помощью известных методов. Если электрические поля $E(t)$ зависят от времени, то временные изменения должны протекать таким образом, чтобы в каждый момент времени напряженности поля в объеме V' могли определяться однозначно. Тем самым определяется верхняя граница выделенного объема: его линейные размеры должны быть достаточно малы по сравнению с самой короткой

длиной волны проходящих через диэлектрик электрических волн.

Согласно нашим допущениям, $P_e = 0$ в отсутствие внешнего поля. Для определения зависимости индуцированной поляризации от напряженности поля нужно уточнить представления о возвращающих силах. Любая заданная зависимость потенциальной энергии системы от сдвигов точечных зарядов может быть описана в наглядной форме, если вообразить, что эти заряды связаны невесомыми пружинами. Тогда соотношения между силами и смещениями будут отображать ход потенциальной энергии. Следует отметить, что в общем случае эти пружины создают нелинейные силы. Для их описания мы воспользуемся моделью ангармонического осциллятора (название происходит от соответствующей формулы для силы). Эта модель позволяет наглядно продемонстрировать ход потенциальной энергии и геометрию системы и, несмотря на ее простоту, приводит к правильной общей математической структуре интересующего нас основного соотношения при классическом описании.

1.111. Модель ангармонического осциллятора

Пусть в определенных точках пространства расположены носители заряда (заряд q_e), способные смещаться в направлении x и связанные пружинами. При смещении x возникает дипольный момент $p = q_e x$. При этом предполагается, что при $x = 0$ находятся несмещенные заряды одинаковой величины и противоположных знаков. Тогда уравнение

$$K = kx + k'x^2 + \dots \quad (1.11-3)$$

описывает связь между силой и смещением для пружин. Силловые постоянные k , k' , ... связывают смещение x с силой K . Будем рассматривать только проекции на x -направление напряженности поля и поляризации, считая, что взаимодействием между отдельными индуцированными дипольными моментами можно пренебречь. Примем, что все смещаемые точечные заряды имеют одну и ту же массу m .

При не зависящем от времени электрическом поле величина отдельного дипольного момента $p = q_e x$ может быть определена из уравнения

$$q_e E = k \frac{p}{q_e} + k' \frac{p^2}{q_e^2} + \dots, \quad (1.11-4)$$

где E — напряженность постоянного поля в направлении x . Решая уравнение (1.11-4) относительно p и производя последующее суммирование всех дипольных моментов, находящихся в объеме V' , линейные размеры которого достаточно велики по сравнению со средним расстоянием между самими дипольными моментами, приходим к разложению поляризации в ряд Тейлора по степеням E :

$$P = \hat{\chi}^{(1)} E + \hat{\chi}^{(2)} E^2 + \dots \quad (1.11-5)$$

Величины $\hat{\chi}^{(n)}$ описывают количественно зависимость поляризации от напряженности поля, сами они зависят от k , k' , ..., q_e и от плотности распределения дипольных моментов γ .

Рассмотрим теперь ситуацию, возникающую при переменном во времени электрическом поле $E(t)$. Уравнение движения точечного заряда имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = K(x) + q_e E(t) - \Gamma' \frac{dx}{dt}. \quad (1.11-6)$$

В этом уравнении, кроме возвращающей силы $K(x)$ и силы, создаваемой электрическим полем, присутствует член $-\Gamma'(dx/dt)$ с $\Gamma' > 0$, соответствующий трению и позволяющий учесть потери энергии движущимся зарядом вследствие торможения излучением. Смещение x можно выразить через P из соотношения $P = \gamma q_e x$, так что (1.11-6) можно рассматривать также как уравнение для определения $P(t)$. Для решения этого уравнения можно сформулировать следующие начальные условия: действие поля $E(t)$ на среду начинается в некоторый момент времени t_0 , а при $t < t_0$ можно считать $E(t) = 0$; перед включением поля будем полагать величины P и dP/dt равными нулю. Искомыми являются значения $P(t)$ при $t \geq t_0$. Для решения определяющего нелинейного уравнения (1.11-6) применяется итерационный

метод (последовательных приближений), позволяющий представить поляризацию в виде суммы

$$P(t) = \sum_{n=1} P^{(n)}(t); \quad (1.11-7)$$

n -й член этой суммы зависит от n -кратного произведения напряженностей поля. Мы называем $P^{(n)}(t)$ вкладом n -го порядка. Из (1.11-7) следует, что при теоретическом описании можно разделить эффекты различных порядков, которые отличаются по величине применяемых полей и по частотам и могут быть отдельно измерены на опыте.

Для математического решения задачи будем исходить из дифференциального уравнения (1.11-6) в форме

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}P)_t &\equiv \left[\frac{d^2}{dt^2} + \Gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] P(t) = \\ &= \frac{\gamma q_e^2}{m} E(t) + \frac{\gamma q_e}{m} K^{(нл)} \left(\frac{P(t)}{\gamma e \gamma} \right), \end{aligned} \quad (1.11-8)$$

где линейный дифференциальный оператор \mathcal{D} охватывает все члены, линейные относительно P . Величина $K^{(нл)}(x) = K(x) - kx$ представляет собой нелинейную часть силы. Символ Γ означает Γ'/m . Величина ω_0 равна $\sqrt{-k/m}$. Следует отметить, что величина k отрицательна, поскольку $K(x)$ представляет собой возвращающую силу. В отсутствие нелинейных компонент силы и члена, соответствующего трению, ω_0 являлась бы круговой частотой гармонического осциллятора. Следует считать, что частота ω_0 велика по сравнению с константой трения Γ . Это означает, что потери на трение становятся заметными лишь по истечении времени, которое велико по сравнению с $1/\omega_0$.

Для конкретного представления итерационного метода целесообразно перейти от соотношения (1.11-8) к интегральному соотношению. При этом предполагается, что к используемым функциям применимо преобразование Фурье (см. разд. 1.13). В уравнении (1.11-8) следует заменить величину t на $t - \tau$ и затем умножить

обе части равенства на функцию

$$Q(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{для } \tau \leq 0, \\ \frac{e^{-(\Gamma/2)\tau}}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}} \sin\left(\tau \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}\right) & \text{для } \tau > 0. \end{cases} \quad (1.11-9)$$

Интегрируя полученное выражение по всем τ , получаем

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau Q(\tau) \frac{\gamma q_e^2}{m} E(t - \tau) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau Q(\tau) \frac{\gamma q_e}{m} K^{(нл)} \left(\frac{P(t - \tau)}{\gamma q_e} \right). \end{aligned} \quad (1.11-10)$$

Использованная для преобразования дифференциального уравнения функция $Q(\tau)$ выводится из дифференциального оператора \mathcal{D} , что может быть показано простым путем при помощи преобразования Фурье (см. приложение 1). Как следует из уравнения (1.11-10), функция $P(t)$ имеет вид суммы двух не зависящих от P слагаемых, из которых первое линейно зависит от напряженности поля, а второе содержит поляризацию под знаком интеграла в форме $P(t - \tau)$. Для $P(t - \tau)$ можно написать соотношение, аналогичное (1.11-10)

$$\begin{aligned} P(t - \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' Q(\tau') \frac{\gamma q_e^2}{m} E(t - \tau - \tau') + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' Q(\tau') \frac{\gamma q_e}{m} K^{(нл)} \left(\frac{P(t - \tau - \tau')}{\gamma q_e} \right). \end{aligned} \quad (1.11-11)$$

Подставив последнее выражение в (1.11-10), получим

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau Q(\tau) \frac{\gamma q_e^2}{m} E(t - \tau) + k' \frac{\gamma q_e^2}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau Q(\tau) \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' Q(\tau') E(t - \tau - \tau') \right]^2 + \mathcal{R}[P(t - \tau - \tau')]. \end{aligned} \quad (1.11-12)$$

Теперь $P(t)$ состоит из двух не зависящих от P слагаемых первого и второго порядка по напряженности поля и содержит еще одно слагаемое \mathcal{R} , в котором функция $P(t - \tau - \tau')$ входит в многократный интеграл.

Продолжая итерационный процесс, можно представить $P(t)$ в виде

$$\begin{aligned}
 P(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \kappa^{(1)}(\tau_1) E(t - \tau_1) + \\
 & + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 \kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2) E(t - \tau_1) E(t - \tau_2) + \\
 & \vdots \\
 & + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) E(t - \tau_1) \dots \\
 & \dots E(t - \tau_n) + \dots \quad (1.11-13)
 \end{aligned}$$

Поскольку в формуле для силы имеются нелинейные члены, выражение (1.11-13) содержит, кроме линейного по напряженности поля первого слагаемого, также и нелинейные члены. Величины $\kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ являются определенными функциями, в которые входят константы $m, k, k', \dots, q_e, \gamma, \Gamma$. В частности, для линейного члена получаем

$$\kappa^{(1)}(\tau_1) = \frac{\gamma q_e^2}{m} Q(\tau_1), \quad (1.11-14)$$

а для квадратичного члена

$$\kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} k' \gamma \frac{q_e^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' Q(\tau') Q(\tau_1 - \tau') Q(\tau_2 - \tau') \\ \text{для } \tau_1, \tau_2 \geq 0 \\ 0 \text{ для всех остальных } \tau_1, \tau_2. \end{cases} \quad (1.11-15)$$

Подробное воспроизведение расчетов и результатов выходит за рамки данного раздела; использованная модель будет детально интерпретирована с физической точки зрения в § 2.2.

1.112. Общее основное уравнение

Если от рассмотренной простой модели со специальными предположениями о потенциальной функции и геометрии перейти к исследованиям при общей потенциальной функции и при общих геометрических соотношениях, то получим соотношение между векторами $P \cdot(t)$ и $E \cdot(t)$, в котором зависимости от времени и от напряженности поля имеют ту же общую структуру, что и в уравнении (1.11-13), а именно:

$$\begin{aligned}
 P \cdot(t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) E \cdot(t - \tau_1) \dots E \cdot(t - \tau_n). \quad (1.11-16)
 \end{aligned}$$

Величина $\kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ в n -м слагаемом является тензором $(n+1)$ -го ранга. Функции $\kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ определяются ходом потенциала, геометрией и потерями энергии и содержат в качестве констант массы, геометрические величины, заряды, силовые постоянные, а также величины, характеризующие потери на трение (вообще диссипацию энергии). В случае $n=1$ величина κ называется линейной восприимчивостью, а при $n \geq 2$ — нелинейной восприимчивостью (или сверхвосприимчивостью). Восприимчивости, как и величины $P \cdot(t)$ и $E \cdot(t)$, являются вещественными функциями значений τ .

С точки зрения понимания электрических явлений соотношение (1.11-16) служит общей основой классического описания НЛО. Форма зависимости между поляризацией и напряженностью поля должна при этом определяться из анализа отдельных процессов с привлечением уравнений движения отдельных дипольных моментов при учете тех или иных геометрических условий. Выводы, основанные на общих физических принципах, будут рассмотрены в разд. 1.12. В частности, в гл. 2

показано, что вывод соотношения между P . и E . для важных групп физических явлений (электроны в атомах, носители заряда в плазме, колеблющиеся молекулы) приводит к уравнению вида (1.11-16). Там же на примере ядерного намагничивания будет показано, что аналогичное заключение справедливо и для магнитного случая: математическая структура соотношения между намагниченностью M . и напряженностью магнитного поля H . идентична с уравнением (1.11-16), связывающим P . и E .

Первое слагаемое в правой части уравнения (1.11-16) является линейным относительно напряженности поля E .; при малых значениях напряженности поля оно превалирует над остальными (нелинейными) членами. Более детальное рассмотрение (гл. 2) показывает, что относительные значения этих членов определяются отношением поля E . к характеризующим среду «внутренним» полям. Линейную часть поляризации $P^{(Л)}$ представляет основное уравнение обычной линейной оптики. Отклонение приведенного здесь выражения

$$P^{(Л)} = P^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \chi_{..}^{(1)}(\tau_1) E.(t - \tau_1) \quad (1.11-17)$$

от обычно применяемой формы

$$P. = \chi_{..} E. \quad (1.11-18)$$

(где $\chi_{..}$ — тензор линейной восприимчивости) объясняется тем, что в уравнении (1.11-17) в явном виде задано временное изменение индуцированной поляризации в зависимости от изменяющегося со временем поля E .. Указанная в уравнении (1.11-8) форма связи между P . и E . проявляется вообще при преобразовании от временного представления к частотному (см. разд. 1.13). Если в соответствии с этим интерпретировать соотношение (1.11-18) во временном представлении, то оно будет означать с некоторым нарушением общности, что $\chi_{..}^{(1)}(\tau_1)$ имеет характер δ -функции. В этом случае учитывается только зависимость поляризации от мгновенного значения напряженности поля и не учитывается ее зависимость от предшествующих значений поля. Нелинейная часть

поляризации $P^{(НЛ)}$ ответственна за типичные эффекты НЛО, например, получение гармоник, смещение света, самофокусировку, вынужденное комбинационное рассеяние (см. гл. 3 и 4), которые не могут быть объяснены на основании материального уравнения линейной оптики. То обстоятельство, что при не слишком больших напряженностях поля величина $P^{(Л)}$ превалирует над $P^{(НЛ)}$, не означает, что $P^{(НЛ)}$ является каким-то дополнительным членом к $P^{(Л)}$, обусловленным побочными эффектами или свойствами. Существование нелинейной части поляризации непосредственно связано с основными физическими закономерностями (см. гл. 2), например: с зависимостью потенциала точечного заряда от расстояния по закону $1/r$, с существованием силы Лоренца, с взаимодействием электронного и ядерного движений в атомных системах или в магнитном случае с фундаментальной зависимостью между магнитным моментом и моментом количества движения протонов и вообще атомных ядер.

В заключение коротко остановимся на способе интерпретации основополагающего уравнения (1.11-16) с точки зрения квантовой физики. Вещество во введенном выше объеме V' следует описать обычным квантовомеханическим способом (квантование при фиксированном числе частиц). Поле излучения описывается классически, что соответствует приближению квантовой теории поля при большом числе фотонов. Энергетическая связь материальной системы с полем излучения осуществляется через $E(t)$. Для рассмотрения возникающей диссипации энергии материальная система, рассматриваемая как динамическая, связывается с диссипативной системой. В принципе можно приписать поляризации вещества в объеме V' некоторое доступное измерению математическое ожидание (вероятное значение). Применяя зависящую от времени теорию возмущений Дирака, легко показать, что это изменяющееся во времени вероятное значение так же зависит от $E.(t)$, как и классическая величина $P.(t)$ в уравнении (1.11-16). Это справедливо при сделанных выше предположениях, соответствующих дипольному приближению. Функции $\chi^{(n)}.. \dots$

определяются собственными значениями, собственными функциями, переходными моментами данного вещества и характеристиками диссипативной системы (см. т. 2).

1.12. Общие свойства фундаментального материального уравнения

В предыдущем разделе мы проследили за возникновением отдельных дипольных моментов в результате смещения точечных зарядов под действием внешнего поля. При суммировании этих моментов по определенному объему возникает индуцированная поляризация, которая доступна измерению и может вызвать макроскопически наблюдаемые эффекты. Напряженность поля и поляризация находятся при этом в причинно-следственной связи. Напряженность поля является причиной, вызывающей поляризацию как следствие. Для характеристики такой связи между двумя физическими величинами существуют общие аспекты: во-первых, следствие и причина функционально связаны между собой, во-вторых, эта функциональная связь упорядочена во времени (следствие не может возникнуть во времени раньше причины). Если сделать очень общее допущение, что осуществляющие взаимосвязь следствия и причины функционалы могут быть разложены в обобщенный ряд Тейлора (разложение Вольтерра), то может быть задана общая математическая структура соотношения между величинами. При условиях, соответствующих нашему случаю, форма зависимости между $P.(t)$ и $E.(t)$ определяется по способу, вытекающему из уравнения (1.11-16). Модель, рассмотренная в разд. 1.111, позволяет непосредственно заключить, что для не зависящих от времени полей зависимость поляризации от напряженности поля может быть задана в виде ряда Тейлора [см. уравнение (1.11-5)]. В случае полей, зависящих от времени, следует пользоваться обобщенным разложением в ряд [см. уравнение (1.11-13)].

Из наших рассуждений вытекают определенные следствия и интерпретации, представляющие принципиальный и практический интерес. На них мы остановимся в настоящем разделе. Для рассуждений настоящего раз-

дела никакой роли не играют пространственные трансформационные свойства применяемых величин. Поэтому ради простоты мы воспользуемся однокомпонентным представлением; прямое обобщение результатов на многокомпонентные величины легко осуществить.

Соблюдение определенного порядка во времени в причинно-следственной связи требует, чтобы следствие не наступило во времени раньше причины. В нашем случае это означает, что отдельные члены в поляризации

$$P^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) \times \\ \times E(t - \tau_1) \dots E(t - \tau_n) \quad (1.12-1)$$

должны зависеть только от таких значений напряженности поля $E(t - \tau)$, для которых $\tau \geq 0$. Напряженность поля, действующего на среду после момента времени t , не может вызвать действие (поляризацию) к моменту времени t . Это требование равносильно утверждению, что характеризующие материальную систему функции, «функции системы» $\kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$, в области отрицательных значений τ тождественно равны нулю. Если для характеристики свойств материи используется модель, которая приводит к системе функций, удовлетворяющих указанному требованию, то принято говорить, что речь идет о «физически реализуемой» модели. Рассмотренная в разд. 1.111 модель является физически реализуемой; для первого и второго порядков это явно видно из уравнений (1.11-14) и (1.11-15).

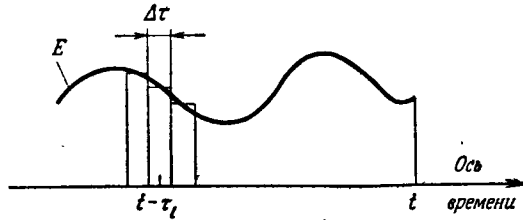
Слишком большие отклонения от реальных условий, слишком грубые приближения к точным основным уравнениям или теоретические заключения, основанные на экстраполяции недостаточно хорошо известных эмпирических величин, могут приводить к моделям, для которых функции системы $\kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ не обращаются тождественно в нуль в области отрицательных значений τ . В этом случае соотношение между $P(t)$ и $E(t)$, согласно уравнению (1.11-16), имеет только формальный математический смысл. При этом $E(t)$ и $P(t)$ не могут быть интерпретированы как физические величины,

находящиеся в причинно-следственной связи. Эти рассуждения можно использовать для проверки принципиальной допустимости в указанном смысле модели, применяемой для характеристики свойств материи. Такой подход имеет особое значение при использовании дисперсионных соотношений (см. разд. 1.13 или 1.22), играющих важную роль при частотном представлении.

В следующей части настоящего раздела мы будем предполагать, что соблюдается временной аспект причинности. Конкретно это предположение выразится в замене нижнего предела интегрирования, равного $-\infty$, на нуль. Для линейной части поляризации тогда получим

$$P^{(1)}(t) = \int_0^{\infty} d\tau \kappa^{(1)}(\tau) E(t - \tau). \quad (1.12-2)$$

Перейдем от интегрирования к суммированию $\sum_t \Delta\tau \kappa^{(1)}(\tau_i) E(t - \tau_i)$ в предположении достаточной малости величины $\Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i$. Тогда станет очевидным, что роль напряженности поля следует понимать в смысле следующих во времени в плотной последовательности узких импульсов (в пределе типа δ -функции) с переменной высотой, действующих на материальную систему (фиг. 2). Функция $P^{(1)}(t)$ аддитивно складывается из



Фиг. 2. Разложение импульса напряженности поля.

компонент. Каждая из них пропорциональна той напряженности электрического поля, которая существовала до момента времени τ_i . Функция $\kappa^{(1)}(\tau)$ определяет силу, с которой импульс поля вызывает действие (т. е. поляризацию) по истечении времени τ_i . Характеризующая систему функция $\kappa^{(1)}(\tau)$ (функция системы или вследствие ее

описанных выше свойств называемая также функцией отклика) является, таким образом, мерой «памяти», сохраняемой системой об отдельном импульсе поля, действовавшем на нее в прошедшее время.

Аналогичным образом можно интерпретировать соотношения, соответствующие квадратичному члену:

$$P^{(2)}(t) = \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2) E(t - \tau_1) E(t - \tau_2). \quad (1.12-3)$$

Два импульса поля, заданные в моменты времени $t - \tau_1$ и $t - \tau_2$ ($\tau_1, \tau_2 \geq 0$), вызывают в момент времени t действие, пропорциональное произведению обеих напряженностей поля. Сила этого действия зависит через функцию системы $\kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$ от времен τ_1 и τ_2 . Полное значение $P^{(2)}(t)$ получится в результате сложения всех пар импульсов напряженности поля, действовавших до момента времени t (и в этот момент). Действие, вызываемое парой импульсов поля, зависит не только от произведения напряженностей поля, но и от положения обоих импульсов относительно времени t . При этом для физического действия не существенно, какому именно из двух импульсов приписывается время $t - \tau_1$ или $t - \tau_2$, поскольку это определяется лишь выбором обозначений. Поэтому можно считать, что

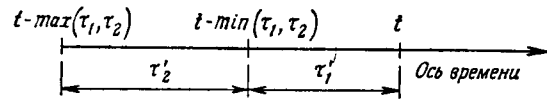
$$\kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2) = \kappa^{(2)}(\tau_2, \tau_1). \quad (1.12-4)$$

Следовательно, вся информация о функции системы $\kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$ содержится уже в одной половине первого квадранта (она ограничена биссектрисой) плоскости (τ_1, τ_2) . [Заметим, что для модели, рассмотренной в разд. 1.111, это ясно видно из уравнения (1.11-15).] Для конкретного изображения такой ситуации целесообразно перейти от координат τ_1, τ_2 к другим координатам τ'_1, τ'_2 , где τ'_1 — минимальное значение τ_1, τ_2 , а τ'_2 — разность $\max(\tau_1, \tau_2) - \min(\tau_1, \tau_2)$ (фиг. 3). Тогда для $P^{(2)}(t)$ получим

$$P^{(2)}(t) = \int_0^{\infty} d\tau'_1 \int_0^{\infty} d\tau'_2 \kappa^{(2)}(\tau'_1, \tau'_2) E(t - \tau'_1) E(t - \tau'_1 - \tau'_2). \quad (1.12-5)$$

Легко видеть, что теперь при перестановке τ'_1 и τ'_2 уже не получится один и тот же вклад в значение $P^{(2)}$.

Аналогичные интерпретации возможны также для высших нелинейных членов. Вклад n импульсов напряженности поля в n -й член, как это видно из уравнения (1.12-1), зависит от произведения n импульсов напряженности поля и от временного распределения этого пучка импульсов относительно времени t . На основе соображений, подробно изложенных при рассмотрении квадратичного члена и приведших к уравнению (1.12-4), мы



Фиг. 3. Переход от (τ_1, τ_2) к (τ'_1, τ'_2) .

можем написать для функции системы n -го порядка соотношение симметрии

$$\kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \kappa^{(n)}(\tau_{1n}, \dots, \tau_{11}), \quad (1.12-6)$$

причем в последовательности $\{\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}\}$ возможна любая перестановка n переменных τ_1, \dots, τ_n . Аналогично поляризации второго порядка можно представить $P^{(n)}(t)$ в виде

$$P^{(n)}(t) = \int_0^\infty d\tau'_1 \dots \int_0^\infty d\tau'_n \tilde{\kappa}^{(n)}(\tau'_1, \dots, \tau'_n) E(t - \tau'_1) \dots \\ \dots E(t - \tau'_1 - \dots - \tau'_n). \quad (1.12-7)$$

Важным условием правильного описания измеримых физических величин является отсутствие любых расходимостей. Поэтому возникает вопрос о сходимости интегралов, входящих в уравнение (1.11-16). На основании развитых в настоящем разделе представлений мы можем считать эту проблему решенной для физически реализуемых моделей по отношению к нижним пределам интегрирования. В соответствии с реальными обстоятельствами мы можем считать заранее напряженность поля $E(t)$

ограниченной функцией для всех значений времени t ; отсюда следует, что и при верхних пределах интегрирования сходимость будет обеспечена, если только функция системы $\kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ при больших значениях τ достаточно быстро стремится к нулю. В таком случае принято говорить, что во временном смысле среда обладает конечной памятью. Это означает, что достаточно давно действовавшие на среду импульсы напряженности поля вносят пренебрежимо малый вклад в значение поляризации. Вообще можно утверждать, что конечная память обусловлена постоянно присутствующими потерями на трение (диссипация энергии). Именно этот механизм обеспечивает восстановление начального состояния, существовавшего до включения электрического поля (подробнее см. гл. 2). Это можно видеть достаточно наглядно с помощью модели, рассмотренной в разд. 1.111: в линейном члене величина $\kappa^{(1)}(\tau)$ стремится к нулю при больших τ по экспоненциальному закону [см. уравнение (1.11-14)], причем константа трения является показателем степени в экспоненте. Аналогичным образом можно вычислить функцию квадратичной восприимчивости $\kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$ из уравнения (1.11-15) и убедиться в том, что она экспоненциально убывает при возрастающих значениях τ_1 и τ_2 .

1.13. Частотное представление

Общая взаимосвязь между поляризацией и напряженностью поля до сих пор [см. уравнение (1.11-16)] описывалась во временном представлении. Такое же основополагающее и практическое значение имеет частотное представление этой взаимосвязи. Одно-однозначное соответствие между обоими представлениями осуществляется с помощью преобразования Фурье. Как известно, математические предпосылки применимости этого преобразования являются достаточно общими. Поэтому можно считать, что они соблюдаются для функций, применяемых нами при описании физических явлений. Примем также, что в настоящем разделе справедливо сказанное в разд. 1.12 относительно пространственных трансформационных свойств.

Мы считаем целесообразным применять для частотного и временного представлений определенной физической величины один и тот же буквенный символ; частотное представление (переменная f) мы будем отмечать штрихом слева сверху над соответствующим буквенным символом. Тогда можно записать следующие соотношения между напряженностями поля и поляризациями и аналогичными величинами, над которыми выполнено преобразование Фурье (ПФ):

$$E(t) = \text{ПФ} \{ {}^1 E(f) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} df {}^1 E(f) e^{i2\pi ft}, \quad (1.13-1)$$

$${}^1 E(f) = \text{ПФ} \{ E(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt E(t) e^{-i2\pi ft},$$

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df {}^1 P(f) e^{i2\pi ft}, \quad (1.13-2)$$

$${}^1 P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt P(t) e^{-i2\pi ft}.$$

Аналогичные соотношения справедливы и для подвергнутых ПФ функций восприимчивости:

$$\begin{aligned} \kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} df_n \times \\ &\times {}^1 \kappa^{(n)}(f_1, \dots, f_n) e^{i2\pi(f_1 \tau_1 + \dots + f_n \tau_n)}, \end{aligned} \quad (1.13-3)$$

$$\begin{aligned} \kappa^{(n)}(f_1, \dots, f_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \times \\ &\times \kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-i2\pi(\tau_1 f_1 + \dots + \tau_n f_n)}. \end{aligned}$$

Соотношение между поляризационным членом n -го порядка и напряженностью поля можно описать совершенно равноправным образом при помощи функций $P^{(n)}(t)$, $E(t)$, $\kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ или функций ${}^1 P^{(n)}(f)$, ${}^1 E(f)$, ${}^1 \kappa^{(n)}(f_1, \dots, f_n)$. Связь между функциями ${}^1 P^{(n)}$, ${}^1 E$ и

$\kappa^{(n)}$ можно установить, применяя ПФ к уравнению (1.11-16):

$$P^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) \times \\ \times E(t - \tau_1) \dots E(t - \tau_n).$$

Левая часть приводит к величине ${}^1 P^{(n)}(f)$, а в правой части следует преобразовать произведение напряженностей поля от t -представления к f -представлению:

$${}^1 P^{(n)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) \times \\ \times \text{ПФ} \{ E(t - \tau_1) \dots E(t - \tau_n) \}. \quad (1.13-4)$$

По правилам ПФ получим для линейного члена ($n = 1$)

$$\text{ПФ} \{ E(t - \tau_1) \} = e^{-i2\pi f \tau_1} {}^1 E(f), \quad (1.13-5)$$

а для квадратичного члена ($n = 2$)

$$\begin{aligned} \text{ПФ} \{ E(t - \tau_1) E(t - \tau_2) \} &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} df' e^{2\pi i f' \tau_1} {}^1 E(-f') e^{-i2\pi(f+f')\tau_2} {}^1 E(f+f'). \end{aligned} \quad (1.13-6)$$

Аналогичные соотношения имеют место для высших значений n .

Применяя уравнения (1.13-3) и (1.13-5), для линейного случая из уравнения (1.13-4) путем интегрирования по τ_1 (см. приложение 2) получаем

$${}^1 P^{(1)}(f) = {}^1 \kappa^{(1)}(f) {}^1 E(f). \quad (1.13-7)$$

Сравнивая уравнение (1.13-7) с соответствующим временным представлением линейного члена поляризации (см. разд. 1.112), легко видеть, что выбранное ранее соотношение линейной оптики, в котором поляризация равна произведению восприимчивости и напряженности поля, справедливо лишь для *определенного* значения частоты. Представление (1.13-7) часто при выполнении расчетов обладает преимуществами по отношению к временному представлению, ибо в частотном представлении

восприимчивость и напряженность поля находятся между собой в простой алгебраической зависимости. Применяя уравнения (1.13-6) и (1.13-3), получаем из (1.13-4) после интегрирования по τ_1, τ_2 выражение для квадратичного члена ($n = 2$)

$${}^1P^{(2)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} df' {}^1\chi^{(2)}(f', f-f) {}^1E(f') {}^1E(f-f). \quad (1.13-8)$$

В этом случае также значительно упрощается математическое соотношение между поляризацией, напряженностью поля и восприимчивостью, поскольку вместо двойного интеграла во временном представлении теперь появляется однократный интеграл. Аналогичным образом могут быть получены соотношения высших порядков. В общем случае n -го порядка для связи между поляризацией и напряженностью поля можно написать

$${}^1P^{(n)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} df_{n-1} {}^1\chi^{(n)}(f_1, \dots, f_n) \times \\ \times {}^1E(f_1) \dots {}^1E(f_n), \quad (1.13-9)$$

где $f = f_1 + \dots + f_n$. Особо следует указать, что соотношение для n -го порядка выражается $(n-1)$ -кратным интегралом. Введение величины $f_n = f - (f_1 + \dots + f_{n-1})$ позволяет записать произведение напряженностей поля в симметричной форме, что дает особые преимущества при рассмотрении дискретного спектра частот (см. разд. 1.212).

Рассмотренные в разд. 1.11 и 1.12 общие свойства фундаментального материального уравнения и входящих в него функций были сформулированы во временном представлении. В дальнейшем мы рассмотрим следствия, вытекающие из частотного представления.

Поляризация $P^{(n)}(t)$, напряженность поля $E(t)$ и восприимчивость $\chi^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ являются вещественными функциями своих аргументов. Поэтому их фурье-образы должны удовлетворять соотношению

$${}^1P^{(n)}(-f) = {}^1P^{(n)*}(f), \quad {}^1E(-f) = {}^1E^*(f), \\ {}^1\chi^{(n)}(-f_1, \dots, -f_n) = {}^1\chi^{(n)*}(f_1, \dots, f_n), \quad (1.13-10)$$

что непосредственно видно из уравнений (1.13-1) — (1.13-3).

Из соотношений симметрии (1.12-6) для функций восприимчивости $\chi^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ при $n \geq 2$ вытекают также следствия в частотном представлении, а именно:

$${}^1\chi^{(n)}(f_1, \dots, f_n) = {}^1\chi^{(n)}(f_n, \dots, f_1), \quad (1.13-11)$$

причем в последовательности $\{f_{11}, \dots, f_{1n}\}$ допустимы любые перестановки частот f_1, \dots, f_n .

Выполнение последовательности во времени для причинно-следственной связи, согласно которой функции $\chi^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ должны тождественно обращаться в нуль при отрицательных значениях τ , также обуславливает определенные свойства соответствующих фурье-образов. Так возникают дисперсионные соотношения, имеющие в линейном случае форму (см. приложение 3)

$${}^1\chi^{(1)}(f) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} df' \frac{{}^1\chi^{(1)}(f')}{f' - f}, \quad (1.13-12)$$

причем $\int_{-\infty}^{+\infty} df' (\dots)$ означает главное значение интеграла. Из уравнения (1.13-12) следует

$$\operatorname{Re} \{ {}^1\chi^{(1)}(f) \} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} df' \frac{\operatorname{Im} \{ {}^1\chi^{(1)}(f') \}}{f' - f}, \\ \operatorname{Im} \{ {}^1\chi^{(1)}(f) \} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} df' \frac{\operatorname{Re} \{ {}^1\chi^{(1)}(f') \}}{f' - f}. \quad (1.13-13)$$

Поскольку вещественная и мнимая части восприимчивости ${}^1\chi^{(1)}(f)$ могут быть выражены через показатель преломления и коэффициент поглощения, то уравнение (1.13-13) устанавливает соотношение между этими двумя оптическими константами. Поэтому частотная зависимость одной из этих констант определяет частотную зависимость другой константы. Подобные соотношения очень важны для проверки экспериментальных данных и теоретических расчетов (см. по этому поводу разд. 1.12).

Для $n > 1$ получаются соответственно более сложные зависимости; например, для квадратичного случая [2]

$$\begin{aligned} \chi^{(2)}(f_1, f_2) &= \frac{i}{\pi} \left[\int_0^{\infty} d f' \frac{\chi^{(2)}(f_1, f_2)}{f' - f_1} - \int_0^{f_2} d f' \frac{\chi^{(2)}(-f_1, f_2)}{f' + f_1} - \int_{f_2}^{\infty} d f' \frac{\chi^{(2)}(f_1, -f_2)}{f' + f_1} \right], \\ \chi^{(2)}(f_1, -f_2) &= \frac{i}{\pi} \left[\int_{f_2}^{\infty} d f' \frac{\chi^{(2)}(f_1, -f_2)}{f' - f_1} + \int_0^{f_2} d f' \frac{\chi^{(2)*}(-f_1, f_2)}{f' - f_1} - \int_0^{\infty} d f' \frac{\chi^{(2)*}(f_1, f_2)}{f' + f_1} \right]. \end{aligned} \quad (1.13-14)$$

Отсюда также можно получить соотношения между вещественной и мнимой частями функций квадратичной восприимчивости.

§ 1.2. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОСПРИИМЧИВОСТИ

После рассмотрения в § 1.1 структуры материальных уравнений обратимся теперь к восприимчивостям, представляющим в этих уравнениях свойства материи. В разд. 1.21 мы обсудим получение восприимчивостей из фундаментальных материальных уравнений в их временном и частотном представлениях при определенных функциях поляризации и напряженности поля. Типичные параметры, характеризующие изменения поляризации и напряженности поля, в свою очередь определяют величины, непосредственно измеряемые при нелинейно-оптических экспериментах (см. гл. 3 и 4). Поэтому результаты разд. 1.21 могут быть применены для установления взаимосвязи между свойствами вещества и измеряемыми величинами. Рассмотренные в разд. 1.22 общие трансформационные свойства и свойства симметрии оказываются важными при выборе того или иного вещества для изучения определенных нелинейно-оптических эффектов.

1.21. Определение восприимчивостей из основных уравнений

Подобно определению функции системы для общего нелинейного электрического квадруполья при известных входном и выходном напряжениях, восприимчивости получаются из соотношения $P.(E.)$. Заданный при этом закон изменения напряженности поля может быть в принципе выбран в значительной мере произвольно. Однако как с теоретической, так и с практической точки зрения полезно рассмотреть два предельных случая, а именно случаи импульсных и стационарных условий. В первом случае мы встречаемся с узкими импульсами напряженности поля, которые во временном представлении математически описываются δ -функциями. Во втором случае напряженность поля характеризуется фиксированным значением частоты и в частотном представлении описывается δ -функцией. Как известно, такие δ -импульсы напряженности поля невозможно получить ни во временном, ни в частотном представлениях, поскольку с ними было бы связано бесконечно большое содержание энергии. Поэтому мы должны представить себе импульсы конечной (во времени) ширины или колебания с конечной шириной полосы частот. Вместе с тем ширины импульсов или ширины частотных полос должны быть достаточно малыми, чтобы возможно было бы описание при помощи δ -функций. Это условие выполнимо, так как входящие в материальные уравнения восприимчивости являются величинами, имеющими физический смысл, и их необходимое математическое поведение поэтому обеспечено.

Следует заранее предположить, что интегрирование величины $|\chi^{(n)}|^2$ или $|\chi^{(n)}|^2$ по всей области значений τ или по всей области значений f дает конечную величину. Следовательно, функциям $\chi^{(n)}$ или $\chi^{(n)}$, согласно теореме Винера — Хинчина из теории информации (см., например, [3]), можно сопоставить некоторое эффективное конечное расстояние. Требование узости импульсов тогда должно означать, что ширины импульсов малы по сравнению с эталонным расстоянием для соответствующей функции.

Функции восприимчивостей можно определять раздельно для каждого порядка, так как каждый поляризационный член зависит от напряженности поля определенного порядка и может отделяться от других поляризационных членов в соответствии со значениями применяемых напряженностей поля. Для пространственных трансформационных свойств в настоящем разделе справедливо все сказанное в разд. 1.12.

1.211. Импульсный случай — временное представление

Применение материальных уравнений во временном представлении [см. уравнение (1.11-16)] позволяет получить для узких импульсов наглядные соотношения.

В линейный поляризационный член мы подставим только значение импульса напряженности поля в момент времени $t = 0$, т. е. положим $E(t) = \mathcal{E} \delta(t - 0)$. Тогда из уравнения (1.11-16) следует

$$P^{(1)}(t) = \kappa^{(1)}(t) \mathcal{E}. \quad (1.21-1)$$

Поскольку $\kappa^{(1)}(\tau) = 0$ для $\tau < 0$, то из зависимости поляризации от времени при $t > 0$ следует формула для полной линейной восприимчивости

$$\kappa^{(1)}(t) = \frac{P^{(1)}(t; \mathcal{E}, 0)}{\mathcal{E}}. \quad (1.21-2)$$

Величина $P^{(1)}(t; \mathcal{E}, 0)$ идентична $P^{(1)}(t)$ в уравнении (1.21-1), причем величины справа от точки с запятой обозначают характеристические параметры действующего поля.

В квадратичном случае следует подставить два импульса напряженности поля: для времени $t' = 0$ и для $t' < 0$, т. е. $E(t) = \mathcal{E} \delta(t - 0) + \mathcal{E}' \delta(t - t')$. Теперь из уравнения (1.11-16) получим для поляризации при $t \geq 0$ (см. приложение 2)

$$P^{(2)}(t) = P^{(2)}(t; \mathcal{E}, 0/\mathcal{E}', t') = \mathcal{E}^2 \kappa^{(2)}(t, t) + \mathcal{E}'^2 \kappa^{(2)}(t - t', t - t') + 2\mathcal{E} \mathcal{E}' \kappa^{(2)}(t, t - t'). \quad (1.21-3)$$

Если сначала положить $\mathcal{E}' = 0$, то получим

$$\kappa^{(2)}(t, t) = \frac{P^{(2)}(t; \mathcal{E}, 0/0, -)}{\mathcal{E}^2}. \quad (1.21-4)$$

При подстановке соответствующей поляризации со значением импульса при $t = 0$ мы получим значения $\kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$ на биссектрисе угла в первом квадранте. Эти величины можно использовать для вычисления первого и второго слагаемых в правой части уравнения (1.21-3) для каждого значения t и t' . Таким образом, подставляя $P^{(2)}(t; \mathcal{E}, 0/\mathcal{E}', t')$ в формулу

$$\begin{aligned} \kappa^{(2)}(t, t - t') = & \\ = & \frac{1}{2\mathcal{E} \mathcal{E}'} \{ P^{(2)}(t; \mathcal{E}, 0/\mathcal{E}', t') - \\ & - \mathcal{E}^2 \kappa^{(2)}(t, t) - \\ & - \mathcal{E}'^2 \kappa^{(2)}(t - t', t - t') \}, \end{aligned} \quad (1.21-5)$$

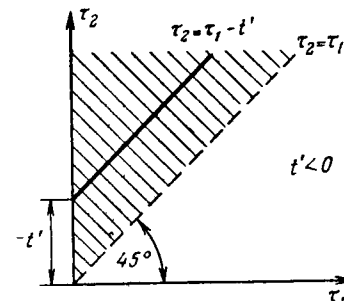
можно определить восприимчивость $\kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$ в заштрихованной области первого квадранта (фиг. 4). Тем самым вследствие соотношения симметрии (1.12-4)

величина $\kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$ определена уже во всем первом квадранте. В связи с требованием физической реализуемости нас интересует именно лишь этот квадрант плоскости (τ_1, τ_2) . Для получения $\kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$ требуется только непрерывно изменять момент времени t' первого (более раннего) импульса и соответственно использовать получающиеся при $t \geq 0$ значения поляризации.

Аналогичный метод применим к высшим нелинейным членам.

1.212. Стационарный случай — частотное представление

В стационарном случае получают наглядные соотношения, если применить частотное представление [см. уравнение (1.13-9)] материальных уравнений. При этом следует предположить, что напряженности поля аддитивно складываются из членов, соответствующих фиксированным частотам. Так, для определенной частоты f_i мы примем, что напряженность поля имеет косинусоидальную зависимость от времени, а именно положим



Фиг. 4. К определению функции восприимчивости $\kappa^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$.

$E(t) = |E(f_1)| \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)$. С комплексной амплитудой $\hat{E}(f_1)$ можно представить $E(t)$ в виде

$$E(t) = \frac{1}{2} \hat{E}(f_1) e^{i2\pi f_1 t} + \{KK\}. \quad (1.21-6)$$

Символ $\{KK\}$ означает здесь и всюду в дальнейшем комплексно сопряженное значение стоящего впереди и подробно записанного слагаемого (или нескольких слагаемых). Применяя к уравнению (1.21-6) преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} {}^1E(f) &= \frac{1}{2} \hat{E}(f_1) \delta(f - f_1) + \frac{1}{2} \hat{E}^*(f_1) \delta(f - [-f_1]) = \\ &= \frac{1}{2} \hat{E}(f_1) \delta(f - f_1) + \{MF\}. \end{aligned} \quad (1.21-7)$$

Второе слагаемое является фурье-образом величины $\{KK\}$ и не содержит никакой новой информации по сравнению с первым слагаемым. Мы обозначим здесь и в дальнейшем такие слагаемые (а также несколько слагаемых вместе взятых) символом $\{MF\}$; этот символ должен напоминать о том, что при вещественных функциях во временном представлении для соответствующего частотного представления должны соблюдаться определенные требования [см. уравнение (1.13-10)] к «минусовым» частотам. Установленная в уравнениях (1.21-6), (1.21-7) форма записи применяется также в случае $f_1 = 0$. Далее необходимо иметь в виду, что при переходе от f_1 к $-f_1$ следует брать соответствующую комплексно сопряженную амплитуду, причем соблюдается соотношение $\hat{E}(-f_1) = \hat{E}^*(f_1)$.

Рассматривая линейный член, в напряженность поля нужно подставить одно-единственное колебание, определяемое величиной $\hat{E}(f_1)$. С помощью уравнения (1.13-7) получается соответствующий спектр частот

$${}^1P^{(1)}(f) = {}^1\kappa^{(1)}(f) \frac{1}{2} \hat{E}(f_1) \delta(f - f_1) + \{MF\}. \quad (1.21-8)$$

Это уравнение описывает колебание поляризации с частотой f_1 и с комплексной амплитудой

$$\hat{P}^{(1)}(f_1) = \hat{P}^{(1)}(f_1; \hat{E}(f_1)) = {}^1\kappa^{(1)}(f_1) \hat{E}(f_1). \quad (1.21-9)$$

Величина, стоящая справа от точки с запятой, обозначает, как и в разд. 1.211, характеристические параметры действующего электрического поля. Если непрерывным образом изменять частоту колебаний напряженности поля в области $f_1 \geq 0$ и при этом по мере надобности определять отношение $\hat{P}^{(1)}/\hat{E}$, то получатся значения ${}^1\kappa^{(1)}$ в области положительных частот (включая нуль); тогда значения для отрицательных частот определяются без затруднений путем применения уравнения (1.13-10).

При рассмотрении квадратичного члена требуются в общем случае два колебания напряженности поля, характеризуемые частотами f_1, f_2 и комплексными амплитудами $\hat{E}(f_1), \hat{E}(f_2)$. Следовательно, для действующего электрического поля получаем

$${}^1E(f) = \frac{1}{2} \hat{E}(f_1) \delta(f - f_1) + \frac{1}{2} \hat{E}(f_2) \delta(f - f_2) + \{MF\} \quad \text{или}$$

$$\begin{aligned} {}^1E(f) &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} \hat{E}(f_k) \delta(f - f_k) \text{ с } f_{3,4} = -f_{1,2} \\ &\text{и } \hat{E}(f_{3,4}) = \hat{E}^*(f_{1,2}). \end{aligned} \quad (1.21-10)$$

Для вычисления спектра частот поляризации воспользуемся уравнением (1.13-8), для чего необходимо составить произведение ${}^1E(f') {}^1E(f - f')$,

$$\begin{aligned} {}^1E(f') {}^1E(f - f') &= \sum_{k,l} \frac{1}{4} \hat{E}(f_k) \hat{E}(f_l) \delta(f' - f_k) \delta(f - f' - f_l) = \\ &= \sum_{k,l} \frac{1}{4} \hat{E}(f_k) \hat{E}(f_l) \delta(f' - f_k) \delta(f - [f_k + f_l]). \end{aligned} \quad (1.21-11)$$

При преобразовании правой части уравнения (1.21-11) мы использовали некоторые известные свойства δ -функции (см. приложение 2). Интегрирование по f' в соответствии с уравнением (1.13-8) дает для частотного спектра поляризации

$${}^1P^{(2)}(f) = \sum_{k,l} {}^1\kappa^{(2)}(f_k, f - f_k) \frac{1}{4} \hat{E}(f_k) \hat{E}(f_l) \delta(f - [f_k + f_l]). \quad (1.21-12)$$

За исключением частных случаев специальных значений пар чисел $|f_1|, |f_2|$ и равенства нулю одной из

частот величина ${}^1P^{(2)}(f)$ вообще содержит пять частот $(0, 2f_1, 2f_2, f_1 + f_2, f_1 - f_2)$ с различными вкладами. Соответствующие колебания поляризации имеют следующие комплексные амплитуды:

$$\hat{P}^{(2)}(0) = \hat{P}^{(2)}(0; \hat{E}(f_1)/\hat{E}(f_2)) = \frac{1}{2} {}^1\kappa^{(2)}(f_1, -f_1) \hat{E}(f_1) \hat{E}^*(f_1) + \frac{1}{2} {}^1\kappa^{(2)}(f_2, -f_2) \hat{E}(f_2) \hat{E}^*(f_2),$$

$$\hat{P}^{(2)}(2f_1) = \hat{P}^{(2)}(2f_1; \hat{E}(f_1)/\hat{E}(f_2)) = \frac{1}{2} {}^1\kappa^{(2)}(f_1, f_1) [\hat{E}(f_1)]^2, \quad (1.21-13)$$

$$\hat{P}^{(2)}(2f_2) = \hat{P}^{(2)}(2f_2; \hat{E}(f_1)/\hat{E}(f_2)) = \frac{1}{2} {}^1\kappa^{(2)}(f_2, f_2) [\hat{E}(f_2)]^2,$$

$$\hat{P}^{(2)}(f_1 + f_2) = \hat{P}^{(2)}(f_1 + f_2; \hat{E}(f_1)/\hat{E}(f_2)) = {}^1\kappa^{(2)}(f_1, f_2) \hat{E}(f_1) \hat{E}(f_2),$$

$$\hat{P}^{(2)}(f_1 - f_2) = \hat{P}^{(2)}(f_1 - f_2; \hat{E}(f_1)/\hat{E}(f_2)) = {}^1\kappa^{(2)}(f_1, -f_2) \hat{E}(f_1) \hat{E}^*(f_2).$$

Если одна из частот, например f_2 , равна нулю, то вследствие равенства $\hat{E}(0) = \hat{E}^*(0)$, нарушая уравнение (1.21-13), получаем

$$\hat{P}^{(2)}(f_1) = \hat{P}^{(2)}(f_1; \hat{E}(f_1)/\hat{E}(f_2 = 0)) = 2 {}^1\kappa^{(2)}(f_1, 0) \hat{E}(f_1) \hat{E}(0). \quad (1.21-14)$$

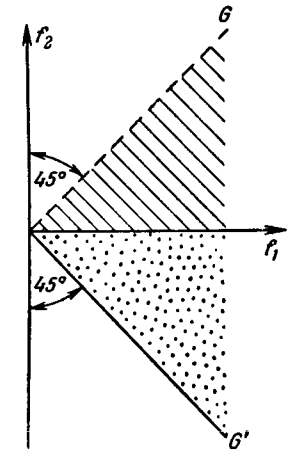
Суммарная и разностная частоты в этом случае совпадают.

Положим сначала величину $\hat{E}(f_2)$ в уравнении (1.21-13) равной нулю; если придавать частоте f_1 различные значения в области $f_1 \geq 0$, то при использовании соответствующих значений комплексной амплитуды поляризации на частоте $2f_1$ можно определить восприимчивость на отрезке прямой G (фиг. 5). Пользуясь значениями комплексной амплитуды поляризации на нулевой частоте, получим восприимчивость на отрезке прямой G' . Рассмотрим теперь снова общий случай двух частот колебаний напряженности поля. Если эти частоты непрерывно изменять в области $f_1 > f_2 \geq 0$, то по уравнениям (1.21-13) или (1.21-14) можно определить

значения восприимчивостей в областях, отмеченных на плоскости (f_1, f_2) штрихами и точками. При этом должны соответственно использоваться амплитуды на суммарной и разностной частотах. Вследствие соотношений симметрии (1.13-10) и (1.13-11) величина ${}^1\kappa^{(2)}(f_1, f_2)$ тем самым уже определена во всей плоскости f_1, f_2 . При таком способе определения следует пользоваться комплексными амплитудами поляризации, изменяющимися в соответствии с напряженностями поля, заданными в пределах двумерного многообразия значений частот.

Аналогичный метод может быть применен и к высшим нелинейным членам ($n > 2$).

1.213. Связь между поляризацией и напряженностью поля при дискретном спектре частот



Фиг. 5. К определенной функции восприимчивости ${}^1\kappa^{(2)}(f_1, f_2)$.

Из изложенных в предыдущем разделе соображений явствует, что связь между поляризацией и напряженностью поля можно представить в значительно более простой форме, если исходить из дискретного спектра напряженностей электрического поля: вместо интегральных соотношений (1.11-16) или (1.13-9) появляются простые соотношения, в которых соответствующая рассматриваемая амплитуда поляризации пропорциональна действующей амплитуде напряженности поля. Коэффициент пропорциональности отображает в соответствующем порядке характеристику вещества. Исследования соотношений при дискретном спектре напряженности поля не только позволяют получить простое математическое представление связи между поляризацией и напряженностью поля, но обладают еще тем преимуществом, что ожидаемые в отдельных порядках эффекты НЛО можно рассмотреть наиболее простым способом.

Для квадратичного члена содержащегося в уравнении (1.21-13) результаты для различных частотных компонент поляризации можно свести к одному уравнению следующего вида:

$$P^{(2)}(f) = \chi^{(2)}(f; f_1, f_2) \hat{E}(f_1) \hat{E}(f_2). \quad (1.21-15)$$

Величины $P^{(2)}(f)$, $\hat{E}(f_1)$, $\hat{E}(f_2)$ являются комплексными амплитудами на частотах f , f_1 , f_2 . Функция $\chi^{(2)}(f; f_1, f_2)$ определена во всей плоскости (f_1, f_2) . Частота f колебания поляризации равна сумме стоящих в $\chi^{(2)}$ после точки с запятой частот f_1 и f_2 :

$$f = f_1 + f_2. \quad (1.21-16)$$

С точки зрения физики следует различать два случая: поляризация $P^{(2)}$ создается двумя колебаниями напряженности поля (с двумя различными вкладками на двух частотах) или одним-единственным колебанием.

Первый случай означает, что существуют значения (f_1, f_2) , не лежащие на одной из двух биссектрис плоскости (f_1, f_2) . При заданных f_1, f_2 частота f может принимать два различных значения, а именно $|f_1| + |f_2|$ и $||f_1| - |f_2||$, что приводит к эффекту смещения света (см. разд. 3.31), т. е. к образованию суммарных и разностных частот. Из сравнения уравнений (1.21-13) и (1.21-15) следует, что $\chi^{(2)}(f; f_1, f_2) = \chi^{(2)}(f_1, f_2)$, причем в согласии с уравнением (1.21-6) необходимо учитывать условие $\hat{E}(-f_1) = \hat{E}^*(f_1)$.

Вдоль обеих биссектрис напряженность поля может описываться одним колебанием с частотой f' . Сравнение уравнений (1.21-13) и (1.21-15) показывает, что теперь нужно положить $\chi^{(2)}(f; f_1, f_2) = \frac{1}{2} \chi^{(2)}(f_1, f_2)$. При этом следует учесть, что для эффекта удвоения частоты $f = 2f'$ необходимо произвести замену $f_1 = f'$ и $f_2 = f'$; для эффекта получения постоянной слагающей поляризации ($f = 0$) следует заменить f_1 на f' и f_2 на $-f'$.

Специального рассмотрения требует случай равенства нулю одной из частот, например f_2 , поскольку тогда суммарная и разностная частоты совпадают. В этом случае $\chi^{(2)}(f; f, 0) = 2 \chi^{(2)}(f, 0)$.

Если амплитуда поляризации на определенной частоте (в данном случае $f = 0$) может быть получена дву-

мя способами — из колебания на частоте f_1 или из колебания на частоте f_2 , то существование этих двух причин приводит к представлению соответствующей амплитуды поляризации в виде суммы отдельных результатов [см. уравнение (1.21-13)].

В целом можно заключить, что величина $\chi^{(2)}(f; f_1, f_2)$ с точностью до численного множителя равна $\chi(f_1, f_2)$. Численный множитель зависит от числа различных частот в спектре напряженности поля; в квадратичном случае он равен 2, 1 или $\frac{1}{2}$.

Для третьего порядка мы получим такие же соотношения, что и для второго. Связь между амплитудами поляризации и напряженности поля определяется формулой

$$\hat{P}^{(3)}(f) = \chi^{(3)}(f; f_1, f_2, f_3) \hat{E}(f_1) \hat{E}(f_2) \hat{E}(f_3), \quad (1.21-17)$$

где снова

$$f = f_1 + f_2 + f_3. \quad (1.21-18)$$

Величина $\chi^{(3)}$ определена в пространстве (f_1, f_2, f_3) . С физической точки зрения теперь нужно различать уже три случая: амплитуда поляризации третьего порядка может создаваться колебаниями напряженности поля с тремя, двумя или с одной частотой.

