

5.5
Ш-95
44063

М. ШУБЕРТ
В. ВИЛЬГЕЛЬМИ
ВВЕДЕНИЕ
В НЕЛИНЕЙНУЮ
ОПТИКУ



Mathematisch-Naturwissenschaftliche
Bibliothek

EINFÜHRUNG
IN DIE
NICHTLINEARE OPTIK

Teil II
Quantenphysikalische Beschreibung

Von
Dr. MAX SCHUBERT Dr. BERND WILHELMI
o. Professor o. Professor

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Leipzig
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
1978

М. ШУБЕРТ, Б. ВИЛЬГЕЛЬМИ

ВВЕДЕНИЕ
В НЕЛИНЕЙНУЮ
ОПТИКУ

ЧАСТЬ

II

КВАНТОВОФИЗИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Перевод с немецкого
проф. М. А. КОВНЕРА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1979

Предлагаемая вниманию читателей вторая часть книги «Введение в нелинейную оптику» является продолжением первой части («Классическое рассмотрение»), вышедшей в издательстве «Мир» в 1973 г. Книга содержит квантовофизическое описание нелинейных оптических явлений и охватывает широкий круг проблем квантовой механики, квантовой электродинамики, квантовой электроники, статистической физики, физики твердого тела, линейной и нелинейной оптики.

Книга адресована научным работникам, аспирантам, студентам и инженерам-исследователям, занимающимся проблемами нелинейной оптики.

Редакция литературы по физике

© BSB W. G. Teubner Verlagsgesellschaft,
Leipzig, 1978

Ш $\frac{20405-075}{041(01)-79}$ 75-79 © Перевод на русский язык, «Мир», 1979

М. Шуберт, Б. Вильгельми

ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ОПТИКУ

Часть II

Квантовофизическое рассмотрение

Научный редактор В. Самсонова

Мл. научные редакторы В. Цлаф, Л. Малейнова

Художник Л. Муратова. Художественный редактор Л. Везрученков
Технический редактор Е. Вурмистрова. Корректор А. Рыбальченко

ИБ № 241

Сдано в набор 04.01.79. Подписано к печати 23.08.79. Формат 84 × 108¹/₃₂.
Вумага типографская № 2. Гарнитура латинская. Печать высокая. Объем 8
бум. л. Усл. печ. л. 26,88. Уч.-изд. л. 25,29. Изд. № 2/8770. Тираж 6800 экз.
Зак. 58. Цена 2 р. 70 к.

Издательство «Мир», 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени
Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Предлагаемая советскому читателю вторая часть книги М. Шуберта и Б. Вильгельми «Введение в нелинейную оптику» служит прямым продолжением первой части, вышедшей в издательстве «Мир» в 1973 г. Если ч. I содержала классическое описание нелинейных оптических явлений, то ч. II посвящена их квантовофизическому рассмотрению.

Во второй части сохранена выработанная авторами система обозначений векторов и тензоров, частотных и временных представлений, которая была использована в первой части. Однако здесь авторы применили новую символику, специфическую для квантового описания оптических процессов, причем она последовательно соблюдается во всей книге. Эта система символов и обозначений целиком сохранена и в русском издании. Кроме того, при переводе книги мы стремились придерживаться терминологии, применяемой авторами в немецком издании.

Как и ч. I, настоящая книга основана на лекциях, читаемых авторами в Университете им. Фридриха Шиллера в Йене (ГДР). В ней нашли отражение также оригинальные труды авторов. Книга охватывает важнейшие работы в области нелинейной оптики, выполненные примерно за последние 10 лет. Они представлены в списке цитируемой литературы, насчитывающей 203 названия. Авторы широко освещают работы ученых ГДР, СССР и ряда других стран.

Наиболее ценной особенностью книги является то, что она представляет собой редко встречающееся сочетание написанной на высоком уровне научной монографии и учебного пособия. Как и многие другие солидные книги, она носит скромное название «Введение». Ч. II охватывает широкий круг проблем квантовой механики, квантовой электродинамики, квантовой электроники, статистической физики, физики твердого тела, линейной и нелинейной оптики. В книге содержатся необходимые для понимания физической сущности рассматриваемых процессов сведения по теории вероятностей, операционному исчислению и некоторым другим разделам математики.

На основе изложенного аппарата теории взаимодействия интенсивных световых потоков с атомными и молекулярными системами авторы дают последовательное качественное и количественное описание разнообразных линейных и нелинейных стационарных и нестационарных оптических явлений.

Книга обращена к широкой читательской аудитории. Инженеры-исследователи или конструкторы найдут в ней принципиальное теоретическое объяснение изучаемых процессов и явлений, а также необходимые параметры и численные характеристики приборов, применяемых в квантовой электронике и в оптике. Преподаватели соответствующих дисциплин в вузах смогут почерпнуть здесь богатый материал для лекций и практических занятий. Книга вполне доступна аспирантам и студентам старших курсов, стремящимся к углубленному изучению проблем современной нелинейной оптики и квантовой электроники. Наконец, книга даст также импульсы для размышлений над нерешенными проблемами, для постановки новых теоретических и экспериментальных исследований в названных областях.

М. А. Ковнер

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Мы приветствуем издание второй части нашей книги «Введение в нелинейную оптику» на русском языке и надеемся, что предлагаемое квантовофизическое описание будет полезным как обобщение и обоснование классического описания, данного в ч. I. Вместе с тем мы хотели бы отметить, что настоящая часть может служить также и самостоятельной книгой по нелинейной оптике и квантовой электронике.

Особенно хотелось бы обратить внимание на то, что в книге с достаточной полнотой представлены новейшие результаты в указанных областях.

В книге отражен большой вклад, внесенный в развитие квантовой электроники советскими учеными как в начальный период становления этой науки, так и во все последующие годы.

Книга обращена к студентам старших курсов, аспирантам, ученым и инженерам, работающим в научно-исследовательских институтах и в промышленности.

Мы весьма благодарны проф. М. А. Ковнеру, который, будучи опытным специалистом по обсуждаемым в книге проблемам, выполнил трудоемкую работу по ее творческому переводу.

Июнь 1978 г.

*М. Шуберт
•Б. Вильгельми*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Квантовая электроника достигла больших успехов в создании лазерных источников света с высокой напряженностью поля, хорошими когерентными свойствами, перестраиваемой частотой и регулируемым распределением излучения во времени. Созданы также регистрирующие устройства высокого временного и спектрального разрешения. С помощью этой новой совершенной аппаратуры в последние годы удалось провести многочисленные и качественно новые эксперименты по взаимодействию между электромагнитными полями и атомными системами. Одновременно продолжалось теоретическое изучение таких взаимодействий и была создана теория процессов, происходящих в сильных когерентных полях, причем в зависимости от характера конкретных процессов на передний план в большей или меньшей степени выдвигались квантовые свойства атомных систем или поля излучения. В некоторых случаях учитывались сразу квантовые свойства как атомных систем, так и поля излучения. Эти экспериментальные и теоретические исследования в нелинейной оптике позволили получить принципиально новую информацию о процессах взаимодействия между светом и атомными системами в различных состояниях, а также о физических и химических свойствах веществ и о параметрах процессов, влияющих на ход нелинейных оптических явлений. Открылись новые горизонты в спектроскопии, фотофизике, фотохимии и квантовой электронике, а также в области их технических применений.

Предлагаемая книга должна служить учебником, содержащим описание важнейших методов исследования взаимодействия сильных электромагнитных полей, обладающих заданной когерентностью и временной зависимостью, с атомными системами. Будут изложены основы нелинейной оптики и квантовой электроники, применения которых иллюстрируются на конкретных примерах.

Книга открывает читателю пути к изучению более сложной специальной литературы (на которую в тексте приводятся ссылки) и сделает доступным понимание дальнейших открытий в будущем.

В настоящей, второй части авторы исходят из квантовофизического рассмотрения. В принципе на этой основе могут быть правильно описаны все явления взаимодействия излучения с веществом. С другой стороны, можно оценить, в каких случаях полная квантовофизическая трактовка может быть заменена полуклассической трактовкой (т. е. квантотеоретическим описанием атомных систем и классическим описанием полей) или даже полностью классическим приближением. В этом смысле предпринятое в первой части настоящей книги [16] классическое описание приобретает более глубокое обоснование, причем определяются границы его применимости. Кроме того, появляется возможность заменить введенные в первой части феноменологически или на основе классических моделей материальные величины рассчитанными при помощи квантовой механики.

Предлагаемая вторая часть начинается двумя вводными главами.

В гл. В1 описываются важные приборы и измерительные методы, применяемые в нелинейной оптике и квантовой электронике (источники света, спектральные измерения, разрешенные во времени измерения мощности). В гл. В2 содержатся основы квантовофизического описания (основополагающие понятия и закономерности, формализм вторичного квантования, трактовка взаимодействий и приближенные методы). В дальнейшем изложении авторы часто обращаются к основным сведениям, содержащимся в этих двух вводных главах. Читатели, уже знакомые с этими основами, могут вводные главы пропустить.

Затем следует гл. 1, включающая свойства изолированного от атомных систем электромагнитного поля. Они рассматриваются как с классической, так и с квантовофизической точек зрения. При этом особое внимание уделяется когерентным состояниям (глауберовские состояния), представлению с помощью когерентных состояний, проблеме собственных значений напряженности электрического поля, а также корреляционным свойствам.

В гл. 2 приводятся физические и методические основы взаимодействия между излучением и атомными системами в квантовофизическом и полуклассическом представлениях. Исходя из основополагающих соотношений, авторы рассматривают типичные приближенные методы, которые в соответствии с заданными геометрическими величинами, энергетической структурой и с учетом роли диссипативной системы позволяют дать в ясной форме описание процессов и характеризующих их параметров.

В гл. 3 с помощью представленных в предыдущих главах физических и методических основных положений рассматриваются типичные процессы нелинейной оптики: одно- и многофотонное поглощение, процессы в лазерах, генерация гармоник, суммарных и разностных частот, параметрическое усиление, вынужденное рассеяние на оптических фотонах и поляритонах. Обычный круг проблем, связанных с кратковременными процессами и с влиянием свойств когерентности в нелинейной оптике, представлен по возможности с единой точки зрения.

В гл. 3 особое внимание уделяется численным значениям и оценкам по порядкам величин материальных констант и параметров, характеризующих процессы.

Книга заканчивается прогнозом применения принципиальных методов к новым процессам и к новому кругу проблем нелинейной оптики. При этом даются указания на специальную литературу и намечаются отчетливо проявляющиеся тенденции.

В целом данная книга должна возбудить у читателя стремление распространить изложенные основные принципы и иллюстрированные на примерах общие методы и приемы нелинейной оптики на другие процессы, стимулировать постановку новых проблем.

Книга дает знания, необходимые для этих целей.

Чтение книги и особенно ориентация в обозначениях должны значительно облегчиться благодаря помещению в начале книги указателю «Обозначения и символы». Как и в ч. I, всюду использовалась Международная система единиц (СИ); переводные множители для перехода к другим системам единиц указаны в приложении к ч. I.

Книга возникла в результате нашей преподавательской деятельности в университете им. Фридриха Шиллера в Йене. Она обращена ко всем заинтересованным научным работникам, инженерам-исследователям, преподавателям и практикам, а также к студентам старших курсов.

Мы весьма благодарны проф. Г. Веберу, доценту Г. Видерхольду и д-ру Г. Першке за ценные дискуссии. Мы благодарим издательство, наборщиков и типографию за любезность и хорошее исполнение. Мы заранее благодарим читателей нашей книги за критические замечания.

М. Шуберт
Б. Вильгельми

Йена, май 1976

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛЫ

Применяемые в настоящей части обозначения и символы подробно объяснены в тех разделах, в которых они встречаются. Для наглядности ниже приводится сводка всех обозначений и наиболее важных символов, используемых во всей книге.

ОБЩИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

X Тензоры

Тензор n -го ранга обозначается буквой, у которой справа внизу ставятся n жирных точек. Например, X обозначает вектор, а $X_{..}$ — тензор второго ранга. Встречаются комбинации следующего типа:

а) образование вектора из тензора и векторов. Например, выражение $Y = X \dots U \cdot V \cdot W$ следует понимать как запись в компонентах

$$Y_i = \sum_{j, k, l} X_{ijkl} U_j V_k W_l$$

(i, j, k, l означают индексы x, y, z);

- б) скалярное произведение двух векторов $X \cdot Y$;
- в) векторное произведение двух векторов $X \times Y$;
- г) дивергенция вектора $\nabla \cdot X$;
- д) ротор вектора $\nabla \times X$;
- е) градиент скаляра ∇X .

Обозначение тензоров n -го ранга при помощи точек позволяет применять для однотипных величин различных рангов, например восприимчивостей, один и тот же буквенный символ, благодаря чему формулы с величинами различных порядков становятся более наглядными. Как видно из приведенного выше примера, такое представление позволяет легко перейти к компонентной записи. Для наиболее простого представления нелинейных свойств по возможности применяются однокомпонентные модели (например, выделяется x -направление). В этих случаях, если не может возникнуть недоразумение, тензорные точки или индексы опускаются (например, выражение $Y_x = X_{xxxx} U_x V_x W_x$ заменяется на $Y = XUVW$).

$X^{(n)}$ Порядок

$X^{(n)}$ есть часть X , получающаяся в n -м порядке при итерационном процессе. $X^{(1)} = X^{(Л)}$ применяется также для обозначения линейной части, а $X^{(n)} = X^{(НЛ)}$ при $n > 1$ означает нелинейную часть.

$\text{ПФ}\{X(t)\} = \text{!}X(f)$. Преобразование Фурье

Операция преобразования Фурье обозначается ПФ. В частотном представлении результат преобразования Фурье над величиной $X(t)$, взятой во временном представлении, обозначается $\text{!}X(f)$. Таким образом, применяется один и тот же буквенный символ, но со штрихом слева вверху. (При этом оказывается возможным использовать для одной и той же величины во временном и частотном представлениях один и тот же символ.)

$\{KK\}$ Комплексно сопряженная часть

Символ $\{KK\}$ означает комплексно сопряженное выражение от стоящей перед

ним величины (или суммы величин). Например, $X + \{KK\} = X + X^*$.

$\{MF\}$ Часть с «отрицательными частотами»

Если сумма какой-либо величины и ее комплексно сопряженного выражения подвергается преобразованию Фурье, то ее фурье-образ обозначается $\{MF\}$. Например, $\text{ПФ}\{X(t) + \{KK\}\} = \text{!}X(f) + \{MF\}$.

$\hat{X}(f)$ Амплитуды колебаний

Если какая-либо величина $X(t)$ колеблется с частотой f , то в соответствии с формулой

$$X(t) = \frac{1}{2} \hat{X}(f) e^{i2\pi ft} + \{KK\}$$

она представляется своей амплитудой колебаний $\hat{X}(f)$ (в общем случае комплексной). Амплитуды колебаний всюду в книге обозначаются диакритическим знаком ($\hat{\quad}$) над соответствующим буквенным символом.

$\bar{X}(f; t, r)$ Волновые амплитуды

Для волновых процессов зависящая от координат и времени величина $X(t, r)$ может быть представлена в виде

$$X(t, r) = \frac{1}{2} \bar{X}(f; t, r) e^{i[2\pi ft - k \cdot r]} + \{KK\},$$

где q и $\bar{X}(f; t, r)$ обозначают соответственно волновой вектор и волновую амплитуду. Волновые амплитуды везде характеризуются чертой над соответствующим буквенным символом.

\mathbf{X} Оператор

Оператор переменной X в гильбертовом пространстве обозначается жирной буквой \mathbf{X} .

$|\psi\rangle, \langle\psi|$ Векторы состояний

$|\psi\rangle$ и $\langle\psi|$ соответственно обозначают кет- и бра-векторы в гильбертовом пространстве.

$\{HA\}$ Эрмитово сопряженная часть
 $\{HA\}$ применяется для обозначения эрмитово сопряженного оператора к некоторому ранее заданному оператору (или сумме операторов). Например, для оператора $X: X + \{HA\} = X + X^+$.

$\text{Sp}\{X\}$ Образование следа:

$\text{Sp}\{X\}$ есть след оператора X .

X, X_H, X_D Квантовомеханические представления:
 X, X_H, X_D — оператор в представлениях Шредингера (без индекса), Гейзенберга (индекс H) и в представлении взаимодействия Дирака (индекс D).

$[X, Y]$

$[X, Y]_+$ Коммутатор и антикоммутатор

$$[X, Y] = XY - YX; [X, Y]_+ = XY + YX.$$

$\{X, Y\}$ Скобки Пуассона
 Скобки Пуассона для классических переменных X, Y

$\langle X \rangle$ Математическое ожидание оператора X
 $\langle X \rangle$ означает $\langle \psi | X | \psi \rangle$ или $\text{Sp}\{\rho X\}$

\bar{X}^t Усредненное по времени значение величины X

\bar{X}^0 Усредненное по ориентациям значение величины X

\tilde{X} Усредненное по ансамблю значение величины X

X^e Равновесное значение величины X

\approx Приблизительно равно

\simeq Того же порядка величины

\equiv Определение

СОКРАЩЕНИЯ

Re, Im Вещественная и мнимая части: $X = \text{Re}\{X\} + i\text{Im}\{X\}$

НЛО Нелинейная оптика

$$\int d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi, \text{ где } \xi \text{ — вещественная величина;}$$

$$\int d^2\alpha = \int d(\text{Re } \alpha) \int d(\text{Im } \alpha), \text{ где } \alpha \text{ — комплексная величина;}$$

$$\delta^{(2)}(\alpha) = \delta(\text{Re } \alpha) \delta(\text{Im } \alpha), \text{ где } \delta(\xi) \equiv \delta\text{-функция от } \xi.$$

СИМВОЛИКА

Латинские основные символы

a, a, a^+ — комплексные нормальные амплитуды (бозонный оператор, оператор уничтожения и рождения)

A, A — вектор-потенциал
 b — оператор уничтожения фермионов

B, B — магнитная индукция
 c — скорость света в вакууме

d, d — (атомарный) электрический дипольный момент

D, D — электрическое смещение
 e — элементарный электрический заряд ($e > 0$)

E, E — напряженность электрического поля

\mathcal{E} — энергия

e — единичный вектор в направлении поляризации

f — частота

h, \hbar — квант действия, $\hbar = h/2\pi$

$H, H; \mathcal{H}, \mathcal{H}$ — функция Гамильтона (оператор), плотность гамильтониана (оператор)

H, H — напряженность магнитного поля; одномерная $H_{x, y, z}$

i — мнимая единица

I — единичный оператор

J — плотность потока фотонов

k, k — волновой вектор $|k| = 2\pi/\lambda$

- k — постоянная Больцмана
 k_a — коэффициент поглощения
 L — мощность (в частности, мощность излучения)
 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ — функция Лагранжа, плотность лагранжиана
 \mathbf{N} — оператор числа частиц
 $n, |n\rangle$ — собственное значение, собственное состояние оператора \mathbf{N}
 p, \mathbf{p}, p' — импульс, обобщенный импульс
 P, \mathbf{P} — поляризация
 $\mathcal{P}(\alpha), \mathcal{P}(\beta)$ — коэффициент в \mathcal{P} -представлении
 q, \mathbf{q}, q' — координата, обобщенная координата
 r — радиус-вектор
 \mathbf{S} — вектор Пойнтинга
 t — временная координата
 T — длительность; время релаксации
 \mathcal{T} — температура
 U — потенциальная энергия
 \mathbf{U} — унитарное преобразование
 V — объем
 x, \mathbf{x} — пространственная координата

Греческие основные символы

- α — поляризуемость
 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ — глауберовское состояние
 γ — плотность населенности
 γ_1 — плотность (чисел заполнения) инверсии
 ϵ, ϵ_0 — диэлектрическая постоянная
 κ — восприимчивость
 λ — длина волны
 $\mu^{(L)}, \mu_0$ — проницаемость
 ρ — оператор плотности
 τ — время (длительность), время релаксации
 χ — восприимчивость при дискретных частотах
 ω — круговая частота

VI. ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ

В настоящей главе описываются приборы и методы измерений, имеющие важное значение для экспериментальных исследований в области НЛО и ее применений; обсуждаются основные способы использования приборов и их типичные численные параметры. Таким образом будут получены оценки экспериментальных возможностей НЛО и порядков величин результатов измерений, связанных с описываемыми в следующих главах эффектами и процессами. Однако в данной книге не предусматривается систематическое и подробное описание применяемых в квантовой электронике методов и приборов. Эти вопросы освещены в литературе к VI.

§ VI.1. ИСТОЧНИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ НЛО

В первой части уже было показано, что НЛО смогла развиваться лишь после создания первых лазеров. В настоящее время существуют лазеры самых различных конструкций и с многочисленными и разнообразными активными веществами. Очень многие из них успешно используются для возбуждения нелинейных оптических эффектов. При этом следует различать эксперименты с непосредственным использованием лазерного света и с возбуждающим излучением, возникающим в результате предварительного процесса нелинейного оптического преобразования лазерного света. Лазеры для возбуждения эффектов НЛО отличаются высокой мощностью, свойствами когерентности и особенно высокой монохроматичностью и малой расходимостью светового луча.

В1.11. Спектральные свойства, временная когерентность

Спектральные свойства лазеров определяются взаимодействием активной среды, находящейся под влиянием механизма накачки, с оптическим резонатором.

Представление о возможных значениях лазерных частот получается уже на основании относительно простого описания усиления света в схеме Фабри—Перо. Правда, для понимания ширины линий в отдельной моде требуется явный учет квантовых процессов, происходящих при выходе фотонов из лазерного генератора, при спонтанной эмиссии и при накачке. Отсюда следует, что для оценки реально достижимых наименьших ширин линий необходимо учитывать влияние применяемой сервоэлектроники.

Изложенные ниже соображения об усилении света и о свойствах лазерного резонатора могут применяться не только для объяснения спектрального поведения лазерных сигналов, но и для выявления других свойств и процессов, таких, например, как характеристики излучения (см. разд. В1.12) и усиление.

В1.11.1. Усиление света в резонансном усилителе

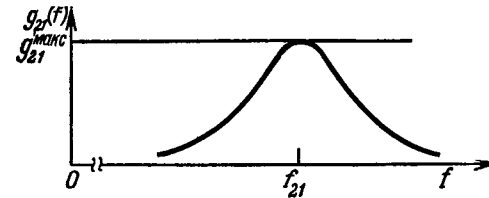
Согласно основным представлениям теории излучения, эффективный коэффициент усиления (отнесенный к квадрату амплитуды) монохроматического сигнала частоты f для определенного атомного перехода определяется формулой

$$\eta_{21}(f) = (\gamma_2 - \gamma_1 g_2/g_1) B_{21} \frac{\hbar \omega_{21}}{c} g_{21}(f), \quad (\text{В1.11-1})$$

где γ_2 , γ_1 — числа заполнения верхнего и нижнего лазерных уровней; g_2 , g_1 — статистические веса; B_{21} — коэффициент Эйнштейна B ; $g_{21}(f)$ — функция формы линии. Вид функции $g_{21}(f)$ качественно представлен на фиг. 1, она имеет максимум на частоте атомного перехода f_{21} (ее численные значения для различных лазеров указаны в п. В1.15). Функция $g_{21}(f)$ удовлетворяет условию нормировки $\int df g_{21}(f) = 1$, так что выполняется

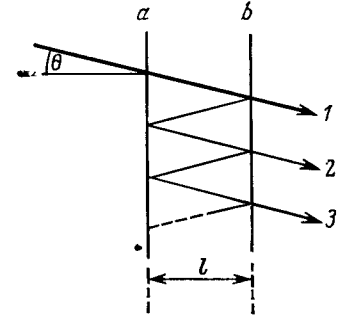
соотношение $g_{21}^{\text{макс}} = g_{21}(f_{21}) = \mathcal{F}/\Delta f$, причем \mathcal{F} является числом порядка единицы и зависит от характера формы линии (лоренцов, гауссов или какой-либо другой контур). Типичными значениями Δf являются:

- 2 · 10⁹ Гц (гелий-неоновый лазер, 0,633 мкм),
- 2 · 10¹¹ Гц (рубиновый лазер, 300 К, 0,694 мкм),
- 3 · 10¹² Гц (лазер на неодимовом стекле, 1,06 мкм),
- 10¹³ — 10¹⁴ Гц (лазеры на красителях). (В1.11-2)



Фиг. 1. Функция формы линии $g_{21}(f)$ (схематически).

Величину Δf называют шириной линии флуоресценции, в зависимости от обстоятельств величина Δf в большей степени определяется естественной шириной линии или различными механизмами уширения спектральных линий. Относительная ширина линии $\Delta f/f_{21}$ мала по сравнению с единицей. При постоянном $\eta_{21}(f)$ на отрезке l' достигается усиление мощности $G(l', f) = \exp[\eta_{21}(f)l']$. Для получения усиления в собственном смысле этого слова плотность эффективной инверсии $\gamma_2 - \gamma_1 g_2/g_1$ должна быть положительной, ибо в противном случае возникнет поглощение.



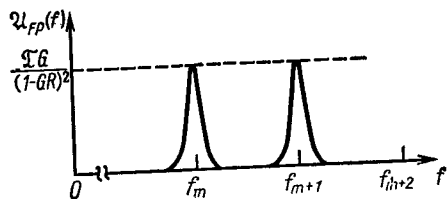
Фиг. 2. Схема устройства Фабри—Перо.

Рассмотрим теперь влияние активной среды на соотношение между входным и выходным сигналами в схеме Фабри—Перо (плоские параллельные зеркала) (фиг. 2). Пусть слева на зеркало a падает входное излучение под

углом θ с амплитудой E_0 . Вследствие многократных отражений на обоих зеркалах возникает большое число отдельных интерферирующих лучей; обозначим результирующую амплитуду прошедшего светового пучка через E_{Σ} . Для отношения квадратов амплитуд имеем

$$\mathfrak{A}_{FP} = \frac{|E_{\Sigma}|^2}{|E_0|^2} = \frac{\mathfrak{Z}G}{(1-GR)^2 + 4GR \sin^2 \Phi}, \quad (B1.11-3)$$

причем предполагается, что $GR < 1$; $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_a \cdot \mathfrak{Z}_b$, $R = (R_a R_b)^{1/2}$ — полная прозрачность и отражательная способность, зависящая от значений соответствующих параметров каждого зеркала. G — усиление при одном



Фиг. 3. Степень прозрачности $\mathfrak{A}_{FP}(f)$ устройства Фабри — Перо.

прохождении вперед и назад; $\Phi = (2\pi/\lambda)(l/\cos \theta)$; λ — длина волны падающего излучения. Функция \mathfrak{A}_{FP} представлена на фиг. 3. При $\Phi = m'\pi$ (m' — произвольное натуральное число) имеет место максимальное пропускание. Речь идет об области прозрачности с шириной

$$\Delta f_{FP} = \frac{c \cos \theta}{2l} \frac{1-GR}{\pi \sqrt{GR}} \quad (B1.11-4)$$

при частотах

$$f_{m'} = m' \frac{c \cos \theta}{2l}. \quad (B1.11-5)$$

Согласно общей теории спектральных приборов, величину

$$\hat{N} = \frac{f_{m'}}{\Delta f_{FP}} \frac{1}{m'} = \frac{\pi \sqrt{GR}}{1-GR} \quad (B1.11-5a)$$

следует рассматривать как эффективное число лучей, взаимодействующих при интерференции («резкость»). Применяемые параметры лазерных резонаторов следует вообще выбирать так, чтобы соблюдались условия

$$\Delta f_{FP} \ll f_{m'+1} - f_{m'} = \frac{c \cos \theta}{2l}, \quad m' \gg 1 \text{ и } \theta \ll 1.$$

Если между зеркалами нет материальной среды ($G = 1$), то \hat{N} задается выражением $\pi \sqrt{R}(1-R)^{-1}$. По мере приближения R к единице амплитуда лучей, распространяющихся в противоположных направлениях между зеркалами, медленно убывает с ростом числа отражений. Для специальных применений реализуются такие значения R , при которых \hat{N} принимают порядок 10^2 ; с этим связана высокая разрешающая способность $f_{m'}/\Delta f_{FP}$. Если между зеркалами находится среда с отрицательной эффективной инверсией, т. е. не осуществляется никакого механизма накачки или он действует слабо, то $G < 1$. Поглощение излучения в среде наряду с отражением также создает потери, так что при переходе от $G = 1$ к $G < 1$ происходит уменьшение значения \hat{N} и разрешающей способности. При воздействии на среду достаточно эффективного механизма накачки величина G становится больше единицы, тогда по отношению к случаю $G = 1$ достигается возрастание \hat{N} , $(\mathfrak{A}_{FP})_{\max}$ и разрешающей способности. При этом потери на отражение могут быть компенсированы усилением света.

Выражение для $(\mathfrak{A}_{FP})_{\max}$ расходится при $GR = 1$. В соответствии с описанием линейного усилителя с обратной связью эту расходимость можно интерпретировать как возможность возникновения колебаний на определенных частотах (частотах мод) при наличии самовозбуждения, т. е. для частоты $f_{m'}$ при $|E_0|^2 = 0$ получается некоторое конечное и отличное от нуля значение $|E_{\Sigma}|^2$ (в этом случае можно представить себе, будто входное зеркало a с отражательной способностью $R_a = 1$ является глухим). Самовозбуждение может осуществиться в результате спонтанно протекающих

процессов. Условие возбуждения колебаний можно записать в виде

$$(\gamma_2 - \gamma_1 g_2/g_1) \geq \frac{1}{B_{21} \hbar \omega_{21}} \frac{1}{\tau(R, l)} \frac{1}{g_{21}(f_{m'})}. \quad (\text{B1.11-6})$$

При возрастании инверсии вследствие увеличения мощности накачки сначала возникают колебания моды с наибольшим значением $g_{21}(f_{m'})$, т. е. моды, частота которой $f_{m'}$ наиболее близка к f_{21} . Чем больше

$$\tau = \frac{l}{c} \frac{R}{1-R}, \quad (\text{B1.11-7})$$

тем меньше инверсия, при которой возникает эта мода. При условии $1-R \ll 1$ величину τ можно интерпретировать как время жизни электромагнитной энергии в резонаторе. При достаточном превышении инверсии над ее пороговым значением, при соблюдении условия (B1.11-6) могут возникать дальнейшие моды. Таким образом, мы выработали представление о частотах возможных лазерных колебаний. Следует указать на возможность создания одномодового режима также в случае превышения порога; для этого при помощи введения диспергирующих и поглощающих сред должна быть проведена соответствующая селекция частот.

В1.112. О ширине линии отдельной моды

Мы воспользуемся моделью объемного резонатора в форме, показанной на фиг. 4, с бесконечной проводимостью стенок. Как известно, электромагнитное поле в такой полости может быть разложено на стоячие волны — так называемые моды объемного резонатора [ср. п. 1.121 или уравнение (B1.11-1)]. Зависящий от времени множитель \mathcal{E} напряженности электрического поля для одной моды с круговой частотой ω_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{E}(t) + \omega_0^2 \mathcal{E}(t) = 0, \quad (\text{B1.11-8})$$

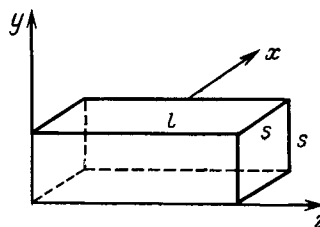
причем множитель \mathcal{E} должен быть нормирован таким образом, чтобы усредненный за период квадрат \mathcal{E} рав-

нялся электромагнитной энергии моды в полости. Возникающие волновые числа определяются равенством

$$k_x = (m_x \pi/s, m_y \pi/s, m_z \pi/s); \quad (\text{B1.11-9})$$

m_x, m_y, m_z являются целыми числами, из которых только одно должно равняться нулю.

Мы перейдем от идеального объемного резонатора к реальному лазерному резонатору, если допустим, что обе лобовые стенки (перпендикулярные оси z) или хотя бы одна из них сделаны частично прозрачными (при этом R становится меньше единицы). Таким образом, излучение теперь может выходить за пределы резонатора. Кроме того, будем считать четыре боковые стенки удаленными, так что объемный резонатор окажется в этом смысле оптически открытым.



Фиг. 4. Объемный резонатор.

Представление электромагнитного поля с помощью показанных на фиг. 4 полостных мод сохраняет смысл после перехода к реальному лазерному резонатору лишь при условии, что возникающие при таком переходе механизмы потерь вызывают не слишком сильное затухание мод. Для параксиальных мод ($|k_z| \gg |k_x|, |k_y|$) потери, обусловленные выходом энергии через лобовые стенки, можно характеризовать с помощью временной константы, заданной уравнением (B1.11-7). Чем меньше τ , тем больше убыль электромагнитной энергии в единицу времени. Достаточно слабое в вышеуказанном смысле затухание имеет место лишь когда $\tau \gg \omega_0^{-1}$.

Другой механизм потерь связан с отличными от нуля поперечными компонентами волнового вектора и с выходом энергии излучения через оптически открытые боковые окна. Эти потери незначительны в течение времени жизни τ , если только соблюдается неравенство

$$|m_x|, |m_y| < \frac{s^2}{4l\lambda} 2(1-R) = \mathcal{F} \cdot 2(1-R). \quad (\text{B1.11-10})$$

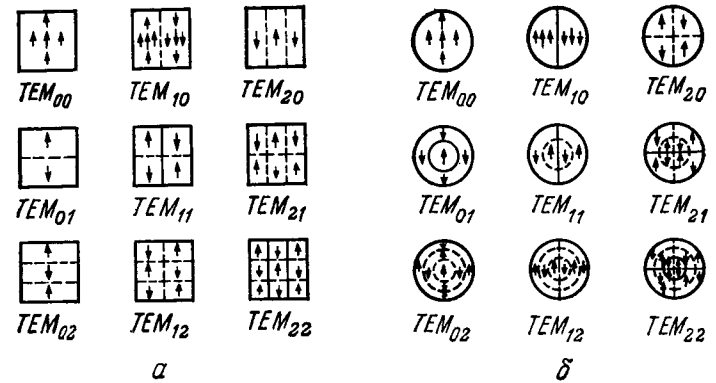
Следовательно, поперечные компоненты волнового вектора мод не должны превосходить некоторого определенного значения. \mathfrak{F} есть число Френеля, на величину которого оказывают совместное влияние геометрические размеры лазерного резонатора и длина волны проходящего света. Значения $l = 10$ см, $\lambda = 1$ мкм, $s = 5$ мм и $R = 0,95$ можно рассматривать как типичные для твердотельного лазера. Из них следуют оценки: $\mathfrak{F} \approx 6 \cdot 10^1$, $\tau \approx 6 \cdot 10^{-9}$ с, $|m_x|$, $|m_y| \leq 6$, $|m_z| = 2l/\lambda = 2 \cdot 10^5$. Поскольку $|m_x|$, $|m_y|$ относительно малы, то значения собственных частот $f(m_x, m_y, m_z) = (c/2\pi) |k_0|$ определяются главным образом величиной $|m_z|$. На основании уравнения (В1.11-9) можно написать

$$f(m_x, m_y, m_z) \approx \frac{c}{2} \frac{m_z}{l} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4s} \right)^2 (m_x^2 + m_y^2) \right],$$

так что в рассматриваемом примере обусловленные различными значениями $|m_x|$, $|m_y|$ относительные изменения собственных частот имеют порядок 10^{-6} .

При более точном рассмотрении лазерного резонатора следует принять во внимание волновую природу излучения. Это приводит к расширенной концепции стабильных мод в открытом резонаторе. Стабильные моды характеризуются тем, что после одного прямого и обратного прохождения луча в резонаторе распределение напряженности поля на поверхности зеркала воспроизводится с точностью до некоторого множителя. Последний не зависит от координат точки на зеркальной поверхности и характеризует дифракционные потери, обусловленные конечными размерами лобовых поверхностей. Особый интерес представляют положение и число узловых линий на лобовых поверхностях [11]. Параксиальные моды обозначаются в литературе как TEM_{mnq} -моды (трансверсальные электромагнитные моды). Индексы m и n характеризуют узловые линии на лобовых поверхностях (в частности, для резонаторов прямоугольной формы $m = |m_x| - 1$, $n = |m_y| - 1$; см. примеры на фиг. 5). Индекс q соответствует $|m_z|$. Согласно вышеизложенным представлениям для $f(m_x, m_y, m_z)$, частота моды определяется главным образом значением q ; для типичных схем лазерных резонаторов

изменения частот при заданном q и различных m и n малы по сравнению с изменениями частот при $\Delta q = 1$. При схемах типа представленной на фиг. 4 дифракционные потери зависят от числа Френеля \mathfrak{F} , уменьшаясь с возрастанием \mathfrak{F} . Кроме того, дифракционные потери зависят от модовых индексов m и n и принимают минимальные значения при $m, n = 0$; при малых увеличе-



Фиг. 5. Распределение электрических силовых линий в оптических резонаторах с плоскими и сферическими зеркалами.

Пунктиром показаны узловые линии напряженности электрического поля.
 а — прямоугольные картины мод (обусловлены прямоугольной апертурой);
 б — круговые картины мод (обусловлены круговой апертурой).

ниях m и n дифракционные потери заметно возрастают. Выбирая надлежащие конструкции резонатора, можно использовать фокусирующее действие сферического зеркала для достижения дифракционных потерь меньших, чем в случае плоских зеркал.

Мы назвали два источника потерь: отличие коэффициента отражения на лобовых поверхностях от единицы и конечные размеры этих поверхностей. При заполнении полости лазерного резонатора какой-либо материальной средой возникают дополнительные потери, связанные с поглощением. Все механизмы потерь вместе взятые служат причиной убывания энергии излучения в резонаторе; пусть относительное уменьшение средней энергии излучения в единицу времени характеризуется

постоянной ν' . При учете потерь следует перейти от уравнения (В1.11-8) идеального резонатора к следующему соотношению:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{E} + \nu' \frac{d}{dt} \mathcal{E} + \omega_0^2 \mathcal{E} = \mathcal{G}''(t). \quad (\text{В1.11-11})$$

Член, содержащий ν' , соответствует *усредненному* по времени затуханию амплитуды напряженности электрического поля. Для того чтобы уравнение (В1.11-11) все-таки можно было интерпретировать с помощью основной модели мод в закрытом резонаторе, должно выполняться условие $\nu' \ll \omega_0$. Оно в самом деле выполняется в реальных схемах, как это видно, из следующих типичных значений: $\nu' \approx 10^7 \text{ с}^{-1}$ (СО₂-лазер), 10^8 с^{-1} (He — Ne-лазер), 10^9 с^{-1} (Nd-лазер). Поскольку в действительности изменение энергии излучения в резонаторе при изменении числа фотонов носит *квантовый* характер, следует ввести в рассмотрение быстро меняющуюся во времени флуктуационную силу $\mathcal{G}''(t)$ типа силы Ланжевена, которая ответственна за этот эффект.

Возбужденная в результате накачки активная среда вызывает возрастание энергии излучения в резонаторе. Ее относительный прирост в единицу времени зависит от напряженности поля, так как с возрастанием энергии излучения уменьшается эффективная инверсия. Учет влияния активной среды требует дальнейшего изменения полученных раньше соотношений для лазерного резонатора. Таким образом, окончательно имеем (полный вывод будет дан в п. 3.123)

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{E} + (\nu' - \beta + \zeta \mathcal{E}^2) \frac{d}{dt} \mathcal{E} + \omega_0^2 \mathcal{E} = \mathcal{G}(t), \quad (\text{В1.11-12})$$

где β и ζ — положительные постоянные, они зависят от свойств атомной системы (матричный элемент дипольного момента, частота перехода, продольное и поперечное время релаксации атомного перехода или ширина линии флуоресценции), а также от внешних условий (эффективная инверсия, объем). Величина $\mathcal{G}(t)$ является флуктуационной силой типа силы Ланжевена, она представляет не только включенные в $\mathcal{G}''(t)$ квантовые эффекты, но также эффекты, обусловленные спон-

танной эмиссией и процессом накачки (флуктуации, связанные с процессом накачки, конечно, по порядку величины меньше флуктуаций, обусловленных другими механизмами).

При достаточном превышении порога, определяемого условием (В1.11-6), решение уравнения (В1.11-12) приводит к следующей формуле для полной энергии излучения, выделенной из резонатора в единицу времени:

$$L = \frac{2(\nu')^2}{\zeta} \left(\frac{\beta}{\nu'} - 1 \right), \quad (\text{В1.11-13})$$

а для ширины линии имеем

$$\Delta f_{\mathcal{E}} = \frac{h\nu_0}{L} (\nu')^2 \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1 g_2/g_1} + n_{\text{тепл}} \right). \quad (\text{В1.11-14})$$

Для γ_2 и $\gamma_2 - \gamma_1 g_2/g_1$ следует подставить их пороговые значения; $n_{\text{тепл}}$ есть среднее число фотонов при тепловом равновесии для моды с частотой ω_0 . Метод решения и границы применимости результата будут объяснены в п. 3.124. В частности, при этом будет рассмотрена область минимальных ширин линий. При надлежащем выборе внешних условий (геометрические размеры, ν' , мощность накачки) можно достичь для лазера низкого давления на СО₂ и для He — Ne-лазера уменьшения относительных ширин линий вплоть до значений порядка 10^{-17} . Эту величину следует считать теоретически минимальной. В последние годы были достигнуты значительные успехи в приближении экспериментальных ширин к теоретическому значению: минимальные *измеренные* значения в настоящее время составляют около 10^{-14} для коротких времен измерения ($t \leq 1 \text{ с}$) и $\approx 10^{-13}$ для более длинных времен ($t \geq 10 \text{ с}$).

Экспериментальная проблема достижения малых ширин линий заключается в том, чтобы прежде всего создать возможно более узкие резонансные линии (ср. п. 3.125), а затем с помощью высокоэффективной сервоэлектроники стабилизировать длину резонатора — параметр, определяющий его частоту. Для создания узких резонансных линий следует стремиться по возможности исключить [(В1.11-1)] влияние движения частиц и других механизмов уширения линий в активной среде или

во внесенной дополнительно в резонатор пассивной среде (ср. табл. 3). Длина претерпевает механические и термические колебания, и поэтому ее необходимо стабилизировать. К стабилизации длины предъявляются очень высокие требования; согласно уравнению (В1.11-5), требуемая относительная стабильность длины должна быть равна относительной стабильности частоты.

У лазеров высокой мощности (например, рубинового лазера с мощностью порядка мегаватт) достигаются только относительные ширины полос порядка $\geq 10^{-6}$. В импульсном режиме ширины полос определяются длительностью импульса. Например, для лазерного импульса гауссовой формы с временной полушириной T и в пренебрежении фазовыми флуктуациями получается ширина

$$\Delta f_{\text{с}} = \frac{4 \ln 2}{2\pi} \frac{1}{T}. \quad (\text{В1.11-15})$$

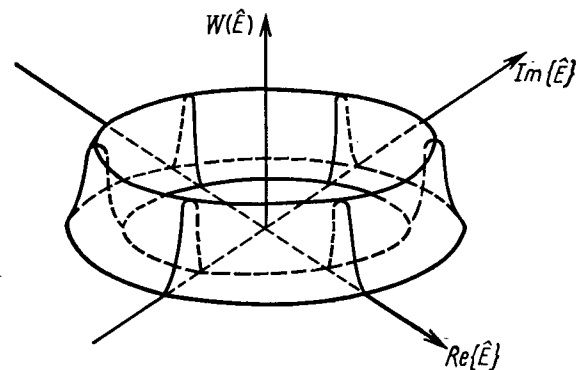
Для $T = 10^{-11}$ с эта формула приводит к значению нижней границы ширины полосы испускаемого излучения $\Delta f_{\text{с}} = 10^{11}$ Гц.

В1.13. К когерентному поведению лазерного излучения

Когерентное поведение и статистические свойства лазерного излучения обсуждаются более детально в разд. 3.31. В дальнейшем изложении приводятся только качественные *результаты*, которые должны послужить пониманию основополагающих представлений. Ниже порога выходящее из лазерного резонатора излучение обладает тем же статистическим характером, что и тепловое излучение, а именно имеет место гауссово распределение комплексных амплитуд \hat{E} в каждой моде. Амплитудные вклады в этом случае распределены нормально, тогда как фазы распределены равномерно. При достаточно большом превышении порога и для времен наблюдения, меньших времени фазовой корреляции ($\approx [\Delta f_{\text{с}}]^{-1}$), лазерное излучение можно рассматривать как волну с приблизительно постоянными амплитудой и фазой, а детальное представление дано в п. 1.314. При

больших временах наблюдения это приводит к распределению вероятностей $W(\hat{E})$ для комплексных амплитуд, которое на фиг. 6 имеет вид «кольцевых гор» (В1.11-2).

Если для теплового источника света (гауссов процесс) результаты линейных и нелинейных экспериментов полностью определяются корреляционной функцией первого порядка, то для излучения лазера (выше порога)



Фиг. 6. Распределение вероятностей $W(\hat{E})$ комплексной амплитуды \hat{E} .

это свойство уже не соблюдается. Вообще говоря, тогда должны экспериментально разделяться корреляционные функции высших порядков (ср. разд. 1.33), например из корреляций интенсивностей, измеряемых многими детекторами, или в нелинейных оптических экспериментах (гл. 3). Идеальный амплитудно стабилизированный свет не обнаруживает никакой корреляции интенсивностей.

В1.12. Характеристика выходного излучения, пространственная когерентность

Если лазер излучает в некоторую трансверсальную моду, т. е. в моды TEM_{mnp} с фиксированными m и n (см. п. В1.112), то с этим связана определенная характеристика выходного излучения. Последняя находится в непосредственной взаимозависимости с показанными на фиг. 5 распределениями напряженности поля на

выходном зеркале. Для моды TEM_{00q} расходимость выходящего излучения минимальна; она ограничена дифракцией, и угол расходимости определяется формулой $\Delta\varphi \approx \lambda/D$, где λ — длина волны и D — диаметр пучка. [Для лазера с длиной волны 1 мкм и с диаметром пучка 10 мм получается, следовательно, угол расходимости около 10^{-4} ($\approx 20''$); эти значения достигаются экспериментально с помощью лазеров высокой мощности.] Для мод с $m, n > 0$ получаются большие углы расходимости, чем для TEM_{00q} -моды.

У лазера, излучающего в поперечную моду, возникают определенные соотношения между значениями напряженности поля в различных точках выходного зеркала. Тем самым обеспечивается способность выходящего света к интерференции.

У тепловых источников излучения с помощью надлежащих систем диафрагм также можно отфильтровать поперечную моду и получить ограниченную дифракцией расходимость, определенные фазовые соотношения на выходной диафрагме и способность излучения к интерференции. Однако эта селекция сопряжена с очень большими потерями интенсивности. При малой расходимости (обусловленной дифракцией) становится возможной фокусировка излучения на малую площадь ($\approx \lambda^2$), что позволяет достичь высоких интенсивностей. При фокусировке отношение интенсивностей в лазерном пучке J_P и в области фокусировки J_F (фиг. 7) определяется формулой

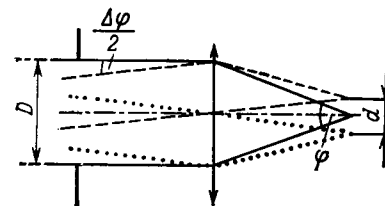
$$\frac{J_F}{J_P} \approx \frac{D^2}{d^2} \approx \frac{\sin^2(\varphi/2)}{\sin^2(\Delta\varphi/2)}. \quad (\text{В1.12-1})$$

Полагая $\sin(\varphi/2) \approx D/2f \approx 1/2$ и $\sin(\Delta\varphi/2) \approx \Delta\varphi/2 \approx \lambda/2D$, для верхней границы отношения интенсивностей получаем

$$\frac{J_F}{J_P} \approx \left(\frac{D}{\lambda}\right)^2, \quad (\text{В1.12-2})$$

так что при указанных выше значениях отношение интенсивностей равно 10^8 . Даже если в реальных экспериментальных условиях это отношение на 1—2 порядка ниже, то все-таки достигается значительный выигрыш

интенсивности и при исходных мощностях порядка 10^9 Вт можно получить на площади 10^{-11} м² в фокусе плотность мощности 10^{20} Вт/м², которой соответствует напряженность поля $3 \cdot 10^{11}$ В/м (такие значения напряженности поля превышают внутриатомные поля, ср. ч. I, § 2.2). Более точное рассмотрение преобразования лазерных мод при оптических отображениях см., например, в [В1.12-1].



Фиг. 7. Фокусировка лазерного пучка с расходимостью $\Delta\varphi$ (для наглядности расходимость сильно преувеличена).

Следует отметить, что в специальных схемах можно получить генерацию также и в нестабильных модах при благоприятных условиях проявления и малой нагрузке на выходное зеркало [В1.12-2].

В1.13. Получение коротких световых импульсов

Временное распределение выходного излучения зависит от времен релаксации активной среды лазера, от кинетики процесса накачки и от изменений свойств резонатора со временем.

Процесс импульсной накачки. Если соответствующие времена релаксации колебаний в резонаторе малы по сравнению с длительностью временного изменения процесса накачки, то модуляция мощности накачки будет перенесена на выходное излучение. Приведем пример. Времена релаксации лазеров на красителях очень малы. Поэтому путем накачки пикосекундными импульсами можно в резонаторах с достаточно коротким временем

установления колебаний получить импульсы лазеров на красителях столь же малой длительности.

Модуляция добротности. Путем модуляции добротности резонатора можно получить лазерные импульсы значительно более короткие, чем импульсы накачки. В начале процесса накачки поддерживается малая добротность резонатора. Для этого можно воспользоваться установкой вращающегося зеркала, применением электрооптического или магнитооптического затвора, а также введением в среду насыщаемого поглотителя. При малой добротности порог остается достаточно высоким, и до возникновения генерации создается большая инверсия, причем может быть накоплена большая энергия. (Предпосылкой эффективности механизма является относительно большое время жизни активной среды на верхнем лазерном уровне, так как это время жизни определяет интегральное время накопителя.) После начала генерации добротность активно (внешнее влияние затвора) или пассивно (просветление насыщаемого поглотителя) под действием лазерного излучения) быстро повышается. Возрастание добротности влечет за собой превышение порога над значением, определяемым условием (В1.11-6), благодаря чему в течение короткого времени происходит нарастание мощности излучения и быстрая отдача накопленной энергии. Таким способом могут быть получены короткие импульсы ($\geq 10^{-9}$ с) высокой мощности.

Можно также осуществлять модуляцию развязки во времени. В процессе нарастания генерации лазерное излучение не высвобождается, благодаря чему формируется сильное поле излучения; наконец, на короткое время затвор открывается.

Создание инверсии при помощи релаксационных процессов. Если характерные времена релаксации в лазерной среде по порядку величины сравнимы с длительностью импульса накачки или меньше ее, то они могут сильно влиять на временной ход лазерной генерации. Например, в CO_2 -лазерах короткий импульс накачки создает почти одинаковую населенность верхнего и нижнего уровней, и лишь в результате релаксационных процессов нижний уровень сильно опустошается, благодаря

чему создается инверсия и «включается» лазерная генерация; при соответствующем подборе газа и при атмосферном давлении это «время включения» имеет порядок 10^{-8} с.

Синхронизация мод. Излучение различных продольных мод лазера (TEM_{mnp} -моды с различными индексами мод q) можно синхронизировать; это означает, что могут быть установлены соотношения между фазами $\Phi(f)$ фурье-компонент напряженности электрического поля $E(f) = |E(f)| \exp[i\Phi(f)]$ в виде

$$\Phi(f) = b_0 + b_1(f - f_0).$$

(Простейший случай синхронизации встречается при $b_1 = 0$, т. е. при равенстве фаз всех мод.) В режиме синхронизации мод лазер излучает короткие импульсы в промежутки времени $\Delta T = 2l/c$ (l — оптическая длина резонатора). Синхронизацию можно осуществить с помощью активной модуляции добротности резонатора, используя электрооптический модулятор с частотой модуляции, равной частотному расстоянию между соседними продольными модами $c/2l$; возможна также пассивная модуляция с помощью насыщаемого поглотителя. Минимальная достижимая длительность импульса определяется выражением

$$T_{p \text{ мин}} \approx \frac{1}{\Delta f},$$

когда используется и синхронизируется полная ширина Δf лазерно активного перехода для когерентного усиления света. Например, при значениях, приведенных в (В1.11-2), получаем для $T_{p \text{ мин}}$

- $5 \cdot 10^{-10}$ с (гелий-неоновый лазер, 0,633 мкм),
- $5 \cdot 10^{-12}$ с (рубиновый лазер, 300 К, 0,694 мкм),
- $3 \cdot 10^{-13}$ с (лазер на неодимовом стекле, 1,06 мкм),
- 10^{-14} с (типичные лазеры на красителях, 0,6 мкм).

В экспериментах до сих пор были достигнуты минимальные ширины импульсов порядка 10^{-13} с. По отношению к однотипному лазеру с несинхронизованными, т. е. статистически распределенными модами, можно достичь в максимуме импульса выигрыш мощности в $(\Delta T/T_p) \approx (\Delta f/(c/2l))$ раз. Этот множитель равен числу синхро-

низованных мод, и для типичных лазеров его численное значение не превышает 10^3 .

Дополнительное применение быстрого электрооптического затвора делает возможным выделение отдельных импульсов из всего цуга импульсов.

В1.14. Мощность, энергия импульса

Мощность лазера зависит от статических и динамических свойств лазера в зависимости от статических и динамических качек и от устройства резонатора. Для достижения особенно высоких мощностей применяются следующие специальные методы.

Введение усилительных систем. Излучение лазера, работающего в непрерывном или в импульсном режиме, направляется в систему усилителей (см. п. В1.111), которые могут быть включены последовательно или параллельно в зависимости от конкретных требований. В ступенчатом усилителе достигаются усиления мощности порядка 10.

Установление высокой инверсии с помощью быстрых процессов переноса. Высокие локальные инверсии могут быть достигнуты в результате быстрого притока инвертированных молекул (или продуктов реакции в реакционное пространство химического лазера).

Весьма эффективен также газодинамический принцип форсированного получения высокой инверсии. В этом случае газ, находящийся при высоком давлении и высокой температуре, расширяется через сопло. Вследствие расширения происходит охлаждение, которое может приводить к кратковременной инверсии населенностей некоторых уровней, например колебательных уровней, так как нижние уровни релаксируют быстрее. Вследствие постоянного образования инвертированных молекул высокот инверсий в объеме резонатора также и в непрерывном режиме, при котором создаются очень высокие лазерные мощности.

Для достижения кратковременных высоких мощностей могут, кроме того, использоваться описанные в разд. В1.12 методы *модуляции добротности и синхронизации мод*.

Таблица 1. Параметры некоторых лазеров высокой мощности

Тип лазера	Режим	Мощность, Вт	Импульсная энергия, Вт·с	Длительность импульса, с
Газодинамический CO ₂ -лазер	Непрерывный	10 ⁵	—	—
CO ₂ -лазер с поперечной электрической накачкой при атмосферном давлении	Импульсный	10 ¹⁰ 10 ¹⁰	10 ¹ 10 ⁴	10 ⁻⁹ 10 ⁻⁶
Химический HF-лазер	Импульсный	10 ¹¹	10 ³	10 ⁻⁸
Лазер на неодимовом стекле со многими последовательными усилителями и многими параллельными выходами	Импульсный	10 ¹²	10 ⁴	10 ⁻⁹

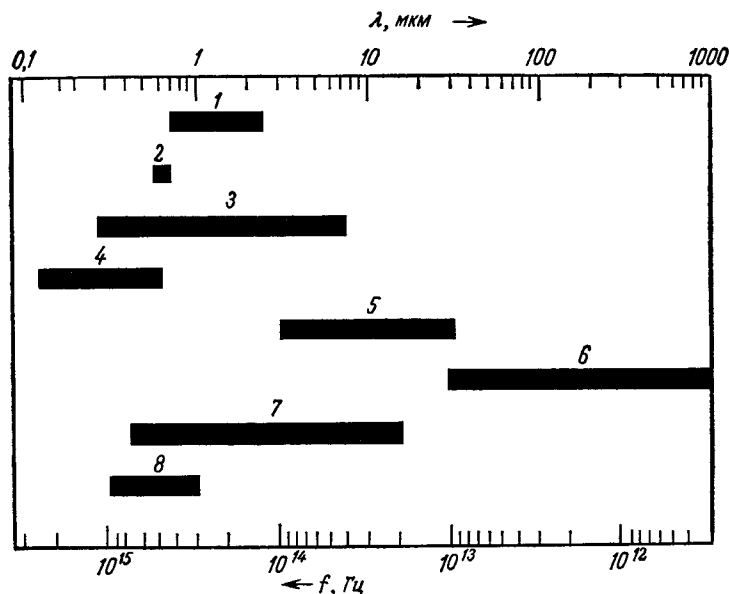
В заключение мы приведем некоторые значения мощностей и энергий импульсов, достигаемых при использовании описанных здесь методов в отдельности или в их комбинации друг с другом (табл. 1). В разд. В1.12 уже было показано, что при помощи фокусировки лазерного излучения заданной мощности могут быть достигнуты очень высокие интенсивности, а следовательно, и очень высокие напряженности поля.

В1.15. Частота, область настройки

В1.15.1. Частоты лазерно активных переходов

Частота лазера определяется в пределах ширины линии флуоресценции частотой соответствующего лазерно активного перехода. Существует возможность выбора среди многочисленных существующих веществ, и поэтому можно создать лазеры, работающие почти на всех частотах между ультрафиолетовой и инфракрасной спектральными областями. (При этом, конечно, не

следует забывать об отдельных технических трудностях, из-за которых при практических применениях приходится ограничиваться лишь небольшим числом типов лазе-



Фиг. 8. Длины волн активных переходов в типичных лазерах.

1 — оптически накачанный твердотельный лазер на основе легированных кристаллов или стекол (Cr^{3+} , Nd^{3+}); 2 — жидкостный лазер (хелаты с Eu^{3+}); 3 — газовый лазер на основе электронных переходов в ионах и атомах; 4 — газовый лазер на основе электронных переходов в молекулах; 5 — газовый лазер на основе вращательно-колебательных переходов в молекулах; 6 — газовый лазер на основе вращательно-колебательных и других длинноволновых переходов в молекулах; 7 — полупроводниковый лазер; 8 — лазер на красителях.

ров.) На фиг. 8 представлены диапазоны частот и длин волн, в которых используются определенные активные вещества.

VI.152. Преобразование частот

Длина волны или частота первичного лазерного излучения может быть преобразована в длину волны или частоту другой спектральной области с помощью нели-

нейного оптического процесса. Поэтому область длин волн *одного* какого-либо лазера или даже всей *совокупности* первичных лазеров может быть расширена.

Чаще всего применяется генерация второй гармоники (ГВГ), при которой достигается относительное преобразование, равное почти 100% (см. ч. 1, § 3.2). Дальнейшее смещение длины волны достигается в результате многократного применения ГВГ или смещения второй гармоники с основной; например, излучение Nd-лазера с модулированной длиной волны на длине волны 1,06 мкм (10^9 Вт) может быть преобразовано в излучения различных длин волн в видимой и ультрафиолетовой областях спектра со сравнительно высокими мощностями: 0,530 мкм (10^8 Вт), 0,39 мкм (10^8 Вт), 0,26 мкм (10^7 Вт). Возможности преобразования в область более коротких волн в значительной мере ограничиваются скоростью прозрачности нелинейного кристалла ($\lambda_{\text{мин}} \approx 200$ нм). К еще более коротким волнам можно перейти путем генерации третьей гармоники в парах металлов, причем для повышения коэффициента преобразования работают вблизи резонансных значений нелинейной восприимчивости и с согласованием фаз (см. разд. 3.14). В настоящее время таким способом получают когерентное излучение с длиной волны вплоть до 90 нм. С помощью этого метода предполагают добиться длины волны $\lambda = 20$ нм.

Исходя из двух лазерных частот в видимой области, можно путем образования разностных частот получить когерентное излучение в инфракрасной и в далекой инфракрасной спектральной области. При этом посредством относительно малых изменений *одной* из длин волн видимого света (например, длины волны лазера на красителе) можно в широких пределах перестраивать излучение в инфракрасной области. Но, к сожалению, коэффициент такого преобразования относительно мал.

Используя вынужденное комбинационное рассеяние на молекулярных колебаниях (см. ч. 1, § 4.2), можно получить интенсивное когерентное излучение, волновое число которого отличается от волнового числа возбуждающего лазера на фиксированные положительные или

отрицательные значения порядка от 10^2 до 10^4 см $^{-1}$, они соответствуют стоксову и антистоксову излучениям.

Существующие возможности нелинейного оптического преобразования частоты первичного лазерного излучения с перестраиваемой частотой, таких как параметрический генератор, поляритонный лазер, лазер с переворачиванием спина; эти источники будут рассмотрены в следующем разделе, посвященном проблеме перестройки источников света.

В1.153. Перестройка частоты

Для применений в спектроскопии и в НЛО весьма желательна непрерывная перестройка частоты в возможно более широкой области.

Перестройка внутри заданной линии флуоресценции. При лазерном переходе со строго заданной средней частотой можно при помощи избирательного по частотам элемента в резонаторе менять длину волны внутри ширины линии флуоресценции. Особенно большими относительными ширинами $\Delta f/f$ обладают линии, соответствующие электронным переходам в молекулах органических красителей ($\Delta f/f \leq 0,3$) и колебательно-вращательным переходам в молекулах газов при высоком давлении ($\Delta f/f \leq 0,2$). При помощи лазера на красителе с четырьмя сменными активными веществами можно, например, производить непрерывную перестройку частот во всей области длин волн видимого света. Слазорядом высокого давления на CO_2 возможна перестройка порядка $\pm 10\%$ на длине волны $\lambda = 10,6$ мкм.

Смещение средней частоты лазерного перехода. Средняя частота первичного лазерного перехода может быть смещена путем вариации различных параметров, определяющих поведение активной среды. Например, могут изменяться давление, температура, внешние электрические и магнитные поля и другие свойства, в частности находится активное вещество, а также среды самого этого вещества. Для некоторых полупроводниковых лазеров (например, PbTe) при высоком давлении (10^3 бар) перестройка может составлять около октавы.

Особенно большие области перестройки обнаруживают некоторые гетероструктурные полупроводниковые лазеры типа $A_xA'_{1-x}B$, в которых для вариации длины волны возбуждаются к лазерному действию области активной среды с различными x . В качестве примеров можно указать следующие лазеры и области перестройки:

Полупроводник	Длина волны, мкм
$\text{Cd}_x\text{Zn}_{(1-x)}\text{S}$	0,32—0,46
$\text{CdSe}_{(1-x)}\text{S}_x$	0,49—0,68
$\text{GaP}_x\text{As}_{(1-x)}$	0,61—0,90
$\text{InP}_x\text{As}_{(1-x)}$	0,9—3,2
$\text{InSb}_x\text{As}_{(1-x)}$	3,1—5,4
$\text{Pb}_x\text{Sn}_{(1-x)}\text{Te}$	6—28
$\text{Pb}_x\text{Sn}_{(1-x)}\text{Se}$	8—31

(Конечно, не следует забывать о технических трудностях получения воспроизводимой непрерывной перестройки перестраиваемых полупроводниковых лазеров.)

Новые возможности перестройки открываются при использовании описанной выше нелинейной оптической конверсии частот.

Параметрический генератор. Возможность использования параметрического генератора в качестве перестраиваемого источника света была уже показана в ч. 1, § 3.3. Особенно эффективным является применение параметрического генератора в близкой инфракрасной области спектра (1—15 мкм).

Поляритонный лазер. В поляритонном лазере (о поляритонных резонансах см. в п. 3.162) из первичной лазерной волны с частотой f_L в процессе вынужденного рассеяния возникает стоксова волна с частотой f_S , которая возвращается в резонатор вследствие обратной связи, кроме того, возникает инфракрасная волна на поляритонной частоте f_P . Для такого процесса рассеяния соблюдаются законы сохранения частот и волновых векторов $f_L = f_S + f_P$ и $k_L = k_S + k_P$. Изменяя угол между направлением k_L (оно определяется первичным входным излучением) и направлением k_S (оно задается осью резонатора), можно в согласии с законом сохранения для волновых векторов $|k_P|$ и с вытекающим из

него дисперсионным соотношением изменять поляритонную частоту $f_P = f_P(|k_P|)$. С рубиновым лазером как источником первичного света и с кристаллом LiNbO_3 в качестве преобразующей среды в поляритонном резонаторе была достигнута перестройка инфракрасной волны между 50 и 200 мкм. Однако доля мощности, преобразованной в инфракрасной области, очень мала, она составила в осуществленных до сих пор экспериментах приблизительно 10^{-4} .

Лазер с переворачиванием спина. В лазерах с переворачиванием спина преобразование частоты лазерной волны первичного излучения f_L осуществляется с помощью вынужденного комбинационного рассеяния на магнитно перестраиваемых уровнях полупроводника (см. п. 3.163). При этом в качестве перестраиваемого излучения могут использоваться стоксовы и антистоксовы линии различных порядков, частота которых определяется выражением

$$hf_S = hf_L \pm ng\mu_B |H|$$

($n = 1, 2, \dots$, — порядок линии рассеяния, g — фактор Ланде электронов зоны проводимости, μ_B — магнетон Бора, H — напряженность магнитного поля). При полях порядка 10^7 А·м $^{-1}$ ($\approx 10^5$ Э) достигалась перестройка первичного излучения света лазеров на CO_2 и на СО в интервалах от 9 до 14 мкм и от 5 до 7 мкм. Благодаря высоким восприимчивостям соответствующих полупроводников удалось построить лазер с переворачиванием спина с очень низким порогом ($\approx 10^{-1}$ Вт), который действовал в непрерывном режиме при высоких коэффициентах преобразования ($\approx 0,5$). Особое преимущество лазера с переворачиванием спина заключается в его узкополосности, были достигнуты относительные ширины линий порядка 10^{-10} .

Дальнейшие эффективные методы получения перестраиваемого когерентного излучения в широких диапазонах частот основаны на применении способа преобразования излучения с фиксированной частотой (описанного в п. В1.152) к излучению с перестраиваемой частотой. Очень полезным оказалось преобразование излучения перестраиваемого лазера на красителе из видимой

в ультрафиолетовую и инфракрасную спектральные области при помощи образования суммарных и разностных частот.

§ В1.2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭФФЕКТОВ НЛО В ОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРАХ

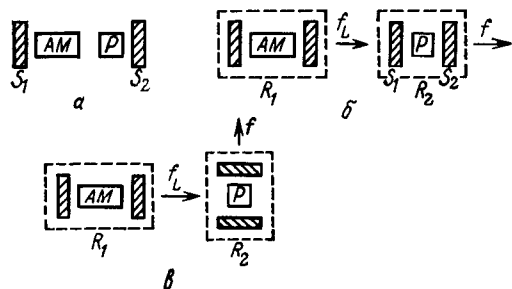
При проведении экспериментов НЛО в оптических резонаторах принято использовать такие области пространства, в которых существуют особенно высокие значения напряженности поля возбуждающего излучения. Для этой цели могут применяться два метода. В первом из них используется резонатор для возбуждающего излучения (например, непосредственно лазерный резонатор). Второй метод основан на возможности применения резонаторов для выделения излучения с определенной частотой и с заданным направлением волнового вектора при помощи селективной обратной связи. Таким путем могут быть получены большие усиления или сильная генерация излучения высокой монохроматичности и резкой направленности (примеры: параметрический генератор, комбинационный лазер). Возможна также соответствующая комбинация обоих методов. На фиг. 9 показаны некоторые часто применяемые схемы резонаторов.

В случае, изображенном на фиг. 9, а, образец P , в котором может протекать нелинейный процесс, подвергается воздействию поля лазера высокой напряженности, как если бы он находился вне лазерного резонатора, т. е. справа от S_2 . Если \mathcal{E} — прозрачность зеркала S_2 на частоте лазера (отражательная способность зеркала S_1 равна единице), для отношения квадратов напряженностей поля внутри и вне резонатора приближенно имеем

$$|\hat{E}_I|^2 / E_A^2 \approx 1/\mathcal{E}.$$

Для заданного лазера, у которого в общем случае все параметры оптимизированы относительно выходной мощности, т. е. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{опт}}$, напряженность поля внутри резонатора приблизительно в $(\mathcal{E}_{\text{опт}})^{1/2}$ раз больше, чем вне лазера. Для некоторых газовых лазеров величина

$\mathcal{E}_{\text{опт}}$ составляет всего несколько процентов, и поэтому внутренняя напряженность поля во много раз превосходит внешнюю. Если приспособить резонатор к исследуемой проблеме, то окажется возможным получить еще более благоприятные отношения полей. В устройстве, показанном на фиг. 9, а, можно, например, пренебречь прозрачностью зеркала S_2 для лазерного излучения с частотой f_L , благодаря чему повысится добротность резонатора. При этом следует только предусмотреть, что-



Фиг. 9. Резонаторные устройства для экспериментов по НЛО.
AM—активная среда; S—зеркало; R—резонатор; P—образец.

бы зеркало S_2 обладало достаточно высокой прозрачностью для излучения с частотой f , которое возникло в нелинейном процессе и которое мы стремимся выделить. Таким требованиям, вообще говоря, хорошо удовлетворяют диэлектрические многослойные системы, если частоты f_L и f не слишком близки.

В других схемах на фиг. 9 для излучения с частотой f применяется отдельный резонатор. Относительно его конструкции и юстировки можно сказать то же самое, что и в случае соответствующих лазерных резонаторов (см. литературу к § В1.1). При этом на фиг. 9, в зеркала резонатора R_2 должны выбираться только с учетом их свойств на частоте f , тогда как на фиг. 9, б, кроме того, должно быть обеспечено связывание лазерного излучения резонаторным зеркалом. Следует принять во внимание, что на граничных поверхностях образца может возникнуть добавочное отражение, создающее

обратную связь, в таком случае во избежание отражений эти поверхности можно расположить под углом Брюстера.

Для упрощения мы ограничились на фиг. 9 плоскими резонаторами Фабри—Перо, расположенными друг за другом без включения промежуточных отображающих систем. В общем случае резонаторные моды любых резонаторов с искривленными зеркалами должны быть согласованы между собой путем введения соответствующих систем линз [В1.12-1].