В первом случае с тремя различными значениями $|f_1|$, $|f_2|$, $|f_3|$ (предполагается, что они все не равны нулю) получаются четыре различных значения f , а именно $|f_1| + |f_2| + |f_3|$, $||f_1| + |f_2| - |f_3||$, $||f_1| - |f_2| + |f_3||$ и $||-|f_1| + |f_2| + |f_3||$. В этом случае, описывающем смещение света с тремя колебаниями напряженности поля, имеет место соотношение

$$\chi^{(3)}(f; f_1, f_2, f_3) = \frac{3}{2} \chi^{(3)}(f_1, f_2, f_3).$$

Примерами служат

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(3)}(f) &= \hat{P}^{(3)}(f = f_1 + f_2 + f_3) = \\ &= \frac{3}{2} \chi^{(3)}(f_1, f_2, f_3) \hat{E}(f_1) \hat{E}(f_2) \hat{E}(f_3) \end{aligned} \quad (1.21-19)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(3)}(f) &= \hat{P}^{(3)}(f = f_1 + f_2 - f_3) = \\ &= \frac{3}{2} \chi^{(3)}(f_1, f_2, -f_3) \hat{E}(f_1) \hat{E}(f_2) \hat{E}^*(f_3). \end{aligned} \quad (1.21-20)$$

В случае двух различных значений частот $|f'|$, $|f''|$ следует рассматривать три различных значения f , а именно $|2|f'|+|f''||$, $|2|f'|-|f''||$ и $|f'|$. В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(3)}(f) &= \hat{P}^{(3)}(f = 2f' + f'') = \\ &= \frac{3}{4} {}^1\kappa^{(3)}(f_1 \rightarrow f', f_2 \rightarrow f', f_3 \rightarrow f'') \hat{E}(f') \hat{E}(f') \hat{E}(f''), \quad (1.21-21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(3)}(f) &= \hat{P}^{(3)}(f = 2f' - f'') = \\ &= \frac{3}{4} {}^1\kappa^{(3)}(f_1 \rightarrow f', f_2 \rightarrow f', f_3 \rightarrow -f'') \hat{E}(f') \hat{E}(f') \hat{E}^*(f''), \quad (1.21-22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(3)}(f) &= \hat{P}^{(3)}(f = f' + f'' - f'') = \\ &= \frac{3}{2} {}^1\kappa^{(3)}(f_1 \rightarrow f', f_2 \rightarrow f'', f_3 \rightarrow -f'') \hat{E}(f') \hat{E}(f'') \hat{E}^*(f''). \quad (1.21-23) \end{aligned}$$

Из этих уравнений виден способ замены величин f_1, f_2, f_3 на f' и f'' : структура уравнений не изменится при перестановках f_1, f_2, f_3 или f', f'' . Величина $\chi^{(3)}$ снова пропорциональна ${}^1\kappa^{(3)}$; в уравнениях (1.21-21) и (1.21-22) коэффициент пропорциональности равен ${}^3/4$, тогда как в уравнении (1.21-23) он равен ${}^3/2$. Последнее уравнение применяется, например, в связи с объяснением эффекта вынужденного комбинационного рассеяния (см. § 2.4).

В случае единственного колебания напряженности поля (f') величина f может принимать два различных значения, а именно f' и $3f'$. В этом случае справедливы соотношения

$$\hat{P}^{(3)}(f') = \frac{3}{4} {}^1\kappa^{(3)}(f_1 \rightarrow f', f_2 \rightarrow f', f_3 \rightarrow -f') \hat{E}(f') \hat{E}(f') \hat{E}^*(f'), \quad (1.21-24)$$

$$\hat{P}^{(3)}(3f') = \frac{1}{4} {}^1\kappa^{(3)}(f_1 \rightarrow f', f_2 \rightarrow f', f_3 \rightarrow f') \hat{E}(f') \hat{E}(f') \hat{E}(f'). \quad (1.21-25)$$

Коэффициент пропорциональности между $\chi^{(3)}$ и ${}^1\kappa^{(3)}$ равен ${}^3/4$ или $1/4$. Первое уравнение играет существенную роль при описании самофокусировки, а второе — при получении третьей гармоники (см. § 2.2 и § 2.3).

Мы показали, что при трех различных колебаниях напряженности поля коэффициент пропорциональности между $\chi^{(3)}$ и ${}^1\kappa^{(3)}$ всегда равен ${}^3/2$, тогда как при меньшем числе колебаний он принимает значения $1/4, {}^3/4$ или ${}^3/2$. Выбор между этими значениями зависит, в частности, от числа участвующих колебаний напряженности поля и от соответствующего способа формирования частоты f . Если же эта частота может быть образована различными способами, то отдельные члены должны складываться. Из уравнений (1.21-23) и (1.21-24) видно, что при трех колебаниях напряженности поля колебание поляризации, например, с частотой f_1 может возникнуть тремя различными способами. Имеем

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(3)}(f_1) &= \frac{3}{4} {}^1\kappa^{(3)}(f_1, f_1, -f_1) \hat{E}(f_1) \hat{E}(f_1) \rho + \\ &+ \frac{3}{2} {}^1\kappa^{(3)}(f_1, f_2, -f_2) \hat{E}(f_1) \hat{E}(f_2) \rho + \\ &+ \frac{3}{2} {}^1\kappa^{(3)}(f_1, f_3, -f_3) \hat{E}(f_1) \hat{E}(f_3) \rho. \quad (1.21-26) \end{aligned}$$

Обобщая полученные результаты, можно записать для n -го порядка

$$\hat{P}^{(n)}(f) = \chi^{(n)}(f; f_1, \dots, f_n) \hat{E}(f_1) \dots \hat{E}(f_n), \quad (1.21-27)$$

где $f = f_1 + \dots + f_n$. Если число колебаний напряженности поля с различными частотами равно порядку n , то число различных значений f определяется просто: имеется 2^{n-1} возможностей. Как показано выше при подробном обсуждении второго и третьего порядков, величине $\chi^{(n)}(f; f_1, \dots, f_n)$ может быть однозначно сопоставлена величина ${}^1\kappa^{(n)}(f_1, \dots, f_n)$. Поэтому для характеристики свойств вещества могут равноправным образом использоваться величины $\chi^{(n)}(f; f_1, \dots, f_n)$ наряду с $\kappa^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ и ${}^1\kappa^{(n)}(f_1, \dots, f_n)$. Функции $\chi^{(n)}$ также называются восприимчивостями.

В общем случае коэффициент пропорциональности между $\chi^{(n)}$ и ${}^1\kappa^{(n)}$ имеет вид

$$\frac{\chi^{(n)}}{{}^1\kappa^{(n)}} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{n!}{m_1! m_{-1}! \dots m_1! m_{-1}! \dots m_a! m_{-a}!}. \quad (1.21-28)$$

При этом m_i, m_{-i} — числа амплитуд напряженности поля, принадлежащих частоте f_i или $-f_i = f_{-i}$; a — число различных частот. Числа m_i, m_{-i} удовлетворяют условию $(m_1 + m_{-1} + \dots + m_a + m_{-a}) = n$. При вычислении коэффициента пропорциональности $\chi^{(n)}/\chi^{(n)}$ частоты f_i и f_{-i} следует считать двумя различными частотами. [Вывод уравнения (1.21-28) дан в приложении 4.]

1.22. Пространственные свойства симметрии и трансформационные свойства восприимчивостей

В предыдущих разделах настоящего параграфа мы могли не принимать во внимание пространственные трансформационные свойства восприимчивостей. В этом и следующем разделах мы обратимся к вопросам, для которых именно эти свойства являются существенными; при этом мы имеем в виду различные свойства симметрии восприимчивостей.

Пространственные трансформационные свойства, которые можно установить из временного представления связи между поляризацией и напряженностью электрического поля, наблюдаются в соответствующей форме также и в частотном представлении. Если исходить из определения восприимчивости как коэффициента пропорциональности между амплитудами поляризации и напряженности поля [см. уравнение (1.21-27)], то связь между ними можно представить в виде

$$\hat{P}^{(n)}(f) = \chi^{(n)} \dots (f; f_1, \dots, f_n) \hat{E} \cdot (f_1) \dots \hat{E} \cdot (f_n). \quad (1.22-1)$$

Величины $\hat{E} \cdot (f_k)$ являются пространственно направленными комплексными амплитудами колебаний напряженности поля, удовлетворяющими соотношениям $\hat{E} \cdot (f_k) = e \cdot (f_k) \hat{E}(f_k)$ или $\hat{E} \cdot^*(f_k) = e \cdot (f_k) \hat{E}^*(f_k)$. Величины $\hat{E}(f_k)$ определены в уравнении (1.21-6), а единичные векторы $e \cdot (f_k)$ определяют направления. Аналогичные соотношения имеют место для соответствующих поляризаций $\hat{P} \cdot (f_k)$.

Восприимчивость n -го порядка представляет собой тензор $(n+1)$ -го ранга, имеющий 3^{n+1} компонент. Эти компоненты являются комплексными величинами, и поэтому при фиксированных значениях всех частот тензор

характеризуется в общем случае $2 \cdot 3^{n+1}$ вещественными числами. Вследствие свойств симметрии не все из этих величин независимы. Эти свойства, с одной стороны, определяются общими законами природы, например наблюдением временного аспекта причинно-следственной связи (см. разд. 1.12), а с другой — зависят от конкретных свойств исследуемых веществ (например, наличия определенных свойств пространственной симметрии). Эти свойства симметрии отображаются в тензорных индексах, которые мы поэтому в дальнейшем будем выписывать в явном виде.

Важное свойство симметрии, вытекающее из вещественности величин $E \cdot (t)$ и $P \cdot (t)$, уже было выведено в разд. 1.13. Из уравнения (1.13-10) следует

$$\chi_{ij \dots a}^{(n)}(-f; -f_1, \dots, -f_n) = \chi_{ij \dots a}^{(n)*}(f; f_1, \dots, f_n), \quad (1.22-2)$$

т. е. вещественная и мнимая части каждой компоненты тензора восприимчивости являются соответственно четной и нечетной функциями частот. Кроме того, из уравнения (1.22-1) непосредственно видно, что в выражении для $\chi^{(n)}$ можно обменивать местами частоты после точки с запятой при одновременной перестановке соответствующих тензорных индексов. Например,

$$\chi_{ijk \dots a}^{(n)}(f; f_1, f_2, \dots, f_n) = \chi_{ikj \dots a}^{(n)}(f; f_2, f_1, \dots, f_n). \quad (1.22-3)$$

Исследуем теперь влияние пространственных трансформационных свойств на нелинейные восприимчивости.

Преобразование декартовых координат $\xi'_a = (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) = (x', y', z')$ и $\xi_i = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (x, y, z)$, состоящее из комбинации вращения и инверсии (фиг. 6), по определению имеет вид

$$\xi'_a = \sum_i s_{ai} \xi_i. \quad (1.22-4)$$

Компоненты восприимчивости $\chi_{abc \dots g}^{(n)}$ в штрихованной системе координат связаны с компонентами в нештрихованной системе $\chi_{ij \dots a}^{(n)}$ следующим образом:

$$\chi_{ab \dots g}^{(n)} = \sum_{i, j, \dots, a} s_{ai} s_{bj} \dots s_{gq} \chi_{ij \dots a}^{(n)}. \quad (1.22-5)$$

Следовательно, величина $\chi_{ij \dots q}^{(n)}$ преобразуется как тензор $(n+1)$ -го ранга аналогично $(n+1)$ -кратному произведению координат $\xi_i \xi_j \dots \xi_q$.

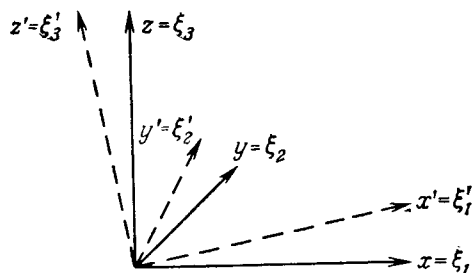
Если преобразование S_{ai} идентично преобразованию симметрии S_{ai} исследуемой системы, то должно выполняться соотношение

$$\chi_{ab \dots g}^{(n)} = \chi_{ab \dots g}^{(n)} \quad (1.22-6)$$

ибо, согласно определению, при этом все физические свойства должны оставаться неизменными. Отсюда следует

$$\chi_{ab \dots g}^{(n)} = \sum_{i, j, \dots, q} S_{ai} S_{bj} \dots S_{gq} \chi_{ij \dots q}^{(n)} \quad (1.22-7)$$

Если известны все преобразования точечной симметрии исследуемой системы, например кристалла, то можно



Фиг. 6. Преобразование системы координат от (ξ_1, ξ_2, ξ_3) к (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3) .

составить соответствующее число соотношений вида (1.22-7) между компонентами восприимчивости. В качестве примера опишем сначала действие инверсии, которая представляется операцией

$$S_{ai} = -\delta_{ai} \quad (1.22-8)$$

при $\delta_{ai} = 1$ для $a = i$ и $\delta_{ai} = 0$ для $a \neq i$. Подставляя S_{ai} из (1.22-8) в уравнение (1.22-7), найдем, что для четных порядков должно соблюдаться условие

$$\chi_{ab \dots g}^{(n)} = -\chi_{ab \dots g}^{(n)} = 0. \quad (1.22-9)$$

Следовательно, в системе с центром инверсии в четном порядке не могут иметь места какие-либо нелинейные эффекты. Одиннадцать классов кристаллов, а также микроскопически неупорядоченные системы, например газы и жидкости, обладают центром инверсии и поэтому в них обнаруживаются нелинейные явления только в нечетных порядках. Чтобы сделать это утверждение наглядным, рассмотрим частный случай создания поляризации на частоте $n\hat{f}$ (n — целое число) под действием напряженности электрического поля с частотой \hat{f}

$$\hat{P} \cdot (n\hat{f}) = \chi_{\dots}^{(n)} \dots \hat{E} \cdot (f) \dots \hat{E} \cdot (f). \quad (1.22-10)$$

При инверсии векторы \hat{E} и \hat{P} меняют знак. Поскольку в кристаллах с центром инверсии величина $\chi_{\dots}^{(n)}$ при этой операции остается неизменной, то величина $\hat{P} \cdot (n\hat{f})$ должна обратиться в нуль при четных n . Следует заметить также, что при наложении внешнего постоянного электрического поля инверсионная симметрия нарушается и таким способом можно создать поляризацию с частотой, кратной основной частоте.

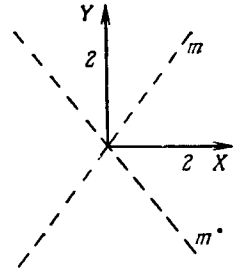
В дальнейшем мы рассмотрим несколько подробнее некоторые примеры нелинейных восприимчивостей низшего, т. е. второго, порядка. При этом будет указано на тот часто используемый в литературе факт, что между нелинейными оптическими восприимчивостями второго порядка существуют такие же соотношения симметрии, как и между пьезоэлектрическими материальными параметрами. Пьезоэлектрический эффект также описывается тензором третьего ранга; поэтому между компонентами этого тензора существуют такие же зависимости, какие следуют из уравнения (1.22-7) для нелинейных восприимчивостей второго порядка. Например, все вещества с центром инверсии не являются пьезоэлектрическими. В табл. 1 приведены кристаллы двадцати одного класса, не имеющие центра инверсии. Некоторые важные кристаллы, обнаруживающие нелинейные оптические эффекты второго порядка, указаны в последнем столбце таблицы. Обратим внимание на то, что, хотя класс 432 (0) не обладает центром инверсии, все компоненты пьезоэлектрического тензора и все нелинейные

Таблица 1. Классы кристаллов без центра инверсии

Кристаллическая система	Оптическая анизотропия	Классы кристаллов		Примеры веществ
		международное обозначение	обозначение по Шенфлюсу	
Триклинная Моноклиная Ромбическая	Двуосные кристаллы	1	C_1	Иодная кислота (HIO_3)
		2	C_2	Сегнетова соль ($\text{KOC}-\text{CHON}-\text{CHON}-\text{COONa} \cdot 4\text{H}_2\text{O}$)
Ромбическая Тригональная	Трехосные кристаллы	m	$C_{2h}(C_2)$	Нитрат натрия (NaNO_2)
		222	$D_2(V)$	β -кварц (SiO_2); теллур (Te) Ниобат лития (LiNbO_3)
Тетрагональная	Одноосные кристаллы	3	C_{2v}	Титанат бария (BaTiO_3) KDP(KH_2PO_4) ADP($\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$)
		32	C_4	
		3m	C_{4v}	
		4	$D_2(D_2)$	
Гексагональная	Одноосные кристаллы	4	S_6	α -кварц (SiO_2) Сульфид кадмия (CdS)
		422	D_3	
Кубическая	Изотропные кристаллы	4mm	C_{3v}	Хлорат натрия (NaClO_3) Арсенид галлия (GaAs)
		42m	C_{2v}	
		6	C_6	
		6	C_{3h}	
		622	D_6	
		6mm	C_{6v}	
		6m2	D_{3h}	
		23	T	
		43m	T_d	
		432	O	

восприимчивости второго порядка в данном случае обращаются в нуль вследствие других трансформационных свойств симметрии.

Влияние других элементов симметрии на восприимчивость $\chi_{\dots}^{(2)}$ ($2f$; f , f), описывающую возникновение второй гармоники, мы исследуем на примере точечной группы $42m(D_{2d})$. К ней, например, принадлежат KDP и ADP. Эти два вещества имеют важное значение в НЛО (см. гл. 3). В частности, на этом примере (см. также разд. 1.23) мы покажем, что вследствие свойств симметрии сильно уменьшается число независимых компонент восприимчивости. Группа $42m$ содержит три взаимно перпендикулярные оси симметрии второго порядка, которые можно выбрать за оси некоторой декартовой системы координат XYZ ; к ним следует добавить две плоскости симметрии m , проходящие через одну из осей (в данном случае через ось Z) и делящие пополам угол между двумя другими осями (фиг. 7). При вращении на 180° вокруг осей симметрии изменяются знаки двух координат.



Фиг. 7. Положение элементов симметрии в кристалле точечной группы $42m$.

2 — ось второго порядка; m — плоскость отражения.

Поскольку восприимчивость $\chi_{abc}^{(2)}$ преобразуется как ξ_a, ξ_b, ξ_c , то должны обратиться в нуль все компоненты тензора, у которых не все индексы различны. Из шести компонент с $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ существуют три пары, равные друг другу вследствие уравнения (1.22-3), т. е.

$$\chi_{XYZ}^{(2)} = \chi_{XZY}^{(2)}; \quad \chi_{ZXY}^{(2)} = \chi_{ZYX}^{(2)}; \quad \chi_{YZX}^{(2)} = \chi_{YXZ}^{(2)}. \quad (1.22-11)$$

При отражении в одной из плоскостей симметрии координаты X и Y переходят друг в друга, тогда как Z сохраняется. Поэтому все компоненты $\chi^{(2)}$, которые переходят друг в друга при перестановке индексов X, Y , должны быть равными. Отсюда и из уравнения (1.22-11) следует

$$\chi_{XYZ}^{(2)} = \chi_{XZY}^{(2)} = \chi_{YZX}^{(2)} = \chi_{YXZ}^{(2)}; \quad \chi_{ZXY}^{(2)} = \chi_{ZYX}^{(2)}. \quad (1.22-12)$$

В нашем примере точечной группы $\bar{4}2m$, таким образом, только две компоненты восприимчивости $\chi^{(2)} \dots (2f; f, f)$ из двадцати семи независимы друг от друга и отличны от нуля.

Для упрощения обозначений компонент восприимчивости второго порядка мы применим теперь следующее сокращение, введенное В. Фойхтом и часто используемое в НЛО:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(2f; f, f) = d_{mn}(2f; f, f). \quad (1.22-13)$$

Индексы здесь имеют следующий смысл:

m	1	2	3	и	n	1	2	3	4	5	6
I	X	Y	Z		JK	XX	YY	ZZ	ZY	ZX	XY
									YZ	XZ	YX

В этой сокращенной записи уже учтена симметрия, вытекающая из уравнения (1.22-3). Указанные в уравнении (1.22-12) отличные от нуля компоненты восприимчивости для точечной группы $\bar{4}2m$ при этом запишутся в виде

$$d_{14} = d_{25} \quad \text{и} \quad d_{36}. \quad (1.22-14)$$

Для амплитуд поляризации \vec{P} . ($2f$) во втором порядке при облучении электрическим полем с амплитудой \vec{E} . (f) получим

$$\begin{aligned} \hat{P}_X(2f) &= 2d_{14}(2f; f, f) \hat{E}_Y(f) \hat{E}_Z(f), \\ \hat{P}_Y(2f) &= 2d_{14}(2f; f, f) \hat{E}_Z(f) \hat{E}_X(f), \\ \hat{P}_Z(2f) &= 2d_{36}(2f; f, f) \hat{E}_X(f) \hat{E}_Y(f). \end{aligned} \quad (1.22-15)$$

Множитель 2 в уравнении (1.22-15) возникает вследствие суммирования членов с $\hat{E}_j \hat{E}_j$ и $\hat{E}_j \hat{E}_j$.

Для оставшихся независимых компонент восприимчивости

$$[d_{14}(2f; f, f) \quad \text{и} \quad d_{36}(2f; f, f)]$$

некоторых представителей точечной группы $\bar{4}2m$ (см. [4]) мы приведем теперь экспериментально найденные значения, чтобы получить представление о порядках величин нелинейных восприимчивостей.

Позднее, в гл. 2 мы вычислим нелинейные восприимчивости на основании некоторых моделей и таким путем найдем их связь с другими параметрами модельной среды. Типичные значения этих параметров мы сравним по порядку величины с приведенными здесь экспериментальными результатами (см. § 2.2).

Нелинейные восприимчивости второго порядка часто определяются и измеряются по отношению к компоненте d_{36} кристалла KDP (см. табл. 2). Абсолютное значение

Таблица 2. Восприимчивости для получения второй гармоники

Вещество	Длина волны возбуждающего излучения, мкм	$\frac{d_{mn}}{d_{36}^{\text{KDP}}}$
KDP	0,69	d_{36} 1
	1,06	d_{14} $0,95 \pm 0,06$ d_{36} 1
ADP	1,06	d_{14} 1,01 d_{36} $0,93 \pm 0,06$
	1,06	d_{14} $0,89 \pm 0,04$ d_{22} $6,3 \pm 0,6$
LiNbO ₃	1,06	d_{31} $11,9 \pm 1,7$ d_{31} 35 ± 2
	1,06	d_{15} 32 ± 2 d_{33} 63 ± 4
GaAs	1,06	d_{14} 560 ± 140
	10,6	d_{14} 294 ± 100
Se	10,6	d_{11} 63 ± 33
	10,6	d_{14} 4230 ± 670

этой компоненты в случае получения второй гармоники линии гелий-неонового лазера ($\lambda = 0,6328$ мкм) равно

$$d_{36}^{\text{KDP}} = (1,1 \pm 0,3) \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{с/В}^2.$$

Заканчивая рассмотрение нелинейных восприимчивостей второго порядка, мы исследуем еще один важный для многих применений частный случай восприимчивостей высшего порядка: нелинейные восприимчивости третьего

порядка в изотропных средах. Эти величины проявляются, например, при самофокусировке, а также при вынужденном комбинационном и бриллюэновском рассеянии в жидкостях. Мы рассмотрим условия, при которых все частотные компоненты векторов напряженности поля и поляризации находятся в одной плоскости, допустим, в плоскости (x, y) . Восприимчивости третьего порядка $\chi_{\dots}^{(3)}$ имеют в этом случае (в двумерном пространстве) 16 компонент. Вследствие изотропии среды этот тензор должен быть инвариантным относительно всех вращений и отражений. Сначала мы применим некоторые выделенные вращения и отражения, что позволит наиболее простым путем установить некоторую часть соотношений между компонентами тензора и, в частности, определить компоненты, равные нулю. Для этой цели мы прежде всего перейдем к новой системе координат путем отражения в плоскости (y, z) . Матрица преобразования S_{ia} , в которой i и a могут принимать только значения x, y или x', y' , при этом имеет вид

$$\begin{pmatrix} S'_{xx} & S'_{xy} \\ S'_{yx} & S'_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.22-16)$$

При подстановке этих матричных элементов в соотношение

$$\chi_{ijkl}^{(3)} = \sum_{a, b, c, d} S_{ia} S_{jb} S_{kc} S_{ld} \chi_{abcd}^{(3)} \quad (1.22-17)$$

становится очевидным, что компоненты $\chi_{abcd}^{(3)}$ могут быть отличными от нуля лишь при четном числе индексов x . Аналогичный вывод следует для индексов y из отражения в плоскости (x, z) , т. е.

$$\begin{aligned} \chi_{xxxy}^{(3)} = \chi_{xxyx}^{(3)} = \chi_{xyxx}^{(3)} = \chi_{yxxx}^{(3)} = \chi_{xyyy}^{(3)} = \chi_{yxyy}^{(3)} = \\ = \chi_{yyxy}^{(3)} = \chi_{yyyx}^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (1.22-18)$$

При вращении на 90° вокруг оси z матрица преобразования S_{ia} принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя ее компоненты в уравнение (1.22-17), получаем соотношения

$$\begin{aligned} \chi_{xxxx}^{(3)} = \chi_{yyyy}^{(3)}, \quad \chi_{xxyy}^{(3)} = \chi_{yyxx}^{(3)}, \\ \chi_{xyxy}^{(3)} = \chi_{yxyx}^{(3)}, \quad \chi_{xyyx}^{(3)} = \chi_{yxxy}^{(3)}. \end{aligned} \quad (1.22-19)$$

После этих упрощений легко найти результат общего вращения вокруг оси z на угол Φ_z с матрицей преобразования

$$\begin{pmatrix} \cos \Phi_z & -\sin \Phi_z \\ \sin \Phi_z & \cos \Phi_z \end{pmatrix}.$$

Если подставить эти матричные элементы в уравнение (1.22-17) и принять во внимание уравнения (1.22-18) и (1.22-19), то, например, для $\chi_{xxxx}^{(3)}$ получим

$$\begin{aligned} \chi_{xxxx}^{(3)} = (\cos^4 \Phi_z + \sin^4 \Phi_z) \chi_{xxxx}^{(3)} + 2 \cos^2 \Phi_z \sin^2 \Phi_z \times \\ \times (\chi_{xxyy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)}). \end{aligned} \quad (1.22-20)$$

Это соотношение может выполняться для любых углов Φ_z только при условии

$$\chi_{xxxx}^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)}. \quad (1.22-21)$$

Другие соотношения, вытекающие из уравнения (1.22-17) для общего вращения, не приводят к каким-либо новым следствиям для компонент восприимчивости и вновь сводятся к уравнению (1.22-21). Таким образом, в изотропной среде существуют в общем случае три независимые компоненты восприимчивости третьего порядка.

Учитывая эти свойства симметрии, представим в проекциях связь

$$\hat{P}_i^{(3)} = \sum_{j, k, l} \chi_{ijkl}^{(3)}(f; f_1, f_2, f_3) \hat{E}_j(f_1) \hat{E}_k(f_2) \hat{E}_l(f_3) \quad (1.22-22)$$

между амплитудой поляризации на частоте $f = f_1 + f_2 + f_3$ и амплитудами $\hat{E}_j(f_1)$, $\hat{E}_k(f_2)$, $\hat{E}_l(f_3)$ напряженности поля. При сокращенных обозначениях

$$\begin{aligned} \chi_1^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)}(f; f_1, f_2, f_3) = \chi_{yyxx}^{(3)}(f; f_1, f_2, f_3), \\ \chi_2^{(3)} = \chi_{xyxy}^{(3)}(f; f_1, f_2, f_3) = \chi_{yxyx}^{(3)}(f; f_1, f_2, f_3), \\ \chi_3^{(3)} = \chi_{xyyx}^{(3)}(f; f_1, f_2, f_3) = \chi_{yxxy}^{(3)}(f; f_1, f_2, f_3) \end{aligned} \quad (1.22-23)$$

получим

$$\begin{aligned} \hat{P}_x^{(3)}(f) = & (\chi_1^{(3)} + \chi_2^{(3)} + \chi_3^{(3)}) \hat{E}_x(f_1) \hat{E}_x(f_2) \hat{E}_x(f_3) + \\ & + \chi_1^{(3)} \hat{E}_x(f_1) \hat{E}_y(f_2) \hat{E}_y(f_3) + \chi_2^{(3)} \hat{E}_y(f_1) \hat{E}_x(f_2) \hat{E}_y(f_3) + \\ & + \chi_3^{(3)} \hat{E}_y(f_1) \hat{E}_y(f_2) \hat{E}_x(f_3), \end{aligned} \quad (1.22-24)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_y^{(3)}(f) = & (\chi_1^{(3)} + \chi_2^{(3)} + \chi_3^{(3)}) \hat{E}_y(f_1) \hat{E}_y(f_2) \hat{E}_y(f_3) + \\ & + \chi_1^{(3)} \hat{E}_y(f_1) \hat{E}_x(f_2) \hat{E}_x(f_3) + \chi_2^{(3)} \hat{E}_x(f_1) \hat{E}_y(f_2) \hat{E}_x(f_3) + \\ & + \chi_3^{(3)} \hat{E}_x(f_1) \hat{E}_x(f_2) \hat{E}_y(f_3). \end{aligned}$$

Оба уравнения можно объединить:

$$\begin{aligned} \hat{P}_i^{(3)}(f) = & \sum_{j=1}^2 [\chi_1^{(3)} [\hat{E}_j(f_2) \hat{E}_j(f_3)] \hat{E}_i(f_1) + \\ & + \chi_2^{(3)} [\hat{E}_i(f_1) \hat{E}_i(f_3)] \hat{E}_j(f_2) + \chi_3^{(3)} [\hat{E}_j(f_1) \hat{E}_j(f_2)] \hat{E}_i(f_3)]. \end{aligned} \quad (1.22-25)$$

Следовательно, амплитуда поляризации складывается аддитивно из трех векторов, возникающих в результате умножения одной из трех амплитуд напряженности поля на некоторый скаляр. Скалярные множители зависят как от нелинейных материальных параметров $\chi_1^{(3)}$, $\chi_2^{(3)}$, $\chi_3^{(3)}$, так и от скалярных произведений двух других амплитуд напряженности поля.

1.23. Свойства симметрии в средах без потерь

В разд. 1.11 при выводе фундаментального материального уравнения было доказано, что возникновение объемной поляризации под действием внешнего поля сопровождается потерями энергии. Они находят отражение в функциях восприимчивости. Обсудим предварительно эти потери. В последующих рассуждениях мы ограничимся стационарными процессами; при таких процессах содержание энергии в элементе объема в среднем не меняется во времени, поскольку приток энергии компенсируется ее отдачей.

Мы будем рассматривать зависящие от времени поля, которые могут быть представлены конечной суммой периодических временных функций в форме уравнения

(1.21-6). Тогда усреднение по времени следует провести за промежуток времени T , достаточно большой по сравнению с $1/f_l$ и $1/|f_l - f_m|$ при всех l, m .

Электромагнитная энергия, поступающая за единицу времени в элемент объема, равна $(-\nabla \cdot \mathbf{S})$, где \mathbf{S} — вектор Пойнтинга. Обозначим через \mathcal{W} или \mathcal{A} количество тепла или работы, подводимое в единицу времени к элементу объема. При стационарных процессах между средними значениями этих величин существует соотношение

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle = \langle \mathcal{W} \rangle + \langle \mathcal{A} \rangle. \quad (1.23-1)$$

При описании изменения электромагнитной энергии в рассматриваемом элементе объема диэлектрика при процессах НЛО величины $\langle -\mathcal{W} \rangle$ и $\langle -\mathcal{A} \rangle$ равноправным образом рассматриваются как «потери» в системе, состоящей из диэлектрика и электромагнитного излучения. В этом смысле процессы, при которых

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle = 0, \quad (1.23-2)$$

считаются свободными от потерь.

Следует отметить, что усиление или ослабление отдельных компонент из набора частот непосредственно связано с соблюдением условия (1.23-2). Однако усиление или ослабление могут происходить лишь за счет других компонент (см. § 1.3).

Для наглядности рассмотрим некоторые примеры процессов без потерь и с потерями. При получении гармоник (см. § 3.2) и при параметрическом взаимодействии волн (см. § 3.3) можно считать в хорошем приближении, что в области прозрачности диэлектрика $\langle \mathcal{W} \rangle = \langle \mathcal{A} \rangle = 0$, а следовательно, и $\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle = 0$, так что эти процессы протекают без потерь. Напротив, при комбинационном рассеянии, например, происходит частичное преобразование энергии излучения в другие формы энергии, в частности в теплоту, т. е. $\langle \mathcal{W} \rangle \neq 0$ (см. § 4.2). При рассеянии Бриллюэна (см. § 4.3) часть энергии излучения преобразуется в механическую энергию (звуковую энергию), и при этом $\langle \mathcal{A} \rangle \neq 0$.

Для процессов без потерь восприимчивости обладают дополнительными свойствами симметрии, помимо рассмотренных в разд. 1.22. Мы опишем их ниже.

1.231. Обращение времени

Исследуем влияние обращения времени на характеристические величины среды, т. е. на восприимчивости. Исходным пунктом для наших рассуждений послужит модель, описанная в разд. 1.111. Связь между одной компонентой смещения $x(t)$ точечного заряда и действующей внешней силой $K(t)$ была задана уравнением (1.11-6), которое можно представить в форме

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + a_1 \frac{d}{dt} x(t) + c_1 x(t) + c_2 x^2(t) + c_3 x^3(t) + \dots = \tilde{c} K(t), \quad (1.23-3)$$

где $a_1, c_1, c_2, c_3, \dots, \tilde{c}$ — константы. Для исследуемых в настоящем разделе процессов без потерь следует положить константу a_1 равной нулю, поскольку мы пренебрегаем трением. В соответствии с методом, принятым в классической механике, применим к уравнению движения операцию обращения времени U . Это означает, что в членах, содержащих x или производные от x по времени, следует заменить t на $-t$. Если, применяя эту операцию, одновременно заменить внешнюю силу $K(t)$ на $K(-t)$, то вытекающая из уравнения движения функциональная зависимость между x и K обнаруживает определенные свойства симметрии.

Отдельные члены в левой части уравнения (1.23-3) при применении операции U преобразуются следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} U \left\{ \frac{d^2}{dx^2} x(t) \right\} &= \frac{d^2}{dt^2} U \{x(t)\} = \frac{d^2}{dt^2} x(-t), \\ U \{C_1 x^j(t)\} &= C_1 x^j(-t). \end{aligned} \right.$$

Действующая извне сила $K(t)$ в нашем случае равна произведению заряда q_e на напряженность электрического поля $E(t)$. Как видно из трансформационных свойств уравнений Максвелла, применение операции обращения времени к $E(t)$ приводит к соотношению

$$UE(t) = E(-t).$$

В соответствии с этим правая часть уравнения (1.23-3) преобразуется следующим образом:

$$U\{\tilde{c}K(t)\} = \tilde{c}q_e U\{E(t)\} = \tilde{c}q_e E(-t).$$

Из результата преобразования видно, что $x(-t)$ зависит от $E(-t)$ точно так же, как $x(t)$ зависит от $E(t)$. (Не пренебрегая членом с трением dx/dt , это свойство симметрии нельзя было бы получить.) При предположении разд. 1.111, которые не ограничивают общность наших рассуждений, смещение $x(t)$ пропорционально $P(t)$, так что мы (переходя сразу к многокомпонентным величинам) приходим к следующему результату: $P.(-t)$ зависит от $E.(-t)$ точно так же, как $P.(t)$ зависит от $E.(t)$.

Действие операции U можно представить как преобразование \mathcal{U} в частотном представлении, причем \mathcal{U} определяется равенством

$$U\{F(t)\} = \text{ПФ}\{\mathcal{U}'F(f)\}, \quad (1.23-4)$$

где $F(t)$ — произвольная функция. Из этого уравнения следует, что

$$\mathcal{U}'F(f) = {}^1F(-f),$$

поскольку

$$\begin{aligned} \text{ПФ}\{{}^1F(-f)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} df e^{i2\pi ft} {}^1F(-f) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} df e^{-i2\pi ft} {}^1F(f) = F(-t). \end{aligned} \quad (1.23-5)$$

Из разд. 1.13 следует связь между поляризацией и напряженностью поля в частотном представлении в n -м порядке:

$$\begin{aligned} {}^1P^{(n)}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} df_{n-1} {}^1\chi^{(n)} \dots (f_1, \dots, f_n) \times \\ &\quad \times {}^1E.(f_1) \dots {}^1E.(f_n). \end{aligned} \quad (1.23-6)$$

Поскольку зависимости между $P.(-t)$ и $E.(-t)$ и $P.(t)$ и $E.(t)$ одинаковы, то из уравнения (1.23-6) вытекает

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\{{}^1P^{(n)}(f)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} df_{n-1} {}^1\chi^{(n)} \dots (f_1, \dots, f_n) \times \\ &\quad \times \mathcal{U}\{{}^1E.(f_1)\} \dots \mathcal{U}\{{}^1E.(f_n)\}. \end{aligned} \quad (1.23-7)$$

Последнее уравнение равнозначно следующему:

$${}^1P^{(n)}(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} df_{n-1} {}^1\chi^{(n)} \dots (f_1, \dots, f_n) \times \\ \times {}^1E.(-f_1) \dots {}^1E.(-f_n). \quad (1.23-8)$$

Так как $P(t)$ и $E(t)$ являются вещественными функциями, то из уравнения (1.13-10) следует, что ${}^1P^{(n)}(-f) = {}^1P^{(n)*}(f)$ и ${}^1E.(-f_i) = {}^1E.*(f_i)$. Поэтому из (1.23-6) и (1.23-8) имеем

$${}^1\chi^{(n)*} \dots (f_1, \dots, f_n) = {}^1\chi^{(n)} \dots (f_1, \dots, f_n), \quad (1.23-9)$$

поскольку соотношения (1.23-6) и (1.23-8) должны выполняться для любых $E(t)$. Так как величина ${}^1\chi^{(n)}$ пропорциональна $\chi^{(n)}$, то уравнение (1.23-9) дает

$$\chi^{(n)*} \dots (f; f_1, \dots, f_n) = \chi^{(n)} \dots (f; f_1, \dots, f_n). \quad (1.23-10)$$

Мы приходим к выводу, что для процессов без потерь восприимчивости любого порядка являются вещественными величинами.

1.232. Пространственно-частотные преобразования

Здесь мы рассмотрим в дополнение к уравнению (1.22-3) дальнейшие соотношения симметрии между компонентами восприимчивости для процессов без потерь, основанные на одновременных перестановках тензорных индексов и частот. Для простоты мы ограничимся при этом представлением для нелинейных восприимчивостей второго порядка, которое легко обобщается на случай произвольного порядка n .

Из уравнений Максвелла следует для диэлектрика закон Пойнтинга (при проводимости, равной нулю) в форме

$$\nabla \cdot (E \times H) = \nabla \cdot S = -E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} - H \cdot \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (1.23-11)$$

Предположим, что полевые величины E , H , $B = \mu_0 H$, $D = \epsilon_0 e^{(Л)} E + P^{(Л)}$ (вещественная величина) и $P^{(Л)}$ могут быть представлены в виде конечной суммы пе-

риодических функций времени в соответствии с уравнением (1.21-6). Тогда из уравнений (1.23-2) и (1.23-11) в результате усреднения по времени (подробное объяснение см. в разд. 1.31) получим

$$\left\langle E \cdot \frac{\partial P^{(Л)}}{\partial t} \right\rangle = 0, \quad (1.23-12)$$

и при a различных частотных вкладах в поляризацию и напряженность поля

$$\sum_{i=1}^a f_i [\hat{E} \cdot (f_i) \hat{P}^{(Л)*}(f_i) - \hat{E} \cdot (f_i) \hat{P}^{(Л)}(f_i)] = 0. \quad (1.23-13)$$

Рассмотрим теперь процесс, в котором участвуют только напряженность электрического поля и поляризация с тремя частотами $|f_1|$, $|f_2|$, $|f_3|$, причем положим

$$f_1 = f_2 + f_3, \quad |f_2| \neq f_3.$$

В уравнение (1.23-13) подставим компоненты амплитуд поляризации:

$$\hat{P}_i^{(Л)}(f_1) = \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) \hat{E}_j(f_2) \hat{E}_k(f_3),$$

$$\hat{P}_i^{(Л)}(f_2) = \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)}(f_2; f_1 - f_3) \hat{E}_j(f_1) \hat{E}_k(f_3), \quad (1.23-14)$$

$$\hat{P}_i^{(Л)}(f_3) = \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)}(f_3; -f_2, f_1) \hat{E}_j(f_2) \hat{E}_k(f_1).$$

Если учесть, что, согласно уравнению (1.23-10), величина $\chi^{(2)}$ вещественна, и изменить обозначения дважды встречающихся индексов i, j, k , по которым выполняется суммирование, то получим

$$\sum_{i,j,k} [f_1 \chi_{ijk}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) - f_2 \chi_{jik}^{(2)}(f_2; f_1, -f_3) - f_3 \chi_{kji}^{(2)}(f_3; -f_2, f_1)] \times \\ \times [\hat{E}_i(f_1) \hat{E}_j^*(f_2) \hat{E}_k^*(f_3) - \hat{E}_i^*(f_1) \hat{E}_j(f_2) \hat{E}_k(f_3)] = 0. \quad (1.23-15)$$

Чтобы это уравнение было справедливо для произвольных значений амплитуд, необходимо выполнение условия

$$f_1 \chi_{ijk}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) - f_2 \chi_{jik}^{(2)}(f_2; f_1 - f_3) - f_3 \chi_{kji}^{(2)}(f_3; -f_2, f_1) = 0. \quad (1.23-16)$$

Подстановка $f_1 = f_2 + f_3$ в уравнение (1.23-16) и условие его применимости при любых соотношениях между f_2 и f_3 позволяют вывести соотношения симметрии

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) &= \chi_{ijk}^{(2)}(f_2; f_1, -f_3) = \chi_{ijk}^{(2)}(-f_2; -f_1, f_3), \\ \chi_{ijk}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) &= \chi_{kji}^{(2)}(f_3; -f_2, f_1) = \chi_{kji}^{(2)}(-f_3; f_2, -f_1). \end{aligned} \quad (1.23-17)$$

Они часто называются пространственно-частотными преобразованиями, поскольку, как сказано выше, эти соотношения определяют симметрию при одновременной перестановке частот и пространственных индексов. Из уравнений (1.23-17) и (1.22-3) следует, что в среде без потерь величина $\chi^{(2)}$ инвариантна относительно любой перестановки индексов, если одновременно соответствующим образом переставляются частоты. При этом следует иметь в виду, что знак двух частот изменяется, если частоты разделены точкой с запятой или если переставляется частота амплитуды поляризации.

Если в среде играют роль только компоненты напряженности поля и поляризации с частотами $|f|$ и $|2f|$, то можно провести аналогичные рассуждения, исходя из уравнения (1.23-13). В результате, например, получим

$$2\chi_{ijk}^{(2)}(2f; f, f) = \chi_{ijk}^{(2)}(j; 2f, -f). \quad (1.23-18)$$

Если можно пренебречь дисперсией (частотной зависимостью) восприимчивостей χ в области частот f_1, f_2, f_3 , то из уравнений (1.22-3) и (1.23-17) получаются простые соотношения симметрии, которые принято называть соотношениями Клейнмана. При этом допущении можно переставлять любые тензорные индексы (при сохранении порядка расположения частот) без изменения значения восприимчивости:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) = \chi_{jik}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) \text{ и т. д.} \quad (1.23-19)$$

Для кристаллической группы $\bar{4}2m$ отсюда следует, например в обозначениях уравнения (1.22-13)

$$d_{14}(2f; f, f) = d_{36}(2f; f, f). \quad (1.23-20)$$

Как видно из табл. 2, это соотношение выполняется для ADP и KDP с точностью до нескольких процентов. Даже

при приближенном соблюдении соотношений Клейнмана они часто оказываются полезными для оценки восприимчивостей по порядку величины.

§ 1.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

В § 1.1 мы изучили структуру фундаментального материального уравнения $P.(E)$ в НЛО. Теперь применим это соотношение к анализу следствий, вытекающих из его типичных нелинейных свойств для электромагнитных процессов в нелинейной среде. Для решения этой задачи мы должны привлечь уравнения Максвелла, в которые поляризация входит через электрическое смещение. Необходимо решить вытекающее из уравнений Максвелла волновое уравнение при учете в общем случае нелинейного соотношения между поляризацией и напряженностью поля и при заданных граничных условиях. Это означает, что следует искать решения, удовлетворяющие этим дифференциальным уравнениям в *протяженной* пространственно-временной области; о них пойдет речь в разд. 1.32. Некоторые предсказания об эффектах излучения в НЛО можно сделать уже при помощи сравнительно простого метода, в котором исходят из соотношений только в *одном* элементе объема; такой способ рассмотрения будет представлен в разд. 1.31.

Вначале мы рассмотрим влияние свойств вещества на протекание электромагнитных процессов. Для определенности проведем наши рассуждения для простой модели, в качестве которой выберем описанную в разд. 1.11 модель точечного заряда. В смысле перехода к макроскопической электродинамике нам следовало бы для вывода соотношения $P.(E.)$ произвести усреднение поля E' , существующего между точечными зарядами. Соответствующий процесс усреднения необходимо провести также при установлении соотношений, представляющих пространственно-временную связь макроскопически проявляющихся величин электромагнитного поля.

Будем исходить из уравнений, определяющих «микроскопическое» электрическое поле E' и аналогичное микроскопическое магнитное поле H' . Эти поля

удовлетворяют уравнениям Максвелла в вакууме, к которым добавляется член, представляющий конвекционный ток точечных зарядов. С микроскопической точки зрения поля E' и H' претерпевают большие изменения в пространстве и во времени в пределах одного атома, тогда как при макроскопическом подходе эти поля должны рассматриваться как нерегулярные. Переход к макроскопически проявляющимся величинам E , D , H , B должен быть совершен путем пространственно-временного усреднения $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ по объему V' и за время T' , т. е. путем некоторого процесса сглаживания. При заданных V' и T' операция усреднения перестановочна с операциями дифференцирования по пространственным переменным и по времени. Поэтому входящие в определяющие уравнения для E' и H' производные можно заменить следующим образом:

$$\langle\langle \nabla \times E' \rangle\rangle = \nabla \times \langle\langle E' \rangle\rangle = \nabla \times E, \quad (1.3-1)$$

$$\left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial t} E' \right\rangle\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle E' \rangle\rangle = \frac{\partial}{\partial t} E.$$

(аналогичное справедливо для H). Если принять во внимание тот факт, что в пренебрежении током проводимости усредненная плотность конвекционного тока равна $(\partial/\partial t)P$, то на основании вышеизложенных рассуждений из определяющих уравнений для E' и H' следуют соотношения

$$\nabla \times H = \frac{\partial}{\partial t} D, \quad (1.3-2)$$

$$\nabla \times E = - \frac{\partial}{\partial t} B. \quad (1.3-3)$$

для макроскопических полей. Независимо от того, используется или нет модель точечных зарядов, уравнения (1.3-2) и (1.3-3) применимы к описанию электромагнитных процессов, причем поля определены на основании процесса сглаживания. Предполагается, что (макроскопическая) проводимость среды равна нулю.

Сопоставление решения уравнений Максвелла (1.3-2) и (1.3-3) с макроскопическими наблюдениями имеет физический смысл лишь в том случае, если они не зависят от специального выбора V' и T' . Это условие может соблюдаться только в случае, если T' и линейные размеры

V' превосходят некоторые минимальные величины; например, объем V' должен содержать по крайней мере один атом. Это условие накладывает определенное ограничение на макроскопические явления, которые могут охватываться уравнениями (1.3-2) и (1.3-3). Мы можем рассматривать только такие явления, при которых величины E , D , H , B незначительно изменяются во времени за промежуток T' , в пространстве — в пределах линейных размеров V' . В дальнейшем мы будем предполагать, что это условие всегда выполняется. В частности, для поляризации должно соблюдаться соотношение

$$P \cdot (t, r) = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \chi^{(n)} \dots (\tau_1, \dots, \tau_n) \times \\ \times E \cdot (t - \tau_1, r) \dots E \cdot (t - \tau_n, r). \quad (1.3-4)$$

Это означает, что поляризация в данной точке пространства r , представляющей элемент объема, зависит только от напряженности поля в этой же точке в предшествующие моменты времени.

При волновых процессах со слишком короткой длиной волны принятые предположения могут нарушаться в зависимости от природы и плотности вещества. Кроме того, следует заметить, что при прочих равных условиях соблюдение или нарушение принятых предположений будет зависеть от величины напряженности электрического поля. В частности, вследствие нелинейных процессов возрастание напряженности поля усилит взаимное влияние индуцированных атомных дипольных моментов. Поэтому величина дипольного момента в одном месте среды будет сильно зависеть от значений напряженности поля в достаточно удаленных других точках. Описанный механизм может наряду с природой и расположением атомов определять минимальное значение V' .

1.31. Локальное описание

Путем простых математических операций можно получить из уравнений Максвелла (1.3-2) и (1.3-3) закон Пойнтинга

$$\nabla \cdot S = - E \cdot \frac{\partial}{\partial t} D - H \cdot \frac{\partial}{\partial t} B, \quad (1.31-1)$$

который при введении поляризации P . и намагниченности M . и при учете соотношений $D. = \epsilon_0 E. + P.$ и $B. = \mu_0 H. + M.$ приводится к виду

$$\nabla \cdot S. = -E \frac{\partial}{\partial t} P. - \epsilon_0 E. \frac{\partial}{\partial t} E. - \\ - H. \frac{\partial}{\partial t} M. - \mu_0 H. \frac{\partial}{\partial t} H.. \quad (1.31-2)$$

Следует указать, что при выводе уравнения (1.31-2) не было сделано никаких конкретных предположений относительно свойств вещества. В самом деле, ничего не было сказано о виде зависимости между величинами $D.$ и $E.$ или $P.$ и $E.$; в частности, безразлично, присутствуют ли в восприимчивости наряду с линейными нелинейные члены. То же самое можно сказать о намагниченности.

Уравнение (1.31-2) устанавливает связь между свойствами излучения электромагнитного поля, характеризуемого вектором Пойнтинга $S.$, и векторами поля и их производными по времени. В смысле перехода к макроскопической электродинамике, который нам предстоит осуществить, эта связь должна соблюдаться в каждом элементе объема в любой момент времени t . Важные результаты можно получить при исследовании стационарных процессов в некотором элементе объема. Для этого следует определить усредненное по времени значение $\nabla \cdot S.$, причем время усреднения должно быть велико по сравнению с обратными значениями частот рассматриваемых процессов. Если в соответствии с реальными обстоятельствами принять, что функции $|E.(t)|$ и $|H.(t)|$ ограничены сверху для всех t , то из уравнения (1.31-2) получим

$$\langle \nabla \cdot S. \rangle = - \langle E. \frac{\partial}{\partial t} P. \rangle - \langle H. \frac{\partial}{\partial t} M. \rangle. \quad (1.31-3)$$

При этих предположениях второе и четвертое слагаемые в правой части уравнения (1.31-2) не вносят вклада в значение $\langle \nabla \cdot S. \rangle$. Это легко доказать при преобразовании интегралов по времени путем интегрирования по частям.

В дальнейшем мы будем пренебрегать намагниченностью диэлектрика. Тогда в качестве основного соотно-

шения для дальнейших исследований имеем

$$\langle \nabla \cdot S. \rangle = - \langle S. \frac{\partial}{\partial t} P. \rangle. \quad (1.31-4)$$

Если известна зависимость $P.(E.)$, то при заданном $E.(t)$ можно вычислить величину $\langle \nabla \cdot S. \rangle$. При положительном значении $\langle E. (\partial/\partial t) P. \rangle$ приток энергии излучения в элемент объема превосходит количество энергии излучения, вытекающей из этого объема. При стационарном процессе среднее по времени изменение внутренней энергии должно равняться нулю, так что в этом случае происходит постоянная отдача энергии из данного элемента объема в окружающую среду. Такая отдача может совершаться либо путем теплообмена, либо при совершении работы (см. разд. 1.23); примерами могут служить комбинационное и бриллюэновское рассеяния (см. гл. 4). С другой стороны, при некоторых процессах выражение $\langle E. (\partial/\partial t) P. \rangle$ может быть пренебрежимо малым, так что эти процессы могут описываться уравнением $\langle \nabla \cdot S. \rangle = 0$, которое справедливо для получения высших гармоник (см. разд. 3.2) и для параметрического взаимодействия волн (см. разд. 3.3) в области прозрачности диэлектрика. Однако соотношение $\langle \nabla \cdot S. \rangle = 0$ означает выравнивание баланса полной входящей и выходящей энергии излучения лишь в среднем: одни частотные компоненты могут энергетически усиливаться за счет других, если излучение состоит из набора частот.

Для практического использования вышеизложенных соображений целесообразно рассматривать величину $\langle \nabla \cdot S. \rangle$ в предположении, что поле излучения состоит из компонент с дискретными частотами $f_1, \dots, f_k, \dots, f_a$. (Хотя в действительности всегда существует конечная ширина полосы частот, во многих случаях оказывается достаточным исследовать поведение соответствующих частотных компонент при максимальном значении напряженности поля.) Тогда среднее по времени значение вектора Пойнтинга $\langle S. \rangle$ аддитивно складывается из отдельных векторов $\langle S.(f_k) \rangle$, соответствующих каждой частоте f_k . Аналогичное аддитивное разложение

справедливо также для

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle = \sum_{k=1}^a \langle \nabla \cdot \mathbf{S} \cdot (f_k) \rangle. \quad (1.31-5)$$

Поскольку мы характеризуем поле $E \cdot (t)$ дискретным спектром частот, то, согласно 1.212, поляризация также обладает дискретным спектром частот. Однако вследствие наличия в общем случае нелинейных компонент поляризации этот спектр не совпадает со спектром напряженности поля. Поляризация $P \cdot (t)$ может содержать частоты $f'_1, \dots, f'_i, \dots, f'_b$; то же самое справедливо и для производной $(\partial/\partial t)P \cdot$. Поэтому $E \cdot (\partial/\partial t)P \cdot$ имеет вид суммы произведений, каждому из которых можно сопоставить пару частот (f_k, f'_i) . При усреднении по времени отличный от нуля вклад дают только те слагаемые, которые содержат постоянные члены, т. е. лишь в случае $f_k = f'_i$. Мы считаем, что поведение отдельных частотных компонент во времени определяется уравнением (1.21-6), причем $\hat{E} \cdot (f_k)$ и $\hat{P} \cdot (f'_i)$ являются пространственно направленными комплексными амплитудами напряженности поля и поляризации, как они определены в разд. 1.22. Поэтому можно записать

$$\langle E \cdot \frac{\partial}{\partial t} P \cdot \rangle = \sum_{k=1}^a (i2\pi f_k) \frac{1}{4} \hat{E}^* \cdot (f_k) \hat{P} \cdot (f_k) + \{KK\}. \quad (1.31-6)$$

Изложенные выше соображения приводят к результату

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \cdot (f_k) \rangle = i2\pi f_k \frac{1}{4} \hat{E} \cdot (f_k) \hat{P}^* \cdot (f_k) + \{KK\}. \quad (1.31-7)$$

Выражение в правой части представляет собой выигрыш энергии излучения на частоте f_k (отнесенный к единице времени и единице объема). Таким образом мы получаем количественную характеристику усиления или ослабления отдельной частотной компоненты при каком-либо заданном процессе. Из разд. 1.13 и 1.21 следует, что $P \cdot (f_k)$ зависит от нескольких или от всех амплитуд напряженности поля $E \cdot (f_1), \dots, E \cdot (f_a)$. Согласно уравнению (1.22-1), $P \cdot (f_k)$ выражается через те амплитуды напряженности поля, для которых $f_1 + \dots + f_n$ сводится

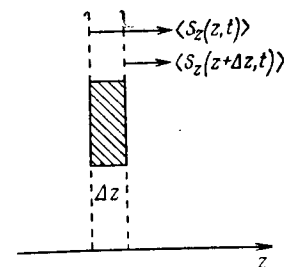
к f_k . Очевидно, что правая часть уравнения (1.31-7) отлична от нуля лишь при соблюдении следующих условий: во-первых, вектор $\hat{P} \cdot (f_k)$ должен иметь отличную от нуля компоненту, параллельную вектору $\hat{E} \cdot (f_k)$, и, во-вторых, поляризации и напряженности поля не должны совпадать. Если векторы $\hat{E} \cdot (f_k)$ и $\hat{P} \cdot (f_k)$ образуют острый угол и если фаза поляризации больше (меньше) фазы напряженности поля, то при положительной частоте f_k величина $\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \cdot (f_k) \rangle$ больше (меньше) нуля.