§ В1.3. ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН ВОЛН И ЧАСТОТ, СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

В1.31. Стандарты

Длина волны принадлежит к таким физическим величинам, которые в оптической области могут быть измерены с очень высокой точностью. Стандартом длины, а следовательно, и длины волны с 1958 г. служила длина волны перехода $2p_{10} \rightarrow 5d_5$ изотопа криптона с массовым числом 86, которая по определению в вакууме имеет значение $\lambda = 605,7802105$ нм.

Воспроизводимость этого стандарта составляет 10^{-8} . В 1973 г. было предложено в будущем считать стандартом красную линию гелий-неонового лазера, стабилизированного иодом как поглощающим газом; с этим стандартом длина метра устанавливается и воспроизводится с точностью до 10^{-10} .

Вслед за первичным стандартом применяются вторичные стандарты, установленные с помощью интерферометрических измерений (используется главным образом интерферометр Майкельсона). Ошибка составляет $\geq 10^{-5}$ нм. Вторичные и соответствующие им третичные длины волн собраны в спектральных атласах, так что в видимой области и в прилегающих к ней спектральных областях имеется большое число линий, которые могут использоваться для калибровки спектральных приборов по длинам волн. Новые успехи в этом направлении достигнуты с помощью лазерной спектроскопии высокого разрешения, особенно в инфракрасной области.

В качестве стандарта времени, а также и частоты с 1967 г. служит период колебаний или соответственно частота избранного перехода в атоме Cs^{133} , которая, согласно определению, равна

$$f = 9192631770,0 \text{ Гц.}$$

(Точность этого стандарта, основанного на радиоспектроскопии атомных пучков, составляет $\Delta f = 2 \cdot 10^{-2}$ Гц, $\Delta f/f = 2 \cdot 10^{-12}$.) К этому стандарту следует добавить частоты других радиоспектроскопических переходов, а также мазерные частоты. Кроме того, с этим стандартом сравниваются кварцевые часы.

Прямые измерения в области частот, превышающих частоты микроволнового диапазона, т. е. в инфракрасной и в видимой областях, до последних лет не производились вследствие экспериментальных трудностей. В последнее время удалось сравнить некоторые лазерные частоты с частотными эталонами в высокочастотной области, что позволило их непосредственно определить. Сравнение осуществляется с помощью гетеродинных методов — путем измерения разностей частот основных тонов или гармоник различных лазеров с возрастающей длиной волны и последующего сравнения частоты наиболее длинноволнового лазера с высшими гармониками клистронных частот, согласованных с цезиевыми часами. Для измерений применяются функциональные элементы, в которых путем смешивания частот осуществляются преобразование оптического излучения в радиочастотное и обнаружение этого излучения; такими элементами могут служить различные фотоэлектрические приемники, особенно точечные детекторы (например, вольфрамовая спиральная контактная пружина кристаллического детектора), а также контакты Джозефсона, у которых выходящий сигнал нелинейно зависит от напряженности поля падающего света. При таких измерениях частично используются нелинейные взаимодействия очень высокого порядка. Если входной сигнал состоит из двух монохроматических линий с частотами f и f' , то при наличии квадратичной зависимости выходного сигнала от напряженности поля он модулируется с частотой $\Delta f = f - f'$, если $\Delta f \tau_E \leq 1$ (τ_E — время срабатыва-

ния приемника). С помощью соответствующих приемников можно обнаружить разности частот порядка 10^{12} Гц. На установках подобного рода была, например, измерена частота стабилизированного метаном как поглощающим газом гелий-неонового лазера с длиной волны 3,39 мкм. Для измерений, в результате которых получено значение $f = 8,8376182 \cdot 10^{13}$ Гц, использовались последовательность длинноволновых лазеров и клистрон. Следовательно, возникает возможность применения одного и того же атомного перехода для стандарта длины волны и частоты. Кроме того, путем измерения f и λ для некоторого перехода можно выполнить прецизионное определение скорости света.

По-видимому, в будущем появятся новые возможности создания стандартов частоты и новых прецизионных методов в спектроскопии. С помощью метода измерения разностных частот можно будет сопоставить абсолютно измеренным оптическим частотам соседние частоты.

В1.32. Основы спектральных измерений

При измерении спектра мощности исследуемое излучение попадает в прибор, в котором оно подвергается разложению на спектральные компоненты и преобразуется в выходной сигнал. Окончательно этот сигнал представляется в виде зависимости от частоты или длины волны. Цель такого анализа состоит в том, чтобы по регистрируемому сигналу по возможности точно (и просто) сделать заключения о входном сигнале. Но в процессе измерений неизбежно возникают систематические ошибки, ограничивающие точность.

Если на входе имеет место постоянное во времени распределение мощности по длинам волн, то соотношение между регистрируемым спектром $\mathcal{E}(\lambda)$ и распределением мощности на входе, т. е. истинным спектром $\mathcal{E}_{\text{вх}}(\lambda)$, можно представить в виде

$$\mathcal{E}(\lambda) = \int d\lambda' \mathcal{A}(\lambda - \lambda') \mathcal{E}_{\text{вх}}(\lambda') + r(\lambda). \quad (\text{В1.32-1})$$

Такое представление возможно при условиях, выполняющихся для многих источников излучения и спектро-

метров. В (В1.32-1) аппаратная функция $\mathcal{A}(\lambda)$ отображает искажение спектра, т. е. систематические ошибки, тогда как $r(\lambda)$ представляет статистические ошибки. Величина $\mathcal{A}(\lambda)$ однозначно определяется оптическими и электронными структурными элементами спектрометра. В принципе $\mathcal{A}(\lambda)$ можно определить путем регистрации монохроматического входного спектра, для которого можно пренебречь статистическими ошибками, в этом случае $\mathcal{S}(\lambda) = \mathcal{A}(\lambda)$. Ширина распределения $\mathcal{A}(\lambda)$ определяет величину искажения, а также разрешающую способность прибора при пренебрежимых статистических ошибках. Разрешающая способность определяется выражением $R = \lambda/\Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ есть то минимальное расстояние между двумя спектральными линиями (приблизительно одинаковой интенсивности) на входе, которое еще может быть «разрешено» на выходе, но, согласно Релею, «разрешенной» считается пара линий одинаковой интенсивности выходного сигнала, у которой интенсивность между обоими максимумами уменьшается на 80%. Случайные ошибки возникают вследствие квантостатистических свойств сигнала, но могут вызываться также случайно присутствующим фоновым излучением и шумовыми процессами в приемнике или на фотопластинке (см. § В1.4). Что касается функции $r(\lambda)$, то можно предсказать только ее корреляционное поведение. Существование этих шумовых ошибок принципиально препятствует при конечном времени измерения (или при конечном числе повторений регистрации) возможности точного определения $\mathcal{S}_{\text{вх}}(\lambda)$ по $\mathcal{S}(\lambda)$ путем решения уравнения (В1.3-1) относительно $\mathcal{S}_{\text{вх}}(\lambda)$. Более детально эта проблема рассматривается в работе [В1.32-1], где решается вопрос о таком выборе условий измерений, при котором величина $\mathcal{S}(\lambda)$ при наличии систематических и случайных ошибок по возможности мало отличалась бы от $\mathcal{S}_{\text{вх}}(\lambda)$; при этом функции $\mathcal{S}_{\text{вх}}(\lambda)$, $\mathcal{A}(\lambda)$ и $r(\lambda)$ характеризуются только весьма общими объективно заданными свойствами.

В следующем разделе мы сначала рассмотрим искажение истинного спектра оптическими структурными элементами специальных спектральных приборов, которые могут быть охарактеризованы аппаратной функцией

$\mathcal{A}_{\text{опт}}(\lambda)$. Пренебрегая случайными ошибками, для распределения на выходе из оптической части спектрометра можно написать

$$\mathcal{S}_{\text{опт}}(\lambda) = \int d\lambda' \mathcal{A}_{\text{опт}}(\lambda - \lambda') \mathcal{S}_{\text{вх}}(\lambda'). \quad (\text{В1.32-2})$$

Аппаратную функцию $\mathcal{A}_{\text{опт}}(\lambda)$ можно характеризовать ее полушириной $(\Delta\lambda)_{\text{ш}}$, которая приблизительно совпадает с минимальным разделяемым расстоянием между линиями $\Delta\lambda$, определяемым разрешающей способностью. Функция $\mathcal{A}_{\text{опт}}(\lambda)$ определяется также долей входной мощности, которая может быть измерена на выходе; эта доля вместе с характеристиками приемника обуславливает относительную шумовую ошибку.

В1.33. Свойства специальных спектральных измерительных приборов

В1.33.1. Спектрометр с дифракционной решеткой и призмный спектрометр

При освещении входной щели монохроматическим, пространственно некогерентным светом (в случае лазерного света пространственная когерентность может быть разрушена рассеивающими экранами, она может создавать также сложные дифракционные картины) в фокальной плоскости камеры спектрографа возникает распределение интенсивности, соответствующее аппаратной функции $\mathcal{A}_{\text{опт}}(\lambda)$. Если можно пренебречь ошибками изображения, то при ширине входной щели, стремящейся к нулю, функция $\mathcal{A}_{\text{опт}}(\lambda)$ определяется только свойствами призм или решетки.

В применяемых в настоящее время спектрографах и монохроматорах используются диспергирующие элементы со следующими свойствами: призмы изготавливаются из различных стекол, кварца, галогенидов щелочных и щелочноземельных элементов, с помощью которых может быть использована область длин волн между 0,2 и 50 мкм при хорошей прозрачности и при относительно высокой дисперсии. Длины оснований отдельных призм достигают почти 200 мм, а при использовании

комбинаций призм сумма длин оснований составляет около 500 мм. Ограниченная дифракцией разрешающая способность принимает значение $R \leq 5 \cdot 10^4$.

Изготавливаются дифракционные решетки с размерами до 300×200 мм² и с числом штрихов 2400 на 1 мм, углы наклона ступенек в ступенчатых решетках выбираются между 2 и 60°. Могут быть приняты различные способы расположения решеток. Ограниченная дифракцией разрешающая способность составляет до $7 \cdot 10^5$.

Эти экстремальные значения разрешающей способности достигаются экспериментально в приборах с фокусными расстояниями $f_a \approx f_e \leq 3$ м, т. е. при отношениях дифрагирующей поверхности к f^2 не менее 1/100 (лишь тогда можно, например, пренебречь ошибками изображения). Приборы с решетками обладают преимуществами по сравнению с призмными приборами, поскольку они характеризуются более высокими значениями дисперсии и разрешающей способности. Однако они имеют тот недостаток, что для разделения различных порядков требуется предварительное спектральное разложение.

Для обнаружения линии слабой интенсивности, находящейся вблизи более сильной линии (примером может служить волна некоторого некогерентного нелинейного процесса рассеяния рядом с лазерной волной), т. е. для подавления фона требуется применение нескольких монохроматоров. В настоящее время промышленность изготавливает тройные монохроматоры.

До сих пор мы рассматривали аппаратную функцию в предположении, что ширина входной щели b_e стремится к нулю. Однако световой поток, необходимый для обнаружения слабой линии, может быть получен лишь при достаточном раскрытии входной щели. Если входная щель имеет конечную ширину, то в фокальной плоскости камеры возникает спектр, который может быть получен из спектра при ширине входной щели, равной нулю, путем свертки с аппаратной функцией щели. При дальнейшем пренебрежении ошибками изображения это означает интегрирование по изображению входной щели в плоскости камеры. Если при фотографировании монохроматической линии выдвигается требование получе-

ния возможно более высокой интенсивности в фокальной плоскости камеры (т. е. при регистрации на фотопластинке требуется возможно более глубокое почернение) при минимальном уширении дифракционной картины, то входная щель должна иметь приблизительно так называемую «нормальную» ширину $b_{эфф}$, которая характеризуется дифракционной шириной. В случае очень слабых сигналов часто оказывается необходимым выиграть значительно большую ширину, чтобы выделить сигнал из шума (фотоприемника или фотопластинки). Если $b_e \gg b_{эфф}$, то говорят о разрешающей способности, которая энергетически ограничена.

В фокальной плоскости камеры спектр вообще сканируется при помощи щели. Это может быть проведено непосредственно путем регистрации сигнала позади щели каким-либо фотоприемником или косвенно путем регистрации распределения в фокальной плоскости на фотопластинке и последующего измерения почернений при помощи фотометра. (Проходящая через площадь щели мощность является в обоих случаях определяющей для отношения сигнала к шуму на выходе.) Таким образом, спектр в фокальной плоскости еще раз сканируется при помощи щелевой функции. (Для регистрации не существенно, приводится ли в движение выходная щель или вращается диспергирующий элемент в монохроматоре.)

Для заданного источника света и заданной разрешающей способности (в значительной мере определенной энергетическими соображениями) мощность излучения L позади выходной точки следующим образом зависит от параметров спектрометра:

$$L \sim \frac{h_e}{f_e} F \left(\frac{d\beta}{d\lambda} \right) \mathfrak{F} = \Phi \quad (B1.33-1)$$

(f_e — фокусное расстояние коллиматора, h_e — высота входной щели, F — проекция площади диспергирующего элемента на коллиматорную линзу; $(d\beta/d\lambda)$ — угловая дисперсия диспергирующего элемента; \mathfrak{F} — прозрачность). Величина Φ определяется по Стронгу как фактор добротности прибора. Благодаря большей угловой дисперсии приборы с решетками превосходят призмные

приборы сравнимой величины также по значениям их фактора добротности. В случае прибора высокой мощности с решеткой, для которого достижима разрешающая способность порядка 10^5 , при типичных параметрах ($h_e = 10$ мм, $f_e = 6000$ мм, $F = 6 \cdot 10^4$ мм², $(d\beta/d\lambda) = 2$ рад/мкм, $\mathcal{E} = 0,1$) получают значение $\Phi \approx \approx 10$ мм²·рад/мкм; со «светосильными» приборами меньшей разрешающей способности ($\mathcal{R} \approx 10^4$) получают на порядок более высокие значения Φ .

В1.332. Интерферометры

Интерферометры применяются как для абсолютных измерений длин волн с высокой точностью, так и для спектрального разложения с высокой разрешающей способностью. Если для абсолютных измерений прежде всего используется интерферометр Майкельсона, то для спектрального разложения доминирующим является интерферометр Фабри—Перо, он представляет собой открытый резонатор с двумя зеркалами, обладающими высокими коэффициентами отражения. Благодаря симметричной его конструкции относительно оптической оси этот интерферометр особенно удобен для исследования многих проблем НЛО и лазерной физики, в которых подобные резонаторы используются уже в самих источниках света. Кроме того, интерферометр многолучевого типа допускает относительно компактную конструкцию. Особенно часто употребляется интерферометр Фабри—Перо с плоскими пластинками, его аппаратная функция уже была рассмотрена в разд. В1.11. В первую очередь рассмотрим следующее условие регистрации: пусть в направлении оси падает идеально параллельный световой пучок (угол падения $\theta = 0$). На выходе регистрируется прошедшая через интерферометр мощность излучения, зависящая от длины резонатора l . (Если интерферометр заполнен газом, то путем изменения давления можно изменять показатель преломления и оптическую длину пути в интерферометре.) Кроме того, можно регистрировать зависимость от θ , если направлять падающий свет под различными углами падения и затем измерять распределение интенсивности в фокальной плоскости

камеры на выходе. Преимущество такого метода заключается в том, что он пригоден для измерения также отдельных импульсов. В самом деле, в этом методе сразу получается полный спектр без изменения параметров прибора. Для ширины аппаратной функции (или для разрешающей способности) имеем в обоих случаях (см. разд. В1.11)

$$\Delta f = \frac{c}{2l} \frac{1-R}{\pi \sqrt{R}}, \quad \mathcal{R} = \frac{f}{\Delta f} \approx \pi \frac{\sqrt{R}}{1-R} m' \quad (\text{В1.33-2})$$

(R — коэффициент отражения пластин интерферометра, m' — порядок). Множитель $\pi \sqrt{R}/(1-R)$ называется резкостью, его можно интерпретировать также как число эффективно интерферирующих между собой волн, вследствие чего разрешающая способность принимает вид произведения числа интерферирующих волн на порядок. До сих пор мы обсуждали только влияние коэффициента отражения пластин на резкость и на разрешающую способность. Но обе эти величины, кроме того, уменьшаются вследствие нарушения плоскостности пластин, ошибок юстировки и дифракции светового пучка конечного диаметра. В итоге для резкости достигаются значения порядка 100 при пластинах из стекла или кварца с многослойными диэлектрическими покрытиями.

Обычно применяются интерферометры Фабри—Перо с фиксированным расстоянием $l = 0,3-200$ мм между пластинами (с фотографической регистрацией) и с переменной длиной около $d = 500$ мм, которая перестраивается часто при помощи пьезоэлектрического эффекта. Таким образом, в рабочем режиме разрешающая способность имеет порядок 10^8 . При заданной разрешающей способности с помощью интерферометра Фабри—Перо достигаются большие мощности на приемнике, чем в случае спектрометров с решеткой и со сравнимой величиной диспергирующего элемента. Кроме интерферометров Фабри—Перо с плоскими зеркалами, в лазерной спектроскопии и в НЛО применяются также интерферометры Фабри—Перо со сферическими зеркалами; при надлежащем выборе конфигураций может быть до-

стигнута повышенная стабильность. Например, часто применяется конфокальное расположение. Для достижения высокой селективности могут «настраиваться в ряд» несколько интерферометров Фабри — Перо.

VI.333. Фильтры

Во многих случаях в экспериментах в НЛО для спектрального разложения или для подавления какого-либо определенного излучения оказывается достаточным применение фильтров, так как линии, которые необходимо разделить, обычно достаточно удалены друг от друга. Примерами могут служить генерация второй и третьей гармоник или большое смещение стоксовой и антистоксовой компонент вынужденного комбинационного рассеяния. Диэлектрические многослойные фильтры отличаются тем, что обладают высокой прозрачностью в резко ограниченной заданной спектральной области. Они изготавливаются для видимого участка спектра и для прилегающих к нему областей ультрафиолетового и инфракрасного света, характеризуются разнообразием свойств и могут применяться также как отражательные фильтры. Некоторое смещение границ прозрачности может быть достигнуто путем вращения фильтра. Для достижения сильного поглощения (на много порядков) применяются преимущественно поглощательные фильтры, каковыми наряду с цветными стеклами служат также растворы селективно поглощающих веществ, полупроводники и другие твердые вещества. Если фильтры предназначаются для излучений высокой мощности, то их свойства должны подвергаться точному контролю, поскольку насыщение поглощения, поглощение из возбужденных состояний, а также те или иные разрушения могут создать свойства, сильно отличающиеся от свойств вещества при малых сигналах.

VI.334. Методы высокого разрешения

При линейных или нелинейных эффектах в поглощении могут быть измерены переходы с наивысшим разрешением, если пользоваться входным излучением от почти монохроматического прерываемого источника све-

та (см. § VI.1). Если ширина линии составляет несколько герц, то в принципе может быть достигнута разрешающая способность порядка 10^{14} . (Следует заметить, что точность перестройки чаще всего бывает на несколько порядков ниже). Особенно эффективным оказывается применение узкополосных источников света в так называемой спектроскопии насыщения, в которой удается устранить влияние неоднородного уширения линий (особенно вследствие эффекта Доплера) на спектральное разрешение (ср. п. 3.125 и разд. 3.13).

Анализ эмиссионных сигналов с исключительно высоким разрешением может быть выполнен путем смешивания при фотоэлектрическом приеме (см. разд. VI.31, § VI.4). Фототок фотоэлектрического приемника зависит от напряженности поля на катоде по квадратичному закону, причем следует провести временное усреднение по времени срабатывания приемника. Частотный анализ фототока, изменяющегося во времени, дает информацию о спектральном распределении излучения с очень высоким разрешением. Таким способом могут быть определены ширины линий оптического излучения порядка нескольких герц. При этом минимальная измеримая разностная частота определяется продолжительностью времени измерения, в течение которого может быть обеспечена достаточная стабильность всех частей аппаратуры. Доступная обработке область частот ограничена наивысшей частотой приемника и регистрирующей электронной аппаратуры. Описанный метод измерений особенно применим для исследования стабильности частот и спектральных свойств стабилизированных лазеров, причем могут сравниваться между собой также выходные сигналы двух независимых лазеров. Кроме того, исследуются линии рассеяния, расположенные близко к возбуждающей линии, в частности.

Обобщение описанного метода измерений достигается путем разложения исследуемого излучения на две компоненты, разделенные некоторым промежутком времени τ . Тогда фототок содержит зависящую от τ составляющую вида $\Phi(t, \tau) \sim \mathcal{E}(t)\mathcal{E}(t + \tau)^2$, где усреднение следует снова выполнить за время, равное временной константе приемника. Этот сигнал можно подвергнуть

также частотному анализу, в результате которого получается зависящая от τ спектральная функция.

Оценки упрощаются при применении метода к частному случаю, когда время усреднения для стационарного сигнала выбирается большим по сравнению с корреляционным временем, а для импульсного излучения оно принимается равным полной длительности сигнала (во втором случае величину τ следует изменять от импульса к импульсу). Тогда выходной сигнал зависит еще лишь от τ . Из функции $\Phi(\tau)$ можно непосредственно определить время корреляции излучения, а тем самым и обратную величину — ширину линии $\Delta f_{\text{с}}$. Таким образом, рассматриваемый частный случай аналогичен обычному процессу измерения, выполняемому с двухлучевым интерферометром, например интерферометром Майкельсона с интегрирующим приемником (корреляционное время много меньше времени интегрирования). Мы приходим к выводу, что описанное устройство позволяет измерить корреляционную функцию $\mathcal{E}(t)\mathcal{E}(t+\tau)^t$ электромагнитного излучения с напряженностью поля $\mathcal{E}(t)$. Достижимая в рассматриваемом частном случае разрешающая способность в значительной мере задается стабильностью интерферометра, существенно зависящей от длины пути запаздывания $\tau_{\text{с}}$. (Для того чтобы в действительности при помощи описанного метода получить разрешение порядка нескольких герц, потребовалось бы, чтобы длина пути запаздывания была порядка 10^8 м и поддерживалась во время измерения постоянной с точностью до λ !)

§ В1.4. ИЗМЕРЕНИЯ ЭНЕРГИИ И МОЩНОСТИ

В1.41. Измерения с помощью тепловых и фотоэлектрических приемников

Для регистрации световых сигналов, кроме пластинок, наиболее часто применяются тепловые и фотоэлектрические приемники. В тепловом приемнике излучение поглощается на зачерненной поверхности или в объеме соответствующей среды, а вызванное им нагревание измеряется главным образом электрическим способом

Таблица 2. Свойства приемников излучения ($\lambda_{\text{п}}$, $\lambda_{\text{г}}$ — длины волн максимальной чувствительности, $\lambda_{\text{к}}$ — длины волн коротковолновой границы приемника; $\tau_{\text{Е}}$ — постоянная времени; D^* — детектирующая способность)

Тип приемника	Рабочая температура, °К	$\lambda_{\text{п}}$, мкм	$\lambda_{\text{г}}$, мкм	$\tau_{\text{Е}}$, с	D^* , см·Гц ^{1/2} ·Вт ⁻¹
Тепловой (термоэлемент, болометр)	295	—	—	10^{-2}	$10^8 \dots 10^9$
Сверхпроводящий болометр	4,2	—	—	10^{-6}	10^{12}
Пироэлектрический	295	—	—	10^{-5} 10^{-8}	10^8 $5 \cdot 10^7$
Внешний фотоэффект Ag—O—Cs	295	0,8	1,2 ... 1,5	ФЭУ	ФЭУ
Sb—Cs		0,38 ... 0,45	0,65	$\geq 10^{-9}$	Фотоэлемент
Bi—Ag—O—Cs		0,4 ... 0,5	0,8	Фотоэлемент	$\leq 10^{14}$
Sb—Li		0,37	0,62	$\geq 10^{-10}$	
Модуляционный фотонный тормозящий детектор					
Ce	295	2	20	10^{-10}	10^3
Фотонапряжение CdHgTe	77	8	14	10^{-9}	10^9
Фотосопротивления					
CdS	295	0,64	0,9	$4 \cdot 10^{-5}$	10^{10}
PbS	295	2,5	2,8	10^{-4}	10^{11}
	77	3,2	3,7	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{11}
GeAu	77	6,0	9,0	$3 \cdot 10^{-8}$	10^{10}
GeAu, Sb	77	6,0	9,0	$2 \cdot 10^{-9}$	10^{10}
Ge—Hg	4,2	11,0	14,0	10^{-9}	$4 \cdot 10^{10}$
Ge—Cu, Sb	4,2	24,0	29,0	$2 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{10}$
InSb	295	6,3	7,5	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^8$
	77	5,3	5,6	$2 \cdot 10^{-7}$	10^{11}

(например, путем измерения термо-э. д. с. или изменения сопротивления). В фотоэлектрических приемниках отдельные фотоны в результате внешнего или внутреннего фотоэффекта создают непосредственно свободные носители заряда, которые могут быть зарегистрированы. Поэтому речь идет о детекторах фотонов, с помощью которых можно также непосредственно вести счет фотонов. В противоположность тепловым детекторам, которые в довольно широкой области длин волн сохраняют почти постоянные приемные свойства, фотоэлектрические приемники обнаруживают более сильную зависимость от длины волны, что обусловлено фотоэффектом в соответствующем веществе (табл. 2).

В1.411. Граница чувствительности

Граница чувствительности определяется шумами, под которыми следует понимать статистические флуктуации сигнала и других падающих излучений, а также статистические процессы в приемнике и в расположенном за ним регистрирующем устройстве. Флуктуации выходного сигнала связаны с квантовой природой света и вещества приемника, а также с тепловыми флуктуациями. Характеристическим параметром регистрации является величина ЭМШ (эквивалентная мощность шума). Ее можно определить из требования, чтобы при определенной мощности излучения и при определенной ширине полосы (вообще $\Delta f = 1$ Гц) величина U_R (корень из среднего квадрата шумового напряжения) равнялась напряжению сигнала. Для приемников важнейших типов соблюдается соотношение

$$\text{ЭМШ} = U_R / (\xi \sqrt{\Delta f}), \quad (\text{В1.41-1})$$

где ξ — чувствительность (отношение напряжения сигнала U_s на выходе из приемника к мощности излучения L_s на входе в приемник).

Наименьшие эквивалентные мощности шума достигаются с приемниками, основанными на внешнем фотоэффекте. При этом каждый попадающий на катод фотон η вызывает с вероятностью образование одного

электрона. При наложении анодного напряжения такой электрон вносит вклад в электрический ток и при наличии внешнего сопротивления R_a создает сигнал напряжения (при удачно выбранном материале катода величина η достигает значений порядка 10^{-1}). Практически благоприятное усиление с малыми шумами получается при помощи ФЭУ. ФЭУ можно применить для счета фотонов с малой относительной ошибкой.

Во многих приемниках средний квадрат напряжения шума в приемнике пропорционален величине воспринимаемой излучение поверхности F приемника (например, при фликкер-эффекте и при шумах темнового тока). Поэтому часто вместо параметра ЭМШ, соответственно зависящего от поверхности F , задается величина детектирующей способности

$$D^* = \frac{\sqrt{F}}{\text{ЭМШ}}, \quad (\text{В1.41-2})$$

которая характерна для материала данного приемника. (D^* измеряется в единицах $\text{см} \cdot \text{Гц}^{1/2} \cdot \text{Вт}^{-1}$). Из (В1.41-1) и (В1.41-2) следует формула для отношения сигнала к шуму $\text{ОСШ} = U_s / U_R$ на выходе

$$\text{ОСШ} = D^* \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} L_s, \quad (\text{В1.41-3})$$

где L_s — мощность излучения на входе. Следует заметить, что D^* , вообще говоря, зависит от длины волны падающих лучей и от температуры приемника. Если приемник используется для регистрации модулированного света, то должна быть дополнительно задана зависимость D^* от частоты модуляции.

В1.412. Временное поведение

Поведение по отношению к изменяющейся во времени мощности излучения $L_s(t)$ на входе может быть описано аппаратной функцией $\xi(t)$ при помощи уравнения

$$U_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \xi(t' - t) L_s(t'). \quad (\text{В1.41-4})$$

(В таком приемнике протекают элементарные акты — возбуждения или ионизации атомов, вероятность которых зависит от величины $\overline{E(r, t)E(r, t - \tau)^t}$, где напряженность поля может быть задана выражением $E = \frac{1}{2}E(t) \exp[i(\omega_0 t - k.r.)] + \{KK\}$. Представим себе, что время установления элементарного процесса велико по сравнению с ω_0^{-1} , но мало по сравнению с временами, в течение которых $E(t)$ существенно изменяется; тогда вероятность перехода атомной системы пропорциональна $|E(t)|^2$. Временное поведение $\xi(t)$, вообще говоря, определяется не этими почти безынерционными процессами, а другими, более медленными макроскопическими процессами.

В фурье-представлении уравнение (B1.41-4) принимает следующий вид:

$$|U_s(f)| = |\xi(f)| L_s(f), \quad (B1.41-5)$$

где $|\xi(f)|$ играет роль частотной характеристики приемника. Часто временное поведение в эквивалентной схеме может быть представлено RC -членом, тогда аппаратные функции определяются выражением $\xi(t) = \xi_0 (1/\tau_E) e^{-t/\tau_E}$, а частотная характеристика имеет вид $|\xi(f)| = \xi_0 / (1 + i2\pi f\tau_E)$, где τ_E характеризует инерционность приемника и рассматривается как его временная константа. Вместо τ_E приемник может характеризоваться также граничной частотой

$$f_g = \frac{1}{2\pi\tau_E}, \quad (B1.41-6)$$

причем $|\xi(f)|$ уменьшается в $\sqrt{2}$ раз. Иногда встречается определение граничной частоты как величины $f'_g = \sqrt{3}/2\pi\tau_E$, т. е. $|\xi(f)|$ убывает при f'_g до половины максимального значения.

Инерционность тепловых приемников определяется процессами переноса тепла от поверхности приемника к термостату и приводит в основном к значениям $\tau_E \gg 10^{-3}$ с. Конструкции с существенно меньшими временными константами (снижающимися до 10^{-8} с) обладают очень малыми чувствительностями и пригодны только для измерения лазерных импульсов большой мощности.

Со специальными вакуумными фотодиодами, способными создавать столь сильные выходные токи, что их выходное напряжение может быть подано на осциллографы без дальнейшего усиления, могут быть достигнуты временные константы регистрирующей системы порядка 10^{-11} с. При регистрации периодических импульсов быстродействующими приемниками и импульсными осциллографами временное разрешение достигает нескольких 10^{-11} с при высокой чувствительности.

В инфракрасной области спектра целесообразно применение фотоприемников, основанных на внутреннем фотоэффекте. С ними достигаются несколько меньшие временные разрешения (порядка 10^{-9} с).

В табл. 2 сопоставлены некоторые характеристические величины для приемников различных типов. Помимо тепловых и фотоэлектрических приемников в таблицу включены для сравнения также пироэлектрические приемники. Здесь следует заметить, что оптимально достижимые значения чувствительности регистрации и скорости срабатывания, вообще говоря, нельзя реализовать с помощью одного и того же приемника.

Применяя метод образования суммарных частот, можно преобразовать инфракрасное излучение в видимую область (ап-конверсия), в которой могут быть использованы более высокая чувствительность регистрации и более высокая граничная частота; на это уже указывалось в ч. I разд. 3.31. Например, в результате смешения волн из области 10 мкм со светом рубинового или аргонового лазера удалось получить излучение с предельно слабым шумом.

B1.413. Калибровка измерения мощности и энергии

Абсолютное определение мощностей излучения и соответствующих напряженностей поля играет важную роль в НЛО (например, при всех измерениях восприимчивостей). Часто приходится производить калибровку при очень сильно различающихся длинах волн (например, при измерении коэффициентов преобразования). Такие абсолютные измерения и калибровки различных приемников (например, со свойствами, сильно зависящими

от длины волны) могут быть выполнены, в частности при помощи разностных конических калориметров. В этих калориметрах излучение полностью поглощается в зачерненном полом конусе при многократных отражениях. Возникающее при этом нагревание конуса сравнивается с нагреванием другого аналогично построенного конуса (он нагревается электрическим током). Абсолютные калибровки могут быть проведены с точностью $\geq 1\%$. Импульсная энергия может быть измерена приемниками, временная константа которых велика по сравнению с длительностью импульса; в случае приемников с малой временной константой приходится выполнять электронное интегрирование. Примером приемников с большой временной константой могут служить описанные выше конические калориметры. Их временная константа определяется процессом охлаждения конуса после импульсного нагревания, т. е. теплопроводностью, и по порядку величины составляет несколько секунд. Калибровка калориметра по энергиям осуществляется путем импульсного электрического нагревания конуса электрическим током в течение времени, малого по сравнению с временной константой приемника. Абсолютная точность таких измерений составляет около 3%.

В1.42. Измерение формы импульсов

В НЛО важную роль играют кратковременные процессы, особенно в связи с возбуждением пикосекундными лазерами. Для наблюдения таких процессов необходима соответствующая техника быстрой регистрации. Для субнаносекундной области оказывается применимой описанная в предыдущем разделе техника фотоэлектрической регистрации. Здесь мы опишем некоторые методы и вспомогательные средства, дополняющие фотоэлектрические методы регистрации и позволяющие достигать еще более высоких временных разрешений.

В1.421. Фотоэлектронные регистраторы

Для наблюдения быстро изменяющихся распределений интенсивности (например, в спектрах) употребляют электрооптические преобразователи с быстрой

электрооптической разверткой изображения, так называемые фотоэлектронные регистраторы. Исследуемое спектральное распределение через щель отображается на частично прозрачный катод. Возникающие на противоположной по отношению к излучению стороне электроны ускоряются и попадают на экран электронно-лучевой трубки, на котором в результате действия электронной оптики они создают изображение щели. Если на пути электронов наложить перпендикулярно длине щели электрическое поле, то они будут быстро отклоняться, благодаря чему изображение щели на экране будет смещаться с соответствующей скоростью.

Временное разрешение, во-первых, определяется теми же эффектами, что и в фотоэлектрических приемниках: разброс времени выхода из катода $\Delta t \approx 10^{-13}$ с и разброс времени пролета вследствие разброса начальных скоростей. Последний эффект характеризуется порядком 10^{-12} с для хорошей электронно-оптической отображающей системы. (Определяющим для этого эффекта является ускорение электронов в начале пути пролета и его влияние на напряженность поля вблизи катода. При надлежащем выборе вспомогательных электродов достигаются напряженности этих полей порядка 10^6 в/м.)

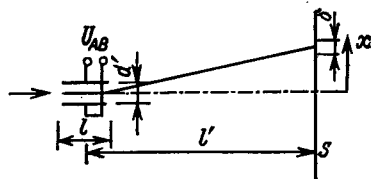
Во-вторых, временное разрешение ограничено интервалом времени $\Delta t_{\text{откл}} = \delta/v_{\text{откл}}$, в течение которого электронный луч пробегает с максимальной скоростью отклонения $v_{\text{откл}}$ минимальное пространственно разрешаемое расстояние δ на экране электронно-лучевой трубки (фиг. 10). (Аналогичный эффект ограничивает также временную разрешающую способность осциллографов.) При фиксированном напряжении $U_{\text{откл}}$ на отклоняющих пластинах электронный луч попадает в точку

$$x = \frac{e l U_{\text{откл}}}{m v_0^2 d'} = \frac{l'}{2 U_0 d'} U_{\text{откл}}$$

экрана. Если это напряжение изменять с течением времени, то электронный луч будет перемещаться по экрану со скоростью

$$v_{\text{откл}} = \frac{dx}{dt} = \frac{l'}{2 U_0 d'} \frac{dU_{\text{откл}}}{dt}$$

При скоростях отклонения порядка 10^8 м/с (при $dU_{\text{откл}}/dt \approx 10^3$ В/ 10^{-9} с) и соответствующем разрешении на экране $\delta \approx 0,1$ мм достигаются значения $\Delta t_{\text{откл}} \approx 10^{-12}$ с. Дальнейшее сокращение $\Delta t_{\text{откл}}$ в системах с линейным отклонением представляется затруднительным. Более благоприятным оказывается круговое отклонение, при котором должна изменяться не величина, а



Фиг. 10. Схема отклонения в фотоэлектронном регистраторе. S — экран; U_{AB} — отклоняющее напряжение; δ — минимальное разрешимое расстояние на экране; $v = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$ — начальная скорость электронов.

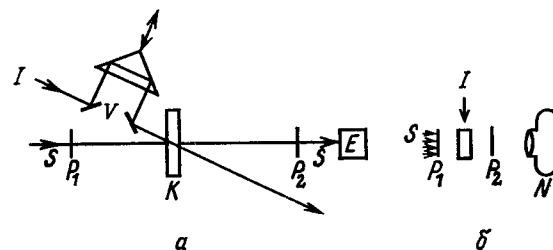
фаза отклоняющего напряжения. В технике реализуются временные разрешения порядка 10^{-12} с с линейными отклоняющими системами и порядка 10^{-13} с с камерами кругового отклонения.

В1.422. Быстродействующие оптические затворы

Дальнейшим важным вспомогательным средством для наблюдения кратковременных процессов служат быстродействующие оптические затворы, основанные на эффектах Поккельса и Керра, оптическом эффекте Керра (см. ч. I, § 2.3 и 4.1) и на насыщаемом поглощении.

При включении ячеек Керра и Поккельса с помощью наложения внешнего электрического поля достигается разрешающая способность около 10^{-9} с (обусловленная временем установления поля). Значительное сокращение времен включения таких затворов (до 10^{-12} с) может быть достигнуто при помощи оптического эффекта Керра; при этом необходимая для вращения плоскости поляризации напряженность поля создается световым лучом от вспомогательного источника, например от пи-

косекундного лазера (фиг. 11). Сильный переключающий импульс создает частичную ориентацию молекул с анизотропной поляризуемостью, вследствие чего появляются различные значения показателей преломления $n_{\parallel}^{(L)}$ и $n_{\perp}^{(L)}$. Благодаря этому происходит вращение плоскости поляризации сигнального излучения, образующей за P_1 угол 45° с направлением поляризации пере-



Фиг. 11. Оптический затвор Керра.

a — прием в течение определенного промежутка времени, задаваемого замедляющей системой; b — регистрация сигнала в различные промежутки времени при помощи устройства со «скрещенными» пучками. S — сигнальный луч; I — переключающий импульс; P_1, P_2 — скрещенные поляризаторы; K — ячейка Керра; V — оптическая замедляющая система; E — приемник; N — камера.

страиваемого излучения. Таким образом создается прозрачность \mathfrak{X} порядка

$$\mathfrak{X} = \sin^2 \left[\frac{\pi l}{\lambda_0} (n_{\parallel} - n_{\perp}) \right], \quad (\text{В1.42-1})$$

где l — длина пути в кювете, λ_0 — длина волны в вакууме. Если время установления τ_K молекулы очень мало (τ_K много меньше длительности импульса), то разность $n_{\parallel}^{(L)} - n_{\perp}^{(L)}$ пропорциональна квадрату амплитуды напряженности поля переключающего импульса $|\mathcal{E}_n(t)|^2$. При этом вследствие замедления импульса с амплитудой $\mathcal{E}_{n,0}(t)$ поле формируется за время τ : $\mathcal{E}_n(t) = \mathcal{E}_{n,0}(t - \tau)$. Для малых поворотов вектора поляризации сигнальной волны тогда получается

$$\mathfrak{X}(t) \sim |\hat{\mathcal{E}}_n(t)|^4 = |\hat{\mathcal{E}}_{n,0}(t - \tau)|^4, \quad (\text{В1.42-2})$$

а для проинтегрированного по времени сигнала U на приемнике имеем

$$U \sim \int_{-\infty}^{\infty} dt |\hat{E}_S(t)|^2 \mathfrak{I}(t) \sim \int_{\text{перекл. имп}} dt |\hat{E}_S(t)|^2 |\hat{E}_{п,0}(t - \tau)|^4. \quad (\text{B1.42-3})$$

Следовательно, сигнал U пропорционален корреляционной функции высшего порядка. Если длительность переключающего импульса мала по сравнению с временем, в течение которого величина $\hat{E}_S(t)$ претерпевает существенные изменения, то отсюда следует, что $U \sim |\hat{E}_S(\tau)|^2$. Время раскрытия оптической ячейки Керра определяется длительностью переключающего импульса, а также ориентационным временем релаксации и по порядку величины составляет несколько пикосекунд. Подходящей жидкостью для оптически настраиваемой ячейки Керра оказался CS_2 , обладающий высокой анизотропией поляризуемости и малым временем ориентационной релаксации (до 2 пс).

С помощью описанной техники сигнальное излучение должно измеряться «точечным образом», т. е. замедление перестраиваемого импульса по отношению к сигнальному импульсу должно изменяться от импульса к импульсу. Во избежание этого затруднения следует в различных точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения сигнальной волны, работать с различными временами замедления и регистрировать сигналы в этих точках отдельно, например на фотопластинке или с помощью оптического многоканального анализатора. Этот принцип может быть осуществлен на установке, схематически показанной на фиг. 11, б, в которой верхняя часть кюветы включается раньше ее нижней части. Ячейки Керра и поляризаторы в схеме фиг. 11, а могут быть заменены насыщаемым поглотителем. Под действием сильного перестраиваемого импульса поглотитель будет просветляться вследствие насыщения поглощения на соответствующем переходе. Тогда сигнальный импульс будет пропущен в течение времени, которое определяется длительностью перестраиваемого импульса и временем релаксации поглотителя. Время релаксации подходящих насыщаемых

красителей составляет около 10^{-12} с. Описанные установки применяются также для измерения самих времен релаксации.

В1.423. Корреляционные методы, основанные на эффектах НЛО

В разделе, посвященном спектральному разложению, мы упоминали о корреляционных методах, основанных на эффектах линейной оптики. Например, двухлучевой интерферометр с последующим измерением энергии излучения представляет собой простой автокоррелятор. В такой системе две идентичные волны исходят из одного источника, и после относительного замедления одной из них в течение некоторого времени τ они снова накладываются друг на друга.

Доля энергии импульса, попадающая на приемник, определяется формулой

$$b(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\tilde{\Gamma}^{(2)}(\tau)}{\tilde{\Gamma}^{(2)}(0)} \right\}, \quad (\text{B1.42-4})$$

где

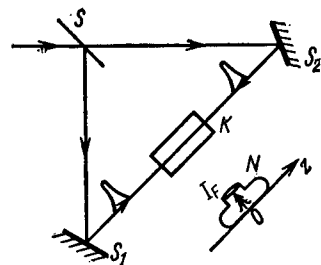
$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dt E(t) E(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} df |E(f)|^2 \exp[-i2\pi f \tau].$$

Таким образом, приемник, выходной сигнал которого пропорционален энергии импульса, позволяет измерить корреляционную функцию $\tilde{\Gamma}^{(2)}(\tau)$ и соответственно величину $|E(f)|^2$ после преобразования Фурье, т. е. может быть выполнено спектральное измерение с потерей фазовой информации для $E(f)$. Можно определить спектральную ширину Δf функции $|E(f)|^2$, но, вообще говоря, не определяется длительность импульса $T_{\text{имп}}$. Последнее определение возможно лишь при условии, что длительность импульса ограничена шириной полосы [ср. уравнение (B1.11-15) и § B1.13]. Тогда

$$T_{\text{имп}} = \frac{C_B}{\Delta_{\text{эфф}}}, \quad (\text{B1.42-5})$$

где C_B — фактор, зависящий от формы импульса, который для гауссова импульса, например определяется выражением $C_B = 2\pi/2\pi$. Однако в общем случае $T_{\text{имп}}\Delta f_{\text{эфф}} = C_1 C_B$, где $C_1 > 1$. (Для лазерных импульсов удается достичь значения $C_1 \approx 1$, однако часто измеренные значения превосходят 10.) Поэтому измерение $\Delta f_{\text{эфф}}$ может дать только нижнюю границу для длительности импульса.

Дополнительная информация получается с помощью корреляционных методов, основанных на эффектах НЛО и позволяющих измерять корреляционные функции высшего порядка.



Фиг. 12. Схема треугольного устройства для измерения длительности импульса с помощью двухфотонной флуоресценции.

S — делитель луча; S_1, S_2 — зеркала; K — кювета с флуоресцирующим двухфотонным поглотителем; N — камера для регистрации пространственного распределения флуоресцентного излучения; I_F — интенсивность флуоресценции.

пространственное распределение флуоресцентного излучения, мощность которого пропорциональна числу возбужденных молекул в области их возникновения. Поэтому ширина области перекрывания импульсов может быть измерена, и при определенных предположениях могут быть выведены заключения о длительности импульса. В предположении, что электронный переход в молекулах красителей происходит очень быстро, вероятность $w(t)$ перехода в процессе двухфотонного поглощения пропорциональна $E(t)E(t)E^*(t)E^*(t)$, и для плотности

числа частиц, возбужденных при двухфотонном поглощении за время взаимодействия со светом, можно положить

$$n_a(z) \sim \int_{-\infty}^{\infty} dt |\hat{E}(t, z)|^4, \text{ где } \hat{E}(t, z) \text{ складывается из на-}$$

пряженностей поля волн, распространяющихся вправо и влево:

$$\hat{E}(t, z) = \hat{E}_r(t, z) + \hat{E}_l(t, z) = \bar{E}\left(t - \frac{z}{v}\right)e^{-ikz} + \bar{E}\left(t + \frac{z}{v}\right)e^{ikz};$$

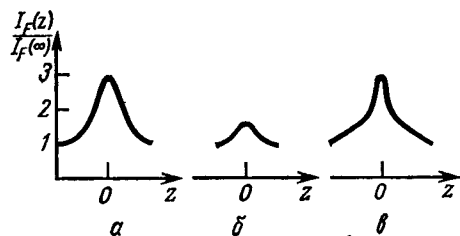
$n_a(z)$ содержит очень быстро изменяющиеся с изменением z члены с пространственными частотами $\geq 2k$ и, кроме того, члены, зависимость которых от z обусловлена только временной зависимостью амплитуд \bar{E} через время замедления $\tau = 2(z/v)$. Регистрируемый в зависимости от z флуоресцентный сигнал пропорционален $n_a(z)$. При такой регистрации, вообще говоря, разрешаются только расстояния $\Delta z \gg 1/2k$; таким же образом осуществляется усреднение по быстро осциллирующим членам, при котором роль этих членов сводится к пренебрежимо малому вкладу. (Быстро осциллирующие члены могут при усреднении давать неисчезающие значения, если имеют место более сложные механизмы переходов, например поглощение из возбужденного состояния. Таким путем удалось объяснить некоторые аномалии флуоресцентного сигнала, например в роданине 6G.) Этот сигнал $I_F(z)$, усредненный по области $z \gg 1/2k$ и проинтегрированный по времени, определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} I_F(z) &\sim \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \left| \bar{E}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right|^4 + \left| \bar{E}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right|^4 + \right. \\ &\quad \left. + 4 \left| \bar{E}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right|^2 \left| \bar{E}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right|^2 \right\} = \\ &= \Gamma^{2,2}(0, 0; 0, 0) + 2\Gamma^{2,2}\left(-\frac{\tau}{2}, +\frac{\tau}{2}; -\frac{\tau}{2}, +\frac{\tau}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{B1.42-6})$$

где $z = \frac{v\tau}{2}$ и корреляционная функция (ср. §1)

$$\begin{aligned} \Gamma^{2,2}\left(-\frac{\tau}{2}, +\frac{\tau}{2}; -\frac{\tau}{2}, +\frac{\tau}{2}\right) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \bar{E}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \bar{E}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \bar{E}^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \bar{E}^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \sim \\ &\sim \int_{-\infty}^{\infty} dt J\left(t - \frac{\tau}{2}\right) J\left(t + \frac{\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

Первый член обусловлен флуоресценцией, возбуждаемой независимо друг от друга импульсами, распространяющимися вправо или влево, или флуктуациями.



Фиг. 13. Типичные контуры двухфотонной флуоресценции.

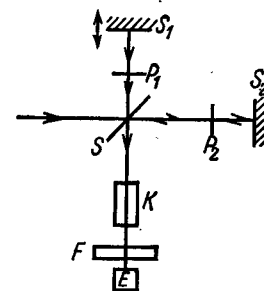
a — отдельный импульс; *b* — узкополосный шум большой длительности; *в* — «расщепленный импульс» (интервал флуктуаций, ограниченный во времени).

(Флуоресценция происходила бы и в том случае, когда оба импульса вовсе не попадали бы в кювету, быть может, из-за большого замедления одного из них.) Второй член описывает избыточную флуоресценцию, возникающую вследствие перекрытия обоих импульсов. На корреляционный сигнал всегда накладывается некоторый фон, что является определенным недостатком. Ширина области перекрытия служит мерой временной длительности измеряемых импульсов (или флуктуаций). Если удастся достичь пространственного разрешения порядка 0,01 мм, то можно разрешить времена порядка 10^{-13} с.

Кроме ширины максимума функции $J_F(z)$, характеристическим параметром является отношение контрастности $J_F(0)/J_F(z \rightarrow \infty)$. Для отдельных импульсов, построенных из идеально синхронизированных мод (импульсы, ограниченные шириной полосы), это отношение равно 3, тогда как для сигнальных флуктуаций теплового источника с тем же самым спектром частот (например, для лазера с полностью несинхронизированными модами) получается контрастное отношение, равное 1,5 (фиг. 13). На фиг. 13 представлен также сигнал двухфотонной флуоресценции для некоторого «расщепленного отдельного импульса» (ограничивающая во времени интервал флуктуаций). Этот флуоресцентный сигнал имеет такое же контрастное отношение, как и отдельный импульс, но в окрестности $z = 0$ подобен сигналу узкополосного шума. Ширина максимума на фиг. 13, *б* определяется когерентным временем сигнала, т. е. свойствами фильтрации частот. На основании хода сигнала на фиг. 13, *в* можно делать заключения как о когерентном времени шумового сигнала, так и о временной длине огибающей («ширина расщепленного импульса»).

В общем случае на основании измерения корреляционных функций нельзя однозначно судить о временной зависимости интенсивности. Такое заключение возможно, если некоторые характеристики излучения уже известны.

Недостатком метода двухфотонной флуоресценции является то, что корреляционный сигнал всегда маскируется некоторым фоном. По этой причине наблюдаемое флуоресцентное излучение относительно нечувствительно к форме импульса. Но существенное преимущество описанного измерительного метода состоит в том, что



Фиг. 14. Схема устройства для измерения длительности импульса с помощью ГВГ.

S — делитель луча; *P*₁, *P*₂ — поляризаторы; *S*₁, *S*₂ — зеркала; *K* — кристалл; *F* — фильтр, прозрачный только для 2ω ; *E* — приемник энергии.

уже при одном измерении корреляционная функция определяется для различных значений τ .

Наряду с методом двухфотонной флуоресценции для измерения корреляционного отношения применяется также генерация второй гармоники (ГВГ).

На фиг. 14 показана схема, в которой применяется ГВГ второго рода (обыкновенный луч \rightarrow необыкновенный луч \rightarrow необыкновенный луч, $o \rightarrow n \rightarrow n$), а именно две части одной волны со взаимно перпендикулярными поляризациями и с относительным замедлением в течение времени τ налагаются друг на друга в нелинейном оптическом кристалле (см. ч. I, разд. 3.22). При предположении, которые соблюдаются в большинстве экспериментов, выходной сигнал измерителя энергии позади кристалла пропорционален

$$\Gamma^{(2,2)}(0, \tau; 0, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \bar{E}(t) \bar{E}^*(t) \bar{E}^*(t + \tau) \bar{E}(t + \tau) \sim \\ \sim \int_{-\infty}^{\infty} dt J(t) J(t + \tau);$$

величина $\Gamma^{(2,2)}(0, \tau; 0, \tau)$ отлична от нуля в той области значений τ , в которой оба импульса перекрываются. Поэтому для отдельных импульсов можно на основании $\Gamma^{(2,2)}(0, \tau; 0, \tau)$ делать заключение о длительности импульса. Преимущество этого специального метода состоит в том, что благодаря схеме ($o \rightarrow n \rightarrow n$) один из двух импульсов, возникших в результате их разделения, не создает выходного сигнала. Поэтому корреляционный сигнал появляется без накладывающегося на него фона. Однако этому преимуществу противостоит тот недостаток, что корреляционную функцию приходится измерять «точечным образом», т. е. для каждого значения эксперимента должен повторяться.

В2. ПОНЯТИЯ И ЗАКОНОМЕРНОСТИ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ

В настоящем томе для описания нелинейных оптических явлений применяется квантовая теория в формулировке Дирака. Основные определения и законы этой системы понятий сопоставлены в § В2.1. Мы будем на них ссылаться позднее, не прерывая изложения конкретных проблем НЛО включением общих квантовомеханических закономерностей. Мы будем также опускать доказательства и далеко идущие интерпретации, ограничиваясь указанием учебной литературы [В2.-1, В2.-2]. В § В2.2 будет рассмотрено применение основополагающих квантовомеханических закономерностей к определенным общим проблемам, соответствующие результаты понадобятся для квантовомеханического описания поля излучения и взаимодействия излучения с атомными системами.

§ В2.1. ОСНОВОПОЛАГАЮЩИЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНОМЕРНОСТИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В2.11. Состояние, динамические переменные и наблюдаемые

Заданная физическая система характеризуется в определенном момент времени состоянием, в которое она попадет под влиянием определенных экспериментальных условий — в данном случае в рамках мысленного эксперимента. Математически состояние представляется некоторым вектором $|\psi\rangle$ в гильбертовом пространстве

\mathcal{H} векторов состояний заданной физической системы, вектор $|\psi\rangle$ удовлетворяет условию $\langle\psi|\psi\rangle > 0$. (При этом вектор $\langle\psi|$ является дуальным относительно вектора $|\psi\rangle$.) Для $|\psi\rangle$ справедливы все аксиомы и правила вычисления собственных элементов гильбертова пространства (в особенности линейность, сепарабельность, комплексность, эрмитовость метрики, полнота). Пространство \mathcal{H} может быть натянуто на полный ортонормированный базис $\{|\alpha_j\rangle\}$ со свойствами

$$\sum_j |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j| = \mathbf{I}, \quad \langle\alpha_j|\alpha_k\rangle = \delta_{jk}, \quad (\text{B2.11-1})$$

где \mathbf{I} — единичный оператор. Тогда $|\psi\rangle$ можно представить выражением

$$|\psi\rangle = \sum_j \langle\alpha_j|\psi\rangle |\alpha_j\rangle \quad (\text{B2.11-2})$$

(компонентное представление). Важные физические проблемы заставляют допустить в качестве несобственных элементов так называемые векторы Дирака; можно считать, что они возникают из собственных векторов Гильберта в результате некоторого предельного перехода. При этом приходится отказаться от дискретности базисных векторов и рассматривать уже индекс j в $|\alpha_j\rangle$ как непрерывную переменную. Полнота и ортонормированность теперь описываются условиями

$$\int |dj|\alpha_j\rangle\langle\alpha_j| = \mathbf{I}, \quad \langle\alpha_j|\alpha_k\rangle = \delta(j-k). \quad (\text{B2.11-3})$$

Компонентное представление $|\psi\rangle$ принимает вид

$$|\psi\rangle = \int dj \langle\alpha_j|\psi\rangle |\alpha_j\rangle. \quad (\text{B2.11-4})$$

Скалярное произведение $\langle\alpha_j|\alpha_k\rangle$ более не является обычной дискретной функцией, а образует некоторое распределение (« δ -функция»); $\langle\alpha_j|\psi\rangle$ является комплексной функцией вещественной непрерывной переменной j . Окончательно приведенные выше уравнения мож-

но записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_j |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j| &= \mathbf{I}, \quad \langle\alpha_j|\alpha_k\rangle = \delta(j, k) \equiv \\ &\equiv \begin{cases} \delta_{jk} & \text{— для дискретных значений,} \\ \delta(j-k) & \text{— для непрерывных значений,} \end{cases} \quad (\text{B2.11-5}) \end{aligned}$$

$$|\psi\rangle = \int_j \langle\alpha_j|\psi\rangle |\alpha_j\rangle. \quad (\text{B2.11-6})$$

Вектор состояния $|\psi\rangle$ не имеет непосредственного физического смысла, однако применение $|\psi\rangle$ позволяет получить представление для измеримых величин (ср. п. B2.12). Соответствующие соотношения построены таким образом, что результаты измерений не изменяются при переходе $|\psi\rangle \rightarrow \bar{c}|\psi\rangle$, где \bar{c} — произвольное комплексное число; следовательно, существует возможность нормировки, т. е. для $|\psi\rangle$ соблюдается условие $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Динамические переменные представляются линейными операторами, действующими на векторы; из \mathcal{H} для динамических переменных могут быть составлены уравнения движения (ср. п. B2.14).

По аналогии с векторами состояний операторы также могут быть представлены в виде разложения по компонентам; в дополнение к уравнению (B2.11-2) получается

$$\mathbf{G} = \sum_{j,k} \langle\alpha_j|G|\alpha_k\rangle |\alpha_j\rangle\langle\alpha_k|; \quad (\text{B2.11-2a})$$

Наблюдаемые являются динамическими переменными, которые могут быть измерены в следующем смысле: в некотором мысленном эксперименте в результате взаимодействия измерительной аппаратуры, характерной для рассматриваемой наблюдаемой, с заданной физической системой может быть определено вещественное измеряемое значение этой наблюдаемой. Некоторый оператор \mathbf{M} точно представляет наблюдаемую, если со-

блюдаются условия

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^+, \quad (\text{B2.11-7})$$

$$\langle m' | m'' \rangle = \delta(m', m''), \quad (\text{B2.11-8})$$

$$\sum_m |m\rangle \langle m| = \mathbf{I}, \quad (\text{B2.11-9})$$

причем выполняется уравнение для собственных значений

$$\mathbf{M} |m\rangle = m |m\rangle. \quad (\text{B2.11-10})$$

Эти уравнения включают в себя полноту и ортонормированность собственных состояний. Оператор \mathbf{M} может быть представлен посредством своих собственных значений и собственных состояний (спектральное представление):

$$\mathbf{M} = \sum_m m |m\rangle \langle m|$$

или

$$\mathbf{M} = \sum_{m, \lambda} m |m_{\lambda'}\rangle \langle m_{\lambda'}|$$

при наличии вырождения, характеризуемого индексом λ' .

Для построения операторов, которые должны представлять динамические переменные и наблюдаемые, как правило, применяются один или несколько из следующих подходов. Во-первых, образование квантовомеханических величин может выполняться по аналогии с классическими величинами: примерами могут служить координаты и импульсы, а также комплексные нормальные координаты гармонического осциллятора. Во-вторых, можно строить операторы из других операторов; например, операторы компонент орбитального момента количества движения выражаются через операторы координат и импульсов, причем формально сохраняется существующая в классической теории связь между этими величинами. Поскольку применяемые операторы не во всех случаях коммутируют, то при формировании произведений этот метод не всегда однозначно приво-

дит к цели. Часто при наличии классической аналогии к правильному результату приводит использование симметричной записи. В-третьих, введение операторов удается выполнить в связи с прямой интерпретацией микрофизических экспериментов. Наконец, вводятся операторы, которые напрашиваются при применении основополагающих преобразований и соотношений симметрии. Вообще введение динамических переменных и наблюдаемых должно происходить таким образом, чтобы была обеспечена внутренняя непротиворечивость теоретических соотношений и чтобы из них получалось правильное воспроизведение эмпирических данных.

B2.12. Описание результатов измерений

Измерение означает взаимодействие измерительной аппаратуры (которая может быть характерной для данной наблюдаемой \mathbf{M}) с физической системой и получение результата измерений (макроскопического). Сначала будет рассмотрен случай дискретного невырожденного спектра. При измерении на системе в состоянии $|\psi\rangle$ происходит нестационарное изменение состояния вследствие перехода от $|\psi\rangle$ в другое собственное состояние $|m\rangle$; об этом будет свидетельствовать измеренное соответствующее собственное значение m . Вероятность такого результата процесса измерения можно выразить в виде

$$\omega_m = \frac{\langle \psi | m \rangle \langle m | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (\text{B2.12-1})$$

Выполненное непосредственно вслед за тем измерение \mathbf{M} даст с достоверностью то же самое измеренное значение. По существу такие же результаты получаются и для непрерывного невырожденного спектра. При измерении состояние $|\psi\rangle$ размывается в состояние

$$m + \frac{\Delta m}{2} \int dm' \langle m' | \psi \rangle |m'\rangle, \\ m - \frac{\Delta m}{2}$$

где Δm — ширина интервала измерительной аппаратуры на шкале измеряемых величин (шкала m); измеренное значение будет находиться в интервале $m \pm \Delta m/2$ с вероятностью

$$\omega_{m \pm \Delta m/2} = \int_{m - \frac{\Delta m}{2}}^{m + \frac{\Delta m}{2}} dm' \frac{\langle \psi | m' \rangle \langle m' | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (\text{B2.12-2})$$

Представление, объединяющее дискретный и непрерывный случаи, может быть построено с помощью проекционных операторов. Пусть S есть подпространство \mathcal{H} , которое охватывает области дискретных (S_d) и непрерывных (S_k) собственных значений. Пространству S сопоставляется проекционный оператор вида

$$\mathfrak{P}_S |\varphi\rangle = \sum_{S_d} \langle m | \varphi \rangle |m\rangle + \int_{S_k} dm \langle m | \varphi \rangle |m\rangle. \quad (\text{B2.12-3})$$

Вероятность того, что после измерения получится собственное значение из S и состояние $\mathfrak{P}_S |\varphi\rangle$ (при произвольном $|\varphi\rangle$), определяется выражением

$$\omega_S = \frac{\langle \psi | \mathfrak{P}_S | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (\text{B2.12-4})$$

С указанными вероятностями могут быть вычислены средние значения величин, измеренных на некоторой совокупности однородных отдельных систем, причем предполагается, что эти системы в момент времени, в который производится измерение, находятся в состоянии $|\psi\rangle$. Особенно важными являются, в частности, среднее арифметическое значение (математическое ожидание)

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \sum_m m \omega_m = \frac{\langle \psi | \mathbf{M} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (\text{B2.12-5})$$

и среднее квадратичное отклонение

$$\langle (\Delta \mathbf{M})^2 \rangle = \sum_m (m - \langle \mathbf{M} \rangle)^2 \omega_m = \frac{\langle \psi | \Delta \mathbf{M}^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (\text{B2.12-6})$$

где $\Delta \mathbf{M} = \mathbf{M} - \langle \mathbf{M} \rangle$.

Для системы в состоянии $|\psi\rangle$ (невырожденном) определяется наблюдаемая \mathbf{M}_1 и непосредственно вслед за ней определяется наблюдаемая \mathbf{M}_2 . Первое измерение может дать результат из S_1 , а второе — из S_2 . Тогда физическое состояние есть $|\psi'\rangle = \mathfrak{P}_{S_1} |\psi\rangle$ на основании первого измерения и $\mathfrak{P}_{S_2} |\psi\rangle$ — на основании второго. Следует различать два случая. В случае так называемых условных измерений после первого измерения и после второго измерения система находится в одном и том же физическом состоянии. В случае безусловных измерений система находится после второго измерения в другом физическом состоянии, нежели после первого измерения.

При условных измерениях соответствующие операторы обладают свойством

$$[\mathfrak{P}_{S_1}, \mathfrak{P}_{S_2}] = 0 \leftrightarrow [\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2] = 0. \quad (\text{B2.12-7})$$

Наблюдаемые $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$, удовлетворяющие этому соотношению, называют условными наблюдаемыми. Условные наблюдаемые обладают общим набором собственных состояний. Для безусловных наблюдаемых (в строгом смысле) не существует общего собственного состояния, что эквивалентным образом может быть математически сформулировано так: не существует такого состояния $|\varphi\rangle$, для которого

$$\langle \varphi | (\Delta \mathbf{M}_1)^2 | \varphi \rangle \quad \text{и} \quad \langle \varphi | (\Delta \mathbf{M}_2)^2 | \varphi \rangle$$

одновременно равны нулю.

Для любых наблюдаемых \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \langle \varphi | (\Delta \mathbf{M}_1)^2 | \varphi \rangle \cdot \langle \varphi | (\Delta \mathbf{M}_2)^2 | \varphi \rangle \cdot \langle \varphi | \varphi \rangle^{-2} &\geq \\ &\geq \langle \varphi | \frac{[\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2]}{2i} | \varphi \rangle \langle \varphi | \varphi \rangle^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{B2.12-8})$$

Для условных наблюдаемых правая часть равна нулю. Для безусловных (в строгом смысле) наблюдаемых правая часть для любых $|\varphi\rangle$ больше нуля, так что не существует никакого общего собственного состояния наблюдаемых \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 . В соответствии с интерпретацией

функции в левой части неравенства (B2.12-8) как среднего значения рассеяния измеренных величин при измерении наблюдаемых M_1 и M_2 для систем в состоянии $|\psi\rangle$ оно называется соотношением неопределенностей. Если его правая часть равна нулю, то говорят, что наблюдаемые M_1 и M_2 могут быть одновременно и точно измерены.

Подводя итог всему вышеизложенному, мы можем высказать следующее. Применяемые для формулировки основных положений квантовой теории векторы состояний и линейные операторы динамических переменных и наблюдаемых не имеют непосредственного реального смысла, однако с их помощью представляются имеющие физический смысл величины и соотношения, доступные экспериментальной проверке. Физический смысл имеют математические ожидания (средние значения), к которым принадлежат, в частности, вероятности w_s , поскольку их можно рассматривать как математические ожидания проекционных операторов \mathcal{P}_s . Конкретные физические применения имеют собственные значения и операторные соотношения, позволяющие прогнозировать воспроизводимость измерений. Величины, имеющие физический смысл, не изменяются при замене $|\psi\rangle$ на $\tilde{c}|\psi\rangle$, где \tilde{c} — произвольное комплексное число. Все физические величины и соотношения обладают свойством инвариантности относительно унитарного преобразования U над всеми операторами G и векторами $|\varphi\rangle$:

$$G' = UGU^{-1}, \quad |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad \text{и} \quad U^{-1} = U^\dagger. \quad (\text{B2.12-9})$$

B2.13. Гильбертово пространство физической системы; перестановочные соотношения

Гильбертово пространство \mathcal{H} , сопоставленное некоторой физической системе, определяется совокупностью всех действующих в системе соотношений между динамическими переменными и наблюдаемыми. Среди этих соотношений выделяются перестановочные соотношения, выражающие в корне отличное от классического описания специфическое квантовомеханическое положение вещей. Как показано в п. B2.12, перестановочные соот-

ношения существенны также для суждения о воспроизводимости результатов измерений.

При установлении перестановочных соотношений принимаются во внимание те же аспекты, какие были перечислены в конце разд. B2.11 при введении динамических переменных и наблюдаемых. Типичным примером могут служить основные величины, встречающиеся в механике точки: координаты и линейные импульсы. Для соответствующих компонент векторов наблюдаемых существуют соотношения

$$[x_j, p_k] = i\hbar \delta_{jk}, \quad [x_j, x_k] = [p_j, p_k] = 0. \quad (\text{B2.13-1})$$

Эти соотношения играют главную роль при аксиоматическом представлении квантовой механики, но, как известно, могут быть выведены также индуктивно на основании применения принципа соответствия; кроме того, благодаря свойствам трансляционной группы, высказывания, вытекающие из уравнения (B2.13-1), находятся в тесной связи с постулированной в теории однородности пространства.

Если произвольный оператор $G = G(x_j, p_k)$ может быть представлен в виде степенного ряда с достаточной мерой сходимости, то

$$[x_k, G] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial p_k}, \quad [p_k, G] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_k}. \quad (\text{B2.13-2})$$

Классические динамические переменные G_1, G_2, G_3 являются аналогами операторов G_1, G_2, G_3 . Для этих операторов перестановочные соотношения могут быть выведены с помощью «перевода» скобок Пуассона:

$$\{G_1, G_2\} = G_3 \leftrightarrow [G_1, G_2] = -i\hbar G_3. \quad (\text{B2.13-3})$$

Таким образом, в известных границах возникает формальная аналогия между классическим и квантовомеханическим рассмотрением. Ее общая применимость, однако, ограничена вследствие того, что операторы могут не коммутировать.

Для заданной физической системы все операторные соотношения между появляющимися динамическими переменными и наблюдаемыми можно считать известными.

Может быть выделен полный набор перестановочных между собой наблюдаемых $M_1, \dots, M_j, \dots, M_n$. В смысле п. В2.12 все M_j могут быть одновременно измерены. Каждый набор собственных значений $\{m_1, \dots, m_j, \dots, m_n\}$ определяет некоторый собственный вектор $|m_1, \dots, m_j, \dots, m_n\rangle$. Ансамбль всех собственных векторов, возникающий в результате вариации по полному набору всех собственных значений, образует базис гильбертова пространства \mathcal{H} для заданной физической системы.

Важное практическое значение имеет возможность расщепления на подпространства \mathcal{H}_a . Оно может быть реализовано при следующих условиях: a -му подпространству должны быть сопоставлены операторы $M_{a1}, \dots, M_{a\alpha}$, образующие в подпространстве \mathcal{H}_a базис собственных значений, все операторы \mathcal{H}_a a -го подпространства должны коммутировать со всеми операторами других подпространств. Тогда \mathcal{H} можно представить в виде произведения подпространств \mathcal{H}_a , а базисные векторы из \mathcal{H} могут быть образованы как прямое произведение базисных векторов из отдельных подпространств. Пусть, например, оператор энергии полной системы строится аддитивно из операторов энергии H_a не взаимодействующих подсистем

$$H = \sum_a H_a, \quad [H_a, H_{a'}] = 0 \quad \text{и} \quad \hat{H}_a | \mathcal{E}_a \rangle = \mathcal{E}_a | \mathcal{E}_a \rangle. \quad (\text{В2.13-4})$$

Тогда для полной системы получим

$$H | \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E} | \mathcal{E} \rangle, \quad \mathcal{E} = \sum_a \mathcal{E}_a \quad \text{и} \quad | \mathcal{E} \rangle = \prod_a | \mathcal{E}_a \rangle. \quad (\text{В2.13-5})$$

В2.14. Временное поведение

Пусть H будет оператором Гамильтона физической системы. H может не зависеть от времени (если речь идет о консервативной системе) или зависеть от времени (если находится под действием внешних сил). В промежутки времени, в которые над системой не предпринимается никаких измерений, вектор состояния

системы удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle = H(t) | \psi(t) \rangle. \quad (\text{В2.14-1})$$

Оно может быть решено с помощью подстановки

$$| \psi(t) \rangle = U(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle. \quad (\text{В2.14-2})$$

При этом предполагается, что в интервале времени (t, t_0) при $t > t_0$ над системой не производится никаких измерений, измерение нарушило бы неопределенным образом полностью детерминированное временное изменение функции $|\psi\rangle$ (ср. п. В2.12). Временное унитарное преобразование $U(t, t_0)$ для случаев $(\partial/\partial t)H = 0$ задается выражением

$$U(t, t_0) = I \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t - t_0)\right], \quad (\text{В2.14-3})$$

а для случая $(\partial/\partial t)H \neq 0$ оно имеет вид

$$U(t, t_0) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) \dots H(t_n). \quad (\text{В2.14-4})$$

В разд. В2.12 было показано [ср. уравнение (В2.12-9)], что применение произвольного унитарного преобразования к полным операторам и векторам оставляет неизменными соотношения между величинами, имеющими физический смысл. При рассмотрении временного унитарного преобразования типа уравнения (В2.14-2) эта инвариантность открывает возможность различных интерпретаций («представлений») зависимости векторов и операторов от времени, т. е. геометрических и кинематических процессов в H . В настоящем разделе мы будем пользоваться применявшимися до сих пор представлением Шредингера (оно не характеризуется определенным обозначением) и представлением Гейзенберга (обозначение H), позднее в разд. В2.21 будет рассмотрено представление Дирака, называемое также представлением взаимодействия.

В представлении Шредингера динамической временной зависимостью обладают состояния, тогда как операторы вообще остаются независимыми от времени. В представлении Гейзенберга вектор состояния не зависит от времени, тогда как временная зависимость переносится на наблюдаемые. Переход от одного представления к другому осуществляется с помощью введенного в уравнении (B2.14-2) временного унитарного преобразования согласно

$$|\psi\rangle = U |\psi\rangle_H, \quad G = U G_H U^{-1}, \quad (B2.14-5)$$

причем предполагается, что в момент времени $t = t_0$ величины, фигурирующие в представлениях Шредингера и Гейзенберга, совпадают. Соотношение между векторами в уравнении (B2.14-5) совпадает с соотношением в уравнении (B2.14-2). В представлении Гейзенберга получим

$$|\psi\rangle_H = U^{-1} |\psi\rangle, \quad G_H = U^{-1} G U. \quad (B2.14-6)$$

Отсюда следует уравнение движения для операторов в представлении Гейзенберга, имеющее вид соотношения

$$\frac{d}{dt} G_H = \frac{1}{i\hbar} [G_H, H_H] + \frac{\partial}{\partial t} G_H, \quad \text{где} \quad \frac{\partial G_H}{\partial t} \equiv U^{-1} \frac{\partial}{\partial t} G U. \quad (B2.14-7)$$

Если предположить, что $(\partial/\partial t) H = 0$, то $H_H = H$. Если G не зависит от времени явно, то выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt} G_H = \frac{1}{i\hbar} [G_H, H_H]. \quad (B2.14-8)$$

В том случае, когда G и H коммутируют, G_H является интегралом движения.

Существует различие в протекании геометрических и кинематических процессов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} в обоих представлениях. Кроме того, представление Шредингера обладает в известной мере лучшей наглядностью, вообще легче сделать наглядным движение векторов состояний, чем движение операторов. Но встре-

чающиеся понятия таковы, что вообще проще установить корреляцию с классическим описанием представления Гейзенберга, чем представления Шредингера. В частности, уравнение движения (B2.14-7) для произвольной переменной G_H в представлении Гейзенберга при наличии классического аналога G соответствует аналогичному уравнению движения классической физики

$$\frac{d}{dt} G = -\{G, H\} + \frac{\partial}{\partial t} G. \quad (B2.14-9)$$

Чтобы сделать это положение вещей более отчетливым, полезно представить себе будто предпринят «перевод» скобок Пуассона [ср. уравнение (B2.13-3)].

B2.15. Оператор плотности

Оператор плотности ρ приписывается (реальному или мысленному) ансамблю аналогичных парциальных систем с отсутствующим или пренебрежимо слабым взаимодействием. Припишем каждой парциальной системе оператор Гамильтона H . Каждая парциальная система может находиться в различных возможных состояниях $|\psi\rangle$ (ниже предполагается, что соблюдается условие нормировки). Обозначим через $w_{|\psi\rangle}$ вероятность встретить в ансамбле парциальную систему в состоянии $|\psi\rangle$. Величина $w_{|\psi\rangle}$ удовлетворяет условиям

$$0 \leq w_{|\psi\rangle} \leq 1, \quad \sum_{|\psi\rangle} w_{|\psi\rangle} = 1.$$

Оператор плотности, который называют также статистическим оператором, определяется следующим образом:

$$\rho = \sum_{|\psi\rangle} w_{|\psi\rangle} |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (B2.15-1)$$

Если допустить дискретные состояния $|\psi_\sigma\rangle$, то можно написать $\rho = \sum_{\sigma} w_{\sigma} |\psi_{\sigma}\rangle \langle \psi_{\sigma}|$.

Если значения $w_{|\psi\rangle}$ равны нулю для всех состояний, кроме одного, то говорят, что ансамбль находится в чистом состоянии, в противном случае говорят о смешанном состоянии.

Оператор плотности обладает следующими свойствами:

$$\rho^+ = \rho, \quad (\text{B2.15-2})$$

$$\text{Sp } \rho = 1, \quad (\text{B2.15-3})$$

$$\text{Sp } \rho^2 \leq 1, \quad (\text{B2.15-4})$$

$$\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle \geq 0 \quad \text{для любых } |\varphi\rangle. \quad (\text{B2.15-5})$$

Усредненное по ансамблю измеренное значение при измерении наблюдаемой \mathbf{M} есть

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \sum_{|\psi\rangle} \omega_{|\psi\rangle} \langle \psi | \mathbf{M} | \psi \rangle = \text{Sp } \{ \rho \mathbf{M} \}. \quad (\text{B2.15-6})$$

Это означает квантовомеханическое усреднение (см. п. B2.12) по отношению к состоянию $|\psi\rangle$ и усреднение по отношению к распределению по состояниям $|\psi\rangle$.

В предположении, что в течение интервала времени (t, t_0) ансамбль остается предоставленным самому себе,

$$\left(\frac{d\omega_{|\psi\rangle}}{dt} = 0, \quad |\psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \right),$$

справедливы уравнения

$$\rho(t) = \mathbf{U}(t, t_0) \rho(t_0) \mathbf{U}^{-1}(t, t_0) \quad (\text{B2.15-7})$$

и

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [\mathbf{H}(t), \rho(t)]. \quad (\text{B2.15-8})$$

Последнее уравнение заменяет для ансамбля уравнение (B2.14-2). В случае $\partial \mathbf{H} / \partial t \neq 0$ решение уравнения (B2.15-8) имеет вид

$$\rho(t) = \rho(t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n [\mathbf{H}(t_1), \dots, [\mathbf{H}(t_n), \rho(t_0)] \dots]. \quad (\text{B2.15-9})$$

§ B2.2. ПРИМЕНЕНИЕ И ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

B2.21. Выводы

в представлении (взаимодействия) Дирака

Представим оператор Гамильтона \mathbf{H} в виде разложения на сумму двух операторов:

$$\mathbf{H} = \overset{0}{\mathbf{H}} + \overset{W}{\mathbf{H}}, \quad (\text{B2.21-1})$$

из которых первый, $\overset{0}{\mathbf{H}}$, не зависит от времени и представляет «свободную» систему, а второй, $\overset{W}{\mathbf{H}}$, может зависеть от времени и является оператором взаимодействия.

Такое разложение позволяет охватить часто встречающийся случай, когда полная система состоит из парциальных систем j, k , причем свободные, несвязанные парциальные системы описываются операторами $\overset{0}{\mathbf{H}}_j$ и $\overset{0}{\mathbf{H}}_k$, а их взаимодействие определяется членом $\overset{W}{\mathbf{H}}_{j-k}$ в энергии:

$$\mathbf{H} = \overset{0}{\mathbf{H}}_j + \overset{0}{\mathbf{H}}_k + \overset{W}{\mathbf{H}}_{j-k}. \quad (\text{B2.21-2})$$

В представлении Дирака (обозначение D) операторы зависят от времени, носителем этой временной зависимости является оператор Гамильтона $\overset{0}{\mathbf{H}}$ свободной системы, а не полный оператор Гамильтона \mathbf{H} , как это имеет место в представлении Гейзенберга. Преобразование операторов от представления Шредингера к представлению Дирака осуществляется при помощи унитарного преобразования $\overset{0}{\mathbf{U}}^{-1}$, в котором

$$\overset{0}{\mathbf{U}}(t, t_0) = \mathbf{I} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \overset{0}{\mathbf{H}}(t - t_0) \right] \quad (\text{B2.21-3})$$

и имеет вид

$$\mathbf{G}_D = \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{G} \overset{0}{\mathbf{U}} \quad \text{и} \quad \mathbf{G}_D(t = t_0) = \mathbf{G}(t_0). \quad (\text{B2.21-4})$$

Векторы состояний в представлении Дирака также зависят от времени; применение $\overset{0}{\mathbf{U}}^{-1}$ к векторам в пред-

ставлении Шредингера дает

$$|\psi\rangle_D = \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} |\psi\rangle. \quad (\text{B2.21-5})$$

Эта формула позволяет, в частности, довольно простым способом строить матричные элементы операторов с собственными векторами оператора $\overset{0}{\mathbf{H}}$, причем временная зависимость векторов может быть получена не на основании полного оператора Гамильтона, а с помощью оператора взаимодействия, которое во многих случаях можно рассматривать как «малое». Если вся система в течение интервала времени (t, t_0) не подвергается внешнему возмущению, то выполняется уравнение

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_D = \overset{\mathbb{W}}{\mathbf{H}}_D(t) |\psi(t)\rangle_D \quad (\text{B2.21-6})$$

с решением

$$|\psi(t)\rangle_D = \overset{\mathbb{W}}{\mathbf{U}}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_D, \quad (\text{B2.21-7})$$

где

$$\overset{\mathbb{W}}{\mathbf{U}}(t, t_0) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \overset{\mathbb{W}}{\mathbf{H}}_D(t_1) \dots \overset{\mathbb{W}}{\mathbf{H}}_D(t_n). \quad (\text{B2.21-8})$$

Отсюда вытекают дальнейшие следствия:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{G}_D = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{G}_D, \overset{0}{\mathbf{H}}_D] + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G}_D \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G}_D \equiv \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \overset{0}{\mathbf{U}}, \quad (\text{B2.21-9})$$

$$\overset{0}{\mathbf{H}}_D = \overset{0}{\mathbf{H}}, \quad (\text{B2.21-10})$$

$$|\psi(t)\rangle_D = |\psi(t_0)\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \overset{\mathbb{W}}{\mathbf{H}}_D(t_1) \dots \overset{\mathbb{W}}{\mathbf{H}}_D(t_n) |\psi(t_0)\rangle, \quad (\text{B2.21-11})$$

$$\rho_D(t) = \rho(t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n [\overset{\mathbb{W}}{\mathbf{H}}_D(t_1), \dots, [\overset{\mathbb{W}}{\mathbf{H}}_D(t_n), \rho(t_0)] \dots]. \quad (\text{B2.21-12})$$

Два последних уравнения можно рассматривать как результат расчета по теории возмущений, зависящих от времени, с $\overset{0}{\mathbf{H}}$ в качестве возмущающего члена. После построения матричных элементов с собственными состояниями $|\mathcal{E}\rangle, |\mathcal{E}'\rangle$ оператора $\overset{0}{\mathbf{H}}$ можно будет установить, что $(n+1)$ -й член в сумме отличается от n -го члена по порядку величины множителем

$$\eta = \left| \frac{t-t_0}{\hbar} \langle \mathcal{E} | \overset{\mathbb{W}}{\mathbf{H}} | \mathcal{E}' \rangle \right|.$$

Это свойство можно использовать для оценки меры сходимости ряда.

B2.22. Сравнение классической и квантовомеханической траектовок гармонического осциллятора

Одномерный гармонический осциллятор в механике может быть описан классически через канонически сопряженные обобщенные координаты q' и p' с представленной в нормальной форме функцией Гамильтона

$$H = H(q', p') = \frac{p'^2}{2} + \frac{\omega^2 q'^2}{2}. \quad (\text{B2.22-1a})$$

Квантовомеханическими аналогами q' и p' служат наблюдаемые \hat{q}' и \hat{p}' . Оператор Гамильтона имеет вид

$$\hat{H} = H(\hat{q}', \hat{p}') = \frac{\hat{p}'^2}{2} + \frac{\omega^2 \hat{q}'^2}{2}. \quad (\text{B2.22-1b})$$

Классические величины удовлетворяют скобкам Пуассона

$$\{q', p'\} = -1, \quad (\text{B2.22-2a})$$

тогда как для квантовомеханических величин существуют перестановочные соотношения (ср. разд. B2.13)

$$[\hat{q}', \hat{p}'] = i\hbar \mathbf{I} \quad \text{и} \quad \text{аналогично} \quad [\hat{q}', \hat{q}'] = [\hat{p}', \hat{p}'] = 0. \quad (\text{B2.22-2b})$$

Классическое описание временного поведения системы содержится в двух связанных дифференциальных

уравнениях первого порядка:

$$\frac{d}{dt} q' = \frac{\partial}{\partial p'} H = p', \quad \frac{d}{dt} p' = -\frac{\partial}{\partial q'} H = -\omega^2 q'. \quad (\text{B2.22-3a})$$

В квантовой теории им соответствуют [ср. уравнение (B.2.13-3)] два связанных уравнения движения для операторов:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{q}'_H = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'_H} \mathbf{H}_H = \mathbf{p}'_H, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p}'_H = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}'_H} \mathbf{H}_H = -\omega^2 \mathbf{q}'_H. \quad (\text{B2.22-3б})$$

Простое описание достигается путем введения комплексной нормальной координаты. Она получается при помощи линейного преобразования q' и p' :

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left(q' + i \frac{p'}{\omega} \right), \quad a^* = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left(q' - i \frac{p'}{\omega} \right). \quad (\text{B2.22-4a})$$

Радикальный множитель служит для нормировки; поскольку координата a должна быть безразмерной, то под знаком корня квадратного в знаменателе должна присутствовать величина, имеющая размерность действия. Для упрощения сравнения с квантовомеханическими соотношениями такой величиной выбрана постоянная \hbar . В квантовой механике для соответствующего преобразования используются q' и p' :

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left(\mathbf{q}' + i \frac{\mathbf{p}'}{\omega} \right), \quad \mathbf{a}^+ = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left(\mathbf{q}' - i \frac{\mathbf{p}'}{\omega} \right). \quad (\text{B2.22-4б})$$

Из перестановочных соотношений для q' и p' следует

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] = \mathbf{1}, \quad [\mathbf{a}, \mathbf{a}] = [\mathbf{a}^+, \mathbf{a}^+] = 0. \quad (\text{B2.22-4в})$$

Выражая q' и p' через a и a^* из уравнений (B2.22-4a) и подставляя их в (B2.22-1a), преобразуем функцию Гамильтона к виду

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (a^*a + aa^*), \quad (\text{B2.22-5a})$$

откуда явно видна симметричная зависимость от a и a^* . Сохраняя эту симметричную зависимость также и для

квантовомеханических величин, получим для оператора Гамильтона

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\mathbf{a}^+\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{a}^+) = \hbar\omega \left(\mathbf{a}^+\mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{1} \right). \quad (\text{B2.22-5б})$$

Временное поведение определяется двумя дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\frac{d}{dt} a = -\{a, H\} = -i\omega a, \quad \frac{d}{dt} a^* = -\{a^*, H\} = i\omega a^*. \quad (\text{B2.22-6a})$$

По отношению к описанию в переменных q' и p' [ср. уравнение (B2.22-3a)] произошло упрощение. В квантовой теории получается [ср. уравнение (B2.14-7)]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}_H = -i\omega \mathbf{a}_H, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{a}_H^+ = i\omega \mathbf{a}_H^+. \quad (\text{B2.22-6б})$$

Решениями уравнений (B1.22-6a) и (B1.22-6б) служит

$$a(t) = \hat{a} e^{-i\omega t} \quad (\text{B2.22-7a})$$

(где \hat{a} — произвольное комплексное число) и

$$\mathbf{a}_H(t) = \mathbf{a} e^{-i\omega(t-t_0)}. \quad (\text{B2.22-7б})$$

При этом принимается, что в момент времени t_0 операторы в представлениях Шредингера и Гейзенберга совпадают. Поскольку существует одно-однозначная взаимозависимость между q' , p' , с одной стороны, и между a , a^* — с другой, то классический гармонический осциллятор может быть эквивалентным образом описан как координатами q' , p' , так и комплексной нормальной координатой. Аналогичные соответствующие заключения могут быть сделаны также и для квантовомеханических величин.

Решение проблемы собственных значений оператора $\mathbf{a}^+\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}^+\mathbf{a}$ есть оператор числа частиц \mathbf{N} для бозонов) приводит согласно [B2-2] к собственным значениям

$$\mathbf{a}^+\mathbf{a} |n\rangle = n |n\rangle, \quad (\text{B2.22-8})$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Вследствие свойств

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \text{ для } n \neq 0, \\ a^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned} \quad (\text{B2.22-9})$$

a и a^+ могут быть интерпретированы как операторы уничтожения и рождения колебательных квантов [B2.-2].

B2.23. Проблема собственных значений оператора координаты, координатное представление

В согласии с уравнением (B2.13-1) для операторов x и p предполагается, что

$$x = x^+, p = p^+, [x, p] = i\hbar I, [x, x] = [p, p] = 0. \quad (\text{B2.23-1})$$

Применение вспомогательного оператора

$$X(g) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} pg\right] \quad (g \text{ — произвольная вещественная величина})$$

к уравнению для собственных значений x приводит вместе с уравнением (B2.13-2) к результату

$$x(X(g)|x\rangle) = (x+g)(X(g)|x\rangle). \quad (\text{B2.23-2})$$

Поскольку g есть любое вещественное число, то отсюда можно заключить, что спектр собственных значений непрерывен в области $-\infty < x < +\infty$ и собственное состояние имеет представление вида

$$|x\rangle = X(x)|x=0\rangle. \quad (\text{B2.23-3})$$

Из этих результатов вытекают следствия, касающиеся компонент векторов и операторов в координатном представлении. Предположим, что $F(\xi)$ есть функция ξ , которая может быть представлена достаточно хорошо сходящимся рядом, а $|\psi\rangle$ — любое состояние. Тогда имеем

$$\langle x|F(x)|\psi\rangle = F(x)\langle x|\psi\rangle, \quad (\text{B2.23-4})$$

$$\langle x|F(p)|\psi\rangle = F\left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\right)\langle x|\psi\rangle. \quad (\text{B2.23-5})$$

Учитывая векторный характер положения и импульса, соответственно получим

$$\langle r.|F(r.)|\psi\rangle = F(r.)\langle r.|\psi\rangle, \quad (\text{B2.23-6})$$

$$\langle r.|F(p.)|\psi\rangle = F\left(\frac{\hbar}{i} \nabla.\right)\langle r.|\psi\rangle. \quad (\text{B2.23-7})$$

B2.24. Вероятность результата измерений при двукратном измерении

Пусть M и G — наблюдаемые некоторой физической системы с непрерывным спектром собственных значений. Согласно B2.11, получим

$$M = \int dmm|m\rangle\langle m| = \int dmm\mathfrak{P}(m),$$

где

$$\mathfrak{P}(m) = |m\rangle\langle m|,$$

$$G = \int dgg|g\rangle\langle g| = \int dgg\mathfrak{P}(g), \quad (\text{B2.24-1})$$

где

$$\mathfrak{P}(g) = |g\rangle\langle g|.$$

Пусть далее в момент времени $t=0$ в системе, находящейся в (нормированном) состоянии $|\psi\rangle$, измерена наблюдаемая M , и в момент времени $t>0$ измерена наблюдаемая G . Спрашивается, какова вероятность $w(m \pm \Delta m, g \pm \Delta g)$ при измерении M получить результат в интервале $m \pm \Delta m$ и при измерении G — в интервале $g \pm \Delta g$? Согласно общим правилам исчисления вероятностей, имеем

$$w(m \pm \Delta m; g \pm \Delta g) = w(m \pm \Delta m)w(g \pm \Delta g|m \pm \Delta m). \quad (\text{B2.24-2})$$

Первый множитель является вероятностью наступления первого события, тогда как второй множитель выражает (условную) вероятность наступления второго события, если первое событие уже произошло.

Согласно разд. B2.12, при данных условиях можно получить для $w(m \pm \Delta m)$ и для (нормированного)

состояния $|\psi'\rangle$ непосредственно после первого измерения

$$\omega(m \pm \Delta m) = \langle \psi | \int_{m-\Delta m}^{m+\Delta m} dm' \mathfrak{P}(m') | \psi \rangle, \quad (\text{B2.24-3})$$

$$|\psi'\rangle = [\omega(m \pm \Delta m)]^{-1/2} \int_{m-\Delta m}^{m+\Delta m} dm' \mathfrak{P}(m') | \psi \rangle. \quad (\text{B2.24-4})$$

Согласно разд. B2.14, в момент времени t , т. е. перед вторым измерением, система находится в состоянии $U(t, 0) |\psi'\rangle$. Отсюда следует

$$\omega(g \pm \Delta g | m \pm \Delta m) = \langle \psi' | U^{-1}(t, 0) \int_{g-\Delta g}^{g+\Delta g} dg' \mathfrak{P}(g') U(t, 0) | \psi' \rangle. \quad (\text{B2.24-5})$$

Окончательно получаем

$$\omega(m \pm \Delta m; g \pm \Delta g) = \langle \psi | \mathfrak{P}(m \pm \Delta m, 0; g \pm \Delta g, t) | \psi \rangle, \quad (\text{B2.24-6})$$

где введен обобщенный проекционный оператор

$$\mathfrak{P}(m \pm \Delta m, 0; g \pm \Delta g) = \int_{m-\Delta m}^{m+\Delta m} dm' \mathfrak{P}(m') U^{-1}(t, 0) \times \\ \times \int_{g-\Delta g}^{g+\Delta g} dg' \mathfrak{P}(g') U(t, 0) \int_{m-\Delta m}^{m+\Delta m} dm'' \mathfrak{P}(m''). \quad (\text{B2.24-7})$$

Можно показать непосредственно, что суммирование значений $\mathfrak{P}(m \pm \Delta m; g \pm \Delta g)$ по всем интервалам m -шкалы и g -шкалы приводит к единичному оператору \mathbf{I} .

B2.25. Описание атомной системы с помощью фермионных операторов

В гл. 2 будет рассмотрено взаимодействие фотонов с атомными системами; в соответствующих процессах мы встречаемся наряду с рождением и уничтожением

фотонов, вообще говоря, с переходами между энергетическими состояниями атомных систем.

Рождение и уничтожение фотонов описывается с помощью представленного в гл. 1 формализма, в котором для фотонов применяются операторы числа частиц, рождения и уничтожения. Во многих случаях описание взаимодействия излучения с веществом значительно упрощается, если описывать также и атомные системы с помощью того же формализма, что и для электромагнитного поля, а именно вводить в рассмотрение операторы рождения и уничтожения возбужденных состояний. Как известно, такое описание атомной системы может быть выполнено при помощи формализма вторичного квантования; общее представление читатель найдет в [B2.-2].

В последующем изложении мы будем пользоваться представлением, непосредственно относящимся к применяемой во всей данной книге формулировке квантовой теории Дирака и к уже полученным на этой основе результатам.

Оператор Гамильтона атомной системы в спектральном представлении имеет вид [ср. уравнение (B2.11-11)]

$$\mathbf{H} = \sum_l \mathcal{E}_l | \mathcal{E}_l \rangle \langle \mathcal{E}_l |, \quad \sum_l | \mathcal{E}_l \rangle \langle \mathcal{E}_l | = \mathbf{I}, \quad \langle \mathcal{E}_l | \mathcal{E}_{l'} \rangle = \delta_{l, l'}. \quad (\text{B2.25-1})$$

Обозначим через \mathbf{M}_l оператор $| \mathcal{E}_l \rangle \langle \mathcal{E}_l |$. Для таких операторов непосредственно из уравнения (2.25-1) получаются следующие свойства:

$$\sum_l \mathbf{M}_l = \mathbf{I}, \quad (\text{B2.25-2})$$

$$[\mathbf{M}_l, \mathbf{M}_{l'}] = 0, \quad (\text{B2.25-3})$$

$$\mathbf{M}_l^2 = \mathbf{M}_l, \quad (\text{B2.25-4})$$

$$\mathbf{M}_l^+ = \mathbf{M}_l. \quad (\text{B2.25-5})$$

Сначала рассмотрим свойства l -значений, опуская соответствующий индекс. Если к собственному значению m оператора \mathbf{M} относится собственная функция

$|m\rangle$, то уравнение (B2.25-4) дает

$$m^2 |m\rangle = m |m\rangle.$$

Это означает, что \mathbf{M} имеет собственные значения $m = 0, 1$. В матричном представлении можно представить \mathbf{M} в виде

$$(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B2.25-6})$$

а ортонормированные собственные состояния имеют вид столбцов

$$(|0\rangle) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (|1\rangle) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

\mathbf{M} является оператором чисел заполнения, который, в противоположность оператору чисел заполнения бозонов (ср. п. B2.22), имеет только два собственных значения; это оператор чисел заполнения для фермионов. Аналогично тому как это было в случае бозонов, оператор \mathbf{M} может быть выражен через операторы рождения и уничтожения (\mathbf{b}^+ и \mathbf{b}):

$$\mathbf{M} = \mathbf{b}^+ \mathbf{b}. \quad (\text{B2.25-7})$$

Если в соответствии с интерпретацией \mathbf{b} как оператора уничтожения потребовать, чтобы действие \mathbf{b} на $|1\rangle$ дало состояние $|0\rangle$, то

$$\mathbf{b} |1\rangle = |0\rangle. \quad (\text{B2.25-8})$$

Тем самым оператор \mathbf{b} определен однозначно. В этом можно легко убедиться, если представить \mathbf{b} как квадратную матрицу второго порядка с первоначально неизвестными элементами и определить последние из уравнений (B2.25-7) и (B2.25-8). Для установленного таким способом оператора \mathbf{b} получаем

$$[\mathbf{b}, \mathbf{b}^+]_+ = \mathbf{I}, \quad [\mathbf{b}^+, \mathbf{b}^+]_+ = [\mathbf{b}, \mathbf{b}]_+ = 0, \quad (\text{B2.25-9})$$

где $[\dots]_+$ — антикоммутаторы, а операторы рождения и уничтожения фермионов подчиняются плюс-квантованию¹⁾. Далее получаются соотношения

$$\mathbf{b}^+ |0\rangle = |1\rangle, \quad \mathbf{b}^+ |1\rangle = 0, \quad \mathbf{b} |0\rangle = 0. \quad (\text{B2.25-10})$$

¹⁾ Т.е. квантованию с антикоммутаторами $[\dots]_+$. — Прим. перев.

Легко видеть, что \mathbf{b}^+ описывает заполнение первоначально пустого состояния (оператор «рождения»), тогда как \mathbf{b} вызывает опустошение первоначально занятого состояния (оператор «уничтожения»).

Согласно B2.13, оператор $\mathbf{M}_g = \sum_i \mathbf{M}_i$ имеет собственные значения $\sum_i m_i$ и собственные состояния $\Pi_i |m_i\rangle$. Из уравнения (B2.25-2) следует, что возможны только такие состояния рассматриваемой атомной системы, для которых $\sum_i m_i = 1$; это означает, что точно только одно собственное значение m_i отлично от нуля; мы обозначим соответствующее состояние через

$$|\tilde{\beta}_i\rangle = |0\rangle \dots |0\rangle |m_i = 1\rangle |0\rangle \dots \quad (\text{B2.25-10})$$

Существование только таких собственных состояний связано с тем, что при измерении энергии атомная система может быть найдена точно только в одном состоянии l . Общее состояние атомной системы может быть представлено в виде

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum_i c_i |\tilde{\beta}_i\rangle. \quad (\text{B2.25-11})$$

Это соответствует разложению по собственным энергетическим состояниям $|\psi\rangle = \sum_i c_i |\mathcal{E}_i\rangle$. Величина $|c_i|^2$ есть вероятность того, что система находится в состоянии $|\tilde{\beta}_i\rangle$; это равнозначно вероятности при измерении энергии измерить значение \mathcal{E}_i .

Легко проверить, что для любых векторов $|\tilde{\psi}\rangle$, $|\tilde{\varphi}\rangle$ или $|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle$ соблюдается условие

$$\langle \tilde{\psi} | \hat{\mathbf{H}} | \tilde{\varphi} \rangle = \langle \psi | \mathbf{H} | \varphi \rangle, \quad (\text{B2.25-12})$$

где

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_i \mathcal{E}_i \mathbf{b}_i^+ \mathbf{b}_i.$$

Для величин, имеющих физический смысл (в данном случае мы имеем в виду матричные элементы оператора энергии), должно быть, согласно п. B1.12, безразлично, исходим ли мы для представления операторов и векторов из величин \mathbf{b}_i и $|\tilde{\beta}_i\rangle$ или непосредственно из оператора энергии с его собственными состояниями. Это требование может быть использовано также для представ-

ления любых операторов \mathbf{G} атомной системы с помощью \mathbf{b}_i^+ и \mathbf{b}_i . Выдвигается требование, чтобы для любых $|\tilde{\psi}\rangle$, $|\tilde{\varphi}\rangle$ или $|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle$ выполнялось соотношение

$$\langle \tilde{\psi} | \tilde{\mathbf{G}} | \tilde{\varphi} \rangle = \langle \psi | \mathbf{G} | \varphi \rangle, \quad (\text{B2.25-13})$$

где

$$\mathbf{G} = \sum_{i, i'} \langle \mathcal{E}_i | \mathbf{G} | \mathcal{E}_{i'} \rangle | \mathcal{E}_i \rangle \langle \mathcal{E}_{i'} |.$$

Уравнение (B2.25-13) может быть удовлетворено подстановкой

$$\tilde{\mathbf{G}} = \sum_{i, i'} \langle \mathcal{E}_i | \mathbf{G} | \mathcal{E}_{i'} \rangle \mathbf{b}_i^+ \mathbf{b}_{i'}, \quad (\text{B2.25-14})$$

что можно легко проверить, применяя соотношение

$$\langle \tilde{\beta}_k | \mathbf{b}_i^+ \mathbf{b}_{i'} | \tilde{\beta}_{k'} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{для } i' = k' \text{ и } i = k, \\ 0 & \text{для всех других случаев.} \end{cases}$$

Таким образом, в целом показано, что имеющие физический смысл величины могут быть однозначно представлены величинами \mathbf{b}_i^+ , \mathbf{b}_i , $|\tilde{\beta}_i\rangle$ и $\tilde{\mathbf{G}}$. Отметим еще следующее. Обычно (см. [B2.-2) для представления основных операторов (например, координаты, импульса) в формализме вторичного квантования применяется явное пространственное интегрирование. Однако это не имеет места в вышеприведенных соотношениях, поскольку операция пространственного интегрирования скрыта в матричных элементах $\langle \mathcal{E}_i | \mathbf{G} | \mathcal{E}_{i'} \rangle$; она выступает в явном виде, если применять, в частности, координатное представление.

B2.26. Вычисление

не зависящих от времени скоростей изменений

Для физической системы принимается, что ее оператор Гамильтона распадается на член $\hat{\mathbf{H}}$ свободной системы и член взаимодействия $\hat{\mathbf{H}}$, который предполагается не зависящим от времени. Тем самым выполняются условия применимости представления Дирака

(ср. п. B2.21). К моменту времени $t = 0$ физическая система описывается оператором плотности ρ . Величины, имеющие физический смысл, образуются из (не зависящих от времени) наблюдаемых \mathbf{M} ; при этом делается допущение, что $\hat{\mathbf{M}}$ коммутирует с $\hat{\mathbf{H}}$ (это означает, что $\mathbf{M}_D(t) = \mathbf{M}$).

Сначала мы образуем математическое ожидание $\langle \mathbf{M}(t) \rangle$, применяя [ср. уравнение (B2.21-11)] не зависящую от времени теорию возмущений второго порядка по $\hat{\mathbf{H}}$.

$$\langle \mathbf{M}(t) \rangle = \langle \mathbf{M}(0) \rangle + \text{Sp} \{ \mathbf{M} \rho_D^{(1)}(t) \} + \text{Sp} \{ \mathbf{M} \rho_D^{(2)}(t) \}, \quad (\text{B2.26-1})$$

причем

$$\rho_D^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 \left(\hat{\mathbf{H}}_D(t_1) \rho - \rho \hat{\mathbf{H}}_D(t_1) \right) \text{ и } \rho \equiv \rho(t_0), \quad (\text{B2.26-2})$$

$$\begin{aligned} \rho_D^{(2)}(t) = & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[\hat{\mathbf{H}}_D(t_1) \hat{\mathbf{H}}_D(t_2) \rho + \right. \\ & \left. + \rho \hat{\mathbf{H}}_D(t_2) \hat{\mathbf{H}}_D(t_1) - \hat{\mathbf{H}}_D(t_1) \rho \hat{\mathbf{H}}_D(t_2) - \hat{\mathbf{H}}_D(t_2) \rho \hat{\mathbf{H}}_D(t_1) \right]. \end{aligned}$$

Для многих рассмотрений требуется знать изменение математического ожидания $\langle \mathbf{M}(t) \rangle$ в единицу времени, а также среднее значение за некоторый конечный промежуток времени. Для этого следует найти разностные производные

$$\frac{\Delta \langle \mathbf{M}(t) \rangle}{\Delta t} = \frac{\langle \mathbf{M}(t) \rangle - \langle \mathbf{M}(0) \rangle}{t - 0}. \quad (\text{B2.26-3})$$

В качестве примера укажем, что такая производная играет важную роль в уравнениях баланса для рождения и уничтожения частиц и состояний (в этом случае \mathbf{M} идентифицируется с оператором числа частиц) и при рассмотрении вероятностей переходов (тогда \mathbf{M} идентифицируется с проекционным оператором конечного состояния). Особое значение имеют случаи, в которых образуются независящие от времени значения скоростей

временных изменений $\Delta \langle \mathbf{M}(t) \rangle / \Delta t$. Это будет в дальнейшем объяснено на наглядном примере вероятностей переходов.

Пусть оператор плотности к моменту времени $t = 0$ будет $\rho = |\mathcal{E}_a\rangle\langle\mathcal{E}_a|$. За подлежащую рассмотрению наблюдаемую примем проекционный оператор $|\mathcal{E}_e\rangle\langle\mathcal{E}_e|$. Состояния $|\mathcal{E}_a\rangle$ и $|\mathcal{E}_e\rangle$ являются различными собственными состояниями оператора \mathbf{H} (имеет место свойство $\langle\mathcal{E}_e|\mathcal{E}_a\rangle = 0$); как правило, излагаемые ниже результаты применяются к вырожденным системам \mathbf{H} , так что различные собственные состояния могут реализоваться также и в случае равных собственных значений. Математическое ожидание $\langle \mathbf{M}(t) \rangle$ представляет собой при заданных \mathbf{M} и ρ вероятность $w_{a \rightarrow e}(t)$ того, что к моменту времени t система находится в состоянии $|\mathcal{E}_e\rangle$, если к моменту времени $t = 0$ она находилась в состоянии $|\mathcal{E}_a\rangle$. При подстановке в уравнение (B2.26-1) обнаруживается, что вследствие свойства $\langle\mathcal{E}_e|\mathcal{E}_a\rangle = 0$ в $\langle \mathbf{M}(t) \rangle$ исчезают все члены, у которых в произведениях операторов справа или слева снаружи стоит оператор ρ ; следовательно, только два последних слагаемых из члена второго порядка вносят ненулевой вклад:

$$w_{a \rightarrow e}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \times \\ \times \left[\langle\mathcal{E}_e|\mathbf{H}_D(t_1)|\mathcal{E}_a\rangle\langle\mathcal{E}_a|\mathbf{H}_D(t_2)|\mathcal{E}_e\rangle + \{KK\} \right] = \\ = \frac{1}{\hbar^2} \langle\mathcal{E}_e|\mathbf{H}|\mathcal{E}_a\rangle^2 \cdot t^2 \sin^2 \left[\frac{\omega_{ea}t}{2} \right] / \left[\frac{\omega_{ea}t}{2} \right]^2, \quad (\text{B2.26-4})$$

где $\omega_{ea} = (\mathcal{E}_e - \mathcal{E}_a)/\hbar$. Выражение для $w_{a \rightarrow e}(t)$ имеет при фиксированном t максимум при $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_a$. Из уравнения (B2.26-4) видно, что для достаточно малых t состояния с неравными собственными значениями ($\mathcal{E}_e \neq \mathcal{E}_a$) также обладают вероятностями переходов, сравнимыми с максимальным значением $w_{a \rightarrow e}(t)$. Это имеет смысл закона сохранения энергии «в статистической форме»; для появления конечных вероятностей переходов необходимо условие $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_a$, а достаточным яв-

ляется приближенное равенство $\mathcal{E}_e \approx \mathcal{E}_a$. Средняя скорость изменения вероятности перехода есть

$$\frac{\Delta w_{a \rightarrow e}(t)}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle\mathcal{E}_e|\mathbf{H}|\mathcal{E}_a\rangle|^2 \frac{|e^{i\omega_{ea}t} - 1|^2}{2\pi\omega_{ea}^2 t}. \quad (\text{B2.26-5})$$

Учитывая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{i\omega_{ea}t} - 1|^2 / 2\pi\omega_{ea}^2 t = \delta(\omega_{ea}),$$

получим для больших t среднюю вероятность перехода в единицу времени:

$$\frac{\Delta w_{a \rightarrow e}(t)}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle\mathcal{E}_e|\mathbf{H}|\mathcal{E}_a\rangle|^2 \cdot \delta(\mathcal{E}_e - \mathcal{E}_a), \quad (\text{B2.26-6})$$

т. е. выражение, не зависящее от времени. Практически это выражение применяется при следующем предположении: хотя с макрофизической точки зрения интервал времени $(0, t)$ может считаться малым, он все-таки достаточно велик по сравнению с тем временем, в течение которого протекают характеристические переходные процессы атомной системы. Эту концепцию называют в литературе «крупнозернистость во временной области» (coarse-graining).

Если в интервале энергий $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_0 + \Delta\mathcal{E}_a$ содержится несколько состояний $|\mathcal{E}_a\rangle$ или если в интервале энергий $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_0 + \Delta\mathcal{E}_e$ содержится несколько состояний $|\mathcal{E}_e\rangle$, то вводится понятие полной вероятности перехода $w(t)$. Поскольку ширины интервалов считаются малыми, то для собственных значений имеем $\mathcal{E}_e \approx \mathcal{E}_a$. На основании результата, содержащегося в уравнении (B2.26-4), полная вероятность перехода может быть представлена в виде

$$w(t) = \sum_{\mathcal{E}_e \approx \mathcal{E}_a} w_{a \rightarrow e}(t). \quad (\text{B2.26-7})$$

Здесь предполагается суммирование по всем состояниям, для которых $\mathcal{E}_e \approx \mathcal{E}_a$. Мы будем считать начальное состояние $|\mathcal{E}_a\rangle$ фиксированным и будем варьировать состояния $|\mathcal{E}_e\rangle$ в некоторой области \mathcal{E}_e ; число состояний на единицу энергии задается функцией плотности $\sigma(\mathcal{E}_e)$. Тогда полную вероятность перехода для

заданного t можно записать в следующей форме:

$$W(t) = \frac{t^2}{\hbar^2} \int d\mathcal{E}_e \sigma(\mathcal{E}_e) |\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H} | \mathcal{E}_a \rangle|^2 \frac{\sin^2 \left[\frac{\omega_{ea} t}{2} \right]}{\left[\frac{\omega_{ea} t}{2} \right]^2}. \quad (\text{B2.26-8})$$

Третий множитель под знаком интеграла существенно отличен от нуля только в интервале энергий шириной $4\pi\hbar/t$. Предполагается, что первые два множителя под

знаком интеграла $\sigma(\mathcal{E}_e)$ и $|\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H} | \mathcal{E}_a \rangle|^2$ в области значений энергии шириной $4\pi\hbar/t$ могут рассматриваться как гладкие функции. Тогда эти два множителя в хорошем приближении могут быть вынесены за знак интеграла, и мы получим

$$W(t) = \frac{t^2}{\hbar^2} \sigma(\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_a) |\langle \mathcal{E}_e (= \mathcal{E}_a) | \mathbf{H} | \mathcal{E}_a \rangle|^2 \times \\ \times \int d\mathcal{E}_e \frac{\sin^2 \left[\frac{\omega_{ea} t}{2} \right]}{\left[\frac{\omega_{ea} t}{2} \right]^2} = \frac{2\pi}{\hbar} t \sigma(\mathcal{E}_a) |\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H} | \mathcal{E}_a \rangle|^2. \quad (\text{B2.26-9})$$

Очевидно, что при заданных функциях $\sigma(\mathcal{E}_e)$, $|\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H} | \mathcal{E}_a \rangle|^2$ переход от уравнения (B2.26-8) к уравнению (B2.26-9) оправдан лишь в том случае, когда t заранее считается достаточно большой величиной. Для средней скорости временного изменения полной вероятности перехода получается следующее выражение, не зависящее от времени:

$$\frac{\Delta W(t)}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\hbar} \sigma(\mathcal{E}_a) \cdot |\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H} | \mathcal{E}_a \rangle|^2. \quad (\text{B2.26-10})$$

Аналогичные результаты получались бы, если бы мы конечное состояние $|\mathcal{E}_e\rangle$ считали фиксированным, а начальные состояния рассматривали бы как переменные.

B2.27. Влияние диссипативной системы на динамическую систему

При *реальной* оценке свойств атомной системы наряду с учетом свойств системы, рассматриваемой изолированно, неизбежно следует принимать во внимание

влияние окружения или других систем. Поясним сказанное на примере. В качестве атомной системы будем рассматривать определенную молекулу в газе; ее поведение в первую очередь обусловлено электронной и ядерной структурой этой молекулы, однако вследствие существования потенциалов взаимодействия на нее будут оказывать влияние окружающие молекулы. В широком диапазоне экспериментальных условий это влияние может описываться как возмущение стохастического характера. Соответствующий потенциал взаимодействия существенным образом определяется стохастическим трансляционным движением окружающих молекул. Такая ситуация означает на языке статистики, что система с относительно малым числом степеней свободы (они определяются электронным и ядерным движением выделенной молекулы) противостоит система с очень большим (в пределе с бесконечно большим) числом степеней свободы, принадлежащих окружающим молекулам. Первую из названных систем называют динамической системой, а вторую диссипативной системой [5, B2.27-1].

В качестве причины взаимодействий статистического характера до сих пор приводился пример теплового движения частиц газа. Другими важными примерами служат влияние тепловых колебаний решетки, а также влияние хаотического электромагнитного излучения на атомную систему. К этим случаям также применима схема воздействия диссипативной системы на динамическую, тогда как обратное действие нас здесь не интересует, поскольку диссипативную систему мы считаем очень большой.

Здесь следует указать на то, что во многих важных случаях в хорошем приближении свойства макроскопического газового ансамбля можно описать как понимаемые в указанном выше смысле реальные свойства отдельной частицы газа. Таким образом, развитая выше концепция разложения на динамическую и диссипативную системы приводит к полезному методу достаточно точного описания макроскопического газового ансамбля; его точное микрофизическое описание потребовало бы чрезмерно сложных расчетов вследствие гигантского числа частиц и не было бы оправданным с точки зрения

возможности интерпретации доступных проверке предсказаний.

В п. B2.271 мы примем во внимание влияние диссипативной системы посредством образования усредненных по ансамблю значений оператора плотности динамической системы. Это приводит к соотношениям, позволяющим сравнительно простым образом описать влияние диссипации на ансамбль, причем вводятся в рассмотрение времена релаксации, имеющие непосредственное отношение к эксперименту. Метод, объясненный в п. B2.272, дает возможность наряду с диссипацией охватить также флуктуации отдельной атомной системы, что существенно для описания спонтанно протекающих процессов.

B2.271. Описание диссипации при помощи значений, усредненных по ансамблю

Предполагаемая изолированной динамической система описывается гамильтонианом $\overset{0}{\mathbf{H}}$.

Существенные результаты настоящего раздела могут быть выведены на основании полуклассического рассмотрения. Пусть в месте нахождения динамической системы действует (обобщенная) сила $F(t)$, создаваемая диссипативной системой; F считается c -числом. Оператор Гамильтона динамической системы представим в виде

$$\mathbf{H} = \overset{0}{\mathbf{H}} + \overset{R}{\mathbf{H}}, \quad \overset{R}{\mathbf{H}} = \mathbf{G}F(t), \quad (\text{B2.27-1})$$

где оператор взаимодействия $\overset{R}{\mathbf{H}}$ представляет собой произведение множителя динамической системы — оператора (\mathbf{G}) и множителя диссипативной системы $F(t)$, который является стохастической функцией. Сделаем предположение о стационарности процессов. Тогда, как известно, свойства $F(t)$ можно характеризовать следующим способом. На шкале времени выбираются достаточно большие одинаковые интервалы T ; для r -го интервала предполагается, что заданная функция есть $F^{(r)}(t)$ при $t_r \leq t \leq t_r + T$. Распределение вероятностей

по коэффициентам рядов Фурье для $F^{(r)}(t)$ может служить для характеристики статистических свойств $F(t)$ и определяет также корреляционную функцию. Конечная область корреляции стохастической функции $F(t)$ есть τ_c .

Мы рассматриваем ансамбль одинаковых динамических систем; будем считать, что на r -й член ансамбля действует стохастическая функция $F^{(r)}(t)$; это означает, что для r -й динамической системы оператором взаимодействия является $\mathbf{G}F^{(r)}(t) = \overset{R}{\mathbf{H}}^{(r)}(t)$. Для всех членов ансамбля взаимодействие включается в момент времени $t = 0$, и к этому времени оператор плотности имеет для всех членов ансамбля одинаковое значение, а именно

$\rho^{(r)}(0) = \rho(0)$. Так как $\overset{R}{\mathbf{H}}^{(r)}$ является статистическим случайным оператором, то $\rho^{(r)}(t)$ при $t > 0$ обладает таким же характером. Задача заключается в получении определяющего уравнения для среднего значения $\overline{\rho^{(r)}(t)} = \rho(t)$; оно необходимо для представления эмпирических состояний важных ансамблей. Будем исходить из уравнения движения в представлении Дирака для r -го члена ансамбля:

$$\frac{d}{dt} \rho_D^{(r)} = -\frac{i}{\hbar} [\overset{R}{\mathbf{H}}_D^{(r)}, \rho_D^{(r)}]. \quad (\text{B2.27-2})$$

Интегрируя, получим

$$\rho_D^{(r)}(t) = \rho_D^{(r)}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [\overset{R}{\mathbf{H}}_D^{(r)}(t'), \rho_D^{(r)}(t')]. \quad (\text{B2.27-3})$$

Подстановка этого выражения в правую часть уравнения (B2.27-2) дает при $\tau = t - t'$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_D^{(r)} = & -\frac{i}{\hbar} [\overset{R}{\mathbf{H}}_D^{(r)}, \rho_D^{(r)}(0)] - \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau [\overset{R}{\mathbf{H}}_D^{(r)}(t), [\overset{R}{\mathbf{H}}_D^{(r)}(t - \tau), \rho_D^{(r)}(t - \tau)]] \end{aligned} \quad (\text{B2.27-4})$$

или при усреднении по ансамблю

$$\frac{d}{dt} \rho_D = - \frac{i}{\hbar} \overline{[\mathbf{H}_D^{(r)}, \rho_D^{(r)}(0)]} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \overline{[\mathbf{H}_D^{(r)}(t), [\mathbf{H}_D^{(r)}(t-\tau), \rho_D^{(r)}(t-\tau)]].} \quad (\text{B2.27-5})$$

Мы можем принять, что $\rho_D^{(r)}(0)$ и $\mathbf{H}^{(r)}$ не коррелированы, так что среднее значение $\mathbf{H}^{(r)}$ по ансамблю обращается в нуль.

Первое свойство соблюдается строго в предположении, что взаимодействие впервые включается при $t=0$, когда $\rho_D(0)$ принимает равные значения для всех членов ансамбля. Если бы взаимодействие было включено уже раньше, то $\rho_D^{(r)}(0)$ зависело бы от $\mathbf{H}^{(r)}$ при $t < 0$.

Поскольку $\mathbf{H}^{(r)}(t)$ и $\mathbf{H}^{(r)}(t-\tau)$ коррелированы между собой, то возникает также корреляция между $\rho_D(0)$ и $\mathbf{H}^{(r)}$ для $t > 0$. Мы, однако, предположим, что корреляцией между $\mathbf{H}^{(r)}(t)$ и $\mathbf{H}^{(r)}(t-\tau)$ для $\tau > \tau_c$ можно пренебречь. Тогда корреляционный эффект между $\mathbf{H}^{(r)}(t)$ и $\rho_D(0)$ для $\tau > \tau_c$ также является пренебрежимым.

Исчезновение $\mathbf{H}^{(r)}$ должно означать, что для усредненных по ансамблю значений всех матричных элементов этого оператора $\overline{\mathbf{H}_{n,n'}^{(r)}} = 0$. Это допущение не следует считать ограничением, постольку поскольку невозмущенной системе можно сопоставить исчезающие и более от r не зависящие средние значения.

Если еще принять во внимание закон, согласно которому для некоррелированных множителей среднее по ансамблю значение произведения равно произведению средних значений, то при этих двух допущениях получим

$$\overline{\mathbf{H}_D^{(r)} \rho_D^{(r)}(0)} = \overline{\mathbf{H}_D^{(r)}} \cdot \overline{\rho_D^{(r)}(0)} = 0. \quad (\text{B2.27-6})$$

Интегралы в уравнении (B2.27-5) будем вычислять при условии, что изменениями величин $\rho_D^{(r)}$ и ρ_D за корреляционное время τ_c стохастической функции $F^{(r)}(t)$ можно пренебречь. При заданном τ_c это означает ограничение, накладываемое на величину взаимодействия согласно условию $(1/\hbar^2) |\overline{\mathbf{H}}|^2 \tau_c^2 \ll 1$; $|\overline{\mathbf{H}}|^2$ — значения произведений матричных элементов оператора взаимодействия. При этом предположении можно пренебречь корреляцией $\rho_D^{(r)}(t-\tau)$ с $\mathbf{H}^{(r)}(t)$ и $\mathbf{H}^{(r)}(t-\tau)$, а также их произведениями. (Без большой ошибки можно заменить $\rho_D^{(r)}(t-\tau)$ на $\rho_D^{(r)}(t-\tau-\tau_c)$. Очевидно, что $\rho_D^{(2)}(t-\tau-\tau_c)$ с указанными операторами не коррелирует.) Кроме того, при сделанных предположениях мы можем расширить верхний предел интегрирования до бесконечности. (По опре-

делению множителя $\overline{\mathbf{H}_D^{(r)} \mathbf{H}_D^{(r)}(t-\tau)}$ существенно отличны от нуля только для $\tau \leq \tau_c$. Поэтому область интегрирования выше τ_c не вносит существенного вклада, что и дает возможность при $t > \tau_c$ расширить интегрирование до бесконечности.) Применяя эти предположения, образуем матричные элементы уравнения (B2.27-5):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{Dkl} = & - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{m,n} \int_0^\infty d\tau \overline{\{ \mathbf{H}_{Dkm}^{(r)}(t) \mathbf{H}_{Dmn}^{(r)}(t-\tau) \rho_{Dnl}(t-\tau) - } \\ & - \overline{\mathbf{H}_{Dkm}^{(r)}(t) \mathbf{H}_{Dnl}^{(r)}(t-\tau) \rho_{Dmn}(t-\tau) - } \\ & - \overline{\mathbf{H}_{Dnl}^{(r)}(t) \mathbf{H}_{Dkm}^{(r)}(t-\tau) \rho_{Dmn}(t-\tau) + } \\ & + \overline{\mathbf{H}_{Dnl}^{(r)}(t) \mathbf{H}_{Dmn}^{(r)}(t-\tau) \rho_{Dkm}(t-\tau) \}. \quad (\text{B2.27-7}) \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение существенно отлично от нуля только в интервале $0 < \tau \leq \tau_c$, в котором оператор плотности $\rho_D(t-\tau)$ не изменяется существенно с изменением τ . Поэтому в интеграле уравнения (B2.27-7) можно заменить $\rho_D(t-\tau)$ на $\rho_D(t)$. Кроме того, мы

введем в рассмотрение матричные элементы оператора взаимодействия в представлении Шредингера с помощью соотношения

$$H_{mn}^{(r)}(t) = e^{-i\omega_{mn}t} H_{Dmn}^{(r)}(t).$$

После соответствующей перестановки индексов суммирования получим из уравнения (В2.27-7)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{Dkl} = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{m, n} \int_0^\infty d\tau \left\{ \left[\sum_p \overline{H_{kp}^{(r)}(t) H_{pm}^{(r)}(t-\tau) e^{-i\omega_{np}\tau}} \right] \times \right. \\ & \times \delta_{nl} e^{i\omega_{km}t} - \overline{H_{km}^{(r)}(t) H_{nl}^{(r)}(t-\tau) e^{-i\omega_{nl}\tau} e^{i(\omega_{km} + \omega_{nl})t}} - \\ & - \overline{H_{nl}^{(r)}(t) H_{km}^{(r)}(t-\tau) e^{-i\omega_{km}\tau} e^{i(\omega_{km} + \omega_{nl})t}} + \\ & \left. + \left[\sum_p \overline{H_{pl}^{(r)}(t) H_{np}^{(r)}(t-\tau) e^{-i\omega_{np}\tau}} \right] \delta_{km} e^{i\omega_{nl}t} \right\} \rho_{Dmn}(t) \end{aligned} \quad (\text{В2.27-8})$$

или в сокращенной записи

$$\frac{d}{dt} \rho_{Dkl} = \sum_{m, n} R_{kl, mn} \rho_{Dmn}(t) e^{i(\omega_{km} + \omega_{nl})t}. \quad (\text{В2.27-9})$$

Здесь следует заметить, что вследствие стационарности диссипативного возмущения коэффициенты $R_{kl, mn}$, как

и отдельные средние значения $\overline{H_{km}^{(r)}(t) H_{nl}^{(r)}(t-\tau)}$, не зависят от t .

В уравнении (В2.27-8) мы можем пренебречь быстро осциллирующими во времени членами, так как они не вносят существенного вклада в изменение ρ_{Dkl} . Допустим, что имеет место такое расположение уровней энергии динамической системы, при котором соотношение $\omega_{km} + \omega_{nl} \approx 0$ выполняется только в одном из двух следующих случаев.

Во-первых, $m = k, n = l$ (тогда может быть $k = l$). Во-вторых, $k = l, m = n$. Это означает, что не встречаются равные или приблизительно равные энергетиче-

ские расстояния. Таким образом, из уравнения (В2.27-9) следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{Dkl} &= R_{kl, kl} \rho_{Dkl}(t) \quad \text{для } k \neq l, \\ \frac{d}{dt} \rho_{Dkl} &= \sum_m R_{kk, mm} \rho_{Dmm}(t) \end{aligned} \quad (\text{В2.27-10})$$

или в итоговой записи

$$\frac{d}{dt} \rho_D = R \rho_D. \quad (\text{В2.27-11})$$

Уравнения (В2.27-8) — (В2.27-11) выполняются при условиях

$$\frac{1}{\hbar^2} |H|^2 \tau_c^2 \ll 1 \quad \text{или} \quad |R|^2 \tau_c^2 \ll 1.$$

По тому, как они были выведены, и по характеру уравнения (В2.27-10) или (В2.27-11) являются уравнениями, «крупнозернистыми во времени» (см. разд. В2.26). Они связывают между собой значения $\rho_D(t_1)$ и $\rho_D(t_2)$ для разностей времен $|t_1 - t_2|$ порядка τ_c . Этими дифференциальными уравнениями и можно воспользоваться для вычисления $\rho_D(t)$ из $\rho_D(0)$ для значений $t \gg \tau_c$.

Для более легкой интерпретации можно переписать второе уравнение (В2.27-10) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \rho_{Dkk} = \sum_m \omega_{mk} \rho_{Dmm}(t) - \left(\sum_p \omega_{kp} \right) \rho_{Dkk}(t), \quad (\text{В2.27-12})$$

где

$$R_{kk, mm} = \omega_{mk}, \quad R_{kk, kk} = \omega_{kk} - \sum_p \omega_{kp}.$$

ρ_{kk} есть вероятность найти динамическую систему в состоянии k ; ω_{mk} есть вероятность перехода из состояния m в состояние k . Таким образом, уравнение (В2.27-12) представляет собой уравнение баланса для вероятностей заполнения, а в форме

$$\frac{dN_k}{dt} = \sum_m \omega_{mk} N_m - \sum_p \omega_{kp} N_k \quad (\text{В2.27-13})$$

оно служит уравнением баланса для числа частиц N_k отдельных молекулярных уровней в ансамбле, содержащем $\sum_k N_k = N$ молекул.

Мы показали, как коэффициенты матрицы затухания R в зависимости от ее структуры могут быть вычислены по матричным элементам оператора взаимодействия R H , в частности при этом получается $w_{kl} = w_{lk}$. При практическом применении уравнений (В2.27-10) — (В2.27-13) элементы матрицы R , вообще говоря, рассматриваются как самостоятельно и независимо друг от друга введенные феноменологические величины; сказанное относится также к соотношению между w_{kl} и w_{lk} . Экспериментальные результаты показывают, что после больших промежутков времени (т. е. после достижения теплового равновесия) релаксационные процессы приводят к соотношениям

$$\rho_{Dkk}(\infty) = \rho_{Dmm}(\infty) \exp\left[-\frac{\hbar\omega_{km}}{kT}\right], \quad \rho_{Dkl}(\infty) = 0 \quad \text{для } k \neq l. \quad (\text{В2.27-14})$$

Чтобы фактически воспользоваться этими величинами в нашем описании стационарного случая, вследствие уравнения (В2.27-13), т. е. вследствие того, что $\sum_m w_{mk} \rho_{Dmm}(\infty) - \left(\sum_p w_{kp}\right) \rho_{Dkk}$ для всех k , должно выполняться соотношение

$$w_{kl} = w_{lk} \exp\left[\frac{\hbar\omega_{kl}}{kT}\right]. \quad (\text{В2.27-15})$$

В эксперименте обнаружена также асимметрия релаксационных процессов, схематически представленная на фиг. 15. В настоящем разделе был применен полуклассический метод, который при вычислении параметров затухания может дать принципиально правильные результаты только в случае $T \rightarrow \infty$. Соотношение (В2.27-15) может быть выведено только из такого расчета, в котором диссипативная система также рассматривается квантовомеханически. На практике часто вводят в уравнения (В2.27-12) и (В2.27-13) вместо вероят-

ностей переходов времени релаксации

$$T_{km} = \frac{\rho_{mm}^e}{w_{km}} \quad (\text{В2.27-16})$$

($\rho_{mm}^e = \rho_{mm}(\infty)$ — значение матрицы плотности при тепловом равновесии). Тогда применение уравнений (В2.27-14) и (В2.27-15) при учете того, что $\rho_{Dkk} = \rho_{kk}$ приводит к результату

$$\frac{d}{dt} \rho_{kk} = - \sum_m \frac{1}{T_{km}} (\rho_{kk} \rho_{mm}^e - \rho_{kk}^e \rho_{mm}). \quad (\text{В2.27-17})$$

В частном случае, когда все $1/T_{km}$ в уравнении (В2.27-17) равны, получается при $T_{km} = T_k$ вследствие условия $\sum_m \rho_{mm} = \sum_m \rho_{mm}^e = 1$

$$\frac{d}{dt} \rho_{kk} = - \frac{1}{T_k} (\rho_{kk} - \rho_{kk}^e). \quad (\text{В2.27-18})$$

Если, кроме того, T_k не зависит от k , что, например, соблюдается с самого начала для двухуровневой системы, то $T_k \equiv T_0$ называют продолжным временем релаксации.

Для описания затухания недиагональных членов введем, согласно уравнению

$$\frac{1}{R_{kl, kl}} = -\tau_{kl}, \quad (\text{В2.27-19})$$

времена релаксации второго рода, с которыми из (В2.27-10) найдем

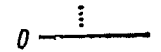
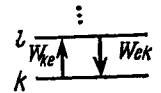
$$\frac{d}{dt} \rho_{Dkl} = - \frac{1}{\tau_{kl}} \rho_{Dkl} \quad (\text{В2.27-20})$$

или, подставляя

$$\rho_{Dkl} = e^{i\omega_{kl}} \rho_{kl},$$

получим

$$\frac{d}{dt} \rho_{kl} = -i\omega_{kl} \rho_{kl} - \frac{1}{\tau_{kl}} \rho_{kl}. \quad (\text{В2.27-21})$$



Фиг. 15. Схематическое представление релаксационных переходов.

Если все времена релаксации τ_{kl} равны друг другу (или если только один переход вовлечен в процесс релаксации), то $\tau_{kl} \equiv \tau_{lr}$.

Величины T_{l0} и τ_{lr} называются в спектроскопии спинового резонанса соответственно продольным и поперечным временем релаксации. T_{l0} есть время релаксации, в течение которого затухает компонента намагничивания, параллельная направлению поля, причем этот процесс связан с изменением энергии спиновой системы. Напротив, τ_{lr} выражает время затухания поперечной компоненты намагничивания; в это затухание вносят вклад также такие процессы, которые оказывают влияние только на соотношение фаз отдельных спинов, но не на энергию спиновой системы.

Из уравнений (В2.27-18) и (В2.27-20) видно, что диагональные элементы матрицы плотности благодаря процессам релаксации для больших времен стремятся к равновесным значениям, которые в общем случае отличны от нуля. В то же время недиагональные элементы через релаксацию стремятся к нулю по экспоненциальному закону, что находится в согласии с экспериментальными фактами.

В2.272. Уравнение движения
для операторов динамической системы при наличии связи с диссипативной системой

Характеристические свойства уравнения движения операторов динамической системы, находящейся под влиянием диссипативной системы, можно представить на простых конкретных моделях. В дальнейшем изложении мы будем описывать динамическую систему в одном случае как гармонический осциллятор (эта модель уже использовалась для приближенного рассмотрения молекулярных колебаний), а в другом случае как двухуровневую систему. Для диссипативной системы мы в обоих случаях исходим из модели системы излучающих осцилляторов, находящихся в тепловом равновесии. В соответствии с этим они создают в том месте, где находится атомная система, хаотическое излучение. Взаимодействие между атомной и диссипативной си-

стемами включается в момент времени $t=0$ (операторы в представлениях Шредингера, Гейзенберга и взаимодействия в этот момент совпадают). Выбирая надлежащим образом начало отсчета энергии, получим для оператора Гамильтона диссипативной системы

$$\hat{H} = \sum_{\mu}^D \hat{H}_{\mu}, \quad \hat{H}_{\mu} = \hbar\omega_{\mu} c_{\mu}^{\dagger} c_{\mu}, \quad (\text{В2.27-22})$$

где c_{μ}^{\dagger} и c_{μ} — операторы рождения и уничтожения (бозонные операторы) μ -й моды. Число мод на единицу круговой частоты $N_{\omega}(\omega)$, согласно уравнению (1.12-30), равно

$$N_{\omega}(\omega) = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \quad (\text{В2.27-23})$$

(V — объем исследуемой области). Оператор плотности и диссипативной системы в момент $t=0$ есть

$$\rho = \prod_{\mu}^D \rho_{\mu} \quad \text{при} \quad \langle n_{\mu} | \rho_{\mu} | m_{\mu} \rangle = \delta_{n_{\mu}, m_{\mu}} \frac{\exp[-\hbar\omega_{\mu} n_{\mu} / kT]}{\text{Sp} \{ \exp[-\hat{H}_{\mu} / kT] \}}, \quad (\text{В2.27-24})$$

где $|n_{\mu}\rangle$, $|m_{\mu}\rangle$ — собственные состояния μ -й моды. К моменту времени $t=0$ в месте нахождения атомной системы, которое мы можем определить как $r=0$, напряженность поля есть

$$E = \sum_{\mu} i e_{\mu} \cdot \left(\frac{\hbar\omega_{\mu}}{2V\epsilon_0} \right)^{1/2} c_{\mu} + \{NA\} \quad (\text{В2.27-25})$$

(e_{μ} — единичный вектор поляризации).

В случае гармонического осциллятора мы пользуемся оператором Гамильтона атомной системы в виде

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(a^{\dagger} a + \frac{1}{2} I \right). \quad (\text{В2.27-26})$$

Как явствует из п. В2.22, пространственную координату следует выбрать в виде $(\hbar/2\omega)^{1/2} (a + a^{\dagger})$, так что для дипольного момента следует

$$d = -e \cdot (\hbar/2\omega)^{1/2} (a + a^{\dagger}) e. \quad (\text{В2.27-27})$$

Взаимодействие между динамической и диссипативной системами будем описывать членом вида $-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$, что соответствует применению дипольного приближения, которое будет детально рассмотрено в разд. 2.21. Здесь следует заметить, что этот член взаимодействия

имеет ту же структуру, что и выражение для \mathbf{H} в (B2.27-1). В самом деле, здесь присутствует множитель $(-\mathbf{d})$, соответствующий динамической системе, и множитель (\mathbf{E}) , принадлежащий диссипативной системе. Пренебрегая нерезонансными членами (ср. разд. 2.22), представим член взаимодействия в виде

$$\mathbf{H}^R = \hbar (\mathbf{a}^+ \mathbf{M} + \mathbf{M}^+ \mathbf{a}), \quad \mathbf{M} = \sum_{\mu} g_{\mu} \mathbf{c}_{\mu}, \quad (B2.27-28)$$

$$g_{\mu} = ie \left(\frac{\omega_{\mu}}{4V \epsilon_0 \omega} \right)^{1/2} (e \cdot e_{\mu}).$$

\mathbf{M} называется оператором возбуждения диссипативной системы.

Предположим, что нам известна в явном виде временная зависимость оператора $\mathbf{a}_H(t)$ для $t \geq 0$ и что заданы начальные условия (оператор плотности всей системы в момент времени $t = 0$). Тогда, могут быть сделаны все важные высказывания, связанные с энергией и с дипольным моментом атомной системы, а также с корреляторами в форме $\langle \mathbf{a}_H^+(t_1) \mathbf{a}_H(t_2) \rangle$. Явное решение уравнений движения в замкнутой форме для всех операторов системы найти невозможно, так как для этого потребовалось бы включить в расчет уравнения движения для всех $\mathbf{c}_{\mu H}(t)$. Однако в хорошем приближении можно получить сравнительно простое дифференциальное уравнение отдельно для $\mathbf{a}_H(t)$, в котором влияние диссипативной системы учитывается полностью.

Точное уравнение движения для $\mathbf{a}_H^{\dot{c}}(t)$, согласно (B2.14-7), имеет вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}_H^+(t) = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{a}_H^+(t), \mathbf{H}_H^A(t) + \mathbf{H}_H^D(t) + \mathbf{H}_H^R(t)] = i\omega \mathbf{a}_H^+(t) + iM_H^+(t), \quad (B2.27-29)$$

где $\mathbf{M}_H^+(t)$ содержит зависящие от времени операторы $\mathbf{c}_{\mu H}^+(t)$ диссипативной системы, которые в свою очередь через соответствующие уравнения движения связаны с $\mathbf{a}_H(t)$. В дальнейших рассуждениях мы исследуем влияние диссипативной системы на атомную систему, но не будем конкретно интересоваться временным изменением диссипативной системы, которую будем считать очень большой (большое число степеней свободы). Если бы диссипативная система не оказывала влияния на атомную систему, то относящийся к атомной системе оператор

$$\mathfrak{A}^+(t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{a}_H^+(t) - i\omega \mathbf{a}_H^+(t) \quad (B2.27-30)$$

постоянно равнялся бы нулю. Но при наличии вынуждающей силы он не исчезает и изменяется со временем. Из уравнения (B2.27-29) следует

$$\mathfrak{A}^+(t) = iM_H^+(t) = i\mathbf{U}^{\mathbb{W}-1}(t, 0) \mathbf{M}_D^+(t) \mathbf{U}^{\mathbb{W}}(t, 0), \quad (B2.27-31)$$

где $\mathbf{U}^{\mathbb{W}}$ — заданный уравнением (B2.21-7) унитарный оператор в представлении Дирака. В рассматриваемом случае его первое слагаемое следует найти из выражения

$$\mathbf{U}^{\mathbb{W}}(t, 0) = \mathbf{I} + (i\hbar)^{-1} \int_0^t dt' \mathbf{H}_D^R(t') + \dots$$

При разложении правой части уравнения (B2.27-31) в наинизшем порядке получается

$$\mathfrak{A}^+(t) = iM_D^+(t) = i \sum_{\mu} g_{\mu}^* \mathbf{c}_{\mu}^+ e^{i\omega_{\mu} t}. \quad (B2.27-32)$$

Это точно соответствует той вынуждающей силе, которая ко времени $t > 0$ вызывается изолированной диссипативной системой, не подвергнутой влиянию атомной системы. При учете приближения следующего порядка (квадратичного по \mathbf{M}) для $\mathfrak{A}^+(t)$ получим

$$\mathfrak{A}^+(t) = iM_D^+(t) - \mathbf{a}_D^+(t) \int_0^t dt' \sum_{\mu} |g_{\mu}|^2 e^{i(\omega_{\mu} - \omega)(t-t')}. \quad (B2.27-33)$$

При вычислении мы использовали перестановочные соотношения для операторов бозонов c_μ и коммутативность a с c_μ^+ , c_μ . Если принять во внимание, что диссипативная система есть система с непрерывным спектром, то стоящую под интегралом сумму можно представить в упрощенной форме. Применяя понятие плотности мод, перейдем от суммы к интегралу:

$$\sum_\mu \dots \rightarrow \int_0^\infty d\omega' N_\omega(\omega') |g_{\omega'}|^2 e^{i(\omega' - \omega)(t-t')} c g_{\omega'} = g_\mu, \omega' = \omega_\mu.$$

По аналогии с методом, изложенным в разд. B1.26, вынесем за знак интеграла медленно меняющиеся члены. Окончательно получим

$$\sum_\mu \dots \approx N_\omega(\omega) |g_\omega|^2 2\pi\delta(t-t').$$

Тогда из уравнения (B2.27-33) следует

$$\mathfrak{M}^+(t) = iM_D^+(t) - \beta a_S^+(t), \quad (B2.27-34)$$

где β — константа, определяемая свойствами атомной и диссипативной систем и равная $N_\omega(\omega) |g_\omega|^2 2\pi$.