Для дальнейшего разъяснения уравнения (1.31-7) выберем простейшие геометрические соотношения (фиг. 8).

Пусть рассматриваемый элемент объема представляет собой тонкий слой толщиной Δz , ограниченный двумя параллельными перпендикулярными направлениями z . Электромагнитные волны могут распространяться в направлении z ; во всех точках плоскости, перпендикулярной z , значения полей одинаковы. Поляризация волн такова, что векторы напряженности электрического поля направлены вдоль оси x . При этих условиях нас будут интересовать в случае изотропной среды только компоненты векторов S_x, E_x, P_x , которые мы в дальнейшем для простоты обозначим S, E, P . Поскольку в дальнейшем мы будем исследовать пространственно протяженные области, то S, E, P следует считать функциями координат и времени; что касается поляризации, то при этом можно указать на уравнение (1.3-4). При указанных условиях мы имеем для компоненты на частоте f_k

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \cdot (f_k; z) \rangle = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\langle S(f_k; z + \Delta z) - S(f_k; z) \rangle}{\Delta z}, \quad (1.31-8)$$

где $\langle S(f_k; z) \rangle$ — среднее по времени значение вектора Пойнтинга в точке z . В соответствии с этим из уравнения (1.31-7) для усиления мощности волны с частотой f_k на



Фиг. 8. Изменение мощности излучения на единицу площади в некотором слое.

единицу длины следует

$$\frac{d}{dz} \langle S(f_k; z) \rangle = i2\pi f_k \frac{1}{4} \hat{E}(f_k; z) \hat{P}^*(f_k; z) + \{KK\}. \quad (1.31-9)$$

Это выражение имеет важное значение, так как из него можно простым путем определить характер энергетического поведения (усиление или ослабление) отдельных частотных компонент при различных линейных и нелинейных эффектах. В заключение раздела мы проведем оценки по уравнению (1.31-9) отдельно для линейной и нелинейной связи между поляризацией и напряженностью поля.

Рассмотрим сначала случай линейной связи между поляризацией и напряженностью поля. Согласно уравнению (1.21-16), следует положить

$$\hat{P}(f_k; z) = \chi^{(1)}(f_k; f_k) \hat{E}(f_k; z).$$

Отсюда получается усиление мощности на единицу длины (φ есть фаза $\chi^{(1)}$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \langle S(f_k; z) \rangle &= \\ &= \frac{\pi f_k}{2} [i\chi^{(1)*}(f_k; f_k) + \{KK\}] \hat{E}(f_k; z) \hat{E}^*(f_k; z) = \\ &= \pi f_k |\chi^{(1)}(f_k; f_k)| \sin[\varphi(f_k; f_k)] \hat{E}(f_k; z) \hat{E}^*(f_k; z). \end{aligned} \quad (1.31-10)$$

Если принять во внимание зависимость между напряженностью электрического поля и усредненным по времени вектором Пойнтинга, то дифференциальное уравнение (1.31-10) можно привести к виду, в котором в правой части амплитуды заменяются на $\langle S(f_k; z) \rangle$, так что будет присутствовать только одна функция, зависящая от z . При наших исходных предположениях амплитуду напряженности магнитного поля, направленного вдоль оси y , можно положить равной $(n^{(1)}/\mu_0 c) \hat{E}(f_k; z)$, причем следует считать $\mu = 1$; $n^{(1)}$ — линейный вещественный показатель преломления. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \langle S(f_k; z) \rangle &= g(f_k) \langle S(f_k; z) \rangle; \quad \langle S(f_k; z) \rangle = \\ &= \frac{n^{(1)}(f_k)}{\mu_0 c} \frac{1}{2} \hat{E}(f_k; z) \hat{E}^*(f_k; z). \end{aligned} \quad (1.31-11)$$

Значение фазы $\varphi(f_k; f_k)$ восприимчивости определяет знак величины $g(f_k)$. В обычно встречающемся случае (неактивированного диэлектрика) имеет место поглощение, и для корня квадратного из диэлектрической постоянной или из $[(1/\epsilon_0)\chi^{(1)} + 1]$ следует взять величину $n^{(1)} - i\rho_a^{(1)}$ с положительным значением коэффициента поглощения $\rho_a^{(1)}$. При $\rho_a^{(1)} > 0$ фаза восприимчивости $\chi^{(1)} = \epsilon_0(\epsilon^{(1)} - 1)$ принимает значение $\varphi < 0$, которому соответствует отрицательный знак $g(f_k)$. Интегрирование дифференциального уравнения (1.31-11) приводит к известной экспоненциальной зависимости интенсивности от z . Таким путем достигается описание соотношений для конечной области пространства. Следует особо отметить, что дифференциальные уравнения для различных частот f_k имеют одинаковую форму и не связаны между собой. Это соответствует случаю обычной линейной оптики, в которой электромагнитные волны различных частот не влияют друг на друга.

В общем случае при включении нелинейных членов поляризации возникают два существенных отличия от линейной оптики. Во-первых, даже для неактивированного диэлектрика становится возможным превышение фазы $\hat{P}(f_k; z)$ над фазой $\hat{E}(f_k; z)$. Это означает усиление интенсивности на единицу длины для компоненты на частоте f_k (соответствующие примеры будут приведены в гл. 3 и 4). Во-вторых, величина $\hat{P}(f_k; z)$ теперь будет зависеть не только от амплитуды напряженности поля на частоте f_k , но, согласно уравнению (1.22-1), вообще говоря, от нескольких или от всех амплитуд $\hat{E}(f_1; z), \dots, \hat{E}(f_a; z)$. Такая зависимость будет, в частности, определяться тем, какие суммы $f_1 + \dots + f_n$ в отдельных порядках приводят к значению f_k . Таким образом, правая часть уравнения (1.31-9) принимает вид некоторой функции \mathcal{F}_k , зависящей наряду с f_k и восприимчивостью от амплитуд напряженности поля. Для каждой отдельной частоты функция $\mathcal{F}[E(f_1, z), \dots, E(f_a, z)]$ воспроизводит усиление интенсивности на единицу длины в точке с координатой z , что позволяет уже делать важные выводы об эффектах НЛО. Если же перейти к описанию соотношений в конечной области пространства, то

потребуется проинтегрировать по z систему из a дифференциальных уравнений, относящихся к частотам f_1, \dots, f_a . При этом вообще возникают значительно большие математические трудности, чем в линейном случае, так как потребуется решение системы связанных дифференциальных уравнений. Величина $\langle S(f_k; z) \rangle$ теперь не зависит, как в линейном случае, только от $\hat{E}(f_k; z)$, а определяется по крайней мере еще одной из других амплитуд напряженности поля.

1.32. Глобальное описание

В настоящем разделе мы рассмотрим электромагнитные явления с учетом нелинейных материальных уравнений для протяженной пространственно-временной области. При этом мы исходим из уравнений Максвелла, заданных в форме уравнений (1.3-2) и (1.3-3). Мы также следующим образом уточним свойства вещества: для связи между поляризацией и напряженностью поля примем соотношение (1.3-4), а зависимость от координат будем учитывать в соответствии со сказанным в начале настоящего параграфа. Для магнитных свойств мы примем уравнение $B = \mu_0 H$, в котором μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, а μ — относительная магнитная проницаемость, рассматриваемая как материальная константа. Функции восприимчивости в уравнении (1.3-4) и проницаемость μ в дальнейшем будем считать известными величинами.

При этих предпосылках мы можем с помощью известных из линейной оптики простых математических операций получить волновые уравнения в следующей форме:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times E) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \\ = - \frac{\mu - 1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P, \end{aligned} \quad (1.32-1)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times H) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H = \\ = - \frac{\mu - 1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H + \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} P \right). \end{aligned} \quad (1.32-2)$$

Левые части содержат члены, соответствующие описанию электромагнитного поля в вакууме. Правые части включают члены, характеризующие электрические и магнитные свойства вещества. При подстановке соотношения между P и E из уравнения (1.3-4) первое дифференциальное уравнение будет содержать только напряженность электрического поля, а во второе будут входить как электрическое, так и магнитное поле.

Возникает следующая общая задача: найти решение уравнения (1.32-1) для $E(t, r)$ при определенных граничных условиях. Граничные условия задаются физическими предпосылками поставленной проблемы, и им может быть дана математическая формулировка. В качестве примера разберем часто встречающийся случай. Пусть некоторая граничная поверхность диэлектрика заданным образом облучается снаружи. Тогда можно считать заданной зависимость напряженности электрического поля от времени. Если в результате решения уравнения (1.32-1) напряженность поля найдена как функция t и r , то P и $\nabla \cdot (\partial/\partial t)P$ также определяются как функции t и r по уравнению (1.3-4). Выражение $\nabla \cdot (\partial/\partial t)P$ следует рассматривать как неоднородный член в уравнении (1.32-2), тогда как остальные члены линейны по H . Определение решения $H(t, r)$ этого дифференциального уравнения приводит вместе с решением первого дифференциального уравнения к нахождению $E \times H$ и вектора Пойнтинга S как функции координат и времени. Из изложенного следует, что определение $E(t, r)$ из уравнения (1.32-1) занимает центральное место во всей поставленной задаче. Ниже мы разъясним связанные с этим вопросы.

1.321. Общее нестационарное поведение

Если не учитывать нелинейные члены поляризации, то правая часть уравнения (1.32-1) будет зависеть от напряженности поля только линейно. В этом случае достигается значительное упрощение структуры уравнения и становятся применимыми известные методы решения линейных дифференциальных уравнений. В общем же случае при включении нелинейных поляризационных

членов математические трудности значительно возрастают. Решение задачи в замкнутой форме, вообще говоря, нельзя получить. Поэтому возникает необходимость в применении определенных математических операций: разложения в ряд или каких-либо преобразований. Тогда задача принимает форму, при которой математическое представление решения упрощается. Не существует общего рецепта для выбора того или иного метода. Этот выбор осуществляется в зависимости от характера поставленной физической проблемы. Ниже излагаются некоторые важные методы.

Успешно используется разложение искомой функции по полной системе функций, удовлетворяющих тем же граничным условиям, что и искомая функция. Приведем следующие примеры: разложение по стоячим волнам, т. е. по так называемым нормальным модам (при этом электромагнитное поле может рассматриваться внутри конечной полости с соответствующей геометрией — допустим, в форме параллелепипеда — и со стенками, обладающими бесконечной проводимостью); разложение по плоским прямым волнам, на которые накладываются определенные условия периодичности (равенство значений напряженности поля в эквивалентных точках интервала периодичности). Названные в этих примерах функции возникают в проблемах с дискретным спектром собственных значений. Поэтому функции, образующие полную систему, можно пронумеровать; если $F_{(\alpha)}(t, r)$ есть α -я функция, которую в дальнейшем можно считать известной, то $E_x(t, r)$ определяется разложением

$$E_x(t, r) = \sum_{\alpha} e'_{\alpha} F_{(\alpha)}(t, r). \quad (1.32-3)$$

Отыскание решения сводится к определению последовательности чисел e'_1, e'_2, \dots .

Применение определенных преобразований, например ПФ, позволяет во многих случаях привести определяющее уравнение для искомой величины к «удобной» форме. Для разъяснения основного хода мыслей рассмотрим сначала простые геометрические соотношения: пусть $E_x(t, r)$, $P_x(t, r)$ зависят только от пространственной

координаты z и пусть только x -компоненты этих векторов отличны от нуля. Тогда задача заключается в определении $E_x(t, z)$ из соотношения

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x &= \\ &= -\frac{\mu - 1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x - \mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_x, \end{aligned} \quad (1.32-4)$$

вытекающего из уравнения (1.32-1). В принципе проблема равнозначна определению зависимости фурье-образа ${}^1E_x(f, q_r)$ от частоты f и от пространственной частоты q_r . (В соответствии с принятыми в настоящем томе обозначениями пространственная частота q_r является отрицательным значением волнового числа q ; при положительных f и q волна распространяется в положительном направлении z .) Во многих практически важных случаях оказывается даже более полезным знать решение в пространстве (f, q_r) , чем в пространстве (t, z) . Между 1E_x и E_x существует однозначное соответствие:

$$E_x(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \int_{-\infty}^{+\infty} dq_r {}^1E_x(f, q_r) e^{i2\pi(ft + q_r z)}. \quad (1.32-5)$$

Аналогично величина ${}^1P(f, q_r)$ определяется как фурье-образ от $P_x(t, z)$.

Применение ПФ к уравнению (1.32-4) приводит для любой пары значений (f, q_r) к соотношению

$$\begin{aligned} (2\pi q_r)^2 {}^1E_x - \frac{1}{c^2} (2\pi f)^2 {}^1E_x &= \\ &= \frac{\mu - 1}{c^2} (2\pi f)^2 {}^1E_x + \mu \mu_0 (2\pi f)^2 {}^1P_x. \end{aligned} \quad (1.32-6)$$

Вследствие общей взаимозависимости между поляризацией и напряженностью поля величина ${}^1P_x(f, q_r)$ зависит от ${}^1E_x(f, q_r)$. При учете членов до второго порядка включительно получим эту зависимость в явном

виде:

$$P_x(f, q_r) = P_x^{(1)}(f, q_r) + P_x^{(2)}(f, q_r) = \kappa_{xx}^{(1)}(f) E_x(f, q_r) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} df' \int_{-\infty}^{+\infty} dq_r' \kappa_{xxx}^{(2)}(f', f-f') \times \\ \times E_x(f', q_r') E_x(f-f', q_r-q_r'), \quad (1.32-7)$$

где $\kappa_{xx}^{(1)}$ и $\kappa_{xxx}^{(1)}$ являются функциями восприимчивости в частотном представлении. (При этих рассуждениях мы ограничились ради простоты наинизшим нелинейным, т. е. вторым, порядком; однако полученные в этом приближении выводы могут быть перенесены на члены высших порядков.) Из уравнения (1.32-6) следует соотношение вида

$$G(f, q_r) E_x(f, q_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} df' \int_{-\infty}^{+\infty} dq_r' \kappa_{xxx}^{(2)}(f', f-f') \times \\ \times E_x(f', q_r') E_x(f-f', q_r-q_r'), \quad (1.32-8)$$

в котором $G(f, q_r)$ следует считать известной функцией.

Таким образом, определяющее уравнение для искомой величины $E_x(f, q_r)$ при учете квадратичного члена и вообще при наличии нелинейных поляризационных членов является интегральным уравнением. Для сравнения с соответствующим выражением в tz -представлении подставим в уравнение (1.32-4) $\partial^2 P_x / \partial t^2$ в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P_x(t, z) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_x^{(1)}(t, z) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_x^{(2)}(t, z) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \kappa_{xx}^{(1)}(\tau_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \\ \times E_x(t - \tau_1, z) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 \kappa_{xxx}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{E_x(t - \tau_1, z) E_x(t - \tau_2, z)\}. \quad (1.32-9)$$

Это означает, что определяющее уравнение для $E_x(t, z)$ является интегро-дифференциальным; сравнение показывает, что формальная структура определяющего урав-

нения для $E_x(f, q_r)$ при одном и том же порядке поляризационных членов оказывается более простой.

В практически встречающихся проблемах, как правило, могут быть сделаны предварительные предположения о зависимости E_x от (f, q_r) ; таким путем достигаются существенные математические упрощения. Так, в большой части важных проблем оказывается возможным представить E_x как суперпозицию гармонических волн с медленно меняющимися волновыми амплитудами:

$$E_x(t, z) = \sum_{k=1}^a \bar{E}_x(f_k; t, z) e^{i[\pi f_k t - 2\pi q(f_k)z]} + \{KK\}. \quad (1.32-10)$$

Предполагается, что волновые амплитуды значительно изменяются только в течение промежутков времени, больших по сравнению с соответствующими периодами колебаний, и на расстояниях, больших по сравнению с соответствующими длинами волн. В представлении Фурье это означает, что величина E_x существенно отлична от нуля только в такой области (f, q_r) , для которой соблюдаются неравенства $|f| \leq \bar{f}_k \ll f_k$ и $|q_r| \leq \bar{q}(f_k) \ll |q(f_k)|$. Здесь \bar{f}_k и $\bar{q}(f_k)$ — максимальные значения временных и пространственных частот колебаний $E_x(f_k; t, z)$; величины \bar{f}_k и $\bar{q}(f_k)$ задаются теми или иными существующими экспериментальными условиями, в частности продолжительностью (длительностью импульса) взаимодействующих групп волн. При подстановке выражения (1.32-10) для напряженности поля и выражения для поляризации с аналогичной зависимостью от t и z в уравнение (1.32-4) получаются основные уравнения для процессов, в которых определяющие величины могут в известных пределах обнаруживать нестационарное поведение. Более подробно это описано в приложении 6.

1.322. Стационарное поведение. Дискретный спектр частот

С важным частным случаем дискретного спектра частот мы встречаемся при пренебрежении временной зависимостью волновых амплитуд в уравнении (1.32-10). В этом приближении общее представление

напряженности поля имеет вид

$$E.(t, r.) = \sum_{k=1}^a \left[\frac{1}{2} \hat{E}.(f_k; r.) e^{i2\pi f_k t} + \{KK\} \right]. \quad (1.32-10a)$$

На основании уравнения (1.22-1) отсюда следует дискретный спектр частот также для поляризации. Выделим в поляризации линейный и нелинейный члены: $P. = P.^{(Л)} + P.^{(НЛ)}$. Частотный спектр $P.^{(Л)}$ совпадает с частотным спектром напряженности поля, тогда как для $P.^{(НЛ)}$ такого совпадения нет. Член $P.^{(НЛ)}$ содержит частоты $f'_1, \dots, f'_i, \dots, f'_b$. Представленная уравнением (1.32-10) пространственно-временная зависимость напряженности поля имеет место также и для поляризации.

При подстановке этих выражений в уравнение (1.32-1) получим

$$\begin{aligned} \sum_k e^{i2\pi f_k t} \left[\nabla. \times \{ \nabla. \times \hat{E}.(f_k; r.) \} - \frac{\mu}{c^2} (2\pi f_k)^2 \hat{E}.(f_k; r.) - \right. \\ \left. - (2\pi f_k)^2 \mu \mu_0 \chi_{..}^{(Л)}(f_k; f_k) \hat{E}.(f_k; r.) \right] = \\ = \mu \mu_0 \sum_i e^{i2\pi f'_i t} \hat{P}^{(НЛ)}(f'_i; r.) (2\pi f'_i)^2. \quad (1.32-11) \end{aligned}$$

Здесь $\chi_{..}^{(Л)}(f_k; f_k)$ — линейная восприимчивость, входящая в уравнение (1.22-1). Мы опустили комплексно сопряженные члены, так как они не содержат никакой дополнительной информации. Для выполнения последнего уравнения в целом необходимо, чтобы оно соблюдалось для каждого частотного члена в отдельности; при рассмотрении частоты f_k представляет интерес лишь та частота f'_i в нелинейной части, для которой $f'_i = f_k$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \nabla. \times \{ \nabla. \times \hat{E}.(f_k; r.) \} - (2\pi f_k)^2 \left\{ \mu \mu_0 \chi_{..}^{(Л)}(f_k; f_k) + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{c^2} \right\} \hat{E}.(f_k; r.) = \mu \mu_0 (2\pi f_k)^2 P^{(НЛ)}(f_k; r.). \quad (1.32-12) \end{aligned}$$

Согласно разд. 1.21, амплитуда нелинейной части поляризации аддитивно складывается из членов вида

$$\chi_{..}^{(n)} \dots (f_k; f_{k_1}, \dots, f_{k_p}, \dots, f_{k_n}) \hat{E}.(f_{k_1}; r.) \dots \hat{E}.(f_{k_n}; r.), \quad (1.32-13)$$

где $\chi_{..}^{(n)} \dots$ является восприимчивостью n -го порядка, а n частот f_{k_p} возникают из значений частот $f_1, \dots, f_n, \dots, f_a$ [для наших дальнейших рассуждений достаточно считать величину $P.^{(НЛ)}$ представленной одним членом вида (1.32-13)]. Амплитуды $\hat{E}.(f_k; r.)$ для a значений частот f_1, \dots, f_a определяются из системы дифференциальных уравнений (1.32-12).

При описании типичных эффектов НЛО (см. гл. 3 и 4) большую роль играют пространственно направленные процессы, волнообразно протекающие в пространстве и во времени. Поэтому исследуем уравнение (1.32-12) при этих условиях.

Для этого мы сначала конкретизируем геометрические соотношения: волны напряженности поля и поляризации всех частот будем считать распространяющимися в направлении z . В плоскости, перпендикулярной оси z , векторы напряженности поля и поляризации будем считать не зависящими от координат. Компоненты по z напряженности поля и поляризации положим равными нулю. Тогда в проекциях векторы напряженности поля и поляризации могут быть записаны в виде

$$[E_x(t, z), E_y(t, z), 0], \quad [P_x(t, z), P_y(t, z), 0]$$

и $\nabla. \times (\nabla. \times E.)$ можно заменить выражением $-(\partial^2/\partial z^2)E.(t, z)$. Если это соответствующим образом учесть в дифференциальном уравнении (1.32-12), то окажется, что x -компонента первого члена зависит только от $\hat{E}_x(f_k, z)$; x -компонента двух других членов в уравнении (1.32-12) может зависеть как от x -компоненты, так и от y -компоненты амплитудного вектора \hat{E} .

Ниже мы рассмотрим сначала изотропную среду и предположим, что все колебания напряженности поля поляризованы в одном и том же направлении, за которое выберем направление x . Для упрощения записи положим

$$\hat{E}_x = \hat{E}, \quad \hat{P}_x = \hat{P} \quad \text{и} \quad \chi_{xx \dots x}^{(n)} = \chi^{(n)}. \quad \text{Тогда получим}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \hat{E}(f_k; z) + (2\pi f_k) \left[\mu \mu_0 \chi^{(n)}(f_k; f_k) + \frac{\mu}{c^2} \right] \hat{E}(f_k; z) =$$

$$= -\mu \mu_0 (2\pi f_k)^2 \hat{P}^{(n, \text{Л})}(f_k; z), \quad (1.32-13a)$$

где

$$\hat{P}^{(n, \text{Л})}(f_k; z) = \chi^{(n)}(f_k; f_{k_1}, \dots, f_k, \dots, f_{k_n}) \hat{E}(f_{k_1}, z) \dots$$

$$\dots \hat{E}(f_{k_n}, z).$$

Следует указать, что в настоящем разделе мы до сих пор не делали никаких специальных предположений о виде зависимости амплитуды напряженности поля от пространственной координаты z . В смысле выводов, сделанных в конце разд. 1.321, примем, что зависимость от z задается гармонической волной с медленно меняющейся в пространстве волновой амплитудой $\bar{E}(f_k; z)$. Тогда колебательная амплитуда принимает вид

$$\hat{E}(f_k; z) = \bar{E}(f_k; z) e^{-i2\pi q(f_k)z}. \quad (1.32-14)$$

Если частота f_k и (вещественное) волновое число $q(f_k)$ имеют одинаковые знаки, то волна распространяется в положительном направлении оси z . В рассуждениях относительно уравнения (1.32-10) было выяснено, что «медленное» изменение волновой амплитуды может быть связано с определенным свойством фурье-представления, а именно с ограничением пространственных частот областью вблизи $q_r = 0$. Мы учтем теперь это условие непосредственно для волновой амплитуды в области z путем сравнения производных различных порядков. Тогда величина $\bar{E}(f_k; z)$ должна удовлетворять следующим требованиям:

$$\left| 1 - \text{Im} \left\{ \frac{2}{2\pi q} \frac{1}{\bar{E}} \frac{d}{dz} \bar{E} \right\} \right| \gg \left| \text{Re} \left\{ \frac{1}{(2\pi q)^2} \frac{1}{\bar{E}} \frac{d^2}{dz^2} \bar{E} \right\} \right|, \quad (1.32-15)$$

$$\left| \text{Re} \left\{ \frac{2}{2\pi q} \frac{1}{\bar{E}} \frac{d}{dz} \bar{E} \right\} \right| \gg \left| \text{Im} \left\{ \frac{1}{(2\pi q)^2} \frac{1}{\bar{E}} \frac{d^2}{dz^2} \bar{E} \right\} \right|.$$

Рассмотрим решения, наиболее важные для наших исследований, и применим соотношения (1.32-15) к функ-

циям, хорошо отображающим общие свойства этих решений. Пусть величина \bar{E} изменяется в рассматриваемой конечной области значений z по экспоненциальному закону, тогда как фаза линейно зависит от z , т. е. пусть $\bar{E} = e^{\eta z} \cdot e^{i\tilde{\eta}z}$, причем η и $\tilde{\eta}$ являются вещественными константами. Для функций такого типа соотношение (1.32-15) означает, что величины $|\tilde{\eta}/2\pi q|$ и $|\eta/2\pi q|$ должны быть малы по сравнению с единицей. Следовательно, расстояние, на котором $|\bar{E}|$ изменяется на множитель $e^{\pm 2\pi}$, должно быть велико по сравнению с длиной волны $\lambda = 1/|q|$; изменения фазы \bar{E} на величину порядка 2π также должны происходить на отрезках, значительно превосходящих λ .

Подставляя выражение (1.32-14) и соотношения (1.32-15) в дифференциальное уравнение (1.32-13a), получаем

$$\frac{d}{dz} \bar{E}(f_k; z) = \frac{i}{4\pi q(f_k)} \left\{ - (2\pi f_k)^2 \left[\mu \mu_0 \chi^{(n)}(f_k; f_k) + \frac{\mu}{c^2} \right] + \right.$$

$$\left. + [2\pi q(f_k)]^2 \right\} \bar{E}(f_k; z) - \frac{i\mu \mu_0 (2\pi f_k)^2}{4\pi q(f_k)} \chi^{(n)}(f_k; f_{k_1}, \dots, f_{k_n}) \times$$

$$\times \bar{E}(f_k; z) \dots \bar{E}(f_{k_n}; z) e^{i2\pi z \left[q(f_k) - \sum_{\rho=1}^n q(f_{k_\rho}) \right]}. \quad (1.32-16)$$

Благодаря соотношениям (1.32-15) мы могли пренебречь членом $(d^2/dz^2)\bar{E}$ по сравнению с $i4\pi q(d\bar{E}/dz)$ и $(2\pi q)^2\bar{E}$. Таким образом, для рассматриваемых волновых процессов комплексная амплитуда \bar{E} удовлетворяет дифференциальному уравнению, содержащему только первую производную по z . Оно значительно проще дифференциального уравнения (1.32-13a).

Рассмотрим теперь возможные значения волнового числа при заданных частотах. Для этой цели, как и в линейном приближении, часто можно пренебречь нелинейными поляризационными членами. Как известно, в предположении слабого затухания волн дифференциальное уравнение (1.32-16) приводит в линейном случае к дисперсионному соотношению вида

$$q^2(f_k) = \left[\mu \mu_0 \text{Re} \{ \chi^{(n)}(f_k; f_k) \} + \frac{\mu}{c^2} \right] f_k^2 \quad (1.32-17)$$

или

$$q^2(f_k) = \frac{\mu}{c^2} \operatorname{Re} \{e^{(n)}(f_k)\} f_k^2. \quad (1.32-18)$$

Во втором уравнении использована зависимость $\chi^{(n)}(f_k; f_k) = \varepsilon_0(\varepsilon^{(n)} - 1)$ между линейной восприимчивостью и линейной диэлектрической постоянной. При подстановке $|q|$ из уравнения (1.32-17) уравнение (1.32-16) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{E}(f_k; z) = \pi q(f_k) \frac{\operatorname{Im} \{e^{(n)}(f_k)\}}{\operatorname{Re} \{e^{(n)}(f_k)\}} \bar{E}(f_k; z) - \\ - \frac{i\mu\mu_0(2\pi f_k)^2}{4\pi q(f_k)} \chi^{(n)}(f_k; f_{k_1}, \dots, f_{k_n}) \bar{E}(f_{k_1}; z) \dots \\ \dots \bar{E}(f_{k_n}; z) e^{i2\pi z \left[q(f_k) - \sum_{\rho=1}^n q(f_{k_\rho}) \right]}. \end{aligned} \quad (1.32-19)$$

Часто можно считать, что в среде отсутствуют линейные потери, т. е. $\operatorname{Im} \{e^{(n)}(f_k)\} = 0$. При этом допущении уравнение (1.32-19) принимает более простой вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{E}(f_k; z) = - \frac{i\pi\mu\mu_0 f_k^2}{q(f_k)} \chi^{(n)}(f_k; f_{k_1}, \dots, f_{k_n}) \bar{E}(f_{k_1}; z) \dots \\ \dots \bar{E}(f_{k_n}; z) e^{i2\pi z \left[q(f_k) - \sum_{\rho=1}^n q(f_{k_\rho}) \right]}. \end{aligned} \quad (1.32-20)$$

Следует еще заметить, что в указанном выше смысле множитель $\exp i2\pi z \left[q(f_k) - \sum_{\rho} q(f_{k_\rho}) \right]$ в уравнении (1.32-20) следует считать медленно изменяющимся с изменением z : если дисперсия не слишком велика или если частоты $f_{k_1}, \dots, f_{k_\rho}$ не слишком сильно различаются между собой, то при $f_k = \sum_{\rho} f_{k_\rho}$ можно также положить $q(f_k) \approx \sum_{\rho} q(f_{k_\rho})$. Для некоторых дальнейших применений в заключение вновь введем колебательные амплитуды нелинейной поляризации n -го порядка:

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(n)}(f_k; z) = \chi^{(n)}(f_k; f_{k_1}, \dots, f_{k_n}) \bar{E}(f_{k_1}; z) \dots \\ \dots \bar{E}(f_{k_n}; z) e^{-i2\pi z \sum_{\rho=1}^n (f_{k_\rho})} \end{aligned}$$

и тем самым приведем уравнение (1.32-20) к виду

$$\frac{d}{dz} \bar{E}(f_k; z) = - \frac{i\pi\mu\mu_0 f_k^2}{q(f_k)} \hat{P}^{(n)}(f_k; z) e^{i2\pi z q(f_k)}. \quad (1.32-21)$$

Эти уравнения для волновых амплитуд принято называть «уравнениями генерации». Для их вывода мы до сих пор ограничивались изотропной средой и волнами с одним направлением поляризации. Однако обычно в приложениях важную роль играют также анизотропные вещества, поскольку в них нелинейные эффекты проявляются уже во втором порядке. Кроме того, как в изотропных, так и в анизотропных веществах наблюдаются эффекты, в которых большое участие принимают компоненты поля с различными направлениями поляризации. В этих общих случаях система уравнений генерации сложным образом зависит от направлений распространения и поляризации отдельных волн. В дальнейшем мы сделаем упрощающие предположения, при которых уравнения генерации для компонент E будут подобны уравнениям для изотропной среды при фиксированном направлении поляризации. Вновь предположим, что волновые векторы всех участвующих в процессе волн имеют одно и то же направление, за которое мы выберем ось z лабораторной системы координат. Этого можно достичь, если направить излучение перпендикулярно к соответствующим образом вырезанной поверхности кристалла. Кроме того, мы ограничимся оптически одноосными кристаллами и расположим ось y лабораторной системы координат в плоскости главного сечения, т. е. в плоскости, образуемой направлением распространения луча и оптической осью. Ось x перпендикулярна этой плоскости. При таком выборе осей x -компонента волны с частотой f распространяется как обыкновенная волна с волновым числом $q^{(x)}(f) = q_o(f)$, а y -компонента — как необыкновенная волна с волновым числом $q^{(y)}(f) = q_{ao}(f)$; (Мы обозначаем через $q^{(i)}$ волновое число света с направлением поляризации i .) Наконец, мы сделаем достаточно часто выполняющееся предположение, что эллипсоид линейного показателя преломления мало отклоняется от сферической формы. При этом предположении оказывается возможным во многих случаях пренебречь

компонентой электрического поля в направлении распространения, а также другими членами в волновом уравнении, пропорциональными недиагональным элементам тензора $\epsilon^{(1)}$ в лабораторной системе координат. (Между прочим, это означает, что направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением распространения волны. В гл. 3.2 будут указаны явления, обусловленные малыми отклонениями вектора Пойнтинга от направления распространения и играющие роль при взаимодействиях в среде на больших расстояниях.) Наоборот, зависимость фазовой скорости от направления поляризации должна обязательно учитываться, поскольку разность фаз между отдельными волнами критическим образом влияет на процесс генерации (см., например, разд. 1.31). При сделанных предположениях получим следующее уравнение для x - и y -компонент напряженности электрического поля:

$$\frac{d}{dz} \bar{E}_i(f_k; z) = \sum_{k_1 \dots k_m} -\frac{i\pi\mu_0 f_k^2}{q^{[i]}(f_k)} \chi_{i k_1 \dots k_m}^{(n)}(f_k; f_{k_1}, \dots, f_{k_m}) \times \\ \times \bar{E}_j(f_{k_1}; z) \dots \bar{E}_m(f_{k_m}; z) e^{i2\pi z [q^{[i]}(f_k) - q^{[j]}(f_{k_1}) - \dots - q^{[m]}(f_{k_m})]}. \quad (1.32-22)$$

При этом величина $q^{[i]}(f)$ может принимать только два значения $q_o(f)$ и $q_{ao}(f)$, соответствующие волновым числам обыкновенного и необыкновенного лучей с частотой f . В соответствии с уравнением (1.32-21) и при использовании волновой амплитуды нелинейной поляризации получим

$$\frac{d}{dz} \bar{E}_i(f_k; z) = -\frac{i2\pi\mu_0 f_k^2}{q^{[i]}(f_k)} \hat{P}_i^{(n)}(f_k; z) e^{i2\pi z q^{[i]}(f_k)}. \quad (1.32-23)$$

Уравнения (1.32-22) и (1.32-23) служат основой для расчета усиления и генерации волн в изотропных и анизотропных средах при единственном направлении распространения и при произвольном направлении поляризации отдельных компонент поля.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ И НАПРЯЖЕННОСТЬЮ ПОЛЯ ДЛЯ ВАЖНЫХ ГРУПП ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

После обсуждения в гл. 1 общих свойств соотношения $P.(E.)$ перейдем к рассмотрению особенностей поведения электронов, атомов и молекул при их взаимодействии с электромагнитными полями, с учетом нелинейных эффектов. В § 2.1 будет исследовано возникновение поляризации в системе несвязанных носителей заряда (плазма) под действием электромагнитного поля. Поляризационные свойства электронов в атомах и молекулах описываются в § 2.2; мы приходим к модельным представлениям, позволяющим объяснить такие важные эффекты НЛО, как получение высших гармоник и смешения света. Два следующих параграфа посвящены изучению взаимодействия электрических полей с молекулами. В этой связи будут описаны эффекты ориентации анизотропных молекул (§ 2.3), позволяющие объяснить специфические особенности распространения волн в НЛО, например самофокусировку. Кроме того, рассматривается взаимодействие с оптическими молекулярными колебаниями (§ 2.4), приводящее к модели для объяснения вынужденного комбинационного рассеяния. Взаимодействие с акустическими колебаниями обсуждается в § 2.5 и на этой основе дается интерпретация вынужденного бриллюэновского рассеяния. Если первые пять параграфов настоящей главы посвящены исследованию возникновения поляризации, то в § 2.6 рассматривается намагниченность системы атомных ядер под влиянием внешних магнитных полей. Соответствующее решение уравнений Блоха для ядерной намагниченности приводит к появлению нелинейных компонент намагниченности, которые могут быть объяснены точно так же, как нелинейные компоненты электрической поляризации электронов, атомов и молекул.

Для вычисления электрической поляризации, возникающей в перечисленных группах физических явлений, в ближайших параграфах будет использован следующий метод: сначала определяется индуцированный электрический дипольный момент отдельной пары носителей заряда, например атомов или молекул, а затем путем сложения всех дипольных моментов, находящихся в единице объема, вычисляется поляризация. Отдельный индуцированный дипольный момент зависит, с одной стороны, от свойств и характеристических констант рассматриваемого структурного элемента (например, атома), а с другой — от значения действующего электрического поля $E_{(w)}$ в том месте, в котором находится этот элемент. Это поле складывается из внешнего приложенного поля E и поля, создаваемого дипольными моментами всех других атомарных структурных элементов. Если взаимное влияние атомарных структурных элементов может быть описано с помощью модели точечных дипольных моментов, то, как известно, $E_{(w)}$ определяется формулой

$$E_{(w)} = E + \frac{1}{3\epsilon_0} P. \quad (2-1)$$

Это соотношение строго соблюдается для кристаллов высокой симметрии; для неупорядоченных систем (жидкости, газы) оно должно рассматриваться как некоторое усредненное свойство. В достаточно разреженной среде, т. е. при достаточно малой плотности распределения дипольных моментов, влиянием второго слагаемого можно пренебречь, и тогда действующее поле идентично внешнему полю.

В настоящей книге при дальнейших рассуждениях принимается, что сделанное выше предположение соблюдается. Это позволяет сосредоточить внимание на интересующих нас нелинейных эффектах без их осложнения побочными явлениями. Если же окажется желательным в количественной форме учесть взаимное влияние атомарных структурных элементов, то для этого будет достаточно в соотношении $P(E)$ заменить поле E полем $E_{(w)}$. Это будет показано в явном виде на примере исследований, описанных в § 2.3.

§ 2.1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С НЕСВЯЗАННЫМИ НОСИТЕЛЯМИ ЗАРЯДА. МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ

При воздействии электромагнитного излучения на несвязанные носители заряда существование силы Лоренца обуславливает появление нелинейных поляризационных членов. Мы исследуем это на примере электронов в плазме.

Уравнение движения для радиуса-вектора электрона r имеет вид

$$m_E \frac{d^2}{dt^2} r + m_E \Gamma_P \frac{d}{dt} r = -eE - e \left[\left(\frac{d}{dt} r \right) \times B \right], \quad (2.1-1)$$

где m_E и $(-e)$ — соответственно масса и заряд электрона; Γ_P представляет собой константу трения, характеризующую сопротивление движению в плазме, E и B — действующие электрическое и магнитное поля в месте нахождения электрона. Наиболее важные эффекты могут быть описаны уже на основе простых предположений. Рассматривается электрон, находящийся под действием линейно поляризованных волн (вектор E направлен вдоль оси x), распространяющихся в направлении z . В дальнейшем мы будем исходить из представления о «разреженной» плазме, так что можно пренебречь обратным действием источников (носителей заряда) на электромагнитное поле, а значения диэлектрической постоянной и проницаемости можно считать совпадающими с их значениями в вакууме. Константа трения Γ_P считается малой по сравнению с частотами поля E .

Исходя из сделанных предположений и обозначая через $E_x(t)$ компоненту напряженности электрического поля в направлении x , представим векторы поля в виде

$$E = \begin{Bmatrix} E_x(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{c} E_x(t) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.1-2)$$

Используя эти выражения вместе с уравнением (2.1-1), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} x + \Gamma_P \frac{d}{dt} x &= -\frac{e}{m_E} E_x(t) + \frac{e}{m_E c} E_x(t) \frac{d}{dt} z, \\ \frac{d^2}{dt^2} y + \Gamma_P \frac{d}{dt} y &= 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} z + \Gamma_P \frac{d}{dt} z &= -\frac{e}{m_E c} E_x(t) \frac{d}{dt} x. \end{aligned} \quad (2.1-3)$$

Умножая решение $r_*(t)$ этой системы на $(-e)$, получаем искомым электрический дипольный момент электрона $p_*(t) = -er_*(t)$. (При этом следует представить себе, что в начале координат расположен соответствующий положительный заряд.) Поскольку нас интересует здесь только дипольный момент, индуцированный электромагнитной волной при стационарных условиях, то по аналогии с методом, изложенным в 1.111, будем считать, что постоянные интегрирования в однородном решении соответствующим образом фиксированы.

При практическом нахождении решения системы (2.1-3) следует воспользоваться приближенным методом. При этом можно исходить из того факта, что встречающиеся скорости электронов малы по сравнению со скоростью света. Следовательно, члены, содержащие $(1/c)(dz/dt)$ и $(1/c)(dx/dt)$, могут считаться величинами более высоких порядков малости. В соответствии с этим и в согласии с обычным приемом теории возмущений заменим величины $(1/c)(dz/dt)$ и $(1/c)(dx/dt)$ выражениями $\beta(1/c)(dz/dt)$ и $\beta(1/c)(dx/dt)$ и определим для различных порядков параметра разложения β значения отдельных слагаемых в решении вида

$$r_* = \sum_{n=1} \beta^{n-1} r_*^{(n)}. \quad (2.1-4)$$

Это решение выбрано таким образом, что $r_*^{(1)}$, а следовательно, и дипольный момент первого порядка линейно зависят от напряженности поля.

Если исследования выполняются для стационарных условий, то целесообразно перейти от временного представления в частотному.

Применяя к системе (2.1-3) преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} {}^1Q_P^{-1}(f) {}^1x(f) &= -\frac{e}{m_E} {}^1E_x(f) - \\ &- \beta \frac{e}{m_E c} \int_{-\infty}^{+\infty} df' i2\pi f f' {}^1z(-f') {}^1E_x(f+f'), \\ {}^1Q_P^{-1}(f) {}^1y(f) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1-5)$$

$${}^1Q_P^{-1}(f) {}^1z(f) = \beta \frac{e}{m_E c} \int_{-\infty}^{+\infty} df' i2\pi f f' {}^1x(-f') {}^1E_x(f+f'),$$

где

$${}^1Q_P^{-1}(f) = -(2\pi f)^2 - i2\pi f \Gamma_P. \quad (2.1-6)$$

При постановке (2.1-4) отсюда следует: для первого порядка

$${}^1r_*^{(1)}(f) = \left\{ \begin{array}{c} -e(m_E)^{-1} {}^1Q_P(f) {}^1E_x(f) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.1-7)$$

и для второго порядка

$${}^1r_*^{(2)}(f) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\frac{e^2}{m_E^2 c} Q_P(f) \int_{-\infty}^{+\infty} df' i2\pi f f' Q_P(-f') {}^1E_x(-f') \times \\ \times {}^1E_x(f+f'). \end{array} \right. \quad (2.1-8)$$

Мы видим, что вследствие взаимосвязи между координатами, помимо линейной поляризации в направлении x , возникает поляризация второго порядка в направлении z , т. е. параллельно направлению распространения волн. Эта поляризация в свою очередь служит причиной появления поляризации третьего порядка в направлении x и т. д. Если электромагнитное излучение содержит только одну частоту (f_L), то в пренебрежении Γ_P по сравнению с $2\pi f_L$ из (2.1-7) следует зависимость между амплитудой дипольного момента и напряженностью поля

в первом порядке:

$$\hat{p}_x^{(1)}(f_L) = -\frac{e^2}{m_E} \frac{1}{(2\pi f_L)^2} \hat{E}_x(f_L). \quad (2.1-9)$$

Последняя формула совпадает с формулой Томсона для релеевского рассеяния на свободном электроне. Для амплитуды дипольного момента на частоте $2f_L$ из (2.1-8) следует

$$\hat{p}_z^{(2)}(2f_L) = -\frac{ie^3}{8m_E^2 c} \frac{1}{(2\pi f_L)^3} \hat{E}_x^2(f_L). \quad (2.1-10)$$

Как и в линейном, так и в квадратичном случае некогерентное излучение, связанное с $\hat{p}_x^{(1)}(f_L)$ или $\hat{p}_z^{(2)}(2f_L)$ (отчасти вследствие флуктуаций плотности), значительно слабее когерентного излучения. Последнее возникает в результате сложения дипольных моментов в соответствующим образом выбранном элементе объема с появлением поляризации $P = \gamma \hat{p}$ (γ — плотность электронов).

Поскольку направление поляризации второго порядка параллельно направлению распространения, соответствующее когерентное излучение может появиться только на границах плазмы. Экспериментальные исследования нелинейных свойств плазмы выполнены главным образом в микроволновой области.

§ 2.2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С ЭЛЕКТРОНАМИ В АТОМАХ И МОЛЕКУЛАХ. МОДЕЛЬ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ЭФФЕКТОВ

Для выяснения общей математической структуры зависимости между поляризацией P и напряженностью электрического поля E мы применили в разд. 1.11 модель диэлектрика, в которой точечные заряды упруго связаны с определенными положениями равновесия. В настоящем параграфе мы расширим эти представления и введем в рассмотрение для соотношения P .[E .] модель оптического электрона в атомах и молекулах; при этом точечные заряды соответствующим образом отождествляются с атомными остовами или оптически электронами. Для получения количественной зависимости P .[E .] мы проведем оценки порядков величин встречающихся важнейших констант.

Общий метод основывается на представлениях модели атома Дж. Дж. Томсона, в которой электроны в атоме являются упруго связанными. П. Друде и Г. А. Лоренц развили на этой основе исключительно плодотворную модель линейной поляризации. В принципе для адекватного описания линейной поляризации требуется применение квантовой механики (см. т. 2), поскольку необходимо располагать конкретными данными о строении атома. Тем не менее основанная на классических представлениях сравнительно простая теория линейной поляризации Друде и Лоренца имеет очень большое значение, так как значительная часть соотношений, полученных квантовомеханическим путем, приводит к такой же функциональной зависимости между важнейшими физическими величинами, что и классическая теория. Определенные предпосылки Друде и Лоренца, например, о существовании упруго связанных с положениями равновесия электронов в атомах непосредственно не реализуются в природе. Однако при надлежащей интерпретации встречающихся констант в известной мере удается достичь эквивалентности между квантовомеханической и классической теориями линейной поляризации.

Так, например, фигурирующая в теории Друде — Лоренца резонансная частота f_E должна быть отождествлена с квантовомеханической частотой электронного перехода; в связи с этим из уравнения (1.11-3) получается следующее выражение для линейной силовой постоянной k_E , характеризующей возвращающую силу:

$$k_E = -m_E(2\pi f_E)^2 = -m_E \omega_E^2, \quad (2.2-1)$$

где m_E — масса электрона. Для частот переходов в ультрафиолетовой области спектра следует принять $\omega_E \approx 10^{16} \text{ с}^{-1}$, откуда получается $|k_E| \approx 10^2 \text{ Н/м}$. С помощью закона вириала можно получить приближенное соотношение между силовой постоянной k_E и силой $eE_{\text{атом}}$, действующей на электрон из центра атома: если R есть среднее расстояние электрона от центра атома, то $m_E \omega_E^2 R \approx e |E_{\text{атом}}|$. Отсюда следует

$$|k_E| \approx \frac{e |E_{\text{атом}}|}{R} \quad (2.2-2)$$

(e — элементарный заряд). Для рассматриваемых электронов следует положить $|E_{\text{атом}}| \approx 10^{11}$ В/м. Эта величина соответствует напряженности поля, действующей на элементарный заряд на расстоянии атомного радиуса Бора. При сравнении классического и квантовоэлектродинамического описаний следует далее связать константу трения Γ_E [ср. уравнение (1.11-8)] с шириной линии или с временем жизни:

$$\Gamma_E = \Delta\omega E = \frac{1}{\tau_E}. \quad (2.2-3)$$

Если время жизни определяется только затуханием излучения, то в соответствии с коэффициентом Эйнштейна для спонтанного излучения следует положить $\tau_E \approx \approx 10^{-8}$ с. Отсюда видно, что потеря энергии за один период колебания сравнительно невелика ($\Gamma_E \ll \omega_E$).

В настоящем параграфе модель Друде — Лоренца будет распространена на *нелинейные* процессы. Как мы уже убедились (см. разд. 1.11), возможен вывод фундаментального уравнения, содержащего классическое описание НЛО, при использовании нелинейной силы; вследствие появления при этом поляризационных членов высшего порядка по E в принципе достигается полное теоретическое объяснение важнейших экспериментально обнаруживаемых эффектов НЛО. Как и в линейном случае, кроме того, может быть дана количественная интерпретация функций восприимчивости высших порядков. Для этой цели следует воспользоваться определенными общими свойствами нелинейной теории, в частности свойствами симметрии, рассмотренными в разд. 1.22. В дальнейшем оказывается возможным ограничиться простейшим случаем нелинейной силы: порядки величин отклонения X от положения равновесия и силовые постоянные k_E, k'_E, \dots таковы, что в разложении силы (1.11-3) можно пренебречь членами третьего и высших порядков по сравнению с членами первого и второго порядков. В данном параграфе мы примем, что соблюдаются допущения разд. 1.11 для постоянной объемной поляризации: молекула или кристалл будут считаться построенными из носителей заряда таким образом, что в отсутствие внешнего поля поляризация равна нулю.

2.21. Модель простого ангармонического осциллятора

Полученное только на основании соображений симметрии уравнение (1.22-9) показывает, что эффекты второго порядка (например, получение второй гармоники и суммарных и разностных частот) не могут возникать в системах с центром инверсии. Однако, поскольку описание именно этих эффектов является особенно важным, мы не будем рассматривать модели, построенные по типу атома водорода или щелочного металла (обладающего инверсионной симметрией). Вместо таких моделей мы воспользуемся моделью, в которой центр тяжести оптического электрона расположен вне центра сферически симметричной системы (скажем, на оси x). Такое эксцентрическое положение равновесия определяется молекулярными или кристаллическими силами. Далее мы примем, что рассматриваемый оптический электрон в молекулярной или кристаллической системе принадлежит к электронам, образующим связь. Зависимость потенциальной энергии от смещения центра тяжести размазанного облака заряда оптического электрона определяется электростатическими и квантовомеханическими силами, обусловленными всеми взаимодействующими с ним носителями заряда, а также симметрией молекулы или кристаллической решетки; предсказание детального хода потенциала для общего случая сделать невозможно, так как при тех или иных конкретных условиях могут иметь место самые разнообразные потенциальные функции. Однако возможно указать общее свойство интересующих нас типичных потенциальных функций: по порядку величины квадратичные силы приближаются к линейным силам, если смещение центра тяжести достигает значения межатомного расстояния R' ($R' \approx 10^{-10}$ м). Для силовых постоянных имеет место соотношение

$$|k_E| \approx |k'_E| \cdot R', \quad (2.21-1)$$

причем $|k'_E| \approx 10^{12}$ Н/м². С этим численным значением получают объяснение порядки величин многих важных эффектов второго порядка в типичных группах веществ.

Чтобы сделать наши представления о возникновении дипольного момента при наложении электрического поля

достаточно определенными, рассмотрим смещение центра тяжести заряда в некотором фиктивном одномерном силовом поле, удовлетворяющем соотношениям (2.2-2) и (2.21-1). Примем, что сила, действующая на центр тяжести электрона в направлении X , описывается выражением

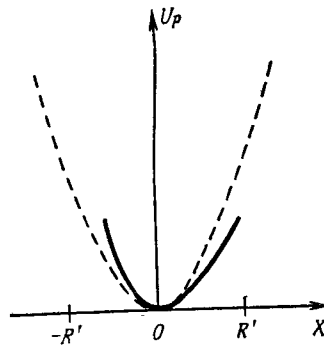
$$K(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Первый член, зависящий от r , имеет вид кулоновской силы, причем r есть расстояние центра тяжести электрона от центра сферической системы (такой системой может быть, например, атомный остаток). Второй, постоянный член отображает силу, определяющую равновесное расстояние $r = R$. При разложении по смещению $X = r - R$ центра тяжести отсюда получим для силовой постоянной k_E

$$k_E = \left(\frac{dK(r)}{dr} \right)_{r=R} = -\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (2.21-2)$$

и для силовой постоянной k'_E

$$k'_E = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2K(r)}{dr^2} \right)_{r=R} = \frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0 R^4}. \quad (2.21-3)$$



Фиг. 9. Вид потенциала для движения электронов. Для сравнения пунктирной кривой показан ход потенциала для гармонического осциллятора.

Полагая $R = R'$, при одновременном соблюдении соотношений (2.2-2) и (2.21-1) получим правильные оценки порядков величин для k_E и k'_E . Тип потенциала, соответствующего $K(X)$, показан на фиг. 9; отклонение от гармонического потенциала характерно для нелинейных эффектов.

При развитых нами модельных представлениях уравнение движения (1.11-6) переходит в

$$m_E \frac{d^2X}{dt^2} = k_E X + k'_E X^2 - eE - m_E \Gamma_E \frac{dX}{dt}. \quad (2.21-4)$$

По аналогии с методом, изложенным в разд. 1.111, мы заранее предполагаем, что отдельные дипольные моменты $-eX$ образуются независимо друг от друга; при этом в соответствии со структурой среды принимается, что в начале координат находится равный по величине положительный заряд. Тогда для поляризации $P = -\gamma e X$ (γ — плотность дипольных моментов) получается соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2} P + \Gamma_E \frac{d}{dt} P + \omega_E^2 P = \frac{\gamma e^2}{m_E} E - \frac{k'_E}{\gamma e m_E} P^2. \quad (2.21-5)$$

2.22. Следствия из модельных представлений

Определяющее уравнение (2.21-5) для поляризации является частным случаем уравнения (1.11-8). Решение последнего было получено методом последовательных приближений во временном представлении и имеет вид уравнений (1.11-13). Решение в частотном представлении можно получить на основании общих соотношений между временным и частотным представлениями (см. разд. 1.13) путем применения преобразования Фурье к отдельным поляризационным членам; однако в рассматриваемом случае можно проще достичь цели, если подвергнуть преобразованию Фурье дифференциальное уравнение (2.21-5):

$$\{- (2\pi f)^2 + i2\pi f \Gamma_E + \omega_E^2\} P(f) = \frac{\gamma e^2}{m_E} E(f) - \frac{k'_E}{\gamma e m_E} \int_{-\infty}^{+\infty} df' P(f') P(f-f') \quad (2.22-1)$$

и затем прямым путем, используя метод последовательных приближений, определить отдельные поляризационные члены в частотном представлении. Так, для первого порядка непосредственно получим

$$P^{(1)}(f) = \chi^{(1)}(f) E(f), \quad \text{где}$$

$$\chi^{(1)}(f) = \frac{\gamma e^2}{m_E} \{- (2\pi f)^2 + i2\pi f \Gamma_E + \omega_E^2\}^{-1}, \quad (2.22-2)$$

и для второго порядка

$${}^1P^{(2)}(f) = -\frac{k'_E}{\gamma^2 e^3} {}^1\chi^{(1)}(f) \int_{-\infty}^{\infty} df' {}^1P^{(1)}(f') {}^1P^{(1)}(f-f'). \quad (2.22-3)$$

Если этому результату придать форму уравнения (1.13-9), для чего следует положить $f' = f_1$ и $f - f' = f_2$, то получим функцию восприимчивости второго порядка

$${}^1\chi^{(2)}(f_1, f_2) = -\frac{k'_E}{\gamma^2 e^3} {}^1\chi^{(1)}(f_1 + f_2) {}^1\chi^{(1)}(f_1) {}^1\chi^{(1)}(f_2). \quad (2.22-4)$$

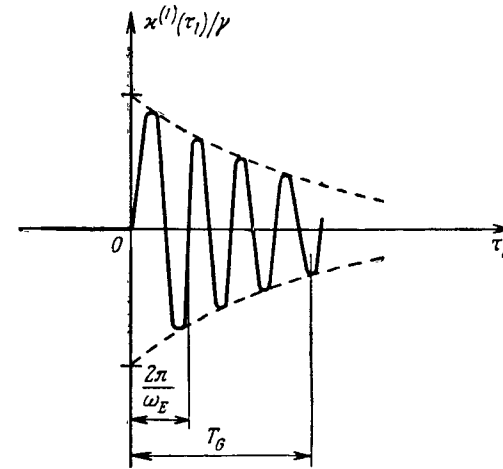
Аналогичным путем можно получить и более высокие порядки.

Функция восприимчивости первого порядка играет важную роль при построении решения по методу последовательных приближений. Во временном представлении имеем

$${}^1\chi^{(1)}(\tau_1) = \begin{cases} \frac{\gamma e^2}{m_E \sqrt{\omega_E^2 - \frac{\Gamma_E^2}{4}}} e^{-\frac{\Gamma_E}{2} \tau_1} \sin\left(\tau_1 \sqrt{\omega_E^2 - \frac{\Gamma_E^2}{4}}\right) & \text{для } \tau_1 \geq 0, \\ 0 & \text{для } \tau_1 \leq 0. \end{cases} \quad (2.22-5)$$

Функция ${}^1\chi^{(1)}(\tau_1)/\gamma$ отражает связь между отдельным дипольным моментом и напряженностью поля; она представлена схематически на фиг. 10. Время $T_G = 2\tau_E$ уменьшения амплитуды в e раз может рассматриваться в смысле разд. 1.12 как время запоминания; если действует только затухание излучения, то $T_G \approx 10^{-8}$ с. Если же, кроме того, эффективны другие релаксационные механизмы, то для времени могут получаться меньшие порядки. Функция, представленная на фиг. 10, характеризует изменение дипольного момента со временем после того, как в момент времени $\tau_1 = 0$ подействовал единичный импульс напряженности поля. Частотную зависимость отдельного дипольного момента описывает функция ${}^1\chi^{(1)}(f)/\gamma$. Кривая на фиг. 10 является типичной резонансной кривой, где Γ_E и $\sqrt{\omega_E^2 - \frac{\Gamma_E^2}{4}} \approx \omega_E$ представляют соответственно резонансную ширину и резонанс-

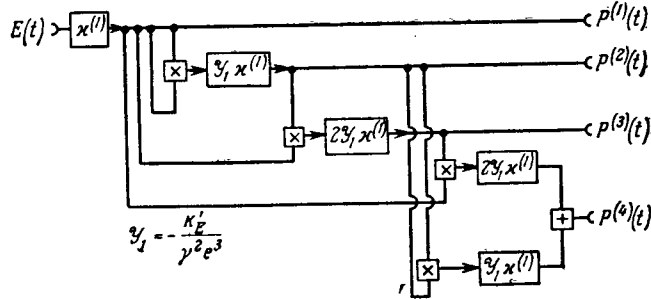
ную частоту. При $\omega \ll \omega_E$ имеем ${}^1\chi^{(1)}(f)/\gamma \approx e^2/m_E \omega_E^2$. До сих пор мы получали поляризационные члены различных порядков арифметическим способом. Примененный при этом метод последовательных приближений легко можно представить наглядно, если воспользоваться блок-схемой (фиг. 11), как это обычно принято в электронике.



Фиг. 10. Схематическое представление функции ${}^1\chi^{(1)}(\tau)$. Пунктирные кривые начинаются от точек $\pm e^2/m_E \omega_E$.

В блоках задаются одна или несколько входных величин и в результате заданной в оперативном блоке операции получается некоторая выходная величина. Имеются блоки трех типов. Первые из них обозначаются $\mathcal{Y}_1 {}^1\chi^{(1)}$. Они представляют собой линейный четырехполюсник, характеризуемый функцией системы $\mathcal{Y}_1 {}^1\chi^{(1)}(\tau)$ (ср. с разд. 1.12) или, что эквивалентно, частотной функцией $\mathcal{Y}_1 {}^1\chi^{(1)}(f)$ (ср. с разд. 1.13); при этом \mathcal{Y}_1 является не зависящим от частоты коэффициентом усиления. В блоках, отмеченных знаком \dagger , обе входные величины складываются, а в блоках, отмеченных знаком \times , перемножаются. Схема на фиг. 11 позволяет получить в наглядной форме поляризационные функции различных порядков во времен-

ном и частотном представлениях. В частности, в случае дискретных частот справедливо следующее: амплитуда на выходе из линейного четырехполюсника $\mathcal{Y}_1 \chi^{(1)}$ есть $\mathcal{Y}_1 \chi^{(1)}(f) \hat{E}(f)$, где $\hat{E}(f)$ — амплитуда на входе для частоты f . Если в блоке типа \times имеются две входные амплитуды $\hat{E}(f_1)$ и $\hat{E}(f_2)$, то в качестве выходной величины получают колебания с частотой $f_1 + f_2$, амплитудой $\frac{1}{2} \hat{E}(f_1) \hat{E}(f_2)$ и с частотой $f_1 - f_2$, амплитудой $\frac{1}{2} \hat{E}(f_1) \hat{E}^*(f_2)$.



Фиг. 11. Блок-схема для получения компонент поляризации.

Воспользуемся теперь схемой фиг. 11 для оценок различных порядков величин, характеризующих модельный нелинейный эффект — получение высших гармоник. Представим себе, что на атомную систему действует напряженность поля, совершающего колебание с частотой f и амплитудой $E(f)$. Для различных порядков поляризации можем записать

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(1)}(f) &= \hat{E}(f) \chi^{(1)}(f), \\ \hat{P}^{(2)}(2f) &= [\hat{E}(f) \chi^{(1)}(f)] [\hat{E}(f) \chi^{(1)}(f)] \frac{1}{2} \mathcal{Y}_1 \chi^{(1)}(2f), \quad (2.22-6) \\ \hat{P}^{(3)}(3f) &= \hat{P}^{(1)}(f) \hat{P}^{(2)}(2f) \frac{1}{2} 2\mathcal{Y}_1 \chi^{(1)}(3f). \end{aligned}$$

В соответствии с уравнением (1.21-27) отсюда следуют формулы для коэффициентов пропорциональности между амплитудами поляризации и напряженности поля

$$\chi^{(1)}(f; f) = \chi^{(1)}(f),$$

$$\chi^{(2)}(2f; f, f) = -\frac{1}{2} \frac{k'_E}{\gamma^2 e^3} \chi^{(1)}(2f) [\chi^{(1)}(f)]^2, \quad (2.22-7)$$

$$\chi^{(3)}(3f; f, f, f) = \frac{1}{2} \frac{k'_E}{\gamma^4 e^6} \chi^{(1)}(3f) \chi^{(1)}(2f) [\chi^{(1)}(f)]^3.$$

Например, при $k'_E = 10^{12}$ Н/м², $\gamma = 10^{23}$ м⁻³, $\omega_E = 10^{16}$ с⁻¹ получим, что $|\chi^{(2)}| \approx 10^{-22}$ А·с/В². Эта величина по порядку согласуется со значением восприимчивости, указанным *в разд. 1.22. Таким образом, мы приходим к выводу, что наша модель правильно воспроизводит по порядку величины важнейшие нелинейные свойства типичных веществ. Для относительных значений поляризации последовательных порядков имеем

$$\frac{1}{|\hat{E}(f)|} \frac{|\hat{P}^{(2)}(2f)|}{|\hat{P}^{(1)}(f)|} = \frac{1}{2} \frac{|k'_E|}{\gamma^2 e^3} |\chi^{(1)}(f)| |\chi^{(1)}(2f)| = \frac{|\chi^{(2)}(2f; f, f)|}{|\chi^{(1)}(f; f)|}, \quad (2.22-8)$$

$$\frac{1}{|\hat{E}(f)|} \frac{|\hat{P}^{(3)}(3f)|}{|\hat{P}^{(2)}(2f)|} = \frac{|k'_E|}{\gamma^2 e^3} |\chi^{(1)}(f)| |\chi^{(1)}(3f)| = \frac{|\chi^{(3)}(3f; f, f, f)|}{|\chi^{(2)}(2f; f, f)|}. \quad (2.22-9)$$

В соответствии с условиями, при которых обычно осуществляется получение высших гармоник, примем, что частоты f , $2f$, $3f$ находятся в области спектральной прозрачности и достаточно удалены в сторону низших частот от резонансной частоты f_E . Эти условия можно выразить требованием $3f \leq 3/4 f_E$. Тогда на основании уравнения (2.22-2) можно положить величины $|\chi^{(1)}(f)|$, $|\chi^{(1)}(2f)|$ и $|\chi^{(1)}(3f)|$ приблизительно равными $\gamma e^2 / m_E \omega_E^2$. При использовании соотношений (2.2-1), (2.2-2) и (2.21-1) отсюда следует, что правые части уравнений (2.22-8) и (2.22-9) по порядку величины равны $1/|E_{\text{атом}}|$. В соответствии с этой оценкой получаем

$$\frac{|\hat{P}^{(2)}(2f)|}{|\hat{P}^{(1)}(f)|} \approx \frac{|\hat{E}(f)|}{|E_{\text{атом}}|}, \quad \frac{|\hat{P}^{(3)}(3f)|}{|\hat{P}^{(2)}(2f)|} \approx \frac{|\hat{E}(f)|}{|E_{\text{атом}}|}. \quad (2.22-10)$$

Следовательно, отношение поляризационных амплитуд последовательных порядков приблизительно равно отношению заданного экспериментатором внешнего поля к внутреннему полю, характеризующему не подвергнутую воздействию атомную систему. (При $\chi^{(2)} \approx 10^{-22} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}^{-2}$ и $E_{\text{атом}} \approx 10^{11} \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$ из уравнения (2.22-10) следует, что $\chi^{(3)} \approx 10^{-33} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{В}^{-3}$.) Хотя этот результат получен только на примере возникновения высших гармоник, он может быть обобщен на другие нелинейные эффекты. Однако он справедлив при условии, что мы не попадаем в резонансную область, определяемую значением Γ_E . Соотношения (2.22-10) позволяют легко оценить величины эффектов в различных порядках, если известны величины этих эффектов в первом порядке.

В заключение настоящего раздела мы дадим еще оценку поперечного сечения для отдельного дипольного момента при генерации фотонов в первом порядке (релеевское рассеяние), во втором порядке (генерация второй гармоники) и в третьем порядке (генерация третьей гармоники). Для этого можно воспользоваться соотношениями (2.22-6). Предположим, что импульс рубинового или неодимового лазера действует на вещество, прозрачное в видимой области спектра и поглощающее в ультрафиолетовой области. В соответствии с этим примем, что резонансная частота $\omega_E = 8 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, а частота задающего излучения $\omega = 2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Пусть на атомную систему действует интенсивное излучение с $|E| = 1,4 \cdot 10^8 \text{ В/м}$ или $\langle S \rangle \approx 2,7 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^2$. Если обозначить через L мощность, излученную в полный телесный угол, то поперечное сечение будет равно $\langle L \rangle / \langle S \rangle$. Зависимость средней мощности $\langle L \rangle$ от величины p отдельного дипольного момента определяется соотношением

$$\langle L \rangle = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left\langle \left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right)^2 \right\rangle. \quad (2.22-11)$$

Из указанных численных значений для не зависящего от напряженности поля поперечного сечения первого порядка получается величина $2 \cdot 10^{-31} \text{ м}^2$, что соответствует по порядку величины значению, полученному эмпирически из релеевского рассеяния. Для зависящих от поля поперечных сечений второго и третьего порядков полу-

чаются значения $4 \cdot 10^{-35} \text{ м}^2$ и $3 \cdot 10^{-39} \text{ м}^2$. Очевидно, эти величины исключительно малы по сравнению с нормальным спектральным поперечным сечением поглощения, имеющим в ультрафиолетовой области порядок 10^{-21} м^2 .

Если излученную в n -м порядке мощность разделить на энергию $\hbar n \omega$, то получится величина, которая с квантовой точки зрения может быть интерпретирована как число фотонов, испускаемых в единицу времени. При квантовом теоретическом рассмотрении эта величина оказывается пропорциональной вероятности возникновения в единицу времени фотона с энергией $\hbar n \omega$. Представленной на фиг. 11 схеме образования суммарных и разностных частот, формирующих высшие гармоники, соответствует при квантовом теоретическом описании рождение или уничтожение фотонов.

Для получения правильного количественного представления о выходе фотонов при генерации высших гармоник следует помнить, что в экспериментах под влиянием внешних воздействий возбуждается то или иное большое число отдельных дипольных моментов в *равных* фазах. Поэтому складываются не просто мощности, излученные отдельными дипольными моментами, а происходит формирование когерентной суммарной волны (см. § 1.3). В этом случае при достаточной напряженности поля может иметь место большой выход фотонов (см. гл. 3 и 4).

§ 2.3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С АНИЗОТРОПНЫМИ МОЛЕКУЛАМИ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМ РАВНОВЕСИИ. МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ В НЛО ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА

В этом параграфе рассматривается модель для объяснения важных геометрических свойств распространения света, проявляющихся, например, в оптическом эффекте Керра и при самофокусировке. Будем характеризовать активную среду следующими свойствами: примем, что среда состоит из ансамбля молекул, находящихся в температурном равновесии. Система макроскопически изотропна. Отдельные молекулы не обладают постоянным

электрическим дипольным моментом; дипольный момент возникает лишь под действием электрического поля. Для краткого и наглядного описания сделаем еще дополнительные упрощающие предположения, не влияющие на принципиальные зависимости и приближенно выполняющиеся для многих сред. Предположим, что в связанной с молекулой системе координат только X -компонента главных поляризуемостей отлична от нуля ($\alpha_{xx} = \alpha$, $\alpha_{yy} = \alpha_{zz} = 0$). При этом мы приближаемся к свойствам вытянутых молекул (например, для сероуглерода $\alpha_{yy}/\alpha_{xx} = \alpha_{zz}/\alpha_{xx} \approx 1/3$; для многих углеводов с длинной цепью соответствующее отношение меньше $1/10$). Мы будем пренебрегать дисперсией α , а также дисперсией показателя преломления $n^{(L)}$ и диэлектрической постоянной $\epsilon^{(L)}$; в этом случае α представляет собой коэффициент пропорциональности между временной функцией дипольного момента и напряженностью электрического поля, независимо от их частотного спектра (см. § 1.2). Такое представление возможно, поскольку диэлектрическая постоянная неполярных веществ обнаруживает такую же частотную зависимость, как α , и вообще не слишком сильно изменяется при изменении частот от частоты лазерного излучения в видимой области до нулевой частоты. При этом следует, однако, исключить из рассмотрения области аномальной дисперсии в инфракрасном диапазоне. Приведем пример: значения диэлектрической постоянной CS_2 на частоте рубинового лазера и на нулевой частоте различаются всего лишь на 1%. В общем виде наше основное предположение заключается в том, что в обсуждаемых экспериментах частоты излучения лазеров достаточно удалены от электронных частот молекулы. В связанной с молекулой системе координат соотношение между дипольным моментом и напряженностью поля принимается строго линейным, что вполне оправданно при не слишком больших напряженностях поля. Наконец, мы будем считать, что молекулы среды взаимодействуют между собой только через индуцированные в них диполи; таким образом, мы пренебрегаем другими формами межмолекулярных сил.

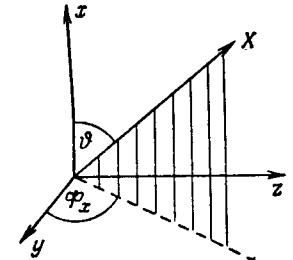
2.31. Расчет зависимости между поляризацией и напряженностью поля

Прежде всего рассчитаем вклад одной молекулы в поляризацию. Пусть в направлении x пространственной системы координат (x, y, z) на молекулу действует поле $E_{(w)x}$ с компонентами на частотах f_1 и f_2 , а в направлении y — поле $E_{(w)y}$ с частотой f_1 , слабое по сравнению с полем $E_{(w)x}$. Как было указано в введении к настоящей главе, под величинами $E_{(w)}$ следует понимать эффективные поля, действующие в месте нахождения молекулы; на связи между $E_{(w)}$ и напряженностью макроскопического поля E при заданных условиях мы остановимся ниже в данном параграфе. Рассчитаем ориентацию молекулы в сильном поле в направлении x . Вследствие специальной формы эллипсоида поляризуемости нас интересует только положение оси X относительно пространственной системы координат. Это положение задается углами θ и Φ_x (см. фиг. 12). Вероятность того, что ось X молекулы образует углы, заключенные в пределах $\theta, \theta + d\theta$ и $\Phi_x, \Phi_x + d\Phi_x$, при температуре \mathcal{T} определяется распределением Больцмана

$$W(\theta) d\theta d\Phi_x = C e^{-\langle U_p \rangle / k\mathcal{T}} \sin \theta d\theta d\Phi_x, \quad (2.31-1)$$

где C является константой, $\langle U_p \rangle$ — усредненное по времени значение потенциальной энергии индуцированного диполя в действующем поле за время T , превышающее среднее время релаксации молекулы (10^{-11} до 10^{-12} с); время T велико также по сравнению с периодом колебаний световой волны в оптической области. «Быстро», т. е. со световыми частотами, меняющиеся компоненты потенциальной энергии не оказывают влияния на ориентацию. Если за начало отсчета потенциальной энергии принять состояние в отсутствие поля, то

$$\langle U_p \rangle = -\frac{\alpha}{2} \langle E_{(w)x}^2 \rangle \cos^2 \theta. \quad (2.31-2)$$



Фиг. 12. Положение молекулярной оси X в лабораторной системе координат.

Константа C в уравнении (2.31-1) определяется из условия нормировки

$$\int_0^{2\pi} d\Phi_x \int_0^{\pi} d\theta W(\theta) = 1. \quad (2.31-3)$$

При вычислении последнего интеграла, как и во всех последующих расчетах, предполагается, что усредненная по времени потенциальная энергия диполя в электрическом поле мала по сравнению с $k\mathcal{F}$. Применимость такого предположения ограничена не очень сильными полями $E_{(w)}$ и, кроме того, не слишком низкими температурами. При комнатной температуре это условие очень хорошо выполняется для описываемых диэлектриков, вообще говоря, вплоть до макроскопических полей, при которых наступает электрический пробой диэлектрика. Введем параметр разложения

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \frac{\langle E_{(w)x}^2 \rangle}{k\mathcal{F}} \quad (2.31-4)$$

и потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\beta \ll 1. \quad (2.31-5)$$

В разложениях, которые нам предстоит выполнить, мы будем учитывать только члены, содержащие β в степени не выше первой. (При этом и дальнейших интегрированиях целесообразно произвести замену $\sqrt{\beta} \cos \theta = \xi$.) Тогда из уравнения (2.31-3) получим

$$1 = C \int_0^{2\pi} d\Phi_x \int_0^{\pi} d\theta (1 + \beta \cos^2 \theta) \sin \theta + \dots \\ \dots = 4\pi C \left(1 + \frac{1}{3} \beta\right) + \dots,$$

откуда с точностью до членов порядка β^1 для нормирующего множителя следует

$$C = \frac{1}{4\pi} \left[1 - \frac{1}{3} \beta\right]. \quad (2.31-6)$$

Пользуясь вероятностью $W(\theta) d(\theta) d\Phi_x$, мы можем вычислить статистически усредненные компоненты дипольного момента в пространственной системе координат в присутствии полей $E_{(w)x}$, $E_{(w)y}$. Ориентация молекулы между углами θ и $\theta + d\theta$ и между углами Φ_x и $\Phi_x + d\Phi_x$ вносит вклады

$$dp_x(\theta, \Phi_x) = (\alpha E_{(w)x} \cos^2 \theta + \\ + \alpha E_{(w)y} \cos \Phi_x \sin \theta \cos \theta) W(\theta) d\Phi_x d\theta, \\ dp_y(\theta, \Phi_x) = (\alpha E_{(w)x} \cos \theta \sin \theta \cos \Phi_x + \\ + \alpha E_{(w)y} \cos^2 \Phi_x \sin^2 \theta) W(\theta) d\Phi_x d\theta \quad (2.31-7)$$

в x - и y -компоненты дипольного момента p . Интегрирование по θ и по Φ_x даст полный статистически усредненный дипольный момент. При этом интегралы по Φ_x во втором слагаемом в dp_x и в первом слагаемом в dp_y обращаются в нуль и мы придем к результату

$$\langle p_x \rangle_0 = \alpha E_{(w)x} \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{45} \beta\right), \\ \langle p_y \rangle_0 = \alpha E_{(w)y} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{45} \beta\right). \quad (2.31-8)$$

Суммируя все дипольные моменты в единице объема, получим поляризацию среды. При вычислении поляризации элемента объема однородной среды, линейные размеры которого малы по сравнению с имеющимися длинами волн, можно при данном статистическом рассмотрении принять, что эффективные поля во всех местах нахождения молекул равны. Тогда из уравнений (2.31-8) и (2.31-4) получим

$$P_x = \frac{\gamma\alpha}{3} E_{(w)x} + \frac{2}{45} \frac{\gamma\alpha^2}{k\mathcal{F}} \langle E_{(w)x}^2 \rangle E_{(w)x}, \\ P_y = \frac{\gamma\alpha}{3} E_{(w)y} - \frac{1}{45} \frac{\gamma\alpha^2}{k\mathcal{F}} \langle E_{(w)x} \rangle E_{(w)y}. \quad (2.31-9)$$

В этом уравнении получена нелинейная связь между поляризацией и напряженностями действующих полей.

Чтобы можно было сделать предсказания, сравнимые с экспериментом, необходимо знать связь между полем $E_{(w)}$ и макроскопическим полем E . Обе величины

совпадают только в разреженных газах, для которых уравнение (2.31-9) выражает искомую связь между P и E . Геометрические эффекты распространения наблюдаются, однако, наиболее часто в плотных средах, в которых связь между $E_{(w)}$ и E является значительно более сложной. Но если сделать ранее использовавшееся предположение о не слишком сильных полях ($\alpha/2 \langle E_x^2 \rangle \ll kT$), то можно исходить из уравнения (2.1)

$$E_{(w)} = E + \frac{1}{3\epsilon_0} P.$$

Выделим теперь в поляризации члены, линейные и нелинейные относительно $E_{(w)}$:

$$P = P_{(w)}^{(НЛ)} + P_{(w)}^{(Л)}. \quad (2.31-10)$$

Для $P_{(w)}^{(Л)}$ имеем

$$P_{(w)}^{(Л)} = \frac{\gamma\alpha}{3} E_{(w)}. \quad (2.31-11)$$

Из уравнений (2-1), (2.31-10) и (2.31-11) следует, что

$$P_{(w)}^{(Л)} = \epsilon_0 (e^{(Л)} - 1) \left[E + \frac{1}{3\epsilon_0} P_{(w)}^{(НЛ)} \right], \quad (2.31-12)$$

где

$$e^{(Л)} = 1 + \frac{\frac{\gamma\alpha}{3\epsilon_0}}{1 - \frac{\gamma\alpha}{9\epsilon_0}} \quad (2.31-13)$$

есть диэлектрическая постоянная в члене, линейном относительно E . Из уравнения (2.31-12) и соотношения

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (2.31-14)$$

мы получаем электрическое смещение как функцию напряженности поля и величины $P_{(w)}^{(НЛ)}$:

$$D = \epsilon_0 e^{(Л)} E + \frac{e^{(Л)} + 2}{3} P_{(w)}^{(НЛ)}. \quad (2.31-15)$$

Величина

$$P_{(w)}^{(НЛ)} = \frac{e^{(Л)} + 2}{3} P_{(w)}^{(НЛ)}. \quad (2.31-16)$$

представляет собой часть поляризации, нелинейную относительно E . Как видно из вывода последнего соотно-

шения, оно справедливо не только для рассмотренной модели анизотропной молекулы, но во всех случаях, когда можно считать соблюдающимися уравнение (2.1) и соотношение $P_{(w)}^{(Л)} = \chi_{(w)}^{(Л)} E_{(w)}$. Рассчитаем теперь $P_{(w)}^{(НЛ)}$ как функцию E , исходя из соответствующего соотношения между $P_{(w)}^{(НЛ)}$ и $E_{(w)}$. При этом мы заранее предположим, что в $P_{(w)}^{(НЛ)}$ присутствует только член определенного порядка n относительно $E_{(w)}$ и что только член этого порядка является существенным. [Для специальной модели это предположение выполняется согласно уравнению (2.31-9).] При этом предположении можно выразить величину $E_{(w)}$ в соотношении $P_{(w)}^{(НЛ)}(E_{(w)})$ через E при помощи уравнения

$$E_{(w)} = \frac{e^{(Л)} + 2}{3} E. \quad (2.31-17)$$

Возникающее соотношение $P(E)$ строго соблюдается вплоть до n -го порядка относительно E . (Для $P_{(w)}^{(n)} = \chi_{(w)}^{(n)} E_{(w)}^{(n)}$ получается $P^{(n)} = [(e^{(Л)} + 2)/3]^{n+1} \chi_{(w)}^{(n)} E^n$.)

Для модели, используемой в настоящем параграфе, следует подставить $P_{(w)}$ из уравнения (2.31-9) в уравнение (2.31-15) и выражение для $E_{(w)}$ из уравнения (2.31-17):

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_0 e^{(Л)} E_x + \left(\frac{e^{(Л)} + 2}{3} \right)^4 \frac{2}{45} \frac{\gamma\alpha^2}{kT} \langle E_x^2 \rangle E_x, \\ D_y &= \epsilon_0 e^{(Л)} E_y - \left(\frac{e^{(Л)} + 2}{3} \right)^4 \frac{1}{45} \frac{\gamma\alpha^2}{kT} \langle E_x^2 \rangle E_y. \end{aligned} \quad (2.31-18)$$

Уравнения (2.31-18) можно представить в форме

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_0 \epsilon_{\parallel} E_x, \\ D_y &= \epsilon_0 \epsilon_{\perp} E_y, \end{aligned} \quad (2.31-19)$$

причем величины

$$\epsilon_{\parallel} = e^{(Л)} + \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{e^{(Л)} + 2}{3} \right)^4 \frac{2}{45} \frac{\gamma\alpha^2}{kT} \langle E_x^2 \rangle \quad (2.31-20)$$

и

$$\epsilon_{\perp} = e^{(Л)} - \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{e^{(Л)} + 2}{3} \right)^4 \frac{1}{45} \frac{\gamma\alpha^2}{kT} \langle E_x^2 \rangle$$

следует рассматривать как обобщенные, зависящие от напряженности поля «диэлектрические постоянные», (Индексы \parallel и \perp указывают на то, что соответствующие постоянные относятся к волнам, поляризованным параллельно и перпендикулярно ориентирующему полю.)

Полагая

$$\epsilon_{\parallel, \perp} = n_{\parallel, \perp}^2 = (n^{(J)} + \delta n_{\parallel, \perp})^2 \approx n^{(J)2} + 2n^{(J)} \delta n_{\parallel, \perp},$$

можно формально получить и соответствующие изменения $\delta n_{\parallel, \perp}$ показателя преломления:

$$\begin{aligned} \delta n_{\parallel} &= \frac{1}{2\epsilon_0 n^{(J)}} \left[\frac{n^{(J)2} + 2}{3} \right]^4 \frac{2}{45} \frac{\gamma \alpha^2}{k\mathcal{F}} \langle E_x^2 \rangle, \\ \delta n_{\perp} &= -\frac{1}{2\epsilon_0 n^{(J)}} \left[\frac{n^{(J)2} + 2}{3} \right]^4 \frac{1}{45} \frac{\gamma \alpha^2}{k\mathcal{F}} \langle E_x^2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.31-21)$$

Из уравнений (2.31-15), (2.31-16) и (2.31-18) следуют формулы для нелинейной поляризации:

$$\begin{aligned} P_x^{(HJ)} &= \left[\frac{\epsilon^{(J)} + 2}{3} \right]^4 \frac{2}{45} \frac{\gamma \alpha^2}{k\mathcal{F}} \langle E_x^2 \rangle E_x, \\ P_y^{(HJ)} &= -\left[\frac{\epsilon^{(J)} + 2}{3} \right]^4 \frac{1}{45} \frac{\gamma \alpha^2}{k\mathcal{F}} \langle E_x^2 \rangle E_y. \end{aligned} \quad (2.31-22)$$

2.32. Применение полученных соотношений

Система уравнений (2.31-21) содержит, в частности, описание нормального эффекта Керра, при котором ориентирующее действие создается постоянным полем напряженностью $|\mathcal{E}(0)|$. В этом случае принято характеризовать свойства среды константой Керра

$$\mathcal{K} = \frac{n_{\parallel} - n_{\perp}}{\lambda_0 \langle E_x^2 \rangle} = \frac{n_{\parallel} - n_{\perp}}{\lambda_0 |\mathcal{E}(0)|^2}, \quad (2.32-1)$$

в которой λ_0 — длина волны применяемого света в вакууме. Для нашей модели из уравнения (2.31-21) для константы Керра следует

$$\mathcal{K} = \frac{1}{30\epsilon_0 n^{(J)}} \left[\frac{n^{(J)} + 2}{3} \right]^4 \frac{\alpha^2 \gamma}{k\mathcal{F} \lambda_0}. \quad (2.32-2)$$

Чтобы получить зависимость константы Керра, а также величин δn_{\parallel} и δn_{\perp} от минимального числа параметров среды, следует выразить поляризуемость α через линейный показатель преломления $n^{(J)}$ и плотность γ согласно соотношению

$$\alpha = \frac{n^{(J)2} - 1}{n^{(J)2} + 2} \frac{9\epsilon_0}{\gamma}. \quad (2.32-3)$$

При очень малых амплитудах поля молекула с принятой вначале формой эллипсоида поляризуемости действует как молекула со сферически симметричной поляризуемостью (в слабых полях среда может рассматриваться в макроскопическом смысле как изотропная), так что $\alpha_K = \alpha/3$. Подставляя α из (2.32-3), получаем

$$\mathcal{K} = \frac{1}{30} \frac{\epsilon_0}{\gamma \lambda_0 k\mathcal{F} n^{(J)}} [n^{(J)2} + 2] [n^{(J)2} - 1]^2. \quad (2.32-4)$$

В качестве примера рассчитаем константу Керра вещества с сильно анизотропными молекулами. При типичных параметрах $n^{(J)} = 1,5$, $\gamma = 1 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, при длине волны рубинового лазера (0,7 мкм) и при комнатной температуре получим $\mathcal{K} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2/\text{В}^2$; из этого значения следует, что при $|\mathcal{E}(0)|^2 \approx 10^{13} \text{ В}^2/\text{м}^2$ можно получить разность показателей преломления $(n_{\parallel} - n_{\perp}) \approx 2 \cdot 10^{-6}$. По формуле

$$\Delta l = (n_{\parallel} - n_{\perp}) l$$

при длине кюветы $l = 0,3 \text{ м}$ следует, что разность хода Δl волн, поляризованных параллельно и перпендикулярно постоянному полю, имеет порядок длины волны λ_0 . Эта оценка согласуется по порядку величины с экспериментальными результатами. Установки, основанные на описанном эффекте и называемые ячейками Керра, находят широкое применение в НЛЮ и в других областях физики в качестве быстрых затворов. Для данной среды время переключения ячейки Керра определяется только очень короткими временами установления ориентации молекул.

Рассмотрим теперь изменения оптических констант, вызываемые сильной световой волной. Для

напряженностей поля примем соотношения

$$\begin{aligned} E_x(t) &= \frac{1}{2} [\hat{E}_x(f_1) e^{i2\pi f_1 t} + \hat{E}_x(f_2) e^{i2\pi f_2 t} + \{\text{КК}\}], \\ E_y(t) &= \frac{1}{2} [\hat{E}_y(f_2) e^{i2\pi f_2 t} + \{\text{КК}\}] \end{aligned} \quad (2.32-5)$$

с

$$|\hat{E}_x(f_1)| \gg |\hat{E}_x(f_2)|, \quad |\hat{E}_y(f_2)|,$$

откуда следует, что

$$\langle E_x^2 \rangle = \frac{1}{2} |\hat{E}_x(f_1)|^2. \quad (2.32-6)$$

Из этих соотношений и из уравнения (2.31-22) получим: для эффективно действующей нелинейной поляризации

$$\begin{aligned} \hat{P}_x^{(НЛ)}(f_1) &= \frac{1}{45} \left(\frac{\epsilon^{(Л)} + 2}{3} \right)^4 \frac{\gamma \alpha^2}{k \mathcal{F}} |\hat{E}_x(f_1)|^2 \hat{E}_x(f_1), \\ \hat{P}_x^{(НЛ)}(f_2) &= \frac{1}{45} \left(\frac{\epsilon^{(Л)} + 2}{3} \right)^4 \frac{\gamma \alpha^2}{k \mathcal{F}} |\hat{E}_x(f_1)|^2 \hat{E}_x(f_2), \\ \hat{P}_y^{(НЛ)}(f_2) &= -\frac{1}{90} \left(\frac{\epsilon^{(Л)} + 2}{3} \right)^4 \frac{\gamma \alpha^2}{k \mathcal{F}} |\hat{E}_x(f_1)|^2 \hat{E}_y(f_2) \end{aligned} \quad (2.32-7)$$

и для соответствующих восприимчивостей $\chi^{(3)}$

$$\begin{aligned} \chi_{xxxx}^{(3)}(f_1; f_1, -f_1, f_1) &= \frac{1}{45} \left(\frac{\epsilon^{(Л)} + 2}{3} \right)^4 \frac{\gamma \alpha^2}{k \mathcal{F}}, \\ \chi_{xxxx}^{(3)}(f_2; f_1, -f_1, f_2) &= \frac{1}{45} \left(\frac{\epsilon^{(Л)} + 2}{3} \right)^4 \frac{\gamma \alpha^2}{k \mathcal{F}}, \\ \chi_{yxy}^{(3)}(f_2; f_1, -f_1, f_2) &= -\frac{1}{90} \left(\frac{\epsilon^{(Л)} + 2}{3} \right)^4 \frac{\gamma \alpha^2}{k \mathcal{F}}. \end{aligned} \quad (2.32-8)$$

В этой форме нелинейные зависимости между амплитудами поляризации и напряженностями поля будут использованы в § 4.1 при обсуждении самофокусировки и родственных эффектов. Эти эффекты связаны с тем, что сильная световая волна изменяет показатель преломления, определяющий распространение самой этой волны или другой волны. При напряженностях поля, определяемых уравнениями (2.32-5), можно, согласно (2.31-21), ввести в рассмотрение изменения показателя преломле-

ния

$$\begin{aligned} \delta n_{\parallel} &= n^{(2)} |\hat{E}_x(f_1)|^2, \\ \delta n_{\perp} &= -\frac{1}{2} n^{(2)} |\hat{E}_x(f_1)|^2, \end{aligned} \quad (2.32-9)$$

где

$$\begin{aligned} n^{(2)} &= -\frac{1}{\epsilon_0 n^{(Л)}} \chi_{yxy}^{(3)}(f_2; f_1, -f_1, f_2) = \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0 n^{(Л)}} \chi_{xxx}^{(3)}(f_2; f_1, -f_1, f_2) \end{aligned} \quad (2.32-10)$$

отображает свойства материальной среды. Пользуясь уравнениями (2.32-3) и (2.32-8), можно привести $n^{(2)}$ к простой форме

$$n^{(2)} = \frac{1}{90} [n^{(Л)2} + 2]^2 [n^{(Л)2} - 1]^2 \frac{\epsilon_0}{n^{(Л)} \gamma k \mathcal{F}}. \quad (2.32-11)$$

Если теперь по аналогии со случаем постоянного поля [см. уравнение (2.32-1)] ввести постоянную Керра

$$\mathcal{K} = \frac{n_{\parallel} - n_{\perp}}{\lambda_0 \langle E_x^2 \rangle} = \frac{2(n_{\parallel} - n_{\perp})}{\lambda_0 |\hat{E}_x(f_1)|^2}, \quad (2.32-12)$$

то она окажется зависящей от часто употребляемого материального параметра $n^{(2)}$:

$$\mathcal{K} = \frac{3n^{(2)}}{\lambda_0}. \quad (2.32-13)$$

При использовании численных значений из приведенного выше примера получим, что $n^{(2)} \approx 5 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2/\text{В}^2$, откуда по уравнению (2.32-9) для соответствующих восприимчивостей третьего порядка следуют значения порядка $10^{-30} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}/\text{В}^3$. При амплитуде поля $\hat{E}_x(f_1) = 10^7 \text{ В}/\text{м}$, соответствующей средней мощности на единицу поверхности $1,4 \cdot 10^{11} \text{ Вт}/\text{м}^2$, для разности показателей преломления имеем $n_{\parallel} - n_{\perp} \approx 10^{-5}$.

Описанная модель дает простое объяснение влиянию на показатель преломления постоянных полей и полей оптических волн. В обоих случаях изменение показателя преломления равным образом зависит от численных значений модельных параметров. Поэтому можно ожидать,

что для веществ, приближенно описываемых нашей моделью, влияние полей оптических волн на показатель преломления может быть описано обычной постоянной Керра, определяемой статическими полями.

§ 2.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С МОЛЕКУЛЯРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ. МОДЕЛЬ ДЛЯ ВЫНУЖДЕННОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ

Вудбери и Нг [6] проводили эксперименты на лазерах с модулированной добротностью. В 1962 г. они открыли, что наряду с лазерным излучением, обладающим обычным спектральным распределением, может появляться излучение на смещенных частотах, если внутри лазера поместить определенное вещество. Смещение частоты оказалось равным частоте молекулярного колебания вещества (или целому кратному от этой частоты). Это свойство указывает на связь обнаруженного явления с неупругим рассеянием света на молекулах, существование которого было экспериментально доказано Раманом при исследовании рассеяния света в жидкостях (открытое Раманом в 1928 г. явление принято называть эффектом спонтанного комбинационного, или рамановского, рассеяния). Вслед за опытами Вудбери и Нг были предприняты многочисленные систематические исследования, при которых вещества различных типов — как упорядоченные, так и неупорядоченные системы — подвергались воздействию интенсивного лазерного излучения; при этом рассеянное излучение обнаружило свойства, существенно отличающие его от излучения при спонтанном комбинационном рассеянии. Так, например, совершенно иной оказалась зависимость от интенсивности возбуждающего излучения, а также способность к интерференции (более детально см. в гл. 4). Открытое Вудбери и Нг явление называют вынужденным, или индуцированным, *комбинационным рассеянием*.

В § 2.2 мы рассмотрели взаимодействие излучения с электронами внешних оболочек, находящимися под влиянием не зависящего от времени потенциала неподвижных атомных остовов или атомных ядер. В следующем параграфе будет рассмотрено взаимодействие излу-

чения с электронами внешних оболочек при учете движения ядер (молекулярные колебания). В то время как § 2.2 посвящен электронным эффектам в НЛО, теперь мы встречаемся с эффектом относительного движения электронов и ядер в НЛО. В этом случае, как и при электронных эффектах, на передний план выступают эффекты НЛО вследствие существования нелинейной зависимости $P.(E.)$ при достаточно больших напряжениях поля. Известные в литературе различные подходы к объяснению вынужденного комбинационного рассеяния в рамках его классического описания приводят к основным уравнениям, имеющим по существу одну и ту же математическую структуру. Мы будем здесь придерживаться представлений Гармайр, Пандарезе и Таунса [7], которые следует рассматривать как дальнейшее развитие весьма плодотворной теории поляризуемости Плачека для эффекта спонтанного комбинационного рассеяния [8]. Благодаря этому становится возможным в последующем изложении описывать спонтанный и вынужденный эффекты с помощью одной и той же модели.

2.41. Модель для описания вынужденного комбинационного рассеяния

При установлении фундаментального соотношения $P.(E.)$ можно исходить из относительно простой структуры двухатомной молекулы, состоящей из одинаковых атомов; для более сложных молекул эквивалентные уравнения получаются путем перехода к нормальным координатам.

В соответствии с общими представлениями о динамических процессах в молекуле допустим, что оба атома могут изменять свои относительные положения. Потенциальную энергию как функцию межатомного расстояния r обозначим $U'_p(r)$, причем $U'_p(r)$ является суммой электронной энергии молекулы в ее основном состоянии при фиксированном значении r и энергии отталкивания ядер. Тип функции $U'_p(r)$ показан на фиг. 13. В дальнейшем мы будем предполагать, что имеют место только малые отклонения X от положения равновесия, так что потенциальная энергия может быть записана в

гармоническом приближении

$$U'_p(X) = \frac{k_M}{2} X^2, \quad (2.41-1)$$

где k_M — силовая постоянная.

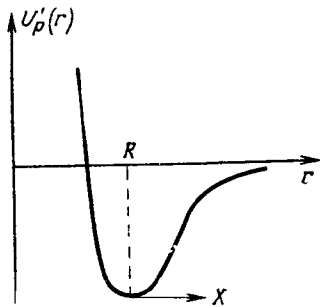
Во внешнем электрическом поле E . индуцируется дипольный момент p .; под влиянием внешней силы смещается центр тяжести электронной оболочки, тогда как межъядерное расстояние r остается неизменным. Это свойство можно характеризовать уравнением

$$p = a_{..} E, \quad (2.41-2)$$

в котором поляризуемость молекулы $a_{..}$ является тензором второго ранга. Поляризуемость есть функция от X . С изменением величины и знака X изменяется «жесткость» молекулы по отношению к действию внешней силы. Представим себе, что поле E . действует в направлении линии, соединяющей ядра. Легко видеть, что смещения центра тяжести электронной оболочки при $r = R + |X|$ и $r = R - |X|$ будут неодинаковыми. Считая отклонения от положения равновесия достаточно малыми, представим функцию $a_{..}(X)$ в виде

$$a_{..}(X) = a_{(0)..} + a_{(1)..} X, \quad (2.41-3)$$

где $a_{(0)..}$ — поляризуемость в положении равновесия и $a_{(1)..} = [(d/dX) a_{..}]_{X=0}$. Перейдем теперь от постоянных к изменяющимся со временем смещениям $X(t)$. В соответствии с результатами приближения Борна — Оппенгеймера для молекул можно считать, что в заданном электрическом поле $E.(t)$ дипольный момент $p.(t)$ формируется за время, очень малое по сравнению со временем заметного изменения X . Такое допущение основано на том, что электроны вследствие их малой массы сравнительно быстро переходят в состояние, обусловленное внешними полями атомных ядер. Поэтому связь



Фиг. 13. Вид потенциала для молекулярных колебаний.

между дипольным моментом и полем можно представить в виде

$$p.(t) = a_{..} [X(t)] E.(t). \quad (2.41-4)$$

Следует еще заметить, что мы исключили из рассмотрения резонансное комбинационное рассеяние: частоты внешнего поля считаются достаточно удаленными от электронных частот молекулы.

При перечисленных предположениях и при фиксированном X необходимая для создания индуцированного дипольного момента энергия

$$U''_p(X) = - \int_0^{E.} dE' p.[X; E'] = - \frac{1}{2} [a_{..}(X) E.] E. \quad (2.41-5)$$

является потенциальной энергией индуцированного диполя в поле E .

Обозначая координаты обоих атомных ядер на оси X через X_1 и X_2 , массу одного атома через m_A , запишем функцию Лагранжа для рассматриваемой системы

$$\mathcal{L} = \frac{m_A}{2} \left(\frac{d}{dt} X_1 \right)^2 + \frac{m_A}{2} \left(\frac{d}{dt} X_2 \right)^2 - [U'_p(X) + U''_p(X)]. \quad (2.41-6)$$

Полагая $X_1 - X_2 = R = X$, получаем отсюда уравнение движения

$$\frac{d^2}{dt^2} X + \Gamma_M \frac{d}{dt} X + \omega_M^2 X = \frac{1}{2M} [a_{(1)..} E.] E.. \quad (2.41-7)$$

По аналогии с методом, примененным в разд. 1.11, для учета потерь энергии здесь введен член, характеризующий трение, $\Gamma_M (d/dt) X$. Частота зависит от силовой постоянной k_M и от так называемой приведенной массы $M = m_A/2$, а именно $\omega_M^2 = k_M/M$.

Пользуясь формой записи, использованной при решении уравнения (1.11-8), представим общее решение дифференциального уравнения (2.41-7) в виде

$$X(t) = \tilde{X} e^{-1/2 \Gamma_M t} \cos \left[t \sqrt{\omega_M^2 - \frac{1}{4} \Gamma_M^2} + \varphi \right] + \frac{1}{2M} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau Q_M(\tau) [a_{(1)..} E.(t - \tau)] E.(t - \tau). \quad (2.41-8)$$

Функция $Q_M(\tau)$ совпадает с определяемой уравнением (1.11-9) функцией $Q(\tau)$, если ω_0 и Γ заменить соответственно на ω_M и Γ_M ; величины \tilde{X} и φ являются произвольными вещественными постоянными однородного решения. Пользуясь уравнениями (2.41-4) и (2.41-8), получаем для дипольного момента молекулы

$$\begin{aligned} p_{\cdot}(t) = & \alpha_{(1)\cdot\cdot} E(t) + \\ & + \tilde{X} e^{-1/2\Gamma_M t} \cos \left[t \sqrt{\omega_M^2 - \frac{1}{4}\Gamma_M^2} + \varphi \right] \alpha_{(1)\cdot\cdot} E(t) + \\ & + \frac{1}{2M} \alpha_{(1)\cdot\cdot} E(t) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau Q_M(\tau) \{ \alpha_{(1)\cdot\cdot} E(t - \tau) E(t - \tau) \}. \end{aligned} \quad (2.41-9)$$

Дипольный момент содержит два линейных члена и один член третьего порядка по напряженности поля. Каждое из слагаемых ответственно за определенный эффект.

Для рассмотрения эффектов, связанных с линейными членами, достаточно принять, что спектр напряженности поля представлен одной частотой f_L ; соответствующую амплитуду обозначим $E_{\cdot}(f_L)$ (поскольку для линейных членов фазовый вектор не играет никакой роли, амплитуду $E_{\cdot}(f_L)$ можно считать вещественной).

Первый член описывает релеевское рассеяние молекулы; спектры частот индуцированного дипольного момента и падающего излучения одинаковы; количественные оценки приводят по порядку величины к тем же результатам, которые были получены для чисто электронных эффектов в § 2.2.

Второй член описывает эффект спонтанного комбинационного рассеяния. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим сначала численные значения постоянных ω_M и Γ_M . Для численного расчета положим, например, $k_M = 5 \times 10^2$ Н/м (силовая постоянная одинарной связи С—С) и $M = 10^{-26}$ кг. Эти величины приводят к типичному значению колебательной частоты $\omega_M = 2 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ (соответствующая длина волны $\lambda \approx 10$ мкм). В рассматриваемой модели эффектов относительного движения электронов и ядер труднее получить численную оценку для Γ_M даже при идеализированных условиях (когда член Γ_M

обусловлен только затуханием излучения), чем в случае чистого электронного эффекта (см. § 2.2). Трудность связана с тем, что теперь речь идет о частотной ширине колебательной полосы. Возможна следующая оценка верхней границы Γ_M . При исследовании жидкостей найдено, что ширина стоксовой линии $\Delta\omega_S \leq 10^{12} \text{ с}^{-1}$. В предположении, что ширина возбуждающей линии достаточно мала, величина $\Delta\omega_S$ идентична ширине полосы для $X(t)$. При исследованиях веществ в газообразном состоянии она еще уменьшается на 2—3 порядка. (Наряду с эффектами, вызывающими потерю энергии, на величину $\Delta\omega_S$ влияют еще другие механизмы.) В результате получаем $\Gamma_M \leq 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Легко видеть, что между частотами существует соотношение

$$\omega_L \gg \omega_M \gg \Gamma_M, \quad (2.41-10)$$

поскольку лазерная частота ω_L имеет порядок 10^{15} с^{-1} (в качестве примера выберем значение $2,5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$). В пределах интервала времени, который по нашей оценке для Γ_M составляет по меньшей мере 10^{-12} с^{-1} , компонента дипольного момента $[p_{\cdot}(t)]_{\text{спонт. к. р.}}$, соответствующая второму члену в уравнении (2.41-9), может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} [p_{\cdot}(t)]_{\text{спонт. к. р.}} = & \tilde{X} \alpha_{(1)\cdot\cdot} \hat{E}_{\cdot}(f_L) \cos(\omega_M t + \varphi) \cos \omega_L t = \\ = & \frac{1}{2} \tilde{X} \alpha_{(1)\cdot\cdot} \hat{E}_{\cdot}(f_L) \cos[(\omega_L - \omega_M)t - \varphi] + \\ & + \frac{1}{2} X \alpha_{(1)\cdot\cdot} \hat{E}_{\cdot}(f_L) \cos[(\omega_L + \omega_M)t + \varphi]. \end{aligned} \quad (2.41-11)$$

Таким образом, показано, что при перечисленных условиях второй член описывает стоксовы и антистоксовы линии (с частотами $\omega_L - \omega_M$ и $\omega_L + \omega_M$) эффекта спонтанного комбинационного рассеяния. Изложенные выше рассуждения могут быть использованы для оценки порядка величины $\alpha_{(1)\cdot\cdot}$. Согласно уравнению (2.22-11), усредненная по времени мощность $\langle L \rangle$, излученная одной молекулой в полный телесный угол на частоте $(\omega_L - \omega_M)$, пропорциональна величинам $|\alpha_{(1)\cdot\cdot} E_{\cdot}(f_L)|^2$, $(\tilde{X})^2$ и $(\omega_L - \omega_M)^4$; коэффициент пропорциональности определяется универсальными константами. Выше были указаны численные значения величин, характеризующих

образование частоты $(\omega_L - \omega_M)$. Величина квадрата колебательной амплитуды вытекает из следующего соображения, основанного на заимствовании некоторых представлений из квантовой теории. Стоксово рассеяние возникает в результате взаимодействия излучения с молекулой, находящейся в основном состоянии. Молекулы обладают нулевой энергией $1/2 \hbar \omega_M$, которая соответствует не зависящему от температуры нулевому колебанию с эффективной амплитудой $(\hbar/\omega_M \mathcal{N})^{1/2}$ (при наших предположениях это означает, что $X \approx 7 \cdot 10^{-12}$ м). Величина $|\alpha_{(1) \dots} \cdot E \cdot (f_L)|^2$ зависит от относительного положения молекулы и вектора напряженности поля. Для оценки порядка величины не представляет интереса мощность, излученная при каком-либо выделенном положении молекулы; гораздо более существенны результаты, полученные путем усреднения по всем молекулярным положениям. Это среднее значение величины $|\alpha_{(1) \dots} \cdot E \cdot (f_L)|^2$ мы можем приравнять $\alpha_1^2 |\hat{E} \cdot (f_L)|^2$, где α_1 представляет собой эффективное значение производной поляризуемости $\alpha_{(1) \dots}$. Квадрат амплитуды напряженности поля пропорционален интенсивности $\langle S \rangle$ падающего излучения, так что окончательно получаем $\langle L \rangle = C_L \alpha_1^2 \langle S \rangle$. Отсюда, зная значения X и $\omega_L - \omega_M$ и величины встречающихся универсальных констант, можно получить оценку порядка величины коэффициента пропорциональности C_L : 10^{26} (В/А·с)². Путем измерения интенсивности рассеяния на некотором макроскопическом количестве вещества можно определить эффективное рассчитанное на одну молекулу поперечное сечение для эффекта спонтанного комбинационного рассеяния и тем самым отношение $\langle L \rangle / \langle S \rangle$; для интенсивных стоксовых линий величина $\langle L \rangle / \langle S \rangle$ имеет порядок 10^{-32} м². Отсюда следует, что $\alpha_1 \approx 10^{-29}$ А·с·м/В.

На основании рассмотрения для одной молекулы могут быть сделаны заключения о поведении молекулярного ансамбля в условиях эффекта спонтанного комбинационного рассеяния. Так, полная интенсивность $\langle L_{\text{полн}} \rangle$ рассеяния множества невзаимодействующих молекул получается путем суммирования интенсивностей $\langle L_j \rangle$ рассеяния отдельных молекул, ибо при описанных условиях

каждая молекула колеблется со своей собственной независимой фазой. Поскольку интенсивность рассеяния каждой молекулы пропорциональна интенсивности падающего света, то такая же пропорциональность имеет место и для интенсивности рассеяния всего молекулярного ансамбля. Следовательно, для некоторого множества молекул, на которое действует одно и то же поле E , получим

$$\langle L_{\text{полн}} \rangle = \sum_j \langle L_j \rangle = \sum_j C_L [\alpha_{(1) \dots}(j) \hat{E} \cdot (f_L)] [\alpha_{(1) \dots}(j) \hat{E} \cdot (f_L)], \quad (2.41-12)$$

где C_L — коэффициент пропорциональности, аналогичный C_L ; $\alpha_{(1) \dots}(j)$ означает тензор поляризуемости j -й молекулы. В дальнейшем мы будем считать рассматриваемую среду макроскопически однородной; в такой среде молекулы ансамбля не упорядочены. Действующие поля будем считать не настолько сильными, чтобы они могли вызвать существенные отклонения от этого равновесного распределения. Предполагается, что множество молекул, к которому применяется уравнение (2.41-12), содержит большое число ($N \gg 1$) молекул. При этих условиях имеем для полной интенсивности рассеяния

$$\langle L_{\text{полн}} \rangle = N C_L \langle [\alpha_{(1) \dots} \hat{E} \cdot (f_L)] [\alpha_{(1) \dots} \hat{E} \cdot (f_L)] \rangle_0, \quad (2.41-13)$$

причем усреднение $\langle \dots \rangle_0$ распространяется на все возможные ориентации каждой молекулы. Для простых условий такое усреднение выполнено в приложении 5; в качестве результата получается значение $\langle L_{\text{полн}} \rangle$ как функция производных от поляризуемости в связанной с молекулой системе координат.

Для объяснения эффекта вынужденного комбинационного рассеяния следует привлечь член третьего порядка в уравнении (2.41-9). Все входящие в этот член постоянные уже были оценены по порядку величины в приведенных выше выводах, относящихся к спонтанному эффекту комбинационного рассеяния.