Мы установили, что в момент времени $t = 0$ операторы Гейзенберга, Дирака и Шредингера совпадают. Поэтому уравнение (B2.27-34) представляет собой соотношение между операторами $a_H(t')$ и их производными с различными временными аргументами t' , причем значения t' удовлетворяют неравенству $t \geq t' \geq 0$. Целесообразно в соответствии с физической проблемой выделить главную зависимость от времени с помощью подстановки

$$a_H^+(t') = a_S^+(t') e^{i\omega t'}, \quad (B2.27-35)$$

где множитель $a_S^+(t')$ медленно изменяется со временем. Тогда уравнение (B2.27-34) переходит в уравнение

$$\frac{d}{dt} a_S^+(t) = \Gamma^+(t) - \beta a_S^+(t), \quad (B2.27-36)$$

где $\Gamma^+(t) = iM_D^+(t) e^{-i\omega t}$. В смысле разд. B2.26 мы рассмотрим это уравнение с точки зрения концепции

«крупнозернистости». С одной стороны, будем считать интервал времени $(0, t)$ макрофизически настолько малым, что в этом интервале $a_S^+(t')$ изменяется довольно незначительно; но, с другой стороны, этот интервал времени достаточно велик, чтобы в соответствии с микрофизическими свойствами входящий в уравнение (B2.27-33) интеграл заменить на β . Если в этом смысле ширину временного интервала стремиться к нулю, то в качестве уравнения движения получим

$$\frac{d}{dt} a_S^+(t) = \Gamma^+(t) - \beta a_S^+(t). \quad (B2.27-37)$$

Это уравнение оправдало себя при определении временной зависимости атомных операторов в *макрофизические* промежутки времени. Присоединяя флуктуационный оператор $\Gamma^+(t)$ (его стохастические свойства мы сейчас объясним детально) и член с затуханием $-\beta a_S^+(t)$ к «невозмущенному» дифференциальному уравнению $(d/dt) a_S^+(t) = 0$, мы получим описание влияния диссипативной системы на атомную систему.

Для образования математических ожиданий ρ^D следует, помимо других операций, вычислить след ρ . Все операторы или произведения операторов, зависящие от Γ^+ или $\Gamma \equiv (\Gamma^+)^+$ линейно, дадут нуль; в частности,

$$\text{Sp} \{ \rho \Gamma^+(t) \} = \text{Sp} \{ \rho \Gamma(t) \} = 0. \quad (B2.27-38)$$

То же самое справедливо вообще для произведений нечетного порядка. Среднее значение произведений второго порядка равно нулю [как $\Gamma^+(t_1) \Gamma^+(t_2)$ и $\Gamma(t_1) \Gamma(t_2)$], но эти произведения могут принадлежать также к типу δ -функции, как

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \rho \Gamma^+(t_1) \Gamma(t_2) \} &= \\ &= \sum_{\mu, \mu'} g_\mu^* g_\mu e^{i\omega_\mu t_1 - i\omega_\mu' t_2 - i\omega(t_1 - t_2)} \text{Sp} \{ \rho c_\mu^+ c_\mu \} = \\ &= \sum_\mu |g_\mu|^2 e^{i(\omega_\mu - \omega)(t_1 - t_2)} \zeta_\mu = \\ &= 2\beta \zeta_\omega \delta(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (B2.27-39)$$

Здесь было принято во внимание, что образование следа произведения $c_{\mu}^+ c_{\mu}$ дает неисчезающее значение только для $\mu = \mu'$, а именно

$$\zeta_{\mu} = \left(\exp \left[\frac{\hbar \omega_{\mu}}{kT} \right] - 1 \right)^{-1};$$

сумму $\sum_{\mu} \dots$ мы определили приближенно по методу, аналогичному указанному в дополнении к уравнению (B2.27-33). Таким образом, получаем

$$\text{Sp} \left\{ \rho \Gamma(t_1) \Gamma^+(t_2) \right\} = 2\beta (\zeta_{\omega} + 1) \delta(t_1 - t_2). \quad (\text{B2.27-40})$$

Математические ожидания корреляционных флуктуаций порядка выше первого (т. е. произведения более чем двух множителей) однозначно получаются из математических ожиданий корреляционных функций первого порядка. Описанные свойства позволяют заключить, что Γ^+ и Γ являются силами Ланжевена марковского типа.

В предыдущем изложении мы применили некоторые приближения. Их допустимость вытекает из того, что решение дифференциального уравнения (B2.27-37) обеспечивает для всех t соблюдение перестановочного соотношения

$$[a_H(t), a_H^+(t)] = [a_S(t), a_S^+(t)] = 1,$$

являющегося необходимым следствием основ квантовой теории. В случае *двухуровневой системы* полный оператор Гамильтона имеет вид

$$H = \hbar \omega b^+ b + \sum_{\mu} \hbar \omega_{\mu} c_{\mu}^+ c_{\mu} + \hbar (b^+ M + M^+ b). \quad (\text{B2.27-41})$$

Первое слагаемое есть оператор Гамильтона атомной системы, причем b^+ , b — операторы Паули, удовлетворяющие перестановочным соотношениям для фермионных операторов (ср. разд. B2.25); $\hbar \omega$ равно разности энергий верхнего и нижнего уровней. Сумма $\sum_{\mu} \dots$ есть снова оператор Гамильтона диссипативной системы. Последнее слагаемое является оператором взаимодействия. При применении дипольного приближения и при-

ближения вращающейся волны (см. разд. 2.22) оператор b^+ играет такую же роль в операторе взаимодействия, как оператор a^+ в рассмотренном выше случае (ср. разд. 2.21 и 2.22; только теперь следует величины g_{μ} в M положить равными $i(\omega_{\mu} \hbar 2V \epsilon_0)^{1/2} (d_{01} \cdot e_{\mu})$, где d_{01} — матричный элемент дипольного момента. Точное уравнение движения для $b_H^+(t)$ имеет вид

$$\frac{d}{dt} b_H^+(t) = i\omega b_H^+(t) + iM_H^+(t) \{I - 2b_H^+(t) b_H(t)\}. \quad (\text{B2.27-42})$$

Сравнение с уравнением (B2.27-29) указывает на усложнение по отношению к случаю гармонического осциллятора; в случае двухуровневой системы в уравнении движения появляется нелинейный член.

Для решения уравнения (B2.27-42) мы воспользуемся тем же методом, что и для гармонического осциллятора; для двухуровневой системы величина $\mathfrak{B}^+(t)$ должна быть вычислена согласно уравнению

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^+(t) &= \frac{d}{dt} b_H^+(t) - i\omega b_H^+(t) \\ &= iU^{-1}(t, 0) M_D^+(t) \{I - 2b_D^+(t) b_D(t)\} \times \\ &\quad \times U(t, 0). \end{aligned} \quad (\text{B2.27-43})$$

При определенных условиях [B2.27-2] для медленно меняющейся компоненты $b_S^+(t) = b_H^+(t) e^{-i\omega t}$ получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} b_S^+(t) = \Gamma^+(t) \{I - 2b_S^+(t) b_S(t)\} - \beta(1 + 2\zeta\omega) b_S^+(t). \quad (\text{B2.27-44})$$

Его можно применить по аналогии с соответствующим уравнением для гармонического осциллятора [уравнение (B2.27-37)] для определения атомарных операторов в макrofизических интервалах времени.

В предыдущих рассуждениях в п. B2.272 мы применяли к диссипативной системе наглядную модель системы осцилляторов поля излучения. Диссипативные

системы иного физического характера также приводят в зависимости от их структуры к таким же конечным результатам — к уравнениям (B2.27-37) и (B2.27-44), если они обладают одинаковыми главными свойствами: квазинепрерывный спектр с определенной плотностью мод, описание при помощи операторов рождения и уничтожения со свойствами бозе-операторов, взаимодействие с атомной системой через стохастическую вынуждающую силу, причем оператор взаимодействия билинейно содержит операторы атомной и диссипативной систем. Соответствующие диссипативной системе величины Γ , β , ζ_ω в окончательных уравнениях должны, правда, быть иначе интерпретированы с физической точки зрения по сравнению со случаем поля излучения.

Решение уравнения (B2.27-44) для атомной двухуровневой системы делает возможным вычисление времен релаксации и ширин линий (ср. п. 3.113). Для расшифровки эмпирических результатов часто требуется такое описание диссипативной системы и взаимодействия, которое исходит из названных выше главных свойств. Так, в ряде проблем оказывается необходимым применение более сложных операторов взаимодействия, в которых операторы атомной и диссипативной систем не входят исключительно в линейном виде [B2.27-2].

B2.28. Квантование колебаний одномерной цепочки одинаковых атомов и массивонагруженной нити

Пусть *цепочка* состоит из Ω одинаковых атомов массы M . Равновесное расстояние между соседними атомами обозначим l (фиг. 16).

При классическом описании мы исходим из того, что между атомами действуют линейные упругие силы. Силую постоянную взаимодействия между соседними атомами обозначим через C , а взаимодействиями между несоседними атомами пренебрежем. Тогда уравнение движения α -го атома имеет вид

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 q_\alpha}{dt^2} &= -C(q_\alpha - q_{\alpha+1}) - C(q_\alpha - q_{\alpha-1}) = \\ &= C(q_{\alpha+1} - 2q_\alpha + q_{\alpha-1}), \end{aligned} \quad (\text{B2.28-1})$$

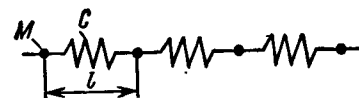
где q_α — отклонение от положения равновесия в направлении цепи (направление z). Вся система описывается функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2M} \sum_\alpha p_\alpha^2 + \frac{C}{2} \sum_\alpha (q_\alpha - q_{\alpha+1})^2, \quad (\text{B2.28-2})$$

где $p_\alpha = M(dq_\alpha/dt)$ — импульс α -й частицы. Мы считаем цепочку периодически замкнутой, так что $q_\alpha(t) = q_{\pi+\alpha}(t)$. Решение ищем в виде

$$q_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{ik\alpha l} a'_k(t) + \{KK\}, \quad (\text{B2.28-3})$$

где k играет роль вещественного волнового числа. Подстановка этого решения в уравнение (B2.28-1) приводит



Фиг. 16. Модель цепочки одинаковых атомов.

к дифференциальному уравнению для функции $a'_k(t)$ с гармоническим решением

$$a'_k(t) = a'_k(0) e^{-i\omega(k)t}, \quad (\text{B2.28-4})$$

причем связь между k и $\omega(k)$ задается дисперсионным соотношением

$$\omega(k) = 2 \sqrt{\frac{C}{M}} \left| \sin \frac{kl}{2} \right|. \quad (\text{B2.28-5})$$

Поскольку $z_\alpha = \alpha l$ является равновесной пространственной координатой α -й частицы, то решение для $q_\alpha(t)$ можно интерпретировать как волну с частотой $\omega(k)$, волновым числом k и постоянной волновой амплитудой $a'_k(0)$. Вследствие условия периодичности величина k может принимать только дискретные значения

$$k = \frac{2\pi}{\Omega l} m \quad \text{при} \quad -\frac{\Omega}{2} < m \leq \frac{\Omega}{2}, \quad (\text{B2.28-6})$$

где m — целое число. Волновая амплитуда a'_k имеет размерность длины; по соображениям, аналогичным приведенным в разд. B2.22 при введении комплексной нормальной координаты, мы перейдем к безразмерной комплексной волновой амплитуде a_k с помощью преобразования

$$a'_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega(k)}} a_k. \quad (\text{B2.28-7})$$

Тогда функция Гамильтона запишется в виде

$$H = \sum_k \frac{\hbar\omega(k)}{2} (a_k^* a_k + a_k a_k^*), \quad (\text{B2.28-8})$$

а отклонение α -й частицы как

$$q_\alpha(t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega M\omega(k)}} a_k(t) e^{ik\alpha l} + \{KK\}. \quad (\text{B2.28-9})$$

Последнее выражение представляет собой разложение по дискретным модам. Зная $q_\alpha(t)$, можно простым способом найти импульс $p_\alpha(t)$ α -й частицы. Из соотношений для $q_\alpha(t)$ и $p_\alpha(t)$ путем некоторого преобразования величины $a_k(t)$ и $a_k^*(t)$ представляются как функции $q_\alpha(t)$ и $p_\alpha(t)$.

Пользуясь известными перестановочными соотношениями

$$[q_\alpha, q_{\alpha'}] = i\hbar l \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad [q_\alpha, p_{\alpha'}] = [p_\alpha, p_{\alpha'}] = 0 \quad (\text{B2.28-10})$$

для операторов координаты q_α и импульса p_α , мы можем перейти к квантованию. Для этой цели следует классическую зависимость между величинами (a_k, a_k^*) и (q_α, p_α) распространить на операторы a_k, a_k^* для волновых амплитуд. Тогда будут выполняться перестановочные соотношения

$$[a_k, a_{k'}^+] = l \delta_{k, k'}, \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^+, a_{k'}^+] = 0 \quad (\text{B2.28-11})$$

и функция Гамильтона (B2.22-8) примет вид оператора Гамильтона

$$H = \sum_k \hbar\omega(k) \left(a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right). \quad (\text{B2.28-12})$$

Эта процедура соответствует принятой в разд. B2.22; линейная цепочка рассматривается как совокупность независимых друг от друга гармонических осцилляторов с различными волновыми числами k (различными модами). Собственные значения энергии одного из осцилляторов имеют вид

$$\mathcal{E}(n_k) = \hbar\omega(k) n_k + \frac{\hbar\omega(k)}{2}, \quad (\text{B2.28-13})$$

где второй член выражает энергию нулевого колебания. Величина n_k может быть интерпретирована как число колебательных квантов (здесь: акустических фононов), находящихся в моде с волновым числом k . Здесь следует заметить, что оператор $\hbar k (a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \mathbf{I})$ принято называть оператором квазиимпульса; если не принимать во внимание колебание с $k=0$, то этот оператор не связан с оператором полного импульса $\sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha$ и относится

только к движению атомов относительно друг друга. Мода, характеризуемая значением $k=0$, описывает одинаковое трансляционное движение всех структурных элементов цепочки. Рассматриваемая цепочка инвариантна относительно трансляции на произвольное расстояние, кратное l ; в связи с этим для процессов, в которых участвуют фононы из многих мод, соблюдается закон сохранения квазиимпульса $\sum_j \hbar k_j = \hbar m (2\pi/l)$, где $m2\pi/l$ есть произвольный обратный вектор решетки.

От рассмотренной модели цепочки с изолированными точечными массами можно перейти к непрерывному постоянному распределению масс, т. е. к модели нити. В такой теории континуума упругие силы следует заменить напряжениями, действующими в противоположных направлениях при относительном сдвиге элемента объема нити.

При классическом рассмотрении отклонение $q_\alpha(t)$ становится функцией $q(z, t)$ непрерывной координаты z . Легко видеть, что выражение

$$q_{\alpha-1}(t) - 2q_\alpha(t) + q_{\alpha+1}(t) = q(z-l, t) - 2q(z, t) + q(z+l, t)$$

следует рассматривать как приближение для величины $l^2 (\partial^2/\partial z^2) q(z, t)$; в соответствии с этим из уравнения (В2.28-1) путем надлежащего предельного перехода ($l \rightarrow 0$, $\pi \rightarrow 0$, причем длина нити $\bar{l} = l\Omega$ должна сохранять фиксированное конечное значение, а предельные значения $C\bar{l}$ и M/\bar{l} должны стремиться к фиксированным конечным значениям \tilde{C} и \tilde{M}) получается уравнение

$$\tilde{M} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \tilde{C} \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}. \quad (\text{В2.28-14})$$

Это уравнение движения можно вывести также другим путем (ср. ч. I, разд. 2.51), а именно с помощью общего формализма Лагранжа для полей [В2.28-1]. Пользуясь плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \tilde{M} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tilde{C} \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)^2, \quad (\text{В2.28-15})$$

можно определить сопряженную с q плотность импульса

$$\tilde{p} = \partial \mathcal{L} / \partial \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)$$

и тогда плотность гамильтониана примет вид

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\tilde{M}} \tilde{p}^2 + \frac{1}{2} \tilde{C} \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)^2. \quad (\text{В2.28-15a})$$

При разбиении нити на отдельные малые, но не исчезающие ячейки длиной l получим среднее значение отклонения β -й ячейки:

$$\bar{q}(z_\beta, t) = \frac{1}{l} \int_{z_\beta - (l/2)}^{z_\beta + (l/2)} dz' g(z', t) \equiv \bar{q}_\beta(t).$$

Тогда соответствующий канонический импульс есть

$$\bar{p}_\beta(t) = \tilde{p}(z_\beta, t) l.$$

При переходе к квантованию следует заменить величины (q, \tilde{p}) и (\bar{q}, \bar{p}) на операторы $(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})$ и $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$. Для вывода перестановочных соотношений отдельные ячейки

могут рассматриваться как изолированные частицы, и поэтому можно записать

$$[\mathbf{q}_\beta(t), \tilde{\mathbf{p}}_{\beta'}(t)] = i\hbar \delta_{\beta, \beta'}.$$

Это означает, что операторы, не принадлежащие одной ячейке, коммутируют, а операторы \mathbf{q} и $\tilde{\mathbf{p}}$, принадлежащие одной ячейке, не коммутируют между собой. При предельном переходе $l \rightarrow 0$ из формулы

$$[\bar{\mathbf{q}}_\beta(t), \bar{\mathbf{p}}_{\beta'}(t)] = i\hbar \frac{\delta_{\beta, \beta'}}{l}$$

следует соотношение

$$[\mathbf{q}(z, t), \tilde{\mathbf{p}}(z', t)] = j\hbar \delta(z - z'). \quad (\text{В2.28-16a})$$

Аналогичным образом получаем

$$[\mathbf{q}(z, t), \mathbf{q}(z', t)] = [\tilde{\mathbf{p}}(z, t), \tilde{\mathbf{p}}(z', t)] = 0. \quad (\text{В2.28-16b})$$

(Здесь следует заметить, что заданные уравнениями (В2.28-16) перестановочные соотношения по аналогии с подходом, изложенным в разд. В2.22, могут быть получены также непосредственно путем квантовомеханической формулировки скобок Пуассона для q и \tilde{p} , которые могут быть построены с помощью функциональных производных.) Вследствие операторного характера \mathbf{q} и $\tilde{\mathbf{p}}$ плотность гамильтониана и функция Гамильтона всей нити также становятся операторами \mathcal{H} , H . Исходя из этих соображений, можно вывести дифференциальное уравнение для \mathbf{q} (или для $\tilde{\mathbf{p}}$). Его решение имеет ту же структуру, что и классическое соотношение (В2.28-9), и при переходе к континууму записывается в представлении Гейзенберга в следующем виде:

$$\mathbf{q}_H(z, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\tilde{l}\tilde{M}_\omega(k)}} \mathbf{a}_k e^{i[kz - \omega(k)t]} + \{HA\}. \quad (\text{В2.28-17})$$

Если рассматривать нить длиной \bar{l} как основную область периодичности, то вследствие условия $\mathbf{q}_H(z, t) =$

$= q_H(z + m\vec{l}, t)$ имеем

$$k = \frac{2\pi}{l} m \quad \text{при } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

a_k, a_k^\dagger являются операторами волновых амплитуд, через которые может быть выражен гамильтониан:

$$H = \sum_k \hbar\omega(k) \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \mathbf{1} \right). \quad (\text{B2.28-18})$$

Сравнение (B2.28-18) и (B2.28-12) свидетельствует о соответствии результатов для цепочки одинаковых атомов и для нити.

Глава 1

ОПИСАНИЕ ИЗОЛИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Как показывают многочисленные эксперименты и правильное описание их результатов, лишь квантовая теория в состоянии адекватным образом описать как волновые, так и корпускулярные свойства электромагнитного поля. Только с помощью такой теории можно определить, в каких предельных случаях допустимо приближенное описание с помощью классических полей, как это было, например, сделано в первой части данной книги.

В этой главе мы сначала рассмотрим изолированное электромагнитное поле в вакууме, т. е. в отсутствие носителей зарядов и токов проводимости, порождающих источники в уравнениях поля. Мы выполним квантование этого поля. Исходным пунктом будет служить классическая теория электромагнитного излучения Максвелла, которая трактуется в § 1.1.

В дальнейшем изложении квантовый подход применяется для представления полей как системы несвязанных гармонических осцилляторов и их квантования. Такой путь не только обладает преимуществом простоты и наглядности, но и позволяет представить квантованные поля в таких формах (разложение по модам), которые необходимы для применений в квантовой электронике и в нелинейной оптике.

Следует отметить, что при заданных здесь граничных условиях те же самые результаты получаются из общего формализма квантования поля. (Методика, которую мы здесь применяем к фотонам, представлена в разд. B2.28 применительно к фононам.)

§ 1.1. ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.11. Уравнения Максвелла

При указанных во введении условиях электромагнитное поле может быть описано классически системой уравнений Максвелла в следующей форме:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\frac{\partial V}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= -\frac{\partial D}{\partial t}, & \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.11-1)$$

Они выражают связь между напряженностью электрического поля \mathbf{E} , вектором электрического смещения \mathbf{D} , напряженностью магнитного поля \mathbf{H} и магнитной индукцией \mathbf{B} . При таком описании полевые величины \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} имеют прямой физический смысл. Однако для многих целей оказывается проще представить свойства полей с помощью потенциалов; хотя потенциалы не могут быть непосредственно измерены, они связаны соотношениями зависимости с введенными ранее полевыми величинами, т. е. с измеримыми величинами. В общем случае при наличии источников и токов максвелловское поле также можно описать при помощи векторного потенциала \mathbf{A} и скалярного потенциала \mathcal{V} , из которых получаются измеримые полевые величины \mathbf{E} и \mathbf{B} согласно уравнениям

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \mathcal{V}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.11-2)$$

Как известно, потенциалы можно подчинить дополнительным условиям без изменения физически измеримых величин, т. е. потенциалы можно «калибровать». В отсутствие зарядов, действующих как источники, можно с самого начала положить $\mathcal{V} = 0$ и придать условию калибровки форму

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (1.11-3)$$

называемую кулоновской калибровкой. Таким образом, при отсутствующих зарядах и токах можно описать

максвелловское поле одним только векторным потенциалом, из которого полевые величины определяются согласно уравнениям

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{H} &= \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \\ \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} &= \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.11-4)$$

Подстановка этих выражений в систему уравнений Максвелла (1.11-1) приводит к следующему волновому уравнению для \mathbf{A} :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0. \quad (1.11-5)$$

Кроме самих локальных величин поля, по потенциалу \mathbf{A} можно найти другие важные величины, отображающие интегральные свойства поля во всем пространстве. Последнее мы представляем себе здесь неограниченным. Такими величинами служат полная энергия H и полный импульс P_F , определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3r \left[\epsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right], \\ P_F &= -\epsilon_0 \int d^3r \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right], \end{aligned} \quad (1.11-6)$$

где интегрирование распространяется на все пространство. При этом естественно предположить, что \mathbf{A} убывает в бесконечности достаточно быстро, чтобы были обеспечены конечные значения полной энергии и полного импульса поля.

1.12. Разложение векторного потенциала по модам

Из соотношений разд. 1.11. следует, что все физически измеримые величины поля при заданных условиях могут быть выведены из векторного потенциала \mathbf{A} . Поэтому мы постараемся найти наиболее удобное представление этой величины как функции пространственных и временных координат.

Полное определение \mathbf{A} для конкретной физической проблемы требует всегда такой конкретизации общего решения дифференциального уравнения в частных

производных (1.11-5), которая обеспечивала бы выполнение граничных и начальных условий данной проблемы. Для этого во всех типичных случаях векторный потенциал должен быть охарактеризован в некоторой конечной области пространства; это означает задание компонент A . для бесконечно большого числа *несчетных* значений r ., образующих r -континуум. Существование этого множества создает трудности при проведении конкретных расчетов, особенно при решении вопросов нормировки. Поэтому целесообразно найти такой метод, в котором без ограничения общности векторный потенциал описывался бы *счетным* множеством численных значений. Мы покажем, что существуют две возможности для такого представления. Они заключаются в выборе, смотря по обстоятельствам, определенных граничных условий, не затрагивающих общую применимость метода, ибо при его проведении ограничивающую поверхность можно выдвинуть далеко вовне, в пределе до бесконечности. Там, во всяком случае, величину A . можно считать достаточно быстро убывающей. Оба возможных метода мы опишем в двух следующих пунктах.

1.121. Разложение по стоячим волнам, по модам некоторой замкнутой полости

Предположим, что электромагнитное поле находится внутри полости, окруженной стенками с бесконечно большой проводимостью; следовательно, на граничной поверхности должны исчезать тангенциальные компоненты E . и нормальные компоненты H ., т. е. должны соблюдаться условия

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} A.\right)_{\parallel} = 0, \quad (\nabla \cdot \times A.)_{\perp} = 0. \quad (1.12-1)$$

Для представления общего векторного потенциала, т. е. общего решения уравнений (1.11-3) и (1.11-5), при заданных граничных условиях сделаем подстановку с разделением переменных:

$$A.(r., t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{\mu} q'_{\mu}(t) v_{\mu.}(r.). \quad (1.12-2)$$

Из волнового уравнения (1.11-5) получаем для $v_{\mu.}$

$$\nabla^2 v_{\mu.} + \frac{\omega_{\mu}^2}{c^2} v_{\mu.} = 0. \quad (1.12-3)$$

Из условия калибровки (1.11-3) следует

$$\nabla \cdot v_{\mu.} = 0. \quad (1.12-4)$$

Величина ω_{μ} , имеющая размерность круговой частоты, играет роль некоторой константы разделения для каждого индекса суммирования μ . Спектр значений ω_{μ} определяется граничными условиями. Из соотношений (1.12-1) следует

$$(v_{\mu.})_{\parallel} = 0, \quad (\nabla \cdot \times v_{\mu.}) = 0. \quad (1.12-5)$$

Набор векторов $v_{\mu.}$ образует полностью ортогональную систему; его нормировку определим следующим образом:

$$\int dr^3 v_{\mu.} v_{\nu.} = \delta_{\mu\nu}. \quad (1.12-6)$$

Уравнения (1.12-3) — (1.12-6) определяют функции $v_{\mu.}(r.)$ однозначно. Они образуют так называемые нормальные моды рассматриваемой полости. Таким образом, уравнение (1.12-2) представляет собой разложение вектора-потенциала по нормальным модам полости. Величины $q'_{\mu}(t)$ являются зависящими от времени коэффициентами разложения, для которых из уравнения (1.1-5) следует определяющее уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} q'_{\mu} + \omega_{\mu}^2 q'_{\mu} = 0 \quad (1.12-7)$$

с решением

$$q'_{\mu} = \tilde{q}'_{\mu} \cos(\omega_{\mu} t + \phi_{\mu}).$$

На принципиальный ход дальнейшего развития метода не влияет выбор формы ограничивающей полости поверхности, поскольку она в конечном счете смещается в бесконечность. Однако при практическом вычислении для той или иной конкретной проблемы подходящая форма полости может обладать определенными преимуществами.

В качестве примера применения метода выберем полость в форме куба; длину его ребра обозначим L , объем — V . Тогда система нормальных мод примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_{\mu x} &= \sqrt{\frac{8}{V}} e_{l\sigma x} \cos(k_{l_x x}) \sin(k_{l_y y}) \sin(k_{l_z z}), \\ v_{\mu y} &= \sqrt{\frac{8}{V}} e_{l\sigma y} \sin(k_{l_x x}) \cos(k_{l_y y}) \sin(k_{l_z z}), \\ v_{\mu z} &= \sqrt{\frac{8}{V}} e_{l\sigma z} \sin(k_{l_x x}) \sin(k_{l_y y}) \cos(k_{l_z z}), \end{aligned} \quad (1.12-8)$$

где для волнового вектора и его компонент соблюдаются условия

$$\begin{aligned} k_{li} &= l_i \frac{\pi}{L} \quad (l_i = 0, 1, 2, 3, \dots; i = x, y, z), \\ k_{lx}^2 + k_{ly}^2 + k_{lz}^2 &= \frac{\omega_l^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (1.12-9)$$

Компоненты единичного вектора направления поляризации мод удовлетворяют условию

$$e_{l\sigma x} k_{lx} + e_{l\sigma y} k_{ly} + e_{l\sigma z} k_{lz} = 0. \quad (1.12-10)$$

Следовательно, векторы $e_{l\sigma}$ перпендикулярны вектору k_{li} . Для каждой тройки чисел (l_1, l_2, l_3) существуют две независимые моды, отличающиеся значениями $\sigma = 1$ и $\sigma = 2$. Вследствие условия ортогональности их векторы поляризации взаимно перпендикулярны:

$$e_{l\sigma} \cdot e_{l\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (1.12-11)$$

Индекс μ символизирует четыре числа l_1, l_2, l_3, σ , полностью характеризующие нормальную моду. Таким образом, благодаря разложению по модам полости удалось представить вектор-потенциал во всем пространстве с помощью счетного множества заданных чисел, а именно $q'_\mu(t)$. Определяющее уравнение (1.12-7) для q'_μ имеет форму уравнения движения для одномерного гармонического осциллятора классической механики с нормальной координатой q'_μ . Следовательно, формально можно каждой моде полости сопоставить гармонический

осциллятор. Если подставить разложение вектора-потенциала (1.12-2) в выражение для полной энергии H электромагнитного поля (1.11-6), то можно будет убедиться в том, что полная энергия аддитивно складывается из вкладов в энергию отдельных мод:

$$H = \sum_{\mu} H_{\mu},$$

где

$$H_{\mu} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dt} q'_{\mu} \right)^2 + \omega_{\mu}^2 q_{\mu}^2 \right]. \quad (1.12-12)$$

Итак, полная энергия поля идентична сумме функций Гамильтона каждого гармонического осциллятора, сопоставленного каждой моде. Поэтому поле эквивалентно совокупности несвязанных гармонических осцилляторов. В соответствии с формализмом классической механики (см. разд. В1.22) можно ввести в рассмотрение импульс p'_{μ} , сопряженный q'_{μ} . Отсюда следует, что для q'_{μ} и p'_{μ} справедливы уравнения

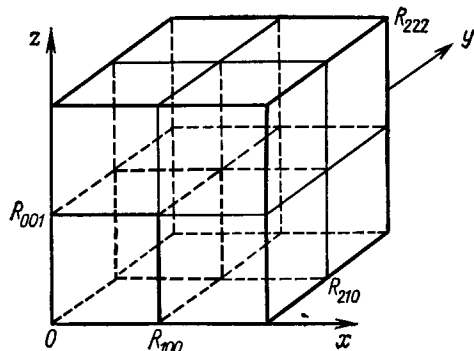
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p'_{\mu} &= - \frac{\partial H}{\partial q'_{\mu}} = - \omega_{\mu}^2 q'_{\mu}, \\ \frac{d}{dt} q'_{\mu} &= \frac{\partial H}{\partial p'_{\mu}} = p'_{\mu}. \end{aligned} \quad (1.12-13)$$

Эти два дифференциальных уравнения первого порядка совместно приводят к уравнению движения (1.12-7), в чем можно непосредственно убедиться путем дифференцирования второго уравнения (1.12-13) и подстановки p'_{μ} в первое из этих уравнений.

Заданная для определенного значения μ стоячая волна $q'_{\mu}(t) v_{\mu}(r)$ может быть представлена как суперпозиция многих бегущих волн. Это можно просто осуществить, если входящие в $q'_{\mu}(t)$ и $v_{\mu}(r)$ функции синус и косинус [см. (1.12-7) и (1.12-8)] выразить через e -функции и затем произведение $q'_{\mu}(t) v_{\mu}(r)$ расположить по членам вида $e^{\pm i(\omega t \pm k \cdot r)}$.

1.122. Разложение по бегущим плоским волнам

Принципиально важное и практически целесообразное представление вектора-потенциала, а тем самым также и полевых величин E , D , H , B , достигается путем разложения по бегущим плоским волнам. Чтобы, как и в п. 1.121, получить описание вектора-потенциала в конечной области в определенный момент времени с помощью счетного множества переменных, потребуем выполнения определенных пространственных условий периодичности для вектора-потенциала. Снова представим себе основную область пространства в виде куба с ребром L , из которого можно построить трансляционную решетку посредством смещений координатных осей



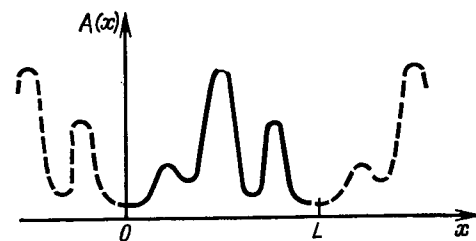
Фиг. 17. Представление областей периодичности в кубической решетке.

(фиг. 17). Потребуем, чтобы в эквивалентных точках различных кубов вектор-потенциал принимал одни и те же значения. Пусть n означает тройку чисел n_1, n_2, n_3 , а $R_n = (n_1L, n_2L, n_3L)$ — начало координат для n -го куба. Тогда должно выполняться условие

$$A.(r., t) = A.(r. + Rn., t). \quad (1.12-14)$$

Функция $A.(r., t)$ в определенный момент времени должна характеризоваться счетным множеством данных. В этом можно убедиться на основании следующего рассуждения, которое мы проведем для простоты на одномерном примере.

Предположим, что функция $A(x)$ задана в области $0 \leq x \leq L$. Продолжим $A(x)$ за пределы основной области периодически (фиг. 18) и разложим эту периодическую функцию в ряд Фурье. Коэффициенты Фурье образуют счетное множество величин, с помощью которых может быть представлена функция $A(x)$. Аналогичным образом осуществляется представление функции в трехмерном пространстве. Это периодическое продолжение не влечет за собой никаких физических следствий, так как при реализации метода основная область может



Фиг. 18. Периодическое продолжение функции $A(x)$ за пределы основной области.

быть выбрана достаточно большой — аналогично тому, как это было сделано с полостью в разд. 1.12-1.

Учитывая тот факт, что A является вещественной величиной, получаем в качестве разложения вектора-потенциала по плоским волнам с пространственно-временной зависимостью вида $\exp[i(k.r. - \omega t)]$ следующую формулу:

$$A.(r., t) = \sum_l \sum_{\sigma=1,2} \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_l} \right)^{1/2} e_{l\sigma} \cdot \{ \hat{a}_{l\sigma} e^{i(k_l r. - \omega_l t)} + \{KK\} \}, \quad (1.12-15)$$

где $k_{l\sigma}$ — векторы распространения, $e_{l\sigma}$ — единичные векторы в направлении поляризации, ω_l — круговая частота, $\hat{a}_{l\sigma}$ — амплитуды, $V = L^3$. Каждому значению l принадлежат два значения индекса σ , представляющих два направления поляризации. Каждая мода μ характеризуется значениями l и σ . Для каждого μ комплексная амплитуда $\hat{a}_{l\sigma}$ может быть выбрана произвольно. Общий

для обоих слагаемых радикальный множитель выбран таким образом, чтобы была возможной простая нормировка и чтобы комплексные амплитуды $\hat{a}_{l\sigma}$ были безразмерными. Чтобы амплитуда была безразмерной, в подкоренное выражение должна быть введена константа, имеющая размерность действия. Имея в виду предстоящее в дальнейшем квантование, мы положили эту величину равной \hbar . Применение волнового уравнения (1.11-5) к уравнению (1.12-15) приводит к дисперсионным соотношениям

$$k_{l\sigma}^2 = \frac{1}{c^2} \omega_l^2 \quad \text{для всех } l. \quad (1.12-16)$$

Условие (1.11-3) кулоновской калибровки дает

$$k_{l\sigma} e_{l\sigma'} = 0. \quad (1.12-17)$$

Волновой вектор $k_{l\sigma}$ определяет направление распространения соответствующей плоской волны, а $e_{l\sigma}$ — направление вектора-потенциала, а также и вектора напряженности электрического поля. Поэтому уравнение (1.12-17) означает, что речь идет о представлении чисто поперечной волны. В этом заключается, как уже указывалось, особое преимущество кулоновской калибровки. Поскольку для каждого вектора распространения существуют два независимых вектора поляризации, то по этим векторам в уравнении (1.12-15) следует суммировать, причем целесообразно выбрать эти два вектора взаимно ортогональными:

$$e_{l\sigma} e_{l\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (1.12-18)$$

Из условия периодичности (1.12-14) для волнового вектора следует

$$k_{l\sigma} = \left(\frac{2\pi}{L} l_1, \frac{2\pi}{L} l_2, \frac{2\pi}{L} l_3 \right), \quad (1.12-19)$$

где l_1, l_2, l_3 — целые числа в области $(-\infty, +\infty)$. В соответствии с этим значения вектора распространения $k_{l\sigma}$, а следовательно, и ω_l образуют дискретный спектр. Если заменить l на $-l$, т. е. l_1, l_2, l_3 на $-l_1, -l_2, -l_3$, то согласно уравнению (1.12-19) $k_{l\sigma}$ перейдет в $-k_{l\sigma}$, тогда как, согласно уравнению (1.12-16), ω_l не изменится, так

что в результате замены l на $-l$ мы получим волну, распространяющуюся в противоположном направлении.

Покажем теперь, что при разложении по плоским волнам поле излучения также может быть описано системой несвязанных осцилляторов. Для этой цели введем зависящие от времени величины $a_{l\sigma}(t)$, $a_{l\sigma}^*(t)$:

$$\begin{aligned} a_{l\sigma}(t) &= \hat{a}_{l\sigma} e^{-i\omega_l t}, \\ a_{l\sigma}^*(t) &= \hat{a}_{l\sigma}^* e^{i\omega_l t}. \end{aligned} \quad (1.12-20)$$

С этими величинами разложение (1.12-15) примет вид

$$A_{\sigma}(r, t) = \sum_{l, \sigma} \left(\frac{\hbar}{2\epsilon V \omega_l} \right)^{1/2} e_{l\sigma} \{ a_{l\sigma}(t) e^{ik_{l\sigma} r} + \{KK\} \}. \quad (1.12-21)$$

Из уравнений (1.11-6) и (1.12-21) найдем полную энергию поля в основной области

$$H = \sum_{l, \sigma} H_{l\sigma},$$

где

$$H_{l\sigma} = \hbar \omega_l |a_{l\sigma}|^2 = \frac{1}{2} \hbar \omega_l [a_{l\sigma}^* a_{l\sigma} + a_{l\sigma} a_{l\sigma}^*]. \quad (1.12-22)$$

Следует подчеркнуть симметричную зависимость $H_{l\sigma}$ от $a_{l\sigma}$ и $a_{l\sigma}^*$. Она будет существенной для квантования, которое мы будем проводить позднее.

Величины $a_{l\sigma}(t)$ однозначно определяют вектор-потенциал в каждый момент времени. Можно показать, что величина $a_{l\sigma}(t)$ ведет себя в точности так же, как комплексная нормальная координата $a(t)$ одномерного гармонического осциллятора в механике; из содержания В1.22 описания механического осциллятора видно, что величины $a(t)$ и $a_{l\sigma}(t)$ изменяются в точности одинаковым образом с течением времени [см. уравнение движения (B2.22-6a) и его общее решение (B2.22-7a)]. К такому же выводу можно прийти на основании уравнения (1.12-20). Далее возникает точно такая же взаимосвязь между гамильтоновскими функциями, на что непосредственно указывает сравнение уравнений (B2.22-5a) и (1.12-22). Комплексная нормальная координата $a(t)$ полностью определяет в механике поведение гармонического осциллятора. Поэтому

мы можем окончательно констатировать, что поле излучения в основной области описывается дискретным множеством несвязанных гармонических осцилляторов.

Ввиду особой важности напряженности электрического поля разложим также и эту величину по плоским волнам, а именно:

$$E_*(r_*, t) = -\frac{\partial}{\partial t} A_*(r_*, t) = E_*^{(-)}(r_*, t) + E_*^{(+)}(r_*, t), \quad (1.12-23)$$

где

$$E_*^{(-)}(r_*, t) = \sum_{l, \sigma} i \left(\frac{\hbar \omega_l}{2e_0 V} \right)^{1/2} e_{l\sigma} \hat{a}_{l\sigma} e^{i(k_l \cdot r_* - \omega_l t)}$$

и

$$(E_*^{(-)})^* = E_*^{(+)}. \quad (1.12-24)$$

1.123. Вычисление плотности мод

При трактовке многих физических проблем возникает необходимость знать число мод в заданном интервале значений k или ω и в заданном интервале направлений. Эти числа и соответствующие плотности мод мы вычислим ниже при разложении по стоячим волнам полости или по бегущим плоским волнам. В обоих случаях при заданном направлении поляризации каждая мода может быть представлена в пространстве (l_1, l_2, l_3) (фиг. 19). Поэтому каждому заданному элементу объема dl_1, dl_2, dl_3 в l -пространстве должно быть сопоставлено $dN = 2dl_1 dl_2 dl_3$ мод. (Множитель 2 обусловлен существованием двух направлений поляризации, принадлежащих одному набору l_1, l_2, l_3 .) На основании (1.12-9) или (1.12-19) получим для стоячих волн

$$dN = 2 \left(\frac{L}{\pi} \right)^3 dk_x dk_y dk_z, \quad (1.12-25a)$$

и для плоских волн

$$dN = 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 dk_x dk_y dk_z \quad (1.12-25b)$$

в соответствии с представлением мод в k -пространстве. Перейдем от декартовых координат к полярным:

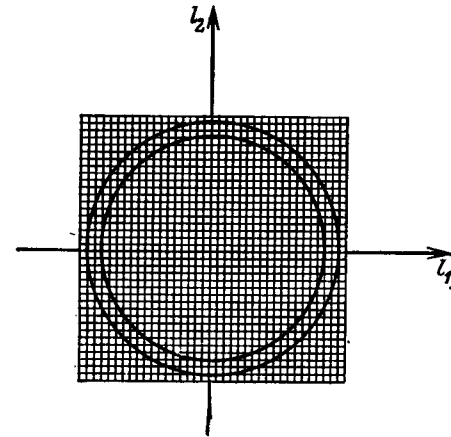
$$dk_x dk_y dk_z = k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi = k^2 dk d\Omega, \quad (1.12-26)$$

где $d\Omega$ есть элемент телесного угла в направлении k . Тогда из (1.12-25a) — (1.12-26) найдем:

$$dN = 2 \left(\frac{L}{\pi} \right)^3 k^2 dk d\Omega \quad (\text{стоячие волны}), \quad (1.12-27a)$$

$$dN = 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 k^2 dk d\Omega \quad (\text{бегущие волны}). \quad (1.12-27b)$$

Эти формулы определяют число мод, приходящихся на значения модуля волнового вектора между k и $k + dk$ и



Фиг. 19. Изображение мод при разложении по бегущим плоским волнам в l -пространстве (в плоскости $l_3 = \text{const}$).

на направления вокруг k внутри телесного угла $d\Omega$. Если ввести плотность мод $N_{V, k, \Omega}$ (число мод на единицу объема, единицу волнового числа и единицу телесного угла), то получим

$$N_{V, k, \Omega} dk d\Omega = 2 \left(\frac{1}{\pi} \right)^3 k^2 dk d\Omega \quad (\text{стоячие волны}), \quad (1.12-28a)$$

$$N_{V, k, \Omega} dk d\Omega = 2 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 k^2 dk d\Omega \quad (\text{бегущие волны}). \quad (1.12-28b)$$

Число мод на единицу объема между k и $k + dk$ с произвольным направлением k , получим путем интегрирования по шаровому слою в одном октанте k -пространства для полости и по полному шаровому слою для бегущих волн. Оба разложения по модам приводят к одному и тому же результату:

$$N_{V, k} dk = 8\pi \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 k^2 dk. \quad (1.12-29)$$

Часто вместо этой формулы задают плотность мод в зависимости от круговой частоты или частоты:

$$N_{V, \omega} d\omega = 8\pi \left(\frac{1}{2\pi c}\right)^3 \omega^2 d\omega, \quad (1.12-30)$$

$$N_{V, f} df = 8\pi \left(\frac{1}{c}\right)^3 f^2 df.$$

§ 1.2. ОСНОВЫ КВАНТОВОГО ОПИСАНИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.21. Введение правил квантования

При квантовании мы будем пользоваться результатами п. 1.122, а именно представлением электромагнитного поля посредством бегущих волн. Мы видели, что с классической точки зрения изолированное электромагнитное поле описывается как система механических несвязанных гармонических осцилляторов, причем каждой моде сопоставляется один осциллятор (осциллятор поля излучения). Мы перенесем известные для гармонического осциллятора в механике правила квантования на поля излучения. Установленная выше *формальная* эквивалентность между механической и электромагнитной системами как таковая еще, конечно, не оправдывает подобный образ действий. Существуют, однако, и другие важнейшие аргументы, говорящие в пользу применяемого здесь метода квантования: во-первых, применение формализма квантования поля к максвелловскому полю приводит, при одних и тех же граничных условиях, к одним и тем же результатам. Во-вторых, применяемый здесь метод позволяет адекватно отобразить бозонный характер фотонов и дать правильную интерпре-

тацию эмпирических величин и свойств, таких, как энергия, импульс, распространение волн, когерентность.

При классическом описании оказалось, что величина $a_{l\sigma}(t)$ поля излучения формально эквивалентна комплексной нормальной координате механического осциллятора. Поэтому квантование выполняется таким образом, что величине $a_{l\sigma}(t)$ сопоставляется некоторый оператор, обладающий такими же свойствами, что и оператор комплексной нормальной координаты; в частности, он удовлетворяет тем же основным перестановочным соотношениям [ср. уравнение (B2.22-4в)]. Для каждой моды (l, σ) величина $a_{l\sigma}(t)$ заменяется на $a_{l\sigma}(t)$. Оператор $a_{l\sigma}(t)$ обладает свойствами (зависящего от времени) оператора комплексной нормальной координаты. Следовательно, его нужно понимать в смысле представления Гейзенберга. На основании соотношений, задаваемых уравнением (B2.22-4в), получаются следующие перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} [a_{l\sigma}, a_{l'\sigma'}^+] &= \mathbf{I} \delta_{ll'} \delta_{\sigma\sigma'}, \\ [a_{l\sigma}, a_{l'\sigma'}] &= [a_{l\sigma}^+, a_{l'\sigma'}^+] = 0. \end{aligned} \quad (1.21-1)$$

По соображениям, которые выяснятся ниже, $a_{l\sigma}$ и $a_{l\sigma}^+$ называются операторами уничтожения и рождения фотонов моды (l, σ) . Эти перестановочные соотношения показывают, что операторы рождения и уничтожения одной моды не коммутируют между собой. В то же время в соответствии с независимостью отдельных осцилляторов операторы различных мод коммутируют друг с другом. Замена классических величин $a_{l\sigma}$ на операторы влечет за собой также превращение энергии и полевых величин в операторы.

Принимая во внимание симметричную запись в уравнении (1.12-22) и перестановочное соотношение $a_{l\sigma} a_{l\sigma}^+ = \mathbf{I} + a_{l\sigma}^+ a_{l\sigma}$, получаем для энергии

$$\mathbf{H} = \sum_{l, \sigma} \hbar \omega_l \left(a_{l\sigma}^+ a_{l\sigma} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right). \quad (1.21-2)$$

В соответствии с общими законами квантовой теории входящие в соотношения (1.21-1) и (1.21-2) операторы

могут быть истолкованы как в представлении Гейзенберга, так и в представлении Шредингера. В дальнейшем мы будем обозначать операторы в представлении Гейзенберга индексом H , а в представлении Шредингера они не будут отмечаться индексом.

Введение операторов рождения и уничтожения позволяет получить при учете соотношения

$$\mathbf{a}_H = \mathbf{a} e^{-i\omega t}$$

(см. разд. В2.22), согласно уравнению (1.12-15) оператор вектора-потенциала

$$(\mathbf{A}\cdot)_H = \sum_{l,\sigma} \left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_0\omega_l} \right)^{1/2} e_{l\sigma} \{ \mathbf{a}_{l\sigma} e^{i(k_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + \{HA\} \}, \quad (1.21-3)$$

а также оператор напряженности электрического поля

$$(\mathbf{E}\cdot)_H = \sum_{l,\sigma} \left(\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} e_{l\sigma} \{ i\mathbf{a}_{l\sigma} e^{i(k_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + \{HA\} \}, \quad (1.21-4)$$

оператор напряженности магнитного поля

$$(\mathbf{H}\cdot)_H = \frac{1}{c\mu_0} \sum_{l,\sigma} \left(\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} (e_{l\sigma} \times k_l) \{ -i\mathbf{a}_{l\sigma} e^{i(k_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + \{HA\} \} \quad (1.21-5)$$

и оператор полного импульса

$$\mathbf{p}_F = \sum_{l,\sigma} \hbar k_l \cdot \left(\mathbf{a}_{l\sigma}^+ \mathbf{a}_{l\sigma} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right) = \sum_{l,\sigma} \hbar k_l \cdot \mathbf{a}_{l\sigma}^+ \mathbf{a}_{l\sigma},$$

поскольку $\sum_{l,\sigma} k_l = 0$. (1.21-6)

1.22. Проблема собственных значений оператора энергии и оператора числа частиц. Представление общих состояний и операторов плотности

Излагаемые ниже исследования операторов мы проведем для одной-единственной моды поля излучения, вследствие чего опустим индексы l, σ . Наряду с оператором Гамильтона оператор $\mathbf{N} = \left(\frac{1}{\hbar\omega} \mathbf{H} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \right)$ также

является эрмитовым. Собственные векторы получаются из уравнения

$$\mathbf{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad (1.22-1)$$

и образуют полностью ортонормированную систему

$$\langle n' | n'' \rangle = \delta_{n'n''},$$

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbf{I}, \quad (1.22-2)$$

где \mathbf{I} представляет собой единичный оператор. В соответствии с этим \mathbf{N} может рассматриваться как наблюдаемая. Из перестановочного соотношения $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] = \mathbf{I}$ следуют формулы

$$\mathbf{N}\mathbf{a} = (\mathbf{a}^+\mathbf{a})\mathbf{a} = (\mathbf{a}\mathbf{a}^+ - \mathbf{I})\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{N} - \mathbf{I}),$$

$$\mathbf{N}\mathbf{a}^+ = \mathbf{a}^+(\mathbf{a}\mathbf{a}^+) = \mathbf{a}^+(\mathbf{a}^+\mathbf{a} + \mathbf{I}) = \mathbf{a}^+(\mathbf{N} + \mathbf{I}). \quad (1.22-3)$$

Применяя эти формулы к собственному вектору $|n\rangle$ и учитывая уравнение для собственных значений (1.22-1), получаем

$$\mathbf{N}(\mathbf{a} |n\rangle) = (n - 1)(\mathbf{a} |n\rangle),$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{a}^+ |n\rangle) = (n + 1)(\mathbf{a}^+ |n\rangle). \quad (1.22-4)$$

Это означает, что оператор \mathbf{a} порождает из собственного вектора с собственным значением n собственный вектор с собственным значением $(n - 1)$. Соответствующее свойство присуще и оператору \mathbf{a}^+ . Следовательно, путем многократного применения операторов \mathbf{a} и \mathbf{a}^+ можно построить собственные векторы, собственные значения которых различаются на целые числа. Исходя из этого, можно показать, что собственные значения оператора \mathbf{N} могут только равняться нулю или быть целыми положительными числами. В силу такого свойства для полной энергии рассматриваемой моды получается выражение

$$\mathcal{E} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

как целое кратное от $\hbar\omega$, если не учитывать нулевую энергию $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Этот факт может быть интерпретирован двумя способами. С одной стороны, можно сказать, что описывающий данную моду гармонический осциллятор находится в определенных энергетических состояниях. Каждое энергетическое состояние может быть обозначено номером n . С другой стороны, мы можем представить себе систему одинаковых невзаимодействующих частиц (кванты, фотоны), находящихся в одном и том же динамическом состоянии с энергией $\hbar\omega$. Тогда n будет иметь смысл числа таких частиц, т. е. числа фотонов в соответствующей моде. Поэтому \mathbf{N} называют оператором числа частиц. Здесь уместно будет указать на то, что возможность заселения моды произвольным числом квантов является прямым следствием правила квантования (1.21-1), соблюдающегося для всех бозонов. В фотонном представлении уравнение (1.22-4) следует интерпретировать в том смысле, что применение оператора \mathbf{a}^+ к состоянию моды $|n\rangle$ порождает один квант (фотон), тогда как оператор \mathbf{a} такой фотон уничтожает. Следует отметить, что применение оператора уничтожения к собственному вектору $|0\rangle$ ($n=0$, вакуумное состояние) порождает нулевой вектор:

$$\mathbf{a}|0\rangle = 0. \quad (1.22-5)$$

Для $n \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ \mathbf{a}^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned} \quad (1.22-6)$$

Все собственные векторы строятся путем многократного применения оператора рождения к так называемому вакуумному состоянию, т. е. к собственному вектору $|0\rangle$:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\mathbf{a}^+)^n|0\rangle. \quad (1.22-7)$$

Чтобы сделать свойства введенных операторов более наглядными, опишем их в n -представлении с помощью матриц. Тогда число частиц и операторы рождения и

уничтожения примут вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{a}^+) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.22-8)$$

в то время как собственные векторы $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ описываются столбцами:

$$(|0\rangle) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (|1\rangle) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (|2\rangle) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (1.22-9)$$

Если воспользоваться правилами умножения матриц, то в этом представлении могут быть проверены все ранее выведенные соотношения. Мы рекомендуем читателю выполнить такую проверку в качестве упражнения.

После описания операторов, собственных векторов и собственных значений отдельной моды вернемся снова к рассмотрению полной системы. Если обозначить оператор числа частиц для одной моды $\mathbf{N}_{l\sigma} = \mathbf{a}_{l\sigma}^+ \mathbf{a}_{l\sigma}$, то для оператора числа частиц всей системы получим

$$\mathbf{N}_g = \sum_{l,\sigma} \mathbf{N}_{l,\sigma}. \quad (1.22-10)$$

Этот оператор обладает собственными функциями, которые строятся как произведения собственных функций отдельных мод:

$$|n_1, n_2, n_3, \dots, n_{l\sigma}, \dots\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle |n_3\rangle \dots |n_{l\sigma}\rangle \dots, \quad (1.22-11)$$

причем операторы $\mathbf{N}_{l\sigma}$, $\mathbf{a}_{l\sigma}^+$, $\mathbf{a}_{l\sigma}$ действуют только на моду номера l , σ :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{l\sigma} |n_1, \dots, n_{l\sigma}, \dots\rangle &= n_{l\sigma} |n_1, \dots, n_{l\sigma}, \dots\rangle, \\ \mathbf{a}_{l\sigma} |n_1, \dots, n_{l\sigma}, \dots\rangle &= \sqrt{n_{l\sigma}} |n_1, \dots, (n_{l\sigma} - 1), \dots\rangle, \end{aligned} \quad (1.22-12)$$

$$\mathbf{a}_{l\sigma}^+ |n_1, \dots, n_{l\sigma}, \dots\rangle = \sqrt{n_{l\sigma} + 1} |n_1, \dots, (n_{l\sigma} + 1), \dots\rangle,$$

в частности

$$\mathbf{a}_{l\sigma} |n_1, \dots, (n_{l\sigma} = 0), \dots\rangle = 0.$$

Соотношения ортогональности и полноты гласят:

$$\langle n'_1, \dots, n'_{l\sigma}, \dots | n''_1, \dots, n''_{l\sigma}, \dots \rangle = \delta_{n'_1 n''_1} \dots \delta_{n'_{l\sigma} n''_{l\sigma}}, \quad (1.22-13)$$

$$\sum_{n_{l\sigma}} | \dots, n_{l\sigma}, \dots \rangle \langle \dots, n_{l\sigma}, \dots | = \mathbf{I}.$$

Собственное значение полной энергии поля определяется формулой

$$\mathcal{E}_{n_1 \dots n_{l\sigma} \dots} = \sum_{l,\sigma} \hbar \omega_l \left(n_{l\sigma} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.22-14)$$

Общее фотонное состояние $|\psi\rangle$ представляется в виде суперпозиции собственных состояний в форме

(1.22-11)

$$|\psi\rangle = \sum_{\{n_{\mu}\}} c_{n_1 \dots n_{\mu} \dots} |n_1, \dots, n_{\mu}, \dots\rangle. \quad (1.22-15)$$

Реальное поле излучения, вообще говоря, нельзя представить чистыми состояниями в форме (1.22-15); оно получается лишь в результате их смешивания; это свойство поля описывается оператором плотности (ср. разд. В2.15):

$$\rho = \sum_{|\psi\rangle} \omega_{|\psi\rangle} |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (1.22-16)$$

Значение величины $\omega_{|\psi\rangle}$ показывает, как часто в ансамбле отдельных систем встречается состояние $|\psi\rangle$; $\omega_{|\psi\rangle}$ определяется реальными экспериментальными условиями, а при мысленном эксперименте — сделанными допущениями.

В качестве примера рассмотрим так называемое хаотическое или гауссово излучение. Это есть то излучение, для которого при условии фиксированного среднего числа частиц энтропия $S = -k \text{Sp} \{\rho \ln \rho\}$ имеет максимум. Если теперь рассматривать только одну моду, то вариационное исчисление дает для хаотического излучения следующий оператор плотности:

$$\rho = \frac{\langle \mathbf{N} \rangle^N}{(1 + \langle \mathbf{N} \rangle)^{N+1}} = \sum_n \frac{\langle \mathbf{N} \rangle^n}{(1 + \langle \mathbf{N} \rangle)^{(n+1)}} |n\rangle \langle n|. \quad (1.22-17)$$

Укажем здесь ход доказательства. Требование экстремума энтропии приводит к условию

$$\text{Sp} \{(\ln \rho + \mathbf{I}) \delta \rho\} = 0.$$

для любого $\delta \rho$. К нему следует добавить дополнительное условие, а именно условие нормировки $\text{Sp} \{\rho\} = 1$ (вообще оно предъявляется к любому оператору плотности). Зададим, кроме того, среднее значение числа фотонов $\langle \mathbf{N} \rangle = \text{Sp} \{\mathbf{N} \rho\}$, что приводит к

$$\text{Sp} \{\delta \rho\} = 0 \quad \text{и} \quad \text{Sp} \{\mathbf{N} \delta \rho\} = 0.$$

Вводя множители Лагранжа λ_1 и λ_2 , получаем

$$\text{Sp} \{(\ln \rho + \mathbf{I} + \lambda_1 \mathbf{I} + \lambda_2 \mathbf{N}) \delta \rho\} = 0.$$

Отсюда следует для любого $\delta\rho$

$$\text{In } \rho + (1 + \lambda_1)\mathbf{I} + \lambda_2\mathbf{N} = 0 \quad \text{или} \quad \rho = e^{-(1+\lambda_1)\mathbf{I} - \lambda_2\mathbf{N}}.$$

Учет дополнительного условия в явном виде дает

$$e^{-(1+\lambda_1)} = [\text{Sp} \{e^{-\lambda_2\mathbf{N}}\}]^{-1},$$

а из выражения для $\langle \mathbf{N} \rangle$ тогда следует:

$$e^{-\lambda_2} = \frac{\langle \mathbf{N} \rangle}{1 + \langle \mathbf{N} \rangle}.$$

Таким образом доказано утверждение, содержащееся в уравнении (1.22-17).

Механизмы, ведущие к хаотическому излучению, могут быть различными. Например, хаотическое излучение возникает при тепловом излучении; в этом случае следует подставить известное выражение

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \left(\exp \left[\frac{\hbar\omega}{k\mathcal{T}} \right] - 1 \right)^{-1}$$

для среднего числа фотонов в одной моде. С другой стороны, хаотическое излучение можно получить, посылая одномодовое излучение лазера сквозь достаточно быстро вращающееся матовое стекло.

В связи с независимостью различных мод приведенные выше рассуждения легко переносятся с рассмотрения одной моды на все моды. Полный оператор плотности для теплового излучения имеет вид

$$\rho = \exp \left[-\frac{\mathbf{H}}{k\mathcal{T}} \right] / \text{Sp} \left\{ \exp \left[-\frac{\mathbf{H}}{k\mathcal{T}} \right] \right\}, \quad (1.22-18)$$

где \mathbf{H} — заданный уравнением (1.21-2) гамильтониан поля излучения.

§ 1.3. РАЗВЕРНУТОЕ КВАНТОВОЕ ОПИСАНИЕ

1.31. Вычисление математических ожиданий некоторых операторов с функциями специальных состояний

Вычисление математических ожиданий напряженностей электрического поля и связанных с ним наблюдаемых, с одной стороны, представляет принципиальный

интерес при квантовом анализе измерений в электромагнитных полях. С другой стороны, знание этих величин позволяет установить границы, в пределах которых возможно классическое описание полей. Как известно, в квантовой электронике и в нелинейной оптике успешно пользуются классической трактовкой полей, поскольку тогда рассмотрение становится проще и нагляднее, а часто лишь в этом приближении оно вообще может быть проведено. В этом аспекте важно знать, каким именно путем и при каких предположениях осуществляется классическое описание и в каких местах можно ожидать отклонений. Существенные указания об этом дает вычисление математических ожиданий напряженностей поля и квадратов напряженности поля, а также некоторых усредненных по пространству и времени значений этих величин.

1.311. Вычисление математических ожиданий напряженностей поля с функциями состояний фиксированного числа фотонов

Вычислим математическое ожидание

$$\langle \mathbf{E}_\mu \rangle = \langle \psi | \mathbf{E}_\mu | \psi \rangle \quad (1.31-1)$$

с собственными функциями состояний, в которых число фотонов фиксировано во всех модах

$$| \psi \rangle = | n_1, \dots, n_\mu, \dots \rangle. \quad (1.31-2)$$

Можно убедиться, что в этом случае при учете соотношений ортогональности (1.22-13)

$$\langle \mathbf{E}_\mu(r, t) \rangle = 0. \quad (1.31-3)$$

В μ -й моде, например, получается

$$\langle n_\mu | \mathbf{E}_\mu(r, t) | n_\mu \rangle \sim \left\{ \langle n_\mu | \mathbf{a}_\mu | n_\mu \rangle e^{-i(\omega_\mu t - k_\mu \cdot r_\mu)} - \langle n_\mu | \mathbf{a}_\mu^\dagger | n_\mu \rangle e^{i(\omega_\mu t - k_\mu \cdot r_\mu)} \right\}$$

с

$$\langle n_\mu | \mathbf{a}_\mu | n_\mu \rangle = \sqrt{n_\mu} \langle n_\mu | n_{\mu-1} \rangle = 0$$

и

$$\langle n_\mu | \mathbf{a}_\mu^\dagger | n_\mu \rangle = \sqrt{n_\mu + 1} \langle n_\mu | n_{\mu+1} \rangle = 0.$$

1.312. Вычисление математического ожидания квадрата напряженности поля с функциями состояний фиксированного числа фотонов

Пользуясь функциями состояний фиксированного числа фотонов, вычислим математическое ожидание квадрата напряженности поля, непосредственно связанного с плотностью энергии поля. Для этой цели разложим \mathbf{E} на $\mathbf{E}_\mu^{(-)}$ и $\mathbf{E}_\mu^{(+)}$ [ср. (1.12-23)] и составим

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_\mu^{(-)2} + \mathbf{E}_\mu^{(+)^2} + \mathbf{E}_\mu^{(-)}\mathbf{E}_\mu^{(+)} + \mathbf{E}_\mu^{(+)}\mathbf{E}_\mu^{(-)}.$$

Из математических ожиданий этих слагаемых отличны от нуля только математические ожидания $\mathbf{E}_\mu^{(-)}\mathbf{E}_\mu^{(+)}$ и $\mathbf{E}_\mu^{(+)}\mathbf{E}_\mu^{(-)}$. В этом можно убедиться при учете условий ортонормировки для $|n_\mu\rangle$ из выражений

$$\begin{aligned} \langle n_\mu | \mathbf{a}_\mu^2 | n_\mu \rangle &= \sqrt{n_\mu(n_\mu - 1)} \langle n_\mu | n_\mu - 2 \rangle = 0, \\ \langle n_\mu | \mathbf{a}_\mu^{+2} | n_\mu \rangle &= \sqrt{(n_\mu + 1)(n_\mu + 2)} \langle n_\mu | n_\mu + 2 \rangle = 0, \\ \langle n_\mu | \mathbf{a}_\mu^+ \mathbf{a}_\mu | n_\mu \rangle &= n_\mu \langle n_\mu | n_\mu \rangle = n_\mu, \\ \langle n_\mu | \mathbf{a}_\mu \mathbf{a}_\mu^+ | n_\mu \rangle &= (n_\mu + 1) \langle n_\mu + 1 | n_\mu + 1 \rangle = n_\mu + 1. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\langle \mathbf{E}_\mu^2 \rangle(r, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 V} \sum_\mu \hbar \omega_\mu \left(n_\mu + \frac{1}{2} \right) \quad (1.31-4)$$

(независимо от r и t !), а для математического ожидания полной энергии поля отсюда следует

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \varepsilon_0 V \langle \mathbf{E}_\mu^2 \rangle = \sum_\mu \hbar \omega_\mu \left(n_\mu + \frac{1}{2} \right).$$

Если поле находится в состоянии вакуума, то

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \sum_\mu \frac{1}{2} \hbar \omega_\mu = \sum_{l, \sigma} \frac{1}{2} \hbar \omega_l = \sum_l \hbar \omega_l. \quad (1.31-5)$$

Обе моды с направлениями поляризации $\sigma = 1$ и $\sigma = 2$ и с частотой ω_l совместно вносят в полную энергию поля в состоянии вакуума вклад $\hbar \omega_l$ или $(1/\varepsilon_0 V) \hbar \omega_l$ в $\langle \mathbf{E}_\mu^2 \rangle$, образующий так называемые нулевые флуктуации поля. Следовательно, в то время как для математи-

ческого ожидания напряженности поля получается нуль, математическое ожидание квадрата напряженности поля расходится вследствие нулевых флуктуаций бесконечно большого числа мод. Эта расходимость обусловлена тем, что мы вычисляли математическое ожидание для точечной области пространства-времени, и соответствует тем расходимостям, которые возникают, когда мы хотим измерить точно средний квадрат флуктуации импульса квантовомеханической системы в фиксированной точке, т. е. для $\sqrt{\langle (\Delta \mathbf{q})^2 \rangle} = 0$. Тогда в соответствии с соотношением $\sqrt{\langle (\Delta \mathbf{p})^2 \rangle} \sqrt{\langle (\Delta \mathbf{q})^2 \rangle} \geq \hbar/2$ получается бесконечное значение для $\sqrt{\langle (\Delta \mathbf{p})^2 \rangle}$.

1.313. Вычисление математических ожиданий для пространственно-временных средних значений операторов напряженности поля

Если рассматривать флуктуации экспериментально определяемых полевых величин, то такие расходимости не возникают. Измерение напряженностей поля всегда производится в протяженной области пространства (например, заданной объемом пробного заряда) и в отличном от нуля интервале времени (например, заданном временной константой измерительной аппаратуры); это влечет за собой применение определенных усредненных по пространству и по времени значений операторов напряженности поля:

$$\hat{\mathbf{E}}_\mu(r, t; \Delta V, \Delta t) = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{\Delta V} dV' \int_{\Delta t} dt' \mathbf{E}_\mu(r', t'). \quad (1.31-6)$$

Для этих измеримых величин средние флуктуационные квадраты конечны, поскольку теперь высокие частоты и пространственные частоты обрезаются в процессе измерения.

Для доказательства составим математическое ожидание квадрата поля \mathbf{E}^2 с функцией вакуумного состояния:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\mathbf{E}}_\mu^2 | 0 \rangle &= \frac{1}{(\Delta V)^2 (\Delta t)^2} \int_{\Delta V} dV' \int_{\Delta V} dV'' \int_{\Delta t} dt' \int_{\Delta t} dt'' \times \\ &\quad \times \langle 0 | \mathbf{E}_\mu(r', t') \mathbf{E}_\mu(r'', t'') | 0 \rangle. \quad (1.31-7) \end{aligned}$$

Вычисление подынтегрального выражения аналогично вычислению $\langle \mathbf{E}^2(r, t) \rangle$ в п. 1.312 и приводит к результату

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathbf{E}(r', t') \mathbf{E}(r'', t'') | 0 \rangle &= \\ &= \frac{1}{\epsilon_0 V} \sum_l \hbar \omega_l e^{ik_l \cdot (r' - r'') - i\omega_l (t' - t'')}. \end{aligned} \quad (1.31-8)$$

Согласно рассуждениям, приведенным в п. 1.123, суммирование по l можно заменить интегрированием в \mathbf{k} -пространстве:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \sum_l &= \frac{1}{L^3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k. \end{aligned}$$

Тогда при $\omega = kc$ уравнение (1.31-8) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathbf{E}(r', t') \mathbf{E}(r'', t'') | 0 \rangle &= \\ &= \frac{\hbar c}{\epsilon_0 (2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k}_z k e^{ik \cdot (r' - r'') - ikc (t' - t'')}. \end{aligned} \quad (1.31-9)$$

Подстановка этого результата в (1.31-7) и замена порядка интегрирования дает

$$\begin{aligned} \langle 0 | \tilde{\mathbf{E}}^2 | 0 \rangle &= \frac{1}{(\Delta V)^2 (\Delta t)^2} \frac{\hbar c}{\epsilon_0 (2\pi)^3} \times \\ &\times \int d^3k \int_{\Delta V} dV' \int_{\Delta V} dV'' \int_{\Delta t} dt' \int_{\Delta t} dt'' k e^{ik \cdot (r' - r'') - ikc (t' - t'')}. \end{aligned} \quad (1.31-10)$$

В качестве примера выберем «пробный» объем в форме прямоугольного параллелепипеда с длинами ребер Δx , Δy , Δz . Выполняя интегрирование по координатам и по

времени, получаем

$$\begin{aligned} \langle 0 | \tilde{\mathbf{E}}^2 | 0 \rangle &= \\ &= \frac{\hbar}{\epsilon_0 (2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \frac{\sin^2 \frac{1}{2} k_x \Delta x}{\left(\frac{1}{2} k_x \Delta x\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{\sin^2 \frac{1}{2} k_y \Delta y}{\left(\frac{1}{2} k_y \Delta y\right)^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\sin^2 \frac{1}{2} k_z \Delta z}{\left(\frac{1}{2} k_z \Delta z\right)^2} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} kc \Delta t}{\left(\frac{1}{2} kc \Delta t\right)^2} (kc). \end{aligned} \quad (1.31-11)$$

Мы видим, что при Δx , Δy , Δz , $\Delta t \neq 0$ эти интегралы принимают конечные значения и только при Δx , Δy , Δz , $\Delta t \rightarrow 0$ расходятся. Этот результат не зависит от специального выбора пробного объема.