Как видно из уравнения (2.41-9), фаза этой компоненты дипольного момента однозначно определяется полем $E \cdot (t)$. Если одно и то же поле $E \cdot (t)$ действует на большое число молекул, то фазы их дипольных моментов равны. При этих условиях можем записать для

поляризации

$$P^{(3)}(t) = \frac{1}{\Delta V} \sum_j P^{(3)}(j) =$$

$$= \frac{1}{\Delta V} \sum_j \frac{1}{2\mathcal{M}} \alpha_{(1)\dots}(j) E \cdot(t) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau Q_M(\tau) \times$$

$$\times \{[\alpha_{(1)\dots}(j) E \cdot(t - \tau)] E \cdot(t - \tau)\}, \quad (2.41-14)$$

где суммирование выполняется по всем молекулам в элементе объема ΔV . Этот элемент, с одной стороны, считается достаточно малым для того, чтобы во всех его точках напряженность поля можно было считать постоянной, а с другой — он содержит большое число молекул ΔN . Формула (2.41-14) строго справедлива только для не взаимодействующих молекул. Во многих случаях межмолекулярное взаимодействие можно учесть путем перехода от значений постоянных $\alpha_{(1)\dots}$ и Γ_M для свободных молекул к их эффективным значениям. Для Γ_M выше уже были приведены соответствующие данные; относительно первой производной от поляризуемости следует заметить, что ранее указанный порядок величины α_1 был найден на основании эмпирических изменений в жидкостях.

2.42. Следствия из модельных представлений

Исходя из уравнения (2.41-12), покажем теперь, что при определенных предположениях о частотном спектре напряженности поля возникают такие поляризационные члены третьего порядка, которые служат причиной явлений эффекта вынужденного комбинационного рассеяния. В третьем порядке наблюдающиеся явления, вообще говоря, весьма разнообразны; мы ограничимся здесь типичным случаем эффекта вынужденного комбинационного рассеяния на стоксовой линии. Наиболее существенные явления могут быть изучены в рамках одномерной модели, вследствие чего в дальнейших рассуждениях мы не будем принимать во внимание пространственные трансформационные свойства величин P ,

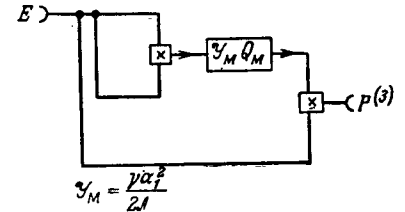
$\alpha_{(1)\dots}$ и E . В этом одномерном представлении все молекулы обладают одной и той же производной от поляризуемости α_1 , так что при $\gamma = \Delta N/\Delta V$ уравнение (2.41-14) принимает вид

$$P^{(3)}(t) = \frac{\gamma \alpha_1^2}{2\mathcal{M}} E(t) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau Q_M(\tau) E^2(t - \tau). \quad (2.42-1)$$

Исследование станет наглядным, если по аналогии с методом, рассмотренным в разд. 2.22, вновь представить связь между P и E в виде блок-схемы (фиг. 14) (обозначения блоков сохранены).

Из блок-схемы видно, что большие значения поляризации могут быть достигнуты, если величина на выходе из первого блока имеет частоту, близкую к резонансной частоте (f_M) линейного четырехполюсника. Этого нельзя добиться путем задания только одной частоты лазера f_L ; для выполнения этого требования необходимо присутствие в спектре напряженности поля второй частоты f_G , причем должно соблюдаться условие $f_L - f_G \approx f_M$. Поэтому предположим, что спектр напряженности поля содержит две частоты с амплитудами $E(f_L)$ и $E(f_G)$. После прохождения первого блока представляет интерес только колебание с разностной частотой ($f_L - f_G$) и с амплитудой $E(f_L)E^*(f_G)$, так как все остальные частотные компоненты после прохождения через линейный четырехполюсник вносят вклады, которыми мы в наших рассуждениях можем пренебречь. На выходе из линейного четырехполюсника (второй блок) амплитуда интересующего нас колебания равна

$$\hat{A}_M(f_L - f_G) = \mathcal{Y}_M Q_M(f_L - f_G) \hat{E}(f_L) \hat{E}^*(f_G). \quad (2.42-2)$$



Фиг. 14. Блок-схема для изучения эффекта вынужденного комбинационного рассеяния.

Это колебание приводит к появлению на выходе из блока 3 поляризационных членов с частотами

$$2f_L - f_G \approx f_L + f_M, \quad 2f_G - f_L \approx f_G - f_M, \\ f_G + (f_L - f_G) = f_L, \quad f_L - (f_L - f_G) = f_G.$$

Сосредоточим внимание на двух последних поляризационных членах и определим обусловленное эффектом вынужденного комбинационного рассеяния усиление мощности электромагнитной волны при ее прохождении через слой вещества. Из разд. 1.31 следует [см., в частности, уравнение (1.31-11)], что за наличие неисчезающего усиления мощности ответственны только поляризационные члены, частоты которых совпадают с частотами напряженности поля. Поэтому для нас важны только следующие поляризационные члены:

$$\hat{P}^{(3)}(f_L) = \frac{1}{2} \hat{E}(f_G) \tilde{A}_M(f_L - f_G) = \\ = \chi^{(3)}(f_L; f_L, f_G, -f_G) \hat{E}(f_L) \hat{E}(f_G) \hat{E}^*(f_G) \quad (2.42-3)$$

и

$$\hat{P}^{(3)}(f_G) = \frac{1}{2} \hat{E}(f_L) \tilde{A}_M^*(f_L - f_G) = \\ = \chi^{(3)}(f_G; f_G, f_L, -f_L) \hat{E}(f_G) \hat{E}(f_L) \hat{E}^*(f_L), \quad (2.42-4)$$

причем для соответствующих восприимчивостей имеем

$$\chi^{(3)}(f_G; f_G, f_L, -f_L) = \chi^{(3)*}(f_L; f_L, f_G, -f_G) = \\ = \frac{\gamma \alpha_1^2}{4\mathcal{M}} Q_M^*(f_L - f_G). \quad (2.42-5)$$

Вследствие того что

$$Q_M(f) = (-\omega^2 + i\Gamma_M \omega + \omega_M^2)^{-1}, \quad (2.42-6)$$

в резонансном случае $f_L - f_G \approx f_M$ получим

$$\chi^{(3)}(f_G; f_G, f_L, -f_L) = \frac{i\gamma \alpha_1^2}{4\mathcal{M}\Gamma_M \omega_M} = \\ = -\chi^{(3)}(f_L; f_L, f_G, -f_G) = i|\chi_R|, \quad (2.42-7)$$

что по уравнению (1.31-9) означает усиление мощности излучения на частоте f_G (подробнее см. в § 4.2). При

типичных численных значениях параметров ($\alpha_1 = 10^{-29}$ А·с·м/В, $\gamma = 10^{28}$ м⁻³, $\mathcal{M} = 10^{-26}$ кг, $\Gamma_M = 10^{12}$ с⁻¹, $\omega_M = 2 \cdot 10^{14}$ с⁻¹) получается, что $\chi_R \approx 10^{-31}$ А·с·м/В³. Из уравнения (2.42-7) видно, что важную роль играет характеризующая механизм трения постоянная Γ_M : амплитуда поляризации, а следовательно, и усиление мощности обратно пропорциональны Γ_M (см. разд. 1.31).

Здесь следует заметить, что даже при сравнительно очень больших значениях амплитуд напряженности поля (порядка 10^8 В/м) и при сравнительно малых значениях Γ_M (порядка 10^9 с⁻¹) вызываемые эффектом вынужденного комбинационного рассеяния отклонения от положений равновесия достаточно малы для того, чтобы оправдывалось гармоническое приближение для возвращающей силы [см. уравнение (2.41-1)].

Если спектр напряженности поля содержит более двух частот, т. е. $\omega_b = \omega_L + b\omega_M$; $b = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то эффект вынужденного комбинационного рассеяния получается также на высших гармониках частоты молекулярного колебания и притом как в стоковой, так и в антистоксовой областях.

Заканчивая настоящий раздел, остановимся кратко на обобщении рассмотренной одномерной модели на реальный пространственный случай. Исходя из уравнения (2.41-14), для тензоров нелинейных восприимчивостей в общем случае вместо уравнения (2.42-7) можно получить

$$\chi_{pqrs}^{(3)}(f_G; f_G, f_L, -f_L) = \frac{i}{4\mathcal{M}\Gamma_M \omega_M} \frac{1}{\Delta V} \sum_j \alpha_{(1)pr}(j) \alpha_{(1)qs}(j). \quad (2.42-8)$$

Точно так же, как и при эффекте спонтанного комбинационного рассеяния, суммирование по j легко выполнить для макроскопически изотропной среды, для которой имеем

$$\chi_{pqrs}^{(3)}(f_G; f_G, f_L, -f_L) = \frac{i\gamma}{4\mathcal{M}\Gamma_M \omega_M} \langle \alpha_{(1)pr} \alpha_{(1)qs} \rangle_0. \quad (2.42-9)$$

Как уже упоминалось, это среднее значение вычислено в приложении 5, в котором нелинейные восприимчивости представлены как функции производных от поляризуемости в связанной с молекулой системе координат.

§ 2.5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С АКУСТИЧЕСКИМИ ВОЛНАМИ. МОДЕЛЬ ДЛЯ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ БРИЛЛЮЭНА

При изучении эффекта вынужденного комбинационного рассеяния в § 2.4 мы рассмотрели ту форму взаимодействия электромагнитного излучения с молекулами, при которой возбуждаются молекулярные колебания. Если же молекулы макроскопического образца образуют молекулярный кристалл, то, как показывают дальнейшие исследования, возбуждаются решеточные колебания оптической ветви; при этом разность частот возбуждающего и рассеянного излучений оказывается равной частоте решеточных колебаний оптической ветви. Аналогичное явление было обнаружено при взаимодействии электромагнитного излучения с акустическими колебаниями как упорядоченных, так и неупорядоченных систем (в данном случае имеются в виду решеточные колебания акустической ветви). Это явление получило название рассеяния Бриллюэна.

После появления источников света достаточно большой интенсивности — лазеров — начались обширные исследования теплового рассеяния Бриллюэна, при котором наблюдается рассеяние электромагнитного излучения на термически возбужденных волнах давления. В 1964 г. Чао, Таунс и Стойчев при помощи лазеров с модулированной добротностью доказали возникновение вынужденного рассеяния Бриллюэна в связи с генерацией когерентной сверхзвуковой волны. Теоретическое описание основ этого явления может быть проведено в тесной связи с эффектом вынужденного комбинационного рассеяния. Поскольку влияние пространственных трансформационных свойств уже было рассмотрено, ограничимся здесь с самого начала простой моделью, допускающей одномерное представление. При этом окажется возможной интерпретация наиболее важных нелинейных эффектов. По аналогии с § 2.4 тепловой (спонтанный) и вынужденный эффекты будут рассмотрены на основе одной и той же модели.

2.51. Модель для описания вынужденного рассеяния Бриллюэна

Взаимодействие между электромагнитными и акустическими волнами возникает вследствие того, что при изменениях плотности или искажениях в среде изменяется диэлектрическая постоянная ϵ , а следовательно, и электрическая поляризация P . (Здесь не учитываются изменения ϵ , обусловленные флуктуациями энтропии, концентрации и ориентации и вызывающие дополнительные эффекты рассеяния.) В нашей модели мы примем, что интересующие нас пространственно-временные процессы (волны давления, электромагнитные волны) протекают параллельно оси z ; в частности, упругое состояние образца будем характеризовать производной от смещения u в направлении z , т. е. искажением $\partial u/\partial z$, заданным как функция z и t . Воспользуемся известным из теории упругости соотношением между давлением σ (или напряжением $-\sigma$) и искажением

$$-\sigma = \Lambda \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.51-1)$$

в котором Λ есть модуль упругости, для получения зависимости диэлектрической постоянной от искажения, а также от давления. Для этого положим

$$\epsilon(\sigma) = \epsilon_{(0)} + \epsilon_{(1)}\sigma, \quad \text{где } \epsilon_{(0)} = (\epsilon)_{\sigma=0}, \quad \epsilon_{(1)} = \left(\frac{d\epsilon}{d\sigma}\right)_{\sigma=0}. \quad (2.51-2)$$

Тогда для поляризации следует

$$P = \epsilon_0(\epsilon - 1)E = \epsilon_0(\epsilon_{(0)} - 1)E + \epsilon_0\epsilon_{(1)}\sigma E. \quad (2.51-3)$$

Второй член описывает взаимодействие между электрическим полем и давлением. В конденсированных средах производная $d\epsilon/d\rho$ также имеет порядок $(\epsilon_{(0)} - 1)/\rho$, а производная $d\rho/d\sigma$ — порядок ρ/Λ ; отсюда следует, что для частот видимого света $\epsilon_{(1)} \simeq \Lambda^{-1}$. В зависимости от строения вещества величина Λ^{-1} принимает значения между 10^{-11} м²/Н и 10^{-9} м²/Н.

В присутствии волны давления [частота f_v , амплитуда $\hat{\sigma}(f_v) = \bar{\sigma}(f_v) e^{-i2\pi z q(f_v)}$] и лазерной волны

[частота f_L , амплитуда $\hat{E}(f_L) = \bar{E}(f_L) e^{-i2\pi z q(f_L)}$] возникают две поляризационные волны с амплитудами

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{(1)}} \hat{P}(f_L + f_v) &= \frac{\hat{\sigma}(f_v) \hat{E}(f_L)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\sigma}(f_v) \bar{E}(f_L) e^{-i2\pi z [q(f_L) + q(f_v)]}, \\ \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{(1)}} \hat{P}(f_L - f_v) &= \frac{\hat{\sigma}^*(f_v) \hat{E}(f_L)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\sigma}^*(f_v) \bar{E}(f_L) e^{-i2\pi z [q(f_L) - q(f_v)]}. \end{aligned} \quad (2.51-4)$$

При этом в соответствии с уравнением (1.32-14) величины, отмеченные чертой сверху, являются «медленно» меняющимися вдоль z волновыми амплитудами. Эти поляризационные волны вызывают появление рассеянного излучения со смещенными частотами. Частоты и волновые числа рассеянного света удовлетворяют соотношениям

$$f_G = f_L + b_1 f_v, \quad (2.51-5)$$

$$q(f_G) = q(f_L) + b_1 q(f_v), \quad (2.51-6)$$

причем следует положить $b_1 = -1$ и $b_1 = +1$ для стоксовой и антистоксовой компонент. Зависимости между частотами и соответствующими волновыми числами определяются дисперсионными соотношениями.

Поскольку частоту волн давления можно считать исключительно малой по сравнению с частотами f_L и f_G , фазовые скорости лазерной и рассеянной волн можно положить равными одной и той же величине w . Фазовую скорость волны давления обозначим v . При заданных значениях f_L и $q(f_L)$ (без ограничения общности обе величины можно считать положительными в соответствии с распространением лазерной волны в направлении положительных z) и при использовании дисперсионных соотношений из уравнений (2.51-5) и (2.51-6) могут быть вычислены величины f_G , f_v , $q(f_G)$, $q(f_v)$. Здесь следует различать два случая. Для $q(f_G) > 0$, т. е. при наблюдении рассеянного света в направлении положительных z , получается, что $f_v = 0$; смещение час-

тоты рассеянного света отсутствует. В случае обратного рассеяния [$q(f_G) < 0$] имеем

$$f_v = 2 \frac{v}{w} f_L \quad (2.51-7)$$

при использовании соотношения $v/w \ll 1$; тогда происходит смещение частоты, пропорциональное отношению фазовых скоростей и частоте лазера. Полагая $v/w \simeq 10^{-5}$ и $f_L \simeq 10^{15}$ Гц, получаем $f_v \simeq 10^{10}$ Гц. Снова принимая во внимание, что $v/w \ll 1$, получаем для соответствующих волновых чисел

$$q(f_G) = -\frac{f_L}{w}, \quad q(f_v) = -b_1 \frac{2f_L}{w}. \quad (2.51-8)$$

Волновое число волны давления в два раза больше волнового числа световой волны; в стоксовом случае волна давления распространяется вперед, а в антистоксовом случае — в обратном направлении. Если, например, путем термического возбуждения создаются волны давления различных частот внутри некоторой частотной области, то в результате взаимодействия с рассеянием света выделяется волна давления вполне определенной частоты, определяемой соотношениями (2.51-5) и (2.51-6).

Остановимся еще на результате, который получается в случае произвольных направлений распространения волн. Уравнение (2.51-6) выражает соотношение между z -компонентами волновых векторов $q \cdot (f_L)$, $q \cdot (f_G)$, $q \cdot (f_v)$. Аналогичные соотношения имеют место для x - и y -компонент, так что [наряду с уравнением (2.51-5)] можно считать основным соотношение

$$q \cdot (f_G) = q \cdot (f_L) + b_1 q \cdot (f_v)^* \quad (2.51-9)$$

для волновых чисел. Если вновь учесть дисперсионные соотношения, то отсюда следует

$$f_v = 2 \frac{v}{w} f_L \sin \frac{\theta_G}{2}, \quad (2.51-10)$$

где θ_G есть угол между $q \cdot (f_G)$ и $q \cdot (f_L)$. Из уравнения (2.51-10) видно, что в рассмотренном нами одномерном случае обратного рассеяния имеет место самое большое из всех возможных смещение частоты.

Под эффектом вынужденного рассеяния Бриллюэна следует понимать эффект, при котором рассеяние света сопровождается возникновением волн давления, индуцированных электромагнитными волнами. Для описания этого процесса следует составить соответствующие уравнения движения; для этой цели можно воспользоваться методом, аналогичным примененному в случае эффекта вынужденного комбинационного рассеяния.

Будем исходить из поляризационного члена $P_{\sigma E}$ в уравнении (2.51-3), описывающего взаимодействие давления с электрическим полем, и определим из него энергию взаимодействия. Предположим, что при заданном значении $E(t)$ величина $P_{\sigma E}$ формируется за очень короткое время, в течение которого σ не претерпевает заметных изменений (движение ядер, связанное с акустическими колебаниями, совершается гораздо медленнее, чем движение электронов в поле E). При этом предположении плотность энергии взаимодействия может быть представлена в виде

$$\mathcal{L}'_{\sigma E} = - \int_0^E dE' P_{\sigma E}[\sigma; E'], \quad (2.51-11)$$

причем при выполнении интегрирования величина σ должна считаться постоянной. Интегрирование приводит к результату

$$\mathcal{L}'_{\sigma E} = - \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{(1)} \sigma E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{(1)} \Lambda \frac{\partial u}{\partial z} E^2. \quad (2.51-12)$$

Это выражение для энергии взаимодействия может быть интерпретировано также в его связи с явлениями электрострикции.

Из общих представлений теории упругости следует формула для плотности лагранжиана для подвергающейся внешним воздействиям упругой системы:

$$\mathcal{L}'_u = \frac{\rho}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - v^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\}, \quad (2.51-13)$$

где первый член представляет кинетическую, а второй — потенциальную (отрицательную) энергию; $v = \sqrt{\Lambda \rho^{-1}}$ — фазовая скорость (вещественная) волн давления или ис-

кажения, ρ — плотность. Из общего формализма Лагранжа следует, что при полной плотности лагранжиана

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_u - \mathcal{L}'_{\sigma E} \quad (2.51-14)$$

уравнение движения для смещения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial u / \partial t)} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial u / \partial z)} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u} = \\ = \rho \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_{(1)}}{2} \Lambda \frac{\partial}{\partial z} E^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.51-15)$$

Пользуясь уравнением (2.51-1), для давления получаем

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = - \frac{\epsilon_0 \epsilon_{(1)}}{2\rho} \Lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} E^2 - \Gamma_v \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (2.51-16)$$

где член, пропорциональный $\partial \sigma / \partial t$, добавлен для учета потерь на трение, возникающих при распространении волны давления. (При сделанных ниже предположениях величина $-\Gamma_v (\partial \sigma / \partial t)$ имеет такое же значение, как характеризующий потери на трение член, пропорциональный $(\partial^3 / \partial z^2 \partial t) \sigma$; последний получается при выводе уравнения движения для σ из основных уравнений гидродинамики.)

2.52. Следствия из модельных представлений

При заданной функции давления $\sigma(z, t)$ из уравнений (1.32-1) и (2.51-3) следует уравнение движения для напряженности электрического поля

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E - \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} E = - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{(1)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\sigma E). \quad (2.52-1)$$

Относительную проницаемость мы положили здесь равной единице. Фазовую скорость $\omega = c / \sqrt{\epsilon_0}$ следует считать вещественной постоянной величиной; потерями на поглощение электромагнитных волн пренебрегаем. Пара уравнений (2.51-16) и (2.52-1) отображает взаимодействие электромагнитных волн и волн давления; она является системой связанных дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих нелинейные члены. Из уравнения (2.51-16) видно, что амплитуда

волны давления изменяется под воздействием двух факторов: присутствующего электрического поля (этот механизм описывается первым слагаемым в правой части) и потерь энергии на трение (второе слагаемое в правой части). (Для типичных экспериментальных условий сравнительная оценка порядков величин влияния обоих механизмов дана в § 4.3.)

Исследуем теперь связанные дифференциальные уравнения для электромагнитных волн и волн давления в случае дискретного спектра частот. Из уравнения (2.51-16) видно, что подстановка только одной электромагнитной волны, например лазерной волны с амплитудой $\bar{E}(f_L)$, не дает необходимого результата. В самом деле, получающаяся волна давления тогда имела бы частоту $2f_L$, полностью выпадающую из области частот акустических волн. (Нас не интересует одновременно возникающее постоянное давление.) Поэтому наряду с лазерной волной следует ввести в рассмотрение по крайней мере еще вторую электромагнитную волну с амплитудой $\bar{E}(f_G)$. В этом случае возникает разностная частота $f_L - f_G$, которая может попасть в область частот акустических колебаний. Для давления примем существование только одной волны с частотой f_v и амплитудой $\sigma(f_v) = \bar{\sigma}(f_v) e^{-i2\pi z q(f_v)}$. Предполагается, что присутствующие в решениях частоты и волновые числа удовлетворяют дисперсионным соотношениям, указанным в разд. 2.51. Колебательная амплитуда компоненты E^2 с частотой $f_L - f_G$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{A}_v(f_L - f_G) &= \frac{1}{2} \hat{E}(f_L) \hat{E}^*(f_G) = \\ &= \frac{1}{2} \bar{E}(f_L) \bar{E}^*(f_G) e^{-i2\pi z [q(f_L) - q(f_G)]}. \end{aligned} \quad (2.52-2)$$

Чертой сверху здесь отмечены величины, которые, согласно уравнению (1.32-14), следует рассматривать как волновые амплитуды, «медленно» изменяющиеся с изменением z . Уравнение (2.51-16) соблюдается лишь при одинаковой зависимости от времени в его левой и правой частях, т. е. частоты должны быть одинаковыми и должно выполняться соотношение $f_v = f_L - f_G$. Аналогичным образом должны находиться в соответствии так-

же «быстрые» пространственные члены в обеих частях уравнения; в случае максимального σ -возбуждения это требование приводит к соотношению $q(f_v) = q(f_L) - q(f_G)$. Таким образом, для вынужденного рассеяния Бриллюэна частоты и волновые числа удовлетворяют тем же соотношениям (2.51-5) и (2.51-6), какие существуют для теплового эффекта. Уравнение (2.51-16) переходит в соотношение для волновых амплитуд

$$\begin{aligned} -i4\pi q(f_v) \frac{d}{dz} \bar{\sigma}(f_v) + \frac{d^2}{dz^2} \bar{\sigma}(f_v) - \frac{i2\pi f_v \Gamma_v}{v^2} \bar{\sigma}(f_v) = \\ = \frac{\epsilon_0 \epsilon^{(1)} \Lambda^2}{2\rho v^2} \left\{ -[2\pi q(f_v)]^2 \bar{A}_v - i4\pi q(f_v) \frac{d}{dz} \bar{A}_v + \frac{d^2}{dz^2} \bar{A}_v \right\}, \end{aligned} \quad (2.52-3)$$

где

$$\bar{A}(f_v) = \frac{1}{2} \bar{E}(f_L) \bar{E}^*(f_G).$$

Аналогичным образом можно поступить с дифференциальным уравнением (2.52-1). Произведение $\sigma \bar{E}$ содержит частоты $f_L + f_v$, f_G , f_L и $f_G - f_v$. Амплитуда \bar{A}_v члена $(\partial^2/\partial t^2)(\sigma \bar{E})$ на стоксовой частоте определяется выражением

$$\bar{A}_v(f_G) = -(2\pi f_G)^2 \frac{1}{2} \bar{E}(f_L) \bar{\sigma}^*(f_v). \quad (2.52-4)$$

Отсюда для волновой амплитуды на стоксовой частоте следует, что

$$\begin{aligned} -i4\pi q(f_G) \frac{d}{dz} \bar{E}(f_G) + \frac{d^2}{dz^2} \bar{E}(f_G) = \\ = -\frac{\epsilon^{(1)}}{2c^2} [2\pi f_G]^2 \bar{E}(f_L) \bar{\sigma}^*(f_v). \end{aligned} \quad (2.52-5)$$

Соответствующее соотношение может быть получено также для волновой амплитуды на лазерной частоте.

Приведенные выше рассуждения делают очевидным общий результат: из уравнений для электромагнитных волн и волн давления с дискретным спектром частот получается для волновых амплитуд система связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых присутствуют нелинейные члены.

§ 2.6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С СИСТЕМОЙ ЯДЕРНЫХ СПИНОВ В СТАТИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. МОДЕЛЬ ДЛЯ МАГНИТНОГО ЯДЕРНОГО РЕЗОНАНСА

В 1946 г. Блох и Парселл предложили метод ядерной индукции или ядерного резонанса (изложение проблемы дано, например, в работе [9]). Он является важным методом точного измерения определенных свойств атомных ядер и определения атомных структурных параметров, используемых при объяснении физико-химических свойств веществ. Метод заключается в измерении временного хода ядерной намагниченности M образца в зависимости от внешнего магнитного поля $H(t)$. Форма зависимости $M(H)$ определяется выбранными экспериментальными условиями. Для типичных случаев, которые мы рассмотрим, зависимость $M(H)$ может быть описана уравнениями Блоха (см. вывод в разд. 2.61)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} M_x &= g_K [M_y H_z - M_z H_y] - M_x \Gamma_{tr}, \\ \frac{d}{dt} M_y &= g_K [M_z H_x - M_x H_z] - M_y \Gamma_{tr}, \\ \frac{d}{dt} M_z &= g_K [M_x H_y - M_y H_x] - (M_z - M_g) \Gamma_{lo},\end{aligned}\quad (2.6-1)$$

в которых g_K — гиромагнитное отношение для ядер; Γ_{tr} и Γ_{lo} — характеристические параметры действующих релаксационных механизмов; M_g — намагниченность в направлении z , определяемая экспериментальными условиями; эту величину мы будем считать постоянной.

Решение уравнений Блоха приводит к нелинейной зависимости намагниченности от напряженности внешнего магнитного поля. Для получения последовательных решений в различных порядках необходимо, исходя из условий, при которых применимы уравнения Блоха, дать оценки порядков величин входящих в эти уравнения напряженностей поля, компонент намагниченности, а также материальных констант.

2.61. Модель для определения индуцированной намагниченности ядерной системы

Из уравнений (2.6-1) видно, что компоненты вектора $(d/dt)M$ складываются из двух различных частей: одна часть, $g_K[M \times H]$, зависит от напряженности внешнего поля $H(t)$, тогда как другая, $[(d/dt)M]_R$, определяется существованием релаксационных механизмов. С этими обозначениями запишем уравнения Блоха в форме

$$\frac{d}{dt} M = g_K [M \times H] + \left(\frac{d}{dt} M \right)_R. \quad (2.61-1)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (2.61-1) может быть интерпретировано на основании уравнения движения для магнитного дипольного момента $\mu_{(K)}$ свободного атомного ядра, причем при переходе к намагниченности системы ядер некоторого макроскопического образца должны быть сделаны определенные дополнительные допущения.

Если отдельное атомное ядро находится в магнитном поле $H(t)$, то изменение со временем момента количества движения ядра I вследствие взаимодействия между $\mu_{(K)}$ и H определяется общими законами механики

$$\frac{d}{dt} I = \mu_{(K)} \times H. \quad (2.61-2)$$

При учете справедливого для атомного ядра соотношения

$$\mu_{(K)} = g_K I. \quad (2.61-3)$$

уравнение движения для магнитного дипольного момента ядра имеет вид

$$\frac{d}{dt} \mu_{(K)} = g_K [\mu_{(K)} \times H]. \quad (2.61-4)$$

В частном случае постоянного поля $H_{(g)}$ это уравнение приводит к следующему результату: ядро прецессирует относительно наложенного поля с частотой («резонансной»)

$$\omega_r = g_K |H_{(g)}|, \quad (2.61-5)$$

причем направление вращения определяется знаком g_K .

При переходе от отдельного дипольного момента к

полной намагниченности всех ядер в образце могут быть сделаны следующие предположения: влияние электронных оболочек мало и им можно пренебречь; магнитное поле $H_z(t)$ однородно во всем образце. Отдельные дипольные моменты $\mu_{(k) \cdot (j)}$ образуют полный магнитный дипольный момент путем суммирования аналогично тому, как производится образование полного момента количества движения из моментов количества движения отдельных ядер.

Если в дополнение к этим общим предположениям еще гипотетически принять, что изменения ориентации моментов $\mu_{(k) \cdot (j)}$ происходят только под влиянием внешнего поля согласно уравнению (2.61-4), и исключить изменения ориентаций в результате других процессов, то из уравнений (2.61-2) и (2.61-4) будет следовать, что $g_k[M_z \times H_z]$ равно $(d/dt)M_z$. Тогда в качестве следствия мы получили бы, что уже существующая в образце намагниченность может изменяться только по направлению, но не по величине. Известно, что такое поведение не подтверждается на опыте, как это следует из общих парамагнитных свойств атомных ядер. Поэтому высказанная гипотеза не соответствует действительности; следует учесть изменения ориентации отдельных моментов $\mu_{(k) \cdot (j)}$, обусловленные определенными релаксационными механизмами. Наряду с влиянием поля H_z эти механизмы приводят к изменениям векторов M_z , которые и учитываются дополнительным членом $[(d/dt)M_z]_R$ в уравнении (2.61-1).

Вид члена $[(d/dt)M_z]_R$, описывающего релаксационные механизмы, зависит от конкретных экспериментальных условий. Объясним их на примере, типичном для исследований ядерного резонанса. Исследуем протонный резонанс ($g_k = +3,4 \cdot 10^2 \text{ мс}^{-1} \text{ А}^{-1}$); пусть образец состоит из воды, к которой в небольшой концентрации добавлены ионы Fe^{3+} , оказывающие существенное влияние на релаксационные процессы. Пусть в направлении z приложено сильное постоянное магнитное поле H_g порядка 10^8 А/м. Это постоянное поле создает равновесную намагниченность

$$M_g = \kappa_1 H_g. \quad (2.61-6)$$

Ядерная восприимчивость κ_1 рассматриваемого вещества при комнатной температуре по порядку величины равна $10^{-15} \text{ В} \cdot \text{с} / \text{А} \cdot \text{м}$.

Если теперь приложить еще поляризованное по кругу магнитное поле, вращающееся в плоскости (x, y) с почти резонансной частотой, то могут возникнуть компоненты намагниченности также в направлениях x и y . Можно принять, что в стационарном режиме $|M_x|, |M_y| \leq \leq 10^{-1} M_g$. Вращающаяся вместе с поперечным полем поперечная намагниченность может быть измерена либо по энергии, затраченной на ее создание, либо путем прямого использования индукционного эффекта. Целью таких исследований является определение поперечной намагниченности в зависимости от частоты ω_q поперечного поля $H_{(q)}$, причем величина ω_q изменяется в некоторой области вблизи резонансной частоты ω_r .

Для осуществления эксперимента и выполнения измерений целесообразно направленное по z поле модулировать слабым дополнительным полем и изменять резонансную частоту при фиксированном значении ω_q . В соответствии с этим положим, что z -компонента поля H_z равна

$$H_z(t) = H_g + H'_z(t). \quad (2.61-7)$$

Во избежание устанавливающихся процессов модулирующее поле $H'_z(t)$ не должно сильно изменяться с течением времени; поэтому в наших условиях должны изменяться частоты порядка 20 Гц и амплитуды порядка 10 А/м. Из соображений удобства проведения измерений при тех же условиях для порядка величины $|H_{(q)}|$ следует принять 1 А/м.

Из сказанного следует, что напряженность постоянного поля H_g велика по сравнению с напряженностями других полей, т. е.

$$H_g \gg |H_x(t)|, |H_y(t)|, |H'_z(t)|. \quad (2.61-8)$$

Это означает, что в хорошем приближении эффективное действующее поле $H_{(e)}$ равно $H_{(g)}$.

Описанные выше изменения ориентации дипольных моментов под влиянием релаксационных процессов возникают в результате взаимодействий дипольных

моментов между собой (спин-спиновое взаимодействие) и взаимодействий дипольных моментов с такими частицами окружающей среды, которые вследствие определенных форм движения (трансляция, колебание, вращение) вносят вклад в тепловую энергию образца. Последний механизм принято называть спин-решеточным взаимодействием, хотя вовсе не имеются в виду только взаимодействия со структурными элементами упорядоченных систем. Для обоих механизмов во многих случаях скорость изменения величины M при приближении к состоянию равновесия оказывается пропорциональной разности между мгновенным и равновесным значениями M .

Поскольку эффективное магнитное поле почти равно $H_{(g)}$, энергия системы ядерных моментов в значительной мере определяется значением $H_{(g)}$. Спин-спиновое взаимодействие вносит лишь пренебрежимо малый вклад, так что

$$\left(\frac{d}{dt} M_z\right)_R = -(M_z - M_g) \Gamma_{lo}, \quad (2.61-9)$$

где Γ_{lo} — константа спин-решеточной релаксации (продольная релаксация). Равновесная намагниченность в поперечном направлении равна нулю, вследствие чего

$$\left(\frac{d}{dt} M_x\right)_R = -M_x \Gamma_{tr}, \quad \left(\frac{d}{dt} M_y\right)_R = -M_y \Gamma_{tr}, \quad (2.61-10)$$

где Γ_{tr} охватывает как спин-спиновое, так и спин-решеточное взаимодействия (Γ_{tr} — константа поперечной релаксации). В условиях описываемого эксперимента (измерения в жидкой фазе) можно принять, что Γ_{tr} в два раза больше Γ_{lo} ; в нашем примере Γ_{lo} по порядку величины составляет 10^3 с^{-1} .

Окончательно для дополнительного члена, обусловленного существованием релаксационных механизмов получаем

$$\left(\frac{d}{dt} M\right)_R = \begin{Bmatrix} -M_x \Gamma_{tr} \\ -M_y \Gamma_{tr} \\ -(M_z - M_g) \Gamma_{lo} \end{Bmatrix}. \quad (2.61-11)$$

При этом величину M_g следует считать константой (случай так называемого медленного прохождения). Таким

образом, уравнения Блоха принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_K} \left[\frac{d}{dt} + \Gamma_{tr} \right] M_x - H_g M_y + H_y M_g - \beta H'_z M_y + \beta H_y M'_z &= 0, \\ \frac{1}{g_K} \left[\frac{d}{dt} + \Gamma_{tr} \right] M_y + H_g M_x - H_x M_g + \beta H'_z M_x - \beta H_x M'_z &= 0, \\ \frac{1}{g_K} \left[\frac{d}{dt} + \Gamma_{lo} \right] M'_z - \beta H_y M_x + \beta H_x M_y &= 0, \end{aligned} \quad (2.61-12)$$

где разность $M_z - M_g$ обозначена через M'_z . Параметр разложения β используется в поясненном ниже методе решения и сначала его можно положить равным единице.

При заданном ходе функций $H_x(t)$, $H_y(t)$ и $H'_z(t)$ и при учете заданных констант g_K , Γ_{tr} , Γ_{lo} , H_g и M_g искомыми являются индуцированные этими напряженностями поля компоненты намагниченности M_x , M_y , M'_z . Аналогично методу, изложенному в § 2.1, решение определяется по теории возмущений, т. е. путем последовательного нахождения решений в различных порядках. При указанных условиях оказывается целесообразным считать члены, содержащие произведения индуцированной намагниченности (M_x , M_y или M'_z) и напряженности «слабого» поля (H_x , H_y или H'_z), величинами высшего порядка малости по сравнению с другими членами. В соответствии с этим в некоторых членах уравнения (2.61-12) введен параметр разложения β . Расчет по методу возмущений проводится с подстановкой

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j M_x^{(j+1)}, \\ M_y &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j M_y^{(j+1)}, \\ M'_z &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j M'_z^{(j+1)}. \end{aligned} \quad (2.61-13)$$

Математическими основаниями для такого метода расчета, согласно вышеизложенному, в первую очередь служат соотношения между порядками величин, входящих в уравнения компонент напряженности поля и намагниченности [особенно важным является соотношение

(2.61-8)]. Зависимость напряженностей поля от времени играет второстепенную роль. В этой связи следует указать на то, что мы отклонились от метода, часто применяемого при изучении явлений ядерного резонанса. В намеченном выше пути решения искомые величины получаются в инерциальной системе без последующего преобразования к движущейся системе (вращающейся относительно оси z с резонансной частотой). Это обстоятельство может быть важным при определении намагниченности в заданных непериодических магнитных полях.

Если сравнить методы определения ядерной намагниченности и электрической поляризации, например атомных электронов в § 2.2, то легко заметить, что систему атомных ядер в постоянном магнитном поле H_g можно рассматривать как «атомную систему», на которую действует «внешнее поле» (H_x, H_y, H_z). Хотя поле H_g наложено извне, оно определяет характеристическое поведение ядер (резонансная частота ω_r или уровни энергии $\hbar\omega_r$ в квантовомеханической интерпретации) аналогично тому, как создаваемое атомными остовами характеристическое поле $E_{\text{атом}}$ определяет поведение атомных электронов (резонансная частота ω_E или уровни энергии $\hbar\omega_E$).

2.62. Следствия из модельных представлений

Чтобы представить решения в наиболее наглядной форме (соображения аналогичны приведенным в § 2.1 и 2.2), уравнения Блоха (2.61-12) подвергаются ПФ, а решения различных порядков определяются в частотном представлении. Математический подход очень прост: при таком методе z -компонента может быть записана непосредственно, а x - и y -компоненты определяются системой линейных уравнений с двумя неизвестными.

В первом порядке имеем

$$\begin{aligned} {}^1M_x^{(1)}(f) &= \frac{g_K M_g}{\mathcal{D}_{tr}^2(f) + \omega_r^2} [\omega_r {}^1H_x(f) - {}^1\mathcal{D}_{tr}(f) {}^1H_y(f)], \\ {}^1M_y^{(1)}(f) &= \frac{g_K M_g}{\mathcal{D}_{tr}^2(f) + \omega_r^2} [{}^1\mathcal{D}_{tr}(f) {}^1H_x(f) + \omega_r {}^1H_y(f)], \\ {}^1M_z^{(1)}(f) &= 0, \end{aligned} \quad (2.62-1)$$

где ${}^1\mathcal{D}_{tr}(f) = i2\pi f + \Gamma_{tr}$. Появление x -компоненты намагниченности может быть следующим образом объяснено на основании четырехполосной схемы (см. разд. 2.22): после прохождения через линейный четырехполосник образуется сумма двух функций, из которых первая является функцией $\omega_r H_x$, а вторая — функцией H_y , причем их частотная зависимость определяется функцией $-{}^1\mathcal{D}_{tr}(f)$. Эта суммарная функция возникает в линейном четырехполоснике с частотой затухающего гармонического осциллятора [константа трения $2\Gamma_{tr}$, резонансная частота $\sqrt{\omega_r^2 + \Gamma_{tr}^2}$, коэффициент усиления на нулевой частоте $g_K M_g / (\omega_r^2 + \Gamma_{tr}^2)$], и на выходе получается $M_x^{(1)}$; аналогичное справедливо и для $M_y^{(1)}$. В первом порядке не существует добавочная к M_g намагниченность M_z в направлении z .

Для нелинейных членов ($n > 1$) из уравнения (2.61-12) следует

$$\begin{aligned} {}^1M_x^{(n)}(f) &= \frac{g_K M_g}{\mathcal{D}_{tr}^2(f) + \omega_r^2} [\omega_r {}^1\mathcal{H}_1^{(n-1)}(f) - {}^1\mathcal{D}_{tr}(f) {}^1\mathcal{H}_2^{(n-1)}(f)], \\ {}^1M_y^{(n)}(f) &= \frac{g_K M_g}{\mathcal{D}_{tr}^2(f) + \omega_r^2} [{}^1\mathcal{D}_{tr}(f) {}^1\mathcal{H}_1^{(n-1)}(f) + \omega_r {}^1\mathcal{H}_2^{(n-1)}(f)], \\ {}^1M_z^{(n)}(f) &= g_K M_g {}^1\mathcal{D}_{10}^{-1}(f) {}^1\mathcal{H}_3^{(n-1)}(f), \text{ где } {}^1\mathcal{D}_{10}(f) = i2\pi f + \Gamma_{10}. \end{aligned} \quad (2.62-2)$$

Входящие сюда величины $\mathcal{H}_1^{(n-1)}$, $\mathcal{H}_2^{(n-1)}$ и $\mathcal{H}_3^{(n-1)}$ являются функциями, которые однозначно определяются намагниченностью $(n-1)$ -го порядка

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{(n-1)} &= \frac{1}{M_g} [H_x M_z^{(n-1)} - H_z' M_x^{(n-1)}], \\ \mathcal{H}_2^{(n-1)} &= \frac{1}{M_g} [H_y M_z^{(n-1)} - H_z' M_y^{(n-1)}], \\ \mathcal{H}_3^{(n-1)} &= \frac{1}{M_g} [H_y M_x^{(n-1)} - H_x M_y^{(n-1)}]. \end{aligned} \quad (2.62-3)$$

Из сравнения соотношений (2.62-1) и (2.62-2) видно, что нелинейные намагниченности $M_x^{(n)}$ и $M_y^{(n)}$ находятся в такой же функциональной зависимости с $\mathcal{H}_1^{(n-1)}$ и $\mathcal{H}_2^{(n-1)}$,

как линейные намагниченности $M_x^{(1)}$ и $M_y^{(1)}$ с напряженностями поля H_x и H_y .

При дискретном спектре частот в данном магнитном случае точно так же, как и в электрическом случае, можно установить простую зависимость [см. уравнение (1.22-1)] между амплитудами компонент намагниченности и амплитудами компонент напряженности поля. Для этой цели в данном параграфе обозначим через $\chi_{(K) \dots}$ восприимчивость ядерной намагниченности, определяющую связь между собственными в указанном выше смысле внешними напряженностями поля ($H_x, H_y, H_z - H_g$) и индуцированными ими намагниченностями ($M_x, M_y, M_z - M_g$).

Для первого порядка из уравнения (2.62-1) следует

$$\chi_{(K) xx}^{(1)}(f; f) = \frac{g_K M_g \omega_r}{\mathcal{D}_{tr}^2(f) + \omega_r^2}, \quad \chi_{(K) xy}^{(1)}(f; f) = -\frac{g_K M_g {}^1\mathcal{D}_{tr}(f)}{\mathcal{D}_{tr}^2(f) + \omega_r^2},$$

$$\chi_{(K) xz}^{(1)} = 0, \quad (2.62-4)$$

$$\chi_{(K) yx}^{(1)}(f; f) = -\chi_{(K) xy}^{(1)}(f; f), \quad \chi_{(K) yy}^{(1)}(f; f) = \chi_{(K) xx}^{(1)}(f; f),$$

$$\chi_{(K) yz}^{(1)} = 0, \quad (2.62-5)$$

$$\chi_{(K) zx}^{(1)} = \chi_{(K) zy}^{(1)} = \chi_{(K) zz}^{(1)} = 0. \quad (2.62-6)$$

Для высших порядков необходимо сначала определить входящие в величины $\mathcal{H}_1^{(n-1)}$, $\mathcal{H}_2^{(n-1)}$ и $\mathcal{H}_3^{(n-1)}$ частоты и соответствующие амплитуды; это можно сделать довольно просто с помощью уравнений (2.62-3), поскольку в произведениях могут появляться только суммарные или разностные частоты. Затем восприимчивости высших порядков могут быть определены с помощью уравнений (2.62-2).

Придерживаясь типичных экспериментальных условий, примем теперь, что обе компоненты напряженности поля совершают в поперечном направлении колебания с частотой f_q ; соответствующими амплитудами будут $H_x(f_q)$ и $H_y(f_q)$. Тем самым включается в рассмотрение также специальный случай циркулярно поляризованного

поперечного поля с x - и y -компонентами

$$H_x = \frac{\hat{H}_x}{2} e^{i2\pi f_q t} + \{KK\} = \hat{H}_q \cos \omega_q(t),$$

$$H_y = -\frac{\hat{H}_y}{2} e^{i2\pi f_q t} + \{KK\} = b_1 \hat{H}_q \sin \omega_q(t), \quad (2.62-7)$$

где величину \hat{H}_q следует считать вещественной и положительной. Множитель b_1 введен для учета направления вращения, он равен ± 1 . В рассматриваемом специальном случае имеем для амплитуд напряженности поля

$$\hat{H}_x(f_q) = \hat{H}_q, \quad \hat{H}_y(f_q) = -ib_1 \hat{H}_q = -ib_1 \hat{H}_x(f_q). \quad (2.62-8)$$

В направлении z поле модулируется с частотой f_m ; соответствующую амплитуду обозначим $H'_z(f_m)$. В дальнейшем будем считать величину $H'_z(f_m)$ вещественной:

$$H'_z = \hat{H}'_z(f_m) \cos \omega_m t. \quad (2.62-9)$$

Из уравнений (2.62-4) и (2.62-5) непосредственно следуют формулы для амплитуд намагниченности в циркулярно поляризованном поперечном поле, например для x -компоненты:

$$\hat{M}^{(1)}(f_q) = \frac{g_K M_g}{\mathcal{D}_{tr}^2(f_q) + \omega_r^2} [\omega_r + ib_1 {}^1\mathcal{D}_{tr}(f_q)] \hat{H}_x(f_q) =$$

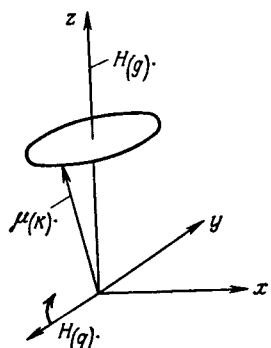
$$= \frac{g_K M_g}{\omega_r - ib_1 {}^1\mathcal{D}_{tr}(f_q)} \hat{H}_x(f_q) =$$

$$= \left[\frac{b_1 g_K M_g \Gamma_{tr}^{-2} \Delta \omega}{1 + \Delta \omega^2 \Gamma_{tr}^{-2}} + \frac{ib_1 g_K M_g \Gamma_{tr}^{-1}}{1 + \Delta \omega^2 \Gamma_{tr}^{-2}} \right] \hat{H}_x(f_q), \quad (2.62-10)$$

где величина $\omega_q + b_1 \omega_r$ обозначена через $\Delta \omega$. Для создания поперечной намагниченности потребляется мощность магнитного поля; на основании соображений, аналогичных приведенным для электрического случая в разд. 1.31, в рассматриваемом случае считающаяся положительной поглощенную мощность следует положить пропорциональной $(-\text{Im}\{M_x^{(1)}(f_q)/\hat{H}_x(f_q)\})$. Отсюда следует, что величина $(-b_1 g_K)$ должна быть больше нуля. Тем самым в зависимости от знака g_K определяется направление вращения поперечного поля. Оно должно

вращаться в том же направлении, в каком прецессирует свободное атомное ядро в поле H_g . Для протонного резонанса $b_1 = -1$, и поперечное поле вращается в отрицательном направлении (фиг. 15); величина $\Delta\omega$ равна $\omega_q - \omega_r$.

При рассмотрении второго порядка следует сначала определить частоты, содержащиеся в $\mathcal{H}_1^{(1)}$, $\mathcal{H}_2^{(1)}$ и $\mathcal{H}_3^{(1)}$.



Фиг. 15. Расположение векторов при вращении поперечного поля и дипольного момента.

Поскольку $M_z^{(1)}$ равно нулю, то в $\mathcal{H}_1^{(1)}$ и $\mathcal{H}_2^{(1)}$ входят только частоты произведений $H'_z M_y^{(1)}$ и $H'_z M_x^{(1)}$. Это частоты $f_q + f_m$ и $f_q - f_m$, называемые боковыми полосами. Легко указать соответствующие амплитуды, например

$$\begin{aligned} M_g \mathcal{H}_1^{(1)}(f_q + f_m) &= \\ &= -\frac{1}{2} \chi_{(K)xx}^{(1)}(f_q; f_q) \hat{H}_x(f_q) \hat{H}'_z(f_m) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \chi_{(K)xy}^{(1)}(f_q; f_q) \hat{H}_y(f_q) \hat{H}'_z(f_m). \end{aligned} \quad (2.62-11)$$

При использовании уравнений (2.62-2) отсюда следуют амплитуды $\hat{M}_x^{(2)}(f_q \pm f_m)$, $\hat{M}_y^{(2)}(f_q \pm f_m)$ и их зависимости от $\hat{H}_x(f_q)$, $\hat{H}_y(f_q)$, $\hat{H}'_z(f_m)$. В качестве примеров соответствующих значений восприимчивости запишем

$$\begin{aligned} \chi_{(K)xxz}^{(2)}(f_q + f_m; f_q, f_m) &= \\ &= \frac{g_K}{\mathcal{D}_{ir}^2(f_q + f_m) + \omega_r^2} \left[\frac{\mathcal{D}_{tr}(f_q + f_m)}{2} \chi_{(K)yx}^{(1)}(f_q; f_q) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_r}{2} \chi_{(K)xx}^{(1)}(f_q; f_q) \right], \end{aligned} \quad (2.62-12)$$

$$\begin{aligned} \chi_{(K)xyz}^{(2)}(f_q + f_m; f_q, f_m) &= \\ &= \frac{g_K}{\mathcal{D}_{ir}^2(f_q + f_m) + \omega_r^2} \left[\frac{\mathcal{D}_{tr}(f_q + f_m)}{2} \chi_{(K)yy}^{(1)}(f_q; f_q) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_r}{2} \chi_{(K)xy}^{(1)}(f_q; f_q) \right]. \end{aligned}$$

Величина $\mathcal{H}_3^{(1)}$ содержит произведения $H_y M_x^{(1)}$ и $H_x M_y^{(1)}$, что приводит к частотам, равным нулю и $2f_q$; соответствующие амплитуды зависят от $\hat{H}_x(f_q)$ и $\hat{H}_y(f_q)$. Согласно уравнениям (2.62-2), аналогичная ситуация имеет место для $M_z^{(2)}$. Как следует из специальных соотношений, представленных в уравнениях (2.62-8), на нулевой частоте возникает намагниченность второго порядка в направлении z , пропорциональная $\hat{H}_q^{(2)}$ и зависящая от $\Delta\omega$.

В третьем порядке возникают смещения частот $M_x^{(2)}$, $M_y^{(2)}$, $M_z^{(2)}$ с частотами колебаний H_x , H_y , H'_z . Так, например, могут возникнуть члены с частотами $f_q + f_q - f_q = f_q$ и $f_q \pm 2f_m$ с соответствующими комбинациями амплитуд.

Глава 3

ЭЛЕКТРОННЫЕ ЭФФЕКТЫ

В данной главе описываются те эффекты, в которых на передний план выступает взаимодействие электромагнитных волн с электронами, тогда как движение атомных ядер играет второстепенную роль. Для рассматриваемых эффектов можно, не допуская существенных ошибок, считать ядерный остов неподвижным.

В первую очередь мы исследуем нелинейные оптические явления низшего, т. е. второго, порядка; они служат примером для объяснения общих методов НЛО. При этом мы ограничимся рассмотрением стационарных процессов, т. е. исключим из расчета «устанавливающиеся» процессы. Такой подход вполне оправдан в случае непрерывно излучающих во времени источников света, так как при этом через короткое время после включения в каждой точке устанавливаются постоянные значения амплитуд напряженности поля и поляризации. Если же применяются импульсные лазеры, то время T , в течение которого амплитуда излучения в заданной точке мало изменяется, должно быть большим по сравнению с временем T_E «установления» состояния среды. Если частоты распространяющихся световых волн достаточно удалены от резонансных частот исследуемого вещества, то при электронных эффектах это условие выполняется даже для наиболее коротких из полученных до сих пор световых импульсов ($\approx 10^{-12}$ с). Кроме того, допустим, что одновременно входящие в кювету световые импульсы с различными скоростями распространения w'_1 , w'_2 не изменяют существенно свою форму и относительное положение внутри среды. Это значит, что относительное смещение импульсов, которое в обозначениях фиг. 16

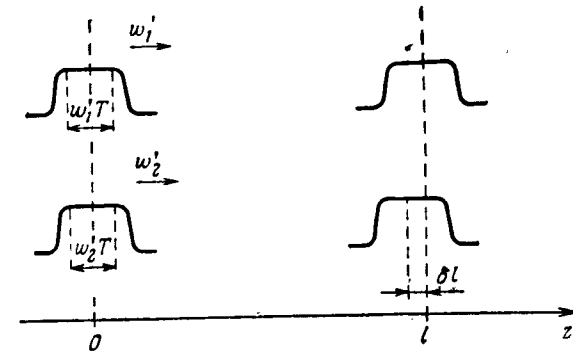
определяется выражением (см. приложение 6)

$$\delta l = l \left(1 - \frac{w'_2}{w'_1} \right), \quad (3-1)$$

должно быть мало по сравнению с $w'_2 T$. Это условие эквивалентно неравенству

$$\frac{w'_1 - w'_2}{w'_1 w'_2} l \ll T. \quad (3-2)$$

При этих предпосылках в самом деле достигается стационарное состояние, и в расчетах и численных оценках можно всегда рассматривать в каждой точке такие



Фиг. 16. Схема распространения в среде двух импульсов с различными скоростями.

интервалы времени, за которые амплитуды напряженности поля и поляризации в этой точке считаются неизменяющимися со временем. При рассмотрении стационарных процессов особенно простым и удобным оказывается описание в частотном представлении (см. разд. 1.13, 1.21 и 1.32). Исходным пунктом и вспомогательным средством в следующих параграфах служат представленные в разд. 1.322 методы описания структуры и усиления волн с дискретным спектром частот в нелинейной анизотропной среде. При дальнейшем рассмотрении делаются такие же предположения, как в упомянутом разделе.

Поэтому становится возможным использование уравнений (1.32-22) и (1.32-23) в качестве исходных уравнений для расчета усиления и генерации волн. В частности, мы рассмотрим и здесь также нелинейную, анизотропную среду, в которой все волны распространяются в одном и том же направлении, за которое мы выберем ось z лабораторной системы координат. Кроме того, предположим, что направления векторов Пойнтинга приближенно совпадают с направлениями распространения волн подобно тому, как это уже было сделано в § 1.3. В оптически одноосных кристаллах мы расположим ось y лабораторной системы в плоскости главного сечения, т. е. в плоскости, определяемой оптической осью и осью z . Тогда x - и y -компоненты напряженности поля будут распространяться соответственно как обыкновенные и не-обыкновенные волны.

§ 3.1. ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ (ЭФФЕКТ ПОККЕЛЬСА)

В этом параграфе мы рассмотрим так называемый линейный электрооптический эффект, который в действительности основан на нелинейном взаимодействии второго порядка. Этот эффект был открыт Поккельсом еще в 1893 г. Открытие этого эффекта еще до введения в оптику мощных лазерных источников света было возможным потому, что в этом эффекте, как и в нормальном эффекте Керра, проявляется влияние сильного, однородного, постоянного поля $\vec{E}_k(0)$ на свойства среды по отношению к распространению оптических волн, амплитуды которых в принципе могут быть сколь угодно малыми. Как эффект второго порядка эффект Поккельса выступает только в кристаллах без центра инверсии (см. разд. 1.22). В средах с центром инверсии, например в изотропных веществах, аналогичный эффект может наблюдаться только в третьем порядке; в этом случае он называется эффектом Керра. Для эффекта Поккельса основное соотношение между амплитудами поляризации и напряженности поля имеет вид

$$\hat{P}_i^{(H,L)}(f; z) = \sum_k \left[\sum_l \chi_{i/k}^{(2)}(f; 0, f) \hat{E}_l(0) \right] \hat{E}_k(f; z). \quad (3.1-1)$$

Это уравнение можно представить в форме

$$\hat{P}_i^{(H,L)}(f; z) = \sum_k \delta\chi_{i/k}^{(1)}(f; f) \hat{E}_k(f; z), \quad (3.1-2)$$

где

$$\delta\chi_{i/k}^{(1)}(f; f) = \sum_l \chi_{i/lk}^{(2)}(f; 0, f) \hat{E}_l(0), \quad (3.1-3)$$

так что

$$\begin{aligned} \hat{P}_i(f; z) &= \hat{P}_i^{(L)}(f; z) + \hat{P}_i^{(H,L)}(f; z) = \\ &= \sum_k [\chi_{i/k}^{(1)}(f; f) + \delta\chi_{i/k}^{(1)}(f; f)] \hat{E}_k(f, z). \end{aligned} \quad (3.1-4)$$

Следовательно, при линейном электрооптическом эффекте постоянное поле вызывает изменение линейной восприимчивости $\chi_{i/k}^{(1)}$ на величину $\delta\chi_{i/k}^{(1)}$, соответствующую изменению линейной диэлектрической постоянной $\epsilon_{i/k}^{(L)}$ на величину $(1/\epsilon_0)\delta\chi_{i/k}^{(1)}$. Вызываемый этим изменением эффект станет ясным, если подставить выражение для нелинейной поляризации в соответствующее уравнение (1.32-23) для усиления. При этом следует перейти от амплитуд \vec{E} к волновым амплитудам \vec{E} и тогда получим

$$\frac{d}{dz} \vec{E}_i(f; z) = \sum_k \frac{-i\pi\mu_0\omega^2}{q[i](f)} \delta\chi_{i/k}^{(1)}(f; f) \vec{E}_k(f; z). \quad (3.1-5)$$

Для упрощения решим это уравнение только в предположении, что недиагональными элементами $\delta\chi_{i/k}^{(1)}$ можно пренебречь (в некотором приближении такой случай реализуется довольно часто)

$$\vec{E}_i(f; z) = \vec{E}_i(f; 0) e^{-[i\pi\mu_0\omega^2/q(1)(f)] \delta\chi_{ii}^{(1)}(f; f) z}. \quad (3.1-6)$$

Следовательно, вещественная часть $\delta\chi_{ii}^{(1)}$, которая, согласно уравнению (3.1-3), пропорциональна приложенному постоянному полю, создает возрастающее с координатой z по линейному закону изменение фазы, а мнимая часть обуславливает соответствующее экспоненциальное убывание амплитуды. Поэтому нелинейная среда с эффектом Поккельса фактически эквивалентна линейной среде с восприимчивостью $\chi_{ii}^{(1)} + \delta\chi_{ii}^{(1)}$ или с диэлектрической

постоянной $\epsilon_{ii}^{(1)} + 1/\epsilon_0 \delta\chi_{ii}^{(1)}$. Поскольку $\delta\chi_{ii}^{(1)}$ зависит от направления приложенного внешнего постоянного поля, то, как и при эффекте Керра, возникает зависящее от напряженности поля двойное лучепреломление. Аналогично эффекту Керра эффект Поккельса позволяет изменять (сравнительно медленно) оптические константы во внешнем электрическом поле и создавать двойное лучепреломление. Такая возможность используется для построения систем управления световыми потоками. Для получения таких же воздействий, какие достигаются с ячейками Керра, в установках, основанных на эффекте Поккельса, требуются более низкие напряжения, поскольку он является эффектом более низкого порядка.

§ 3.2. ПОЛУЧЕНИЕ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

Как уже указывалось во введении, получение второй гармоники было первым открытым эффектом нелинейного взаимодействия оптических волн. Это открытие привело к бурному развитию НЛО в последнее десятилетие и продолжает играть существенную роль также в настоящее время, например, при генерации интенсивного коротковолнового излучения. Для рассмотрения этого нелинейного эффекта второго порядка мы выведем и обсудим в разд. 3.21 соответствующие уравнения генерации, тогда как в разд. 3.22 мы специально остановимся на проблеме согласования фаз, возникающей при многих процессах НЛО. Рассматриваемые среды будем считать в области основной частоты и ее гармоники свободными от потерь в смысле определения, данного в разд. 1.23.

3.21. Вывод и решение уравнений генерации

Исследуем генерацию второй гармоники, обусловленную нелинейной поляризацией второго порядка с колебательными амплитудами

$$\begin{aligned} \hat{P}_i^{(НЛ)}(f; z) &= \sum_{j, k} \chi_{ijk}^{(2)}(f; 2f, -f) \hat{E}_j(2f; z) \hat{E}_k^*(f; z), \\ \hat{P}_i^{(НЛ)}(2f; z) &= \sum_{j, k} \chi_{ijk}^{(2)}(2f; f, f) \hat{E}_j(f; z) \hat{E}_k(f; z). \end{aligned} \quad (3.21-1)$$

Эти соотношения следует подставить в соответствующие уравнения генерации (1.32-23) для частот f и $2f$. Переходя к волновым амплитудам напряженности поля, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{E}_i(f; z) &= \sum_{j, k} \frac{-i\pi\mu_0\mu}{q^{(i)}(f)} \chi_{ijk}^{(2)}(f; 2f, -f) \bar{E}_j(2f; z) \times \\ &\quad \times \bar{E}_k^*(f; z) e^{i2\pi z [q^{(i)}(f) - q^{(j)}(2f) + q^{(k)}(f)]}, \\ \frac{d}{dz} \bar{E}_i(2f; z) &= \sum_{j, k} \frac{-i\pi\mu_0\mu}{q^{(i)}(2f)} \chi_{ijk}^{(2)}(2f; f, f) \bar{E}_j(f; z) \times \\ &\quad \times \bar{E}_k(f; z) e^{i2\pi z [q^{(i)}(2f) - q^{(j)}(f) - q^{(k)}(f)]}. \end{aligned} \quad (3.21-2)$$

Экспоненциальный множитель $e^{i2\pi z \Delta q}$ во втором уравнении системы (3.21-2) зависит от разности между волновым числом (компонентой волнового вектора) $q^{(i)}(2f)$ электрической волны с частотой $2f$ (направление поляризации i) и волновыми числами $q^{(j)}(f)$, $q^{(k)}(f)$ электрических волн с частотой f (направление поляризации j или k). При заданных амплитудах и восприимчивостях этот множитель определяет фазу $(d/dz) \bar{E}_i(2f; z)$ в определенном месте среды. Поэтому такие разности волновых чисел играют существенную роль для генерации второй гармоники и для протекания других нелинейных процессов, на чем мы подробнее остановимся в дальнейшем. [Поскольку, согласно уравнению (3.21-1), сумма $q^{(j)}(f) + q^{(k)}(f)$ представляет собой волновое число нелинейной поляризации $P_i^{(НЛ)}(2f)$, то Δq можно трактовать также как разность между волновыми числами электрической волны с частотой $2f$ и поляризационной волны той же частоты. В соответствии с этим величина Δq определяет в заданном месте разность фаз колебаний поляризации и напряженности поля, а, следовательно, в соответствии с выводами, сделанными в разд. 1.31, — также величину и знак усиления мощности в этом же месте.]

С помощью системы уравнений (3.21-2) можно считать образование электрической волны с частотой $2f$ за счет основной волны в процессе прохождения через нелинейную среду в направлении z . При этом мы не

будем искать общее решение и ограничимся случаем малого коэффициента преобразования. Тогда можно пренебречь ослаблением основной волны и положить $\bar{E}_i(f; z) = \bar{E}_i(f; 0)$. При этих предположениях можно сразу проинтегрировать второе уравнение системы (3.21-2), что приводит к результату

$$E_i(2f; z) = \sum_{j, k} \frac{-i\pi\mu_{0j}(2f)^2}{q^{(j)}(2f)} \chi_{ijk}^{(2)}(2f; f, f) \times \\ \times \bar{E}_j(f; 0) \bar{E}_k(f; 0) \frac{1 - e^{i2\pi z \Delta q}}{-i2\pi \Delta q}, \quad (3.21-3)$$

где $\Delta q = q^{(j)}(2f) - q^{(j)}(f) - q^{(k)}(f)$. величиной $E_i(2f, 0)$ здесь можно пренебречь по сравнению с $E_i(2f; z)$. Разность волновых чисел Δq может быть следующим образом выражена через показатели преломления $n^{(j)}(f)$ для соответствующих частот и направлений поляризации:

$$\Delta q = \frac{f}{c} [2n^{(j)}(2f) - n^{(j)}(f) - n^{(k)}(f)]. \quad (3.21-4)$$

Если, в частности, все участвующие в процессе волны распространяются как обыкновенные или необыкновенные волны с одинаковыми направлениями поляризации, то уравнение (3.21-4) упрощается и принимает вид

$$\Delta q_o = \frac{2f}{c} [n_o^{(j)}(2f) - n_o^{(j)}(f)]$$

и

$$\Delta q_{ao} = \frac{2f}{c} [n_{ao}^{(j)}(2f) - n_{ao}^{(j)}(f)], \quad (3.21-5)$$

где $n_o^{(j)}$, $n_{ao}^{(j)}$ — линейные показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн. При дальнейшем обсуждении уравнения (3.21-3) мы не будем иметь в виду этот частный случай, а предположим, что при формировании $E_i(2f; z)$ существенный вклад вносит лишь комбинация j, k компонент амплитуды $\bar{E}_i(f; z)$. Тогда в предельном случае $\Delta q \rightarrow 0$ из уравнения (3.21-3) следует линейное возрастание $E(2f; z)$ по z . Для $\Delta q \neq 0$ найдем, что амплитуда и ее квадрат претерпевают периодические

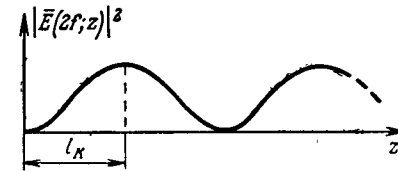
изменения, определяемые уравнением

$$|\bar{E}_i(2f; z)|^2 = \left| \frac{\pi\mu_{0j}(2f)^2}{q^{(j)}(2f)} \chi_{ijk}(2f; f, f) \right|^2 \times \\ \times \frac{\sin^2 \pi \Delta q z}{(\pi \Delta q)^2} |\bar{E}_j(f; 0)|^2 |\bar{E}_k(f; 0)|^2. \quad (3.21-6)$$

Эта функция достигает своего максимального значения на расстоянии

$$l_K = \frac{1}{2\Delta q}, \quad (3.21-7)$$

которое называют фазовой когерентной длиной (см. фиг. 17). В конце концов соотношение фаз между амплитудами поляризации и напряженности электрического



Фиг. 17. Зависимость квадрата модуля амплитуды второй гармоники от пути z , пройденного волной в кристалле.

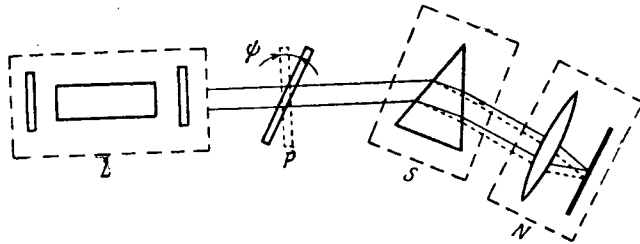
поля на частоте $2f$ становится таким, что происходит обратная перекачка энергии гармоники в основную волну. После длины $2l_K$ интенсивность гармоники, согласно уравнению (3.21-6), снижается до нуля (точнее, до значения в начале среды). Затем вновь начинается процесс усиления гармоники и т. д.

Генерацию второй гармоники и, в частности, периодическую зависимость от длины пути в веществе можно наблюдать экспериментально с помощью схемы, показанной на фиг. 18. Свет лазера падает на исследуемую кристаллическую пластинку и проходит в ней путь z . При этом определенная часть энергии основной волны преобразуется в энергию гармоники. После выхода из пластинки обе волны спектрально разделяются и регистрируются. Величину эффективного слоя z образца можно изменять путем вращения кристалла толщиной d ,

используя соотношение

$$z = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^{(Л)}} \sin^2 \psi}},$$

где ψ — угол поворота. (При этом следует иметь в виду, что сделанные выше предположения справедливы только для малых углов ψ .) Применяя рубиновый лазер ($\lambda =$



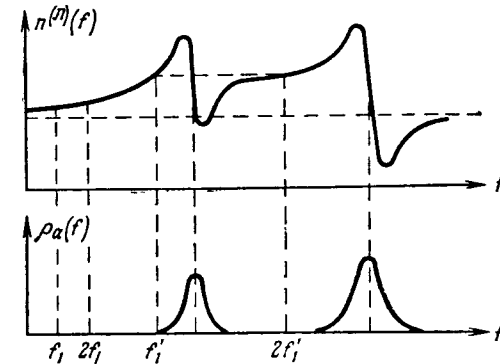
Фиг. 18. Схема установки для получения второй гармоники. L — лазер; P — образец; S — призма; N — детектор.

$= 0,7$ мкм), Мейкер и др. получили таким способом, например, для фазовой когерентной длины в кварце значение $l_K = 7$ мкм. Оно согласуется со значением, вычисленным по уравнениям (3.21-7) и (3.21-5) на основании значений показателя преломления.

3.22. Методы согласования фаз

Из уравнения (3.21-6) видно, что коэффициент преобразования основной волны в гармонику может быть повышен путем увеличения фазовой когерентной длины, т. е. при уменьшении Δq . В этом случае принято говорить о согласовании фаз, поскольку при малых Δq относительная фаза волн напряженности поля и поляризации существенно не изменяется на большом отрезке пути с частотой $2f$. Как следует из уравнения (3.21-4), величина Δq зависит от показателей преломления для частот f и $2f$ и для различных направлений поляризации. Поэтому следует перейти к изучению их свойств.

На фиг. 19 схематически представлена зависимость показателя преломления от частоты для заданного направления поляризации и для вещества с двумя областями поглощения. В пределах области прозрачности показатель преломления возрастает с увеличением частоты, т. е. имеет место нормальная дисперсия. Если основная волна и ее гармоника с одними и теми же направлениями распространения и поляризации находятся

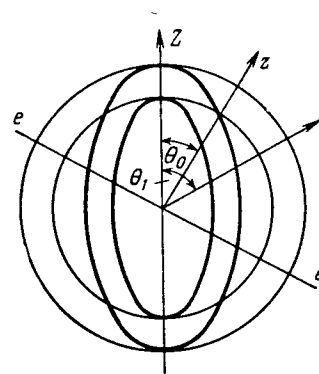


Фиг. 19. Схематическое представление показателя преломления и коэффициента поглощения для вещества с двумя областями поглощения.

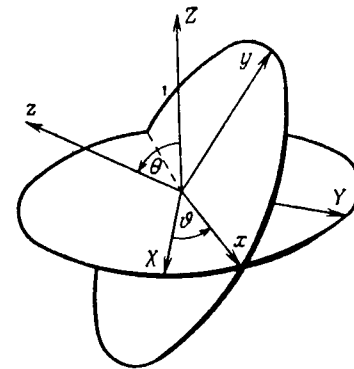
внутри области прозрачности, то всегда соблюдается неравенство $n^{(Л)}(2f) > n^{(Л)}(f)$. Из уравнения (3.21-5) видно, что в этом случае полное согласование фаз при $\Delta q = 0$ невозможно. Наоборот, условие $\Delta q = 0$ может быть достигнуто, если обе частоты разделены достаточно интенсивной полосой поглощения (см. f_1' и $2f_1'$ на фиг. 19). Однако использование этого метода для генерации второй гармоники связано с трудностями, ибо в определенных системах кристаллов (см. разд. 1.22), вообще говоря, отсутствуют полосы поглощения необходимой интенсивности. Иначе обстоит дело, например, с проблемой генерации третьей гармоники, которая возможна также в жидкостях; добавляя краситель в соответствующей концентрации, можно достичь такого

поглощения, при котором будет выполняться условие $\Delta n^{(1)} = n^{(1)}(3f) - n^{(1)}(f) = 0$.

Очень эффективный метод согласования фаз при генерации второй гармоники основан на использовании двойного лучепреломления в анизотропных (часто одноосных) кристаллах. Как известно, в одноосном кристалле могут распространяться в любом направлении, кроме направления оптической оси, две монохроматические волны с одной и той же частотой и с различными фазовыми скоростями — обыкновенная и необыкновенная волны. Направления поляризации обеих волн взаимно перпендикулярны. Фазовая скорость ω_{ao} и показатель преломления $n_{ao}^{(1)}$ необыкновенного луча зависят от направления и лишь в направлении оптической оси совпадают с соответствующими значениями для обыкновенного луча ω_o и $n_o^{(1)}$. Кристаллы, для которых $n_{ao}^{(1)} > n_o^{(1)}$ и $n_{ao}^{(1)} < n_o^{(1)}$, называют соответственно положительно и отрицательно двоякопреломляющими. На фиг. 20 схематически представлен эллипсоид показателей преломления отрицательно двоякопреломляющего кристалла для частот f и $2f$ в области нормальной дисперсии. (Отклонение эллипсоида от сферической формы и дисперсия на фиг. 20 сильно преувеличены.) Это представление качественно отображает, например, соотношения в KDP при облучении кристалла светом рубинового лазера. Из фиг. 20 видно, что существует направление под углом θ_0 к оптической оси, для которого $n_{ao}^{(1)}(2f) - n_o^{(1)}(f) = 0$. Следовательно, в этом направлении возможно полное согласование фаз, если лазерный свет распространяется как обыкновенный луч, а вторая гармоника — как необыкновенный луч. Кроме того, существует направление θ_1 , в котором $2n_{ao}(2f) - n_{ao}(f) - n_o(f) = 0$. В этом случае также возможно полное согласование фаз, если в кристалле распространяются обыкновенная и необыкновенная волны с основной частотой. Для генерации второй гармоники из кристалла вырезают пластинки так, чтобы нормали к их поверхностям совпадали с направлением согласования фаз. Например, на фиг. 20 такая поверхность пересекается с плоскостью рисунка вдоль прямой ee . В направлении согласования фаз, образу-



Фиг. 20. Схематическое представление эллипсоида показателей преломления для отрицательно двоякопреломляющего кристалла при частотах f и $2f$.



Фиг. 21. Относительное положение лабораторной системы координат (x, y, z) и системы координат кристалла (X, Y, Z) .

щем угол θ_0 с оптической осью, пропускается свет с частотой f , поляризованный в направлении x , т. е. перпендикулярно главному сечению. Этот свет распространяется в кристалле как обыкновенная волна. Выходящий свет с частотой $2f$ поляризован в направлении y и является необыкновенной волной. В этом случае в уравнении (3.21-5) или (3.21-6) присутствует только компонента восприимчивости $\chi_{yxx}^{(2)}(2f; f, f)$.

Выразим теперь компоненты восприимчивости в лабораторной системе координат (x, y, z) , заданной направлениями входящего луча и поляризации, через компоненты восприимчивости в определенном образом ориентированной относительно кристалла системе X, Y, Z . [До сих пор была определена только ориентация оси Z , которая совпадает с оптической осью и расположена в плоскости (y, z) .] Такое преобразование позволит выразить интересующие нас компоненты для любых ориентаций через относительно небольшое число легко табулируемых материальных параметров (см., например, табл. 2). Уравнения преобразования имеют вид (см.

разд. 1.22)

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \sum_{I, J, K} s_{iI} s_{jJ} s_{kK} \chi_{IJK}^{(2)'}$$

где матрицы преобразования s_{iI} и др. при обозначениях фиг. 21 заданы в форме

$$s_{iI} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos \theta \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(Рассматривается частный случай представления с углами Эйлера.) В качестве примера выразим компоненты $\chi_{yxx}^{(2)}(2f; f, f)$ для среды, принадлежащей к точечной группе $\bar{4}2m$, через компоненты восприимчивости в системе координат фиг. 7. Пользуясь обозначениями разд. 1.22, получаем

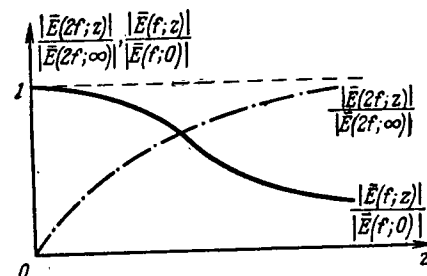
$$\begin{aligned} \chi_{yxx}^{(2)}(2f; f, f) &= \sin \theta \sin \theta \cos \theta \times \\ &\times [\chi_{zxy}^{(2)'}(2f; f, f) + \\ &+ \chi_{zyx}^{(2)'}(2f; f, f)] = \\ &= 2 \sin \theta \sin \theta \cos \theta \times \\ &\times d_{36}(2f; f, f). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что \hat{P} (нл) достигает максимума при ориентации кристалла под углом $\theta = 45^\circ$. В согласии с этим соотношением на опыте наряду с резко вы-

Фиг. 22. Зависимость квадрата модуля амплитуды второй гармоники от углов θ и ϑ . Расходимость применяемого лазерного пучка составляет $0,25^\circ$.

раженной и обусловленной согласованием фаз зависимости интенсивности гармоники от угла θ наблюдается еще слабая зависимость от угла ϑ (фиг. 22). Из этого примера видно, что для наиболее благоприятной генерации гармоники необходимо следить за соответствующей ориентацией всех осей кристалла (а не только оптической оси) по отношению к направлениям падающего света и поляризации.

Приведенные выше рассуждения о согласовании фаз, строго говоря, применимы лишь к бесконечным волновым поверхностям. При конечном поперечном сечении светового пучка возникает ограниченная область (даже при $\Delta q = 0$), в которой волны могут перекрываться и тем самым взаимодействовать между собой. Это ограничение является следствием двойного лучепреломления, благодаря которому обыкновенный и необыкновенный световые лучи распространяются в несколько



Фиг. 23. Зависимость абсолютных значений амплитуд напряженности поля $|E(2f; z)|$ и $|E(f; z)|$ (в относительных единицах) от пройденного в кристалле пути z при согласовании фаз.

различных направлениях, чем мы до сих пор пренебрегали. При довольно длинном пути в кристалле перекрытие пучков уже окажется недостаточным. Этот эффект слаб, если угол θ мало отличается от 90° , так как перпендикулярно оптической оси оба пучка распространяются параллельно друг другу. Условие $\theta_0 = 90^\circ$ достигается, например, для света аргонового лазера ($\lambda = 0,5145 \text{ мкм}$) в KDP при температуре 259 K .

В заключение укажем на то, что при условии согласования фаз могут достигаться очень высокие коэффициенты преобразования. Тогда предположение о постоянстве амплитуды падающей волны в пространстве уже нельзя считать оправданным. Строгое решение системы уравнений (3.21-2) без этого предположения было дано Армстронгом и сотр. [11]. Вместо линейного возрастания амплитуды $E(2f)$ с увеличением z строгое решение

приводит к зависимости амплитуд от z , показанной на фиг. 23. В эксперименте могут быть достигнуты почти полные преобразования основной волны в гармонику. Это удается при длине кристаллов порядка $q(2f) [\pi \mu_0 (2f)^2 \chi^{(2)}(2f; f, f) \bar{E}(f; 0)]^{-1}$ ($\approx 10^{-2}$ м при $\chi^{(2)} = 10^{-22}$ А·с²/В², $\lambda = 1$ мкм и при интенсивностях порядка 10^{10} Вт/м²).

§ 3.3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕХ СВЕТОВЫХ ВОЛН

В этом параграфе описываются эффекты взаимодействия между тремя световыми волнами с частотами f_1, f_2, f_3 . Эти эффекты обусловлены в кристалле нелинейной поляризацией второго порядка. Частоты удовлетворяют соотношению $f_1 = f_2 + f_3$. Действуя так же, как в § 3.2, получаем из уравнения (1.32-23)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{E}_i(f_1; z) &= \sum_{j, k} \frac{-i\pi\mu_0\mu f_1^2}{q^{[i]}(f_1)} \chi_{ijk}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) \bar{E}_j(f_2; z) \times \\ &\quad \times \bar{E}_k(f_3; z) e^{2\pi z [q^{[i]}(f_1) - q^{[j]}(f_2) - q^{[k]}(f_3)],} \\ \frac{d}{dz} \bar{E}_i(f_2; z) &= \sum_{j, k} \frac{-i\pi\mu_0\mu f_2^2}{q^{[i]}(f_2)} \chi_{ijk}^{(2)}(f_2; f_1, -f_3) \bar{E}_j(f_1; z) \times \\ &\quad \times \bar{E}_k^*(f_3; z) e^{-i2\pi z [q^{[i]}(f_2) - q^{[j]}(f_1) + q^{[k]}(f_3)],} \quad (3.3-1) \\ \frac{d}{dz} \bar{E}_i(f_3; z) &= \sum_{j, k} \frac{-i\pi\mu_0\mu f_3^2}{q^{[i]}(f_3)} \chi_{ijk}^{(2)}(f_3; -f_2, f_1) \bar{E}_j^*(f_2; z) \times \\ &\quad \times \bar{E}_k(f_1; z) e^{i2\pi z [q^{[i]}(f_3) + q^{[j]}(f_2) - q^{[k]}(f_1)].} \end{aligned}$$

Эта система уравнений будет в дальнейшем решена для случаев генерации суммарных и разностных частот и параметрического усиления в предположении, что коэффициенты преобразования не достигают слишком высоких значений. Как и для генерации второй гармоники, примем, что в области рассматриваемых частот среда свободна от потерь в смысле определения, данного в разд. 1.23.

3.31. Получение суммарных и разностных частот

Система уравнений (3.3-1) сначала решается в предположении, что входящее в среду излучение состоит из двух сильных световых волн с частотами f_2, f_3 , а затем вследствие нелинейных эффектов в среде усиливается слабая волна с частотой f_1 . При сделанном выше предположении о малой величине коэффициентов преобразования можно пренебречь зависимостью амплитуд $\bar{E}_j(f_2; z), \bar{E}_k(f_3; z)$ от координат. Кроме того, как и в § 3.2, примем, что только комбинация j, k компонент этих амплитуд вносит вклад в усиление компоненты $\bar{E}_i(f_1; z)$. Тогда в качестве решения первого уравнения системы (3.3-1) получается соотношение

$$\begin{aligned} \bar{E}_i(f_1; z) - \bar{E}_i(f_1; 0) &= \frac{-i\pi\mu_0\mu f_1^2}{q^{[i]}(f_1)} \chi_{ijk}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) \times \\ &\quad \times \bar{E}_j(f_2; 0) \bar{E}_k(f_3; 0) \frac{1 - e^{i2\pi \Delta q z}}{[-i2\pi \Delta q]} \quad (3.31-1) \end{aligned}$$

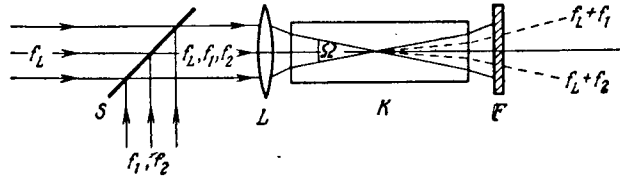
при $\Delta q = q^{[i]}(f_1) - q^{[j]}(f_2) - q^{[k]}(f_3)$, описывающее усиление или генерацию волны с суммарной частотой f_1 . Соответственно при облучении сильным светом с частотами f_1, f_3 получается усиление волны с разностной частотой, описываемое соотношением

$$\begin{aligned} \bar{E}_i(f_2; z) - \bar{E}_i(f_2; 0) &= \frac{-i\pi\mu_0\mu f_2^2}{q^{[i]}(f_2)} \chi_{ijk}^{(2)}(f_2; f_1, -f_3) \times \\ &\quad \times \bar{E}_j(f_1; 0) \bar{E}_k^*(f_3; 0) \frac{1 - e^{i2\pi \Delta q z}}{[-i2\pi \Delta q]} \quad (3.31-2) \end{aligned}$$

при $\Delta q = q^{[i]}(f_2) - q^{[j]}(f_1) + q^{[k]}(f_3)$. Уравнения (3.31-1) и (3.31-2) позволяют описать эксперименты со смешением различных линий излучения одного лазера или разных лазеров. Используя лазерное излучение в видимой области в качестве исходного, можно таким способом получить достаточно интенсивные световые волны как в ультрафиолетовой, так и в инфракрасной областях спектра.

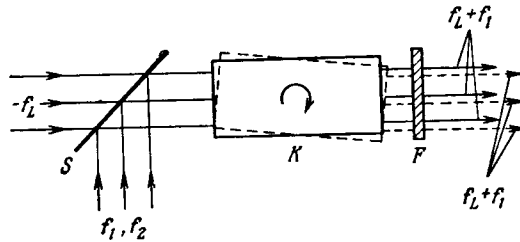
Для повышения коэффициентов преобразования при этих процессах следует, как и в случае генерации второй гармоники, обеспечить согласование фаз ($\Delta q \rightarrow 0$); для этой цели применяются те же самые методы, какие

уже были описаны выше, в частности используется двойное лучепреломление в определенных нелинейных кристаллах. При длинных путях прохождения света в нелинейном кристалле величина коэффициента преобразования очень чувствительна к малым изменениям Δq .



Фиг. 24. Схема конструкции нелинейного спектрографа.

S — частично прозрачное зеркало; L — линза; F — фильтр, пропускающий только свет суммарной частоты.



Фиг. 25. Схема конструкции нелинейного монохроматора.

S — частично прозрачное зеркало; K — способный вращаться кристалл; F — фильтр, пропускающий только свет суммарной частоты.

По этой причине можно использовать дисперсию, т. е. частотную зависимость Δq при смещении света, для построения нелинейных спектрографов и монохроматоров. К этим приборам предъявляется требование высокой угловой дисперсии и высокой разрешающей способности. Их принцип предложен С. А. Ахмановым, Р. В. Хохловым и сотрудниками и объяснен на фиг. 24 и 25. В обеих установках достигается коллинеарность лучей света вспомогательного лазера с частотой f_L и исследуемого света (в данном случае с частотами f_1 и f_2). Этой цели служит зеркало S , хорошо пропускающее лазерное излучение и наиболее полно отражающее второе излучение. В нелинейных спектрографах объединенный

пучок света фокусируется с помощью линзы на нелинейный кристалл. Благодаря этому свет с частотами f_L , f_1 , f_2 распространяется в нелинейном кристалле во всех направлениях внутри угла раствора Ω . Если соответствующие направления согласования фаз заключены внутри этого угла, то в этих направлениях происходит оптимальная генерация суммарных частот $f_L + f_1$ и $f_L + f_2$. Таким способом достигается угловая развертка исследуемого света по частотным компонентам. В монохроматоре параллельный пучок света, состоящего из лазерного и исследуемого излучений, направляется непосредственно в кристалл. В этом случае при заданной ориентации кристалла и при высоких коэффициентах преобразования с лазерным светом могут смешиваться только те частотные компоненты исследуемого света, для которых выполняется условие согласования фаз. Настройка на другие частоты может осуществляться, например, путем вращения кристалла. Эксперименты со смешением частот служат также для обнаружения какого-либо излучения путем измерений в другой, более доступной, спектральной области. Приведем пример. Смешивая инфракрасный свет лазера на CO_2 со светом рубинового лазера, получают излучение на суммарной частоте в видимой области. Для такого смешения используется кристалл прустита, прозрачный в интервале от видимой по далекой инфракрасной области спектра. Описанный метод позволяет обнаружить и разложить в спектр инфракрасное излучение при помощи спектрометров и приемников видимого диапазона, что часто оказывается более удобным.

3.32. Параметрическое усиление и генерация

С еще одним важным случаем взаимодействия между тремя световыми волнами мы встречаемся при параметрическом усилении или при параметрических колебаниях. Так называют процессы нарастания амплитуд двух световых волн с частотами f_2 , f_3 (или их генерацию) в среде под влиянием излучения сильной световой волны (волны накачки) с частотой $f_1 = f_2 + f_3$. Волна накачки определенным образом изменяет состояние системы

с течением времени. Можно говорить об изменении параметров системы. При решении системы уравнений (3.3-1) принимают, что амплитуда волны накачки остается постоянной. Кроме того, без ограничения общности можно считать величину $\bar{E}_i(f_1; 0)$ вещественной. Из уравнения (1.32-23) следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{E}_i(f_2; z) &= \sum_{l, k} \frac{-i\pi\mu_0\mu f_2^2}{q^{[l]}(f_2)} \chi_{ijk}^2(f_2; f_1, -f_3) \times \\ &\times \bar{E}_i(f_1; 0) \bar{E}_k^*(f_3; z) e^{i2\pi z [q^{[l]}(f_2) - q^{[l]}(f_1) + q^{[k]}(f_3)]}, \\ \frac{d}{dz} \bar{E}_i(f_3; z) &= \sum_{l, k} \frac{-i\pi\mu_0\mu f_3^2}{q^{[l]}(f_3)} \chi_{ijk}^{(2)}(f_3; -f_2, f_1) \times \\ &\times \bar{E}_i^*(f_2; z) \bar{E}_k(f_1; 0) e^{i2\pi z [q^{[l]}(f_3) + q^{[l]}(f_2) - q^{[k]}(f_1)]}. \end{aligned} \quad (3.32-1)$$

Предположим теперь, что каждая волна поляризована в направлении одной из осей координат. Обозначим их i, j, k для волн с частотами f_1, f_2, f_3 . Пользуясь свойствами пространственно-частотной симметрии (1.23-17), перепишем систему уравнений (3.32-1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{E}_i(f_2; z) &= \frac{-i\pi\mu_0\mu f_2^2}{q^{[l]}(f_2)} \chi_{ijk}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) \times \\ &\times \bar{E}_i(f_1; 0) \bar{E}_k^*(f_3; z) e^{-i2\pi z \Delta q}, \\ \frac{d}{dz} \bar{E}_k(f_3; z) &= \frac{-i\pi\mu_0\mu f_3^2}{q^{[k]}(f_3)} \chi_{ijk}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) \times \\ &\times \bar{E}_i(f_1; 0) \bar{E}_i^*(f_2; z) e^{-i2\pi z \Delta q} \end{aligned} \quad (3.32-2)$$

при $\Delta q = q^{[l]}(f_1) - q^{[l]}(f_2) - q^{[k]}(f_3)$.

Для дальнейшего сокращения записи введем в рассмотрение вещественные величины:

$$\begin{aligned} \eta' &= \sqrt{\frac{f_2^2 f_3^2}{q^{[l]}(f_2) q^{[k]}(f_3)}} \mu_0 \mu \chi_{ijk}^{(2)}(f_1; f_2, f_3) \bar{E}_i(f_1; 0), \\ C' &= \sqrt{\frac{q^{[k]}(f_3) f_2^2}{q^{[l]}(f_2) f_3^2}}. \end{aligned} \quad (3.32-3)$$

Переходя одновременно от $\bar{E}_k(f_3; z)$ к комплексно сопряженной величине, получаем из уравнений (3.32-2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{E}_i(f_2; z) + iC' \eta' \bar{E}_k^*(f_3; z) e^{-i2\pi z \Delta q} &= 0, \\ \frac{d}{dz} \bar{E}_k^*(f_3; z) - i \frac{1}{C'} \eta' \bar{E}_i(f_2; z) e^{i2\pi z \Delta q} &= 0. \end{aligned} \quad (3.32-4)$$

Решим сначала эту систему уравнений для случая точного согласования фаз, т. е. при $\Delta q = 0$. Для этого подставим в нашу систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами решения $\bar{E}_i(f_2; z) = E_{(2)} e^{\bar{C}z}$, $\bar{E}_k^*(f_3; z) = E_{(3)} e^{\bar{C}z}$, что приведет к условию $\bar{C} = \pm \eta'$. Тогда общее решение примет вид

$$\begin{aligned} \bar{E}_i(f_2; z) &= E_{(2)(+)} e^{\eta' z} + E_{(2)(-)} e^{-\eta' z}, \\ \bar{E}_k^*(f_3; z) &= i \frac{1}{C'} E_{(2)(+)} e^{\eta' z} - i \frac{1}{C'} E_{(2)(-)} e^{-\eta' z}. \end{aligned} \quad (3.32-5)$$

Обсудим это решение при условии, что $\bar{E}_i(f_2; z)$ и $\bar{E}_k^*(f_3; z)$ заданы при $z = 0$, причем амплитуду $\bar{E}_k^*(f_3; 0)$ будем считать пренебрежимо малой, так что можно положить $\bar{E}_k^*(f_3; 0) = 0$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \bar{E}_i(f_2; z) &= \bar{E}_i(f_2; 0) \operatorname{ch}(\eta' z), \\ \bar{E}_k^*(f_3; z) &= i \bar{E}_i(f_2; 0) \frac{1}{C'} \operatorname{sh}(\eta' z). \end{aligned} \quad (3.32-6)$$

Из этих уравнений видно, что при $\eta' z \gg 1$ величины $\bar{E}_i(f_2; z)$ и $\bar{E}_k^*(f_3; z)$ возрастают по экспоненциальному закону с коэффициентом усиления амплитуды η' . Без предположения о точном согласовании фаз ($\Delta q \neq 0$) систему уравнений (3.32-4) можно решить с помощью аналогичной подстановки

$$\bar{E}_i(f_2; z) = \bar{E}_2 e^{(\bar{C} - i\pi \Delta q) z}, \quad \bar{E}_k^*(f_3; z) = \bar{E}_3^* e^{(\bar{C} + i\pi \Delta q) z}.$$

В этом случае для \bar{C} получается условие

$$\bar{C} = \pm \eta'', \quad \eta'' = \eta' \sqrt{1 - \left(\frac{\pi \Delta q}{\eta'}\right)^2}. \quad (3.32-7)$$

Решения будут однотипны с уравнениями (3.32-5) и (3.32-6), если η' заменить на η'' и в соответствии с новой подстановкой присоединить фазовые множители $e^{\pm i\pi\Delta qz}$. Отсюда следует, что при вещественном значении η'' и при $\eta''z \gg 1$ эти амплитуды также возрастают по экспоненциальному закону. Однако коэффициент усиления амплитуды η'' меньше коэффициента η' , соответствующего точному согласованию фаз. Усиление может произойти только при вещественном η'' , т. е. при условии $\eta' > \pi\Delta q$, которое в связи с уравнением (3.32-3) при заданной ориентации кристалла представляет собой определенное требование к входному излучению волны накачки. Если входное излучение сильной волны накачки имеет частоту f_1 , то может быть достигнуто усиление сигнальной волны на частоте f_2 . Одновременно при этом процессе возникает вспомогательная волна с частотой $f_3 = f_1 - f_2$.

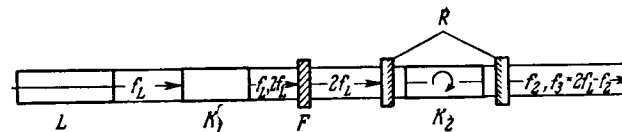
Кроме того, при облучении нелинейной среды единственной волной с частотой f_1 в ней могут возбуждаться колебания на частотах f_2 и f_3 . Эти волны возникают в результате усиления «шума». В роли «шума» здесь проявляется некогерентное спонтанное излучение с указанными частотами, которое не может быть объяснено в рамках нашего классического рассмотрения (см. по этому поводу т. 2). Для получения таких параметрических колебаний используемый нелинейный кристалл предпочитают помещать в резонатор, зеркала которого хорошо пропускают волну накачки (коэффициент отражения пластинок резонатора $|r_e| \approx 0$), тогда как коэффициент отражения на частоте сигнала и на вспомогательной частоте высок ($|r_e| \approx 1$). Необходимое пороговое условие для стационарной генерации волн с частотами f_1, f_3 состоит в том, чтобы потери, возникающие при прямом и обратном прохождении соответствующей волны через резонатор, компенсировались усилением на этом же пути. Если представить все потери сосредоточенными в зеркалах и учесть их путем введения эффективных коэффициентов отражения r_{e1}, r_{e2} , то указанное условие для пути $2l$ в среде имеет вид

$$e^{2\eta''l} |r_e|^2 = 1. \quad (3.32-8)$$

Здесь предполагается, что величина $r_{e1} \cdot r_{e2} = |r_e|^2$ является вещественной. Полагая, что $|r_e|^2 \approx 1$, получаем из уравнения (3.32-8) путем логарифмирования

$$2\eta''l = 1 - |r_e|^2. \quad (3.32-9)$$

При заданном расположении кристалла и резонатора уравнения (3.32-8) и (3.32-9) в соответствии с уравнениями (3.32-3), выражают условия, которым должна удовлетворять амплитуда волны входного излучения.



Фиг. 26. Схема параметрического осциллятора, в котором волна накачки получается как вторая гармоника.
L — неодимовый лазер; K₁ — кристалл (KDP); F — фильтр; R — резонатор; K₂ — кристалл (KDP).

При повышении этой амплитуды, начиная с ее малых значений, осциллятор начнет совершать колебания с частотами, для которых впервые выполнится условие (3.32-9). Если коэффициенты отражения слабо зависят от частоты, то вследствие уравнения (3.32-7) это условие означает, что должны возникнуть колебания на частотах, для которых соблюдается согласование фаз (при заданной ориентации кристалла).

Как параметрическое усиление, так и параметрические колебания наблюдались в экспериментах с различными лазерами и с различными кристаллами — в последнее время для этой цели применялись также лазеры непрерывного действия. Параметрический осциллятор имеет особое значение, поскольку он открывает возможность создания интенсивных, узкополосных и настраиваемых источников света. Отношение частот f_2/f_3 , при котором $\Delta q = 0$ и поэтому колебания осциллятора наиболее легко возбуждаются, может быть изменено, например, путем вращения нелинейного двоякопре-

ломляющего кристалла путем изменения его температуры или наложения постоянного электрического поля. Все эти методы уже были успешно применены в экспериментах. Часто получают волну накачки посредством удвоения частоты волны исходного лазера с частотой f_L (схема установки показана на фиг. 26) и затем получают волны с частотами f_2, f_3 , близкими к f_L . До сих пор в спектральной области около 1 мкм были получены перестройки длин волн порядка 0,2 мкм.

Глава 4

ЭФФЕКТЫ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ЯДЕР

В гл. 3 мы рассмотрели эффекты, при которых можно пренебречь влиянием движения атомных ядер; поэтому взаимодействие между электронами и электромагнитным излучением описывалось в приближении неподвижных ядерных остовов молекул или кристаллов (модель § 2.2). Типичные эффекты НЛО при этом получались уже во *втором* приближении, благодаря чему расчеты были относительно простыми.

Перейдем теперь к явлениям, в которых движение ядер в значительной мере определяет механизм взаимодействия между средой и излучением. При исследовании этих явлений мы можем воспользоваться представленными в § 2.3, 2.4 и 2.5 моделями, в которых связь между поляризацией и напряженностью поля существенно определяется как ориентацией жестких молекул, так и оптическими и акустическими колебаниями структурных элементов молекул и решеток. Уже при описании простейших явлений такого типа, т. е. взаимодействий излучения с движением электронов и ядер, приходится привлекать соотношения *третьего* порядка между P и E . (Высшие порядки мы рассматривать не будем.)

Как и в гл. 3, ограничимся здесь сначала стационарными процессами, что позволит получить наглядное представление о возникающих нелинейных зависимостях. Однако следует подчеркнуть, что в эффектах относительного движения электронов и ядер время установления колебаний оказывается более продолжительным. Поэтому при стационарном описании предъявляются более жесткие требования к длительности применяемых импульсов, чем при чисто электронных эффектах. Об этом еще будет сказано при рассмотрении конкретных эффектов (особенно самофокусировки и рассеяния Бриллюэна).

§ 4.1. ЗАВИСИМОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ ОТ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

В изотропных средах возникают эффекты третьего порядка, при которых геометрические свойства распространения электромагнитных волн зависят от амплитуды напряженности электрического поля. На эти свойства распространения волны с частотой f могут влиять, кроме компоненты напряженности поля с той же частотой f , также компоненты с другими частотами, например f' . Простая модель, объясняющая такую зависимость, уже была представлена в § 2.3. На основании этой модели было описано возникновение нелинейной поляризации в результате ориентации анизотропных молекул. При известных условиях эта поляризация служит существенным фактором, влияющим на распространение волн. Напомним явление, описанное в § 2.3: если в связанной с молекулой системе координат существует строгая линейная зависимость между P и E , то в лабораторной системе координат возникает нелинейная поляризация, которая, очевидно, обусловлена ориентацией отдельных молекул. При этом существенную роль играет не только движение электронов, но и вращательное движение ядер. Поэтому настоящий параграф посвящен эффектам электронно-ядерного движения. Следующей причиной зависимости свойств распространения от амплитуды напряженности поля является электрострикция. При электрострикции электрическое поле изменяет плотность среды, что влечет за собой изменение оптических констант. Следовательно, и в этом случае играет роль движение молекул в целом. Значения восприимчивости жидкостей с сильно анизотропными молекулами, соответствующие модели § 2.3, и значения электрострикции имеют, вообще говоря, одинаковые порядки величин (10^{-30} А·с·м·В⁻³); наоборот, в жидкостях из изотропных молекул, т. е. молекул со сферической формой эллипсоида поляризуемости, электрострикция часто превалирует над всеми другими возможными причинами. Наконец, в очень сильных полях может появиться и чисто электронный эффект. Он обусловлен тем, что связь между

поляризацией и напряженностью поля в молекулярной системе координат содержит нелинейные члены. Эти члены можно наглядно объяснить деформацией электронного облака электронов, образующих химическую связь. Эта деформация вызывает в сильных полях существенное изменение формы эллипсоида поляризуемости. Ядерный остов может при этом приближенно считаться жестким. Помимо значений восприимчивости для стационарных процессов, описанные эффекты отличаются временем, необходимым для их формирования. Время установления изменений плотности вследствие электрострикции лежит в пределах 10^{-8} — 10^{-5} с (диаметр светового пучка, деленный на скорость звука), а среднее время ориентации молекул в поле составляет 10^{-11} — 10^{-12} с (время релаксации Дебая); еще быстрее создается $P^{(НЛ)}$ при описанном чисто электронном эффекте. Поэтому при коротких световых импульсах (длительность импульса $T \leq 10^{-6}$ с) влияние электрострикции будет снижаться, а при еще более коротких импульсах ($T \leq 10^{-11}$ с) потеряют значение также и эффекты ориентации. Когда излучение лазера, работающего в стационарном режиме, проходит через некоторую среду, на свойства распространения может влиять, помимо названных эффектов, также нагрев. Он может происходить в результате частичного поглощения света. В зависимости от природы вещества и от области температур нагрев может сопровождаться повышением или понижением показателя преломления. Время затухания этого эффекта значительно больше указанных выше времен; оно определяется, в частности, свойствами теплопроводности установки и часто имеет порядок нескольких секунд.

4.11. Исследование взаимозависимости между поляризацией и напряженностью поля

При воздействии электрических полей на среду нелинейная поляризация вызывает изменение свойств распространения волны с частотой f . Ограничимся учетом компоненты наименьшего порядка, т. е. $P^{(3)}(f)$, вызывающей эффект подобного рода. Представим себе, что в среде происходят колебания напряженности поля

с частотами f, f' , описываемые уравнением

$$E_i(t) = \frac{1}{2} [\hat{E}_i(f) e^{i2\pi f t} + \hat{E}_i(f') e^{i2\pi f' t} + \{KK\}]. \quad (4.11-1)$$

Тогда нелинейные амплитуды поляризации имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{P}_i^{(3)} &= \hat{P}_i^{(3)}(f; f, f, -f) + \hat{P}_i^{(3)}(f; f, f', -f'), \\ \hat{P}_i^{(3)}(f; f, f, -f) &= \\ &= \sum_{i, k, l} \chi_{ijkl}^{(3)}(f; f, f, -f) \hat{E}_i(f) \hat{E}_k(f) \hat{E}_l(f) \end{aligned} \quad (4.11-2)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{P}_i^{(3)}(f; f, f', -f') &= \\ &= \sum_{i, k, l} \chi_{ijkl}^{(3)}(f; f, f', -f') \hat{E}_i(f) \hat{E}_k(f') \hat{E}_l(f'). \end{aligned}$$

Видно, что нелинейная поляризация, относящаяся к частоте f , содержит компоненту $\hat{P}_i^{(3)}(f; f, f, -f)$, зависящую от напряженности поля этой же частоты, и другую компоненту $\hat{P}_i^{(3)}(f; f, f', -f')$, на которую влияет напряженность поля с частотой f' . Мы рассматриваем волны поляризации и напряженности поля, распространяющиеся в направлении z и поляризованные в плоскости (x, y) . Вследствие предполагаемой изотропности среды можно применить соображения симметрии из разд. 1.22 и, в частности, уравнения (1.22-18), (1.22-19) и (1.22-21), из которых следует, что тензоры $\chi_{ijkl}^{(3)}$ могут иметь не более трех не зависящих друг от друга компонент. В качестве таких компонент можно выбрать, например, $\chi_{xxxy}^{(3)}$, $\chi_{xyxy}^{(3)}$, $\chi_{xyyx}^{(3)}$. Используя другие свойства симметрии, можно еще больше сократить число независимых компонент. Например, при заданных частотах величина $\chi_{ijkl}^{(3)}(f; f, f, -f)$ должна быть инвариантной по отношению к перестановке индексов j, k вследствие уравнения (1.22-3), откуда вытекает:

$$\chi_{xyxy}^{(3)}(f; f, f, -f) = \chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f, -f). \quad (4.11-3)$$

Число независимых компонент уменьшилось до двух. Из уравнений (1.22-25), (1.22-23), (1.22-2) и (1.22-3) полу-

чим выражения для амплитуд поляризации

$$\begin{aligned} \hat{P}_i^{(3)}(f; f, f, -f) &= \sum_j \{2\chi_{jxyy}^{(3)}(f; f, f, f, -f) \hat{E}_i(f) \hat{E}_j^*(f) E_i(f) + \\ &+ \chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f, -f) \hat{E}_i(f) \hat{E}_j(f) \hat{E}_j^*(f)\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{P}_i^{(3)}(f; f, f', -f') &= \sum_j \{\chi_{jxyy}^{(3)}(f; f, f', -f') \hat{E}_i(f) \hat{E}_j^*(f') \hat{E}_i(f) + \\ &+ \chi_{xyxy}^{(3)}(f; f, f', -f') \hat{E}_i(f) \hat{E}_j^*(f') \hat{E}_i(f') + \\ &+ \chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f', -f') \hat{E}_i(f) \hat{E}_j(f') \hat{E}_j^*(f')\}. \end{aligned} \quad (4.11-4)$$

Исходя из этих уравнений, вычислим нелинейную полную поляризацию $\hat{P}_i^{(3)}(f)$ для некоторых частных типов входного излучения. Если в среду попадает только линейно поляризованный свет с частотой f , то без нарушения общности можно выбрать направление поляризации за ось x . В этом случае из первого уравнения системы (4.11-4) следует

$$\begin{aligned} \hat{P}_x^{(3)}(f) &= \hat{P}_x^{(3)}(f; f, f, -f) = \\ &= \{2\chi_{xxxy}^{(3)}(f; f, f, -f) + \chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f, -f)\} |\hat{E}_x(f)|^2 \hat{E}_x(f). \end{aligned} \quad (4.11-5)$$

При использовании уравнений (1.22-21) и (4.11-3) отсюда получим

$$\hat{P}_x^{(3)}(f) = \chi_{xxxx}^{(3)}(f; f, f, -f) |\hat{E}_x(f)|^2 \hat{E}_x(f). \quad (4.11-6)$$

Это уравнение выражает связь между поляризацией и напряженностью поля для эффекта самовоздействия линейно поляризованной волны; учитывая соотношение $\hat{P}_x(f) = \epsilon_0[(n^{(j)} + \delta n_{||})^2 - 1] \hat{E}_x(f)$ (см. § 2.3), это уравнение можно переписать в виде

$$\hat{P}_x^{(3)}(f) = 2\epsilon_0 n^{(j)} \delta n_{||} \hat{E}_x(f), \quad (4.11-7)$$

где

$$\delta n_{||} = \frac{1}{2\epsilon_0 n^{(j)}} \chi_{xxxx}^{(3)}(f; f, f, -f) |\hat{E}_x(f)|^2.$$

Таким образом, мы ввели формально в рассмотрение изменение показателя преломления $\delta n_{||}$, зависящее,

согласно $\delta n_{\parallel} = n^{(2)} |\hat{E}_x(f)|^2$, от $n^{(2)} = (1/2 \epsilon_0 n^{(1)}) \chi_{xxxx}^{(3)}$ и от величины квадрата амплитуды $|\hat{E}_x(f)|^2$. Лишь в следующих разделах мы сможем показать точнее, как именно осуществляется такое изменение.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда входное излучение представляет собой эллиптически поляризованный свет с частотой f с компонентами $\hat{E}_x(f)$, $\hat{E}_y(f)$, который можно разложить на две циркулярно поляризованные волны с амплитудами компонент

$$\begin{aligned} \hat{E}_x^{(+)}(f) &= \hat{E}^{(+)}(f), \quad \hat{E}_y^{(+)}(f) = \hat{E}^{(+)} e^{-i(\pi/2)} = -i\hat{E}^{(+)}(f) \\ \text{и} \\ \hat{E}_x^{(-)}(f) &= \hat{E}^{(-)}(f), \quad \hat{E}_y^{(-)}(f) = \hat{E}^{(-)} e^{+i(\pi/2)} = i\hat{E}^{(-)}(f). \end{aligned} \quad (4.11-8)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(f) &= \hat{E}_x^{(+)}(f) + \hat{E}_x^{(-)}(f) = \hat{E}^{(+)}(f) + \hat{E}^{(-)}(f), \\ \hat{E}_y(f) &= \hat{E}_y^{(+)}(f) + \hat{E}_y^{(-)}(f) = -i[\hat{E}^{(+)}(f) - \hat{E}^{(-)}(f)] \end{aligned} \quad (4.11-9)$$

и

$$\begin{aligned} E^{(+)}(f) &= \frac{1}{2} [\hat{E}_x(f) + i\hat{E}_y(f)], \\ E^{(-)}(f) &= \frac{1}{2} [\hat{E}_x(f) - i\hat{E}_y(f)]. \end{aligned} \quad (4.11-10)$$

Подстановка амплитуд напряженности поля из уравнения (4.11-9) в первое уравнение системы (4.11-4) приводит к выражениям для соответствующих x - и y -компонент поляризации, которые могут быть представлены в виде линейных комбинаций

$$\begin{aligned} \hat{P}_{(+)}^{(3)}(f) &= \frac{1}{2} [\hat{P}_x^{(3)}(f) + i\hat{P}_y^{(3)}(f)], \\ \hat{P}_{(-)}^{(3)}(f) &= \frac{1}{2} [\hat{P}_x^{(3)}(f) - i\hat{P}_y^{(3)}(f)]. \end{aligned} \quad (4.11-11)$$

Если по аналогии с уравнением (4.11-7) представить связь между поляризацией и полем в виде

$$\hat{P}_{(+), (-)}^{(3)}(f) = 2\epsilon_0 n^{(1)} \delta n_{(+), (-)} \hat{E}^{(+), (-)}(f), \quad (4.11-12)$$

то получим

$$\begin{aligned} \delta n_{(+)} &= \frac{2}{\epsilon_0 n^{(1)}} \{ [\chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f, -f) + \chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f, -f)] \times \\ &\quad \times |\hat{E}^{(-)}(f)|^2 + \chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f, -f) |\hat{E}^{(+)}(f)|^2 \}, \end{aligned} \quad (4.11-13)$$

$$\begin{aligned} \delta n_{(-)} &= \frac{2}{\epsilon_0 n^{(1)}} \{ [\chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f, -f) + \chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f, -f)] \times \\ &\quad \times |\hat{E}^{(+)}(f)|^2 + \chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f, -f) |\hat{E}^{(-)}(f)|^2 \}. \end{aligned}$$

Следовательно, показатели преломления двух циркулярно поляризованных волн различны (см., например, § 2.3).