1.314. Свойства глауберовского состояния

В п. 1.311 было показано, что математическое ожидание напряженности электрического поля в каждой точке пространства равно нулю, если исходить из собственных состояний операторов Гамильтона или чисел заполнения. Это означает, что состояния с фиксированным числом фотонов не могут представлять важные в классическом описании бегущие волны. В настоящем разделе мы рассмотрим такие состояния, которые находятся в соответствии с классическими бегущими волнами; такие состояния называются глауберовскими. При этом наши рассуждения будут отнесены к одной (произвольной) моде, индекс которой можно опустить.

Вначале мы введем глауберовское состояние по определению, а затем в этом и в следующем разделах гл. I изучим его свойства, интересные с точки зрения физики. Общее фотонное состояние в одной моде может быть представлено разложением

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (1.31-12)$$

Говорят о глауберовском состоянии, если коэффициенты c_n имеют вид

$$c_n = c_n(\alpha) = e^{-1/2 |\alpha|^2} \frac{1}{\sqrt{n!}} \alpha^n, \quad (1.31-13)$$

где α — произвольное комплексное число. Глауберовское состояние однозначно определяется значением α и поэтому обозначается символом $|\alpha\rangle$:

$$|\alpha\rangle = e^{-1/2|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \alpha^n |n\rangle. \quad (1.31-14)$$

Из уравнения (1.31-14) простым путем можно вывести следующие математические свойства:

$$\mathbf{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (1.31-15)$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1. \quad (1.31-16)$$

Первое уравнение показывает, что $|\alpha\rangle$ есть истинное собственное состояние оператора уничтожения. Следует иметь в виду, что \mathbf{a} не является эрмитовым оператором и не может рассматриваться как наблюдаемая с вещественными собственными значениями. Второе уравнение служит условием нормировки для $|\alpha\rangle$. Здесь следует указать на то, что уравнения (1.31-15) и (1.31-16) выражают свойства, эквивалентные вытекающим из уравнения (1.31-14). Для разъяснения выполним следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}|\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) \mathbf{a}|n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha) \sqrt{n} |n-1\rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(\alpha) \sqrt{n+1} |n\rangle. \end{aligned}$$

Если правая часть должна равняться $\alpha|\alpha\rangle$, то должна выполняться рекуррентная формула

$$c_{n+1}(\alpha) \sqrt{n+1} = \alpha c_n(\alpha), \quad (1.31-17)$$

из которой следует, что

$$c_n(\alpha) = c_0(\alpha) \alpha^n \frac{1}{\sqrt{n!}}.$$

С точностью до произвольного фазового множителя $c_0(\alpha)$ принимает на основании условия нормировки вид $\exp[-|\alpha|^2/2]$. Для двух глауберовских состояний $|\alpha\rangle$

и $|\beta\rangle$ получается квадрат модуля скалярного произведения:

$$\begin{aligned} |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 &= \langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \left(\sum_n \frac{(\beta^*\alpha)^n}{n!}\right) \left(\sum_n \frac{(\alpha^*\beta)^n}{n!}\right) = \\ &= e^{-|\alpha-\beta|^2}. \quad (1.31-18) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в противоположность собственным состояниям оператора чисел заполнения глауберовские состояния не ортогональны. Они образуют избыточную систему; функции $|\alpha\rangle$ связаны между собой определенными соотношениями. Соотношение полноты для собственных состояний оператора чисел заполнения $\mathbf{I} = \sum_n |n\rangle\langle n|$ приводит для $|\alpha\rangle$ к условию

$$\mathbf{I} = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (1.31-19)$$

где $\int d^2\alpha$ — сокращенное обозначение для $\int_{-\infty}^{\infty} d \operatorname{Re}\{\alpha\} \times \int_{-\infty}^{\infty} d \operatorname{Im}\{\alpha\}$. С помощью этого соотношения можно разлагать по $|\alpha\rangle$ любые состояния. Например, для состояния с фиксированным числом фотонов имеем

$$|n\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha e^{-1/2|\alpha|^2} \frac{1}{\sqrt{n!}} (\alpha^*)^n |\alpha\rangle. \quad (1.31-20)$$

Глауберовское состояние следующим образом связано с величинами, имеющими физический смысл. Вследствие уравнения (1.31-15) среднее число фотонов

$$\langle\alpha|\mathbf{N}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\mathbf{a}^+\mathbf{a}|\alpha\rangle = \alpha^*\alpha = |\alpha|^2 \quad (1.31-21)$$

равно квадрату модуля α . Вероятность измерить при заданном глауберовском состоянии число фотонов n определяется выражением

$$\omega(n, |\alpha\rangle) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-\langle\mathbf{N}\rangle} \frac{\langle\mathbf{N}\rangle^n}{n!}, \quad (1.31-22)$$

что представляет собой распределение Пуассона. Из уравнения (1.21-4) для среднего значения напряженно-

сти электрического поля следует

$$\langle \alpha | E_H(r, t) | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}} \{ i a e^{i(k \cdot r - \omega t)} + \{KK\} \}. \quad (1.31-23)$$

Это выражение представляет бегущую волну с комплексным амплитудным множителем α . Таким образом, открывается возможность корреляции с классическим описанием. Не следует, однако, забывать, что уравнение (1.31-23) задает арифметическое среднее значение (см. разд. В2.12); при отдельных измерениях напряженности поля следует ожидать отклонений от этого среднего значения с распределением вероятностей $\omega(E, |\alpha\rangle)$. Об этом распределении вероятностей мы еще будем говорить в п. 1.322; сравнение распределений глауберовских состояний и состояний с фиксированным числом фотонов покажет нам, при каких условиях имеет место приближенное согласие с классическими отношениями.

Постараемся теперь придать наглядный характер представлению полей излучения посредством глауберовских состояний. В разд. 1.22 мы показали, каким способом вообще поле излучения может быть описано при помощи смешения чистых состояний. При определенных математических условиях, на которых мы здесь не будем останавливаться подробно, оператор плотности поля излучения может быть представлен в виде суперпозиции операторов $|\beta\rangle\langle\beta|$, которые в свою очередь следует считать операторами плотности глауберовского состояния $|\beta\rangle$. В этой связи в литературе (см., например, [1.31-1]) принято говорить о \mathcal{P} -представлении оператора плотности

$$\rho = \int d^2\beta \mathcal{P}(\beta) |\beta\rangle\langle\beta|. \quad (1.31-24)$$

Таким способом можно, в частности, охватить следующие важные типы полей излучения: описанное в разд. 1.22 хаотическое излучение, излучение идеализированного лазера (при подходящих условиях это излучение приближенно моделируется излучением лазера при значительном превышении порога), а также суперпозицию этих двух излучений, создаваемую лазером при не слишком большом превышении порога. Соответствующие

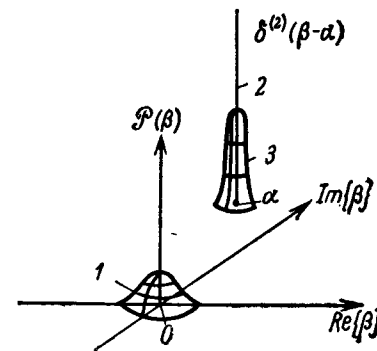
щие функции $\mathcal{P}(\beta)$ представлены ниже:

$$\mathcal{P}(\beta) = \frac{1}{\pi \langle N \rangle} \exp \left[-\frac{|\beta|^2}{\langle N \rangle} \right], \quad (1.31-25a)$$

$$\mathcal{P}(\beta) = \delta^2(\alpha - \beta) \quad (1.31-25б)$$

$$\mathcal{P}(\beta) = \frac{1}{\pi \langle N \rangle} \exp \left[-\frac{|\alpha - \beta|^2}{\langle N \rangle} \right] \quad \left. \vphantom{\mathcal{P}(\beta)} \right\} \text{при фиксированном } \alpha. \quad (1.31-25в)$$

При этом $\delta^2(\gamma)$ означает $\delta(\text{Re } \gamma) \delta(\text{Im } \gamma)$. Качественное представление функций $\mathcal{P}(\beta)$ дано на фиг. 20, откуда



Фиг. 20. Схематическое представление функции $\mathcal{P}(\beta)$ для важных типов полей излучения:

1—хаотическое излучение, 2—идеальный лазерный свет, 3—суперпозиция типов 1 и 2.

видно, что для чисел β соответствующих глауберовских состояний справедливо следующее. В случае хаотического излучения модули амплитуд имеют гауссово распределение, тогда как фазы распределены равномерно. В случае идеализированного лазерного излучения амплитуды и фазы β полностью фиксированы. В случае суперпозиции имеются отклонения амплитуд и фаз β в некоторой области около α . Следует отметить, что эти модели были экспериментально проверены в исследованиях статистики лазерных фотонов (см. п. 3.311).

Полученные результаты легко переносятся на рассмотрение многих мод. Поскольку отдельные моды независимы, то целесообразно образовать так называемое глобальное глауберовское состояние как произведение

глауберовских состояний отдельных мод.

$$|\{\alpha_\mu\}\rangle = \prod_\mu |\alpha_\mu\rangle. \quad (1.31-26)$$

Если записать оператор напряженности электрического поля из уравнения (1.21-4) в форме

$$\mathbf{E}_H(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \quad (1.31-27)$$

с

$$\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \sum_\mu i \left(\frac{\hbar\omega_\mu}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{a}_\mu e^{i(k_\mu \cdot \mathbf{r} - \omega_\mu t)}; \quad (\mathbf{E}^{(-)})^+ = \mathbf{E}^{(+)}, \quad (1.31-28)$$

то найдем, что соблюдается соотношение

$$\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) |\{\alpha_\mu\}\rangle = \tilde{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_\mu\}) |\{\alpha_\mu\}\rangle, \quad (1.31-29)$$

где

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_\mu\}) = \sum_\mu \left(\frac{\hbar\omega_\mu}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} i\alpha_\mu e^{i(k_\mu \cdot \mathbf{r} - \omega_\mu t)}.$$

Следовательно, глобальное глауберовское состояние (1.31-26) есть истинное собственное состояние оператора $\mathbf{E}^{(-)}$. При определенных математических условиях оказывается возможным описать оператор плотности электромагнитного поля излучения ρ в \mathcal{P} -представлении с помощью глобальных глауберовских состояний:

$$\rho = \int d^2\{\beta_\mu\} \mathcal{P}(\{\beta_\mu\}) |\{\beta_\mu\}\rangle \langle \{\beta_\mu\}|, \quad (1.31-30)$$

где

$$d^2\{\beta_\mu\} = \prod_\mu d^2\beta_\mu,$$

причем теперь должны быть учтены все моды.

1.32. Собственные значения и средние значения напряженности электрического поля

Классическое описание НЛО основано в частности на соотношении между поляризацией и напряженностью электрического поля. Введение этого соотношения в систему уравнений Максвелла приводит, в зависимости от

рассматриваемого эффекта и от заданных внешних физических условий, к решениям для пространственно-временного поведения напряженности электрического поля. Вследствие такой постановки центральной проблемы в классической теории мы здесь также исследуем свойства наблюдаемых напряженности электрического поля.

1.321. Проблема собственных значений оператора напряженности электрического поля

Оператор напряженности электрического поля определен в уравнении (1.21-4). Видно, что \mathbf{E} можно представить в форме $\sum_\mu \mathbf{E}_\mu$, причем, как следует из уравнения (1.21-1), операторы \mathbf{E}_μ различных мод коммутируют между собой. Тогда из общих законов квантовой теории можно заключить, что собственное значение \mathbf{E} равно сумме собственных значений отдельных мод; собственное состояние \mathbf{E} является прямым произведением собственных состояний \mathbf{E}_μ отдельных мод.

В последующем изложении проблемы собственных значений оператора напряженности поля для одной моды [1.32-1] можно модовый индекс опустить и перейти к скалярному описанию; для одной моды распространение волны можно считать одномерным. В дальнейших рассуждениях мы будем пользоваться представлением Шредингера; без ограничения общности мы можем принять, что в момент времени $t = 0$ величины, заданные в представлении Гейзенберга уравнением (1.21-4), и соответствующие величины в представлении Шредингера совпадают.

Принимая во внимание перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения, легко получить из уравнений (1.21-3) и (1.21-4) следующие соотношения:

$$[\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})] = i \frac{\hbar}{\varepsilon_0 V} \mathbf{I}, \quad [\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{E}(\mathbf{r})] = [\mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})] = 0, \quad (1.32-1)$$

$$\mathbf{a} = -i \sqrt{\frac{\varepsilon_0 V}{2\hbar\omega}} s^*(\mathbf{r}) [\mathbf{E}(\mathbf{r}) + i\omega\mathbf{A}(\mathbf{r})], \quad s(\mathbf{r}) \equiv e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.32-2)$$

Формальное сравнение операторных соотношений в уравнении (1.32-1) с аналогичными математическими соотношениями для операторов в механике (ср. разд. В2.23) приводит при учете эрмитовости \mathbf{E} и \mathbf{A} для любого состояния $|\psi\rangle$ к формулам

$$\langle E(r) | F[\mathbf{A}(r)] | \psi \rangle = F \left[\frac{\hbar}{i\epsilon_0 V} \frac{d}{dE(r)} \right] \langle E(r) | \psi \rangle$$

(1.32-3)

и

$$\langle E(r) | F[\mathbf{E}(r)] | \psi \rangle = F[E(r)] \langle E(r) | \psi \rangle,$$

где $|E(r)\rangle$ есть собственное состояние и $E(r)$ — одно из непрерывных собственных значений оператора $\mathbf{E}(r)$.

Свойства оператора чисел заполнения $\mathbf{N} = \mathbf{a}^+ \mathbf{a}$ (ср. разд. 1.22) приводят к уравнению

$$\langle E(r) | \mathbf{a}^+ \mathbf{a} | n \rangle = n \langle E(r) | n \rangle. \quad (1.32-4)$$

Если воспользоваться соотношениями (1.32-2) и (1.32-3), то из (1.32-4) можно получить следующее дифференциальное уравнение для $\langle E(r) | n \rangle$:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2(\epsilon_0 V / \omega^2)} \frac{d^2}{dE^2(r)} + \frac{\epsilon_0 V}{2} E^2(r) - \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\} \times \langle E(r) | n \rangle = 0. \quad (1.32-5)$$

Очевидно, что это дифференциальное уравнение формально соответствует дифференциальному уравнению для гармонического осциллятора в механике точки; следует лишь отождествить величину $\epsilon_0 V / \omega^2$ с массой материальной точки. В соответствии с известным методом решения проблемы осциллятора получим с точностью до не зависящего от напряженности поля фазового множителя c_n ($|c_n|^2 = 1$) для $\langle E(r) | n \rangle$:

$$\langle n | E(r) \rangle = c_n (2\pi)^{-1/4} \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{-1/4} \exp \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{-1} E^2(r) \right] \times (2^n n!)^{-1/2} H_n \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{-1/2} E(r) \right], \quad (1.32-6)$$

если предположить нормировку на единицу.

Функции $H_n(\xi)$ являются полиномами Чебышева — Эрмита n -го порядка. Фазовый множитель c_n следует

выбрать так, чтобы выполнялось уравнение для собственных значений

$$\mathbf{E}(r) | E(r) \rangle = E(r) | E(r) \rangle, \quad | E(r) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} | n \rangle \langle n | E(r) \rangle. \quad (1.32-7)$$

Оно эквивалентно выполнению соотношения

$$\begin{aligned} \langle n | \mathbf{E}(r) | E(r) \rangle &= \\ &= i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}} (s \sqrt{n+1} \langle n+1 | E(r) \rangle - s^* \sqrt{n} \langle n-1 | E(r) \rangle) = \\ &= E(r) \langle n | E(r) \rangle \end{aligned}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Применяя полную индукцию, можно показать, что $c_n = (-ie^{-ikr})^n$; таким образом, $\langle n | E(r) \rangle$, а следовательно, и $|E(r)\rangle$ определены полностью.

Соответствующим путем можно получить также представление $|E(r)\rangle$ через глауберовские состояния. Имеем

$$|E(r)\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha | \alpha \rangle \langle \alpha | E(r) \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} \langle \alpha | E(r) \rangle &= \exp \left[-i \frac{1}{2} \text{Im}(\alpha s)^2 \right] (2\pi)^{-1/4} \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{-1/4} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{-1} E^2(r) - i(\alpha s)^* \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{-1/2} E(r) - \text{Im}^2(\alpha s) \right]. \end{aligned} \quad (1.32-8)$$

Собственные состояния $|E(r)\rangle$ нормированы и удовлетворяют условиям полноты:

$$\langle E'(r) | E(r) \rangle = \delta[E(r) - E'(r)]; \quad \mathbf{I} = \int dE(r) | E(r) \rangle \langle E(r) |.$$

1.322. Средние значения и распределение вероятностей напряженности поля

Результаты предыдущего раздела позволяют представить в простом виде распределения вероятностей, существенные для определения отдельных значений электрического поля. Плотность вероятности найти значение напряженности поля $E(r)$ в точке r для заданного

(нормированного) состояния $|\psi\rangle$ имеет вид

$$w(E(r), |\psi\rangle) = |\langle\psi|E(r)\rangle|^2. \quad (1.32-9)$$

Пусть $|\psi\rangle$ есть состояние с фиксированным числом фотонов. Тогда на основании уравнения (1.32-6) можно заключить, что вследствие известного свойства симметрии полиномов Чебышева — Эрмита значения напряженности поля распределены симметрично относительно нулевого значения (это согласуется с результатом уравнения (1.31-3)). Корень квадратный из среднего квадрата флуктуации есть

$$\left[\int dE(r) E^2(r) w(E(r), |n\rangle) \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \left(n + \frac{1}{2} \right)}.$$

Вакуумное состояние характеризуется наименьшей флуктуационной шириной, а именно $\sqrt{\hbar\omega/2\epsilon_0 V}$; флуктуационная ширина возрастает с увеличением числа фотонов. Для некоторых $|n\rangle$ и для глауберовского состояния распределения показаны на фиг. 21а.

Если $|\psi\rangle$ является глауберовским состоянием $|\alpha\rangle$, то, согласно уравнению (1.32-8),

$$w(E(r), |\alpha\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{-1} \left[E(r) + 2 \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \operatorname{Im}(\alpha s) \right]^2 \right\}. \quad (1.32-10)$$

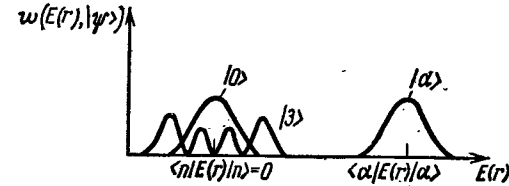
Это есть гауссово распределение со следующими характеристическими величинами:

$$\text{Среднее значение} = -2 \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \operatorname{Im}[\alpha s(r)],$$

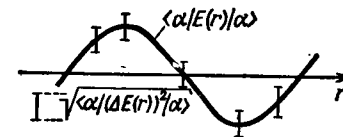
$$\text{Средняя флуктуационная ширина} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}. \quad (1.32-11)$$

Среднее значение представляет собой плоскую волну и согласуется с результатом для $\langle\alpha|E(r)|\alpha\rangle$ из уравнения (1.31-23). Средняя флуктуационная ширина составляет $\sqrt{\hbar\omega/2\epsilon_0 V}$, независимо от координат (фиг. 21б). Это

означает, что в глауберовском состоянии флуктуационная ширина в точности равна ее значению в вакуумном состоянии, т. е. не зависит от среднего числа фотонов. Интересно рассмотреть относительные флуктуации; вследствие того что величина $\langle E(r) \rangle$ имеет синусооб-



Фиг. 21а. Распределение вероятностей для состояний с фиксированным числом фотонов ($n=0,3$) и глауберовского состояния.



Фиг. 21б. Зависимость матричного элемента $\langle\alpha|E(r)|\alpha\rangle$ от координаты и средняя флуктуационная ширина значений напряженности поля.

разный ход, целесообразно брать отношение к усредненному по r значению $\langle E(r) \rangle^2$. Тогда получим

$$\frac{\langle(\Delta E)^2\rangle}{\langle E(r) \rangle^2} = \frac{1}{2|\alpha|^2} = \frac{1}{2\langle N \rangle}. \quad (1.32-12)$$

Отношение в левой части этого уравнения может служить мерой для сравнения с классическим поведением; чем меньше относительные флуктуации, тем лучше приближение к классическому описанию волны определенными значениями напряженности поля во всех точках. Уравнение (1.32-12) показывает, что в глауберовском состоянии относительные флуктуации стремятся к нулю с возрастанием числа фотонов.

Результаты настоящего раздела можно обобщить, если ввести понятие неопределенности числа частиц

$$\langle(\Delta N)^2\rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2. \quad (1.32-13)$$

Поскольку

$$\langle N^2 \rangle = \langle \alpha | a^+ a a^+ a | \alpha \rangle = \langle \alpha | a^+ a^+ a a | \alpha \rangle + \langle \alpha | a^+ a | \alpha \rangle = \langle N \rangle^2 + \langle N \rangle,$$

то для глауберовских состояний неопределенность числа частиц равна $\langle N \rangle$; для состояний с фиксированным числом фотонов она равна нулю. Большая неопределенность в значении числа частиц означает большие флуктуации в результатах измерений числа частиц. Из предыдущих результатов вытекает общий вывод: состояния, находящиеся в соответствии с волновым представлением (т. е. состояния, в которых флуктуации числа частиц исчезают или малы), обнаруживают большие флуктуации полевых величин, которыми описывается волна. Такое положение вещей отображает дополненность корпускулярной и волновой картин.

1.33. Квантовое описание волновых величин и свойств когерентности

Классическое описание эффектов НЛО основано на исследовании взаимодействия волн с определенными амплитудами и фазами. Во всех процессах амплитуды взаимодействующих волн, а во многих процессах также и их фазы обнаруживаются в явном виде (см., например, ч. I, § 4.2. Вынужденное комбинационное рассеяние). В начале § 1.3 было объяснено значение исследования соответствия между классическими и квантовыми представлениями. Поэтому возникает вопрос о надлежащем описании амплитуды и фазы средствами квантовой теории. Предпринимались многочисленные попытки ввести для этих волновых величин *наблюдаемые* в квантовой теории, которые сделали бы возможным прямой анализ заданных фотонных состояний.

В основе классического описания эффектов НЛО лежит рассмотрение взаимодействия волн с определенными фазами. Поэтому правильная трактовка реальных отношений может быть достигнута только при использовании волн или суперпозиций волн, амплитуды и фазы которых обладают определенными распределениями ве-

роятностей. Это обстоятельство тесно связано с корреляционным поведением полевых величин в пространстве и во времени или с когерентными свойствами поля излучения. Некогерентные свойства поля излучения должны приниматься во внимание при интерпретации результатов экспериментов в НЛО (см. § 3.3). При адекватном описании должен использоваться формализм квантовой теории, поэтому в настоящем параграфе мы объясним квантовый подход к проблеме когерентности.

1.331. К введению амплитудных и фазовых операторов

Проблемы, связанные с введением амплитудных и фазовых операторов, до сих пор еще не решены с достаточной полнотой и находятся в настоящее время в стадии разработки. Здесь мы наметим только некоторые пути развития.

Операторы рождения и уничтожения формально соответствуют классической комплексной амплитуде. Поэтому в одной группе работ стремятся построить из этих операторов оператор амплитуды, точнее говоря, оператор для модуля амплитуды и для фазы. Оператор уничтожения и оператор рождения одной моды разлагаются согласно выражениям

$$a = e^{i\varphi} \sqrt{N} \quad \text{и} \quad a^+ = \sqrt{N} e^{-i\varphi}, \quad (1.33-1)$$

где \sqrt{N} и φ играют роль операторов модуля амплитуды и фазы соответственно. Образование корня квадратного из оператора N вызывает принципиальные математические трудности, поскольку наряду с другими отрицательными собственными значениями он обладает также собственным значением, равным нулю. Поэтому оператор \sqrt{N} следующим образом вводится по определению (вследствие указанных трудностей некоторые авторы выбирают в качестве оператора модуля амплитуды $\sqrt{N+1}$). В n -представлении исчезают все недиагональные элементы, тогда как диагональные элементы принимают значения $0, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$. Тогда при учете свойств операторов N, a, a^+ [см. в особенности уравнение (1.22-8)] определены также операторы $e^{\pm i\varphi}$.

Отсюда, между прочим, выводится соотношение

$$[e^{i\varphi}, \mathbf{N}] = e^{i\varphi}, \quad (1.33-2)$$

Предпринималась попытка [1.33-1] сделать непосредственно исходным пунктом следующие перестановочные соотношения между \mathbf{N} и фазовым оператором φ :

$$[\mathbf{N}, \varphi] = i\mathbf{I}. \quad (1.33-3)$$

Это соотношение интерпретируется по аналогии с перестановочным соотношением для координаты и импульса (ср. разд. В2.12) и приводит к условию

$$\langle (\Delta \mathbf{N})^2 \rangle \langle (\Delta \varphi)^2 \rangle \geq \frac{1}{4}. \quad (1.33-4)$$

Тем самым устанавливается весьма прозрачная взаимозависимость между неопределенностью числа частиц и неопределенностью фазы. По этой причине такое представление нашло отражение во многих опубликованных работах. Впоследствии стало известно [1.33-2], что уравнение (1.33-3) ведет к противоречиям и не может рассматриваться как перспективное исходное уравнение; в этой связи следует заметить, что вывод уравнения (1.33-3) из уравнения (1.33-2) не может считаться надежным.

В работе [1.33-1] были введены эрмитовы операторы \mathbf{C}_0 и \mathbf{S}_i для фазы согласно уравнению

$$e^{\pm i\varphi} = \mathbf{C}_0 \pm i \mathbf{S}_i. \quad (1.33-5)$$

Операторы $e^{\pm i\varphi}$ определены в (1.33-1). Для них получают, в частности, перестановочные соотношения и соотношения неопределенности в следующей форме:

$$[\mathbf{C}_0, \mathbf{N}] = i \mathbf{S}_i, \quad \langle (\Delta \mathbf{N})^2 \rangle \langle (\Delta \mathbf{C}_0)^2 \rangle \geq \frac{1}{16} \langle \mathbf{S}_i \rangle^2.$$

Исходя из соответствия между глауберовскими состояниями и классическими волнами с фиксированной фазой, в [1.33-2] были введены операторы, соответствующие классическим величинам $\exp[i m \varphi]$, где $m = \pm 1, \pm 2, \dots$; квантовомеханические математические ожидания операторов соответствуют усредненным по ансамблю значениям $\exp[i m \varphi]$ микроскопического классического поля.

Другой способ рассмотрения [1.33-3] основывается на введении операторов амплитуды и фазы непосредственно из метода измерения.

Метод измерения может быть описан с классической точки зрения следующим образом: значения амплитуды и фазы определяют в электромагнитной волне пространственно-временное поведение параметров электрического поля, в частности напряженности электрического поля. Наоборот, измеряя параметры напряженности поля в различных точках пространства-времени, можно делать заключения о волновых параметрах, т. е. о значениях амплитуды и фазы. Представим себе две точки пространства-времени (r_1, t_1) и (r_2, t_2) , не связанные между собой световым сигналом; тогда соответствующие значения напряженности поля $E(x_1)$, $E(x_2)$ должны быть связаны с амплитудой E и с \mathbf{C}_0 или \mathbf{S}_i для фазы при помощи соотношений ($j = 1, 2$):

$$E(x_j) = \hat{E}(\mathbf{C}_0 + i \mathbf{S}_i) e^{i x_j} + \{KK\}, \quad \text{где } x_j = k \cdot r_j - \omega t_j. \quad (1.33-6)$$

На основании уравнения (1.33-6) определяются поочередно $|\hat{E}|$, \mathbf{C}_0 , \mathbf{S}_i как функции $E(x_1)$ и $E(x_2)$; в общем виде следует написать $F = F[E(x_2), E(x_1)]$, где под F можно понимать $|\hat{E}|$, \mathbf{C}_0 или \mathbf{S}_i .

Независимо от того, как практически выполнено измерение напряженности поля, при квантовом описании процесса измерения принципиально необходимо учитывать следующее: совокупность возможных измеренных значений образует континуум; измеренные значения подчиняются распределению вероятностей, зависящему от состояния фотонов $|\psi\rangle$ непосредственно перед первым измерением. Результат второго измерения напряженности поля, выполненного в момент времени t_2 , вообще говоря, зависит от изменения состояния при первом измерении (в момент времени t_1). Такое положение вещей учитывается следующим образом: аппаратура для измерения напряженности поля устроена так, что полная шкала измеренных значений E разделяется на дискретные промежутки в пределах ширины интервала $2e'$; среднее значение E в m -м промежутке обозначим

E_m . Нужно вычислить вероятность того, что при первом и втором измерениях соответственно будут получены измеренные значения из m -го и n -го промежутков. Эта вероятность может быть определена на основании общих высказываний по поводу квантовомеханического процесса измерений (ср. разд. В2.24):

$$W(n, x_2; m, x_1; |\psi\rangle) = \langle \psi | \mathfrak{P}(n, x_2; m, x_1; \varepsilon') | \psi \rangle,$$

где

$$\mathfrak{P}(n, x_2; m, x_1; \varepsilon') = \int_{E_m^{-\varepsilon'}}^{E_m^{+\varepsilon'}} dE(r_1) \mathfrak{P}[E(r_1)] \mathbf{U}^{-1}(t_2, 0) \times \\ \times \int_{E_n^{-\varepsilon'}}^{E_n^{+\varepsilon'}} dE(r_2) \mathfrak{P}[E(r_2)] \mathbf{U}(t_2, 0) \int_{E_m^{-\varepsilon'}}^{E_m^{+\varepsilon'}} dE(r_1) \mathfrak{P}[E(r_1)]. \quad (1.33-7)$$

Здесь $\mathfrak{P}(n, x_2; m, x_1; \varepsilon')$ — обобщенный проекционный оператор, содержащий проекционный оператор $\mathfrak{P}[E(r_1, 2)] = |E(r_1, 2)\rangle\langle E(r_1, 2)|$ и временное унитарное преобразование $\mathbf{U}(t, 0) = \exp(-i/\hbar) \mathbf{H}t$; \mathbf{H} — гамильтониан поля излучения. При этом мы положили $t_1 = 0$, что можно сделать без ограничения общности.

Результатам измерений напряженности поля в m -м и n -м промежутках следует сопоставить функцию

$$F = F(E_n, E_m) = F(n, x_2; m, x_1), \quad (1.33-8)$$

имеющую смысл волновой величины F . Из уравнений (1.33-7) и (1.33-8) путем предельного перехода $\varepsilon' \rightarrow 0$ определяются плотность вероятности значений F , а также математическое ожидание и высшие моменты. Для математического ожидания имеем

$$\langle F \rangle = \langle \psi | \left[\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \sum_{n, m} F(n, x_2; m, x_1) \mathfrak{P}(n, x_2; m, x_1; \varepsilon') \right] | \psi \rangle. \quad (1.33-9)$$

Входящий в правую часть этого уравнения оператор [...] может быть интерпретирован как оператор волновой величины F . Следует отметить, что корреляционные функции напряженности поля также могут быть построены таким способом.

В других работах [1.33-4, 1.33-5] амплитудные и фазовые величины квантованного поля излучения определяются путем применения принципа соответствия (квантование фазовых интегралов).

1.332. Свойства когерентности

Квантовомеханическое толкование свойств когерентности электромагнитного поля также связано с соответствующим рассмотрением классических соотношений. Поэтому мы начнем с изложения классического стохастического описания электромагнитного поля. Для наиболее наглядного представления понятия когерентности мы выберем путь простого скалярного рассмотрения.

В зависимости от той или иной возникающей физической проблемы основой классического описания служит заданная или постулированная n -кратная совместная вероятность

$$W = w[E_1^{(-)}, \dots, E_n^{(-)}] d^2 E_1^{(-)} \dots d^2 E_n^{(-)} \quad (1.33-10)$$

для компонент $E_j^{(-)}$ напряженности электрического поля, где $E_j^{(-)}$ означает $E_j^{(-)} = E^{(-)}(r_j, t_j)$. В этой связи следует напомнить [ср. уравнения (1.12-23) и (1.12-24)], что напряженность электрического поля в пространственно-временной точке (r_j, t_j) полностью определяется комплексной величиной $E_j^{(-)}$, тогда как $E_j^{(-)}$ в свою очередь определяется комплексными амплитудами $a_{j\sigma}$ всех мод. Пользуясь плотностью вероятности w , составим выражение

$$\dots \dots \dots \cdot \\ F(\dots E_j^{(+)}, \dots, E_j^{(-)}, \dots) = \\ = \dots \int d^2 E_j^{(-)} \dots w[\dots E_j^{(-)} \dots] F[\dots E_j^{(+)}, \dots, E_j^{(-)}, \dots] \quad (1.33-11)$$

как усредненное по ансамблю значение функции F , зависящей от значений $E_j^{(-)}$ и $E_j^{(+)} = (E_j^{(-)})^*$ в различных точках пространства и времени $x_j \equiv (r_j, t_j)$. Особый интерес представляет рассмотрение произведения из m множителей $E^{(+)}(x_k)$ и n множителей $E^{(-)}(x_l)$; усреднен-

ное по ансамблю значение называется корреляционной функцией $(m+n)$ -го порядка:

$$\Gamma^{m,n}(x_1, \dots, x_{m+n}) = \prod_{k=1}^m E^{(+)}(x_k) \prod_{i=m+1}^{m+n} E^{(-)}(x_i). \quad (1.33-12)$$

Часто можно допустить, что электромагнитное поле обладает свойствами стационарности и эргодичности. Тогда ω и $\Gamma^{m,n}$ остаются инвариантными относительно трансляции оси времени, и значение, усредненное по ансамблю, можно заменить значением, усредненным по времени.

Принято говорить о когерентности M -го порядка, если для всех $m, n \leq M$ величина $\Gamma^{m,n}$ представима в форме

$$\Gamma^{m,n}(x_1, \dots, x_{m+n}) = \prod_{k=1}^m \mathfrak{B}^*(x_k) \prod_{i=m+1}^{m+n} \mathfrak{B}(x_i) \quad (1.33-13)$$

(«условие факторизации»). Независимо от инкремента x для каждого из $(m+n)$ множителей речь идет об одной и той же комплексной функции $\mathfrak{B}(x)$. При временных зависимостях вида $e^{-i\omega t}$ функция (x) должна удовлетворять уравнениям Максвелла с заданными для электрического поля граничными условиями, вследствие чего она соответствует $E^{(-)}(x)$. Поле считается полностью когерентным, если M сколь угодно велико.

Подробное обсуждение свойств когерентности выходит за рамки данной книги, поэтому мы сошлемся лишь на работу [1.6]. Для разъяснения сделаем здесь еще некоторые дополнительные замечания. Первое замечание относится к вопросу об определении понятия когерентности, которое в литературе не является однозначным. Встречаются определения, не существенно отличающиеся от сформулированного выше; иногда говорят о когерентности M -го порядка, если $m, n \leq M/2$. Напротив, определения, исходящие из модуля степени когерентности [1.33-5], требуют более глубокой перестройки всего хода рассуждений. В дальнейшем мы будем исходить из определения, содержащегося в уравнении (1.33-13), поскольку оно обладает следующими преимуществами. Во-первых, без произвольных допуще-

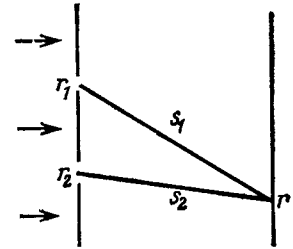
ний оно непосредственно согласуется с квантовым описанием когерентности. Во-вторых, это определение подводит нас прямо к основным представлениям о когерентности. Это видно из следующего рассуждения. Полная когерентность достигается, если совместная вероятность из уравнения (1.33-10) предполагается представимой для любых n в виде произведения вероятностей для отдельных значений $E_j^{(-)}$ и если каждая такая отдельная вероятность относится к типу $\delta^{(2)}$ -функции. В этом случае заданное уравнением (1.33-12) среднее значение по ансамблю равно произведению самих величин E вида

$$\prod_k E^{(+)}(x_k) \prod_l E^{(-)}(x_l).$$

В согласии с наглядным представлением о полной когерентности это означает, что существуют полностью определенные значения напряженности поля в каждой точке пространства-времени. Второе замечание касается смысла корреляционных функций $\Gamma^{m,n}$ для таких величин, которые доступны непосредственному измерению; для этой цели здесь делается упрощающее предположение о стационарности и эргодичности. Величина $\Gamma^{1,1}(x) = \overline{E^{+}(x)E^{-}(x)}$ интерпретируется как интенсивность излучения в точке r , что непосредственно видно, если образовать произведение $E^{(+)}E^{(-)}$. В интерференционном эксперименте типа схемы Юнга на фиг. 22а напряженность поля в точке r определяется выражением

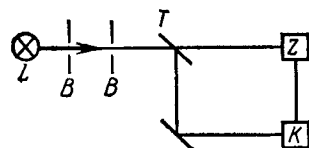
$$E(r, t) = E\left(r_1, t - \frac{s_1}{c}\right) + E\left(r_2, t - \frac{s_2}{c}\right).$$

Поэтому интенсивность в точке r содержит интерференционный член, зависящий от $\Gamma^{1,1}\left[\left(r_1 - \frac{s_1}{c}\right), \left(r_2 - \frac{s_2}{c}\right)\right]$. Эта величина находится в однозначной взаимосвязи с понятием видимости по Майкельсону при интерферен-



Фиг. 22а. Схема интерференционного эксперимента типа Юнга.

ционных экспериментах. Вышеизложенный формализм, характеризующий когерентные свойства, обнаруживает свою полную эффективность в случаях, когда $m, n > 1$. Это видно на примере эксперимента Хэнбери, Броуна и Твисса [1.33-6] по корреляции интенсивностей фотонов. По схеме фиг. 226 определяется корреляция интенсивности падающего слева луча: два парциальных луча, разделенных во времени промежутком τ , подаются на кор-



Фиг. 226. Схема эксперимента Хэнбери — Броуна — Твисса.

L — источник света; B — диафрагмы; T — делительные пластинки; Z — устанавливаемое запаздывание времени; K — коррелятор.

релятор. Определющей величиной для корреляции интенсивности служит

$$\Gamma^{2,2}[(r, 0), (r, \tau), (r, \tau), (r, 0)].$$

Эта величина пропорциональна условной вероятности $W(\tau)$ зарегистрировать фотон в момент времени $\tau > 0$, если первый отсчет был произведен в момент времени $t = 0$. Для света с когерентностью высокого порядка $W(\tau)$ почти не

зависит от τ , т. е. возникают только малозначительные флуктуации интенсивности; для света с когерентностью низшего порядка для малых τ получаются большие значения $W(\tau)$, что является индикатором эффекта сгущения при падении фотонов.

При квантовом рассмотрении когерентности вместо уравнения (1.33-12) выступает квантовая корреляционная функция

$$\begin{aligned} \Gamma^{m,n}(x_1, \dots, x_{m+n}) &= \left\langle \prod_{k=1}^m \mathbf{E}^{(+)}(x_k) \prod_{l=m+1}^{m+n} \mathbf{E}^{(-)}(x_l) \right\rangle = \\ &= \text{Sp} \left\{ \rho \prod_{k=1}^m \mathbf{E}^{(+)}(x_k) \prod_{l=m+1}^{m+n} \mathbf{E}^{(-)}(x_l) \right\}, \quad (1.33-14) \end{aligned}$$

где $\mathbf{E}^{(-)}$ и $\mathbf{E}^{(+)}$ — указанные в уравнении (1.31-28) компоненты оператора напряженности поля в представлении Гейзенберга. Таким образом формируется квантовомеханическое среднее значение произведения операторов, причем отдельные множители содержат только

операторы рождения или только операторы уничтожения. Произведение нормально расположено в том смысле, что все множители с операторами уничтожения расположены справа относительно множителей с операторами рождения. Следует отметить, что заданный нормальный порядок существенно обуславливает рассматриваемую ниже аналогию с образованием классического среднего значения и является существенным для измерений $\Gamma^{m,n}$ с помощью идеальных фотонных детекторов. Что касается квантовых математических ожиданий антинормально расположенных произведений операторов, то можно указать на [1.31-1, 1.33-7].

Следует подчеркнуть, что, при заданном операторе плотности ρ , корреляционные свойства поля излучения являются полностью установленными. Для таких полей излучения, для которых оператор плотности представлен по уравнению (1.31-30) через глобальные глауберовские состояния (\mathcal{P} -представление), может быть констатирована далеко идущая аналогия с классическим формализмом введения корреляционных функций. Без доказательства укажем здесь, что из $\mathcal{P}(\{\beta_\mu\})$ может быть построена плотность вероятности

$$\omega(\tilde{E}_1^{(-)}, \dots, \tilde{E}_n^{(-)}), \quad \text{где } \tilde{E}_j^{(-)} = \tilde{E}^{(-)}(x_j). \quad (1.33-15)$$

Последняя отображает стохастические свойства поля излучения как n -кратной совместной вероятности образования собственных значений $\tilde{E}_j^{(-)}$ из глобальных глауберовских состояний [ср. уравнение (1.31-29)]. Аналогичное уравнению (1.33-15) классическое соотношение есть уравнение (1.33-10). Используя $\omega[\dots \tilde{E}_j^{(-)} \dots]$, можно сформировать квантовую корреляционную функцию в виде

$$\begin{aligned} \Gamma^{m,n} = \dots \int d^2\tilde{E}_j^{(-)} \dots \omega[\dots \tilde{E}_j^{(-)} \dots] \prod_{k=1}^m \tilde{E}_k^{(+)}(x_k) \prod_{l=m+1}^{m+n} \tilde{E}_l^{(-)}(x_l) \\ (1.33-16) \end{aligned}$$

в полной аналогии с классическим формированием среднего значения в уравнении (1.33-12). Если же поле излучения, в частности, представимо одним чистым

состоянием типа $|\{\alpha_\mu\}\rangle$ глобального глауберовского состояния, то $\omega[\dots \tilde{E}_f^{(-)} \dots]$ становится произведением $\delta^{(2)}$ -функций для отдельных $\tilde{E}_f^{(-)}$, и тогда получается

$$\Gamma^{m,n} = \prod_{k=1}^m \tilde{E}^{(+)}(x_k; \{\alpha_\mu\}) \prod_{l=m+1}^{m+n} \tilde{E}^{(-)}(x_l; \{\alpha_\mu\}). \quad (1.33-17)$$

Этот результат может быть выведен также непосредственно из уравнения (1.33-14), если принять во внимание, что

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ |\{\alpha_\mu\}\rangle \langle \{\alpha_\mu\}| \prod_k \mathbf{E}^{(+)}(x_k) \prod_l \mathbf{E}^{(-)}(x_l) \} = \\ = \langle \{\alpha_\mu\} | \prod_k \mathbf{E}^{(+)}(x_k) \prod_l \mathbf{E}^{(-)}(x_l) | \{\alpha_\mu\} \rangle \end{aligned}$$

и учесть уравнение (1.31-34).

Квантовое определение когерентности основывается на том же самом условии факторизации для $\Gamma^{m,n}$ из уравнения (1.33-14), которое существует в классическом формализме [ср. уравнение (1.33-14)]. Функция $\mathfrak{B}(x)$ в квантовом случае должна удовлетворять тем же граничным условиям, каким удовлетворяет $E^{(-)}(x)$.

Следующие результаты можно объяснить непосредственно: из уравнения (1.33-17) очевидно, что глобальные глауберовские состояния полностью когерентны, причем $\mathfrak{B}(x)$ идентично $\tilde{E}^{(-)}(x)$; следовательно, в квантовом случае существуют поля с *минимальными флуктуациями*, полностью когерентные в смысле п. 1.322. Монохроматическое (одномодовое) излучение всегда в первом порядке когерентно. Если среднее число фотонов в μ -й моде есть $\langle N_\mu \rangle = \langle \Psi_\mu | N_\mu | \Psi_\mu \rangle$, то имеем для любого $|\Psi_\mu\rangle$

$$\Gamma^{1,1} = \mathfrak{B}^*(x_1) \mathfrak{B}(x_2), \quad \text{где } \mathfrak{B}(x) = \left(\frac{\hbar \omega_\mu}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \langle N \rangle^{1/2} e^{i(k_\mu r - \omega_\mu t)}. \quad (1.33-18)$$

Для когерентности высшего порядка предположение о монохроматичности, конечно, уже не является достаточным. Если ограничиться \bar{q} фотонами в одной моде, то окажется, что не может иметь место когерентность M -го

порядка с $M > \bar{q}$. Предполагая, что

$$|\Psi_\mu\rangle = \sum_{n'=0}^{\bar{q}} c_{\mu, n'} |n'_\mu\rangle,$$

получаем как раз $\Gamma^{m,n} = 0$ для $n > \bar{q}$, ибо n -кратное применение оператора уничтожения к $|\Psi_\mu\rangle$ приводит к нулевому вектору.

Квантовые корреляционные функции из (1.33-14) можно связать с экспериментальными исследованиями интерференции и со статистикой фотонов, подобно тому как это было проиллюстрировано на типичных примерах для $\Gamma^{1,1}(x, x)$, $\Gamma^{1,1}(x_1, x_2)$ с $x_1 \neq x_2$, $\Gamma^{2,2}(x_1, x_2, x_2, x_1)$ при классическом представлении. Однако следует принять во внимание, что при этом должны вступить в свои права принципы квантового описания процесса измерения, согласно которым, вообще говоря, измерения вызывают изменения состояний. Если, например, производится измерение в пространственно-временных точках $x_1, x_2, x_3 \dots$ с $t_1 < t_2 < t_3 \dots$, то результат первого измерения влияет на результат второго измерения и т. д. Если допустить существование идеальных детекторов фотонов, то с точностью до постоянного множителя величина $\Gamma^{n,n}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_n, \dots, x_2, x_1)$ определяет совместную вероятность измерить интенсивность $J(x_1)$ в точке x_1 , интенсивность $J(x_2)$ в точке x_2 и т. д. Для глобально когерентных состояний, в частности, соблюдается соотношение

$$\Gamma^{m,n} \sim \prod_{j=1}^n J(x_j).$$

Это означает, что в данном случае мы встречаемся со статистической независимостью; результат измерения в пространственно-временной точке x_j интенсивности $J(x_j)$ не зависит от результатов измерений в других пространственно-временных точках.

Глава 2

**ФИЗИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ
С ВЕЩЕСТВОМ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ
И НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССАХ**

Эффекты линейной и нелинейной оптики обусловлены взаимным влиянием электромагнитного поля и вещества в газовой и конденсированной фазах. При квантовом описании это влияние учитывается при помощи члена взаимодействия в полном гамильтониане системы; в § 2.1 представлены соответствующие выражения как для полуклассического, так и для полностью квантового рассмотрения. Если член взаимодействия задан, то последовательное применение квантового формализма позволяет в принципе точно представить и рассчитать величины, имеющие физический смысл: плотности излучения, вероятности переходов и соответствующие им скорости изменения населенностей. Однако затрата труда для необходимых расчетов должна находиться в разумных пределах. Поэтому оказывается целесообразным заранее учесть в основных уравнениях те или иные особенности изучаемого эффекта, не допуская при этом по возможности снижения прогнозирующей способности получаемых решений. Приведем типичные примеры приближенных методов такого рода: учет отношения порядков величин длин взаимодействующих электромагнитных волн и линейных размеров рассматриваемой атомной системы, пренебрежение нерезонансными членами, упрощенное описание процессов без потерь и влияния диссипативных систем. Эти методы описываются в § 2.2. Их применение дает возможность при существенном сокращении вычислительных трудностей сделать в явном виде наиболее важные физические выводы и установить относительно несложные корреляции между теоретическими результатами и экспериментальными дан-

ными. В особенности сказанное относится к полуклассической трактовке, позволяющей охватить широкую область явлений; ей посвящен § 2.3. Определение зависимости математического ожидания поляризации от (классической) напряженности поля позволяет выразить введенные в классической теории (ч. I) феноменологическим путем восприимчивости через параметры атомной системы; таким образом, зависимость восприимчивостей от времени или от частоты приобретает микроскопическую интерпретацию. Выводятся общие соотношения, которые принимают конкретную форму в зависимости от природы исследуемого нелинейного эффекта или от свойств атомной системы (изолированные атомы или молекулы, взаимодействующие частицы, атомная система под влиянием диссипативной системы). На основе полуклассического способа рассмотрения получаются также определяющие уравнения для математических ожиданий других важных величин, какими являются инверсия населенностей и поляризация. Кроме того, могут быть вычислены важные параметры различных процессов, например поперечные сечения взаимодействий.

**§ 2.1. ОСНОВЫ КВАНТОВОГО ОПИСАНИЯ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

При квантовом описании взаимодействия излучения с веществом (имеется в виду взаимодействие электромагнитного излучения с атомными системами, т. е. с атомами, ионами, молекулами, кристаллами, жидкостями) изолированное поле излучения и изолированная атомная система первоначально рассматриваются как независимые подсистемы. Возникающее между этими подсистемами взаимодействие влечет за собой модификацию свойств атомной системы под влиянием поля излучения, и наоборот, создается единая система с новыми свойствами. В соответствии с этими представлениями гамильтониан всей системы имеет вид сумм двух гамильтонианов для невозмущенных подсистем и гамильтониана взаимодействия, вычисление которого основывается на классическом описании. Поэтому мы рассмотрим

сначала классическую гамильтонову функцию, а затем перейдем к полуклассическому и полному квантовому описанию.

2.11. Взаимодействие в классическом описании

Сначала рассматривается отдельный точечный заряд (электрический заряд q_e , масса m), находящийся под влиянием внешнего электрического и магнитного полей. Эти поля выражаются через электростатический потенциал $\mathcal{V}(r)$ и вектор-потенциал $A.(r., t)$

$$E.(r., t) = \nabla \mathcal{V}(r.) - \frac{\partial}{\partial t} A.(r., t), \quad B.(r., t) = \nabla \times A.(r., t). \quad (2.11-1)$$

В качестве конкретного примера представим себе точечный заряд как электрон под воздействием потенциала V атомного остова и электромагнитного поля, описываемого вектором-потенциалом $A.$. Уравнение (нерелятивистское) движения заряда имеет вид

$$m \frac{d^2 r.}{dt^2} = q_e E. + q_e \left(\frac{dr.}{dt} \times B. \right). \quad (2.11-2)$$

Это уравнение может быть интерпретировано как уравнение Лагранжа 2-го рода с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} \left(r., \frac{dr.}{dt} \right) = \frac{m}{2} \left(\frac{dr.}{dt} \right)^2 - q_e \mathcal{V} + q_e \frac{dr.}{dt} A.. \quad (2.11-3)$$

Канонически сопряженный радиусу-вектору $r.$ импульс есть

$$p. = \nabla_{(r.)} \mathcal{L} = m \frac{dr.}{dt} + q_e A.. \quad (2.11-4)$$

Отсюда получаем для функции Гамильтона

$$H(r., p.) = p. \frac{dr.}{dt} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} (p. - q_e A.)^2 + q_e \mathcal{V}. \quad (2.11-5)$$

Канонические уравнения Гамильтона для $dr./dt$ и $dp./dt$ приводят к уравнению движения (2.11-2).

Функцию Гамильтона (2.11-5) можно записать в форме

$$H = \left(\frac{1}{2m} p.^2 + q_e \mathcal{V} \right) + \overset{W}{H},$$

$$\overset{W}{H} = - \frac{q_e}{2m} (p. A. + A. p.) + \frac{q_e^2}{2m} A.^2. \quad (2.11-6)$$

В первом члене выражения для H вектор-потенциал не присутствует. Поэтому это слагаемое можно приписать изолированной атомной системе, т. е. невозмущенной подсистеме, на которую внешнее электромагнитное поле

не действует. $\overset{W}{H}$ характеризует взаимодействие с внешним электромагнитным полем. В этом члене имеются величины, относящиеся как к электромагнитному полю, так и к точечному заряду. С точки зрения теории возмущений $\overset{W}{H}$ может трактоваться как функция Гамильтона атомной системы, находящейся под действием внешнего вектора-потенциала $A.$. Разумеется, атомная система оказывает обратное действие на электромагнитное поле. Для получения функции Гамильтона атомной системы излучение — вещество следует присоединить к H соответствующее выражение для изолированного поля излучения (ср. разд. 1.11).

Член взаимодействия $\overset{W}{H}$ состоит из двух слагаемых. Одно из них зависит линейно, а другое квадратично от вектора-потенциала. Учитывая будущее квантование, мы записали первое слагаемое в форме симметричной зависимости от $p.$ и $A.$. Произведем сравнение порядков величин линейного и квадратичного членов для типичного примера оптического электрона, т. е. электрона, связанного с атомным остовом. Рассмотрим одну моду с частотой ω и с волновой амплитудой $|\bar{A}|$ вектора-потенциала. Амплитуда напряженности электрического поля есть $|\bar{E}| = \omega |\bar{A}|$. Тогда отношение квадратичного члена к линейному равно

$$\frac{\overset{W}{H}^{(2)}}{\overset{W}{H}^{(1)}} \approx \frac{e |\bar{E}|}{\omega p}.$$

Из основ квантовой механики следует, что среднее значение импульса оптического электрона по порядку величины определяется отношением \hbar/r , где r — среднее значение радиуса. С другой стороны, для оптических частот величина $\hbar\omega$ сравнима с $e r |E_{\text{атом}}|$, где e — элементарный заряд, $|E_{\text{атом}}|$ — средняя напряженность поля, с которым атомный остов действует на электрон (ср. ч. I, уравнение (2.2-2), и окончательно получаем

$$\frac{|\overset{W}{H}{}^{(2)}|}{|\overset{W}{H}{}^{(1)}|} \approx \frac{|\bar{E}|}{|E_{\text{атом}}|}. \quad (2.11-7)$$

Для оптического электрона и для излучения в оптической области отсюда следует, что квадратичный член становится сравнимым с линейным членом, если напряженность поля электромагнитной волны достигает значения $|E_{\text{атом}}|$, т. е. приближается к 10^{10} В/м.

Представим себе теперь, что атомная система состоит из многих точечных зарядов (электроны, атомные ядра) с зарядами (q_e) и массами m_α , которые описываются координатами r_α и импульсами p_α . Тогда с помощью такого же формализма, какой был выше применен к одному заряду, получаем функцию Гамильтона

$$H = H_A + \overset{W}{H},$$

где

$$H_A = \sum_\alpha \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \mathcal{U}(\dots, r_\alpha, \dots),$$

$$\overset{W}{H}(t) = \sum_\alpha - \frac{(q_e)_\alpha}{2m_\alpha} [p_\alpha \cdot A(r_\alpha, t) + A(r_\alpha, t) p_\alpha] +$$

$$+ \sum_\alpha \frac{(q_e)_\alpha^2}{2m_\alpha} A^2(r_\alpha, t). \quad (2.11-8)$$

H_A есть функция Гамильтона невозмущенной атомной системы, \mathcal{U} — ее потенциальная энергия, $\overset{W}{H}$ — часть функции Гамильтона, ответственная за взаимодействие.

2.12. Взаимодействие в полуклассическом описании

Под полуклассическим описанием мы будем понимать в соответствии с тем смыслом, который наиболее часто придают этому понятию в литературе, следующую модель: атомная система является квантованной и находится под влиянием классически описываемого поля Максвелла. Пространственные и импульсные координаты точечных зарядов атомной системы становятся операторами, причем функциональная зависимость между полевыми величинами и пространственными и импульсными операторами должна быть такая же, как и в классическом случае. Таким образом, в функции Гамильтона все величины r_α и p_α должны быть заменены операторами \mathbf{r}_α и \mathbf{p}_α ; это относится также к величинам r_α в функции $A(r_\alpha, t)$. Тем самым функции H , H_A и $\overset{W}{H}$ перейдут в операторы \mathbf{H} , \mathbf{H}_A и $\overset{W}{\mathbf{H}}$. Такой метод полуклассического описания оказался очень важным при решении практических проблем (о применениях см. § 2.3). В разд. 2.13 мы обсудим, насколько этот метод можно считать оправданным с точки зрения фундаментальных принципов.

В связи с некоммутативностью пространственных и импульсных операторов при квантовании входящего в $\overset{W}{H}$ члена, линейного относительно A , следует исходить из представленной в уравнении (2.11-8) симметричной записи. Правда, это выражение можно преобразовать к более простому виду, если принять во внимание, что вектор-потенциал удовлетворяет условию кулоновской калибровки [ср. уравнение (1.11-3)]. Из перестановочных соотношений для пространственных и импульсных операторов имеем [ср. уравнение (B2.13-2)]

$$\mathbf{p}_\alpha \cdot A(\mathbf{r}_\alpha, t) + A(\mathbf{r}_\alpha, t) \mathbf{p}_\alpha =$$

$$= 2A(\mathbf{r}_\alpha, t) \mathbf{p}_\alpha - i\hbar \nabla_{(\mathbf{r}_\alpha)} A(\mathbf{r}_\alpha, t). \quad (2.12-1)$$

Вследствие кулоновской калибровки второй член в первой части исчезает. Следует отметить, что в окончательной (несимметричной) записи оператор \mathbf{p}_α расположен справа от $A(\mathbf{r}_\alpha, t)$. Теперь для гамильтониана

получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_A + \overset{W}{\mathbf{H}}, \\ \mathbf{H}_A &= H_A(\mathbf{r}_{\alpha^*}, \mathbf{p}_{\alpha^*}), \\ \overset{W}{\mathbf{H}}(t) &= \sum_{\alpha} -\frac{(qe)_{\alpha}}{m_{\alpha}} A_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha^*}, t) \mathbf{p}_{\alpha^*} + \sum_{\alpha} \frac{(qe)_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} A_{\alpha}^2(\mathbf{r}_{\alpha^*}, t). \end{aligned} \quad (2.12-2)$$

2.13. Взаимодействие квантованного поля излучения с квантованной атомной системой

Гамильтониан всей системы излучение — вещество составляется из двух гамильтонианов, соответствующих независимым подсистемам (подсистема поля излучения и атомная подсистема), и оператора взаимодействия $\overset{W}{\mathbf{H}}$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_R + \overset{W}{\mathbf{H}}. \quad (2.13-1)$$

Гамильтониан \mathbf{H}_A идентичен присутствующему в уравнении (2.12-2); гамильтониан \mathbf{H}_R поля излучения преобразуется на основании уравнения (1.21-2) к виду

$$\mathbf{H}_R = \sum_{\mu} \hbar \omega_{\mu} \left(\mathbf{a}_{\mu}^{\dagger} \mathbf{a}_{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right), \quad (2.13-2)$$

где $\mathbf{a}_{\mu}^{\dagger}$, \mathbf{a}_{μ} — операторы рождения и уничтожения фотонов μ -й моды. Оператор взаимодействия $\overset{W}{\mathbf{H}}$ формально строится из вектора-потенциала и из импульсов в уравнении (2.12-2), но вектор-потенциал теперь вводится как оператор, так что

$$\overset{W}{\mathbf{H}} = \sum_{\alpha} -\frac{(qe)_{\alpha}}{m_{\alpha}} A_{\alpha} \cdot \mathbf{p}_{\alpha^*} - \sum_{\alpha} \frac{(qe)_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} A_{\alpha}^2,$$

где

$$A_{\alpha} = \sum_{\mu} \left(\frac{\hbar}{2V \epsilon_0 \omega_{\mu}} \right)^{1/2} e_{\mu^*} \{ \mathbf{a}_{\mu} e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}_{\alpha^*}} + \mathbf{a}_{\mu}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}_{\alpha^*}} \}. \quad (2.13-3)$$

Все применяемые операторы определены в представлении Шредингера, они не зависят от времени.

Гамильтониан всей системы удовлетворяет условию применимости представления Дирака (ср. разд. В1.21), сумма операторов $\overset{0}{\mathbf{H}} = \overset{0}{\mathbf{H}}_A + \overset{0}{\mathbf{H}}_R$ представляет свободную систему. Собственные значения оператора $\overset{0}{\mathbf{H}}$ складываются аддитивно из собственных значений операторов $\overset{0}{\mathbf{H}}_A$ и $\overset{0}{\mathbf{H}}_R$. Собственные функции оператора $\overset{0}{\mathbf{H}}$ образуют полный ортонормированный базис; они могут быть определены как прямые произведения собственных функций операторов $\overset{0}{\mathbf{H}}_A$ и $\overset{0}{\mathbf{H}}_R$:

$$\overset{0}{\mathbf{H}} | \overset{0}{\mathcal{E}} \rangle = \overset{0}{\mathcal{E}} | \overset{0}{\mathcal{E}} \rangle,$$

где

$$| \overset{0}{\mathcal{E}} \rangle = | \overset{0}{\mathcal{E}}_A \rangle | \dots, n_{\mu}, \dots \rangle, \quad \overset{0}{\mathcal{E}} = \overset{0}{\mathcal{E}}_A + \sum_{\mu} \hbar \omega_{\mu} \left(n_{\mu} + \frac{1}{2} \right),$$

$$\overset{0}{\mathbf{H}}_A | \overset{0}{\mathcal{E}}_A \rangle = \overset{0}{\mathcal{E}}_A | \overset{0}{\mathcal{E}}_A \rangle, \quad (2.13-4)$$

$$\overset{0}{\mathbf{H}}_R | \dots, n_{\mu}, \dots \rangle = \sum_{\mu} \hbar \omega_{\mu} \left(n_{\mu} + \frac{1}{2} \right) | \dots, n_{\mu}, \dots \rangle.$$

Представленное в настоящем разделе квантование всей системы излучение — вещество образует основу рассмотрения линейных и нелинейных эффектов. Оно оказалось весьма плодотворным при описании эффектов, относящихся к влиянию полей излучения на атомы, молекулы и твердые тела. При построении формализма мы исходили из далеко идущей аналогии с классическим описанием, пользуясь индуктивным методом.

Следует отметить, что приведенные соотношения могут быть получены также дедуктивным путем из квантовой электродинамики [2.13-1]. При этом следует исходить из поля Дирака, взаимодействующего с электромагнитным полем. Путем соответствующего преобразования позитронная компонента отделяется, а применение формализма Лагранжа позволяет сформировать функцию Гамильтона с электронной компонентой; метод включает последовательное разложение величин по степеням элементарного заряда и обратной скорости света в вакууме. Применение квантования поля для этой

системы приводит к гамильтониану, эквивалентному многочастичному оператору с фиксированным числом частиц. Для системы фермионов в наименьшем порядке указанного выше разложения непосредственно получается выражение, заданное уравнением (2.13-3). В нем остаются неучтенными релятивистские поправочные члены, обусловленные движением зарядов и влиянием спина (эти пренебрежения оказываются полностью оправданными при описании многих важных эффектов НЛО).

Допустим, что уравнения (2.13-1)—(2.13-3) служат основой правильного описания полной системы излучение — вещество. Тогда можно вывести те условия, при которых приведенное в разд. 2.12 полуклассическое описание следует считать применимым. Таковыми являются условия, при которых свойства классической волны с определенными полевыми величинами приближенно задаются квантованным полем излучения в каждой точке пространства-времени (ср. п. 1.322). Если вообще возможно полуклассическое описание спонтанно протекающих процессов и их связи с фотонными шумами, то оно может быть достигнуто только с помощью дополнительных допущений. Напротив, представленный в следующем разделе последовательный квантовомеханический формализм допускает исчерпывающую трактовку, которая в предельном случае воспроизводит результаты полуклассического описания.

§ 2.2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ; ТИПИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

При использовании представленных в разд. 2.12 и 2.13 свойств гамильтониана полной системы излучение — вещество оказывается возможным при заданных начальных условиях определить по общим законам квантовой теории имеющее физический смысл математическое ожидание в момент времени t для любой наблюдаемой \mathbf{M} . Начальные условия (к моменту времени t_0) системы могут быть исчерпывающим образом учтены при помощи оператора плотности $\rho(t_0)$; при полукласси-

ческом описании оператор плотности относится только к атомной системе, тогда как при последовательном квантовомеханическом описании этот оператор относится ко всей системе излучение — вещество. Специально выбранное для той или иной конкретной системы применение формализма может привести к значительному сокращению вычислительных трудностей. В принципе здесь следует различать два практических пути.

Один из них заключается в том, чтобы, исходя из $\rho(t_0)$, по уравнению (B2.15-8) определить значение оператора плотности в момент времени t и затем из него найти математическое ожидание некоторой наблюдаемой \mathbf{M} , имеющей важное значение для исследуемой проблемы, в тот же момент времени t . Так как гамильтониан состоит из оператора свободной системы и оператора взаимодействия, то в данном случае оказывается целесообразным применение представления Дирака (см. разд. B2.21)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}(t) \rangle &= \text{Sp} \{ \rho_D(t) \mathbf{M}_D(t) \}, \\ \rho_D(t) &= \rho(t_0) + \\ &+ \sum_{n=1} \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \times \\ &\times [\overset{W}{\mathbf{H}}_D(t_1), \dots, [\overset{W}{\mathbf{H}}_D(t_n), \rho(t_0)] \dots]. \end{aligned} \quad (2.2-1)$$

Этот метод обладает, в частности, тем преимуществом, что доступное измерению зависящее от времени математическое ожидание наблюдаемой \mathbf{M} , так сказать, автоматически оказывается расположенным по степеням полевых величин, содержащихся в операторе $\overset{W}{\mathbf{H}}$. Это свойство облегчает корреляцию теоретических значений с эмпирическими данными, которые в типичных случаях могут быть представлены как эффекты различных порядков относительно полевых величин.

Мы покажем это в явном виде на примере вероятности перехода — величины, имеющей очень важное теоретическое и практическое значение — для некоторого процесса n -го порядка. Понятие «процесс n -го порядка»

в применении к компоненте *вектора состояния* означает зависимость от оператора взаимодействия $\overset{W}{\mathbf{H}}$ в n -м порядке [ср. уравнение (B2.21-11)]; таким образом, составленные математические ожидания, к которым принадлежат также и вероятности, зависят от $\overset{W}{\mathbf{H}}$ в $(2n)$ -м порядке. Если мы хотим вычислить соответствующую вероятность $\omega_{a \rightarrow e}^{(2n)}(t)$ для перехода между состоянием $|\mathcal{E}_a\rangle$ в начальный момент времени и состоянием $|\mathcal{E}_e\rangle$ в более поздний момент времени t , то следует положить $\mathbf{M} = |\mathcal{E}_e\rangle\langle\mathcal{E}_e|$ и $\rho(t_0) = |\mathcal{E}_a\rangle\langle\mathcal{E}_a|$. Тогда получим

$$\omega_{a \rightarrow e}^{(2n)}(t) = |\langle\mathcal{E}_e|\psi^{(n)}(t)\rangle_D|^2, \quad (2.2-2)$$

где $|\psi^{(n)}(t)\rangle_D$ образует вклад n -го порядка в $|\psi(t)\rangle_D$. Согласно уравнению (B2.21-11), имеем

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{E}_e|\psi^{(n)}(t)\rangle_D &= \langle\mathcal{E}_e|\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \dots \\ &\dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \overset{W}{\mathbf{H}}_D(t_1) \dots \overset{W}{\mathbf{H}}_D(t_n) |\mathcal{E}_a\rangle. \end{aligned} \quad (2.2-3)$$

Начальное и конечное состояния идентичны (различным) собственным состояниям свободной системы [ср. уравнение (B2.21-1)], что отнюдь не ограничивает прогнозирующие возможности наших рассуждений для типичных случаев. Для дальнейших целей рассмотрим случай не зависящего от времени оператора взаимодействия (в представлении Шредингера); важным примером такого оператора служит выражение, получающееся из уравнения (2.13-3) при последовательном квантовом рассмотрении взаимодействия с полем излучения. При учете уравнения (B2.21-4) из уравнения (2.2-3) следует

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{E}_e|\psi^{(n)}(t)\rangle_D &= \\ &= \frac{1}{i\hbar} \sum_{j_1, \dots, j_{n-1}} \frac{\langle\mathcal{E}_e|\overset{W}{\mathbf{H}}|\mathcal{E}_{j_1}\rangle \dots \langle\mathcal{E}_{j_{n-1}}|\overset{W}{\mathbf{H}}|\mathcal{E}_a\rangle}{(\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_{j_1}) \dots (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_{j_{n-1}})} G_n(t), \end{aligned} \quad (2.2-4)$$

$$\begin{aligned} \text{где } G_n(t) &= \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^{n-1} (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_{j_1}) \dots (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_{j_{n-1}}) \times \\ &\times \int_0^t dt_1 e^{i\omega_{e j_1} t_1} \int_0^{t_{n-1}} dt_n e^{i\omega_{j_{n-1} a} t_n} \end{aligned}$$

и

$$\omega_{j' j''} \equiv \frac{1}{\hbar} (\mathcal{E}_{j'} - \mathcal{E}_{j''}).$$

Здесь производится $(n-1)$ -кратное суммирование по собственным состояниям $|\mathcal{E}_j\rangle$ свободной системы, которые в данном случае следует рассматривать как виртуальные промежуточные состояния. Таким образом, вероятность $\omega_{a \rightarrow e}^{(2n)}(t)$ зависит от $2n$ -кратных произведений матричных элементов оператора $\overset{W}{\mathbf{H}}$.

Второй из вышеупомянутых путей исходит из системы уравнений движения в представлении Гейзенберга для всех относящихся к проблеме переменных [ср. уравнение (B2.14-7)]. Для получения явной зависимости от времени для какой-либо определенной наблюдаемой $\mathbf{M}_H(t)$ следует одновременно решить систему дифференциальных уравнений для большого числа переменных; среди результирующих решений $\mathbf{G}_H(t)$ найдутся, как правило, также и такие переменные или наблюдаемые, которые непригодны или не применяются для интерпретации экспериментальных данных. Если не воспользоваться с самого начала подходящими приближениями (они приводятся в следующих разделах), то на втором пути можно встретиться с возрастанием трудностей по сравнению с первым, прямым путем. Конечно, второй путь может обладать тем преимуществом, что аналогия с классическими основополагающими уравнениями проблемы [ср. уравнение (B2.14-9)] станет более очевидной. Кроме того, второй путь может успешно использоваться, если требуется установить общие соотношения между зависящими от времени математическими ожиданиями различных переменных или между самими переменными без задания оператора $\rho(t_0)$ в явном виде.

Если не применяются какие-либо приближения расчетно-технического характера, то оба пути непременно приводят к одинаковому результату для величин, имеющих физический смысл (ср. разд. В2.12). При применении квантового формализма, наряду с выбором подходящего пути, решающее влияние на объем расчетных трудностей и тем самым на удовлетворительное выяснение всей проблемы в целом оказывает надлежащее упрощение гамильтониана. Оно достигается с помощью использования в самом начале решения тех или иных конкретных предположений о свойствах атомной системы, поля излучения и о характере самих подлежащих описанию процессов. Типичные методы приводятся в следующих разделах.

2.21. Дипольное приближение

Об атомной системе предполагается, что точечные заряды находятся в конечном объеме V , линейные размеры которого малы по сравнению с длинами действующих волн электромагнитного поля. В качестве примера можно представить себе атом или молекулу с небольшим числом атомов, находящиеся под влиянием излучения с длинами волн, лежащими в ультрафиолетовой или видимой области.

При этом предположении матричные элементы $\langle \mathcal{E}_e | \overset{0}{\mathbf{H}}^{(1)} | \mathcal{E}_a \rangle$ компоненты оператора взаимодействия, линейной по полевым величинам \mathbf{A} , могут быть представлены в упрощенном виде [ср. уравнение (2.13-3)]; $|\mathcal{E}_e\rangle$ и $|\mathcal{E}_a\rangle$ являются собственными состояниями определенного в уравнении (2.13-4) оператора $\overset{0}{\mathbf{H}}$ свободной полной системы, состоящей из атомной системы и поля излучения. Именно эти матричные элементы наиболее важны для объяснения большинства нелинейных оптических эффектов. Матричный элемент $\langle \mathcal{E}_e | \overset{0}{\mathbf{H}}^{(1)} | \mathcal{E}_a \rangle$ строится аддитивно из вкладов, вносимых отдельными носителями заряда и отдельными модами. Поэтому следует вначале рассмотреть только один точечный заряд

и только отдельную моду, причем мы сможем опустить соответствующие индексы. Для простоты можно предположить, что начало координат находится в рассматриваемом точечном заряде. Из уравнения (2.13-3) прямо следует

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_e | -\frac{q_e}{m} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{a}^+, \mathbf{a}, \mathbf{r}) \mathbf{p} | \mathcal{E}_a \rangle &= \\ &= {}_e \langle \dots, n_\mu, \dots | -\frac{q_e}{m} \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega} \right)^{1/2} \times \\ &\times e \cdot \mathbf{a} \langle \mathcal{E}_{A,e} | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{p} | \mathcal{E}_{A,a} \rangle + \{H_A\} \dots, n_\mu, \dots \rangle_a. \end{aligned} \quad (2.21-1)$$

Матричный элемент $\langle \mathcal{E}_e | \overset{0}{\mathbf{H}}^{(1)} | \mathcal{E}_a \rangle$ содержит, следовательно, матричные элементы вида

$$\langle \mathcal{E}_{A,e} | e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{p} | \mathcal{E}_{A,a} \rangle,$$

которые в свою очередь образуются только из операторов и собственных функций атомной системы; сначала мы обратимся именно к этим матричным элементам. Экспоненциальная функция разлагается по r_0 :

$$\langle \mathcal{E}_{A,e} | e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{p} | \mathcal{E}_{A,a} \rangle = \langle \mathcal{E}_{A,e} | (\mathbf{I} \pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots) \mathbf{p} | \mathcal{E}_{A,a} \rangle. \quad (2.21-2)$$

Если этот матричный элемент аппроксимируется матричным элементом $\langle \mathcal{E}_{A,e} | \mathbf{p} | \mathcal{E}_{A,a} \rangle$, то говорят о дипольном приближении; это означает пренебрежение мультипольным излучением с более чем двумя полюсами, а действие вектора-потенциала на точечный заряд в пространственной области V принимается независимым от r . Следует заметить, что в этом приближении мы приходим к величине $|k| \sqrt{\langle r^2 \rangle}$, т. е. к отношению линейного размера объема V к длине волны.

Матричный элемент $\langle \mathcal{E}_{A,e} | \mathbf{p} | \mathcal{E}_{A,a} \rangle$ можно преобразовать. В качестве перестановочного соотношения пространственного оператора с \mathbf{H}_A получается в общем случае [ср уравнение (В2.13-2)]

$$[\mathbf{r}, \mathbf{H}_A] = i\hbar \frac{\mathbf{p}}{m},$$

что приводит к соотношению

$$\langle \mathcal{E}_{A,e} | \mathbf{p} | \mathcal{E}_{A,a} \rangle = \frac{im}{\hbar} (\mathcal{E}_{A,e} - \mathcal{E}_{A,a}) \langle \mathcal{E}_{A,e} | \mathbf{r} | \mathcal{E}_{A,a} \rangle.$$

Примем, что в начале координат находится неподвижный электрический заряд той же величины, но противоположного знака; тогда можно ввести оператор электрического дипольного момента в виде

$$\mathbf{d}' = q_e \mathbf{r}.$$

Окончательно получим

$$\langle \mathcal{E}_{A, e} | \mathbf{p} \cdot | \mathcal{E}_{A, a} \rangle = i \frac{m}{q_e} \omega_{ea} \langle \mathcal{E}_{A, e} | \mathbf{d}' | \mathcal{E}_{A, a} \rangle. \quad (2.21-3)$$

Следовательно, матричный элемент импульса пропорционален частоте перехода и матричному элементу электрического дипольного момента. Мы приходим к выводу, что в дипольном приближении один заряд и одна мода (индекса μ) вносят в матричный элемент $\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H}^{(1)} | \mathcal{E}_a \rangle$ вклад

$$F_\mu = \frac{\omega_{ea}}{\omega_\mu} \langle \mathcal{E}_e | -\mathbf{d}' \cdot \left[i \left(\frac{\hbar \omega_\mu}{2V \epsilon_0} \right)^{1/2} e_\mu \cdot \mathbf{a}_\mu + \{HA\} \right] | \mathcal{E}_a \rangle. \quad (2.21-4)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой оператор напряженности электрического поля в элементе объема V для одной моды; он коммутирует с оператором \mathbf{d}' , что означает существенное упрощение по сравнению с матричным элементом в уравнении (2.21-1).

Если выполнить суммирование по всем модам, то вместо выражения в квадратных скобках в уравнении (2.21-4) появится полная напряженность поля; отсюда возникает мысль использовать в случае применимости дипольного приближения непосредственно оператор взаимодействия $-\mathbf{d}' \cdot \mathbf{E}$ вместо выражения $(-q_e/m) \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$. Однако при этом мы должны выяснить связь между частотами переходов ω_{ea} и частотами мод ω_μ , входящими в уравнение (2.21-4). Для сравнения точного оператора взаимодействия с применяемым в дипольном приближении положим

$$\mathbf{H}_D^{(1)} = -\frac{q_e}{m} \mathbf{A}_D(t) \cdot \mathbf{p}_D(t) = \mathbf{d}' \cdot \mathbf{E}_D(t) + \mathbf{Z}(t), \quad (2.21-5)$$

где наблюдаемые задаются в представлении Дирака. Следовательно, необходимо установить условия, при которых оператором \mathbf{Z} , играющим роль поправочного чле-

на, можно пренебречь по сравнению с $-\mathbf{d}' \cdot \mathbf{E}_D$. В рассматриваемом дипольном приближении \mathbf{A}_D и \mathbf{E}_D не зависят от зависящего от времени оператора $\mathbf{r}_D(t)$, поэтому \mathbf{Z} можно представить в виде

$$\mathbf{Z} = q_e \frac{d}{dt} \{ \mathbf{A}_D(t) \cdot \mathbf{r}_D(t) \}, \quad (2.21-6)$$

что легко проверить путем дифференцирования.

Для определения величин, имеющих физический смысл, следует всегда представлять матричные элементы операторов в виде [ср. уравнение (2.2-1)]

$$\int_{t_0}^{t_1} dt' \mathbf{H}_D^{(1)}(t').$$

Из уравнения (2.21-6) следует

$$\int_{t_0}^{t_1} dt' \mathbf{H}_D^{(1)}(t') = \left\{ - \int_{t_0}^{t_1} dt' \mathbf{d}' \cdot \mathbf{E}_D(t') \right\} + \{ \mathbf{A}_D(t_1) \mathbf{d}' \cdot \mathbf{E}_D(t_1) - \mathbf{A}_D(t_0) \mathbf{d}' \cdot \mathbf{E}_D(t_0) \}. \quad (2.21-7)$$

Если матричные элементы этого оператора построить с собственными функциями $|\mathcal{E}_e\rangle$, $|\mathcal{E}_a\rangle$ гамильтониана \mathbf{H}_0 , то в результате интегрирования первого слагаемого по времени возникают резонансные знаменатели вида $\{ (\mathcal{E}_{A, e} - \mathcal{E}_{A, a}) / \hbar \} \pm \omega_\mu$, где ω_μ — частоты мод, поэтому вклады первого и второго слагаемых различаются множителями вида $\omega_\mu / [\hbar^{-1} (\mathcal{E}_{A, e} - \mathcal{E}_{A, a}) \pm \omega_\mu]$. Наиболее существенные вклады в полный матричный элемент оператора $\int_{t_0}^{t_1} dt' \mathbf{H}_D^{(1)}(t')$ вносят те члены, у которых резонансные знаменатели достаточно малы; это как раз означает, что дипольный член играет более существенную роль по сравнению с \mathbf{Z} .

Здесь следует отметить, что переход от оператора взаимодействия (2.13-3) с учетом квадратичного члена к оператору взаимодействия в дипольном приближении может быть реализован также с помощью некоторого

унитарного преобразования [2.21-1]. По общим закономерностям квантовой теории (ср. разд. В2.12) при образовании математических ожиданий векторы состояний обязательно должны подвергаться тому же унитарному преобразованию, что и оператор; при этом, однако, возникают значительные осложнения по сравнению с простым и наглядным применением собственных функций свободной системы.

Поскольку оператор взаимодействия аддитивно складывается из членов, соответствующих отдельным носителям заряда, то легко составить полный дипольный момент всех зарядов в объеме V :

$$\mathbf{d} = \sum_{\alpha} \mathbf{d}'_{\alpha}. \quad (2.21-8)$$

В дипольном приближении тогда имеем

$$\overset{\Psi}{\mathbf{H}} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.21-9)$$

Важное значение имеет то обстоятельство, что матричные элементы оператора \mathbf{d} отдельного атома или молекулы можно простым способом связать с эмпирически определяемыми величинами (силы осцилляторов), тогда как суммы по всем электронным импульсам в членах вида $-\sum_{\alpha} ((q_e)_{\alpha}/m_{\alpha}) \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_{\alpha}$ таким свойством не обладают.

Если носители заряда находятся в некоторой протяженной области пространства (рассмотрение твердых тел, жидкостей, газов, плазмы), то дипольное приближение можно применить в следующей форме. Представим себе, что весь объем разбит на частичные объемы V_n с теми или иными центрами тяжести заряда \bar{r}_n , и что каждый из частичных объемов удовлетворяет описанному выше условию применимости дипольного приближения. Тогда оператор взаимодействия всей системы в дипольном приближении примет вид

$$\overset{\Psi}{\mathbf{H}} = \sum_n -\mathbf{d}_n \cdot \mathbf{E}(\bar{r}_n), \quad (2.21-10)$$

где \mathbf{d}_n — оператор электрического дипольного момента, приписываемый n -му частичному объему. При соответ-

ствующих условиях можно перейти от суммирования к пространственному интегрированию (ср. ч. I, § 1.3).

До сих пор мы пользовались дипольным приближением применительно к полному квантовому описанию, как оно изложено в разд. 2.13. Но дипольное приближение может аналогичным образом использоваться и при полуклассическом описании (ср. разд. 2.12):

$$\overset{\Psi}{\mathbf{H}}(t) = \sum_n -\mathbf{d}_n \cdot \mathbf{E}(\bar{r}_n, t), \quad (2.21-11)$$

где $\mathbf{E}(\bar{r}_n, t)$ — классическая напряженность электрического поля в точке \bar{r}_n в момент времени t .

2.22. Пренебрежение нерезонансными членами (приближение вращающейся волны)

Изменение вероятности перехода в единицу времени между различными состояниями замкнутой полной системы может достигать достаточно высоких значений, если разность энергий начального и конечного состояний близка к нулю (ср. разд. В2.26). Это обстоятельство можно использовать для упрощения расчетов, которые именно для нелинейных процессов часто требуют слишком большого труда. Для этого следует в операторе взаимодействия с самого начала удерживать только те члены, которые представляют процессы, согласующиеся с законом сохранения энергии. Иначе говоря, следует исключить нерезонансные члены. Это приближение соответствует введенному в полуклассической лазерной теории так называемому «приближению вращающейся волны» (ср. п. 3.122).

Принцип метода можно проиллюстрировать на примере однофотонного процесса, в котором участвуют только один атомный переход и одна мода; при этом также применяется дипольное приближение. Матричный элемент оператора взаимодействия в дипольном приближении с любыми (нормированными) состояниями $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ может быть записан в форме

$$\begin{aligned} \langle \varphi | -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} | \psi \rangle &= \langle \varphi_R | \langle \varphi_A | -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} | \psi_A \rangle | \psi_R \rangle = \\ &= -\langle \varphi_A | \mathbf{d} | \psi_A \rangle \langle \varphi_R | \mathbf{E} | \psi_R \rangle, \end{aligned} \quad (2.22-1)$$

где индексы A и R характеризуют общие состояния изолированной атомной системы и изолированной системы электромагнитного поля. Для дальнейших целей полезно описывать атомную систему в формализме второго квантования (ср. разд. В2.25): оператор дипольного момента обозначим $\tilde{\mathbf{d}}$, а векторами состояний пусть будут $|\tilde{\varphi}\rangle$, $|\tilde{\psi}_A\rangle$. Тогда получим

$$\langle \varphi | \mathbf{H} | \psi \rangle = \langle \varphi_R | \langle \tilde{\varphi}_A | - \tilde{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E} \cdot | \tilde{\psi}_A \rangle | \psi_R \rangle. \quad (2.22-2)$$

Для перехода между атомными состояниями 1 и 2 (энергии $\mathcal{E}_{A,1}$, $\mathcal{E}_{A,2}$, причем $\mathcal{E}_{A,2} > \mathcal{E}_{A,1}$, операторы Ферми \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2) следует, согласно уравнению (В2.25-14), записать матричный элемент оператора $\tilde{\mathbf{d}}$, как

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{d}})_{1-2} &= \langle \mathcal{E}_{A,1} | \mathbf{d} \cdot | \mathcal{E}_{A,2} \rangle \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2 + \langle \mathcal{E}_{A,2} | \mathbf{d} \cdot | \mathcal{E}_{A,1} \rangle \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_1 = \\ &= d_{12} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2 + d_{21} \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_1. \end{aligned}$$

Компонента μ -й моды в операторе напряженности электрического поля $(\mathbf{E})_\mu$ по аналогии с уравнением (1.31-27) разделяется на два эрмитово сопряженных слагаемых:

$$(\mathbf{E})_\mu = \mathbf{E}_\mu^{(-)} + \mathbf{E}_\mu^{(+)}, \quad (2.22-3a)$$

где $\mathbf{E}_\mu^{(-)}$ содержит оператор уничтожения, а $\mathbf{E}_\mu^{(+)}$ — оператор рождения; однако в отличие от уравнения (1.31-27) мы встречаемся здесь с не зависящими от времени операторами в представлении Шредингера. Соблюдается соотношение $\mathcal{E}_{A,2} - \mathcal{E}_{A,1} = \hbar \omega_\mu$.

Таким образом, вклад одного атомного перехода и одной моды в оператор взаимодействия $-\tilde{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}$ имеет вид

$$\begin{aligned} (-\tilde{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E})_{1-2; \mu} &= -d_{21} \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_1 \mathbf{E}_\mu^{(-)} - d_{12} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2 \mathbf{E}_\mu^{(+)} - \\ &- d_{12} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2 \mathbf{E}_\mu^{(-)} - d_{21} \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_1 \mathbf{E}_\mu^{(+)}, \quad (2.22-3b) \end{aligned}$$

где $d_{i\mu} = \langle \mathcal{E}_{A,i} | \mathbf{d} \cdot | \mathcal{E}_{A,i} \rangle$. В первом слагаемом присутствует атомный переход снизу вверх в сочетании с уничтожением фотона, а второе слагаемое соответствует переходу сверху вниз в сочетании с рождением фотона;

таким образом, оба слагаемых согласуются с законом сохранения энергии. Он не соблюдается для двух последних слагаемых; например, третье слагаемое представляет процесс, при котором переход сверху вниз сопровождается уничтожением фотона. Пренебрежение третьим и четвертым слагаемыми и представляет собой в данном случае приближение вращающейся волны.

Полное значение этого приближенного метода раскрывается благодаря возможности сравнительно простого представления операторов взаимодействия для *нелинейных* процессов. Покажем это на примере нелинейного процесса низшего порядка ($n=2$), а именно двухфотонного поглощения; он может служить моделью для всех других процессов. При вычислении вероятности перехода $\omega_{a \rightarrow e}^{(2n)}(t)$ для процессов n -го порядка мы будем опираться на прежние рассуждения. Они приводили к результатам, содержащимся в уравнениях (2.2-2) и (2.2-4). При их выводе были сделаны определенные допущения, которые мы считаем применимыми также и здесь. В частности, при $n=2$ содержащий время фактор $G_n(t)$ равен

$$G_2(t) = \frac{e^{i\omega_{ea}t} - 1}{i\omega_{ea}} - \frac{e^{i\omega_{ej}t} - 1}{i\omega_{ej}}, \quad (2.22-4)$$

где ω_{ea} — частота перехода между конечным и начальным состояниями, а ω_{ej} — частота перехода между конечным состоянием и виртуальным промежуточным состоянием $|\mathcal{E}_j\rangle$. В соответствии с обстоятельствами, рассматриваемыми в следующем разделе, мы предположим, что имеет место резонанс энергий между начальным и конечным состояниями; наоборот, частоты ω_{ej} должны принимать конечные, отличные от нуля значения, т. е. резонанс энергий между состоянием $|\mathcal{E}_e\rangle$ и виртуальным промежуточным состоянием $|\mathcal{E}_j\rangle$ считается исключенным. Если далее считать основными сделанные в разд. 2.26 предположения относительно начального и конечного состояний ($|\mathcal{E}_a\rangle \neq |\mathcal{E}_e\rangle$) и относительно длины интервала времени, а именно если считать применимой концепцию «крупнозернистости» во временной области, то для средней скорости изменения вероятности

перехода получим

$$\frac{\Delta w_{a \rightarrow e}^{(4)}(\tau)}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_l \frac{\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H} | \mathcal{E}_l \rangle \langle \mathcal{E}_l | \mathbf{H} | \mathcal{E}_a \rangle}{\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_l} \right|^2 \delta(\mathcal{E}_e - \mathcal{E}_a). \quad (2.22-5)$$

Этот результат получается потому, что при наших предположениях можно в $G_2(t)$ пренебречь влиянием второго слагаемого по сравнению с первым. Из сравнения уравнений (2.22-5) и (B2.26-6) видно, что для рассматриваемого процесса второго порядка появляется сумма четырехкратных произведений матричных элементов

оператора \mathbf{H} вместо $|\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H} | \mathcal{E}_a \rangle|^2$.

До сих пор мы рассматривали вообще процесс второго порядка, теперь учтем специфику двухфотонного поглощения (ДФП). Будем считать, что оно происходит в атомной системе, какой в частности, может быть молекула. При этом снова воспользуемся дипольным приближением с оператором $\mathbf{H} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$. Возбуждение атомной системы из состояния $|\mathcal{E}_{A,a}\rangle$ в состояние $|\mathcal{E}_{A,e}\rangle$ происходит в результате поглощения двух фотонов (из мод μ_1 и μ_2), причем вследствие предполагаемого резонанса энергий должно соблюдаться условие

$$\mathcal{E}_{A,e} - \mathcal{E}_{A,a} = \hbar\omega_{\mu_1} + \hbar\omega_{\mu_2}. \quad (2.22-6)$$

Функции начального и конечного состояний могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_a\rangle &= |\mathcal{E}_{A,a}\rangle |n_{\mu_1}, n_{\mu_2}\rangle, \\ |\mathcal{E}_e\rangle &= |\mathcal{E}_{A,e}\rangle |n_{\mu_1} - 1, n_{\mu_2} - 1\rangle. \end{aligned} \quad (2.22-7)$$

Величины n_{μ_1} , n_{μ_2} являются числами фотонов в модах μ_1 и μ_2 ; фотоны из других мод не должны в этом процессе играть никакой роли, и их можно опустить в характеристике собственных состояний поля излучения. Произведение матричных элементов в сумме $\sum_l \dots$ может принимать исчезающие значения только при выполнении для виртуального состояния следующего ус-

ловия (ср. разд. 1.22):

$$|\mathcal{E}_l\rangle = \begin{cases} |\mathcal{E}_{A,l}\rangle |n_{\mu_1} - 1, n_{\mu_2}\rangle, \\ |\mathcal{E}_{A,l}\rangle |n_{\mu_1}, n_{\mu_2} - 1\rangle. \end{cases} \quad (2.22-8)$$

Принимая во внимание разложение \mathbf{E} на \mathbf{E}^- и \mathbf{E}^+ , получим для скорости изменения вероятности перехода

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w_{a \rightarrow e}^{(4)}(t)}{\Delta t} &= \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_l \frac{(d_{el})_2 \langle n_{\mu_2} - 1 | \mathbf{E}_{\mu_2}^- \rangle (d_{la})_1 |n_{\mu_1} - 1 | \mathbf{E}_{\mu_1}^- | n_{\mu_1} \rangle}{\mathcal{E}_{A,a} - \mathcal{E}_{A,l} + \hbar\omega_{\mu_1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(d_{el})_1 \langle n_{\mu_1} - 1 | \mathbf{E}_{\mu_1}^- | n_{\mu_1} \rangle (d_{la})_2 \langle n_{\mu_2} - 1 | \mathbf{E}_{\mu_2}^- | n_{\mu_2} \rangle}{\mathcal{E}_{A,a} - \mathcal{E}_{A,l} + \hbar\omega_{\mu_2}} \right|^2 \delta(\mathcal{E}_e - \mathcal{E}_a). \end{aligned} \quad (2.22-9)$$

Входящее в (2.22-9) выражение $(d_{el})_2$ является скалярным произведением вектора $\langle \mathcal{E}_{A,l} | \mathbf{d} | \mathcal{E}_{A,l} \rangle$ и единичного вектора, обозначающего моду μ_2 ; аналогичную структуру имеют и другие величины, содержащие атомный дипольный момент; подобным же образом $\mathbf{E}_{\mu_2}^-$ строится как скалярная величина из $\mathbf{E}_{\mu_2}^-$. Величины $\mathbf{E}_{\mu_1}^-$ и $\mathbf{E}_{\mu_2}^-$ пропорциональны операторам уничтожения фотонов различных мод. Суммирование выполняется по всем состояниям $|\mathcal{E}_{A,l}\rangle$ атомной системы.

Сопоставим теперь специально двухфотонному поглощению оператор

$$\mathbf{H}^{(ДФП)} = \eta \mathbf{b}_e^+ \mathbf{b}_a \mathbf{E}_{\mu_1}^- \mathbf{E}_{\mu_2}^- + \eta^* \mathbf{b}_e \mathbf{b}_a^+ \mathbf{E}_{\mu_2}^+ \mathbf{E}_{\mu_1}^+, \quad (2.22-10)$$

где

$$\eta = \sum_l \frac{(d_{el})_2 (d_{la})_1}{\mathcal{E}_{A,a} - \mathcal{E}_{A,l} + \hbar\omega_{\mu_1}} + \frac{(d_{el})_1 (d_{la})_2}{\mathcal{E}_{A,a} - \mathcal{E}_{A,l} + \hbar\omega_{\mu_2}} \quad (2.22-11)$$

является эффективным матричным элементом для двухфотонного перехода; \mathbf{b}_e , \mathbf{b}_a — операторы Ферми конечного и начального состояний атомной системы. Применение оператора $\mathbf{H}^{(ДФП)}$ как оператора взаимодействия

дает уже в теории возмущений первого порядка по волновой функции правильный результат для скорости изменения вероятности перехода [ср. уравнение (B2.26-6)]. Это легко проверить, для чего достаточно вычислить

$$\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H}^{(ДФП)} | \mathcal{E}_a \rangle = \\ = \langle n_{\mu_1} - 1, n_{\mu_2} - 1 | \langle \hat{\mathcal{E}}_{A,e} | \mathbf{H}^{(ДФП)} | \hat{\mathcal{E}}_{A,a} \rangle | n_{\mu_1}, n_{\mu_2} \rangle. \quad (2.22-12)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (2.22-10), содержащее операторы рождения фотонов, не вносит никакого вклада в значение матричного элемента (2.22-11). Поэтому и поскольку $\langle \hat{\mathcal{E}}_{A,l} | \mathbf{b}_e^+ \mathbf{b}_a | \hat{\mathcal{E}}_{A,a} \rangle = 1$, матричный элемент $\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H}^{(ДФП)} | \mathcal{E}_a \rangle$ в точности равен сумме $\sum \dots$ в уравнении (2.22-9).

Таким образом, мы показали, что подобранный для специального нелинейного процесса оператор взаимодействия $\mathbf{H}^{(ДФП)}$ при пренебрежении нерезонансными членами дает для доступной измерению величины, а именно для скорости изменения вероятности перехода, в наинизшем порядке теории возмущений, зависящих от времени, тот же результат, что и теория возмущений, основанная на операторе взаимодействия — **d.E.** Следует отметить, что высказанное положение справедливо не только для изменения вероятности перехода со временем, но при прочих одинаковых предположениях также и для других важных величин. Примером может служить изменение во времени математического ожидания числа фотонов $\partial/\partial t \langle \mathbf{a}^+ \mathbf{a} \rangle$ и оператора рождения $\partial/\partial t \langle \mathbf{a}^+ \rangle$. Структура оператора $\mathbf{H}^{(ДФП)}$ позволяет непосредственно установить специфику двухфотонного поглощения: первое слагаемое содержит операторы уничтожения фотонов в модах μ_1 и μ_2 , а также операторы Ферми для перехода атомной системы. Вследствие эрмитовости всего оператора второй член, очевидно, является сопряженным к первому; поэтому оператор $\mathbf{H}^{(ДФП)}$ может быть использован также для описания двухфотонной эмиссии.

В начале настоящего раздела мы ограничились установлением свойств вероятностей переходов в случае резонанса энергий. Однако возможны более общие применения. По аналогии с тем, как это было сделано для двухфотонного поглощения или для двухфотонной эмиссии, можно построить операторы взаимодействия для других специальных процессов второго и более высоких порядков. Это верно также и для процессов, в которых не происходит резонансного обмена с атомной системой, а имеет место только перекачка энергии между различными модами поля излучения. Примером может служить оператор взаимодействия для когерентного образования суммарных частот (в частности, для генерации второй гармоники).

2.23. Введение эффективных операторов взаимодействия

Часто оказывается целесообразным связать квантовое описание поля излучения (которое, в частности, позволяет охватить также и спонтанно протекающие процессы) с применением электрооптических констант, фигурирующих в классическом описании электродинамики сплошной среды (ср. ч. I). Тогда открывается возможность прямой корреляции с экспериментальными данными. Это удается довольно просто осуществить для процессов, в которых можно считать, что в среде отсутствуют потери. Такое свойство следует понимать в том смысле, что хотя среда «способствует» перекачке энергии между различными модами поля излучения, в ней самой не индуцируются какие-либо резонансные переходы. Описание выполняется с некоторым «эффективным оператором взаимодействия», содержащим операторы поля излучения и феноменологически введенные восприимчивости.

Исходным пунктом служит следующее классическое рассмотрение (оно описано более подробно в ч. I, п. 1.321, и ч. I, Приложение 6): в среде могут присутствовать многие электромагнитные волны с частотами и волновыми числами вблизи ω_j и соответственно k_j ($j = 1, 2, \dots, m$), которые вследствие возникающей в сре-

де нелинейности поляризации $P^{(НЛ)}$ взаимодействуют между собой. Для напряженности электрического поля j -й волны следует положить

$$E_j(r., t) = E_j^{(-)}(r., t) + E_j^{(+)}(r., t), \quad (2.23-1)$$

где

$$E_j^{(-)} = (E_j^{(+)})^*, \quad E_j^{(+)} = \hat{E}_j^{(+)}(r., t) e^{i\omega_j t}.$$

Вследствие взаимодействия волновые амплитуды $\hat{E}_j^{(\pm)}$ отдельных волн испытывают определенные временные изменения. Для определения этих изменений будем считать, что поляризация аналогично напряженности поля разлагается по уравнению (2.23-1). Полная напряженность поля $E. = \sum_j E_j.$ и аналогичного вида поляризация подставляются в волновое уравнение [ср. ч. I, уравнение (1.32-1)]

$$\nabla. \times (\nabla. \times E.) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 P^{(НЛ)}}{\partial t^2} - \mu. \frac{\partial^2 P^{(Л)}}{\partial t^2}. \quad (2.23-2)$$

Мы положили здесь магнитную проницаемость равной 1; $P^{(Л)}$ есть линейная часть поляризации, которая в свою очередь через восприимчивость первого порядка линейно связана с напряженностью поля. Из дифференциального уравнения (2.23-2) следует система m дифференциальных уравнений для отдельных амплитуд парциальных волн [явное представление дано в ч. I, Приложение 6, уравнение (П6-4)] с частными производными по пространственным и временным координатам различных высоких порядков. При соответствующих физических условиях высшими производными можно пренебречь, при этом возникает вопрос о том, насколько сильно амплитуды напряженности поля и поляризации меняются в пространстве по сравнению с $|k_j|^{-1}$ и во времени по сравнению с ω_j^{-1} . Мы примем, что пространственная структура волн не испытывает изменений под влиянием взаимодействия (что соответствует представленной в § 1 концепции мод); это означает, что можно положить равными нулю все пространственные производные. Далее, действие нелинейной поляризации можно рассматривать как малое возмущение в том смысле, что

можно пренебречь временной зависимостью амплитуд нелинейной поляризации, а амплитуды напряженности поля считаются изменяющимися медленно. Эти предположения приводят к дифференциальному уравнению для j -й парциальной волны:

$$-i\omega_j \text{Im} \{ \chi_j \} \hat{E}_j^{(+)} + i \left[2\epsilon_j \epsilon_0 + \omega_j \left\{ \frac{d}{d\omega} \chi(\omega) \right\}_{\omega_j} \right] \frac{d\hat{E}_j^{(+)}}{dt} = \omega_j \hat{P}_j^{(+)} \quad (2.23-3)$$

Для наглядности мы вначале исходили из простых геометрических характеристик (однокомпонентные полевые величины, изотропия, коллинеарное взаимодействие); лишь в окончательных формулах мы обратимся к более общим условиям. Величины ϵ_j и χ_j представляют собой линейную диэлектрическую постоянную и линейную восприимчивость на частоте ω_j , особо следует указать на то, что $\hat{P}_j^{(+)}$ означает колебательную амплитуду *нелинейной* поляризации на частоте ω_j .

В центре наших рассуждений находится влияние нелинейной поляризации на колебательные амплитуды $\hat{E}_j^{(+)}$, поэтому мы не будем обращать внимание на побочные эффекты и предположим для среды не только отсутствие потерь, но будем также считать, что можно пренебречь дисперсией линейного члена восприимчивости. Тогда для $\hat{E}_j^{(+)}$ получится уравнение движения

$$-\frac{\partial \hat{E}_j^{(+)}}{dt} = i \frac{\omega_j}{2\epsilon_j \epsilon_0} \hat{P}_j^{(+)}. \quad (2.23-3a)$$

Чтобы от колебательных амплитуд перейти к полным выражениям для напряженности поля и нелинейной поляризации с положительной частотой ($E_j^{(+)}$, $P_j^{(+)}$), умножим левую и правую части уравнения (2.23-3a) на $\exp(i\omega_j t)$ и тогда окончательно из него получим

$$-\frac{dE_j^{(+)}}{dt} = -i\omega_j E_j^{(+)} + i \frac{\omega_j}{2\epsilon_j \epsilon_0} P_j^{(+)}. \quad (2.23-4)$$

нашей конечной целью является проведение квантования. Чтобы его подготовить, постараемся построить соответствующий гамильтониан. Для этого нужно сначала

обосновать с помощью некоторой гамильтоновой функции уравнение (2.23-4), полученное из волнового уравнения (2.23-2).

Вначале мы не будем учитывать существование нелинейной поляризации и рассмотрим «невозмущенное» поле в некоторой среде (объема V). В соответствии с основами классического описания электромагнитного поля следует считать функцию Гамильтона $\overset{0}{H}$ пропорциональной усредненной по времени плотности энергии. Если можно пренебречь дисперсией, то соблюдаются соотношения

$$\overset{0}{H} = \sum_{j=1}^m \overset{0}{H}_j, \quad \text{где } \overset{0}{H}_j = \overline{VE_j D_j^{(j)}}. \quad (2.23-5)$$

При выполнении усреднения $\overset{0}{H}_j$ по времени предполагалось, что время усреднения достаточно велико, для того чтобы отпали зависящие от времени члены с частотой ω_j . Полагая $D_j^{(j)} = \epsilon_j \epsilon_0 E_j$, тогда получим

$$\overset{0}{H}_j = 2V \epsilon_j \epsilon_0 E_j^{(+)} E_j^{(-)}$$

(члены с $E_j^{(+)} E_j^{(+)}$ и $E_j^{(-)} E_j^{(-)}$ выпадают вследствие усреднения по времени). С другой стороны, мы сохраним представление $\overset{0}{H}$ через комплексную нормальную координату $\overset{0}{H}_j = \hbar \omega_j a_j^+ a_j$. Мы ее уже успешно применяли к электромагнитному полю в вакууме (ср. п. 1.122). Тогда отсюда следует

$$E_j^{(+)} = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2V \epsilon_j \epsilon_0}} e^{-ik_j r} a_j^*. \quad (2.23-7)$$

Выражая a_j^* через введенные в уравнении (B2.22-4a) канонически сопряженные обобщенные величины q_j' , p_j' , найдем окончательно

$$E_j^{(+)} = -i \frac{\omega_j}{\sqrt{4V \epsilon_j \epsilon_0}} e^{-ik_j r} \left(q_j' - i \frac{p_j'}{\omega_j} \right). \quad (2.23-8)$$

Теперь мы имеем возможность составить уравнение движения для невозмущенного поля в соответствии с общими существующими для этого правилами [ср. уравнение (B2.14-9)]:

$$-\frac{dE_j^{(+)}}{dt} = \{E_j^{(+)}, \overset{0}{H}\}, \quad (2.23-9)$$

где $\{.. \}$ — скобки Пуассона для двух переменных $E_j^{(+)}$ и $\overset{0}{H}$. Они могут быть раскрыты в виде

$$\begin{aligned} \{E_j^{(+)}, \overset{0}{H}\} &= \frac{\partial E_j^{(+)}}{\partial p_j'} \frac{\partial \overset{0}{H}}{\partial q_j'} - \frac{\partial E_j^{(+)}}{\partial q_j'} \frac{\partial \overset{0}{H}}{\partial p_j'} = \\ &= \frac{\partial E_j^{(+)}}{\partial p_j'} \left(\frac{\partial \overset{0}{H}}{\partial E_j^{(+)}} \frac{\partial E_j^{(+)}}{\partial q_j'} + \frac{\partial \overset{0}{H}}{\partial E_j^{(-)}} \frac{\partial E_j^{(-)}}{\partial q_j'} \right) - \\ &- \frac{\partial E_j^{(+)}}{\partial q_j'} \left(\frac{\partial \overset{0}{H}}{\partial E_j^{(+)}} \frac{\partial E_j^{(+)}}{\partial p_j'} + \frac{\partial \overset{0}{H}}{\partial E_j^{(-)}} \frac{\partial E_j^{(-)}}{\partial p_j'} \right) = \\ &= \frac{\partial \overset{0}{H}}{\partial E_j^{(-)}} \{E_j^{(+)}, E_j^{(-)}\}. \end{aligned} \quad (2.23-10)$$

Из соотношений (2.23-6) и (2.23-8) следует

$$\frac{\partial \overset{0}{H}_j}{\partial E_j^{(-)}} = 2V \epsilon_j \epsilon_0 E_j^{(+)} \quad (2.23-11)$$

и

$$\{E_j^{(+)}, E_j^{(-)}\} = -i \frac{\omega_j}{2V \epsilon_j \epsilon_0}. \quad (2.23-12)$$

Итак, из (2.23-9) получаем

$$-\frac{dE_j^{(+)}}{dt} = \{E_j^{(+)}, \overset{0}{H}\} = -i \omega_j E_j^{(+)}.$$

Следовательно, первый член в правой части уравнения (2.23-4) выражается через функцию Гамильтона $\overset{0}{H}$ невозмущенной системы.

Если влияние нелинейной поляризации $P_j^{(+)}$ в уравнении (2.23-4) рассматривать как возмущение свободной системы H , то производную по времени от $E_j^{(+)}$ следует представить в виде

$$-\frac{dE_j^{(+)}}{dt} = \{E_j^{(+)}, H\} = \{E_j^{(+)}, H^0\} + \{E_j^{(+)}, H^W\}, \quad (2.23-13)$$

где полная функция Гамильтона определяется выражением

$$H = H^0 + H^W; \quad (2.23-14)$$

H^W является возмущающим членом, или членом взаимодействия. Таким образом, возникает необходимость найти такой член взаимодействия H^W , с которым скобки Пуассона $\{E_j^{(+)}, H^W\}$ в согласии с уравнением (2.23-4) воспроизвели бы с точностью до некоторого множителя слагаемое нелинейной поляризации $P_j^{(+)}$. Анализ результатов уравнения (2.23-10) показывает, что скобки Пуассона $\{E_j^{(+)}, H^W\}$ пропорциональны $\partial H^W / \partial E_j^{(-)}$. Поэтому мы должны найти такой член взаимодействия H^W , производная которого $\partial H^W / \partial E_j^{(-)}$ пропорциональна $P_j^{(-)}$.

Это требование может быть выполнено, если положить H^W пропорциональным некоторой функции F , вариация которой есть

$$\delta F = -\overline{P^{(HJ)}} \delta E. \quad (2.23-15)$$

Усреднение по времени произведения $P^{(HJ)} \delta E$ следует выполнить при тех же условиях, что и в случае уравнения (2.23-5). Принимая во внимание, что E и $P^{(HJ)}$ складываются из парциальных волн, получим по аналогии с выводом уравнения (2.23-6) для δF

$$\delta F = -\sum_j (P_j^{(-)} \delta E_j^{(+)} + P_j^{(+)} \delta E_j^{(-)}). \quad (2.23-16)$$

Это выражение должно рассматриваться как полный дифференциал. Для различных процессов величины не-

линейной поляризации $P_j^{(-)}$, $P_j^{(+)}$ характеризуются теми или иными зависимостями от полей $E_j^{(-)}$, $E_j^{(+)}$, причем восприимчивости входят как параметры (ср. ч. I, разд. 1.13). Если эти зависимости известны, то F определяется из уравнения (2.23-16) как функция $E_j^{(-)}$, $E_j^{(+)}$:

$$F = F[E_1^{(-)}, \dots, E_m^{(-)}, E_1^{(+)}, \dots, E_m^{(+)}]. \quad (2.23-17)$$

Решающее значение для интерпретации дифференциального уравнения (2.23-4) на основании применения функции F имеет то обстоятельство, что *вычисление частных производных* функции F по $E_j^{(-)}$ приводит прямо к $-P_j^{(+)}$. Ниже мы разъясним связь функции F с термодинамической величиной свободной энергии.

Благодаря соотношению (2.23-8) можно в функции F перейти от величин $E_j^{(-)}$, $E_j^{(+)}$ к канонически сопряженным величинам q_j' и p_j' ; поэтому мы можем вычислить скобки Пуассона. Аналогично результату уравнения (2.23-10) получаем

$$\{E_j^{(+)}, F\} = \frac{\partial F}{\partial E_j^{(-)}} \{E_j^{(+)}, E_j^{(-)}\} = -P_j^{(+)} \left(-i \frac{\omega_j}{2V \epsilon_j \epsilon_0} \right). \quad (2.23-18)$$

Отсюда следует

$$\{E_j^{(+)}, VF\} = i \frac{\omega_j}{2\epsilon_j \epsilon_0} P_j^{(+)}. \quad (2.23-19)$$

Сравнение с уравнениями (2.23-4) и (2.23-13) показывает, что произведение VF следует идентифицировать с H^W , чтобы получить правильное уравнение движения. Если требуется получить не зависящую от пространственной координаты r компоненту оператора взаимодействия H^W , то это может быть достигнуто путем образования усредненного по пространству значения

$$\bar{F}^r = \frac{1}{V} \int dV' F;$$

тогда $\overset{W}{H}$ следует идентифицировать с $\int dV' F$. Здесь необходимо заметить, что такой метод приводит к очень важным для многих процессов условиям фазового синхронизма (ср. ч. I, разд. 3.32, и 3.15 данной части).

Теперь мы выясним *связь с термодинамическими величинами*. Как известно [2.-2], вариация пространственной плотности F' свободной энергии в диэлектрике есть

$$\delta F' = E' \delta D',$$

причем с помощью величин F' , E' , D' должны быть описаны соотношения, возникающие при наличии как линейной, так и нелинейной поляризации. При использовании нами пространственных условий, связанных с концепцией мод, вклад нелинейной поляризации определяется выражением

$$\delta F = -P^{(НЛ)} \delta E. \quad (2.23-15a)$$

В соответствии с этим F следует рассматривать как изменение плотности свободной энергии, обусловленное существованием нелинейной компоненты поляризации. Пренебрегая быстро осциллирующими членами в δF и учитывая разложение по парциальным волнам, получим

$$\delta F = - \sum_j (P_j^{(-)} \delta E_j^{(+)} + P_j^{(+)} \delta E_j^{(-)}). \quad (2.23-16)$$

Величина F является функцией состояния и поэтому не должна зависеть от пути, на котором достигается то или иное состояние; это свойство имеет такое же большое значение для возможности обобщений и применений результатов, как специальные начальные условия. Математически это приводит к требованию представимости уравнения (2.23-16) в виде полного дифференциала, что в свою очередь налагает известные условия на зависимость функций $P_j^{(\pm)}$ от полей $E_1^{(\pm)}, \dots, E_m^{(\pm)}$.

Она определяется компонентами тензора восприимчивости. В ч. I, п. 1.232, было доказано, что в предположении отсутствия потерь могут быть выведены специфические соотношения между компонентами тензора восприимчивости — так называемые пространствен-

но-частотные преобразования; такое же положение возникает и при полуклассическом рассмотрении, о чем пойдет речь в конце разд. 2.32. Именно существование таких соотношений обеспечивает образование полного дифференциала. В заключение укажем еще на следующее. На основании природы компоненты взаимодействия

$\overset{W}{H}$ в функции Гамильтона можно было бы предполагать, что $\overset{W}{H}$ соответствует работе, совершенной полем над средой $\overline{E} \delta P^{(НЛ)}$. В действительности же он соответствует выражению для свободной энергии, определяемой уравнением (2.23-16) (ср. также [2.-2]).

Квантовое описание осуществляется непосредственно на основании вышеизложенных представлений классической теории. Для квантовых аналогов классических величин и соотношений мы можем, согласно п. В2.13, выполнить квантование: величины $E_j^{(+)}$, $E_j^{(-)}$ соответствуют операторам $\mathbf{E}_j^{(+)}$, $\mathbf{E}_j^{(-)}$ j -й парциальной волны [ср. уравнение (1.31-27)]; функция Гамильтона $\overset{0}{H}$ соответствует оператору $\overset{0}{H}$ невозмущенного поля излучения. Скобки Пуассона могут быть «переведены» как перестановочные соотношения. Из уравнения (2.23-12) получается перестановочное соотношение

$$[\mathbf{E}_j^{(-)}, \mathbf{E}_j^{(+)}] = \frac{\hbar \omega_j}{2V \epsilon_j \epsilon_0} \mathbf{I}. \quad (2.23-20)$$

Плотность свободной энергии F соответствует плотности оператора взаимодействия $\overset{W}{\mathfrak{H}}$; при этом между оператором $\overset{W}{\mathfrak{H}}$ и операторами $\mathbf{E}_j^{(-)}$, $\mathbf{E}_j^{(+)}$ должна существовать такая же связь, какая получается из уравнения (2.23,17) для зависимости F от $E_j^{(-)}$, $E_j^{(+)}$. Свободная энергия $\int dV F$ соответствует оператору взаимодействия $\overset{W}{H}$. Наконец, для $\mathbf{E}_j^{(+)}$ получается уравнение движения

$$i\hbar \frac{d\mathbf{E}_j^{(\pm)}}{dt} = [\mathbf{E}_j^{(\pm)}, \overset{0}{H} + \overset{W}{H}] = [\mathbf{E}_j^{(\pm)}, \overset{0}{H}] + [\mathbf{E}_j^{(\pm)}, \overset{W}{H}]. \quad (2.23-21)$$

Тем самым временное изменение полевых операторов существенным образом определяется феноменологически введенными компонентами восприимчивости.

В заключение введем в окончательные формулы пространственные трансформационные свойства применяемых величин. Для классической зависимости между колебательными амплитудами поляризации и напряженности поля и для процесса n -го порядка имеем [см. ч. I, уравнение (1.22-1)]

$$\hat{P}_\alpha^{(+)}(\omega_j) = \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\omega_j; \omega_1, \dots, \omega_{n'}, \dots, \omega_n) \times \\ \times \hat{E}_\beta^\pm(\omega_1) \hat{E}_\beta^\pm(\omega_{n'}) \dots \hat{E}_\beta^\pm(\omega_n). \quad (2.23-22)$$

Входящие сюда величины $\omega_{n'}$ могут принимать положительные и отрицательные значения; соответствующие им колебательные амплитуды будем отмечать знаками плюс и минус. Восприимчивость n -го порядка $\chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}$ является тензором $(n+1)$ -го ранга. Задавая в явном виде компоненты векторов и тензоров и принимая во внимание соотношения

$$\omega_j = \sum_{n'} \omega_{n'}$$

и

$$E_\alpha^{(\pm)}(\omega_{n'}) = \hat{E}_\alpha^{(\pm)}(\omega_{n'} e^{\pm i\omega_{n'} t} = E^{(\pm)}(\omega_{n'}) e_{n'\alpha}, \quad \text{где } e_{n'\alpha}^2 = 1, \quad (2.23-23)$$

получим из уравнения (2.23-22)

$$P_\alpha^{(+)}(\omega_j) e_\alpha = \sum_{\beta_1, \dots, \beta_n} \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\omega_j; \omega_1, \dots, \omega_n) \times \\ \times e_{\beta_1} \dots e_{\beta_n} \prod_{n'=1}^n E^{(\pm)}(\omega_{n'}). \quad (2.23-24)$$

Индексы $\alpha = 1, 2, 3$ и $\beta_{n'} = 1, 2, 3$ в (2.23-24) характеризуют различные компоненты единичных векторов поляризации и напряженности поля на частоте $\omega_{n'}$. Произведения в выражении для плотности свободной энергии [ср. уравнение (2.23-16)] следует рассматривать как скалярные произведения представленных в уравнениях (2.23-23) и (2.23-24) векторов $dE_j^{(\pm)}$ и $P_j^{(\pm)}$. Таким образом, также и для случая учета векторного ха-

рактера поляризации и напряженности поля показан способ представления члена взаимодействия \hat{H} как функции (скалярных) величин $E_j^{(+)}$, $E_j^{(-)}$ и компонент тензора восприимчивости. Аналогичным образом должно осуществляться образование оператора взаимодействия \hat{H} как функции (скалярных) операторов $E_j^{(+)}$, $E_j^{(-)}$ и компонент восприимчивости. Следует еще указать на то, что для анизотропной среды линейная диэлектрическая постоянная ϵ_j должна быть заменена выражением

$$\sum_{\alpha, \alpha'} e_\alpha(\omega_j) \epsilon_{\alpha\alpha'}(\omega_j) e_{\alpha'}(\omega_j), \quad (2.23-25)$$

в котором $e_\alpha(\omega_j)$ — тензор линейной диэлектрической постоянной и $e_\alpha(\omega_j)$ — единичный вектор для E_j . Отметим, что окончательное выражение может быть правильной только в случае, когда можно пренебречь дисперсией; при учете дисперсии появляются дополнительные члены, связанные с групповой скоростью [ср. уравнение (2.23-3)].

2.24. Воздействие когерентного излучения на атомную систему, находящуюся под влиянием диссипативной системы

Для линейной и нелинейной оптики представляют интерес результаты воздействия электромагнитного излучения на реальную атомную систему. Но достаточно точное описание свойств атомной системы требует, вообще говоря, учета влияния диссипативной системы. В разд. В2.27 были выведены уравнения движения для типичных операторов реальной атомной системы, на которую воздействует диссипативная система. При этом имело важное значение то, что диссипативная система характеризуется корреляционным временем τ_c . Оно считалось малым по сравнению с тем временем, в течение которого типичные операторы атомной системы претерпевают существенные изменения. Действующее на атомную систему электромагнитное излучение мы будем считать состоящим из монохроматических или квазимоно-

хроматических колебаний, происходящих в месте нахождения атомной системы. Корреляционное время излучения τ_c будем считать большим по сравнению с τ_c ; в этом смысле мы говорим о воздействии когерентного излучения или когерентной системы в противоположность воздействию некогерентной диссипативной системы.

Обсуждение поставленной проблемы сначала проводится на основе представленного в п. В2.271 способа рассмотрения, в котором исходным пунктом служил вывод определяющего уравнения для усредненного по ансамблю оператора плотности. В предположении о суперпозиции не зависящих друг от друга воздействий (некогерентной) диссипативной системы и когерентной системы на временное изменение оператора плотности атомной системы получим в итоге уравнение движения для оператора плотности

$$\frac{d}{dt} \rho_D(t) = R \rho_D(t) + \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}_D(t), \rho_D(t)]. \quad (2.24-1)$$

Первое слагаемое в правой части отражает влияние диссипативной системы [ср. уравнение (В2.27-11)], элементы матрицы R содержат вероятности переходов или времена релаксации. Второе слагаемое соответствует

влиянию когерентной системы; $\mathbf{H}_D(t)$ представляет собой оператор взаимодействия в представлении Дирака, обязанный своим происхождением излучению. При решении этого дифференциального уравнения по методу теории возмущений производится разложение по возрастающим

степеням $\mathbf{H}_D(t)$; это означает, что влияние когерентного излучения на реальную атомную систему, т. е. на изолированную атомную систему с малым числом степеней свободы под влиянием диссипативной системы, рассматривается как возмущение. Этот метод соответствует изложенным в п. В2.271 предположениям относительно области применимости уравнения (В2.27-11), а также приведенному выше соотношению между временами корреляции τ_c и τ_c' .

Из уравнения (2.24-1) получаются практически применимые исходные уравнения для матричных элементов

ρ_{kk} и ρ_{kl} оператора плотности в представлении Шредингера:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{kk} + \frac{1}{T_k} (\rho_{kk} - \rho_{kk}^e) &= \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho]_{kk}, \\ \frac{d}{dt} \rho_{kl} + i\omega_{kl} \rho_{kl} + \frac{1}{\tau_{kl}} \rho_{kl} &= \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho]_{kl}, \end{aligned} \quad (2.24-2)$$

где

$$[\mathbf{H}, \rho]_{kl} = \sum_m (H_{km} \rho_{ml} - \rho_{km} H_{ml});$$

здесь ρ_{kk}^e — элемент матрицы плотности при тепловом равновесии; T_k , τ_{kl} — приведенные в п. В2.271 времена релаксации. Если члены в правых частях дифференциальных уравнений рассматривать как возмущение, то невозмущенная система уравнений будет идентична уравнениям (В2.27-18) и (В2.27-21); ее решение определяет вклад нулевого порядка $\rho^{(0)}$ и ρ . Из уравнений (2.24-2) следуют уравнения для вклада n -го порядка $\rho^{(n)}$ по \mathbf{H} при $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{kk}^{(n)} + \frac{1}{T_k} (\rho_{kk}^{(n)} - \rho_{kk}^e) &= \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho^{(n-1)}]_{kk}, \\ \frac{d}{dt} \rho_{kl}^{(n)} + i\omega_{kl} \rho_{kl}^{(n)} - \frac{1}{\tau_{kl}} \rho_{kl}^{(n)} &= \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho^{(n-1)}]_{kl}. \end{aligned} \quad (2.24-3)$$

В качестве второго пути решения рассматриваемой проблемы следует изучить влияние диссипативной системы и когерентной системы при явном использовании флуктуационных операторов; при этом следует исходить из соображений, изложенных в п. В2.272. Там было показано для диссипативных систем с квазинепрерывным спектром и билинейной связью с атомной системой, что при воздействии одной только диссипативной системы уравнение движения для оператора \mathbf{a}_s^+ (представляющего рождение возбужденных состояний атомной системы) должно быть записано в форме

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}_s^+ = \Gamma^+ - \bar{\beta} \mathbf{a}_s^+. \quad (2.24-4)$$

Величина $\tilde{\Gamma}^+$ представляет собой флуктуационный оператор со средним значением, равным нулю; $\tilde{\beta}$ — фактор затухания. Если для атомной системы воспользоваться моделью гармонического осциллятора [ср. уравнение (B2.27-37)], то оператор \mathbf{a}_s^+ идентичен бозонному оператору \mathbf{a}_s ; в случае двухуровневой системы [ср. уравнение (B2.27-14)] оператор \mathbf{a}_s^+ идентичен фермионному оператору \mathbf{b}_s^+ . Оператор \mathbf{a}_s^+ связан с соответствующим оператором в представлении Гейзенберга соотношением $\mathbf{a}_s^+ = \mathbf{a}_H^+ \exp(-i\omega t)$, где $\hbar\omega$ в случае гармонического осциллятора является разностью энергий двух соседних уровней, а в случае двухуровневой системы равняется разности энергий этих двух уровней. Предыдущее рассмотрение привело нас к уравнению (2.24-1). Если аналогичным образом снова принять, что имеет место суперпозиция не зависящих друг от друга воздействий диссипативной и когерентной систем, то для \mathbf{a}_s^+ получится уравнение движения

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}_s^+ = \tilde{\Gamma}^+ - \tilde{\beta} \mathbf{a}_s^+ + \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{a}_s^+, \mathbf{H}_H^k], \quad (2.24-5)$$

где \mathbf{H}^k — оператор взаимодействия когерентной системы с атомной системой. При этом предполагалось, что операторы \mathbf{a}^+ и \mathbf{b}^+ коммутируют с гамильтонианом изолированной когерентной системы. К уравнению (2.24-5) можно применить теорию возмущений так же, как к уравнению (2.24-1). Это означает, что для получения линейных и нелинейных членов разложения \mathbf{a}_s^+ различных порядков из значения компоненты нулевого порядка следует воспользоваться разложением по членам возрастающего порядка относительно \mathbf{H}^k .

В более сложных случаях взаимосвязи между атомной и диссипативной системами (ср. заключительное замечание в п. 2.272) дополнительное взаимодействие с когерентной системой также может быть учтено путем введения членов типа третьего слагаемого в правой части уравнения (2.24-5) в соответствующем уравнении движения [B2.27-2].

§ 2.3. ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ИЗЛУЧЕНИЕМ И АТОМНЫМИ СИСТЕМАМИ

В разд. 2.13 мы дали квантовое описание взаимодействия между электромагнитным излучением и атомными системами, причем было установлено, что только таким путем может быть достигнуто полное согласие со всеми экспериментальными фактами. В особенности это относится к явлениям спонтанного излучения и к устанавливаемым индуцированным процессам. Однако для многих важных классов явлений уже полуклассическое описание (ср. разд. 2.12), т. е. описание взаимодействия классических электромагнитных полей с квантованными атомными системами, приводит к результатам, достаточно хорошо согласующимся с экспериментальными данными. В связи с обсуждением свойств изолированного поля излучения в п. 1.322 было показано, что поля с высокой напряженностью и с малыми изменениями этой напряженности могут быть изучены на основе классической теории. В этом смысле электромагнитные поля в НЛО можно трактовать классически (если только не интересоваться возникновением волн из спонтанного процесса, из шумов и ограничиться взаимодействием сильных когерентных волн). Благодаря этому вычисления становятся проще и нагляднее, а отчасти вообще впервые становятся выполнимыми в явном виде.

Кроме того, при полуклассическом рассмотрении аналогии с классической теорией становятся особенно ясными. В обоих случаях временные и пространственные изменения электромагнитных полей вычисляются из классических уравнений Максвелла, в которые при полуклассическом описании входит квантовомеханическое математическое ожидание поляризации. В этом смысле можно в полуклассической теории применить результаты классической теории, если подставить квантовомеханическое (или квантостатистическое) математическое ожидание поляризации вместо ее значения, рассчитанного классически.

Ниже мы покажем, что для заданного процесса математическое ожидание поляризации зависит от напря-

женности поля так же, как в классическом представлении от нее зависит сама поляризация, т. е. структура основополагающих материальных уравнений в обоих случаях одинакова. Поэтому определения восприимчивостей имеют один и тот же смысл, а их значения, полученные в классическом и в полуклассическом вычислениях, могут сравниваться между собой. В этом смысле можно также сказать, что возможен переход от классического описания к полуклассическому путем замены соответствующих восприимчивостей. Таким образом, мы можем, например, воспользоваться результатами ч. I и введенными там феноменологически классическими восприимчивостями и заменить их квантовомеханическими восприимчивостями, рассчитанными на основании микроскопических свойств атомной системы. Такой метод позволяет определить представляющие интерес для эксперимента параметры более точно и с меньшим произволом, чем это возможно в рамках чисто классической теории.

При классическом описании в ч. I мы разлагали поляризацию $P(t)$ по степеням напряженности поля [ч. I, уравнение (1.11-16)]:

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(t) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n \chi^{(n)}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \times \\ \times E(t - \tau_1) E(t - \tau_2) \dots E(t - \tau_n). \quad (2.3-1)$$

Входящие в это уравнение классические восприимчивости n -го порядка $\chi^{(n)}(\dots)$ определяются с помощью некоторой модели ходом потенциала, геометрией, массами, зарядами, а также потерями на трение модельной системы. Они могут быть введены также феноменологически. (Заметим, что в разложении (2.3-1) может присутствовать еще член нулевого порядка, соответствующий поляризации в отсутствие внешнего поля, но поскольку мы здесь рассматриваем исключительно взаи-

модействия с излучением, то этот нулевой член нас не интересует.)

Для многих вычислений и применений оказалось целесообразным перейти с помощью фурье-преобразования от описания во временном представлении к полностью эквивалентному описанию в частотном представлении [см. ч. I, уравнение (1.13-9)]:

$${}^1P^{(n)}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} df_{n-1} \chi^{(n)}(f_1, \dots, f_n) \times \\ \times {}^1E(f_1) \dots {}^1E(f_n), \quad f = \sum_{m=1}^n f_m. \quad (2.3-2)$$

Выполняя преобразование Фурье, из этого уравнения легко получим

$${}^1P^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df {}^1P^{(n)}(f) e^{i2\pi ft} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} df_{n-1} \chi^{(n)}(f_1, \dots, f_n) \times \\ \times {}^1E(f_1) \dots {}^1E(f_n) e^{i2\pi ft}. \quad (2.3-3)$$

Замена переменной интегрирования f на $f_n = f - \sum_{m=1}^{n-1} f_m$ дает

$${}^1P^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} df_n \chi^{(n)}(f_1, \dots, f_n) \times \\ \times {}^1E(f_1) \dots {}^1E(f_n) e^{i2\pi t \sum_{m=1}^n f_m}. \quad (2.3-4)$$

Из уравнений (2.3-1) — (2.3-4) видно, что при заданных полях и восприимчивостях компоненты поляризации определяются однозначно, тогда как при заданных полях и компонентах поляризации восприимчивости устанавли-

ливаются неоднозначно. Чтобы в этом убедиться, представим восприимчивость в виде суммы двух членов:

$${}^1\chi_{ijk}^{(2)}(f_1, f_2) = {}^1\chi_s + {}^1\chi_A, \quad (2.3-5)$$

где

$${}^1\chi_s = {}^1\chi_{ijk}^{(2)}(f_1, f_2) + {}^1\chi_{ikj}^{(2)}(f_2, f_1),$$

и

$${}^1\chi_A = {}^1\chi_{ijk}^{(2)}(f_1, f_2) - {}^1\chi_{ikj}^{(2)}(f_2, f_1). \quad (2.3-6)$$

Первый член симметричен, а второй антисимметричен по отношению к перестановке двух частот с заданными индексами. Подставим теперь выражение для ${}^1\chi^{(2)}$ из уравнения (2.3-5) в уравнение (2.3-2) и определим компоненты поляризации $P_s^{(2)}$ и $P_A^{(2)}$, относящиеся к ${}^1\chi_s$ и ${}^1\chi_A$. В частности, для $P_A^{(2)}$ получим

$$P_{Ai}^{(2)} = \sum_{j, k} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2 {}^1\chi_{ijk}^{(2)}(f_1, f_2) {}^1E_j(f_1) {}^1E_k(f_2) - \sum_{jk} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2 {}^1\chi_{ikj}^{(2)}(f_2, f_1) {}^1E_k(f_2) {}^1E_j(f_1). \quad (2.3-7)$$

Если мы во втором члене сделаем одновременно перестановку индексов суммирования и переменных интегрирования, то убедимся, что в самом деле $P_{Ai}^{(2)} = 0$. Это, однако, означает, что выбор ${}^1\chi_A$ произволен. Восприимчивость определяется однозначно лишь при наложении дополнительного условия. Условие ${}^1\chi_A = 0$ означает инвариантность восприимчивостей по отношению к описанной выше перестановке двух частот с заданными индексами (ср. ч. I, разд. 1.22 и 1.23). В общем случае требуется выполнение следующего условия симметрии:

$${}^1\chi_{ia_1 \dots a_j \dots a_k \dots a_n}^{(n)}(f_1, \dots, f_j, \dots, f_k, \dots, f_n) = {}^1\chi_{ia_1 \dots a_k \dots a_j \dots a_n}^{(n)}(f_1, \dots, f_k, \dots, f_j, \dots, f_n). \quad (2.3-8)$$

В разд. 2.31 мы прежде всего найдем с помощью квантовой механики общую взаимосвязь между поляризацией и напряженностью поля в некотором пробном

макроскопическом объеме. В следующих разделах мы конкретизируем эту общую взаимосвязь для относительно простых систем. В разд. 2.32 будет рассмотрен ансамбль атомных систем, которые не связаны между собой и взаимодействуют только с когерентным полем излучения. В разд. 2.33 мы опишем влияние диссипации, вводя в расчет связь отдельных атомных систем с тепловым резервуаром. В разд. 2.32 и 2.33 мы будем исходить из допущения о распределении атомных систем с плотностью настолько малой, что поле, действующее на отдельный объект, можно считать совпадающим с внешним полем. Влияние различий между этими полями будет учтено в разд. 2.34 с помощью так называемых полевых поправок. Кроме того, в этом разделе будет выполнено усреднение по ориентациям.

2.31. Вывод общего соотношения между поляризацией и напряженностью поля и вычисление соответствующих восприимчивостей макроскопического образца

В настоящем разделе мы выполним квантовый расчет поляризации макроскопического образца (при очень общих предположениях) и приведем ее к форме, определяемой уравнениями (2.3-1)—(2.3-4), что позволит путем сравнения найти соответствующие восприимчивости. По аналогии с ходом рассуждений в ч. I, разд. 1.11, рассмотрим образец объемом V , который, с одной стороны, будем считать достаточно малым для того, чтобы в его пределах можно было пренебречь пространственными изменениями поля E , а, с другой стороны, достаточно большим для того, чтобы он содержал очень большое число заряженных частиц (электронов, ядер, ионов). Здесь, как и в классической теории (ср. ч. I, разд. 1.11), должно быть учтено следующее: имеются в виду изменения «макроскопической» напряженности поля E . Как известно, «макроскопическая» напряженность поля изменяется очень сильно в зависимости от локального микроскопического распределения зарядов. Обозначим через $(q_e)_j$ заряд и через \mathbf{r}_j — оператор радиуса-вектора j -й частицы. Тогда имеем для оператора

дипольного момента образца

$$\mathbf{d} = \sum_j (q_e)_j \mathbf{r}_j. \quad (2.31-1)$$

Математическое ожидание $\langle \mathbf{d} \rangle$ оператора дипольного момента \mathbf{d} образуется обычным способом, а именно путем вычисления следа:

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \text{Sp} \{ \rho \mathbf{d} \}, \quad (2.31-2)$$

где ρ — оператор плотности системы. Отсюда получаем математическое ожидание поляризации $P = \langle \mathbf{P} \rangle$ в рассматриваемом объеме:

$$P = \frac{1}{V} \langle \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{V} \text{Sp} \{ \rho \mathbf{d} \}.$$

Для вычисления ρ следует воспользоваться результатами разд. В2.21. Там было вычислено $\rho(t)$ с помощью теории возмущений вплоть до n -го порядка в предположении, что гамильтониан может быть разложен на не зависящий от времени оператор $\overset{0}{\mathbf{H}}$ и зависящий от времени оператор $\overset{W}{\mathbf{H}}(t)$:

$$\mathbf{H}(t) = \overset{0}{\mathbf{H}} + \overset{W}{\mathbf{H}}(t), \quad (2.31-3)$$

где

$$\rho(t) = \rho^{(0)} + \dots + \rho^{(n)}(t) + \dots$$

и

$$\rho^{(n)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^n} \overset{0}{\mathbf{U}} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \times$$

$$\times [\overset{W}{\mathbf{H}}_D(t_1), [\overset{W}{\mathbf{H}}_D(t_2), \dots [\overset{W}{\mathbf{H}}_D(t_n), \rho^{(0)}]] \dots] \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1},$$

причем

$$\overset{0}{\mathbf{U}} = e^{-\frac{i}{\hbar} \overset{0}{\mathbf{H}}(t-t_0)}.$$

Из уравнений (2.31-2) и (2.31-3) для поляризации n -го порядка следует

$$P^{(n)}(t) = \frac{1}{V} \text{Sp} \{ \rho^{(n)}(t) \mathbf{d} \}. \quad (2.31-4)$$

Таким образом, мы должны прежде всего вычислить в явном виде $\rho^{(n)}(t)$. При этом предполагается, что $\rho^{(0)}$ не зависит от времени; это соблюдается, например, при тепловом равновесии. В соответствии с соображениями разд. 2.12 о структуре оператора взаимодействия между электромагнитным излучением и атомной системой следует принять, что

$$\overset{W}{\mathbf{H}}(t) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t). \quad (2.31-5)$$

Мы исходим здесь из дипольного приближения, описанного в разд. 2.21. Согласно концепции разд. 2.3, мы считаем напряженность поля $\overset{W}{\mathbf{E}}(t)$ классической величиной, т. е. c -числом. Поскольку $\overset{W}{\mathbf{H}} \sim \overset{W}{\mathbf{E}}$, то понятия «вклад n -го порядка $G^{(n)}$ в величину G » в применении к оператору взаимодействия (ср. § В2 и § 2.2) или к напряженности поля (ср. разд. 2.30 и ч. I, §1) эквивалентны. Дальнейшее проведение расчета взаимосвязи между поляризацией и напряженностью поля мы выполним как во временном, так и в частотном представлениях. При этом для простоты мы ограничимся однокомпонентным представлением (т. е. предполагается, что все поля и дипольные моменты обладают только одной определенной векторной компонентой, например x -компонентой). Но важнейшие формулы, полученные в однокомпонентном представлении, могут быть без доказательства применены к любым векторам поля и дипольного момента.