В третьем случае допустим, что входное излучение содержит сильное поле с частотой f' , поляризованное в направлении x и влияющее на распространение волны с частотой f . Компоненты амплитуды этой волны считаются столь малыми, что поляризационными членами $\hat{P}_i^{(3)}(f; f, f, -f)$ можно пренебречь. Тогда для нелинейной поляризации с частотой f имеем

$$\begin{aligned} \hat{P}_x^{(3)}(f) &= \hat{P}_x(f; f, f', -f) = \\ &= \chi_{xxxx}^{(3)}(f; f, f', -f) |\hat{E}_x(f')|^2 \hat{E}_x(f), \\ \hat{P}_y^{(3)}(f) &= \hat{P}_y(f; f, f', -f) = \\ &= \chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f', -f) |\hat{E}_x(f')|^2 \hat{E}_y(f). \end{aligned} \quad (4.11-14)$$

Влияние второго поля зависит, очевидно, от относительной поляризации обоих полей. Аналогично предыдущим случаям оба уравнения могут быть объединены в одно:

$$\hat{P}_{x, y}(f) = 2\epsilon_0 n^{(1)} \delta n_{\parallel, \perp} \hat{E}_{x, y}(f), \quad (4.11-15)$$

где

$$\begin{aligned} \delta n_{\parallel} &= \frac{1}{2\epsilon_0 n^{(1)}} \chi_{xxxx}^{(3)}(f; f, f', -f) |\hat{E}_x(f')|^2, \\ \delta n_{\perp} &= \frac{1}{2\epsilon_0 n^{(1)}} \chi_{xyyx}^{(3)}(f; f, f', -f) |\hat{E}_x(f')|^2. \end{aligned} \quad (4.11-16)$$

(Для модели § 2.3 имеет место неравенство $\delta n_{\parallel} \neq \delta n_{\perp}$, а для электрострикции $\delta n_{\parallel} = \delta n_{\perp}$.)

4.12. Распространение пространственно неограниченных плоских волн. Оптический эффект Керра

В этом разделе мы рассмотрим волны, распространяющиеся в нелинейной среде в направлении z и бесконечно протяженные в направлениях x и y ; их амплитуды и фазы считаем зависящими только от z . В таком случае допустимо описание, аналогичное выполненному в § 3.1.

Сначала рассмотрим случай, когда входное излучение представляет собой эллиптически поляризованный свет с частотой f , который мы, как в разд. 4.11, разложим на две циркулярно поляризованные волны. Из уравнений (1.32-23), (4.11-10) и (4.11-11) следуют уравнения для изменений волновых амплитуд $E^{(+)}$ и $E^{(-)}$:

$$\frac{d}{dz} \bar{E}^{(+), (-)}(f; z) = \frac{-i\pi\mu_0 f^2}{q(f)} \bar{P}_{(+), (-)}^{(3)}(f; z) e^{i2\pi z q(f)}. \quad (4.12-1)$$

Отсюда и из уравнения (4.11-12) следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{E}^{(+), (-)}(f; z) = \\ = \frac{-i\pi\mu_0 f^2}{q(f)} 2\varepsilon_0 n^{(1)} \delta n_{(+), (-)} \bar{E}^{(+), (-)}(f; z). \end{aligned} \quad (4.12-2)$$

Встречающиеся здесь восприимчивости и связанные с ними уравнениями (4.11-13) величины $\delta n_{(+), (-)}$ вещественны; поэтому, согласно уравнению (4.12-2), исследуемый процесс может вызвать только изменение фазы и $(d/dz) |\bar{E}_{(+), (-)}| = 0$. Решение этого уравнения имеет вид

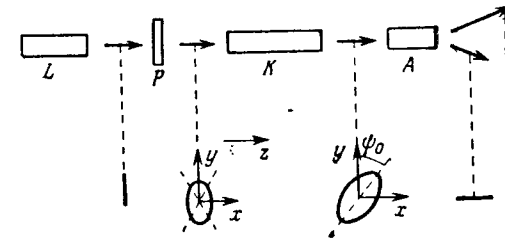
$$\bar{E}^{(+), (-)}(f; z) = \bar{E}^{(+), (-)}(f; 0) e^{-i2\pi (f/c) \delta n_{(+), (-)} z} \quad (4.12-3)$$

или

$$\bar{E}^{(+), (-)}(f; z) = \bar{E}^{(+), (-)}(f; 0) e^{-i2\pi (f/c) [n^{(1)} + \delta n_{(+), (-)}] z}.$$

Из этих соотношений явствует, что $\delta n_{(+), (-)}$ вызывает изменение фазы E , возрастающее с увеличением z по линейному закону. В общем случае $\delta n_{(+)} \neq \delta n_{(-)}$, так что фазовые скорости двух циркулярно поляризованных волн различаются между собой. Поэтому при распространении лазерного света в направлении z происходит вращение эллипса поляризации. Нелинейная среда ве-

дет себя подобно оптически активному веществу. Однако при воздействии линейно поляризованного света обнаруживается различие: в то время как в оптически активной среде происходит вращение плоскости колебаний, нелинейная среда не оказывает такого влияния, так как для линейно поляризованного света $\delta n_{(+)} = \delta n_{(-)}$. По этой причине эксперименты для определения нелинейных восприимчивостей $\chi_{\dots}^{(3)}(f; f, f, -f)$ по значениям $\delta n_{(+), (-)}$ должны проводиться с эллиптически поляризованным светом. На фиг. 27 показана схема установки,



Фиг. 27. Схема установки для определения нелинейных восприимчивостей.

L — лазер; P — пластинка $\lambda/8$; K — кювета с исследуемым веществом; A — анализатор.
В нижней части рисунка схематически показаны состояния поляризации света.

применявшейся различными авторами (см., например, [13]). Линейно поляризованный свет направляется на двоякопреломляющую пластинку $\lambda/8$ таким образом, чтобы его плоскость поляризации делила пополам угол между направлениями наибольшей и наименьшей скоростей распространения света в кристалле. Выходя из кристалла, эллиптически поляризованный свет попадает в длинную кювету с жидкостью (длина ≈ 1 м). Вследствие зависимости показателя преломления от напряженности поля компоненты циркулярно поляризованной волны распространяются в этой среде с различными скоростями, так что в конце кюветы эллипс поляризации оказывается повернутым на угол Ψ_D по отношению к его первоначальному положению. По значению этого угла могут быть определены нелинейные восприимчивости.

Исследуем теперь третий из рассмотренных в разд. 4.11 случаев, когда в нелинейную среду входят две линейно поляризованные волны с частотами f и f' . Более сильную компоненту с частотой f' будем считать поляризованной в направлении x . При этих условиях и при связи между поляризацией и напряженностью поля, определяемой уравнением (4.11-16), решение уравнения (1.32-23) примет вид

$$\begin{aligned}\bar{E}_x(f; z) &= \bar{E}_x(f; 0) e^{-i2\pi(f/c) \delta n_{\parallel} z}, \\ \bar{E}_y(f; z) &= \bar{E}_y(f; 0) e^{-i2\pi(f/c) \delta n_{\perp} z}.\end{aligned}\quad (4.12-4)$$

Следовательно, из линейно поляризованного света в нелинейной среде возникает, вообще говоря, эллиптически поляризованный свет. Вторая волна вызывает двойное лучепреломление, что, как уже упоминалось в § 2.3, соответствует обобщенному эффекту Керра.

В § 2.3 и в разд. 4.11 величины δn_{\parallel} , δn_{\perp} , $\delta n_{(+)}$, $\delta n_{(-)}$ были введены сначала формально. Полученные здесь результаты позволяют интерпретировать их как изменения показателя преломления $n^{(j)}$.

4.13. Распространение световых пучков. Самофокусировка

До сих пор мы рассматривали распространение пространственно неограниченных плоских волн. В настоящем разделе мы исследуем для случая линейно поляризованного света (с одной частотой) влияние описанных в разд. 4.11 нелинейностей на свет, напряженность поля которого изменяется в направлении, поперечном по отношению к направлению распространения. Для теоретического рассмотрения этой проблемы необходимо исходить из общего нелинейного волнового уравнения (1.32-1) и искать решения $E(t, x, y, z)$, удовлетворяющие этому уравнению и заданным граничным условиям. Однако решение такого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных связано со значительными трудностями (см. разд. 1.321); решение обычно проводится при помощи численных методов (см., например, [14]). Поэтому мы ограничимся качественным обзором

возникающих физических явлений. Сначала предположим, что на входе в среду ($z=0$) амплитуда $E_x(f; x, y, 0)$ слабо зависит от x и y . Будем считать, что в окрестности $z=0$ можно пренебречь членами в волновом уравнении, содержащими производные по координате, перпендикулярной направлению распространения. В направлении z происходит волнообразный процесс, описываемый уравнением (1.32-15), так что

$$\hat{E}_x(f; x, y, z) = \bar{E}_x(f; x, y, z) e^{-i2\pi q(f) z},$$

причем $\bar{E}_x(f; x, y, z)$ лишь медленно изменяется с изменением z . При этих предположениях можно исходить из уравнения (1.32-23), полагая

$$\hat{P}_x^{(H,L)}(f) = 2n^{(j)} \epsilon_0 n^{(2)} |\bar{E}_x|^2 \hat{E}_x.$$

Тогда по аналогии с разд. 4.12 в качестве решения получим

$$\bar{E}_x(f; x, y, z) = \bar{E}_x(f; x, y, 0) e^{-i2\pi(f/c) n^{(2)} |\bar{E}_x(f; x, y, 0)|^2 z}$$

или (4.13-1)

$$\bar{E}_x(f; x, y, z) = \bar{E}_x(f; x, y, 0) e^{-i2\pi(f/c) [n^{(j)} + n^{(2)} |\bar{E}_x(f; x, y, 0)|^2] z}.$$

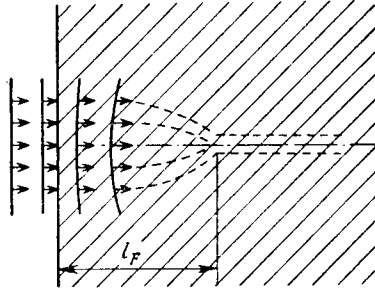
Существенное отличие от уравнения (4.12-4) состоит в том, что плоскости x, y более не являются плоскостями постоянной фазы. Поверхности постоянной фазы \bar{E}_x удовлетворяют теперь уравнению

$$z = \frac{C\varphi}{n^{(j)} + n^{(2)} |\bar{E}_x(f; x, y, 0)|^2} \quad (4.13-2)$$

и поэтому зависят от распределения амплитуд при $z=0$.

Мы рассмотрим случай, в котором $|\bar{E}_x|$ убывает в поперечном направлении от значения $|\bar{E}_x(f; 0, 0, z)|$ на оси (фиг. 28), и исследуем ограниченный световой пучок. Тогда фаза на его краю опережает (при $n^{(2)} > 0$) фазу в середине и искривление фазовых поверхностей возрастает с возрастанием z . Мы приходим к выводу, что нелинейную среду можно сравнить с собирающей линзой. Это линза тоже преобразует падающие плоские волны таким образом, что в краевых областях возникают опережающие фазы. Это создает поток энергии от

краев к центру, и пучок «зашнуровывается». Численные решения волнового уравнения (см. [14]) показывают, что в нелинейной среде происходит эффект такого рода. На языке геометрической оптики данное явление можно объяснить следующим образом: показатель преломления среды зависит от напряженности поля и поэтому убывает в радиальном направлении от своего максимального значения в центре; лучи преломляются к областям более высоких значений напряженности поля, т. е. к центру. Это в свою очередь вызывает возрастание напряженности поля и показателя преломления в центре, так что явление «самозашнуровывания» само себя усиливает (до ограничения процесса другими эффектами).



Фиг. 28. Схематическое представление самофокусировки светового пучка в среде (l_F — длина фокусировки).

которой пучок «зашнуровывается» заметным образом. Это расстояние l_F называется фокусирующей длиной. Допустим, что краевые лучи на всем пути распространяются в областях с показателем преломления $n^{(1)}$. Осевой луч встречает при $z = 0$ показатель преломления $n^{(1)} + n^{(2)} |\bar{E}_x(f; 0, 0, 0)|^2$. Для оценки будем считать, что на всем пути от $z = 0$ до $z = l_F$ показатель преломления остается равным этой величине, тогда как в действительности он возрастает с увеличением z . В этом случае можно ожидать, что истинная фокусирующая длина будет короче рассчитанной. Заметная самофокусировка пучка произойдет, если краевые лучи пройдут геометри-

ческий путь, превышающий соответствующий путь осевого луча на длину порядка r_B^2/l_F (r_B — эффективный радиус пучка). (Для сравнения укажем на обстоятельства, складывающиеся в случае тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием l_F . В этом случае краевые лучи проходят путь $\sqrt{l_F^2 + r_B^2} \approx l_F + r_B^2/2l_F$ от линзы до фокуса, тогда как осевой луч проходит расстояние l_F .) Из равенства оптических путей краевого и осевого лучей следует

$$l_F n^{(2)} |\bar{E}_x(f; 0, 0, 0)|^2 \approx \frac{r_B^2 n^{(1)}}{l_F}. \quad (4.13-3)$$

Если вместо амплитуд напряженности поля ввести в рассмотрение усредненную мощность лазера

$$\langle L \rangle = C_P \frac{c}{2} \pi r_B^2 \epsilon_0 n^{(1)} |\bar{E}_x|^2, \quad (4.13-4)$$

то получится соотношение между фокусирующей длиной и мощностью:

$$l_F = \frac{C_F}{V \langle L \rangle},$$

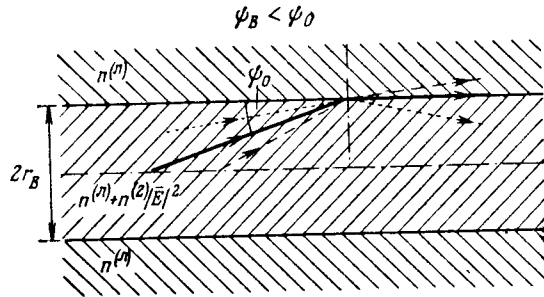
где

$$C_F \approx \sqrt{\frac{\pi n^{(1)2} C_P r_B^4 \epsilon_0 c}{2n^{(2)}}}. \quad (4.13-5)$$

Здесь C_P есть численный множитель, зависящий от конкретного профиля распределения интенсивности; C_P меньше единицы и вообще имеет порядок от 10^{-1} до 1. Используя оцененное в § 2.3 значение $n^{(2)}$ для среды из анизотропных молекул и при значении $\sqrt{C_P} r_B = 2$ мм, получаем $C_F \approx 10^3$ Вт^{1/2}·м. При входных мощностях порядка 10^8 Вт тогда получаются фокусирующие длины порядка 10^{-1} м; найденные при таких условиях экспериментальные значения лежат несколько ниже.

При нашем сильно упрощенном рассмотрении не были учтены другие эффекты, противодействующие фокусировке и потому создающие порог, ниже которого световой пучок расходитя. Мы дадим грубую оценку этого порога мощности для случая дифракции, которая

в линейной оптике, т. е. при малых напряженностях поля, вызывает расхождение любого светового пучка. Для оценки примем, что внутри однородного, резко ограниченного светового пучка показатель преломления равен $n^{(1)} + n^{(2)} |\bar{E}_x|^2$, тогда как вне пучка он понижен до значения $n^{(1)}$. Вследствие такого изменения показателя



Фиг. 29. Схематическое представление самософокусированного светового пучка.

$2r_B$ — диаметр пучка; $n^{(1)} + n^{(2)} |\bar{E}|^2$ — показатель преломления в области пучка; $n^{(1)}$ — показатель преломления вне области пучка; ψ_0 — предельный угол полного внутреннего отражения.

преломления все лучи, образующие с граничным слоем угол меньше ψ_0 , будут претерпевать полное внутреннее отражение, причем угол ψ_0 задан уравнением

$$\cos \psi_0 = \frac{n^{(1)}}{n^{(1)} + n^{(2)} |\bar{E}|^2} \quad (4.13-6)$$

(фиг. 29). Световой пучок не будет расходящимся лишь при условии, что дифракционный угол

$$\psi_B = \frac{1,2\lambda}{2r_B} < \psi_0. \quad (4.13-7)$$

В этом случае формируется стабильный световод, по своему действию подобный элементу волоконной оптики. (Таким путем пытаются объяснить также образование нитей, в которых после самофокусировки свет при известных условиях представляется захваченным.) Из

уравнений (4.13-5) и (4.13-6) следует

$$\frac{2n^{(2)} |\bar{E}|^2}{n^{(1)}} \approx \frac{(1,2\lambda)^2}{4n^{(1)2} r_B^2}, \quad (4.13-8)$$

где $|\bar{E}|$ — минимальная амплитуда поля, при которой пучок не расходится. Если в это соотношение ввести мощность лазера, то получим

$$\langle L_K \rangle \approx \frac{\epsilon_0 c \lambda^2}{4n^{(2)}}. \quad (4.13-9)$$

Для рассмотренной в § 2.3 модели среды с анизотропными молекулами при $n^{(2)} = 10^{-19} \text{ м}^2/\text{В}^2$ получаются критические мощности L_K порядка нескольких 10^3 Вт. Мощность L_K представляет собой порог, ниже которого не может происходить самофокусировка и самозахват, и пучок расходится вследствие дифракции. Следует заметить, что это соотношение не зависит от поперечного сечения светового пучка; следовательно, самозахват света происходит независимо от поверхности, на которую распределяется его мощность. Вследствие существования этого порога приходится видоизменить соотношение между мощностью лазера и фокусирующей длиной (4.13-5), так как порог приводит к конечным значениям l_F уже при сколь угодно малых мощностях лазера. Из соответствующих экспериментальных данных, а также из более точных расчетов следует, что уравнение (4.13-5) необходимо заменить уравнением

$$l_F = \frac{c_F}{\sqrt{\langle L \rangle} - \sqrt{\langle L_K \rangle}}. \quad (4.13-10)$$

Пороговая мощность для начала самофокусировки часто маскирует порог для других нелинейных процессов, что может быть объяснено следующим образом. Когда мощность превосходит пороговую, световой пучок зашнуровывается, что влечет за собой сильное возрастание плотности мощности и напряженности поля внутри пучка; если скорость возникновения нелинейного процесса зависит от напряженности поля в высокой степени, то она скачкообразно возрастет при достижении пороговой мощности; поэтому часто нелинейный процесс становится наблюдаемым лишь при мощности, превы-

шающей L_K . Примером может служить эффект вынужденного комбинационного рассеяния в анизотропных жидкостях (см. § 4.2). Наблюдающиеся для него пороги возбуждения и высокие усиления отличаются от вычисленных по теории, не учитывающей самофокусировку. Резкое возрастание интенсивности комбинационного рассеяния настолько характерно, что оно используется для измерения пороговой мощности самофокусировки. По этому методу проверяется, например, уравнение (4.13-10). По изложенным соображениям самофокусировка существенно облегчает наблюдение различных эффектов НЛО уже при относительно низких мощностях лазеров. Вместе с тем возникают затруднения при интерпретации результатов, полученных в условиях самофокусировки, ибо вследствие высоких напряженностей поля часто имеют место одновременно многие нелинейные явления, взаимодействующие между собой. Во многих случаях высокие напряженности поля вызывают необратимые изменения в нелинейной среде. Например, положение областей самофокусировки в стекле часто отмечается цепочкой тонких пузырьков.

Наше простое описание охватывает лишь в грубых чертах многогранные и сложные явления, возникающие при самофокусировке; отчасти эти явления и их причины до сих пор еще не получили удовлетворительного объяснения. Так, хотя наше представление позволило объяснить самофокусировку светового пучка и оценить пороговую мощность и фокусирующую длину, мы не могли сделать более точные предсказания о протекании процесса после начала самофокусировки. Для этого необходимо учесть нестационарности и высшие нелинейные порядки (см., например [15]). Наблюдалось, что при $L \gg L_K$ после сужения пучка примерно до 10^2 мкм происходит его распад на отдельные области фокусировки с диаметром порядка нескольких микронов.

§ 4.2. ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ

В § 2.4 уже указывалось, что сильный когерентный свет вызывает в среде наряду со спонтанным комбинационным рассеянием вынужденное комбинационное рас-

сеяние, частоты которого также смещены по отношению к частоте падающего света. Это смещение связано с собственными частотами f_M частиц среды. В разд. 4.21 мы опишем сначала некоторые экспериментально наблюдаемые свойства, отличающие вынужденный эффект от спонтанного. В следующем разделе мы попытаемся объяснить эти свойства на основе рассмотренной в § 2.4 модели комбинационного рассеяния и соответствующих уравнений распространения волн (см. § 1.3).

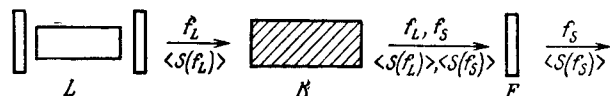
4.21. Основные эмпирические факты

Сразу после открытия Вудбери и Нг эффекта вынужденного комбинационного рассеяния в многочисленных лабораториях были проведены эксперименты с целью изучения свойств этого вынужденного излучения и их зависимости от различных параметров. Особое внимание было уделено соотношению между интенсивностями возбуждающего и рассеянного света, а также частотам и относительным интенсивностям различных рассеянных волн. Были исследованы когерентные свойства рассеянного излучения и его зависимость от направления рассеяния. Остановимся вкратце на основных результатах этих исследований.

4.211. Соотношения между интенсивностью рассеяния и интенсивностью возбуждения

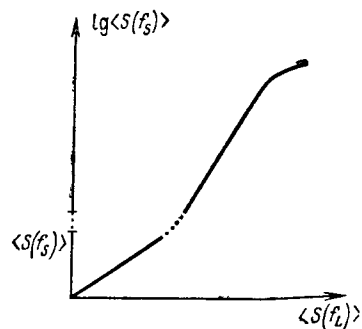
Свет лазера с частотой f_L и интенсивностью $\langle S(f_L) \rangle$ (в большинстве экспериментов она лежит в пределах 10^{11} — 10^{15} Вт/м²) направляют в кювету, не обладающую особыми резонаторными свойствами (фиг. 30), и наблюдают интенсивность возникающего стоксова излучения с частотой f_S ; рассеянное излучение других частот при этом не играет никакой роли. При малых мощностях лазера наблюдается линейное возрастание излучения комбинационного рассеяния с увеличением мощности лазера (фиг. 31), типичное для спонтанного эффекта. При более высоких мощностях возбуждения интенсивность рассеянного излучения $\langle S(f_S) \rangle$ возрастает быстрее, чем по линейному закону, с возрастанием $\langle S(f_L) \rangle$. Если

удается наблюдать процесс комбинационного рассеяния вне зависимости от других нелинейных эффектов, например самофокусировки, то за линейной областью начинается область экспоненциального нарастания. (В самофокусирующих средах, как объяснено в § 4.1, при



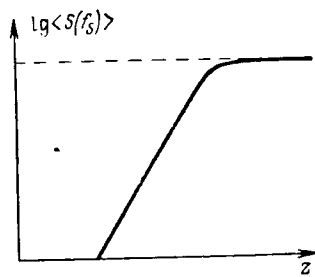
Фиг. 30. Установка для наблюдения зависимости интенсивности комбинационного рассеяния от интенсивности возбуждающего света.

L — лазер; f_L , $\langle S(f_L) \rangle$ — частота и интенсивность лазерного света; K — кювета; f_S , $\langle S(f_S) \rangle$ — частота и интенсивность излучения комбинационного рассеяния; F — фильтр, пропускающий только линию комбинационного рассеяния частоты f_S .



Фиг. 31. Зависимость интенсивности комбинационного рассеяния $\langle S(f_S) \rangle$ от интенсивности возбуждающего света $\langle S(f_L) \rangle$.

достижении порога самофокусировки может произойти скачкообразное увеличение интенсивности комбинационного рассеяния.) При очень высоких интенсивностях возбуждения интенсивность рассеяния начинает возрастать медленнее. При постоянной мощности лазера может также наблюдаться в известных пределах экспоненциальное возрастание интенсивности стоксова рассеяния



Фиг. 32. Зависимость интенсивности комбинационного рассеяния $\langle S(f_S) \rangle$ от длины кюветы z .

с увеличением длины кюветы. Для очень длинных кювет интенсивность стоксова излучения стремится к пределу насыщения (фиг. 32).

4.212. Когерентные свойства рассеянного излучения

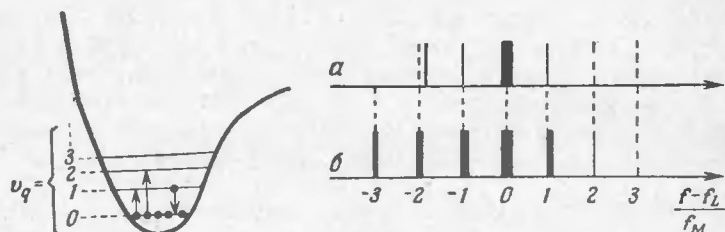
При спонтанном эффекте комбинационного рассеяния рассеянное излучение, исходящее от различных молекул, некогерентно, даже если возбуждающий свет когерентен; исходящий из различных точек кюветы свет не способен к интерференции. Наоборот, при эффекте вынужденного комбинационного рассеяния свет, рассеянный из какой-либо пространственной области и возбужденный пространственно когерентной лазерной волной, когерентен. Соответствующие интерференционные картины наблюдались при помощи оптических схем с двумя щелями при расстояниях между щелями порядка 1 мм.

4.213. Частоты и относительные интенсивности линий

При спонтанном эффекте комбинационного рассеяния наблюдаются переходы, при которых колебательное квантовое число ν_q изменяется на единицу ($\Delta\nu_q = \pm 1$), а также переходы с большими изменениями ν_q (см., например, фиг. 33, где показан переход с уровня $\nu_q = 0$ на уровень $\nu_q = 2$). Вследствие ангармоничности потенциала колебательные уровни не эквидистантны, и поэтому частоты линий спонтанного комбинационного рассеяния отличаются от значений $f_L + bf_M$, если абсолютное значение целого числа b больше единицы (фиг. 34, а). Наоборот, при эффекте вынужденного комбинационного рассеяния наблюдаются точные гармоники (частоты $f_L + bf_M$ с $b = \pm 1, \pm 2, \dots$; см. фиг. 34, б). Если при вынужденном эффекте интенсивности насыщения стоксовых линий высших порядков могут достигать значений, близких по порядку величины к интенсивности лазерного света, то интенсивности этих линий при спонтанном эффекте быстро убывают с возрастанием b . Интенсивность спонтанного антистоксова излучения пропорциональна числу частиц в возбужденном состоянии; поэтому оно исчезает при низких температурах. При вынужденном эффекте такого исчезновения не происхо-

дит; часто интенсивности антистоксовых линий даже возрастают при понижении температуры. Все экспериментальные факты приводят к выводу, что антистоксово вынужденное излучение может принадлежать молекулам в основном колебательном состоянии.

При благоприятных экспериментальных условиях в спонтанном комбинационном рассеянии могут наблюдаться все молекулярные колебания, для которых про-



Фиг. 33. Схема уровней энергии для ангармонических колебаний с показанными переходами.

v_q — колебательное квантовое число.

Фиг. 34. Схематическое представление спектров комбинационного рассеяния для молекулы с одним активным в комбинационном рассеянии собственным колебанием.

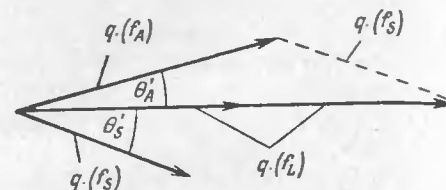
a — спектр спонтанного комбинационного рассеяния; b — спектр вынужденного комбинационного рассеяния; f — частота лазера; f_M — частота колебания.

изводная от поляризуемости по соответствующей нормальной координате не обращается в нуль по соображениям симметрии; такие колебания молекул называются активными в комбинационном рассеянии. В спектре вынужденного комбинационного рассеяния всегда появляются только линии, которые могут быть отнесены к одному молекулярному колебанию или к малому числу молекулярных колебаний. Чаще всего проявляются частоты полносимметричных колебаний, которым в спонтанном эффекте соответствуют наиболее интенсивные и узкие линии.

4.214. Зависимость рассеянного излучения от направления

При спонтанном эффекте комбинационного рассеяния наблюдается непрерывное угловое распределение

рассеянного излучения. Интенсивность зависит от линейной комбинации $\sin^2 \theta'$ и $\cos^2 \theta'$ и поэтому медленно из-



Фиг. 35. Расположение векторов распространения лазерной, стоксовой и антистоксовой волн для случая точного согласования фаз. Углы θ'_A , θ'_S преувеличены.

меняется с изменением угла θ' между направлением распространения лазерного луча и направлением наблюдения. Иная ситуация при вынужденном комбинационном рассеянии. Стоксово излучение характеризуется непрерывным угловым распределением, существенно зависящим от геометрии оптической установки, но, кроме того, наблюдается излучение под выделенными углами, а также поглощение излучения с непрерывным угловым распределением. Такие выделенные направления обнаруживаются в экспериментах с кристаллами (упорядоченные системы) и с жидкостями и газами (неупорядоченные системы). Например, антистоксова линия первичного порядка излучается только под определенным углом θ'_A к лазерной оси, тогда как интенсивность стоксовой линии под углом θ'_S меньше, чем под соседними углами. Углы θ'_A , θ'_S определяются из условия

$$2q(f_L) = q(f_A) + q(f_S) \quad (4.21-1)$$



Фиг. 36. Вынужденное комбинационное излучение в кальците; угловое распределение антистоксова излучения [16].

для волновых векторов рассматриваемых волн. Абсолютные значения волновых векторов удовлетворяют соотношению $|q(f)| = (f/c)n^{(0)}(f)$. Вследствие дисперсии среды уравнение (4.21-1) не может соблюдаться, если все волны распространяются в направлении z (фиг. 35). При обычных дисперсиях углы θ'_S , θ'_A составляют несколько градусов (на фиг. 36 показан пример антистоксовых линий с $b = +1, +2$).

Здесь уместно будет еще раз указать на то, что описанные экспериментальные результаты могут быть получены лишь в условиях, при которых вынужденное комбинационное рассеяние относительно мало подвергается влиянию других нелинейных эффектов. Например, угловое распределение рассеянного излучения может измениться под действием самофокусировки.

4.215. Обращенный эффект комбинационного рассеяния

В 1964 г. Б. Стойчев [17] выполнил следующий эксперимент. Через активную к комбинационному рассеянию среду, кроме интенсивного лазерного излучения (частота f_L), пропускался свет с непрерывным спектральным распределением в окрестности $f_L + f_M$. При $f = f_L + f_M$ в этом непрерывном спектральном распределении наблюдалось поглощение, интенсивность которого зависела от интенсивности лазерного излучения. Это явление называется обращенным эффектом комбинационного рассеяния (см. обоснование в разд. 4.22).

4.22. Интерпретация экспериментов

4.221. Усиление стоксовой волны

Как было объяснено в разд. 4.21, под действием лазерного излучения большой мощности в среде, активной к комбинационному рассеянию, возникают вынужденные стоксовы и антистоксовы волны первого и высших порядков. Если, однако, мощность лазера относительно низка, то сначала проявляется только стоксова волна первого порядка с частотой $f_{-1} = f_S$. При этих условиях можно ограничиться только учетом взаимодействия между лазерной и стоксовой волнами.

Представим себе, что при $z = 0$ в среду попадают лазерная волна и стоксова волна малой, но конечной амплитуды. Рассчитаем теперь усиление этой стоксовой волны. Можно считать, что существующая при $z = 0$ слабая стоксова волна создана другим соответствующим источником света или возникла в результате спонтанного комбинационного рассеяния в окрестности $z = 0$. В последнем случае сама лазерная волна создает в среде важную для рассматриваемого процесса стоксову волну.

Пусть лазерная и стоксова волны распространяются в направлении z и поляризованы в направлении x . Взаимодействие между ними можно определить с помощью соответствующих компонент амплитуд поляризации третьего порядка [см. уравнения (2.42-3) и (2.42-4)]

$$\begin{aligned} \hat{P}_x^{(3)}(f_S) &= \chi_{xxxx}^{(3)}(f_S; f_S, f_L, -f_L) |\hat{E}_x(f_L)|^2 \hat{E}_x(f_S), \\ \hat{P}_x^{(3)}(f_L) &= \chi_{xxxx}^{(3)}(f_L; f_L, f_S, -f_S) |\hat{E}_x(f_S)|^2 \hat{E}_x(f_L). \end{aligned} \quad (4.22-1)$$

Подставляя эти амплитуды в уравнение (1.32-23), получаем (при $\mu = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{E}_x(f_S; z) &= \\ &= \frac{-i\pi\mu_0 f_S^2}{q(f_S)} \chi_{xxxx}^{(3)}(f_S; f_S, f_L, -f_L) |\bar{E}_x(f_L; z)|^2 \bar{E}_x(f_S; z), \\ \frac{d}{dz} \bar{E}_x(f_L; z) &= \\ &= \frac{-i\pi\mu_0 f_L^2}{q(f_L)} \chi_{xxxx}^{(3)}(f_L; f_L, f_S, -f_S) |\bar{E}_x(f_S; z)|^2 \bar{E}_x(f_L; z). \end{aligned} \quad (4.22-2)$$

Следует отметить, что при этом процессе присутствующая в общих уравнениях [см. уравнение (1.32-22)] во множителе $e^{i\Delta q z}$ разность волновых чисел Δq обращается в нуль; таким образом, никакого ограничения фазовой когерентной длины l_K , как при генерации второй гармоники, здесь не возникает.

При дальнейших расчетах мы рассмотрим резонансный случай, при котором разность $f_L - f_S$ очень близка к собственной частоте f_M рассеивающей частицы (час-

тота колебания молекулы). Если отклонение $\Delta f = |f_L - f_S - f_M|$ мало по сравнению с шириной линии спонтанного комбинационного рассеяния, то можно пренебречь нерезонансными членами восприимчивости. Это было показано в § 2.4 на примере описанной там модели. В этом случае восприимчивость является чисто мнимой, и мы можем записать

$$\chi_{xxxx}^{(3)}(f_S; f_S, f_L, -f_L) = -\chi_{xxxx}^{(3)}(f_L; f_L, f_S, -f_S) = i|\chi_R|. \quad (4.22-3)$$

Зависимость резонансного значения χ_R восприимчивости от других молекулярных параметров и порядок ее величины можно найти в разд. 2.42 и в приложении 5. Если восприимчивость $i|\chi_R|$ из уравнения (4.22-3) ввести в уравнение (4.22-2), то в результате последующего интегрирования получим

$$\begin{aligned} \bar{E}_x(f_S; z) = & \\ = \bar{E}_x(f_S; 0) \exp \left\{ \frac{\pi\mu_0 f_S^2}{q(f_S)} |\chi_R| \int_0^z dz' |\bar{E}_x(f_L; z')|^2 \right\}, & \\ \bar{E}_x(f_L; z) = & \end{aligned} \quad (4.22-4)$$

$$= \bar{E}_x(f_L; 0) \exp \left\{ \frac{-\pi\mu_0 f_L^2}{q(f_L)} |\chi_R| \int_0^z dz' |\bar{E}_x(f_S; z')|^2 \right\}.$$

Из этих уравнений видно, что при прохождении через кювету стоксова волна усиливается *независимо* от ее начальной фазы и от соотношения фаз лазерной и стоксовой волн; одновременно лазерная волна ослабляется. Может быть высказано следующее общее утверждение: при взаимодействии двух волн в активной к комбинационному рассеянию среде, в которой отсутствует инверсия населенностей актуальных колебательных уровней, происходит усиление волны с низшей частотой за счет ослабления волны с более высокой частотой. Этим процессом можно объяснить генерацию вынужденного стоксова излучения (но не вынужденного антистоксова излучения). Из уравнения (4.22-4) следует, что при возбуждении плоской когерентной лазерной волной должна

возникать плоская когерентная стоксова волна, в которой плоскости $z = \text{const}$ являются поверхностями постоянной фазы. Этим объясняются описанные в разд. 4.214 интерференционные явления.

Исследуем теперь подробнее баланс энергии. Поскольку фазы $\bar{E}_x(f_S; z)$ $\bar{E}_x(f_L; z)$ не зависят от z , уравнения (4.22-2) сохраняют свою форму при замене амплитуд их абсолютными значениями. Если первое из этих уравнений умножить на $[n^{(J)}(f_S)/f_S] |\bar{E}_x(f_S; z)|$, а второе — на $[n^{(J)}(f_L)/f_L] |\bar{E}_x(f_L; z)|$, то при учете соотношения $q(f) = (f/c)n^{(J)}(f)$ придем к уравнению

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{n^{(J)}(f_S)}{f_S} |\bar{E}_x(f_S; z)|^2 + \frac{n^{(J)}(f_L)}{f_L} |\bar{E}_x(f_L; z)|^2 \right\} = 0, \quad (4.22-5)$$

откуда следует, что

$$\frac{n^{(J)}(f_S)}{f_S} |\bar{E}_x(f_S; z)|^2 + \frac{n^{(J)}(f_L)}{f_L} |\bar{E}_x(f_L; z)|^2 = C'_\nu.$$

Уравнение (4.22-5) может быть интерпретировано как закон сохранения полного числа фотонов

$$\gamma_P(f_S; z) + \gamma_P(f_L; z) = C_\nu, \quad (4.22-6)$$

падающих на поверхность $z = \text{const}$; число $\gamma_P(f; z)$ фотонов с частотой f пропорционально интенсивности $\epsilon_0 c |\bar{E}_x(f; z)|^2 n^{(J)}(f)/2$. На каждый уничтоженный квант лазерного излучения возникает один квант стоксова излучения, соответствующего вынужденному комбинационному рассеянию. Частота лазерного кванта больше частоты стоксова кванта, и поэтому в данном процессе не вся энергия преобразуется в стоксовы кванты. Разность энергий, равная $\hbar(f_L - f_S)$ на каждый квант, затрачивается на возбуждение молекулы. Эта энергия возбуждения в конце концов преобразуется в тепло вследствие «потерь на трение». Соответствующие соотношения для мощности (или соответствующие законы сохранения числа фотонов) соблюдаются в целом ряде процессов, в которых участвуют волны различных частот. Они называются соотношениями Манли—Роэ. [Например, для рассмотренных в § 3.3 параметрических преобразований частот можно получить такие соотношения, исходя из

системы уравнений (3.3-1) и применяя метод, аналогичный использованному в данном разделе для рассеяния Бриллюэна; соответствующие выводы сделаны в главе 4.3.]

Мы приходим к выводу, что в принципе за эффектом вынужденного комбинационного рассеяния можно проследить как путем наблюдения усиления (или возникновения) волны с более низкой частотой, так и путем наблюдения ослабления волны более высокой частоты. Вторая возможность, противоположного типа, используется при обратном эффекте комбинационного рассеяния (см. разд. 4.215). Лазерная волна входного излучения в этом случае усиливается как «стоксова» волна, а волна соответствующей частоты из непрерывного спектра ослабляется как «волна накачки».

В дальнейшем мы не будем искать общее решение системы уравнений (4.22-2) или эквивалентной системы (4.22-4) и рассмотрим только случай малых коэффициентов преобразования, в котором величину $|\bar{E}_x(f_L; z)|$ можно считать постоянной. В результате получим

$$\bar{E}_x(f_S; z) = \bar{E}_x(f_S; 0) e^{\eta_R z}, \quad (4.22-7)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_R &= \frac{1}{2} g_R = \frac{\pi \mu_0 f_S^2}{q(f_S)} |\chi_R| \cdot |\bar{E}_x(f_L; 0)|^2 = \\ &= \frac{\mu_0 \omega_S}{\epsilon^{(1)} \epsilon_0} |\chi_R| \langle S(f_L; 0) \rangle. \end{aligned}$$

При типичных значениях параметров (см. разд. 2.42) получается для коэффициента усиления мощности $g_R \approx \approx 10^{-11} \text{ м} \cdot \text{Вт}^{-1} \langle S(f_L; 0) \rangle$.

Следовательно, стоксова амплитуда или также квадрат ее абсолютной величины возрастает по экспоненциальному закону с увеличением мощности лазера и координаты z . Этот вывод согласуется с ситуацией, описанной в разд. 4.211. При существенном увеличении интенсивности лазерного света или длины кюветы нарушается предположение о том, что напряженность поля лазера не зависит от z ; это нарушение вызывается увеличением коэффициентов преобразования. Поэтому в данном случае стоксова амплитуда при постоянном z может воз-

растать с ростом интенсивности падающего лазерного света лишь медленнее, чем это следует из уравнения (4.22-7). Мы попадаем в область насыщения (фиг. 31). В предельном случае очень больших z максимально достижимая интенсивность стоксовой волны определяется тем, что все лазерные фотоны, согласно уравнению (4.22-6), преобразуются в стоксовы фотоны (фиг. 32). Возникновение высших стоксовых линий (разд. 4.213) также может быть понято на основании представления о взаимодействии двух волн. Если стоксова волна b -го порядка вследствие усиления становится достаточно интенсивной, то она сама действует как «лазерная линия» и создает свою «стоксову линию первого порядка» с частотой $[(f_L + b f_M) - f_M]$, где $b = -1, -2, \dots$.

Если молекула обладает несколькими активными в комбинационном рассеянии колебаниями, то наиболее быстро сформируется стоксова волна с наибольшим коэффициентом усиления, т. е. вообще образуется линия, для которой $|\chi_R|$ имеет максимальное значение. Согласно сказанному в § 2.4, восприимчивость принимает наибольшие значения для тех колебаний молекулы, для которых наиболее велики значения отношения α_i к константе трения Γ_m . Именно таким колебаниям соответствуют самые интенсивные и узкие линии в спектре спонтанного комбинационного рассеяния. Во многих веществах стоксовы волны с наибольшим усилением успевают сильно уменьшить интенсивность лазерного света раньше, чем интенсивности других волн достигнут экспериментально наблюдаемых пределов. Поэтому в спектре появляются только линии, соответствующие одному колебательному переходу (см. разд. 4.213). Если обобщить приведенные в настоящем разделе расчеты на произвольные углы между направлениями распространения лазерной и стоксовой волн, то при возбуждении бесконечно протяженной плоской лазерной волной получится непрерывное угловое распределение вынужденного стоксова излучения, сходное с картиной при спонтанном комбинационном рассеянии. Если же стоксово излучение возбуждается пучком лазерного света с конечным поперечным сечением, то определяющая интенсивность стоксовой волны длина, на которой взаимо-

действуют обе волны, будет зависеть от угла между векторами распространения $q \cdot (f_S)$ и $q \cdot (f_L)$. Поэтому угловое распределение вынужденного стока излучения сильно зависит от геометрических параметров экспериментальной схемы.

4.222. Усиление антистоксовой волны

Здесь мы дадим описание взаимодействия трех волн: лазерной, стоксовой и антистоксовой, при котором антистоксова волна может усиливаться. Для проведения исследований будем исходить из соображений, изложенных в разд. 4.221, и допустим, что все три волны имеют конечные амплитуды при $z = 0$.

Нелинейная поляризация третьего порядка с частотой $f_{+1} = f_A$ может быть получена двумя «путями» на основании того, что

$$\hat{P}_x^{(3)}(f_A) = \hat{P}_x^{(3)}(f_A; f_A, f_L, -f_L) + \hat{P}_x^{(3)}(f_A; f_A, f_L, -f_S),$$

где

$$\begin{aligned} \hat{P}_x^{(3)}(f_A; f_A, f_L, -f_L) &= \\ &= \chi_{xxxx}^{(3)}(f_A; f_A, f_L, -f_L) |\bar{E}_x(f_L; z)|^2 \bar{E}_x(f_A; z) e^{-i2\pi q(f_A)z}, \\ \hat{P}_x^{(3)}(f_A; f_A, f_L, -f_S) &= \chi_{xxxx}^{(3)}(f_A; f_A, f_L, -f_S) \bar{E}_x(f_L; z) \times \\ &\times \bar{E}_x(f_L; z) \bar{E}_x^*(f_S; z) e^{-i2\pi z [2q(f_L) - q(f_S)]}. \end{aligned} \quad (4.22-8)$$

Для рассмотренной в § 2.4 модели получаются соотношения между восприимчивостями вида

$$\chi_{xxxx}^{(3)}(f_A; f_A, f_L, -f_L) = \chi_{xxxx}^{(3)}(f_A; f_A, f_L, -f_S) = -i |\chi_R|, \quad (4.22-9)$$

где $|\chi_R|$ совпадает с величиной, введенной в разд. 2.42 для стока процесса. Исследуем область, в которой амплитуда антистоксовой волны еще мала по сравнению с амплитудой лазерной и стоксовой волн; тогда можно пренебречь ролью поляризационного члена $\hat{P}_x^{(3)}(f_A; f_A, f_L, -f_L)$, вызывающего ослабление антистоксовой волны. Из уравнения (1.32-23) следует

$$\frac{d}{dz} \bar{E}_x(f_A; z) = \frac{-\pi \mu_0 f_A^2}{q(f_A)} |\chi_R| \bar{E}_x(f_L; z) \bar{E}_x(f_L; z) \bar{E}_x^*(f_S; z) \times \\ \times e^{i2\pi z [q(f_A) + q(f_S) - 2q(f_L)]}. \quad (4.22-10)$$

В противоположность рассмотренному в разд. 4.21 усилению стоксовой волны в данном случае, очевидно, существенную роль играют фазы, а следовательно, и векторы распространения участвующих в процессе волн. Для лучшего понимания этой проблемы выразим в уравнении (4.22-10) волновые амплитуды $\bar{E}_x(f_i; z)$ через их абсолютные значения $|\bar{E}_x(f_i; z)|$ и фазы $\varphi_i(z)$. Уравнение (4.22-10) должно выполняться в отдельности для вещественной и мнимой частей, откуда следуют два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} |\bar{E}_x(f_A; z)| &= -\frac{\pi \mu_0 f_A^2}{q(f_A)} |\chi_R| |\bar{E}_x(f_L; z)|^2 |\bar{E}_x(f_S; z)| \times \\ &\times \cos \{2\pi z [2q(f_L) - q(f_A) - q(f_S)] - 2\varphi_L + \varphi_S + \varphi_A\}, \end{aligned} \quad (4.22-11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \varphi_A(z) &= \frac{\pi \mu_0 f_A^2}{q(f_A)} |\chi_R| \frac{|\bar{E}_x(f_L; z)|^2 |\bar{E}_x(f_S; z)|}{|\bar{E}_x(f_A; z)|} \times \\ &\times \sin \{2\pi z [2q(f_L) - q(f_A) - q(f_S)] - 2\varphi_L + \varphi_S + \varphi_A\}. \end{aligned}$$

Усиление антистоксовой волны произойдет при условии $(d/dz) |\bar{E}_x(f_A; z)| > 0$. Это условие выполняется при

$$\frac{\pi}{2} < 2\pi z [2q(f_L) - q(f_A) - q(f_S)] - \\ - 2\varphi_L + \varphi_S + \varphi_A + 2\pi a < \frac{3\pi}{2}. \quad (4.22-12)$$

Здесь a — целое число, которое мы в дальнейшем положим равным нулю. Из уравнения (4.22-12) видно, что антистоксова волна может усиливаться в начале кюветы, т. е. при $z = 0$, лишь при соблюдении неравенства $(\pi/2) < -2\varphi_L + \varphi_S + \varphi_A < 3\pi/2$. Рассмотрим теперь волну с максимальным усилением при $z = 0$, для которой $\varphi_A = \pi + 2\varphi_L - \varphi_S$. Эта волна будет в дальнейшем усиливаться на пути

$$l_K = \frac{1}{4 |2q(f_L) - q(f_A) - q(f_S)|},$$

а затем начнется ее ослабление. Исследование соответствующих уравнений (4.22-11) для стоксовой волны показывает, что процесс усиления антистоксовой волны

связан с ослаблением стоксовой волны. Для достижения высоких интенсивностей антистоксовой волны следует стремиться к наибольшему возможному значению длины взаимодействия l_K , на которой антистоксова волна усиливается. Для этого, как и в соответствующих задачах гл. 3, величина $\Delta q = |2q(f_L) - q(f_A) - q(f_S)|$ должна принимать достаточно малые значения. Для достижения оптимальных условий следовало бы потребовать, чтобы длина усиления была бесконечной, т. е. соотношение между волновыми векторами (все они считаются направленными по оси z) должно иметь вид

$$2q(f_L) - q(f_A) - q(f_S) = 0. \quad (4.22-13)$$

Вследствие всегда существующей кривизны дисперсионной кривой ($d^2q/df^2 \neq 0$) значение $\Delta q = 0$ не может быть достигнуто при рассеянии вперед, при котором, вообще говоря, могут получаться лишь значения фазовой когерентной длины l_K порядка 10^{-4} м. Они в большинстве случаев недостаточны для достижения наблюдаемого вынужденного антистоксова излучения в направлении вперед. Если же при расчете не ограничиваться волнами, рассеянными вперед, и допустить произвольные углы между $q \cdot (f_S)$ и $q \cdot (f_L)$ или между $q \cdot (f_A)$ и $q \cdot (f_L)$, то требование бесконечно больших длин усиления приводит к общему соотношению

$$2q \cdot (f_L) - q \cdot (f_A) - q \cdot (f_S) = 0 \quad (4.22-14)$$

вместо уравнения (4.22-13), представляющего соотношение для z -компонент волновых чисел.

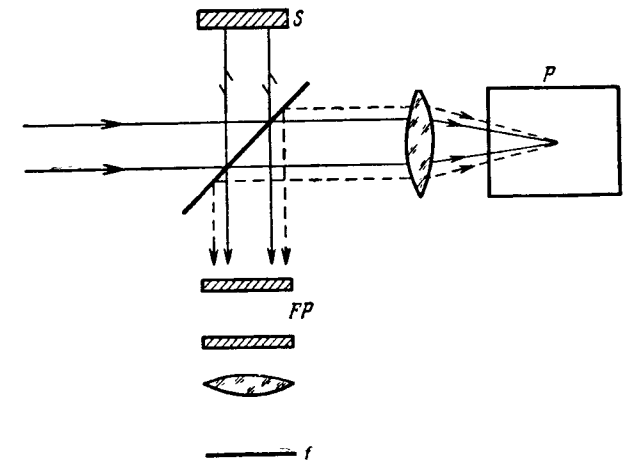
Уравнение (4.22-14) выполняется при заданных абсолютных значениях векторов $q \cdot (f)$, если эти векторы образуют между собой определенные углы. Отсюда становится понятным существование «конуса излучения» антистоксовых волн при наличии лазерной и стоксовой волн, распространяющихся в определенном направлении. Генерация антистоксова излучения в направлении, определяемом вектором $q \cdot (f_A)$, ослабляет стоксово излучение в направлении, определяемом вектором $q \cdot (f_S)$. Если экспериментальная схема выбрана так, что в окрестности этого выделенного направления (возникающего в процессе, описанном в разд. 4.221) существует непрерыв-

ное угловое распределение стоксовой интенсивности, то будут наблюдаться соотношения, описанные в разд. 4.214.

Кроме описанных процессов взаимодействия между двумя или тремя волнами, в активной к комбинационному рассеянию среде может наблюдаться в том же (третьем) приближении связь между четырьмя волнами, которая приведет, например, к характерным конусам излучения высших стоксовых компонент.

§ 4.3. ВЫНУЖДЕННОЕ РАССЕЯНИЕ БРИЛЛЮЭНА

Начиная с 1964 г. были выполнены многочисленные экспериментальные исследования вынужденного рассеяния Бриллюэна в свете лазеров с модулированной доб-



Фиг. 37. Схема установки для наблюдения вынужденного рассеяния Бриллюэна.
 S — зеркало; FP — интерферометр Фабри — Перо; P — исследуемое вещество;
 f — фотопластинка.
 Лучи лазера показаны сплошными линиями, лучи рассеяния Бриллюэна — пунктирными линиями.

ротностью. На кристаллических и аморфных образцах были исследованы основные характеристики эффекта (смещение частоты, зависимость рассеянного излучения от интенсивности) и одновременно были определены важнейшие свойства самих материалов, в особенности

закономерности распространения в них сверхзвуковых волн большой интенсивности. Если при вынужденном эффекте комбинационного рассеяния на передний план, очевидно, выступают свойства молекул, то для вынужденного рассеяния Бриллюэна главную роль играют свойства



Фиг. 38. Вынужденное рассеяние Бриллюэна в кварце. Снимок интерференционной картины.

Интерференционные кольца, обозначенные *L*, принадлежат лазерному излучению; кольца, обозначенные *B*, относятся к излучению Бриллюэна.

облучения лазерным светом в фокусе составляла по порядку величины 10^{15} Вт/м². При проведении экспериментов выяснилось, что возникающие внутри вещества чрезвычайно высокие давления могут вызвать его разрушение.

При экспериментальных исследованиях со смесями жидкостей очень четко обнаруживается зависимость между смещением частоты и скоростью звука v : изменение концентрации отдельных компонент смеси влечет за собой одновременное изменение v и максимального смещения частоты.

Как для кристаллических систем, так и для жидкостей расчеты смещения частоты по уравнению (2.51-7)

всей (конденсированной) среды. Схема аппаратуры, использованной Чао, Таунсом и Стойчевым [18], показана на фиг. 37. Излучение лазера падает слева. Исследуется зависимость от направления возникающего в образце излучения вынужденного рассеяния Бриллюэна; в частности, с помощью разделения лучей оказывается возможным сравнить после прохождения через интерферометр лазерное излучение и излучение, рассеянное назад. Результаты измерений на кварце представлены в виде фотографии на фиг. 38. Обозначенные буквой *B* внутренние кольца воспроизводят стоксовы компоненты вынужденного рассеяния Бриллюэна, а кольца *L* принадлежат лазерному излучению. При этих измерениях мощность

с подстановкой в него скорости звука v дали хорошее согласие с экспериментальными результатами. Это служит явным подтверждением справедливости основных соотношений (2.51-5) и (2.51-6) между частотами или волновыми числами лазерной и стоксовой волн и волны рассеяния, полученных для вынужденного рассеяния Бриллюэна. Следует отметить, что в корпускулярном представлении (электромагнитные волны \rightarrow фотоны; акустические волны \rightarrow фононы) эти соотношения выражают законы сохранения энергии и импульса.