2.31.1. Вычисление во временном представлении

В первом порядке теории возмущений из уравнений (2.31-3) и (2.31-4) имеем для поляризации

$$P^{(1)}(t) = \frac{1}{V} \text{Sp} \left\{ \frac{1}{i\hbar} \overset{0}{\mathbf{U}} \int_{t_0}^t dt_1 [\overset{W}{\mathbf{H}}_D(t_1), \rho^{(0)}] \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{d} \right\} \quad (2.31-6)$$

и при

$$\overset{W}{\mathbf{H}}_D = -\overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{d} E(t) \overset{0}{\mathbf{U}} = -\mathbf{d}_D(t) E(t)$$

получим

$$P^{(1)}(t) = \frac{-1}{i\hbar V} \text{Sp} \left\{ \overset{0}{\mathbf{U}} \int_{t_0}^t dt_1 E(t_1) [\mathbf{d}_D(t_1), \rho^{(0)}] \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{d} \right\} = \\ = -\frac{1}{i\hbar V} \int_{t_0}^t dt_1 E(t_1) \text{Sp} \left\{ \overset{0}{\mathbf{U}} [\mathbf{d}_D(t_1), \rho^{(0)}] \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{d} \right\}. \quad (2.31-7)$$

Замена переменной интегрирования $t_1 = t - \tau_1$ и учет соотношения $\overset{0}{\mathbf{U}} \mathbf{d}_D(t - \tau_1) \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} = \mathbf{d}_D(-\tau_1)$, справедливого в представлении Шредингера для всех операторов, не зависящих от времени, приводят при $t_0 = -\infty$ к результату

$$P^{(1)}(t) = \left(\frac{-1}{i\hbar} \right) \frac{1}{V} \int_0^\infty d\tau_1 E(t - \tau_1) \text{Sp} \{ [\mathbf{d}_D(-\tau_1), \rho^{(0)}] \mathbf{d} \}. \quad (2.31-8)$$

Таким образом, в первом порядке мы уже получили поляризацию в форме уравнения (2.3-1), что дает для линейной восприимчивости

$$\chi^{(1)}(\tau_1) = \left(\frac{-1}{i\hbar} \right)^1 \frac{1}{V} \text{Sp} \{ [\mathbf{d}_D(-\tau_1), \rho^{(0)}] \mathbf{d} \}. \quad (2.31-9)$$

Для дальнейших вычислений оказывается целесообразным преобразовать выражение, от которого должен быть взят след, и притом так, чтобы оператор $\rho^{(0)}$ «вытянуть» из коммутатора. Для этой цели воспользуемся законом, согласно которому след произведения инвариантен относительно циклической перестановки сомножителей ($\text{Sp} \{ \mathbf{FGM} \} = \text{Sp} \{ \mathbf{GMF} \} = \text{Sp} \{ \mathbf{MFG} \}$). Тогда можно написать

$$\chi^{(1)}(\tau_1) = \left(\frac{-1}{i\hbar} \right)^1 \frac{1}{V} \text{Sp} \{ \rho^{(0)} [\mathbf{d}, \mathbf{d}_D(-\tau_1)] \} \quad (2.31-10)$$

или

$$\chi_{ki}^{(1)}(\tau_1) = \left(\frac{-1}{i\hbar} \right)^1 \frac{1}{V} \text{Sp} \{ \rho^{(0)} [\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{Di}(-\tau_1)] \}.$$

Продолжая соответствующие вычисления, можно получить в следующих порядках результаты, однотипные по

форме с уравнением (2.3-1), и для функций восприимчивости выводится формула

$$\chi_{ka_1 \dots a_n}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \\ = \left(\frac{-1}{i\hbar} \right)^n \frac{1}{V} \text{Sp} \{ \rho^{(0)} [\dots [\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{Da_1}(-\tau_1)], \dots, \mathbf{d}_{Da_n}(-\tau_n)] \}. \quad (2.31-11)$$

Для наглядности вычислим функции восприимчивости в определенной базисной системе. В качестве таковой выберем собственные векторы оператора энергии $\overset{0}{\mathbf{H}}$, которые мы обозначим $|\overset{0}{\mathcal{E}}_\alpha\rangle$. Предположим, что в этой системе оператор $\rho^{(0)}$ диагонален, т. е.

$$\langle \overset{0}{\mathcal{E}}_\alpha | \rho^0 | \overset{0}{\mathcal{E}}_\beta \rangle = \rho_{\alpha\beta}^{(0)} \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.31-12)$$

Это предположение будет соблюдаться, если, например, в начальный момент времени образец находился в состоянии термодинамического равновесия с тепловым резервуаром (см. разд. В2.27). (Следует отметить, что эта связь с тепловым резервуаром накладывает определенные начальные условия на образец. Однако влияние этой связи во время взаимодействия с излучением нами здесь не учитывается, на что уже было указано выше.) Из (2.31-12) следует

$$\text{Sp} \{ \rho^{(0)} [\mathbf{d}_k \mathbf{d}_{Di}(-\tau_1)] \} = \\ = \sum_{\alpha, \gamma} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \{ d_{k\alpha\gamma} d_{i\gamma\alpha} e^{i\omega_{\alpha\gamma}\tau_1} - d_{i\alpha\gamma} d_{k\gamma\alpha} e^{-i\omega_{\alpha\gamma}\tau_1} \}, \quad (2.31-13)$$

где $\langle \overset{0}{\mathcal{E}}_\alpha | \mathbf{d}_k | \overset{0}{\mathcal{E}}_\gamma \rangle = d_{k\alpha\gamma}$ и т. д. и $(1/\hbar)(\overset{0}{\mathcal{E}}_\alpha - \overset{0}{\mathcal{E}}_\gamma) = \omega_{\alpha\gamma}$.

В случае когда только одна компонента вектора \mathbf{d}_k отлична от нуля, из уравнения (2.31-13) при учете соотношения $d_{\alpha\gamma} = d_{\gamma\alpha}^*$ следует

$$\text{Sp} \{ \rho^{(0)} [\mathbf{d}, \mathbf{d}_D(-\tau_1)] \} = \sum_{\alpha, \gamma} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} |d_{\alpha\gamma}|^2 2i \sin \omega_{\alpha\gamma} \tau_1,$$

откуда

$$\chi^{(1)}(\tau_1) = \left(\frac{-1}{\hbar} \right) \frac{1}{V} \sum_{\alpha, \gamma} |d_{\alpha\gamma}|^2 2\rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \sin \omega_{\alpha\gamma} \tau_1$$

или

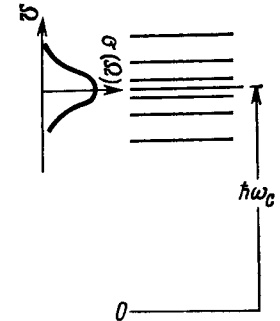
$$\kappa^{(1)}(\tau_1) = \left(\frac{1}{\hbar}\right) \frac{1}{V} \sum_{\gamma > \alpha} 2 |d_{\alpha\gamma}|^2 (\rho_{\alpha\alpha}^{(0)} - \rho_{\gamma\gamma}^{(0)}) \sin \omega_{\gamma\alpha} \tau_1. \quad (2.31-14)$$

Мы стремимся несколько более точно исследовать временную зависимость заданной уравнением (2.31-14) восприимчивости, а также сравнить ее с временной зависимостью восприимчивостей, вычисленных в ч. I на основании модели осциллятора (ср. ч. I, § 2.2). При классическом вычислении мы вводили в рассмотрение феноменологически некоторое затухание, что позволило обеспечить согласие с экспериментом в определении затухания $\kappa^{(1)}(\tau)$ при больших τ . Это значит, что процесс можно было характеризовать некоторым конечным временем корреляции («памяти»).

На первый взгляд может показаться, что заданная уравнением (2.31-14) восприимчивость описывает только незатухающий процесс. Если уровни энергии, относящиеся к различным состояниям (α, γ) , вносящим существенный вклад в $\kappa^{(1)}(\tau)$, являются достаточно резкими и дискретными, то $\kappa^{(1)}(\tau)$ действительно состоит из отдельных гармонических компонент с различными частотами. Каждая компонента характеризуется бесконечным временем корреляции; наложение гармонических компонент приводит только к биениям, но не к торможению при больших временах. Такая структура уровней энергии возникает, например, для отдельных или малочисленных атомов и молекул, не связанных с другой системой, обладающей большим числом степеней свободы.

В общем случае, однако, следует учитывать взаимодействие многих частиц (чаще всего больше чем 10^9) макроскопического образца между собой или с другими системами со многими степенями свободы. В таких системах с очень большим числом (в пределе бесконечным) степеней свободы уровни энергии расположены не дискретно, а образуют квазинепрерывное (в пределе непрерывное) распределение по определенной области, так что образуются «уширенные» уровни энергии или энергетические полосы. Этот эффект можно пояснить на

простом примере: будем исходить из большого числа M идентичных изолированных и различных частиц ($M \gg \gg 1$), которые характеризуются одним из двух резких уровней энергии. При сближении частиц каждый из двух уровней расщепляется вследствие взаимодействия на M компонент. При слабом взаимодействии они рас-



Фиг. 23. Схематическое представление распределения уровней энергии ансамбля слабо взаимодействующих атомных систем.

положены в узкой области вблизи исходного уровня. Следовательно, состоящий из частиц образец обладает плотно сгруппированными в полосы уровнями энергии. Это расщепление схематически показано на фиг. 23, где для упрощения принято, что расщепление основного уровня пренебрежимо мало. Квазинепрерывное распределение состояний в области энергий с центром $\hbar\omega_0$ описывается плотностью состояний $\sigma(\Omega)$, где $\Omega = \omega - \omega_0$. Форма кривой $\sigma(\Omega)$ определяется спецификой процесса взаимодействия. Здесь мы примем функцию Лоренца, что находится в согласии с важными экспериментальными данными. Тогда плотность состояний определяется формулой

$$\sigma(\Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Delta\omega}{2}}{\Omega^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2}, \quad (2.31-15)$$

где $\Delta\omega$ — полуширина контура.

При вычислении восприимчивости для этого ансамбля примем, кроме того, для простоты, что в начальный момент времени образец с вероятностью 1 находится в основном состоянии и что все переходные моменты равны ($d_{0\gamma} = d$). Тогда получим

$$\kappa^{(1)}(\tau_1) = \left(\frac{1}{\hbar}\right) 2 \frac{|d|^2}{V} \sum_{\gamma} \sin \omega_{\gamma 0} \tau_1. \quad (2.31-16)$$

При квазинепрерывном распределении частот $\omega_{\nu 0}$ можно от суммы \sum_{ν} перейти к интегралу $\int_{\text{Полоса}} d\Omega \sigma(\Omega)$:

$$\kappa^{(1)}(\tau_1) = \frac{1}{\hbar} 2 \frac{|d|^2}{V} \int_{\text{Полоса}} d\Omega \sigma(\Omega) \sin(\omega_c + \Omega) \tau_1. \quad (2.31-17)$$

Поскольку плотность состояний принимает большие значения только в узкой полосе частот, то область интегрирования можно расширить до $\pm \infty$. Учитывая, что функция $\sigma(\Omega)$ является четной, можем написать

$$\kappa^{(1)}(\tau_1) = \left(\frac{1}{\hbar}\right) 4 \frac{|d|^2}{V} \sin \omega_c \tau_1 \int_0^{\infty} d\Omega \sigma(\Omega) \cos \Omega \tau_1. \quad (2.31-18)$$

Подставляя сюда $\sigma(\Omega)$ из (2.31-15), получим

$$\kappa^{(1)}(\tau_1) = \left(\frac{1}{\hbar}\right) \frac{2}{V} |d|^2 e^{-\frac{\Delta\omega}{2} \tau_1} \sin \omega_c \tau_1. \quad (2.31-19)$$

Легко видеть из этой формулы, что функция восприимчивости убывает с возрастанием τ_1 и поэтому обладает конечным временем корреляции или временем памяти. Структура временной зависимости такая же, как в случае классически рассмотренного осциллятора с трением (см. ч. I, фиг. 10). Экспоненциальное затухание получается только для лоренцевой формы зависимости плотности состояний от частоты. Очевидно, что другие функции формы линии в частотном представлении приведут к модифицированной временной зависимости $\kappa^{(1)}(\tau_1)$. Но и эти временные функции будут характеризоваться конечным временем корреляции или временем памяти, зависящим от ширины линии.

В нашем примере затухание обусловлено тем, что взаимодействующие с излучением частицы связаны между собой. Но, как уже указывалось выше, аналогичный эффект имеет место также в результате связи взаимодействующих с излучением частиц с другими системами, обладающими многими степенями свободы, например с колебаниями решетки рассматриваемого образца. Влияние всех взаимодействий описанных квантовомеханически частиц образца между собой в прин-

ципе (хотя это и не всегда выполнимо математически) может быть учтено с помощью изложенного нами полуклассического метода. Однако еще одно всегда присутствующее затухание обусловлено связью образца с бесчисленным множеством осцилляторов квантованного поля излучения. Это затухание может быть описано феноменологически в рамках полуклассической теории. В этом случае структура частотной или временной зависимости восприимчивости соответственно определяется уравнениями (2.31-15) и (2.31-19).

Исходя из тех же концепций, что и для $\kappa^{(1)}(\tau_1)$ и из уравнения (2.31-11), можно рассчитать и функции восприимчивостей высших порядков, причем должна использоваться система базисных собственных векторов оператора \hat{H} . Следует особо подчеркнуть, что и эти функции восприимчивости также стремятся к нулю при больших τ_n вследствие процессов затухания. Поэтому они также должны характеризоваться конечными временами памяти.

В дальнейших вычислениях и исследованиях нам чаще понадобятся восприимчивости в частотном представлении, чем во временном. Ниже мы вычислим эти восприимчивости и обсудим их свойства.

2.312. Вычисление в частотном представлении

Как известно, из общих выражений для функций восприимчивости n -го порядка во временном представлении можно путем преобразования Фурье получить соответствующие величины в частотном представлении; мы пойдем, однако, по другому пути и получим эти функции непосредственно из теории возмущений для поляризации, причем мы с самого начала заменим зависящие от времени напряженности поля их фурье-образами.

Вычисление в первом порядке ($j = 1$). Если в уравнении (2.31-7) заменить напряженность поля $E(t_1)$ ее фурье-образом

$$E(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} df {}^1E(f) e^{i2\pi ft_1},$$

то поляризация получается в желаемой форме:

$$P^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df {}^1\kappa^{(1)}(f) {}^1E(f) e^{i2\pi ft}, \quad (2.31-20)$$

где линейная восприимчивость

$${}^1\kappa^{(1)}(f) = -\frac{1}{i\hbar V} \int_{t_0}^t dt_1 \text{Sp} \left\{ \overset{0}{\mathbf{U}} [\mathbf{d}_D(t_1), \rho^{(0)}] \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{d} \right\} e^{i2\pi f(t_1-t)}. \quad (2.31-21)$$

Обсудим это выражение для восприимчивости несколько более подробно. Из структуры уравнения (2.31-21) напрашивается вывод о том, что величина ${}^1\kappa^{(1)}(f)$ зависит от времени t . Однако можно доказать путем преобразований, аналогичных выполненным при вычислении во временном представлении, что такой зависимости нет. Подставляя соотношение

$$\overset{0}{\mathbf{U}} [\mathbf{d}_D(t_1), \rho^{(0)}] \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} = [\mathbf{d}_D(t_1-t), \rho^{(0)}]$$

в уравнение (2.31-21), получим после подстановки переменной интегрирования $t_1 = t' + t$ при $t_0 = -\infty$:

$${}^1\kappa^{(1)}(f) = -\frac{1}{i\hbar V} \int_{-\infty}^0 dt' \text{Sp} \{ [\mathbf{d}_D(t'), \rho^{(0)}] \mathbf{d} \} e^{i2\pi ft'}. \quad (2.31-21a)$$

Из этого выражения становится очевидной независимость от времени. Если, наконец, снова исключить $\rho^{(0)}$ из коммутатора, то линейная восприимчивость в частотном представлении определится формулами

$${}^1\kappa^{(1)}(f) = \left(\frac{-1}{i\hbar} \right)^1 \frac{1}{V} \int_{-\infty}^0 dt' \text{Sp} \{ \rho^{(0)} [\mathbf{d}, \mathbf{d}_D(t')] \} e^{i2\pi ft'} \quad (2.31-21б)$$

или

$${}^1\kappa_{ki}^{(1)}(f) = \left(\frac{-1}{i\hbar} \right)^1 \frac{1}{V} \int_{-\infty}^0 dt' \text{Sp} \{ \rho^{(0)} [\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{Di}(t')] \} e^{i2\pi ft'}$$

Если во втором уравнении (2.31-21б) заменить переменную интегрирования на τ_1 , то будет легко убедиться в

том, что величина ${}^1\kappa_{ki}^{(1)}(f)$ получится в результате фурье-преобразования выражения $\kappa_{ki}^{(1)}(\tau_1)$ из второго уравнения (2.31-10). Следует также заметить, что при $\tau_1 < 0$ величина $\kappa_{ki}^{(1)}(\tau_1)$ тождественно обращается в нуль.

Вычисление во втором порядке ($j=2$). Во втором порядке теории возмущений в соответствии с уравнениями (2.31-3) и (2.31-4) для поляризации получается:

$$P^{(2)}(t) = -\frac{1}{(i\hbar)^2 V} \text{Sp} \left\{ \overset{0}{\mathbf{U}} \int_{t_0}^{t_1} dt_1 \int_{t_0}^{t_2} dt_2 [\overset{\mathbb{W}}{\mathbf{H}}_D(t_1), [\overset{\mathbb{W}}{\mathbf{H}}_D(t_2), \rho^{(0)}]] \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{d} \right\}. \quad (2.31-22)$$

В это уравнение следует снова подставить оператор взаимодействия из уравнения (2.31-5). Если затем заменить напряженности поля их фурье-образами, то получим

$$P^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2 {}^1\kappa^{(2)}(f_1, f_2) {}^1E(f_1) {}^1E(f_2) e^{i2\pi t(f_1+f_2)}, \quad (2.31-23)$$

где

$${}^1\kappa^{(2)}(f_1, f_2) = \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \frac{1}{V} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \times \\ \times \text{Sp} \left\{ \overset{0}{\mathbf{U}} [\mathbf{d}_D(t_1), [\mathbf{d}(t_2), \rho^{(0)}]] \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{d} \right\} e^{i2\pi f_1(t_1-t) + i2\pi f_2(t_2-t)}. \quad (2.31-24a)$$

По аналогии со случаем первого порядка, полагая $t_0 = -\infty$ и пользуясь соотношением

$$\overset{0}{\mathbf{U}} [\mathbf{d}_D(t_1), [\mathbf{d}_D(t_2), \rho^{(0)}]] \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} = [\mathbf{d}_D(t_1-t), [\mathbf{d}_D(t_2-t), \rho^{(0)}]]$$

с подстановкой $t_1-t = t'$, $t_2-t = t''$ после замены t' и t'' на t_1 , t_2 , преобразуем восприимчивость к виду

$${}^1\kappa^{(2)}(f_1, f_2) = \left(\frac{-1}{i\hbar} \right)^2 \frac{1}{V} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \times \\ \times \text{Sp} \{ [\mathbf{d}_D(t_1), [\mathbf{d}_D(t_2), \rho^{(0)}]] \mathbf{d} \} e^{i2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)}. \quad (2.31-24б)$$

«Вытягивая» снова оператор $\rho^{(0)}$ из коммутатора, получим

$${}^1\chi_{kim}^{(2)}(f_1, f_2) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \frac{1}{V} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \times \\ \times \text{Sp} \{ \rho^{(0)} [[\mathbf{d}, \mathbf{d}_D(t_1)], \mathbf{d}_D(t_2)] \} e^{i2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} \quad (2.31-24\text{в})$$

или

$${}^1\chi_{kim}^{(2)}(f_1, f_2) = \left(\frac{-1}{i\hbar}\right)^2 \frac{1}{V} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \times \\ \times \text{Sp} \{ \rho^{(0)} [[\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{Dl}(t_1)], \mathbf{d}_{Dm}(t_2)] \} e^{i2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)}.$$

Мы выберем теперь восприимчивость таким образом, чтобы она с самого начала была инвариантной по отношению к перестановке двух частот и одновременной перестановке соответствующей пары индексов [в связи с этим см. замечания после уравнения (2.3-4)]. Если в выражении для $P^{(2)}$ одновременно переставить переменные интегрирования f_1, f_2 и индексы суммирования i, m , то форма выражения не изменится, но восприимчивость ${}^1\chi_{kim}^{(2)}(f_1, f_2)$ окажется замененной на ${}^1\chi_{kmi}^{(2)}(f_1, f_2)$. Это, однако, означает, что мы можем также написать

$$P_k^{(2)}(t) = \sum_{i, m} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2 {}^1\tilde{\chi}_{kim}^{(2)}(f_1, f_2) \times \\ \times {}^1E_i(f_1) {}^1E_m(f_2) e^{i2\pi t(f_1 + f_2)}, \quad (2.31-25)$$

где

$${}^1\tilde{\chi}_{kim}^{(2)}(f_1, f_2) = \frac{1}{2} \{ {}^1\chi_{kim}^{(2)}(f_1, f_2) + {}^1\chi_{kmi}^{(2)}(f_2, f_1) \}.$$

Следовательно, ${}^1\tilde{\chi}_{kim}^{(2)}(f_1, f_2)$ обладает требуемой симметрией. Компонента восприимчивости, антисимметричная относительно рассмотренного преобразования, не вносит никакого вклада в $P_k^{(2)}(t)$, и поэтому ее выбор произволен. Сокращенно запишем симметризованный тензор в следующем виде (причем обозначение ${}^1\tilde{\chi}$ снова заменено

на ${}^1\chi$):

$${}^1\chi_{kim}^{(2)}(f_1, f_2) = \left(\frac{-1}{i\hbar}\right)^2 \frac{1}{V} \frac{1}{2!} P_2 \left\{ \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \times \right. \\ \left. \times \text{Sp} \{ \rho^{(0)} [[\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{Dl}(t_1)], \mathbf{d}_{Dm}(t_2)] \} e^{i2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} \right\}. \quad (2.31-26)$$

Применение оператора P_2 к стоящему после него выражению означает, что в этом выражении следует выполнить $2!$ возможных перестановок индексов пары частот с последующим суммированием возникающих членов.

Результаты в n -м порядке ($j = n$). В n -м порядке получаем

$$P_k^{(n)}(t) = \sum_{a_1, \dots, a_n} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} df_n {}^1\chi_{ka_1 \dots a_n}^{(n)}(f_1, \dots, f_n) \times \\ \times \text{Sp} {}^1E_{a_1}(f_1) \dots {}^1E_{a_n}(f_n) e^{i2\pi t \sum_{m=1}^n f_m} \quad (2.31-27)$$

при симметризованной восприимчивости

$${}^1\chi_{ka_1 \dots a_n}^{(n)}(f_1, \dots, f_n) = \\ = \left(\frac{-1}{i\hbar}\right)^n \frac{1}{V} \frac{1}{n!} P_n \left\{ \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \times \right. \\ \left. \times \text{Sp} \{ \rho^{(0)} [\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{Da_1}(t_1)] \dots \mathbf{d}_{Da_n}(t_n)] \} e^{i2\pi \sum_{m=1}^n f_m t_m} \right\}, \quad (2.31-28)$$

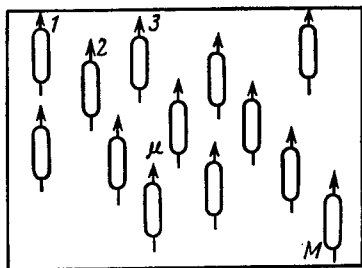
где P_n определяется аналогично P_2 .

В настоящем разделе вычисления выполнены как во временном, так и в частотном представлениях. Они показали, что полуклассическая теория приводит к соотношению между поляризацией и напряженностью поля в той же форме, в какой оно получается на основании более или менее специальных моделей, рассмотренных в ч. I. Таким образом, выведенное в ч. I соотношение

между P и E . получает дальнейшее подтверждение как общая форма материального уравнения для сред без пространственной дисперсии.

2.32. Вычисление восприимчивостей для ансамбля изолированных атомных систем

Полученные в предыдущем разделе общие выражения для восприимчивостей практически мало пригодны для конкретных расчетов или оценок, в частности, потому, что операторы относятся ко всей системе. Поэтому



Фиг. 24. Схематическое представление ансамбля M одинаково ориентированных молекул.

в настоящем разделе мы рассмотрим модель, которая, с одной стороны, достаточно проста для того, чтобы с ее помощью можно было без больших трудностей оценить восприимчивости, и, с другой стороны, отображает существенные аспекты реальных отношений. Для этой цели рассмотрим ансамбль различных, независимых, фиксированных в пространстве и одинаково ориентированных молекул (фиг. 24). Предположение об одинаковой ориентации мы сможем позднее без трудностей отбросить. Это можно сделать, если представить себе наложение различных независимых частичных ансамблей, внутри которых имеет место та или иная ориентация и наложение которых воспроизводит реальное распределение. Тогда при вычислении восприимчивостей возникает некоторое усреднение по ориентациям (ср.

разд. 2.34.) О величине объема, занятого рассматриваемым ансамблем, будем считать справедливыми предположения, обсужденные в разд. 2.31. С помощью описанной модели можно выяснить наиболее существенные взаимозависимости. Позднее мы усовершенствуем эту модель и еще более приблизим ее к реальным отношениям путем присоединения к ней диссипативной системы и путем учета полевых поправок.

Сначала вычислим связь между математическим ожиданием дипольного момента d_μ и напряженностью поля для отдельной молекулы μ и определим тем самым зависимость $P[E]$:

$$P = \frac{1}{V} \sum_{\mu=1}^M d_\mu. \quad (2.32-1)$$

Обозначим гамильтониан отдельной невозмущенной молекулы \mathbf{H}_μ^0 , оператор взаимодействия $\mathbf{H} = -\mathbf{d}_\mu E$ и оператор плотности ρ_μ . Аналогично методу, рассмотренному в разд. 2.31, определим математическое ожидание дипольного момента:

$$d_\mu \equiv \langle \mathbf{d}_\mu \rangle = \text{Sp} \{ \rho_\mu \mathbf{d}_\mu \},$$

причем, определяя по теории возмущений $\rho_\mu = \rho_\mu^{(0)} + \rho_\mu^{(1)} + \dots$, где

$$\rho_\mu^{(j)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^j} \hat{U}_\mu^0 \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \times \\ \times [\hat{\mathbf{H}}_{\mu D}(t_1) \dots [\hat{\mathbf{H}}_{\mu D}(t_n), \rho_\mu^{(0)}] \dots] \hat{U}_\mu^{0-1}$$

и

$$\hat{U}_\mu^0 = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \mathbf{H}_\mu^0 (t - t_0) \right],$$

найдем вклады в значение d_μ в различных порядках. Например, в первом порядке получается

$$d_\mu^{(1)}(t) = \left(\frac{-1}{i\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt_1 E(t_1) \text{Sp} \{ [\mathbf{d}_{\mu D}(t_1 - t), \rho_\mu^{(0)}] \mathbf{d}_\mu \}, \quad (2.32-2)$$

а после описанных в предыдущем разделе преобразований

$$d_{\mu}^{(1)}(t) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right) \int_0^{\infty} d\tau_1 E(t - \tau_1) \text{Sp} \{ [d_{\mu D}(-\tau_1), \rho_{\mu}^{(0)}] d_{\mu} \}. \quad (2.32-3)$$

На основании сделанных предположений об идентичности и одинаковой ориентации всех молекул все величины d_{μ} равны, и мы получаем из уравнений (2.32-1) и (2.32-3) для M атомных систем

$$P^{(1)}(t) = \int_0^{\infty} d\tau_1 \kappa^{(1)}(\tau_1) E(t - \tau_1), \quad (2.32-4)$$

где

$$\kappa^{(1)}(\tau_1) = \left(\frac{-1}{i\hbar}\right)^1 \gamma \int_{-\infty}^0 dt_1 \text{Sp} \{ [d_{\mu D}(-\tau_1), \rho_{\mu}^{(0)}] d_{\mu} \},$$

плотность числа частиц $\gamma = M/V$ и число μ может быть выбрано произвольно, например $\mu = 1$.

В частотном представлении соответствующая восприимчивость принимает вид

$$\chi_{ki}^{(1)}(f) = \left(\frac{-1}{i\hbar}\right)^1 \gamma \int_{-\infty}^0 dt_1 \text{Sp} \{ \rho_{\mu}^{(0)} [d_{k\mu} d_{\mu D i}(t_1)] \} e^{i2\pi f t_1}. \quad (2.32-5)$$

Вычисление восприимчивостей высших порядков читатель может выполнить самостоятельно как упражнение.

Из сравнения результатов пп. 2.311 и 2.312 можно усмотреть следующую эквивалентность форм: из более общих уравнений для восприимчивости в п. 2.311 можно получить восприимчивости модели независимых идентичных атомных систем, если операторы всего ансамбля заменить операторами любой отдельной молекулы, а вместо $1/V$ подставить в M раз большее значение γ .

Теперь мы обрисуем коротко другой путь, на котором из более общих результатов разд. 2.31 для восприимчивостей могут быть получены выражения для восприимчивостей ансамбля независимых идентичных молекул. При этом мы продемонстрируем на простом при-

мере, для которого результаты нам уже известны, способ представления в явном виде данных разд. 2.31 для конкретных систем.

Вследствие независимости молекул операторы системы легко выразить через операторы отдельных молекул, например

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mathbf{H}} &= \sum_{\mu} \overset{0}{\mathbf{H}}_{\mu}, & d &= \sum_{\mu} d_{\mu}, \\ \overset{0}{\mathbf{U}} &= \overset{0}{\mathbf{U}}_1 \overset{0}{\mathbf{U}}_2 \dots \overset{0}{\mathbf{U}}_M, & \text{где } \overset{0}{\mathbf{U}}_{\mu} &= e^{-\frac{i\overset{0}{\mathbf{H}}_{\mu}(t-t_0)}{\hbar}}, \\ \rho^{(0)} &= \rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)} \dots \rho_M^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.32-6)$$

и, следовательно,

$$d_D = \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} d \overset{0}{\mathbf{U}} = \overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} \sum_{\mu} d_{\mu} \overset{0}{\mathbf{U}} = \sum_{\mu} d_{\mu D}, \quad (2.32-7)$$

где

$$d_{\mu D} = \overset{0}{\mathbf{U}}_{\mu}^{-1} d_{\mu} \overset{0}{\mathbf{U}}_{\mu}$$

поскольку $\overset{0}{\mathbf{U}}_{\mu}$ коммутируют между собой, а также с d_{ν} при $\mu \neq \nu$. В разд. 2.31 было показано, что вклад в математическое ожидание поляризации P в n -м порядке определяется выражением вида

$$P^{(n)} \sim \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \text{Sp} \{ \rho^{(0)} K^{(n)} \}, \quad (2.32-8)$$

где $K^{(n)}$ представляет собой многократный коммутатор оператора дипольного момента:

$$K^{(n)} = [\dots [d, d_D(t_1)], \dots], d_D(t_n). \quad (2.32-9)$$

Применяя соотношение для d из уравнения (2.32-6) и принимая во внимание коммутативность операторов различных молекул, получим для этих коммутаторов

$$K^{(1)} = [d, d_D] = \left[\sum_{\mu} d_{\mu}, \sum_{\mu} d_{\mu D} \right] = \sum_{\mu} [d_{\mu}, d_{\mu D}] = \sum_{\mu} K_{\mu}^{(1)}, \quad (2.32-10)$$

$$\begin{aligned} K^{(2)} &= [[d, d_D], d_D] = \left[\sum_{\mu} [d_{\mu D}], \sum_{\nu} d_{\nu D} \right] = \\ &= \sum_{\mu} [[d_{\mu}, d_{\mu D}], d_{\mu D}] = \sum_{\mu} K_{\mu}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.32-11)$$

и в n -м порядке

$$\mathbf{K}^{(n)} = \sum_{\mu} \mathbf{K}_{\mu}^{(n)}. \quad (2.32-12)$$

Отсюда получим для следа в уравнении (2.32-8)

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \rho^{(0)} \mathbf{K}^{(n)} \} &= \text{Sp} \left\{ \rho_1^{(0)} \dots \rho_{\mu}^{(0)} \dots \rho_M^{(0)} \left(\sum_{\mu} \mathbf{K}_{\mu}^{(n)} \right) \right\} = \\ &= \sum_{\mu} \text{Sp} \{ \rho_1^{(0)} \} \dots \text{Sp} \{ \rho_{\mu}^{(0)} \mathbf{K}_{\mu}^{(n)} \} \dots \text{Sp} \{ \rho_M^{(0)} \}. \end{aligned} \quad (2.32-13)$$

Вследствие того что молекулы одинаковы и имеют одну и ту же ориентацию, выражение $\text{Sp} \{ \rho_{\mu}^{(0)} \mathbf{K}_{\mu}^{(n)} \}$ совсем не зависит от номера молекулы. Принимая во внимание этот факт и учитывая нормировку следа оператора плотности, получим из уравнения (2.32-13)

$$\text{Sp} \{ \rho^{(0)} \mathbf{K}^{(n)} \} = M \text{Sp} \{ \rho_1^{(0)} \mathbf{K}_1^{(n)} \}. \quad (2.32-14)$$

Таким образом, мы выразили входящие в математические ожидания поляризации в n -м порядке теории возмущений величины, содержащие следы, через следы, относящиеся к отдельной молекуле. Для восприимчивостей получаются такие же формулы, какие, например, в первом порядке уже определены уравнениями (2.32-4) и (2.32-5). Для упрощения записи мы в дальнейшем будем опускать индекс, относящийся к номеру молекулы (например, $\overset{0}{\mathbf{H}}_{\mu} \rightarrow \overset{0}{\mathbf{H}}$, $\mathbf{d}_{\mu} \rightarrow \mathbf{d}$). Во избежание смешивания с аналогично обозначаемыми операторами всей системы условимся о следующем: в уравнениях, в которых встречается $1/V$, операторы относятся ко всей системе, а в уравнениях с γ они принадлежат одной молекуле. В тех случаях, когда обозначение окажется неоднозначным, на это будет специально указано.

Попытаемся теперь вычислить восприимчивости для ансамбля независимых атомных систем в системе базисных собственных векторов невозмущенных гамильтонианов отдельных систем. Определение восприимчивостей в системе базисных собственных векторов $|\mathcal{E}_{\alpha}\rangle$ невозмущенного молекулярного гамильтониана $\overset{0}{\mathbf{H}}$, задан-

ных уравнением

$$\overset{0}{\mathbf{H}} |\mathcal{E}_{\alpha}\rangle = \mathcal{E}_{\alpha} |\mathcal{E}_{\alpha}\rangle,$$

становится особенно наглядным благодаря следующим свойствам матричных элементов операторов отдельных молекул:

$$\overset{0}{U}_{\alpha\beta}(t-t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{E}_{\alpha}(t-t_0)} \delta_{\alpha\beta},$$

откуда при $(1/\hbar)(\mathcal{E}_{\alpha} - \mathcal{E}_{\beta}) = \omega_{\alpha\beta}$ следует

$$d_{D\alpha\beta} = [\overset{0}{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{d} \overset{0}{\mathbf{U}}]_{\alpha\beta} = e^{i\omega_{\alpha\beta}(t-t_0)} d_{\alpha\beta}. \quad (2.32-15)$$

Точно так же, как в п. 2.311, предположим, что атомные системы первоначально находятся в равновесии с тепловым резервуаром и что имеет место соотношение $\rho_{\alpha\beta}^{(0)} = \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \delta_{\alpha\beta}$.

Вычисление в первом порядке. При использовании указанных выше свойств имеем:

$$\text{Sp} \{ \rho^{(0)} [\mathbf{d}, \mathbf{d}_D(t_1)] \} = \sum_{\alpha, \beta} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \{ d_{\alpha\beta} d_{\beta\alpha} e^{-i\omega_{\alpha\beta} t_1} - d_{\alpha\beta} d_{\beta\alpha} e^{+i\omega_{\alpha\beta} t_1} \} \quad (2.32-16)$$

Это выражение можно подставить в уравнение (2.32-5) для вычисления восприимчивости первого порядка. При вычислении интеграла по t_1 в $\chi_{ki}^{(1)}(f)$ возникает следующее затруднение: поскольку значения энергии, а следовательно, и частоты $\omega_{\alpha\beta}$ вещественны, то интеграл сходится только при условии, что величины $\omega = 2\pi f$ находятся в нижней половине комплексной плоскости частот, но они не должны находиться на вещественной оси частот. При $\omega = \omega_r - i\epsilon'$, $\epsilon = \text{const} > 0$ в подынтегральном выражении присутствует множитель $e^{\epsilon' t_1}$, который для $t_1 \rightarrow -\infty$ сильно затухает. После интегрирования можно выполнить предельный переход $\epsilon' \rightarrow 0$, т. е. приблизиться к вещественной оси снизу; при этом должны быть исключены окрестности полюсов восприимчивости, в которых модель, свободная от затухания, оказывается неприменимой. На это уже было указано в разд. 2.31.

При рассмотрении моделей с затуханием частота ω может с самого начала находиться на вещественной оси, на которой результирующие восприимчивости не имеют полюсов.

Подставляя (2.32-16) в (2.32-5) и выполняя интегрирование по t_1 , получим

$$\chi_{ki}^{(1)}(\omega) = -\frac{\gamma}{\hbar} \sum_{\alpha, \beta} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \left\{ \frac{d_{k\alpha\beta} d_{i\beta\alpha}}{\omega_{\alpha\beta} - \omega} + \frac{d_{i\alpha\beta} d_{k\beta\alpha}}{\omega_{\alpha\beta} + \omega} \right\}, \quad (2.32-17)$$

причем ω может находиться в нижней полуплоскости или на вещественной оси, за исключением непосредственного окружения полюса $\omega = \pm\omega_{\alpha\beta}$. [Размеры подлежащей исключению окрестности зависят от скорости затухания и сравнимы с полушириной (например, определяемой экспериментально) коэффициента поглощения; мы вернемся к рассмотрению этой зависимости при анализе затухания в разд. 2.33.]

Вычисление во втором порядке ($j=2$). Если уравнение (2.31-26) переписать представленным выше способом для операторов отдельных молекул, то получим для восприимчивости

$$\chi_{kim}^{(2)}(f_1, f_2) = \left(\frac{-1}{i\hbar}\right)^2 \gamma \frac{1}{2!} P_2 \left\{ \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \times \right. \\ \left. \times \text{Sp} \left\{ \rho^{(0)} [[d_k, d_{Dl}(t_1)], d_{Dm}(t_2)] \right\} e^{i2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} \right\} \quad (2.32-18)$$

[перестановка P_2 была определена при объяснении уравнения (2.31-26)]. Раскрытие выражения для следа в системе собственных векторов оператора \hat{H} и выполнение интегрирований (включая анализ проблемы сходимости) дает

$$\chi_{kim}^{(2)}(f_1, f_2) = \frac{\gamma}{\hbar^2} \frac{1}{2!} P_2 \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \left\{ \frac{d_{k\alpha\beta} d_{i\beta\gamma} d_{m\gamma\alpha}}{(\omega_{\gamma\alpha} + \omega_2)(\omega_{\beta\alpha} + \omega_1 + \omega_2)} - \right. \\ \left. - \frac{d_{i\alpha\beta} d_{k\beta\gamma} d_{m\gamma\alpha}}{(\omega_{\gamma\alpha} + \omega_2)(\omega_{\beta\gamma} + \omega_1 + \omega_2)} - \frac{d_{m\alpha\beta} d_{k\beta\gamma} d_{i\gamma\alpha}}{(\omega_{\alpha\beta} + \omega_2)(\omega_{\gamma\beta} + \omega_1 + \omega_2)} + \right. \\ \left. + \frac{d_{m\alpha\beta} d_{i\beta\gamma} d_{k\gamma\alpha}}{(\omega_{\alpha\beta} + \omega_2)(\omega_{\alpha\gamma} + \omega_1 + \omega_2)} \right\}. \quad (2.32-19)$$

Здесь предполагается, что $\text{Im } \omega_1 \leq 0$, $\text{Im } \omega_2 \leq 0$. Кроме того, необходимо исключить на вещественной оси частот окружение следующих точек: $\omega_2 = \omega_{\alpha\beta}$ и $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{\alpha\beta}$ для всех комбинаций α и β ($\alpha \neq \beta$). Вследствие действия операции P_2 (выполнение перестановки индексов частот и суммирование по перестановкам) в уравнении (2.32-19) можно в любом слагаемом произвести перестановку частот и соответствующих индексов, что не изменит результата. Произведем перестановку $(i, \omega_1) \rightleftharpoons (m, \omega_2)$ в третьем слагаемом; тогда мы сможем объединить получающийся член со вторым слагаемым:

$$-\frac{d_{i\alpha\beta} d_{k\beta\gamma} d_{m\gamma\alpha}}{(\omega_{\gamma\alpha} + \omega_2)(\omega_{\beta\gamma} + \omega_1 + \omega_2)} - \frac{d_{i\alpha\beta} d_{k\beta\gamma} d_{m\gamma\alpha}}{(\omega_{\alpha\beta} + \omega_1)(\omega_{\beta\gamma} + \omega_1 + \omega_2)} = \\ = -\frac{d_{i\alpha\beta} d_{k\beta\gamma} d_{m\gamma\alpha}}{(\omega_{\beta\gamma} + \omega_1 + \omega_2)} \left\{ \frac{(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\gamma\alpha}) + \omega_1 + \omega_2}{(\omega_{\gamma\alpha} + \omega_2)(\omega_{\alpha\beta} + \omega_1)} \right\}.$$

Поскольку $\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\gamma\alpha} = \omega_{\beta\gamma}$, то отсюда вытекает выражение для восприимчивости (для достижения алфавитного расположения индексов при частотах мы произвели дополнительную перестановку в четвертом слагаемом)

$$\chi_{kim}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \\ = \left(\frac{-1}{\hbar}\right)^2 \gamma \frac{1}{2!} P_2 \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \left\{ \frac{d_{k\alpha\beta} d_{i\beta\gamma} d_{m\gamma\alpha}}{(\omega_{\alpha\gamma} - \omega_2)(\omega_{\alpha\beta} - \omega_1 - \omega_2)} + \right. \\ \left. + \frac{d_{i\alpha\beta} d_{k\beta\gamma} d_{m\gamma\alpha}}{(\omega_{\alpha\gamma} - \omega_2)(\omega_{\alpha\beta} + \omega_1)} + \frac{d_{i\alpha\beta} d_{m\beta\gamma} d_{k\gamma\alpha}}{(\omega_{\alpha\beta} + \omega_1)(\omega_{\alpha\gamma} + \omega_1 + \omega_2)} \right\}. \quad (2.32-20)$$

Так как вывод явных выражений для общего случая затруднителен и поскольку для применений прежде всего обсуждаются порядки $j=2$ и $j=3$, то мы здесь вместо общих соотношений дадим соотношения, относящиеся к случаю $j=3$. (После обсуждения дальнейших преобразований симметрии выражения для восприимчивостей становятся настолько наглядными, что обобщение легко может быть проведено.)

Вычисление в третьем порядке ($j=3$). Для вычисления восприимчивости в третьем порядке будем

исходить из соотношения

$$\begin{aligned} \chi_{kpr}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \left(\frac{-1}{i\hbar}\right)^3 \gamma \frac{1}{3!} P_3 \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 \times \\ &\times \text{Sp} \left\{ \rho^{(0)} \left[[\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{D_p}(t_1)], \mathbf{d}_{D_q}(t_2), \mathbf{d}_{D_r}(t_3) \right] \right\} e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \omega_3 t_3)}. \end{aligned} \quad (2.32-21)$$

При вычислении следа и выполнении интегрирований величина $\chi_{kpr}^{(3)}$ получается как сумма восьми членов. Однако с помощью перестановок индексов частот можно некоторые слагаемые объединить и тогда окончательно получается следующий результат:

$$\begin{aligned} \chi_{kpr}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= -\frac{\gamma}{\hbar^3} \frac{1}{3!} \times \\ &\times P_3 \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \left\{ \frac{d_{k\alpha\beta} d_{p\beta\gamma} d_{q\gamma\delta} d_{r\delta\alpha}}{(\omega_{\alpha\beta} - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)(\omega_{\alpha\gamma} - \omega_2 - \omega_3)(\omega_{\alpha\delta} - \omega_3)} + \right. \\ &+ \frac{d_{p\alpha\beta} d_{k\beta\gamma} d_{q\gamma\delta} d_{r\delta\alpha}}{(\omega_{\alpha\beta} + \omega_1)(\omega_{\alpha\gamma} - \omega_2 - \omega_3)(\omega_{\alpha\delta} - \omega_3)} + \\ &+ \frac{d_{p\alpha\beta} d_{q\beta\gamma} d_{k\gamma\delta} d_{r\delta\alpha}}{(\omega_{\alpha\beta} + \omega_1)(\omega_{\alpha\gamma} + \omega_1 + \omega_2)(\omega_{\alpha\delta} - \omega_3)} + \\ &\left. + \frac{d_{p\alpha\beta} d_{q\beta\gamma} d_{r\gamma\delta} d_{k\delta\alpha}}{(\omega_{\alpha\beta} + \omega_1)(\omega_{\alpha\gamma} + \omega_1 + \omega_2)(\omega_{\alpha\delta} + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.32-22)$$

Применение пространственно-частотных преобразований. Все встречавшиеся до сих пор выражения для восприимчивостей были выведены для среды, свободной от потерь. Для такой среды применимы так называемые пространственно-частотные преобразования, которые уже были рассмотрены в ч. I, п. 1.232. Эти преобразования заключаются в перестановке первого индекса в тензоре восприимчивости с одним из последующих индексов при одновременном обмене соответствующих частот, причем в j -м порядке первому индексу сопоставляется частота $\omega_{j+1} = -\sum_{i=1}^j \omega_i$; например, в первом порядке имеем

$$\chi_{kp}^{(1)}(\omega) = \chi_{pk}^{(1)}(-\omega), \quad (2.32-23)$$

а во втором порядке

$$\chi_{kpr}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \chi_{pkq}^{(2)}(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) = \chi_{qpk}^{(2)}(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) \quad (2.32-24)$$

или, обозначая восприимчивости символом χ В формуле зависимости P от E . (см. ч. I, п. 1.213), можем написать для дискретного спектра частот

$$\begin{aligned} \chi_{kpr}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) &= \chi_{pkq}^{(2)}(-\omega_1; -\omega_3, \omega_2) = \\ &= \chi_{pqr}^{(2)}(-\omega_2; \omega_1, -\omega_3). \end{aligned} \quad (2.32-25)$$

Из приведенных выше конкретных представлений восприимчивостей от первого до третьего порядка в уравнениях (2.32-17), (2.32-20) и (2.32-22) легко убедиться, что это соотношение симметрии выполняется; в этих уравнениях в действительности выполнено сложение всех членов, возникающих в результате применения пространственно-частотных преобразований к одному основному выражению. Поэтому можно ввести сокращенный способ записи путем определения нового перестановочного оператора \tilde{P}_j , который, помимо операций $(\omega_1, p) \rightleftharpoons (\omega_2, q)$, предусмотренных оператором P_j , включает еще перестановки первого индекса и соответствующей частоты ω_{j+1} , как то $(\omega_{j+1}, k) \rightleftharpoons (\omega_1, p)$ и т. д. С помощью этого оператора мы можем получить все обсуждаемые слагаемые из одного основного члена:

$$\begin{aligned} \chi_{kp}^{(1)}(\omega) &= \left(\frac{-1}{\hbar}\right)^1 \gamma \frac{1}{1!} \tilde{P}_1 \sum_{\alpha, \beta} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \frac{d_{k\alpha\beta} d_{p\beta\alpha}}{\omega_{\alpha\beta} - \omega}, \\ \chi_{kpr}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) &= \left(\frac{-1}{\hbar}\right)^2 \gamma \frac{1}{2!} \tilde{P}_2 \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \frac{d_{k\alpha\beta} d_{p\beta\gamma} d_{q\gamma\alpha}}{(\omega_{\alpha\beta} - \omega_2)(\omega_{\alpha\beta} - \omega_1 - \omega_2)}, \\ \chi_{kpr}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \left(\frac{-1}{\hbar}\right)^3 \gamma \frac{1}{3!} \times \end{aligned} \quad (2.32-26)$$

$$\begin{aligned} &\times \tilde{P}_3 \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \frac{d_{k\alpha\beta} d_{p\beta\gamma} d_{q\gamma\delta} d_{r\delta\alpha}}{(\omega_{\alpha\beta} - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)(\omega_{\alpha\gamma} - \omega_2 - \omega_3)(\omega_{\alpha\delta} - \omega_3)}, \\ \chi_{kp_1 \dots p_n}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \left(\frac{-1}{\hbar}\right)^n \gamma \frac{1}{n!} \times \\ &\times \tilde{P}_n \sum_{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \frac{d_{k\alpha\beta_1} \dots d_{p_n\beta_n\alpha}}{(\omega_{\alpha\beta_1} - \omega_1 - \dots - \omega_n) \dots (\omega_{\alpha\beta_n} - \omega_n)}. \end{aligned}$$

2.33. Вычисление восприимчивостей для ансамбля атомных систем связанных с диссипативной системой

В разд. 2.32 мы видели, что при полуклассическом рассмотрении взаимодействия излучения с атомными системами, которые не связаны ни между собой, ни с какой-либо другой системой, возникают специфические трудности. Например, приходилось исключать все случаи, в которых частота некоторой компоненты поля излучения или какая-нибудь суммарная или разностная частота попадает в (острый!) резонанс с одной из частот переходов. [При последовательном квантовом описании удастся избежать возникновения таких проблем путем автоматического учета различных механизмов затухания, например радиационного затухания (ср. пп. 3.111 и 3.112).] Указанным способом при применении результатов разд. 2.32 можно трактовать процессы, свободные от потерь (ср. разд. 2.23), такие как генерация высших гармоник и параметрические эффекты вне областей резонанса, но не многофотонное поглощение или излучение или вынужденное комбинационное рассеяние. Поэтому важно расширить модели таким образом, чтобы они позволяли правильно учесть ограниченную «память» атомной системы и были применимы для исследования «резонансных эффектов» (ср. разд. 2.31). С точки зрения уменьшения расчетных трудностей весьма целесообразными оказались модели, в которых взаимодействие всех отдельных атомных систем между собой и с другими системами со многими степенями свободы не учитывается в явном виде. Вместо такого учета в уравнения для отдельной атомной системы вводится глобальный механизм потерь в виде связи с «тепловым резервуаром». Такой подход мы уже описали в разд. В2.27 и 2.24, и теперь мы можем непосредственно воспользоваться полученными там результатами. При этом мы обсудим наиболее подробно вычисление восприимчивостей первого порядка, а затем обобщим результаты на высшие порядки.

Вычисление восприимчивости первого порядка. Для вычисления математического ожидания поляризации и

затем восприимчивостей необходимо располагать недиагональными элементами матрицы плотности. Согласно разд. 2.24, они связаны с диагональными элементами и должны быть вычислены из системы дифференциальных уравнений. В нижеприведенном вычислении восприимчивостей первого и высших порядков мы используем так называемое необратимое приближение, в котором диагональные элементы фиксируются в определенном начальном состоянии, определяемом только тепловым резервуаром. Это означает, что можно пренебречь изменениями населенностей, обусловленными полем излучения. Тогда мы можем в нашем описании не принимать во внимание первое соотношение в уравнении (2.24-3), а из второго соотношения определим вклад в значение $\rho_{\alpha\beta}$ в первом порядке:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{\alpha\beta}^{(1)} + i\omega_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{1}{\tau_{\alpha\beta}} \rho_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho^{(0)}]_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{i\hbar} (\rho_{\alpha\alpha}^{(0)} - \rho_{\beta\beta}^{(0)}) d_{\alpha\beta} E(t). \end{aligned} \quad (2.33-1)$$

Здесь $\tau_{\alpha\beta}$ есть время релаксации, описывающее затухание недиагональных элементов матрицы плотности. Общее решение однородного дифференциального урав-

нения имеет вид $\rho_{\alpha\beta}^{(1)} = \hat{\rho}_{\alpha\beta} e^{-i(\omega_{\alpha\beta} - \frac{1}{\tau_{\alpha\beta}})t}$. Путем вариации констант можно решить неоднородное уравнение, в котором мы заменим напряженность поля $E(t)$ ее фурье-образом:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\alpha\beta}(t) &= \frac{1}{i\hbar} (\rho_{\alpha\alpha}^{(0)} - \rho_{\beta\beta}^{(0)}) d_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^t dt_1 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\omega}{2\pi} |E(\omega)| e^{i(\omega + \omega_{\alpha\beta} - \frac{1}{\tau_{\alpha\beta}})t_1}. \end{aligned} \quad (2.33-2)$$

Если же после замены $\tau_1 = t - t_1$ перейти к уравнению

для $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(t)$, то

$$\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} (\rho_{\alpha\alpha}^{(0)} - \rho_{\beta\beta}^{(0)}) d_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \times \\ \times {}^1E_{\alpha}(\omega) e^{i\omega t} \int_0^{\infty} d\tau_1 e^{-i(\omega + \omega_{\alpha\beta} - \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}})\tau_1}. \quad (2.33-3)$$

Из структуры интеграла по τ_1 видно, что трудности со сходимостью, возникавшие при исследовании в разд. 2.32 свободного от потерь ансамбля с вещественными значениями ω , теперь устранены; а именно здесь появляется множитель $e^{-\tau_1/\tau_{\alpha\beta}}$, обеспечивающий сходимость при $\tau_1 \rightarrow \infty$, поскольку $\tau_{\alpha\beta} > 0$. Релаксационные процессы воздействуют (см. ч. I, п. 1.112) на ограниченную «память» среды; они обеспечивают конечность недиагональных элементов матрицы плотности, а, следовательно, также и соответствующей восприимчивости, которую мы теперь вычислим. После выполнения интегрирования получаем сначала для матрицы плотности

$$\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} {}^1E_{\alpha}(\omega) e^{i\omega t} \left\{ \left(\frac{-1}{\hbar} \right) \frac{(\rho_{\alpha\alpha}^{(0)} - \rho_{\beta\beta}^{(0)}) d_{\alpha\beta}}{\omega + \omega_{\alpha\beta} - \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}}} \right\}. \quad (2.33-4)$$

Теперь составим поляризацию:

$$P_k(t) = \gamma \text{Sp} \{ \rho(t) \mathbf{d}_k \} = \gamma \sum_{\alpha, \beta} \rho_{\alpha\beta}(t) d_{k\beta\alpha} = \\ = \sum_p \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} {}^1E_p(\omega) e^{i\omega t} \left\{ \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{-1}{\hbar} \right) \frac{(\rho_{\alpha\alpha}^{(0)} - \rho_{\beta\beta}^{(0)}) d_{p\alpha\beta} d_{k\beta\alpha}}{\omega + \omega_{\alpha\beta} - \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}}} \right\}. \quad (2.33-5)$$

Из сравнения с уравнением (2.3-4) получаем отсюда для восприимчивости первого порядка

$${}^1\chi_{kp}^{(1)}(\omega) = \left(\frac{-1}{\hbar} \right) \gamma \sum_{\alpha, \beta} (\rho_{\alpha\alpha}^{(0)} - \rho_{\beta\beta}^{(0)}) \frac{d_{p\alpha\beta} d_{k\beta\alpha}}{\omega + \omega_{\alpha\beta} - \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}}}. \quad (2.33-6)$$

Для сравнения с результатами из разд. 2.32 [особенно с уравнением (2.33-17)] целесообразно произвести перестановку индексов суммирования α и β в члене с $\rho_{\beta\beta}^{(0)}$ при учете равенства $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$. Тогда восприимчивость примет вид

$${}^1\chi_{kp}^{(1)}(\omega) = \left(\frac{-1}{\hbar} \right) \gamma \sum_{\alpha, \beta} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \left\{ \frac{d_{k\alpha\beta} d_{p\beta\alpha}}{\omega_{\alpha\beta} - \omega + \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}}} + \frac{d_{p\alpha\beta} d_{k\beta\alpha}}{\omega_{\alpha\beta} + \omega - \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}}} \right\}. \quad (2.33-7)$$

Из этого уравнения видно, что в результате введения механизма потерь на оси вещественных частот ω уже не появляются полюсы, в отличие от случая «свободной от потерь» восприимчивости в уравнении (2.32-17). Особенности смещены в верхнюю полуплоскость и находятся в точках $\text{Re } \omega = \omega_{\alpha\beta}$, $\text{Im } \omega = 1/\tau_{\alpha\beta}$ и $\text{Re } \omega = -\omega_{\alpha\beta}$, $\text{Im } \omega = 1/\tau_{\alpha\beta}$. Кроме того, из явного представления восприимчивости следует, что пространственно-частотная симметрия [т. е. уравнение (2.32-23)] уже не является точной; в областях, в которых можно пренебречь затуханием, т. е. вдали от резонансов (для $|\omega_{\alpha\beta}| - |\omega| \gg 1/\tau_{\alpha\beta}$), эта симметрия выполняется приближенно. Сравнение результатов для моделей без затухания и с затуханием показывает, что возможен формальный переход от восприимчивостей ансамбля без затухания к восприимчивостям ансамбля с затуханием. Для этого нужно вещественные частоты переходов перевести в комплексные частоты путем присоединения релаксационного параметра $i/\tau_{\alpha\beta}$, причем особенности восприимчивостей должны попадать в те или иные точки верхней половины плоскости частот ω . В заключение рассмотрим один специальный случай, определяемый следующими условиями:

- 1) В момент времени $t = -\infty$ молекулы находятся в основном состоянии $\alpha = 0$.
- 2) Молекулы изотропны, т. е. переходные моменты не зависят от направления поляризации, и мы можем написать $d_{k\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}$. Тогда соблюдается равенство ${}^1\chi_{kp}^{(1)} = {}^1\chi_{kk}^{(1)} \delta_{kp}$, в котором диагональный член ${}^1\chi_{kk}^{(1)}$ не зависит от k ; обозначая его ${}^1\chi_k$, имеем ${}^1\chi_{kp} = {}^1\chi_k \delta_{kp}$.

3) Излучение взаимодействует только с переходом $\omega_{\beta 0} = \omega_{10}$. При этих условиях получается следующее упрощенное выражение для восприимчивости:

$$\chi^{(1)}(\omega) = \frac{1}{\hbar} \gamma |d_{10}|^2 \left\{ \frac{1}{\omega_{10} + \omega - \frac{i}{\tau_{10}}} + \frac{1}{\omega_{10} - \omega + \frac{i}{\tau_{10}}} \right\}. \quad (2.33-8)$$

Мнимая часть восприимчивости

$$\begin{aligned} \text{Im } \chi^{(1)}(\omega) &= \\ &= -\frac{\gamma \tau_{10}}{\hbar} |d_{10}|^2 \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\tau_{10}}\right)^2}{(\omega_{10} - \omega)^2 + \left(\frac{1}{\tau_{10}}\right)^2} - \frac{\left(\frac{1}{\tau_{10}}\right)^2}{(\omega_{10} + \omega)^2 + \left(\frac{1}{\tau_{10}}\right)^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.33-9)$$

представляет собой суперпозицию двух кривых Лоренца с максимумами при $\pm \omega_{10}$. Через соотношение

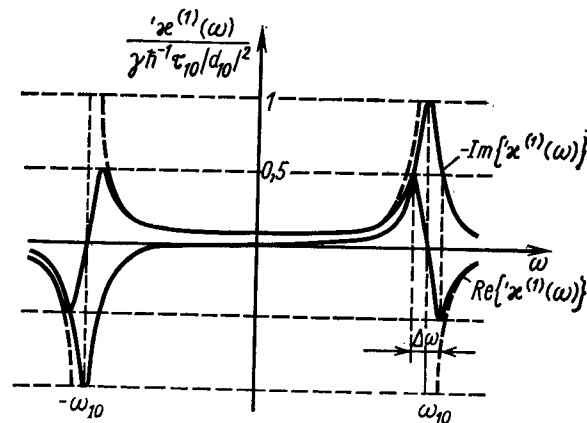
$$\rho_a^{(L)} = -\frac{1}{2n^{(L)}\epsilon_0} \text{Im } \chi^{(1)}(\omega)$$

величина $\chi(\omega)$ связана с коэффициентом («линейным») поглощения $\epsilon^{(L)}(\omega) = [n^{(L)} - i\rho_a^{(L)}]^2$ (ср. ч. I, § 1.3). Ход зависимости вещественной и мнимой частей линейной восприимчивости от частоты показан на фиг. 25. Полуширины лоренцевых функций задаются выражением

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau_{10}}$$

и, следовательно, определяются процессом затухания. Вообще можно утверждать, что различные механизмы потерь вызывают уширение уровней энергии и соответствующих переходов. Уширение спектральных линий такого типа, при котором каждому осциллятору приписывается уширенный переход, называется *однородным*. Но, кроме того, возможно такое уширение спектральных линий, которое возникает при исследовании ансамбля осцилляторов и вызывается тем, что резонансные частоты отдельных осцилляторов имеют некоторый разброс от-

носительно среднего значения. Такое отклонение резонансных частот может, например, быть обусловлено эффектом Доплера при собственном движении молекулы или неоднородностями в кристалле. Уширение такого типа называют *неоднородным*. (Термины «однородное» и «неоднородное» уширение взяты из магнитной резонансной спектроскопии, в которой возникает дополни-



Фиг. 25. Частотная зависимость вещественной и мнимой частей линейной восприимчивости.

Сплошная кривая — для затухающей атомной системы, штриховая — для незатухающей атомной системы.

дельный эффект уширения в неоднородных полях вследствие различия в резонансных частотах.) (Ср. выводы о неоднородном уширении в п. 3.112.)

Сравнение полученного здесь представления для $\chi^{(1)}(\omega)$ с результатом классического рассмотрения затухающего осциллятора в ч. I, § 1.1 и 2.2, показывает, что существует далеко идущая эквивалентность с точки зрения структуры; подобные обстоятельства имеют место и для восприимчивостей высшего порядка. На этой эквивалентности основана применимость модели классического осциллятора к описанию эффектов линейной оптики, на что мы уже указывали в ч. I.

На примере представленной на фиг. 25 линейной восприимчивости можно, кроме того, наглядно устано-

вить те области, в которых допустимо пренебречь связью с диссипативной системой, т. е. затуханием. Штриховая кривая, представляющая вещественную часть $\chi^{(1)}(\omega)$ для незатухающей модели, быстро сливается с кривой для затухающей модели вне области сильного поглощения [область между $\omega_{10} - (1/\tau_{10})$ и $\omega_{10} + (1/\tau_{10})$].

Теперь мы освободимся от предположения о том, что все частицы находятся в основном состоянии. Для двухуровневой системы (с невырожденными уровнями) из уравнения (2.33-7) получается вместо уравнения (2.33-9)

$$\text{Im } \chi^{(1)}(\omega) = -(\gamma_0 - \gamma_1) \frac{\tau_{10} |d_{10}|^2}{\hbar} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\tau_{10}}\right)^2}{(\omega_{10} - \omega)^2 + \left(\frac{1}{\tau_{10}}\right)^2} - \frac{\left(\frac{1}{\tau_{10}}\right)^2}{(\omega_{10} + \omega)^2 + \left(\frac{1}{\tau_{10}}\right)^2} \right\}, \quad (2.33-10)$$

где γ_0 и γ_1 являются плотностями молекул в основном и в возбужденном состояниях двухуровневой системы. Этот результат качественно отличается от того, что дает классическая осцилляторная модель, в особенности в следующем: мнимая часть $\chi^{(1)}(\omega)$ может теперь исчезать также и вблизи резонанса (для $\gamma_1 = \gamma_0$) или принимать положительные значения (для $\gamma_1 > \gamma_0$, когда выражение $\gamma_1 - \gamma_0$ должно рассматриваться как плотность инверсии числа частиц). Если рассчитывать взаимодействие световой волны со средой, для которой $\text{Im } \chi^{(1)}(\omega) > 0$ (ср. ч. I, § 1.3), то обнаружится, что эта волна усиливается; таким образом, речь идет о механизме лазерного усиления в «инвертированных» средах.

Восприимчивости высшего порядка. Способ вычисления восприимчивостей высшего порядка аналогичен использованному для вычисления $\chi^{(1)}(\omega)$. Он основан на определении при помощи теории возмущений соответствующего порядка недиагональных элементов матрицы плотности. Хотя явный расчет достаточно сложен, он не содержит никаких особых физических рассужде-

ний или осложнений; поэтому мы его не станем излагать и приведем сразу результат для второго и третьего порядков:

$$\begin{aligned} \chi_{kpq}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) &= \left(\frac{-1}{\hbar}\right)^2 \gamma \frac{1}{2!} \times \\ &\times P_2 \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \left\{ \frac{d_{k\alpha\beta} d_{p\beta\gamma} d_{q\gamma\alpha}}{\left(\omega_{\alpha\gamma} + \frac{i}{\tau_{\alpha\gamma}} - \omega_2\right) \left(\omega_{\alpha\beta} + \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}} - \omega_1 - \omega_2\right)} + \right. \\ &+ \frac{d_{p\alpha\beta} d_{k\beta\gamma} d_{q\gamma\alpha}}{\left(\omega_{\alpha\gamma} + \frac{i}{\tau_{\alpha\gamma}} - \omega_2\right) \left(\omega_{\alpha\beta} - \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}} + \omega_1\right)} + \\ &\left. + \frac{d_{p\alpha\beta} d_{q\beta\gamma} d_{k\gamma\alpha}}{\left(\omega_{\alpha\beta} - \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}} + \omega_1\right) \left(\omega_{\alpha\gamma} - \frac{i}{\tau_{\alpha\gamma}} + \omega_1 + \omega_2\right)} \right\}, \quad (2.33-11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{kpr}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \left(\frac{-1}{\hbar}\right)^3 \gamma \frac{1}{3!} P_3 \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \rho_{\alpha\alpha}^{(0)} \times \\ &\times \left\{ \frac{d_{k\alpha\beta} d_{p\beta\gamma} d_{q\gamma\delta} d_{r\delta\alpha}}{\left(\omega_{\alpha\beta} + \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}} - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3\right) \left(\omega_{\alpha\gamma} + \frac{i}{\tau_{\alpha\gamma}} - \omega_2 - \omega_3\right) \left(\omega_{\alpha\delta} + \frac{i}{\tau_{\alpha\delta}} - \omega_3\right)} + \right. \\ &+ \frac{d_{p\alpha\beta} d_{k\beta\gamma} d_{q\gamma\delta} d_{r\delta\alpha}}{\left(\omega_{\alpha\beta} - \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}} + \omega_1\right) \left(\omega_{\alpha\gamma} + \frac{i}{\tau_{\alpha\gamma}} - \omega_2 - \omega_3\right) \left(\omega_{\alpha\delta} + \frac{i}{\tau_{\alpha\delta}} - \omega_3\right)} + \\ &+ \frac{d_{p\alpha\beta} d_{q\beta\gamma} d_{k\gamma\delta} d_{r\delta\alpha}}{\left(\omega_{\alpha\beta} - \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}} + \omega_1\right) \left(\omega_{\alpha\gamma} - \frac{i}{\tau_{\alpha\gamma}} + \omega_1 + \omega_2\right) \left(\omega_{\alpha\delta} + \frac{i}{\tau_{\alpha\delta}} - \omega_3\right)} + \\ &\left. + \frac{d_{p\alpha\beta} d_{q\beta\gamma} d_{r\gamma\delta} d_{k\delta\alpha}}{\left(\omega_{\alpha\beta} - \frac{i}{\tau_{\alpha\beta}} + \omega_1\right) \left(\omega_{\alpha\gamma} - \frac{i}{\tau_{\alpha\gamma}} + \omega_1 + \omega_2\right) \left(\omega_{\alpha\delta} - \frac{i}{\tau_{\alpha\delta}} + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3\right)} \right\}. \quad (2.33-12) \end{aligned}$$

Сравнение с результатами в соответствующих порядках для незатухающей модели показывает, что возможен формальный переход от выражений восприимчивости для незатухающего ансамбля к формулам для восприимчивости затухающего ансамбля. Для этой цели необ-

ходимо вещественные частоты переходов преобразовать в комплексные частоты путем присоединения релаксационного параметра $i/\tau_{\alpha\beta}$ и притом так, чтобы особенности восприимчивостей находились в тех или иных точках верхней половины плоскостей ω_i .

Принимая во внимание свободу выбора особенностей в нижней половине плоскостей ω_i , можно для линейных и нелинейных восприимчивостей вывести дисперсионные соотношения (ср. ч. I, разд. 1.13).

2.34. Вычисление восприимчивостей для ансамбля атомных систем при учете пространственной ориентации и полевых поправок

До сих пор мы вычисляли восприимчивости для ансамбля атомных систем при следующих предположениях.

Все системы ориентированы одинаково. Ансамбль атомных систем настолько сильно разрежен, что в месте нахождения одной системы можно пренебречь полями, создаваемыми другими системами.

Откажемся теперь от обоих этих предположений. Если мы желаем отбросить предположение об одинаковой ориентации всех молекул, то для этого будет достаточно как в вышеприведенных, так и в последующих формулах для восприимчивостей произвести усреднение произведений переходных матричных элементов по всем возможным ориентациям. Для этого следует выразить входящие в уравнения матричные элементы $d_{k\alpha\beta}$, заданные в лабораторной системе координат $k = x, y, z$, через матричные элементы в молекулярной системе координат K :

$$d_{k\alpha\beta} = \sum_K a_{kK} \tilde{d}_{K\alpha\beta}, \quad (2.34-1)$$

где a_{kK} — направляющие косинусы. Усреднение восприимчивостей по молекулярным ориентациям сводится, таким образом, к усреднению произведений направляющих косинусов (см. Приложение П1).

Более значительные трудности возникают при отказе от второго предположения, так как в принципе необходимо учитывать в явном виде взаимодействие между всеми заряженными частицами ансамбля, что является очень большим препятствием. Однако обусловленное полем действие атомарных систем друг на друга можно учесть в некотором грубом приближении, которое тем не менее выделяется благодаря своей простоте.