Описание вынужденного рассеяния Бриллюэна основано на дифференциальных уравнениях (2.51-16) и (2.52-1) для давления и электрического поля. Решение этой системы дифференциальных уравнений в частных производных в общем случае очень затруднено. Поэтому мы рассмотрим решения при некоторых упрощающих предположениях. Прежде всего мы ограничимся стационарными решениями. Они позволяют получить приближенное описание реальных фактов, если длительность световых импульсов очень велика по сравнению с временем установления колебаний в среде. Это время задается обратным значением константы затухания Γ , которая равна удвоенному произведению скорости звука v и коэффициента поглощения звуковой мощности и для жидкостей при комнатной температуре имеет порядок величины 10^{-9} с. При рассмотрении стационарных процессов можно исходить из обыкновенных дифференциальных уравнений (2.52-3), (2.52-5) и из соответствующего уравнению (2.52-5) уравнения для амплитуды лазерной волны. Будем снова пренебрегать вторыми производными от амплитуды, а в правой части уравнения (2.52-3) также и первой производной. Условия применимости такого приближения обсуждались в разд. 1.322. Тогда мы получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{\sigma} + \frac{\Gamma_v}{2v} \bar{\sigma} &= - \frac{i\pi\epsilon_0\epsilon_{(1)}\Lambda^2 q(f_v)}{4\rho v^2} \bar{E}(f_L) \bar{E}^*(f_\sigma), \\ \frac{d}{dz} \bar{E}(f_\sigma) &= \frac{i\epsilon_{(1)}(2\pi f_\sigma) w}{4c^2} \bar{E}(f_L) \bar{\sigma}^*, \\ \frac{d}{dz} \bar{E}(f_L) &= - \frac{i\epsilon_{(1)}(2\pi f_L) w}{4c^2} \bar{E}(f_\sigma) \bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.3-1)$$

Общее решение первого уравнения системы (4.3-1) является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения и имеет вид

$$\bar{\sigma}(z) = \bar{\sigma}(0) e^{-(1/2v)\Gamma_v z} - \frac{i\pi e_0^2 e_{(1)} \Lambda^2 q(f_v)}{4\rho v^2} \times \\ \times \int_0^z dz' \bar{E}(f_L; z') \bar{E}^*(f_G; z') e^{-(1/2v)\Gamma_v(z-z')}. \quad (4.3-2)$$

Интеграл вносит существенный вклад в области

$$z - z' \lesssim \frac{2v}{\Gamma_v} \left(\frac{2v}{\Gamma_v} \simeq 10^{-6} \text{ м} \right).$$

Если внутри этой области амплитуды напряженности поля существенно не изменяются, то в областях $z \gg \gg 2v/\Gamma_v$ приближенно можно считать

$$\bar{\sigma}(z) = - \frac{i\pi e_0^2 e_{(1)} \Lambda^2 q(f_v)}{2\rho v \Gamma_v} \bar{E}(f_L; z) \bar{E}(f_G; z). \quad (4.3-3)$$

Ниже мы примем, что это соотношение выполняется и что длина, на которой затухает акустическая волна, мала по сравнению с длиной, на которой световая волна существенно изменяется вследствие поглощения или усиления. Характерная особенность исследуемого приближения состоит в том, что амплитуда давления — а, следовательно, согласно уравнению (2.51-3), также и поляризация — зависит только от значений напряженности поля в одной и той же точке. Таким образом, мы снова приходим к локальной связи между напряженностью поля и поляризацией.

В рассматриваемом случае можно сразу записать соответствующую рассеянию Бриллюэна восприимчивость в виде

$$\chi_B^{(3)}(f_G; f_G, f_L, -f_L) = - \frac{i\pi e_0^2 e_{(1)}^2 \Lambda^2 f_v}{4v^2 \rho \Gamma_v}. \quad (4.3-4)$$

При типичных численных значениях

$$f_v = 10^{10} \text{ Гц}, \quad v = 10^3 \text{ м/с}, \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ \Gamma_v = 10^9 \text{ с}^{-1}, \quad e_{(1)} \simeq \Lambda^{-1}$$

оценка восприимчивости по порядку величины дает $10^{-30} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м/В}^3$. В области применимости уравнения (4.3-4) для амплитуды давления система уравнений (4.3-1) сводится к системе для определения амплитуд $E(f_L)$, $\bar{E}(f_G)$. Эту систему можно переписать в виде уравнений для усредненных по времени соответствующих векторов Пойнтинга

$$\langle |S(f; z)| \rangle = \frac{1}{2} e_0 \frac{c^2}{\omega} |\bar{E}(f; z)|^2,$$

а именно

$$\frac{d}{dz} \langle S(f_G; z) \rangle = - \frac{\pi^2 e_{(1)}^2 \Lambda^2 q(f_v) \omega^2}{c^4 \Gamma_v \rho v} f_G \langle |S(f_G; z)| \rangle \langle S(f_L; z) \rangle, \quad (4.3-5)$$

$$\frac{d}{dz} \langle S(f_L; z) \rangle = - \frac{\pi^2 e_{(1)}^2 \Lambda^2 q(f_v) \omega^2}{c^4 \Gamma_v \rho v} f_L \langle |S(f_G; z)| \rangle \langle S(f_L; z) \rangle.$$

Сразу видно, что в частном случае малого усиления сигнала, т. е. в пренебрежении изменениями $\langle S(f_L; z) \rangle$, существует простое решение этой системы уравнений:

$$\langle |S(f_G; z)| \rangle = \langle |S(f_G; l)| \rangle e^{(l-z)g_B}, \quad (4.3-6)$$

где

$$g_B = \frac{\pi^2 e_{(1)}^2 q(f_v) \Lambda^2 \omega^2}{c^4 \Gamma_v \rho v} f_G \langle S(f_L; 0) \rangle.$$

Это решение относится к случаю, когда с одного конца кюветы $z = 0$ в нее направляется волна с частотой f_L , а с другого конца — слабая волна с частотой $f_G = = f_L - f_v$. Полученная зависимость была проверена путем измерения усиления, причем определялась также характерная для вещества величина $g_B / \langle S(f_L; 0) \rangle$. В области малых усилений было получено хорошее согласие между измеренными и рассчитанными величинами. Вне области малого усиления должно учитываться уменьшение интенсивности лазерного света, обусловленное вынужденным рассеянием Бриллюэна. Из системы уравнений (4.3-5) вытекает закон сохранения для величины

$$\frac{1}{f_L} \langle S(f_L; z) \rangle + \frac{1}{f_G} \langle |S(f_G; z)| \rangle,$$

который следует интерпретировать как закон сохранения числа фотонов [см. разъяснения к уравнению (4.22-6)]. Используя этот интеграл, получим из системы (4.3-5) одно обыкновенное дифференциальное уравнение. При соответствующих граничных условиях его решение имеет вид

$$\frac{\langle |S(f_G; z)| \rangle}{\langle |S(f_G; 0)| \rangle} = \frac{1 - \frac{f_L}{f_G} \frac{\langle |S(f_G; 0)| \rangle}{\langle S(f_L; 0) \rangle}}{\exp \left\{ \left[1 - \frac{f_L}{f_G} \frac{\langle |S(f_G; 0)| \rangle}{\langle S(f_L; 0) \rangle} \right] g_{Bz} \right\} - \frac{f_L}{f_G} \frac{\langle |S(f_G; 0)| \rangle}{\langle S(f_L; 0) \rangle}} \quad (4.3-7)$$

Вместе с условием

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_L} [\langle S(f_L; l) \rangle - \langle S(f_L; 0) \rangle] &= \\ &= \frac{1}{f_G} [\langle |S(f_G; l)| \rangle - \langle |S(f_G; 0)| \rangle] \quad (4.3-8) \end{aligned}$$

уравнение (4.3-7) позволяет определить $\langle |S(f_G; 0)| \rangle$ и $\langle S(f_L; l) \rangle$ при известных входных мощностях $\langle S(f_L; 0) \rangle$, $\langle |S(f_G; l)| \rangle$.

В предельном случае малого усиления сигнала уравнение (4.3-7) переходит в уже рассмотренное уравнение (4.3-6).

Поэтому более интересен другой предельный случай: $g_{Bz} \rightarrow \infty$. При этом система уравнений имеет решение $\langle S(f_L; l) \rangle = 0$, $\frac{1}{f_G} \langle |S(f_G; 0)| \rangle =$

$$= \frac{1}{f_L} \langle S(f_L; 0) \rangle + \frac{1}{f_G} \langle |S(f_G; l)| \rangle, \quad (4.3-9)$$

означающее, что все лазерные фотоны на их пути через кювету преобразуются в рассеянные назад фотоны Бриллюэна.

По аналогии с вынужденным комбинационным рассеянием можно, исходя из случая усиления, объяснить также образование вынужденной волны на стоксовой частоте из теплового рассеянного излучения. Если произведение g_{Bz} достаточно велико, то усиление теплового рассеяния Бриллюэна за счет интенсивности лазерного

света будет настолько большим, что лазерная мощность в конце кюветы окажется почти равной нулю. Это означает, что вследствие рассеяния Бриллюэна среда в кювете действует как полностью отражающее зеркало, причем отраженное излучение испытывает смещение частоты, равное f_v . Эффективная отражательная способность возрастает от 0 до 1 с возрастанием интенсивности входного излучения. Поэтому описанное явление отражения может быть использовано для модуляции добротности лазеров. Впервые этот метод применили Кайзер, Майер и Поль в 1966 г.

Выше мы обсуждали условие применимости стационарного рассмотрения рассеяния Бриллюэна. Это условие нарушается уже при длительностях импульсов порядка 10^{-8} с, поскольку процесс рассеяния устанавливается относительно медленно. Поэтому для описания экспериментов с короткими импульсами должна применяться *нестационарная* теория. На основании дифференциальных уравнений (2.51-16) и (2.52-1) и закономерностей нестационарных процессов (см. приложение 6) можно, ограничиваясь областью малых усиления сигнала, получить следующую систему дифференциальных уравнений для амплитуд стоксовой волны и давления:

$$\frac{i4\pi f_G}{w^2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}(f_G) + i4\pi q(f_G) \frac{\partial}{\partial z} \bar{E}(f_G) = \frac{2\pi^2 f_G^2 \epsilon_{(1)}}{c^2} \bar{E}(f_L) \bar{\sigma}^*, \quad (4.3-10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\sigma}^* + v \frac{\partial}{\partial z} \bar{\sigma}^* + \frac{\Gamma_v}{2} \bar{\sigma}^* = \frac{i\pi \epsilon_0 \epsilon_{(1)} \Lambda^2 q(f_v)}{4\pi v} \bar{E}^*(f_L) \bar{E}(f_G).$$

Эта система дифференциальных уравнений следует из исходных уравнений, если в смысле выводов, сделанных в приложении 6, пренебречь вторыми производными от амплитуд напряженности поля и давления, а также первыми и вторыми производными от нелинейных членов по координатам и времени и (линейным) поглощением электромагнитной волны с частотой f_G . Такие пренебрежения возможны при заданных материальных константах, если ограничиться определенными областями значений и определенным пространственно-временным

изменением амплитуд напряженности поля распространяющихся волн.

В дополнение к выводам, сделанным в приложении 6, о нестационарном поведении поляризации и напряженности поля уравнения (4.3-10) показывают, что наряду с «нестационарным» дифференциальным уравнением для напряженности поля появляется соответствующее «нестационарное» дифференциальное уравнение для амплитуды давления. Следовательно, при формулировке материальных уравнений должны учитываться также свойства нестационарности.

Аналогичные рассуждения можно было бы применить, например, также к комбинационному рассеянию и к самофокусировке. Более точное решение системы уравнений, выполненное, например, Хагенлоккером и др. [19], показывает, что усиление входного стоксова сигнала начиная со значения 1 возрастает со временем и лишь по истечении времени порядка $(g_B l) \Gamma_v^{-1}$ достигает стационарного значения $e^{g_B l}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВАЖНОГО ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Предпосылки, утверждения

Дифференциальный оператор \mathcal{D} вида

$$\mathcal{D} = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0, \quad (\text{П1-1})$$

в котором a_i — постоянные коэффициенты, действует на функцию $P(t)$. Получается зависящая от времени функция $(\mathcal{D}P)_t$. Замена t на $t - \tau$ и умножение полученной после этого функции $(\mathcal{D}P)_{t-\tau}$ на

$$Q(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} df' e^{i2\pi f' \tau} [a_n (i2\pi f')^n + a_{n-1} (i2\pi f')^{n-1} + \dots + a_0]^{-1} \quad (\text{П1-2})$$

после интегрирования по τ дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau Q(\tau) (\mathcal{D}P)_{t-\tau} = P(t). \quad (\text{П1-3})$$

При этом предполагалось, что рассматриваемые функции обладают использованными здесь свойствами дифференцируемости и существования фурье-образа.

Доказательство справедливости уравнения (П1-3)

На основании фурье-представления для $P(t)$

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df' P(f) e^{i2\pi f t} \quad (\text{П1-4})$$

функция $(\mathcal{D}P)_{t-\tau}$ также задается в фурье-представлении; после выполнения дифференцирования получается

$$(\mathcal{D}P)_{t-\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} df {}^1P(f) e^{i2\pi f(t-\tau)} \times \\ \times [a_n (i2\pi f)^n + a_{n-1} (i2\pi f)^{n-1} + \dots + a_0]; \quad (\text{П1-5})$$

при учете уравнения (П1-2) отсюда следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau Q(\tau) (\mathcal{D}P)_{t-\tau} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} df {}^1P(f) e^{i2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} df' \frac{a_n (i2\pi f')^n + \dots + a_0}{a_n (i2\pi f')^n + \dots + a_0} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i2\pi \tau (f'-f)}. \quad (\text{П1-6})$$

Из свойств δ -функции [уравнение (П2-2)] после интегрирования по f' получается значение для $\delta(f'-f)$. Интегрирование по f' дает единицу, так что в правой части после интегрирования по τ и f' остается только

$$\int_{-\infty}^{+\infty} df {}^1P(f) e^{i2\pi ft}.$$

Сравнивая этот результат с (П1-4), получаем доказательство уравнения (П1-3).

Замечание к выполнению преобразования Фурье в уравнении (П1-2)

Примененное в уравнении (П1-2) преобразование Фурье можно осуществить наиболее просто путем разложения функции

$${}^1Q(f') = [a_n (i2\pi f')^n + \dots + a_0]^{-1} \quad (\text{П1-7})$$

на парциальные дроби.

Введенный в разд. 1.111 дифференциальный оператор \mathcal{D} содержит отличные от нуля константы $a_2=1$, $a_1=\Gamma$,

$a_0 = \omega_0^2$; поэтому после разложения на парциальные дроби получим

$${}^1Q(f') = \frac{1}{2i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}} \left\{ \left[i2\pi f' + \frac{\Gamma}{2} - i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} \right]^{-1} - \right. \\ \left. - \left[i2\pi f' + \frac{\Gamma}{2} + i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} \right]^{-1} \right\}. \quad (\text{П1-8})$$

После формирования фурье-образов для обоих слагаемых отсюда следует

$$Q(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}} \left\{ e^{\tau \left[-\frac{\Gamma}{2} + i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} \right]} - e^{\tau \left[-\frac{\Gamma}{2} - i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} \right]} \right\} & \text{для } \tau \geq 0, \\ 0 & \text{для } \tau \leq 0. \end{cases} \quad (\text{П1-9})$$

Приложение 2

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА δ -ФУНКЦИИ

1. Если t находится в области интегрирования, то

$$\int_{t_0}^{t_1} d\tau F(\tau) \delta(\tau - t) = F(t). \quad (\text{П2-1})$$

2. Фурье-представление δ -функции имеет вид

$$\delta(\tau - t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df e^{i2\pi f(\tau - t)}. \quad (\text{П2-2})$$

3. Свойство симметрии δ -функции:

$$\delta(\tau - t) = \delta(t - \tau). \quad (\text{П2-3})$$

4. Произведения δ -функций, содержащих какую-либо переменную t , могут быть преобразованы следующим образом:

$$\delta(t - \tau') \delta(t - \tau'') = \delta(t - \tau') \delta(\tau' - \tau'') = \\ = \delta(t - \tau'') \delta(\tau' - \tau'') \quad (\text{П2-4})$$

(предполагается, что $\tau' \neq \tau''$). 20

Приложение 3

ВЫВОД ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ
ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ¹⁾

Утверждение 1

Из временного аспекта причинно-следственной связи [$\chi^{(1)}(\tau) = 0$ для $\tau < 0$] и вследствие достаточно сильного затухания величины $\chi^{(1)}(\tau)$ для больших значений τ (конечная память) вытекает, что $\chi^{(1)}(f)$ не имеет полюсов в нижней половине комплексной плоскости частот, включая вещественную ось.

Утверждение 2

Если $\chi^{(1)}(f)$ не имеет полюсов в нижней половине комплексной плоскости частот, включая вещественную ось, то справедливо уравнение (1.13-12)

$$\chi^{(1)}(f) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} df' \frac{\chi^{(1)}(f')}{f' - f}. \quad (\text{ПЗ-1})$$

Доказательство

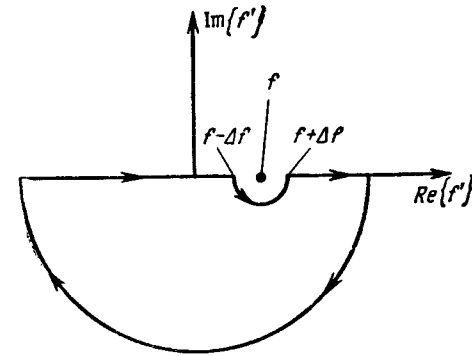
Нас интересует только принципиальный ход доказательства. Поэтому для упрощения сделаем необязательное допущение, что величина $\chi^{(1)}(\tau)$ ограничена для всех положительных τ . Тогда из

$$\chi^{(1)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \chi^{(1)}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} \quad (\text{ПЗ-2})$$

и из того, что $\chi^{(1)}(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, следует, что в нижней половине комплексной плоскости частот функция $\chi^{(1)}(f)$ не имеет особенностей. При конечных $\chi^{(1)}\tau$ и для $\text{Im}(f) < 0$ функция $e^{2\pi \text{Im}(f)\tau}$ обуславливает сходимость интеграла. При предполагаемом поведении $\chi^{(1)}(\tau)$ для больших τ интеграл сходится также для $\text{Im}(f) = 0$, так что $\chi^{(1)}(f)$ не имеет особенностей и на вещественной оси. Таким образом, первое утверждение доказано.

¹⁾ См. об этом также в работе [20].

Исходя из него, докажем теперь дисперсионное соотношение (ПЗ-1). Для этого проинтегрируем функцию $\chi^{(1)}(f')/(f' - f)$ по пути, показанному на фиг. 39. Этот путь складывается из отрезков вещественной оси между $-\infty$ и $f - \Delta f$ и между $f + \Delta f$ и $+\infty$ малой полуокружности с радиусом Δf вокруг точки f на вещественной оси и полуокружности с бесконечно большим радиусом в нижней полуплоскости.



Фиг. 39. Интегрирование в комплексной плоскости f' .

Поскольку внутри этого замкнутого контура особенности отсутствуют, то

$$\oint df' \frac{\chi^{(1)}(f')}{f' - f} = 0. \quad (\text{ПЗ-3})$$

Интеграл по полуокружности бесконечно большого радиуса обращается в нуль, тогда как применение интегральной формулы Коши дает для интеграла по малой полуокружности

$$\int df' \frac{\chi^{(1)}(f')}{f' - f} = i\pi \chi^{(1)}(f). \quad (\text{ПЗ-4})$$

Из уравнений (ПЗ-3) и (ПЗ-4) следует

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{f - \Delta f} df' \frac{\chi^{(1)}(f')}{f' - f} + \int_{f + \Delta f}^{+\infty} df' \frac{\chi^{(1)}(f')}{f' - f} \right\} + i\pi \chi^{(1)}(f) = 0. \quad (\text{ПЗ-5})$$

Предельное значение выражения в фигурных скобках называется главным значением соответствующего интеграла в пределах $-\infty, +\infty$.

Пользуясь введенным в разд. 1.13 обозначением $\int^{(P)}$ для главного значения интеграла, представим уравнение (ПЗ-5) в виде (ПЗ-1). Таким образом, это уравнение доказано.

Аналогично доказываются дисперсионные соотношения для восприимчивостей высших порядков (см. работу [2]).

Приложение 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ $\chi^{(n)}/\chi^{(n)}$

Докажем уравнение (1.21-28) для отношения $\chi^{(n)}/\chi^{(n)}$ при простых предположениях. Примем, что $\chi^{(n)}$ не зависит от частоты. Это соответствует системе без «памяти». (Без такого предположения доказательство протекает аналогичным образом, но связано со сложными расчетами.) Из уравнения $P^{(n)}(t) = \chi^{(n)}[E(t)]^n$ при

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[\sum_{l=1}^a \hat{E}(f_l) e^{i2\pi f_l t} + \{\text{КК}\} \right]$$

и

$$P(t) = \frac{1}{2} \left[\sum_{r=1}^b \hat{P}(f_r) e^{i2\pi f_r t} + \{\text{КК}\} \right]$$

следует соотношение

$$\begin{aligned} \left[\sum_{r=1}^b \hat{P}(f_r) e^{i2\pi f_r t} + \{\text{КК}\} \right] &= \\ &= \chi^{(n)} \frac{1}{2^{n-1}} \left[\sum_{l=1}^a \hat{E}(f_l) e^{i2\pi f_l t} + \{\text{КК}\} \right]^n. \end{aligned}$$

Пользуясь биномиальными коэффициентами, отсюда получаем

$$\begin{aligned} \hat{P}(f_r) = \chi^{(n)} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{T_e} \frac{n!}{m_1! m_{-1}! \dots m_l! m_{-l}! \dots m_a! m_{-a}!} \times \\ \times [\hat{E}(f_1)]^{m_1} [\hat{E}(-f_1)]^{m_{-1}} \dots [\hat{E}(f_l)]^{m_l} [\hat{E}(-f_l)]^{m_{-l}} \dots \\ \dots [\hat{E}(f_a)]^{m_a} [E(-f_a)]^{m_{-a}}, \end{aligned}$$

где символ T_e означает суммирование по всем членам в полиноме, для которых

$$(m_1 - m_{-1})f_1 + \dots + (m_l - m_{-l})f_l + \dots \\ \dots + (m_a - m_{-a})f_a = f_r.$$

Из этого представления непосредственно следует уравнение (1.21-28).

Приложение 5

ВЫЧИСЛЕНИЕ $\langle \alpha_{(1)pr} \dots \alpha_{(1)qs} \rangle_0$

Как для расчета рассеянной мощности при эффекте спонтанного комбинационного рассеяния [см. уравнение (2.41-13)], так и для вычисления нелинейных восприимчивостей при эффекте вынужденного комбинационного рассеяния [см. уравнение (2.42-9)] в изотропных средах требуется знать усредненные по всем молекулярным ориентациям произведения производных от поляризуемостей $\langle \alpha_{(1)pr} \alpha_{(1)qs} \rangle_0$, которые мы теперь рассчитаем.

Обозначим через s_{pp} коэффициенты преобразования координат при переходе от лабораторной системы координат x, y, z к системе координат X, Y, Z , связанной с молекулой, и производные от поляризуемости в этой системе через $\alpha'_{(1)pq}$. Тогда можно записать $\alpha_{(1)pr} =$

$$\begin{aligned} = \sum_{P, R} s_{pp} s_{rR} \alpha'_{(1)PR}, \text{ откуда следует} \\ \langle \alpha_{(1)pr} \alpha_{(1)qs} \rangle_0 = \sum_{P, Q, R, S} \langle s_{pp} s_{rR} s_{qQ} s_{sS} \rangle_0 \alpha'_{(1)PR} \alpha'_{(1)QS}. \quad (\text{П5-1}) \end{aligned}$$

Путем соответствующего выбора связанной с молекулой системы координат можно преобразовать $\alpha'_{(1)pr}$ к главным осям, так что недиагональные члены обратятся в

нуль, и мы получим

$$\langle \alpha_{(1)pr} \alpha_{(1)qs} \rangle = \sum_{P, Q} \langle S_{pP} S_{rR} S_{qQ} S_{sS} \rangle_0 \alpha'_{(1)PP} \alpha'_{(1)QQ}. \quad (\text{П5-2})$$

Дадим более детальное представление этого соотношения при простых условиях и в связи с § 2.3; рассмотрим двухатомную молекулу и выберем соединяющую ядра линию за ось X связанной с молекулой системы координат. Ориентация этой оси задается углами ϑ и Φ_x , как показано на фиг. 12. Пусть тензор $\alpha'_{(1)ij}$ имеет в молекулярной системе только один отличный от нуля элемент $\alpha'_{(1)xx} = \alpha'_{(1)}$. Рассмотрим волны, распространяющиеся в направлении z и поляризованные в направлении x или y . В качестве примера вычислим $\langle \alpha_{(1)xx} \alpha_{(1)xx} \rangle$ и $\langle \alpha_{(1)xy} \alpha_{(1)xy} \rangle$:

$$\langle \alpha_{(1)xx} \alpha_{(1)xx} \rangle_0 = \frac{\alpha_1'^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi_x \int_0^\pi d\vartheta \cos^4 \vartheta \sin \vartheta = \frac{1}{5} \alpha_1'^2, \quad (\text{П5-3})$$

$$\langle \alpha_{(1)xy} \alpha_{(1)xy} \rangle_0 = \frac{\alpha_1'^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi_x \int_0^\pi d\vartheta \cos^2 \vartheta \sin^3 \vartheta \cos^2 \Phi_x = \frac{1}{15} \alpha_1'^2.$$

Подстановка результатов (П5-3) в уравнение (2.42-9) дает существенные для эффекта вынужденного комбинационного рассеяния восприимчивости

$$\chi_{xxxx}^{(3)}(f_G; f_G, f_L, -f_L) = \frac{i\gamma}{4\mathcal{M}\Gamma_R \omega_M} \cdot \frac{1}{5} \alpha_1'^2, \quad (\text{П5-4})$$

$$\chi_{xxyy}^{(3)}(f_G; f_G, f_L, -f_L) = \frac{i\gamma}{4\mathcal{M}\Gamma_R \omega_M} \cdot \frac{1}{15} \alpha_1'^2.$$

Восприимчивость $\chi_{xxxx}^{(3)}$ описывает создание нелинейной поляризации на частоте f_G , если обе волны поляризованы в направлении x , тогда как восприимчивость $\chi_{xxyy}^{(3)}$ относится к случаю, когда волна с частотой f_G поляризована в направлении x , а волна с частотой f_L — в направлении y .

Приложение 6

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СВОЙСТВА

В дальнейших рассуждениях мы воспользуемся для наглядности простыми геометрическими соотношениями (однокомпонентными величинами), представленными в

разд. 1.322 при переходе от (1.32-12) к (1.32-13а). В нестационарном случае следует считать основным выражение (1.32-10) для напряженности электрического поля и определять поляризацию по уравнению (1.11-16).

Сначала вычислим линейный поляризационный член, который аналогично напряженности поля имеет вид линейной комбинации гармонических волн (с частотой $f_1, \dots, f_h, \dots, f_a$) с медленно меняющимися волновыми амплитудами:

$$P^{(1)}(t, z) = \sum_{k=1}^a \frac{1}{2} \bar{P}^{(1)}(f_k; t, z) e^{i[2\pi f_k t - 2\pi q(f_k)z]} + \{\text{КК}\}. \quad (\text{П6-1})$$

Волновые амплитуды $\bar{P}^{(1)}(f_k; t, z)$ выражаются через напряженность поля с помощью восприимчивости первого порядка $\chi^{(1)}(f)$. Для определенной частоты f_k при этом требуется знать не весь ход функции $\chi^{(1)}(f)$, а только ее поведение вблизи f_k . В самом деле, при сделанных предположениях относительно $\bar{E}(f_k; t, z)$ соответствующий член напряженности поля тоже имеет частотные компоненты только вблизи f_k . Целесообразно воспользоваться этими свойствами, чтобы представить $\chi^{(1)}(f)$ в виде разложения в ряд Тейлора:

$$\chi^{(1)}(f) = \chi^{(1)}(f_k) + \left(\frac{d}{df} \chi^{(1)} \right)_{f_k} (f - f_k) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{df^2} \chi^{(1)} \right)_{f_k} (f - f_k)^2 + \dots + O(1)(f - f_k)^n. \quad (\text{П6-2})$$

Коэффициенты разложения $\chi^{(1)}(f)$ связаны с феноменологически определяемыми оптическими константами, характеризующими поведение волн или групп волн на частоте f_k , фазовой скоростью, групповой скоростью и их производными, коэффициентами поглощения и их производными. На основании уравнения (П6-2) получаются волновые амплитуды поляризации:

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(1)}(f_k; t, z) &= \\ &= \chi^{(1)}(f_k) \bar{E}(f_k; t, z) - \frac{i}{2\pi} \left(\frac{d}{df} \chi^{(1)} \right)_{f_k} \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}(f_k; t, z) - \\ &- \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{d^2}{df^2} \chi^{(1)} \right)_{f_k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{E}(f_k; t, z) + \dots + O(1) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \bar{E}(f_k; t, z). \end{aligned} \quad (\text{П6-3})$$

Нелинейная часть поляризации также имеет вид наложения гармонических волн с медленно меняющимися волновыми амплитудами $\bar{P}^{(НЛ)}$, но возникающий спектр частот в общем случае уже не совпадает со спектром частот напряженности поля. С помощью соображений, аналогичных использованным при выводе уравнения (1.32-12), можно показать, что представляют интерес только те частотные компоненты нелинейной поляризации, для которых $f'_l = f_k$.

Волновое уравнение (1.32-4) удовлетворяется подстановками (1.32-10), (Пб-3) и аналогичной подстановкой для нелинейной поляризации, если для каждой частоты в отдельности удовлетворяется дифференциальное уравнение

$$C_1 \bar{E} + C_2 \frac{\partial}{\partial z} \bar{E} + C_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{E} + C_4 \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} + C_5 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{E} + \dots \\ \dots + O(1) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \bar{E} = C'_1 \bar{P}^{(НЛ)} + C'_2 \frac{\partial}{\partial t} \bar{P}^{(НЛ)} + C'_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{P}^{(НЛ)}, \quad (\text{Пб-4})$$

в котором \bar{E} и $\bar{P}^{(НЛ)}$ означают $\bar{E}(f_k; t, z)$ и $\bar{P}^{(НЛ)}(f_k; t, z)$. Константы C_j и C'_j зависят от универсальных констант и от величин μ , $f_k q(f_k)$, $\chi^{(Л)}(f_k)$ и производных от $\chi^{(Л)}(f)$ при $f = f_k$. Они имеют следующий вид:

$$C_1 = [2\pi q(f_k)]^2 - \frac{\mu}{c^2} (2\pi f_k)^2 - \mu \mu_0 (2\pi f_k)^2 \chi^{(Л)}(f_k) = \\ = -i\mu \mu_0 (2\pi f_k)^2 \text{Im} \{ \chi^{(Л)}(f_k) \},$$

при соотношении (1.32-17)

$$C_2 = i4\pi q(f_k),$$

$$C_3 = -1,$$

$$C_4 = i \frac{\mu}{c^2} 4\pi f_k + i\mu \mu_0 4\pi f_k \chi^{(Л)}(f_k) + i\mu \mu_0 2\pi f_k^2 \left(\frac{d}{df} \chi^{(Л)}(f) \right)_{f_k},$$

$$C_5 = \frac{\mu}{c^2} + \mu \mu_0 \chi^{(Л)}(f_k) + \mu \mu_0 2f_k \left(\frac{d}{df} \chi^{(Л)}(f) \right)_{f_k} + \\ + \frac{\mu \mu_0}{2} f_k^2 \left(\frac{d^2}{df^2} \chi^{(Л)}(f) \right)_{f_k},$$

$$C'_1 = (2\pi f_k)^2 \mu \mu_0,$$

$$C'_2 = -i4\pi f_k \mu \mu_0,$$

$$C'_3 = -\mu \mu_0.$$

Решение системы a дифференциальных уравнений в частных производных типа (Пб-4), связанных между собой нелинейными членами, требует очень сложных расчетов. Их следует проводить в разумных приближениях. Поэтому для каждой конкретной проблемы, как правило, следует оценить те члены, которыми можно пренебречь. Помимо названных материальных констант, должны учитываться реальные условия, в которых протекают исследуемые процессы: длительность взаимодействующих групп волн (длительность импульса), длина кюветы, время установления колебаний, коэффициенты усиления, время разбегания групп волн, взаимодействие различных эффектов НЛО. Для обработки математической части этой задачи преимуществом обладает фурье-представление уравнения (Пб-4). В этой связи сошлемся на выкладки, приведенные в конце разд. 1.321. В фурье-представлении отдельные члены принимают вид членов разложения в ряд по степеням f_k или $\bar{q}(f_k)$, что значительно облегчает количественные оценки. Так, например, отношение третьего слагаемого ко второму слагаемому в левой части обычно имеет порядок отношения $\bar{q}(f_k)/q(f_k)$, а отношение пятого слагаемого к четвертому — порядок f_k/f_k . При соответствующих экспериментальных условиях может оказаться полезным перейти от координат t и z к другим координатам, чтобы можно было описать нестационарное поведение при помощи наиболее простого дифференциального уравнения (пренебречь производными высших порядков). Такое упрощение может быть достигнуто (см., например, [21]), если считать волновую амплитуду \bar{E} зависящей от координат z и $\omega't - z$. Вторая координата позволяет непосредственно задать изменение \bar{E} в системе, движущейся вместе с группой волн (групповая скорость ω'). Упрощение дифференциального уравнения может быть достигнуто, если при соответствующих экспериментальных условиях исходить из допущения, что \bar{E} лишь относительно медленно меняется с изменением z при постоянном значении $\omega't - z$.

В § 4.3 на примере рассеяния Бриллюэна сформулированы основные уравнения для нестационарного процесса.

Приложение 7

ПЕРЕВОДНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ СИСТЕМАМИ ЕДИНИЦ
Переводные коэффициенты для численных значений некоторых электрических
и магнитных величин при переходе от гауссовой системы к системе СИ

Название величины	Гауссова система CGS		Система СИ
	единица измерения	переводной коэффициент	
Электрическое напряжение	$\text{см}^{1/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1}$	$2,9979 \cdot 10^9$	$\text{м}^2 \text{кг} \text{с}^{-3} \text{А}^{-1} \equiv \text{В}$
Сила электрического тока	$\text{см}^{3/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-2}$	$3,3356 \cdot 10^{-10}$	А
Плотность электрического тока	$\text{см}^{-1/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-2}$	$3,3356 \cdot 10^{-6}$	$\text{А} \equiv \text{А}/\text{м}^2$
Напряженность электрического поля	$\text{см}^{-1/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1}$	$2,9979 \cdot 10^4$	$\text{м} \text{кг} \text{с}^{-3} \text{А}^{-1} \equiv \text{В}/\text{м}$
Диэлектрическое смещение	$\text{см}^{-1/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1}$	$2,6544 \cdot 10^{-7}$	$\text{м}^{-2} \text{с} \text{А} \equiv \text{Кл}/\text{м}^2$
Электрическая поляризация	$\text{см}^{-1/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1}$	$3,3356 \cdot 10^{-6}$	$\text{м}^{-2} \text{с} \text{А} \equiv \text{Кл}/\text{м}^2$
Электрическая восприимчивость	1		
1-го порядка $\chi^{(1)} = \bar{p}^{(1)}/E$	Электростатические единицы (СГСЕ)	$1,1126 \cdot 10^{-10}$	$\text{м}^{-3} \text{кг}^{-1} \text{с}^4 \text{А}^2 \equiv \text{А} \cdot \text{с}/\text{В} \cdot \text{м}$
2-го порядка $\chi^{(2)} = \bar{p}^{(2)}/E^2$	$\text{см}^{5/2} \text{г}^{-1/2} \text{с}$	$3,7114 \cdot 10^{-16}$	$\text{м}^{-4} \text{кг}^{-2} \text{с}^7 \text{А}^3 \equiv \text{А} \cdot \text{с}/\text{В}^2$
3-го порядка $\chi^{(3)} = \bar{p}^{(3)}/E^3$	$\text{см}^1 \text{г}^{-1} \text{с}^2$	$1,2380 \cdot 10^{-19}$	$\text{м}^{-5} \text{кг}^{-3} \text{с}^{10} \text{А}^4 \equiv \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}/\text{В}^3$
Электрическая поляризуемость	см^3	$1,1127 \cdot 10^{-16}$	$\text{кг}^{-1} \text{с}^4 \text{А}^2 \equiv \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2/\text{В}$
Электрический момент	$\text{см}^{5/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1}$	$3,3356 \cdot 10^{-12}$	$\text{м} \text{с} \text{А} \equiv \text{Кл} \cdot \text{м}$
Электрический заряд	$\text{см}^{3/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1}$	$3,3356 \cdot 10^{-10}$	$\text{с} \text{А} \equiv \text{Кл}$
Электрическое сопротивление	$\text{см}^{-1} \text{с}$	$8,988 \cdot 10^{11}$	$\text{м}^2 \text{кг} \text{с}^{-3} \text{А}^{-2} \equiv \text{Ом}$
Емкость	см	$1,1127 \cdot 10^{-12}$	$\text{м}^{-2} \text{кг}^{-1} \text{с}^{-4} \text{А}^2 \equiv \text{Ф}$
Напряженность магнитного поля	$\text{см}^{-1/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1} \equiv \oint (\text{эрстед})$	$7,9578 \cdot 10^1$	$\text{м}^{-1} \text{А} \equiv \text{А}/\text{м}$
Магнитная индукция	$\text{см}^{-1/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1} \equiv \Gamma \text{с (гаусс)}$	10^{-4}	$\text{кг} \text{с}^{-2} \text{А}^{-1} \equiv \text{Вб}/\text{м}^2 \equiv \text{Т (тесла)}$
Поток магнитной индукции	$\text{см}^{3/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1} \equiv \text{Макс (максимальные единицы (СГСМ))}$	10^{-8}	$\text{м}^2 \text{кг} \text{с}^{-2} \text{А}^{-1} \equiv \text{Вб (вебер)}$
Намагниченность	$\text{см}^{-1/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1}$	$1,2566 \cdot 10^{-8}$	$\text{кг} \text{с}^{-2} \text{А}^{-1} \equiv \text{Вб}/\text{м}^2 \equiv \text{Т}$
Магнитный момент	$\text{см}^{3/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1}$	$1,2566 \cdot 10^{-9}$	$\text{кг} \text{с}^{-2} \text{А}^{-1} \equiv \text{Вб} \cdot \text{м}$
Индуктивность	см	10^{-9}	$\text{кг} \text{с}^{-2} \text{А}^{-2} \equiv \text{Г (генри)}$
Вектор-потенциал	$\text{см}^{1/2} \text{г}^{1/2} \text{с}^{-1}$	10^{-6}	$\text{м} \text{кг} \text{с}^{-2} \text{А}^{-1} \equiv \text{Вб}/\text{м}$
Вектор Пойнтинга	$\text{гс}^{-3} \text{СГСЕ} \equiv \text{СГСМ}$	10^{-9}	$\text{кг} \text{с}^{-3} \equiv \text{Вт}/\text{м}^2$

ЛИТЕРАТУРА

ОБЩАЯ ЛИТЕРАТУРА

По линейной электродинамике и оптике

- Born M.*, *Optik*, 2. Aufl., Berlin — Heidelberg — New York, 1965.
Born M., *Wolf E.*, *Principles of Optics*, Oxford, 1970. (См. перевод: М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд-во «Наука», 1970.)
Ландау Л. Д., *Лифшиц Е. М.*, Электродинамика сплошных сред, М., 1959.

По магнитооптике

- Schütz W.*, *Magneto-optik*, в книге W. Wien, F. Harms, *Handbuch der Experimentalphysik*, Bd. 16, 1. Teil, Leipzig, 1936.
Palik E. D., A brief survey of magneto-optics, *Appl. Optics*, **6**, 597 (1967).

По лазерам

- Birnbaum G.*, *Optical Masers*, New York — London, 1964.
Kleen W., *Müller R.*, *Laser*, Berlin — Heidelberg — New York, 1968.
Микаэлян А. Л., *Тер-Микаэлян М. Л.*, *Турков Ю. Г.*, Оптические генераторы на твердом теле, М., 1967.
Paul H., *Laser Theorie*, Bd. 1 u. 2, Berlin, 1969.
Röss D., *Laser — Lichtverstärker und Oszillatoren*, Frankfurt a. M., 1966.

По нелинейной оптике

- Ахманов С. А.*, *Хохлов Р. В.*, Проблемы нелинейной оптики, М., 1965.
Ахманов С. А., *Хохлов Р. В.*, Параметрические усилители и генераторы света, УФН, **88**, 439 (1966).
Ахманов С. А., *Сухоруков А. П.*, *Хохлов Р. В.*, Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде, УФН, **93**, 19 (1967).
Bloembergen N., *Nonlinear Optics*, New York — Amsterdam, 1965 (См. перевод: Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд-во «Мир», 1966.)
Bloembergen N., The stimulated Raman-Effect, *Am. Journ. Phys.*, **35**, 989 (1967).
Фабелинский И. Л., Молекулярное рассеяние света, М., 1965.

- Старунов В. С.*, *Фабелинский И. Л.*, Вынужденное рассеяние Манделштама — Бриллюэна и вынужденное энтропийное (температурное) рассеяние света, УФН, **98**, 441 (1969).
Minck R. W., *Terhune R. W.*, *Wang C. C.*, *Nonlinear Optics*, Proc. IEEE, **54**, 1357 (1966).
Pershan P. S., *Nonlinear Optics*, в книге E. Wolf, *Progress in Optics*, Amsterdam, 1966.
Цытович В. Н., Нелинейные эффекты в плазме, М., 1967.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Franken P. A.*, *Hill A. E.*, *Peters C. W.*, *Weinreich G.*, *Phys. Rev. Lett.*, **7**, 118 (1961).
- Caspers W. J.*, *Phys. Rev.*, **133A**, 1249 (1964).
- Margenau H.*, *Murphy G. M.*, *Die Mathematik für Physik und Chemie*, Bd. 2, Leipzig, 1966.
- Minck R. W.*, *Terhune R. W.*, *Wang C. C.*, *Proc. IEEE*, **54**, 1357 (1966).
- Born M.*, *Optik*, 2. Aufl., Berlin — Heidelberg — New York, 1965, § 73, 74.
- Woodbury E. J.*, *Ng W. K.*, *Proc. IRE*, **50**, 2347 (1962).
- Garmire E.*, *Pandarese E.*, *Townes C. H.*, *Phys. Rev. Lett.*, **11**, 160 (1963).
- Brandmüller J.*, *Moser H.*, *Einführung in die Ramanspektroskopie*, Darmstadt, 1962. (См. перевод: Дж. Брандмюллер, Г. Мозер, Введение в спектроскопию комбинационного рассеяния света, изд-во «Мир», 1964.)
- Lösche A.*, *Kerninduktion*, Berlin, 1957.
- Maker P. D.*, *Terhune R. W.*, *Nisenhoff M.*, *Savage C. M.*, *Phys. Rev. Lett.*, **8**, 21 (1962).
- Armstrong J. A.*, *Bloembergen N.*, *Ducuing J.*, *Pershan P. S.*, *Phys. Rev.*, **127**, 1918 (1962).
- Giordmaine J. A.*, *Miller R. C.*, *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 973 (1965).
- Maker P. D.*, *Terhune R. W.*, *Savage C. M.*, *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 507 (1964).
- Kelley P. L.*, *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 1005 (1965).
- Луговой В. Н.*, *Прохоров А. М.*, УФН, **100**, 517 (1970).
- Chiao R.*, *Stoicheff B. P.*, *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 290 (1964).
- Stoicheff B. P.*, *Phys. Rev. Lett.*, **7**, 186 (1963).
- Chiao R. Y.*, *Townes C. N.*, *Stoicheff B. P.*, *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 592 (1964).
- Hagenlocker E. E. et al.*, *Phys. Rev.*, **154**, 226 (1967).
- Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.*, Электродинамика сплошных сред, М., 1959.
- Ахманов С. А. и др.*, *Journ. Quant. Electr.*, **4**, 598 (1968).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Армстронг (Armstrong) 175**
 Ахманов С. А. 178
- Басов Н. Г. 26**
 Беннетт (Bennett) 26
 Блох (Bloch) 150
- Вудберн (Woodbury) 130, 201**
- Гармайр (Garmire) 131**
- Джаван (Javan) 26**
 Друде (Drude) 109
- Кайзер (Kaiser) 221**
- Лоренц (Lorentz) 109**
- Майер (Maier) 221**
 Мейкер (Maker) 170
 Мейман (Maiman) 26
- Нг (Ng) 130, 201**
- Пандарезе (Pandarese) 131**
 Парселл (Purcell) 150
 Поккельс (Pockels) 164
 Поль (Pohl) 221
 Прохоров А. М. 26
- Раман (Raman) 130**
- Стойчев Б. П. 142, 206, 216**
- Таунс (Townes) 26, 131, 142, 216**
 Томсон (Thomson) 109
- Фойгт (Voigt) 70**
 Франкен (Franken) 27
- Хагенлоккер (Hagenlocker) 222**
 Хохлов Р. В. 178
- Чао (Chiao) 142, 216**
- Эрриотт (Herriott) 26**

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Антистоксова линия 135, 203**
 Атомные электроны 109
- Блоха уравнения 103, 150**
 Борна — Оппенгеймера приближение 132
 Бриллюэна рассеяние 72, 85, 185
 — — вынужденное 28, 143, 215
- Винера — Хинчина теорема 53**
 Волновые уравнения, применение преобразований Фурье 93
 — — электродинамики 90
 Волновых чисел разность 167
 Волны акустические 142
 Восприимчивости для получения второй гармоники 71
 — дисперсионные 39, 52
 — нелинейные 39, 52, 64, 110
 — свойства пространственной симметрии 64
 — трансформационные свойства 64
 Времени обращение 76
 Время установления молекулы 127
 Вспомогательная волна 182
- Гармоника вторая 28, 69, 166**
 — третья 28, 62, 171
 Гармоники высшие 85, 119
 — частоты молекулярного колебания 203
 Генерации уравнения 101, 166
- Давления волна (при рассеянии Бриллюэна) 144**
 Двойное лучепреломление 166, 172
 — — зависящее от напряженности поля 166
 Дебая время релаксации 187
 δ -импульсы 53
 Дисперсии соотношения 44, 51
 Диэлектрик 32, 89
 — неактивированный 89
 Диэлектрическая постоянная, зависящая от напряженности поля 126
- Излучения конус 214**
 Импульсный отклик 45
 Инверсии центр 67
 Источники света настраиваемые 182
- Керра константа 126, 127**
 — эффект оптический 26, 119, 192
 Клейнмана соотношения 80
 Когерентные свойства рассеянного излучения 203
 Комбинационного рассеяния эффект вынужденный 28, 62, 72, 85, 130, 131, 200
 — — — обращенный 206
 — — — поперечное сечение 136
 Комбинационный лазер 28
- Лоренца сила 106**

- Манли — Роз соотношения 209
 Материальные уравнения нелинейные 31
 Модель физически реализуемая 42
 Молекулярные колебания 130
 — электроны 108
 Монохроматор нелинейный 178
 Мощности порог (для самофокусировки) 197
 — соотношения преобразования 209
 — усиление 88, 167

 Напряженность действующего электрического поля 105
 Нестационарность 200, 221, 230
 Нормальные моды 92

 Осциллятор ангармонический 34, 111
 — гармонический 36

 Память 45
 Парамагнетизм 26
 Параметрические колебания 28
 Параметрическое усиление 28
 Плачка теория поляризуемости 131
 Покельса эффект 26, 164
 Поляризация 29, 31, 33
 — блок-схема 116
 — зависимость от напряженности поля в плотных средах 104, 124
 — общая зависимость от напряженности поля 40, 42, 43, 53
 — вероятное значение 41
 Пороговое условие (для генерации) 182
 Пойнтинга вектор 75, 84, 85, 219
 — закон 83
 Потери на трение 47, 209
 Причинно-следственная связь 42, 51, 65
 — — — временной аспект 44, 51, 65, 224
 Прозрачность самоиндуцированная 28

 Пространственно-частотные преобразования 78
 Процессы без потерь 75, 78

 Разностная частота 28, 60, 177
 Рассеянное излучение (тепловое) 220
 Релаксационные механизмы 114, 154
 Релаксация поперечная 154
 — продольная 154
 Релеевское рассеяние вынужденное 28
 — — молекулы 134

 Самофокусировка 28, 62, 72, 119, 194
 Сверхзвуковые волны 216
 Света смещение 60
 Свойства распространения, зависимость от напряженности поля 119, 185
 Сегнетоэлектрики 26
 Симметрии соотношения (для функций системы) 46
 Спектр частот дискретный 59, 95
 Спектрограф нелинейный 178
 Среда без потерь 74
 Стационарность 95
 Стоксова линия 135, 144, 201
 Суммарная частота 28, 60, 177

 Токи проводимости 29
 Томсона формула для релеевского рассеяния 108
 Торможение излучением 35
 Точечной симметрии преобразование 66
 Тейлора ряд обобщенный 42

 Уравнение движения точечного заряда 35

 Фаз согласование 170, 177, 179, 183
 — — направление 172
 Фазовая когерентная длина 169, 170, 214
 Ферромагнетика 26

- Фокусирующая длина 196
 Фотонное эхо 28
 Функции системы 43
 Фурье-преобразование функций восприимчивости 48

 Эйнштейна коэффициенты переходов 110
 Электродинамика макроскопическая 32, 34, 81
 — нелинейная 25
 Электронно-ядерного движения эффекты 29, 131, 186

 Электронные эффекты нелинейные 25, 108, 162
 Электроны в плазме 105
 Электрооптический эффект левый 164
 Электрострикция 186, 191
 Энергии диссипация 47

 Ядерная индукция 150
 — намагниченность 150
 Ядерный резонанс 150
 Ядерных спинов система 150

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчика	5
Предисловие авторов к русскому изданию	7
Предисловие авторов к немецкому изданию	8
Обозначения и символы	11
Введение	25
Глава 1. Общие основы	31
§ 1.1. Структура фундаментальных материальных уравнений	31
1.11. Вывод фундаментальных материальных уравнений	32
1.111. Модель ангармонического осциллятора (34).	
1.112. Общее основное уравнение (39).	
1.12. Общие свойства фундаментального материального уравнения	42
1.13. Частотное представление	47
§ 1.2. Линейные и нелинейные восприимчивости	52
1.21. Определение восприимчивостей из основных уравнений.	53
1.211. Импульсный случай — временное представление (54).	
1.212. Стационарный случай — частотное представление (55).	
1.213. Связь между поляризацией и напряженностью поля при дискретном спектре частот (59).	
1.22. Пространственные свойства симметрии и трансформационные свойства восприимчивостей	64
1.23. Свойства симметрии в средах без потерь	74
1.231. Обращение времени (76).	
1.232. Пространственно-частотные преобразования (78).	
§ 1.3. Электромагнитные процессы в нелинейной среде	81
1.31. Локальное описание	83
1.32. Глобальное описание	90
1.321. Общее нестационарное поведение (91).	
1.322. Стационарное поведение. Дискретный спектр частот (95).	
Глава 2. Связь между поляризацией и напряженностью поля для важных групп физических явлений	103
§ 2.1. Взаимодействие излучения с несвязанными носителями заряда. Модель электронов в плазме	105

ОГЛАВЛЕНИЕ

243

§ 2.2. Взаимодействие излучения с электронами в атомах и молекулах. Модель для нелинейных электронных эффектов	108
2.21. Модель простого ангармонического осциллятора	111
2.22. Следствия из модельных представлений	113
§ 2.3. Взаимодействие излучения с анизотропными молекулами при температурном равновесии. Модель для описания в НЛО геометрических свойств распространения света	119
2.31. Расчет зависимости между поляризацией и напряженностью поля	121
2.32. Применение полученных соотношений	126
§ 2.4. Взаимодействие излучения с молекулярными колебаниями. Модель для вынужденного комбинационного рассеяния	130
2.41. Модель для описания вынужденного комбинационного рассеяния	131
2.42. Следствия из модельных представлений	138
§ 2.5. Взаимодействие излучения с акустическими волнами. Модель для вынужденного рассеяния Бриллюэна	142
2.51. Модель для описания вынужденного рассеяния Бриллюэна	143
2.52. Следствия из модельных представлений	147
§ 2.6. Взаимодействие излучения с системой ядерных спинов в статическом магнитном поле. Модель для магнитного ядерного резонанса	150
2.61. Модель для определения индуцированной намагниченности ядерной системы	151
2.62. Следствия из модельных представлений	156
Глава 3. Электрооптические эффекты	162
§ 3.1. Линейный электрооптический эффект (эффект Поккельса)	164
§ 3.2. Получение второй гармоники	166
3.21. Вывод и решение уравнений генерации	166
3.22. Методы согласования фаз	170
§ 3.3. Взаимодействие трех световых волн	176
3.31. Получение суммарных и разностных частот	177
3.32. Параметрическое усиление и генерация	179
Глава 4. Эффекты движения электронов и идер	185
§ 4.1. Зависимость геометрических свойств распространения электромагнитных волн в изотропной среде от напряженности поля	186
4.11. Исследование взаимозависимости между поляризацией и напряженностью поля	187
4.12. Распространение пространственно неограниченных плоских волн. Оптический эффект Керра	192
4.13. Распространение световых пучков. Самофокусировка	194

§ 4.2. Вынужденное комбинационное рассеяние	200
4.21. Основные эмпирические факты	201
4.211. Соотношения между интенсивностью рассеяния и интенсивностью возбуждения (201). 4.212. Когерентные свойства рассеянного излучения (203). 4.213. Частоты и относительные интенсивности линий (203). 4.214. Зависи- мость рассеянного излучения от направления (204). 4.215. Обратный эффект комбинационного рассеяния (206).	
4.22. Интерпретация экспериментов	206
4.221. Усиление стоксовой волны (206). 4.222. Усиление антискстовковой волны (212).	
§ 4.3. Вынужденное рассеяние Бриллюэна	215
Приложения	223
Приложение 1. Преобразование важного для нелинейной оп- тики дифференциального уравнения	223
Приложение 2. Некоторые свойства δ -функции	225
Приложение 3. Вывод дисперсионных соотношений для линей- ной восприимчивости	226
Приложение 4. Вычисление отношения $\chi^{(n)}/\chi^{(n)}$	228
Приложение 5. Вычисление $\langle a_{(1)} \dots a_{(1)} \dots \rangle_0$	229
Приложение 6. Нестационарные свойства	230
Литература	236
Именной указатель	238
Предметный указатель	239

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформ-
лении, качестве перевода и другие просим присылать
по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский
пер., 2, изд-во «Мир».