Вычисление можно выполнить по аналогии с чисто классическим рассмотрением, как в ч. I, причем мы также и здесь ограничимся изотропными средами. Если вычислять зависимость $d_{\alpha\beta}[E_{\alpha\beta}]$ на основании модели одной молекулы в вакууме и напряженности поля $E_{\alpha\beta}$, заданной внешними источниками, то учет влияния поля ближайших соседних молекул можно осуществить путем замены поля $E_{\alpha\beta}$ на эффективное действующее поле $E_{(\omega)}$; при заданном распределении молекул оно может быть вычислено по заданному полю $E_{\alpha\beta}$. Метод, описанный в ч. I, мы изменим только в том, что примем во внимание влияние (по отношению к однофотонным процессам) нерезонансного молекулярного окружения, характеризуемого компонентой поляризации $P_{NR}^{(L)}$, как на резонансную компоненту линейной поляризации $P^{(L)}$, так и на нелинейную поляризацию $P^{(NL)}$. (Само собой разумеется, что подразделение линейной поляризации на резонансную и нерезонансную компоненты должно соответственно относиться к определенной области частот внешних полей. Если внешнее поле имеет частоту ω , то, согласно уравнению (2.33-7), в восприимчивости $\chi^{(1)}(\omega)$ можно выделить резонансную часть, к которой принадлежат члены с $|\omega_{\alpha\beta} - \omega| \leq 1/\tau_{\alpha\beta}$, и нерезонансную часть.) Исходным пунктом служит соотношение Лоренца

$$E_{(\omega)} = E_{\alpha\beta} + \frac{1}{3\epsilon_0} P_{\alpha\beta}, \quad (2.34-2)$$

в котором поляризацию следует разложить на компоненты:

$$P_{\alpha\beta} = P_{NR}^{(L)} + P_R^{(L)} + P_{\alpha\beta}^{(NL)}. \quad (2.34-3)$$

Пользуясь уравнением

$$P_{NR}^{(L)} = \chi_{NR}^{(L)} E_{(\omega)}, \quad (2.34-4)$$

получим из уравнений (2.33-2) и (2.33-3)

$$P_{NR}^{(J)} = \epsilon_0 (\epsilon_{NR}^{(J)} - 1) E + \frac{1}{3} (\epsilon_{NR}^{(J)} - 1) (P_R^{(J)} + P^{(HJ)}), \quad (2.34.5)$$

где

$$\epsilon_{NR}^{(J)} = 1 + \frac{\chi_{NR}^{(J)} \frac{1}{\epsilon_0}}{1 - \frac{1}{3\epsilon_0} \chi_{NR}^{(J)}}.$$

Если подставить выражение для $P_{NR}^{(J)}$ в формулу $D = \epsilon_0 E + P$, то получим

$$D = \epsilon_0 \epsilon_{NR}^{(J)} E + \frac{\epsilon_{NR}^{(J)} + 2}{3} P_R^{(J)} + \frac{\epsilon_{NR}^{(J)} + 2}{3} P^{(HJ)}. \quad (2.34-6)$$

Таким образом, в уравнениях Максвелла действие линейной, связанной с резонансными переходами компоненты поляризации $P_R^{(J)}$, а также нелинейной компоненты поляризации $P^{(HJ)}$ усиливается под влиянием среды в $(\epsilon_{NR}^{(J)} + 2)/3$ раз.

В рамках теории Лоренца действующее эффективное поле E_w в выражениях для $P_R^{(J)} [E_{(w)}]$ и $P^{(HJ)} [E_{(w)}]$ можно приближенно выразить через внешнее поле E . [ср. ч. I, разд. 2.31]:

$$E_{(w)} = \left(\frac{\epsilon_{NR}^{(J)} + 2}{3} \right) E. \quad (2.34-7)$$

В соответствии с этим в лоренцевом приближении полевые поправки могут быть выполнены следующим образом (причем для упрощения записи мы ограничиваемся специальным случаем дискретного спектра частот). Без учета полевой поправки соотношение

$$iP^{(n)}(f) = \chi_{..}^{(n)} \dots (f; f_1, \dots, f_n) iE \cdot (f_1) \dots iE \cdot (f_n)$$

для ансамбля принимает вид

$$\begin{aligned} iP^{(n)}(f) &= \\ &= \left(\frac{\epsilon_{NR}^{(J)} + 2}{3} \right)^{n+1} \chi_{..}^{(n)} \dots (f; f_1, \dots, f_n) iE \cdot (f_1) \dots iE \cdot (f_n) \end{aligned} \quad (2.34-8)$$

(где в случае $n = 1$ формула относится к $P_R^{(J)}$) или при учете дисперсии

$$\begin{aligned} iP^{(n)}(f) &= \left(\frac{\epsilon_{NR}^{(J)}(f) + 2}{3} \right) \left(\frac{\epsilon_{NR}^{(J)}(f_1) + 2}{3} \right) \times \\ &\times \left(\frac{\epsilon_{NR}^{(J)}(f_n) + 2}{3} \right) (\chi_{..}^{(n)} \dots (f; f_1, \dots, f_n) iE \cdot (f_1) \dots iE \cdot (f_n)). \end{aligned} \quad (2.34-9)$$

Следовательно, в материальном уравнении $P \cdot [E]$ для ансамбля без учета полевой поправки восприимчивость n -го порядка должна быть умножена на полевой поправочный фактор:

$$C_F = \left(\frac{\epsilon_{NR}^{(J)}(f) + 2}{3} \right) \left(\frac{\epsilon_{NR}^{(J)}(f_1) + 2}{3} \right) \dots \left(\frac{\epsilon_{NR}^{(J)}(f_n) + 2}{3} \right). \quad (2.34-10)$$

Как определено выше, E представляет собой напряженность электрического поля в среде. При сравнительных оценках восприимчивостей в средах с различной оптической плотностью оказывается целесообразным в полевом поправочном факторе не производить пересчет от напряженности E макроскопического поля в среде к вакуумному полю $E^{(0)}$, которое в эксперименте определяется, вообще говоря, параметрами лазера. Новый поправочный фактор $C_F^{(0)}$ позволяет вычислить восприимчивость, связывающую P и $E^{(0)}$, по значению восприимчивости для модельной среды с пренебрежимо малым взаимодействием между молекулами. Если падающая плоская волна распространяется в среде без потерь (что может быть достигнуто, например, путем соответствующего выбора добротности), то из свойств вектора Пойнтинга следует соотношение

$$(E^{(0)})^2 = n^{(J)} E^2,$$

откуда

$$C_F^{(0)} = \left(\frac{n^{(J)}(f) + 2}{3} \right) \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^{(J)}(f_i)}} \left(\frac{n^{(J)}(f_i) + 2}{3} \right).$$

При вычислении полевого поправочного фактора мы предполагали, что среда является макроскопически изотропной. В работах [2.34-1, 2.34-2] аналогичные рассуждения проводятся для анизотропных сред (кристаллы различной симметрии).

Следует, однако, ясно представлять себе, что в наменном здесь методе расчета реальные условия заменены сильно упрощенной моделью. В особенности следует принимать во внимание, что при расширении области применения простой теории Лоренца за пределы проблемы ориентации анизотропных молекул в электрических полях, при ее обобщении на произвольные взаимодействия между молекулами и полями возникают принципиальные трудности (см., например, [2.34-3]). Поэтому могут иметь место существенные расхождения между вычисленными и экспериментальными поправочными факторами. Тем не менее для грубых оценок полевых поправок модель оказывается полезной.

2.35. Прямое вычисление вероятностей переходов и эффективных сечений

В данной главе мы до сих пор вычисляли математическое ожидание поляризации среды или соответствующие восприимчивости. Эти результаты можно подставить в классические уравнения для изменений полей, выведенные в ч. I, § 1.3, и, таким образом, выполнить полуклассическое описание взаимодействия между электромагнитными полями и атомными системами. В итоге окажется возможным вычислить обмен энергией между полями различных частот и между полями и атомными системами. Таким способом можно будет определить, например, скорости преобразования и эффективные сечения.

Однако обмен энергией между электрическим полем и ансамблем атомных систем можно рассмотреть также и непосредственно, если воспользоваться теорией возмущений для оператора плотности атомных систем и вычислить изменение энергии ансамбля и соответствующие скорости преобразования, не прибегая при этом к определению математического ожидания поляризации.

Будем исходить из системы уравнений (2.24-3):

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{\tau_{\alpha\beta}} \right) \rho_{\alpha\beta}^{(j)} = [\mathbf{H}, \rho^{(j-1)}]_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta), \quad (2.35-1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\alpha}^{(j)} = [\mathbf{H}, \rho^{(j-1)}]_{\alpha\alpha},$$

где релаксационный член в уравнении для диагональных членов мы опустили; это допустимо при описании малых отклонений чисел заполнения от их равновесных значений. Предположим, что в невозмущенной системе все молекулы находятся в основном состоянии:

$$\rho_{\alpha\beta}^{(0)} = \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0}. \quad (2.35-2)$$

Пусть на систему действует возмущение в виде монохроматической волны с частотой ω и амплитудой \mathcal{E} , так что оператор возмущения имеет вид

$$\hat{\mathbf{H}} = -\mathbf{d} \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (2.35-3)$$

Скорость преобразования энергии для n -го порядка теории возмущения по ρ определяется вероятностью перехода в атомной системе в единицу времени:

$$\frac{\Delta W_{0 \rightarrow a}^{(n)}}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho_{\alpha\alpha}^{(n)}} \quad (2.35-4)$$

где усреднение по времени выполняется за период гармонического возмущения.

Первый порядок. В первом порядке теории возмущений получается для диагональных элементов

$$\rho_{\alpha\alpha}^{(1)} = 0, \quad (2.35-5)$$

тогда как из уравнения

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{\alpha 0} + \frac{1}{\tau_{\alpha 0}} \right) \rho_{\alpha 0}^{(1)} = \sum_{\gamma} (\mathbf{H}_{\alpha\gamma} \rho_{\gamma 0} - \rho_{\alpha\gamma} \mathbf{H}_{\gamma 0}) = -d_{\alpha 0} \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (2.35-6)$$

следует в качестве решения для недиагональных элементов в переходном состоянии:

$$\rho_{\alpha 0}^{(1)} = -\frac{d_{\alpha 0} \hat{E}}{2i\hbar} \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{i\omega + i\omega_{\alpha 0} + \frac{1}{\tau_{\alpha 0}}} + \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega + i\omega_{\alpha 0} + \frac{1}{\tau_{\alpha 0}}} \right\}. \quad (2.35-7)$$

Все остальные недиагональные элементы в первом порядке исчезают.

Второй порядок. Из уравнений (2.35-1) и (2.35-7) во втором порядке для диагональных элементов получаем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\alpha}^{(2)} = H_{\alpha 0} \rho_{0\alpha}^{(1)} - \rho_{\alpha 0}^{(1)} H_{0\alpha}, \quad (2.35-8)$$

откуда на основании уравнений (2.35-3) и (2.35-9) и при учете соотношения $\rho_{\alpha 0}^{(1)} = \rho_{0\alpha}^{(1)*}$ для вероятности перехода на уровень с $\alpha = 1$ следует

$$\frac{\Delta W_{0 \rightarrow 1}^{(2)}}{\Delta t} = \frac{|d_{10}|^2 \hat{E}^2}{2\hbar^2 \tau_{10}} \left\{ \frac{1}{(\omega - \omega_{10})^2 + \left(\frac{1}{\tau_{10}}\right)^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_{10})^2 + \left(\frac{1}{\tau_{10}}\right)^2} \right\}. \quad (2.35-9)$$

В окрестности резонанса для положительных частот отношение $\Delta W_{0 \rightarrow 1}^{(2)}/\Delta t$ может быть приближенно представлено лоренцевой функцией

$$\frac{\Delta W_{0 \rightarrow 1}^{(2)}}{\Delta t} = \frac{|d_{10}|^2 \hat{E}^2 \pi}{2\hbar^2} g_L(\omega - \omega_{10}). \quad (2.35-10)$$

Поглощаемая ансамблем невзаимодействующих молекул мощность, отнесенная к единице объема, есть

$$\frac{\Delta L}{\Delta V} = \gamma \hbar \omega_{10} \frac{\Delta W_{0 \rightarrow 1}^{(2)}}{\Delta t} = \frac{\gamma |d_{10}|^2 \pi \omega_{10}}{2\hbar} g_L(\omega - \omega_{10}) \hat{E}^2. \quad (2.35-11)$$

Это выражение мы можем сравнить с классической формулой для поглощенной в единице объема среды электромагнитной мощности при падении монохроматической

волны (ср. ч. I, разд. 1.31):

$$\frac{\Delta L}{\Delta V} = E \frac{\partial}{\partial t} P = -\frac{\hat{E}^2}{2} \omega \operatorname{Im} \chi^{(1)}(\omega). \quad (2.35-12)$$

Это сравнение, естественно, приводит к тому же выражению для $\operatorname{Im} \chi^{(1)}(\omega)$, которое было получено на основании вычисления математического ожидания поляризации в уравнении (2.33-9).

Соответствующее эффективное сечение одной частицы для j -фотонного процесса задается выражением

$$\sigma_{01}^{(j)} = \left(\frac{\Delta L}{\Delta V} \right) \frac{F}{L} \gamma^{-1} = \frac{\Delta W_{0 \rightarrow 1}^{(j)}}{\Delta t} \frac{2\hbar \omega_{10}}{n^{(j)} c \epsilon_0 |\hat{E}|^2}, \quad j = \frac{n}{2}, \quad (2.35-13)$$

где L/F — входная интенсивность, $\Delta L/\Delta V$ — мощность, поглощенная в единице объема при j -фотонном процессе.

Из уравнения (2.35-11) следует

$$\sigma_{01}^{(1)} = \frac{|d_{10}|^2 \pi \omega_{10}}{n^{(1)} c \epsilon_0 \hbar} g_L(\omega - \omega_{10}). \quad (2.35-14)$$

Аналогичным путем получают в высших порядках теории возмущений по оператору плотности атомных систем скорость преобразования для многофотонных процессов. В качестве примера рассмотрим двухфотонное поглощение.

Двухфотонное поглощение. Вероятность перехода в единицу времени на уровень $\alpha = 1$ при двухфотонном поглощении определяется формулой

$$\frac{\partial \rho_{11}^{(4)}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \frac{\hat{E}}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \left(\sum_{\nu} [-d_{1\nu} \rho_{\nu 1}^{(3)*} + \rho_{1\nu}^{(3)} d_{\nu 1}] \right). \quad (2.35-15)$$

Входящие в нее элементы матрицы плотности третьего порядка могут быть вычислены из уравнения

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{\nu 1} + \frac{1}{\tau_{\nu 1}} \right) \rho_{\nu 1}^{(3)} = \frac{\hat{E}}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \times \left(\sum_{\delta} [-d_{\nu\delta} \rho_{\delta 1}^{(2)} + \rho_{\nu\delta}^{(2)} d_{\delta 1}] \right). \quad (2.35-16)$$

В последнем уравнении нас интересуют только существенные члены, а именно члены, содержащие двухфотонный резонансный знаменатель, который входит только в $\rho_{10}^{(2)}$ и $\rho_{01}^{(2)}$. Поэтому (так как $\gamma \neq 1$ и $d_{11} = 0$)

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{\gamma 1} + \frac{1}{\tau_{\gamma 1}} \right) \rho_{\gamma 1}^{(3)} = -\frac{\hat{E}}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) d_{\gamma 0} \rho_{01}^{(2)}. \quad (2.35-17)$$

Вследствие усреднения по времени в уравнении (2.35-15) нас интересуют в (2.35-17) только компоненты $\rho_{\gamma 1}^{(3)}$ с частотами $\pm\omega$. Следовательно, мы должны прежде всего вычислить недиагональные элементы $\rho_{01}^{(2)}$, причем будем учитывать только члены с двухфотонным резонансным знаменателем вида $(\omega_{10} - 2\omega + (i/\tau_{10}))$. Из уравнения (2.35-1) следует

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_{10} + \frac{1}{\tau_{10}} \right) \rho_{10}^{(2)} = \frac{\hat{E}}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \times \\ \times \left(\sum_{\gamma} [-d_{0\gamma} \rho_{\gamma 1}^{(1)} + d_{\gamma 1} \rho_{0\gamma}^{(1)}] \right). \quad (2.35-18)$$

Подставляя $\rho_{0\gamma}^{(1)}$ из уравнения (2.35-7), получим отсюда (для $d_{00} = 0$) для интересующих нас компонент $\rho_{01}^{(2)}$ с частотами 2ω и -2ω :

$$\rho_{01}^{(2)} = \frac{\hat{E}^2}{4\hbar^2 \left(2\omega - \omega_{10} - \frac{i}{\tau_{10}} \right)} \sum_{\gamma} \frac{d_{\gamma 1} d_{0\gamma}}{\omega - \omega_{\gamma 0}} e^{i2\omega t} + \{MF\}. \quad (2.35-19)$$

Тогда для $\rho_{\gamma 1}^{(3)}$ на частотах ω и $-\omega$ имеем

$$\rho_{\gamma 1}^{(3)} = -\frac{\hat{E}^3}{8\hbar^3} \frac{1}{\left(2\omega - \omega_{10} - \frac{i}{\tau_{10}} \right)} \frac{d_{\gamma 0}}{(\omega_{\gamma 0} - \omega)} \times \\ \times \sum_{\delta} \frac{d_{\delta 1} d_{0\delta}}{\omega - \omega_{\delta 0}} e^{i\omega t} + \{MF\}, \quad (2.35-20)$$

причем сумма $\omega_{\gamma 1} + \omega$ была заменена разностью $\omega_{\gamma 0} - \omega$, что допустимо вблизи двухфотонного резонанса. С этим

выражением для $\rho_{\gamma 1}^{(3)}$ получим для вероятности перехода при двухфотонном поглощении, согласно уравнению (2.35-15),

$$\frac{\Delta W_{0 \rightarrow 1}^{(4)}}{\Delta t} = \frac{\partial \rho_{11}^{(4)}}{\partial t} = \frac{\hat{E}^4}{32\hbar^2} |\alpha_{01}(\omega, \omega)|^2 \pi g_L(\omega_{10} - 2\omega), \quad (2.35-21)$$

где

$$\alpha_{01}(\omega, \omega) = \frac{2}{\hbar} \sum_{\gamma} \frac{d_{0\gamma} d_{\gamma 1}}{\omega_{\gamma 0} - \omega}$$

и

$$g_L(\omega_{10} - 2\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\left(\frac{1}{\tau_{10}} \right)}{(\omega_{10} - 2\omega)^2 + \left(\frac{1}{\tau_{10}} \right)^2}.$$

Формулу

$$\frac{\Delta L}{\Delta V} = \frac{\Delta W_{0 \rightarrow 1}^{(4)}}{\Delta t} (2\hbar\omega) \gamma \quad (2.35-22)$$

для мощности, поглощаемой независимыми молекулами в единице объема, можно сравнить с соответствующим выражением, содержащим восприимчивости:

$$\frac{\Delta L}{\Delta V} = E \frac{\partial}{\partial t} P = -\frac{1}{2} \omega \hat{E}^4 \text{Im} \chi^{(3)} = -\frac{3}{8} \omega \hat{E}^4 \text{Im} \kappa^3. \quad (2.35-23)$$

Из сравнения следует

$$\text{Im} \kappa^{(3)} = -\frac{\gamma}{6\hbar} |\alpha_{01}|^2 \pi g_L(\omega_{10} - 2\omega). \quad (2.35-24)$$

Пользуясь уравнением (2.35-13), отсюда можно вычислить соответствующее эффективное сечение, для которого получается

$$\sigma^{(2)} = \frac{\pi \omega_{10}}{16\hbar n^{(1)} \epsilon_{0c}} g_L(\omega_{10} - 2\omega) |\alpha_{01}|^2 |\hat{E}|^2. \quad (2.35-25)$$

В отличие от эффективного сечения для однофотонного поглощения $\sigma^{(2)}$ сильно зависит от напряженности поля, интенсивности L/F падающего света или плотности потока фотонов J . Обозначим эффективное сечение, делен-

ное на плотность потока фотонов, через $\bar{\sigma}^{(2)}$. Тогда получим

$$\bar{\sigma}^{(2)} = \frac{\pi\omega_{10}^2}{8n^{(l)2}c^2\epsilon_0^2} g_L (\omega_{10} - 2\omega) |\alpha_{01}|^2. \quad (2.35-26)$$

В соответствии с этим $\bar{\sigma}^{(2)}$ является величиной, зависящей только от атомных свойств, но уже не зависящей от полевых параметров.

2.36. Вывод уравнений движения для математических ожиданий макроскопически измеримых величин

В разд. 2.32—2.34 для ансамбля молекул, которые в некотором приближении можно рассматривать как не взаимодействующие между собой, мы следующим образом вычисляли математические ожидания макроскопически измеримых величин (например, поляризации): вначале мы решали в качестве исходного уравнения уравнение движения для оператора плотности ρ одной молекулы; затем мы определяли по уравнению $\langle y \rangle = \text{Sp} \{ \rho y \}$ математическое ожидание оператора y , относящегося к одной молекуле (например, $y \equiv \mathbf{d}$); наконец, математические ожидания макроскопически измеримых величин определялись путем суммирования по всем молекулам в объеме, причем в случае одинакового вклада $\langle y \rangle$ всех молекул сумма заменялась произведением числа молекул в объеме на величину $\langle y \rangle$ (например, при этих предположениях для математического ожидания поляризации было получено выражение $P = \gamma \text{Sp} \{ \rho \mathbf{d} \}$, где γ — число молекул в единице объема).

Однако можно с самого начала в уравнениях движения для атомных систем элементы матрицы плотности и их производные по времени заменить определенными математическими ожиданиями, для которых тогда получатся дифференциальные уравнения. Во многих случаях такой метод обладает преимуществами по отношению к обычному пути. Они заключаются прежде всего в том, что эволюция атомных систем может быть описана математическими ожиданиями таких величин, как

поляризация и разности заселенностей и их производные по времени. В классических уравнениях движения эти величины характеризуют влияние атомных систем на электромагнитные поля; таким образом получается система дифференциальных уравнений для классических полевых величин и для математических ожиданий величин, относящихся к атомным системам. Эти дифференциальные уравнения должны решаться совместно. Описанный процесс отличается наглядностью в применениях и отчетливой аналогией с классическими уравнениями.

Стремясь выдвинуть на передний план принципиальный ход наших рассуждений, мы в дальнейшем снова сделаем упрощающие предположения относительно атомных систем и полей излучения; допустим, что все атомные системы одинаково ориентированы и могут описываться моделью двухуровневой системы. При последующем выводе общих соотношений для математических ожиданий поляризации и инверсии чисел заполнения мы дополнительно примем, что все переходные моменты и полевые величины имеют только одну отличную от нуля векторную компоненту. Тем самым мы вообще сможем перейти к однокомпонентному представлению и опустить соответствующие индексы. От соотношений, выведенных при этих упрощающих условиях, мы затем сможем без затруднений перейти к более общим случаям.

Исходным пунктом служит система уравнений (2.24-2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{kk} &= -\frac{1}{T} (\rho_{kk} - \rho_{kk}^e) + \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho]_{kk}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{kl} &= -i\omega_{kl} \rho_{kl} - \frac{1}{T} \rho_{kl} + \\ &+ \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho]_{kl}, \quad k, l = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.36-1)$$

Она описывает поведение во времени атомной системы, находящейся под воздействием диссипативной системы

(характеризуемой временами релаксации T и τ) и под влиянием электрического поля E (в дипольном приближении оно характеризуется оператором взаимодействия $\mathbf{H} = -dE$). Покажем теперь, как можно перейти от этих уравнений для матрицы плотности к дифференциальным уравнениям для математических ожиданий определенных операторов. Операторы могут не зависеть явно от времени, т. е. имеет место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle y \rangle = \text{Sp} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \right) y \right\}. \quad (2.36-2)$$

Подставим в это уравнение для $(\partial/\partial t)\rho$ производные по времени из уравнения (2.36-1), что приведет к результату

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle y \rangle = & \sum_k \left\{ -\frac{1}{T} (\rho_{kk} - \rho_{kk}^e) + \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho]_{kk} \right\} y_{kk} + \\ & + \sum_{l \neq k} \left\{ -i\omega_{kl} \rho_{kl} - \frac{1}{\tau} \rho_{kl} + \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho]_{kl} \right\} y_{kl}. \end{aligned} \quad (2.36-3)$$

При использовании соотношений

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho]_{kk} y_{kk} + \sum_{k \neq l} \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho]_{kl} y_{kl} = \\ = \text{Sp} \{ [\mathbf{H}, \rho] y \} = \text{Sp} \{ \rho [y, \mathbf{H}] \} = \langle [y, \mathbf{H}] \rangle, \\ \sum_{l, k} \hbar \omega_{kl} \rho_{kl} y_{lk} = \langle [y, \mathbf{H}] \rangle, \\ \mathbf{H} + \mathbf{H} = \mathbf{H} \end{aligned} \quad (2.36-4)$$

и равновесных соотношений в отсутствие возмущения

$$\sum_k \rho_{kk}^e y_{kk} = \text{Sp} \{ \rho y \}^e = \langle y \rangle^e$$

(справедливых, поскольку $\rho_{kl}^e = \rho_{kk}^e \delta_{kl}$) уравнение (2.36-3) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle y \rangle + \frac{1}{\tau} \langle y \rangle - \frac{1}{T} \langle y \rangle^e = \frac{1}{i\hbar} \langle [y, \mathbf{H}] \rangle + \\ + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T} \right) \sum_k \rho_{kk} y_{kk}. \end{aligned} \quad (2.36-5)$$

Для приложений особенно важны следующие частные случаи:

а) $y_{kl} = y_{kk} \delta_{kl}$ (выполняется, например, для матричных элементов оператора инверсии заселенностей);

б) $y_{kk} = 0$ (выполняется, например, для матричных элементов оператора переходного момента или поляризации). В случае «а» из уравнения (2.36-5) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle y \rangle + \frac{1}{T} (\langle y \rangle - \langle y \rangle^e) = \frac{1}{i\hbar} \langle [y, \mathbf{H}] \rangle, \quad (2.36-6)$$

а в случае «б» имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle y \rangle + \frac{1}{\tau} \langle y \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [y, \mathbf{H}] \rangle. \quad (2.36-7)$$

Для этого второго случая выведем, кроме того, путем дифференцирования уравнения (2.36-7) уравнение для $\partial^2/\partial t^2 \langle y \rangle$, которое нам понадобится при дальнейших применениях. Для упрощения допустим, что операторы y и \mathbf{H} коммутируют (что, например, выполняется для оператора переходного момента в дипольном приближении). Тогда в правой части уравнения появляется производная по времени от $\langle [y, \mathbf{H}] \rangle$. Коммутатор $[y, \mathbf{H}]$ представляет собой оператор, который не зависит явно от времени и диагональные элементы которого $[y, \mathbf{H}]_{kk}$ исчезают. Поэтому производная по времени от его математического ожидания в соответствии с уравнением (2.36-7) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle [y, \mathbf{H}] \rangle = -\frac{1}{\tau} \langle [y, \mathbf{H}] \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [[y, \mathbf{H}], \mathbf{H}] \rangle. \quad (2.36-8)$$

При учете этого соотношения дифференцирование по времени уравнения (2.36-7) приводит к

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau^2}\right) \langle \mathbf{y} \rangle = -\frac{1}{\hbar^2} \langle [[\mathbf{y}, \mathbf{H}], \mathbf{H}] \rangle. \quad (2.36-9)$$

2.361. Уравнения для инверсии заселенностей и поляризации при однофотонных процессах

Заданные уравнениями (2.36-6) и (2.36-9) общие соотношения мы теперь конкретизируем для математического ожидания инверсии чисел заполнения $\gamma_I \equiv \langle \gamma_I \rangle = \text{Sp} \{ \rho \gamma_I \} = \gamma (\rho_{11} - \rho_{00})$ между уровнями 1 и 0 и поляризации $P = \gamma \text{Sp} \{ \rho \mathbf{d} \}$ (γ — плотность числа частиц). Оператор взаимодействия между двухуровневой системой и излучением в дипольном приближении положим равным $\mathbf{H} = -\mathbf{d}E$.

Для инверсии чисел заполнения можем написать

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_I + \frac{\gamma_I - \gamma_I^e}{T} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\gamma_I, \mathbf{H}] \rangle, \quad (2.36-10)$$

где

$$[\gamma_I, \mathbf{H}] = \frac{2\gamma E}{\hbar\Omega} [\mathbf{d}, \mathbf{H}]; (\hbar\Omega = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0), \quad (2.36-11)$$

а

$$\frac{1}{\hbar} \langle [\mathbf{d}, \mathbf{H}] \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{d} \rangle + \frac{1}{\tau} \langle \mathbf{d} \rangle$$

согласно уравнению (2.36-7).

При учете неравенства

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{d} \rangle \gg \frac{1}{\tau} \langle \mathbf{d} \rangle$$

(так как $\Omega \gg 1/\tau$) из уравнения (2.36-7) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_I + \frac{\gamma_I - \gamma_I^e}{T} = \frac{2}{\hbar\Omega} E \frac{\partial}{\partial t} P, \quad (2.36-12)$$

или для более общих векторов поля и поляризации E и P .

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_I + \frac{\gamma_I - \gamma_I^e}{T} = \frac{2}{\hbar\Omega} E \cdot \frac{\partial}{\partial t} P. \quad (2.36-13)$$

Величина $E \cdot (\partial/\partial t) P$ представляет собой мощность, переданную от поля среде в единице объема (ср. ч. I, § 1.3); в соответствии с этим величина $(1/\hbar\Omega) E \cdot (\partial/\partial t) P$ есть число фотонов, энергия которых передается среде в единицу времени в единице объема; при поглощении (излучении) энергии $\hbar\Omega$ в единице объема инверсия заселенностей изменяется на +2 (−2); поэтому в пренебрежении релаксацией уравнение (2.36-13) представляет собой не что иное, как закон сохранения энергии для всей системы, состоящей из поля и среды.

Для математического ожидания переходного момента из уравнения (2.36-9) при использовании матричного элемента $\langle \mathcal{E}_1 | \mathbf{d} | \mathcal{E}_0 \rangle = d_{10}$ получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right) \langle \mathbf{d} \rangle = -\frac{2\Omega}{\hbar} |d_{10}|^2 (\rho_{11} - \rho_{00}) E. \quad (2.36-14)$$

Отсюда для поляризации (при учете неравенства $\Omega \gg 1/\tau$) имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2\partial}{\tau \partial t} + \Omega^2\right) P = -\frac{2\Omega}{\hbar} |d_{10}|^2 \gamma_I E \quad (2.36-15)$$

и соответственно для общих векторов поля и поляризации с компонентами E_b и P_a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2\right) P_a = -\frac{2\Omega}{\hbar} \gamma_I \sum_b (d_a)_{10} (d_b)_{01} E_b. \quad (2.36-16)$$

Если желательно освободиться от предположения об одинаковой ориентации атомных систем, то выражение в правой части уравнения (2.36-16) следует усреднить по всем возможным ориентациям.

Уравнения (2.36-13) и (2.36-16) содержат полное описание поведения исследуемых атомных систем. Вместе с классическим волновым уравнением для макроскопического электрического поля в свободном пространстве или с уравнениями для напряженности поля в резонаторе и в соответствии с теми или иными экспериментальными условиями получается система уравнений, позволяющая охватить взаимное влияние атомных систем и электрического поля. При этом, конечно, следует

иметь в виду, что при относительно плотном расположении атомных систем возникают различия между макроскопическими и локальными полями. Они могут быть учтены, как и в разд. 2.34, при простых условиях с помощью поправочных множителей: в уравнениях движения для атомной системы следует заменить напряженность поля выражением $[(\epsilon^{(L)} + 2)/3]E$, тогда как в уравнения движения для макроскопического поля следует подставить эффективную поляризацию $[(\epsilon^{(L)} + 2)/3]P^{(L)}$.

Подчеркнем особо структурную эквивалентность уравнения для математического ожидания поляризации при заданной фиксированной инверсии чисел заполнения (например, $\gamma_l = -\gamma$) и классического уравнения движения для поляризации, основанного на простой модели осциллятора (ср. ч. I, § 1 и 2).

2.362. Уравнения для инверсии заселенностей, поляризуемостей и поляризации при многофотонных процессах

Многофотонные процессы, например двухфотонное поглощение и вынужденное комбинационное рассеяние, также могут быть довольно просто исследованы с помощью изложенного метода, если только существенные свойства атомных систем описываются эффективной двухуровневой моделью. Вообще эта модель является хорошим приближением, если виртуальные промежуточные уровни достаточно удалены от резонанса (см. § 3.1). Взаимодействие этой эффективной двухуровневой системы с электромагнитными волнами должно теперь описываться модифицированным оператором взаимодействия, содержащим нелинейные члены по напряженности электрического поля. Если происходят только двухфотонные процессы, то оператор взаимодействия эффективной двухуровневой системы имеет следующую структуру:

$$\hat{H}^k = -\frac{1}{2} \alpha E^2, \quad (2.36-17)$$

где α — эффективный оператор перехода в двухуровневой системе, имеющий размерность поляризуемости. Из

уравнения (2.36-9) следует уравнение для математического ожидания оператора α :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2\right) \langle \alpha \rangle = -\frac{\Omega}{\hbar} |\alpha_{10}|^2 (\rho_{11} - \rho_{00}) E^2. \quad (2.36-18)$$

Для макроскопической поляризуемости $Q = \gamma \text{Sp} \{\rho \alpha\}$ имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2\right) Q = -\frac{\Omega}{\hbar} |\alpha_{10}|^2 \gamma_l E^2 \quad (2.36-19)$$

или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2\right) Q_{ij} = -\frac{\Omega}{\hbar} \gamma_l \sum_{k, l} (\alpha_{ij})_{12} (\alpha_{kl})_{21} E_k E_l.$$

Если существуют различия в ориентациях молекул, то в правой части следует снова выполнить усреднение по ориентациям. Поляризация определится выражением $P = QE$. Соответствующее уравнение для математического ожидания инверсии заселенностей имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_l + \frac{1}{T} (\gamma_l - \gamma_l^e) = \frac{1}{\hbar \Omega} \sum_{l, l'} E_l E_{l'} \frac{\partial}{\partial t} Q_{ll'}. \quad (2.36-20)$$

Эта система уравнений позволяет описать временные процессы при взаимодействии эффективной двухуровневой системы с электромагнитным излучением, когда это взаимодействие обусловлено двухфотонными процессами. При одновременном анализе уравнений движения для электромагнитного поля и для атомных систем следует принимать во внимание изложенные выше соображения, относящиеся к однофотонным процессам.

Мы постараемся произвести сравнение с классическими уравнениями движения также и для двухфотонных процессов и перейдем для этой цели к случаю колеблющейся молекулы, активной в комбинационном рассеянии. Для упрощения допустим, что все атомные системы находятся в основном состоянии и что в ходе процесса не происходит существенных изменений заселенностей, т. е. $\gamma_l = -\gamma$. Считая среду макроскопически изотропной и ограничиваясь одним направлением поля-

ризации, мы можем исходить из уравнения движения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2\right) Q = \frac{\Omega}{\hbar} \gamma |\overline{\alpha_{10}}|^0 E^2, \quad (2.36-21)$$

в правой части которого выполнено усреднение по ориентациям. В классической теории (ср. ч. I, § 2.4) мы получили для колебаний поляризующейся молекулы следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Gamma \frac{\partial}{\partial t} + \omega_M^2\right) x = \frac{\alpha_1}{2M} E^2, \quad (2.36-22)$$

где Γ — константа затухания, M — приведенная масса, α_1 — производная поляризуемости по колебательной координате, ω_M — круговая частота колебания молекулы. Вклад в поляризацию всех молекул, находящихся в единице объема, определяется выражением

$$P = (\gamma \alpha_1 x) E. \quad (2.36-23)$$

Введем теперь в рассмотрение макроскопическую поляризуемость (аналогично тому, как это было сделано выше) и примем во внимание, что для осциллятора справедливы соотношения

$$\omega_M = \Omega, \quad |\overline{\alpha_{10}}|^0 = \frac{\hbar}{2\Omega M} |\alpha_1^2|^0 \quad \text{и} \quad \Gamma = \frac{2}{\tau}.$$

Тогда уравнение (2.36-22) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2\right) Q_{\text{класс}} = \frac{\Omega}{\hbar} \gamma |\overline{\alpha_{10}}|^0 E^2. \quad (2.36-24)$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению (2.36-21). В заключение отметим, что описанный метод применим к двухуровневой системе, участвующей как в одно-, так и в двухфотонных процессах. При этом особый интерес представляет одновременное появление инфракрасной и комбинационной активности одного и того же перехода, для которого мы здесь приводим основополагающие уравнения.

На основании оператора взаимодействия

$$\hat{H} = - \sum_i^k \mathbf{d}_i E_i - \frac{1}{2} \alpha_{ij} E_i E_j \quad (2.36-25)$$

получается следующая система уравнений движения:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2\right) P'_i = \\ & = - \frac{\Omega}{\hbar} \gamma_I \left\{ \sum_I 2 (d_i)_{01} (d_j)_{10} E_j + \sum_{I, k} (d_i)_{01} (\alpha_{jk})_{10} E_j E_k \right\}, \\ & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2\right) Q_{ij} = \\ & = - \frac{\Omega}{\hbar} \gamma_I \left\{ \sum_k 2 (\alpha_{ij})_{01} (d_k)_{10} E_k + \sum_{k, l} (\alpha_{ij})_{01} (\alpha_{kl})_{10} E_k E_l \right\}, \end{aligned} \quad (2.36-26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \gamma_I + \frac{1}{T} (\gamma_I - \gamma_I^e) = \\ & = \frac{2}{\hbar \Omega} \left\{ \sum_i E_i \frac{\partial}{\partial t} P'_i + \frac{1}{2} \sum_{i, l} E_i E_l \frac{\partial}{\partial t} Q_{il} \right\}. \end{aligned}$$

$$P_i = P'_i + \sum_j Q_{ij} E_j.$$

Эта система уравнений может служить отправным пунктом для трактовки поляритонных процессов (ср. § 3.15 и [2.36-1]).

Глава 3

КАЧЕСТВЕННОЕ И КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ТИПИЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В гл. 1 и 2 были представлены общие методы описания электромагнитного поля излучения и его взаимодействия с веществом. В § 3.1 мы применим эти методы к различным многофотонным процессам, таким, как многофотонное поглощение (разд. 3.13), генерация суммарных и разностных частот (разд. 3.14), параметрическое усиление (разд. 3.15) и вынужденное комбинационное рассеяние (разд. 3.16). На языке классического и полуклассического описания эти процессы называются нелинейными (ср. § 2.3). Важными характеристиками этих процессов являются скорости переходов между состояниями атомных систем под влиянием излучения, скорости генерации фотонов, эффективные сечения, ширины линий и дисперсионные кривые. Все эти свойства могут быть непосредственно сопоставлены с экспериментальными данными. При этом возникает задача установления функциональной зависимости указанных величин от параметров взаимодействия, от констант атомной и электромагнитной систем и от заданных условий эксперимента. С другой стороны, должны быть сделаны количественные оценки порядков величин. На этой основе в дальнейшем можно будет провести анализ характерных для тех или иных процессов пространственно-временных явлений, таких, например, как усиление или поглощение электромагнитного излучения, инверсия населенностей атомных состояний и др. В § 3.1 остаются вне рассмотрения особые проблемы, связанные с нестационарными процессами и взаимным влиянием свойств когерентности и нелинейных процессов. Они трактуются с единой точки зрения в § 3.2 и 3.3. При этом в зависимости от поставленной задачи и от требуемой примени-

мости результатов используется полуклассическая или полностью квантовая методика рассмотрения. Исходя из одной и той же концепции, мы изучим сначала некоторые однофотонные процессы, а затем многофотонные процессы. В разд. 3.11 рассматриваются такие однофотонные процессы, при которых не возникает макроскопически прослеживаемое изменение свойств вещества под влиянием излучения (в применении к связи между поляризацией и напряженностью поля здесь речь идет о линейных процессах). Полученные при этом результаты можно будет как по методике, так и со многих других точек зрения перенести на многофотонные процессы, что облегчит их изучение, в том числе количественное. Затем мы обсудим уже такие однофотонные процессы, при которых под влиянием излучения существенным образом изменяются свойства вещества (например, происходит инверсия населенностей в атомных системах), вследствие чего возникает нелинейная зависимость поляризации от напряженности поля. Это имеет место, например, для процессов в лазерах (разд. 3.12) и в спектроскопии насыщения.

§ 3.1. ОСНОВНЫЕ ЯВЛЕНИЯ — ЛАЗЕРНЫЕ ПРОЦЕССЫ, МНОГОФОТОННОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПРОЦЕССЫ РАССЕЯНИЯ

3.11. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОФОТОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

На последовательной квантовой основе рассматриваются скорости изменения полных вероятностей переходов для вынужденного и спонтанного излучения и поглощения при взаимодействии с излучением, эффекты ширины линий и времена релаксации. Соответствующие соотношения сравниваются с полуклассическими результатами разд. 2.3 и с экспериментальными данными.

3.11.1. Скорости изменения полных вероятностей переходов

Пусть воздействие квантованного поля излучения на отдельную атомную систему, скажем, на атом или на простую молекулу, описывается оператором взаимодей-

ствия

$$\mathbf{H}^W = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.11-1)$$

В случае излучения начальное и конечное состояние следует представить в виде

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_a\rangle &= |\mathcal{E}_{A,a}\rangle |n_0, \dots, n_\mu, \dots\rangle, \\ |\mathcal{E}_e\rangle &= |\mathcal{E}_{A,e}\rangle |n_0, \dots, n_{\mu+1}, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (3.11-2)$$

Пусть в μ -й моде (частота ω_μ , единичный вектор поляризации $e_{\mu\cdot}$) в результате атомного перехода из состояния $|\mathcal{E}_{A,a}\rangle$ в состояние $|\mathcal{E}_{A,e}\rangle$ излучается один фотон. Согласно разд. 1.22, только слагаемое \mathbf{E}_μ^+ из \mathbf{E} может вносить вклад в матричный элемент оператора \mathbf{H} ; имеем

$$|\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H}^W | \mathcal{E}_a \rangle|^2 = |d_{ea} e_{\mu\cdot}|^2 \frac{\hbar \omega_\mu}{2\epsilon_0 V} n_\mu + |d_{ea} e_{\mu\cdot}|^2 \frac{\hbar \omega_\mu}{2\epsilon_0 V}. \quad (3.11-3)$$

Второе слагаемое представляет *спонтанное излучение*, которое только одно и вносило бы вклад в испускание, если бы мы исходили из вакуумного состояния $|0, 0, 0 \dots\rangle$. Энергия конечного состояния есть $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_a + \hbar \omega_\mu - (\mathcal{E}_{A,a} - \mathcal{E}_{A,e})$. Поскольку, согласно разд. В2.26, исчезающие вероятности переходов могут возникать только при $\mathcal{E}_e \approx \mathcal{E}_a$, то для энергии излученного фотона получаем

$$\hbar \omega_\mu \approx \mathcal{E}_{A,a} - \mathcal{E}_{A,e} \equiv \hbar \omega_{ae}. \quad (3.11-4)$$

Для получения полной вероятности перехода (ср. разд. В2.26) следует выполнить суммирование по всем конечным состояниям, т. е. по всем модам (с различными волновыми векторами и различными векторами поляризации), для которых соблюдается соотношение (3.11-4). При использовании уравнения (В2.26-10) для скорости изменения полной вероятности следует соответственно для σ подставить плотность мод на единицу энергии (см. разд. 1.21). Окончательно получим

$$\frac{dW^{\text{сп. изл}}}{dt} = \frac{1}{3\pi c^3 \hbar \epsilon_0} \omega_{ae}^3 |d_{ae}|^2 = A_{ae}. \quad (3.11-5)$$

Величина $|d_{ae}|^2$ появляется в результате усреднения по ориентациям:

$$|d_{ae}|^2 = 3 |d_{ae \cdot e_{\mu\cdot}}|^2,$$

причем можно представить себе, что либо при фиксированном $e_{\mu\cdot}$ производится усреднение по всем положениям d_{ae} , либо можно считать d_{ae} фиксированным и усреднять для (неполяризованного) излучения по всем $e_{\mu\cdot}$. A_{ae} есть коэффициент Эйнштейна для перехода при спонтанном излучении.

Первое слагаемое в уравнении (3.11-3) при $n_\mu > 0$ представляет *вынужденное излучение*. Мы вначале предположили, что падающее излучение (следовательно, первоначально существующее излучение) содержит только одну моду с n_μ фотонами; это не соответствует реальным условиям, и нас интересует суммарная вероятность вынужденного излучения, для которого моды падающего излучения удовлетворяют уравнению (3.11-4). Обозначим через $\bar{\sigma}(\mathcal{E}_\mu)$ соответствующее число состояний на единицу энергии. Тогда уравнение (В2.26-10) приводит к результату

$$\frac{dW^{\text{вын. изл}}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{6\epsilon_0} |d_{ae}|^2 \left\{ \frac{\hbar \omega_\mu n_\mu}{V} \bar{\sigma}(\mathcal{E}_\mu) \right\}.$$

Поскольку выражение $\hbar \omega_\mu n_\mu V^{-1}$ является пространственной плотностью энергии на одну моду, то выражение в фигурных скобках представляет собой произведение пространственной плотности энергии в одной моде и числа мод в единичном интервале энергии. Если обозначить через $\sigma(\omega)$ пространственную плотность энергии падающего излучения на единицу круговой частоты, то окончательно можем записать

$$\frac{dW^{\text{вын. изл}}}{dt} = \frac{\pi}{3\hbar^2 \epsilon_0} |d_{ae}|^2 \sigma(\omega_{ae}) = B_{ae} \sigma(\omega_{ae}). \quad (3.11-6)$$

B_{ae} есть коэффициент Эйнштейна для вынужденного излучения (который здесь отнесен к единице круговой частоты (!); при отнесении к частоте следует писать

$B_{ae}/2\pi$). Аналогично вынужденному излучению следует рассмотреть поглощение, для которого имеем

$$\frac{dW_{\text{погл}}}{dt} = \frac{\pi}{3\hbar^2\epsilon_0} |d_{ae}|^2 \rho \sigma(\omega_{ae}). \quad (3.11-7)$$

A_{ae} и B_{ae} зависят от универсальных констант, а также от параметров атомной системы (частота перехода, переходный момент). Приведем типичные порядки величин (см. § П2):

- а) частота перехода ω_{ae} в с^{-1} :
- 10^{16} для электронных переходов в атомах, молекулах и твердых телах;
 - 10^{14} для колебательных переходов в молекулах и оптических колебаний решетки в твердых телах;
 - 10^{12} для вращательных переходов в молекулах;
- б) переходные моменты $|d_{ae}|$ в $\text{А}\cdot\text{см}$:
- 10^{-29} для («сильных») электронных переходов в атомах и молекулах;
 - 10^{-31} для («сильных») колебательных переходов в молекулах.

Заметим, что для сильных переходов в атомах из указанных чисел следует оценка $A_{ae} \simeq 10^8 \text{ с}^{-1}$; в общем случае соблюдается неравенство $A_{ae} \ll \omega_{ae}$.

3.112. Механизмы уширения линий

Вместо испускания и поглощения строго монохроматической линии с частотой $(\mathcal{E}_{A,a} - \mathcal{E}_{A,e})/\hbar$ экспериментально наблюдается испускание и поглощение излучения в некотором интервале частот с отличной от нуля шириной. Ширина линии, вообще говоря, зависит от условий эксперимента, например от давления и температуры исследуемого вещества, а также от его специфической материальной структуры. Основное значение имеет «естественная ширина линии», к которой мы обратимся в первую очередь.

Проблемы, связанные с естественной шириной линии, были исследованы на основании последовательной кван-

товой теории Вигнера и Вайскопфа. Мы дадим здесь набросок главных положений этой теории (подробное изложение читатель найдет в [3.11-1]). Исходным является начальное состояние электромагнитного поля излучения с фотонами в вакууме, а атомной системой служит фиксированный в пространстве и свободный от других влияний отдельный атом, находящийся в первом возбужденном состоянии. В соответствии с изложенными выше соображениями о спонтанном излучении будем считать, что излучается один фотон с частотой ω_{μ} , которая, согласно уравнению (3.11-4), принимает значение, близкое к частоте перехода ω_{10} в атоме. Конечным состоянием является

$$|\mathcal{E}_e\rangle = |\mathcal{E}_{A,0}\rangle |0, \dots, 0, 1_{\mu}, 0, \dots\rangle \equiv |\mathcal{E}_{\mu}\rangle.$$

Функция распределения по частотам ω_{μ} определяется из вероятности конечного состояния в момент времени t , т. е. величиной $|\langle \mathcal{E}_{\mu} | \psi(t) \rangle_D|^2 \equiv |c_{\mu}(t)|^2$. Имея в виду связь с эмпирическими данными, будем интересоваться в особенности результатами для больших t , а именно для $t \gg A_{10}^{-1}$. Поэтому теория возмущений, зависящих от времени (см. разд. В2.21), неприменима для решения поставленной проблемы. Согласно уравнению (В2.21-6), зависимость от времени функции состояния $|\psi(t)\rangle_D$ может быть точно определена из системы уравнений

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_j(t) = \sum_k \langle \mathcal{E}_j | \hat{H} | \mathcal{E}_k \rangle e^{i\omega_{jk}t} c_k(t) \quad (\text{для всех } j), \quad (3.11-9)$$

в которой $\mathcal{E}_j | \mathcal{E}_j \rangle$ являются собственными значениями и собственными векторами свободной системы, а $c_k(t) = \langle \mathcal{E}_k | \psi(t) \rangle_D$ являются коэффициентами разложения функции состояния. Взаимодействие включается в момент времени $t=0$, в который выполняются соотношения

$$|\psi(0)\rangle_D = |\mathcal{E}_a\rangle, \quad |c_a(t=0)|^2 = |\langle \mathcal{E}_a | \psi(t=0) \rangle_D|^2 = 1. \quad (3.11-10)$$

Заданная в (3.11-9) система уравнений может быть заменена приближенно следующей более простой системой:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} c_a(t) &= \sum_{\mu} \langle \mathcal{E}_a | \mathbf{H} | \mathcal{E}_{\mu} \rangle e^{i\omega_{a\mu}t} c_{\mu}(t), \\ i\hbar \frac{d}{dt} c_{\mu}(t) &= \langle \mathcal{E}_a | \mathbf{H} | \mathcal{E}_{\mu} \rangle^* e^{-i\omega_{a\mu}t} c_a(t). \end{aligned} \quad (3.11-11)$$

Это приближение оправдано, так как для рассматриваемой физической модели, хотя изменение во времени коэффициента c_a определяется переходами из состояния $|\mathcal{E}_a\rangle$ во все состояния $|\mathcal{E}_{\mu}\rangle$, изменение во времени коэффициента c_{μ} с достаточной точностью задается соотношением между $|\mathcal{E}_{\mu}\rangle$ и $|\mathcal{E}_a\rangle$. Численное решение этой системы дифференциальных уравнений осуществляется с помощью преобразования Лапласа. Важным результатом является решение

$$|c_{\mu}(t)|^2 = \frac{\hbar^{-2} |\langle \mathcal{E}_{\mu} | \mathbf{H} | \mathcal{E}_a \rangle|^2}{(\omega_{\mu} - \omega_{10} - \omega_{LR})^2 + \left(\frac{A_{10}}{2}\right)^2}, \quad (3.11-12)$$

справедливое для больших значений времени $t \gg A_{10}^{-1}$. Это выражение от t не зависит. Поскольку для так называемого сдвига Лэмба — Резерфорда ω_{LR} выполняется неравенство $\omega_{LR} \ll \omega_{10}$, то можно сказать, что значения ω_{μ} для $t \gg A_{10}^{-1}$ удовлетворяют распределению Лоренца вокруг средней частоты ω_{10} с полушириной $\Delta\omega = A_{10}$ (фиг. 26).

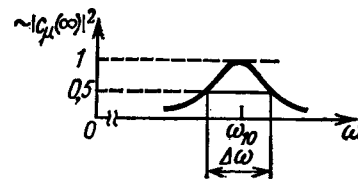
Этот результат следует интерпретировать как переход от уширенного уровня (средняя энергия $\mathcal{E}_{A,1}$, распределение Лоренца с энергетической полушириной $\hbar A_{10}$) к основному уровню с фиксированной энергией $\mathcal{E}_{A,0}$. Для любого уровня $|\mathcal{E}_{A,a}\rangle$ получается энергетическая полуширина

$$\Delta\mathcal{E}_a = \hbar \sum_{e < a} A_{ae}. \quad (3.11-13)$$

Ширина линии перехода получается как сумма обеих отдельных шириин:

$$\Delta\mathcal{E}_{ae} = \Delta\mathcal{E}_a + \Delta\mathcal{E}_e. \quad (3.11-14)$$

Линия имеет лоренцеву форму, возникающую в результате наложения лоренцевых распределений обоих отдельных уровней. Сопоставим теперь метод вычисления временного изменения вероятности перехода для спонтанного излучения [см. уравнение (3.11-5)] с результатом для распределения излученных фотонов [см. (3.11-12)]. Возникает мысль подразделить полную вероятность перехода для всей линии (для которой все излу-



Фиг. 26. Распределение по частотам при спонтанной эмиссии.

ченные частоты предполагаются близкими к ω_{10}) на скорости переходов, отнесенные к единице частоты $(dW^{\text{сп. изл.}}/dt)_{\omega}$, согласно уравнению

$$\frac{dW^{\text{сп. изл.}}}{dt} = \int_{\text{линия}} d\omega \left(\frac{dW^{\text{сп. изл.}}}{dt} \right)_{\omega}, \quad (3.11-15)$$

где величина $(dW^{\text{сп. изл.}}/dt)_{\omega}$ зависит от частоты ω и пропорциональна числу фотонов, излученных в интервале $\omega \pm \frac{1}{2}d\omega$. Это число можно определить из уравнения (3.11-12). Если ввести нормированную функцию формы линии согласно уравнению

$$\int_{\text{линия}} d\omega g_{ae}^{(\text{сп})}(\omega - \omega_{ae}) = 1, \quad (3.11-16)$$

то получится

$$\left(\frac{dW^{\text{сп. изл.}}}{dt} \right)_{\omega} = \frac{1}{3\pi c^3 \hbar \epsilon_0} \omega_{ae}^3 |d_{ae}|^2 g_{ae}^{(\text{сп})}(\omega - \omega_{ae}). \quad (3.11-17)$$

Согласно пояснениям к уравнению (3.11-14), функция g должна иметь форму кривой Лоренца.

Помимо обсужденной здесь естественной ширины линии мы рассмотрим ниже другие механизмы уширения

Таблица 3. Механизмы уширения линий

Механизм уширения линий, излучаемых осцилляторами	Тип уширения линии	Формула для $\Delta\omega_{ea}$	Оценка отношения $\Delta\omega_{ea}/\omega_{ea}$
Затухание излучения изолированных атомов и молекул	Однородное	$\Delta\omega_{ea} = \frac{1}{\hbar}(\Delta\mathcal{E}_a + \Delta\mathcal{E}_e)$	$10^{-7} \dots 10^{-12}$
Ударное уширение в газах	Однородное		$\approx 10^{-10}$ p в мтор для $p \leq 1$ тор
Уширение интенсивности в газах	Однородное	$\Delta\omega_{ea} \approx \frac{1}{\hbar} d_{ae} E$	
Конечное время взаимодействия в газах	Однородное	$\Delta\omega_{ea} \approx \frac{v}{l}$	
Доплеровское уширение в газах	Неоднородное	$\Delta\omega_{ea} = \frac{u}{c} \omega_{ea}$	$\approx 10^{-6}$ при $\mathcal{T} = 300\text{K}$
Неоднородные поля и колебания в твердых телах	Неоднородное (однородное)		$\geq 10^{-5}$
Неоднородности в неупорядоченных средах (стекло, жидкость)	Неоднородное		$\geq 10^{-3}$

линий (табл. 3). Приведем теперь одно соображение, которое для всех механизмов позволит дать простую формальную трактовку эффектов уширения линий. Будем исходить из уравнения

$$\frac{\Delta w_{a \rightarrow e}(t)}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H} | \mathcal{E}_a \rangle|^2 \delta(\mathcal{E}_e - \mathcal{E}_a), \quad (\text{B2.26-6})$$

вывод которого был подробно изложен в разд. В.2.26. Появление дельта-функции обуславливает неисчезающий

вклад только в том случае, когда предполагается, что уровни имеют фиксированные значения энергии. Согласно предшествующим выкладкам, именно этот случай не реализуется. Если принять это во внимание, то дельта-функцию следует заменить соответствующей весовой функцией $\tilde{g}(\mathcal{E})$. Тогда для скорости перехода, отнесенной к единичному интервалу энергий, получим

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_z = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \mathcal{E}_e | \mathbf{H} | \mathcal{E}_a \rangle|^2 \tilde{g}_{ae}(\mathcal{E}) = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{dW}{dt}\right)_\omega. \quad (3.11-18)$$

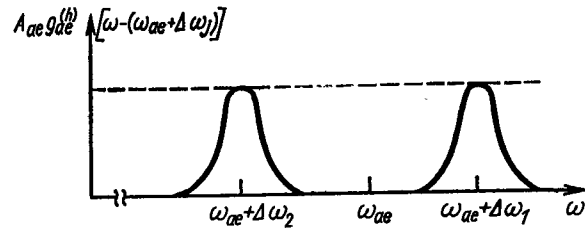
(В случае спонтанного излучения $\tilde{g}_{ae} = (V\omega_{ae}^2\pi^{-2}c^{-3}\hbar^{-2}) \times g_{ae}^{\text{сп}}(\omega - \omega_{ae})$, где первый множитель в правой части представляет главным образом моды, находящиеся в объеме V и отнесенные к единице частоты и к частоте перехода.) Независимо от того, используем ли мы при исследовании многофотонных процессов «основной оператор взаимодействия» — $\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}$. [ср. уравнение (2.22-5)] или оператор взаимодействия, «специфический для данного процесса» [ср. уравнение (2.22-11)], исходные соотношения получаются в форме (B2.26-6); следовательно, описанный метод может применяться для объяснения эффектов уширения линий не только при однофотонных, но также и при многофотонных процессах. Это облегчает рассмотрение важных эффектов в § 3 и делает более понятным сравнение с некоторыми результатами, полученными в § 2.3 на полуклассической основе.

До сих пор мы проводили рассуждения для одной простой атомной системы с фиксированным положением в пространстве. Теперь перейдем к ансамблю отдельных излучающих систем. Примером может служить состоящий из атомов газ. Следует различать *однородное* и *неоднородное* уширение линий. Первое имеет место, если с точки зрения наблюдателя можно считать, что все отдельные системы излучают при одинаковых условиях, тогда как второе соответствует неодинаковым условиям. Однородное уширение существует в нашей модели, если все атомы сохраняют свои фиксированные положения в пространстве, а их взаимное влияние или взаимодей-

ствие с другими системами можно исключить. Если ν_a есть число частиц газа на уровне a , то число атомов, совершающих переход из верхнего состояния в нижнее при спонтанной эмиссии одного фотона в интервале $d\omega$ в единице объема, в единицу времени и на единицу круговой частоты, определяется формулой

$$\left(\frac{d}{dt} \nu_{a \rightarrow e}\right)_{\omega} = \nu_a \left(\frac{dW^{\text{сп. нэл}}}{dt}\right)_{\omega} = \nu_a A_{ae} g_{ae}^{(\text{одн})} (\omega - \omega_{ae}), \quad (3.11-19)$$

где $g_{ae}^{(\text{одн})}$ является лоренцевым распределением (однородное уширение), характеризуемым уравнением



Фиг. 27. Распределение излучения двух частиц с различными скоростями.

(3.1-14). Примем теперь во внимание, что в действительности частицы газа движутся. Если частица 1 имеет компоненту скорости в направлении к наблюдателю, то вследствие эффекта Доплера излучение будет обладать распределением по частотам вида $g_{ae}^{(\text{одн})}[\omega - (\omega_{ae} + \Delta\omega_1)]$. Если частица 2 при своем движении удаляется от наблюдателя, то распределение имеет вид $g_{ae}^{(\text{одн})}[\omega - (\omega_{ae} + \Delta\omega_2)]$, причем $\Delta\omega_1 > 0$ и $\Delta\omega_2 < 0$ (фиг. 27). Производная $(d/dt \nu_{a \rightarrow e})_{\omega}$ определяется из суперпозиции вкладов распределений отдельных частиц в определенном интервале частот $\omega \pm 1/2 d\omega$. При тепловом движении частиц газа имеем

$$\left(\frac{d}{dt} \nu_{a \rightarrow e}\right)_{\omega} = \nu_a A_{ae} g_{ae}^{(\text{неодн})} (\omega - \omega_{ae}), \quad (3.11-20)$$

где $g_{ae}^{(\text{неодн})}$ характеризует неоднородное уширение. При описанном нами доплеровском распределении возникает

гауссова форма с полушириной $\omega_{ae} u/c$, где u — средняя скорость (усреднение выполняется по компонентам скорости относительно наблюдателя); из статистической физики известно, что $u = \sqrt{8 \ln 2 kT/M}$, где M — масса частицы газа. Обе функции распределения $g_{ae}^{(\text{одн})}$ и $g_{ae}^{(\text{неодн})}$, определяемые уравнениями (3.11-19) и (3.11-20), должны удовлетворять условию нормировки (3.11-16). При выводе уравнения (3.11-20) предполагалось, что в неоднородных условиях отдельные излучатели изменяют свою частоту согласно выражению $\omega_{ae} + \Delta\omega$; строго говоря, передний множитель A_{ae} также изменяется, так что A_{ae} в уравнении (3.11-20) следует рассматривать как некоторое эффективное значение. Однако оно мало отличается в общем случае от соответствующего значения при однородных условиях. Наложение однородного и неоднородного механизмов уширения линий рассмотрено в п. 3.114.

Затухание излучения и доплеровское уширение являются прототипами однородного и неоднородного уширений. Полученные здесь для них выводы соответственно применимы и к другим механизмам уширения; в табл. 3 содержатся качественные и количественные данные для различных важных случаев. Их следует сравнить с численными значениями, входящими в уравнение (B1.11-2). Большинство указанных величин вытекает из приведенных выше выводов, но следует дать дополнительные разъяснения: E является напряженностью внешнего электрического поля, действующего в месте нахождения атомной системы (для этого механизма при электронных переходах относительное уширение линий по порядку величины равно отношению $E/E_{\text{атом}}$; это отношение у нас уже встречалось при оценках в разд. 2.11); v есть скорость, с которой атомная система движется в поле луча диаметром l .

После проведенного обсуждения механизмов, лежащих в основе эффектов уширения линий, вернемся к исследованию вынужденных однофотонных процессов (вынужденное излучение и поглощение). Мы располагаем соотношениями для скоростей изменений полных вероятностей переходов при спонтанном и вынужденном излу-

чений и поглощении. Они заданы уравнениями (3.11-5) — (3.11-7), и если известен один из двух коэффициентов Эйнштейна, то они могут быть полностью выведены из условий равновесия для атомных систем, взаимодействующих с вакуумным излучением. Эти условия равновесия должны выполняться для каждого интервала частот $(\omega \pm 1/2 d\omega)$ в отдельности. Поэтому, применяя уравнение (3.11-17), отвлекаясь от специфического характера входящей в него функции формы линии для затухания излучения и вводя g -функцию, представляющую все действующие совместно влияющие на линию эффекты, получаем соотношения

$$\left(\frac{dW^{\text{вын. изл}}}{dt}\right)_{\omega} = B_{ae}\sigma(\omega)g_{ae}(\omega - \omega_{ae}) = \frac{B_{ae}}{c}S_{\omega}(\omega)g_{ae}(\omega - \omega_{ae}), \quad (3.11-21)$$

$$\left(\frac{dW^{\text{погл}}}{dt}\right)_{\omega} = B_{ae}\frac{g_a}{g_e}\sigma(\omega)g_{ae}(\omega - \omega_{ae}) = \frac{B_{ae}}{c}\frac{g_a}{g_e}S_{\omega}(\omega)g_{ae}(\omega - \omega_{ae}), \quad (3.11-22)$$

$$\left(\frac{dW^{\text{сп. изл}}}{dt}\right)_{\omega} = A_{ae}g_{ae}(\omega - \omega_{ae}). \quad (3.11-23)$$

Соответствующие этим g -функциям ширины линий принято называть флуоресцентными ширинами линий. Факторы g_a и g_e являются весовыми факторами верхнего и нижнего уровней. Формулировка, содержащая плотность энергии $\sigma(\omega)$, связана с интенсивностью; $S_{\omega}(\omega)$ есть отнесенная к единице круговой частоты интенсивность облучения.

3.113. Взаимодействии с диссипативными системами

На последовательной квантовой основе могут быть определены простым путем времена релаксации для модели, в которой двухуровневая атомная система взаимодействует с диссипативной системой. Это понятие включает в качестве частного случая также и поле излучения. Назовем главные свойства рассматриваемой модели. Диссипативная система образует квазиконтинуум (с

определенной плотностью мод), который характеризуется операторами рождения и уничтожения со свойствами операторов Бозе. Связь этой системы с атомной системой задается некоторым билинейным выражением, зависящим от типа дипольного взаимодействия. Гамильтониан такой системы определяется уравнением (B2.27-41). Обозначим верхнее и нижнее состояния соответственно $|\mathcal{E}_{A,1}\rangle$ и $|\mathcal{E}_{A,0}\rangle$. При фиксированном положении нуля отсчета энергии гамильтониан атомной системы имеет вид

$$H_A = \hbar\omega_{10}\mathbf{b}^+\mathbf{b}, \quad \text{где } \hbar\omega_{10} = \mathcal{E}_{A,1} - \mathcal{E}_{A,0}. \quad (3.11-24)$$

Операторы переворачивания \mathbf{b}^+ , \mathbf{b} связаны с введенными в п. B2.25 операторами \mathbf{b}_i (в нашем случае \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_0), относящимися к отдельным атомным уровням энергии, следующими соотношениями:

$$\mathbf{b}^+ \equiv \mathbf{b}_1^+\mathbf{b}_0, \quad \mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_0^+\mathbf{b}_1.$$

Из операторов \mathbf{b}^+ , \mathbf{b} можно сформировать и другие атомные операторы, например оператор дипольного момента

$$\mathbf{d} = d_{10}\mathbf{b}^+ + d_{01}\mathbf{b}. \quad (3.11-25)$$

В п. B2.272 для операторов \mathbf{b}^+ , \mathbf{b} были выведены уравнения движения. В дополнение к уравнению (B2.27-44) получается (в представлении Гейзенберга):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}_H^+(t) - i\omega_{10}\mathbf{b}_H^+(t) = \Gamma^+(t)e^{i\omega_{10}t}\{\mathbf{I} - 2\mathbf{b}_H^+(t)\mathbf{b}_H(t)\} + \beta_{\omega_{10}}(1 + 2\zeta_{\omega_{10}})\mathbf{b}_H^+(t). \quad (3.11-26)$$

Здесь Γ^+ является флуктуационным оператором; $\beta_{\omega_{10}}$ есть произведение плотности мод на фактор связи; $\zeta_{\omega_{10}}$ — бозе-фактор, зависящий от температуры \mathcal{T} (явные выражения для этих величин даны в п. B2.272). Из уравнения (3.11-26) следует соотношение

$$\mathbf{b}_H^+(t) = \mathbf{b}_H^+(0)e^{[i\omega_{10} - \beta_{\omega_{10}}(1 + 2\zeta_{\omega_{10}})]t} + \int_0^t dt' e^{[i\omega_{10} - \beta_{\omega_{10}}(1 + 2\zeta_{\omega_{10}})](t-t')} \Gamma^+(t')\{\mathbf{I} - 2\mathbf{b}_H^+(t')\mathbf{b}_H(t')\}. \quad (3.11-27)$$

Мы считаем, что в момент включения взаимодействия $t = 0$ атомная и диссипативная системы не связаны между собой. Это означает, что оператор плотности всей системы ρ в момент времени $t = 0$ следует записать в форме $\rho(0) = \rho_A(0)\rho_R(0)$, где индексы A и R соответственно относятся к атомной и диссипативной системам. На основании общих правил для образования математического ожидания оператора \mathbf{b}^+ в момент времени t следует сформировать выражение $\text{Sp} \{ \mathbf{b}_H^+(t) \rho(0) \}$. Оно содержит величины, характеризующие начальное состояние атомной и диссипативной систем. Интерес представляет методика усреднения по отношению к диссипативной системе; формально оно осуществляется путем образования следа с оператором $\rho_R(0) : \text{Sp} \{ \mathbf{b}_H^+(t) \rho_R(0) \}$. Следует указать на то, что эта величина является оператором в гильбертовом пространстве атомной системы; мы введем для нее обозначение

$$\hat{\mathbf{b}}_H^+(t) = \text{Sp} \{ \mathbf{b}_H^+(t) \rho_R(0) \}. \quad (3.11-28)$$

Из уравнения (3.11-27) следует

$$\hat{\mathbf{b}}_H^+(t) = \hat{\mathbf{b}}_H(0) e^{i\omega_{10} - \beta\omega_{10}(1+2\zeta\omega_{10})t}, \quad (3.11-29)$$

так как при образовании следа по отношению к ρ_R часть, линейно зависящая от Γ^+ , обращается в нуль.

Для оператора дипольного момента из уравнения (3.11-29) следует

$$\hat{\mathbf{d}}_{.H}(t) = e^{-\beta\omega_{10}(1+2\zeta\omega_{10})t} [d_{10}\hat{\mathbf{b}}_H^+(0)e^{i\omega_{10}t} + \{HA\}]. \quad (3.11-30)$$

Образуя след с $\rho_A(0)$, отсюда можно получить математическое ожидание для дипольного момента. Легко видеть, что для $t \leq [\beta\omega_{10}(1+2\zeta\omega_{10})]^{-1}$ математическое ожидание дипольного момента при фиксированной фазе колеблется с частотой ω_{10} . То же самое можно утверждать и для математического ожидания поляризации ансамбля одинаковых частиц, если только допустить, что в момент времени $t = 0$ все они обладают одним и тем же дипольным моментом. Для $t \gg [\beta\omega_{10}(1+2\zeta\omega_{10})]^{-1}$ поляри-

зация стремится к нулю. В соответствии с этим время

$$\tau_p \equiv [\beta\omega_{10}(1+2\zeta\omega_{10})]^{-1} \quad (3.11-31)$$

можно наглядно истолковать как *время релаксации фазы* или время разрушения фазы. Аналогичным образом можно поступить и с энергией; соответствующее уравнение движения

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{H}_A)_H = \hbar\omega_{10} \left[\frac{d\mathbf{b}_H^+}{dt} \mathbf{b}_H + \mathbf{b}_H^+ \frac{d\mathbf{b}_H}{dt} \right] \quad (3.11-32)$$

может быть представлено в явном виде с помощью уравнений (3.11-26) (3.11-27). При решении уравнения движения, т. е. при получении $(\hat{\mathbf{H}}_A)_H$, снова должен быть сформирован след по отношению к $\rho_R(0)$ (соответствующие значения для Γ^+ и двойных произведений Γ, Γ^+ могут быть взяты из п. В2.272). Из временной зависимости математического ожидания $\hat{\mathbf{H}}_A$ получается *время релаксации для энергии*:

$$T_z = \frac{1}{2} [\beta\omega_{10}(1+2\zeta\omega_{10})]^{-1}. \quad (3.11-33)$$

Эти результаты показывают, что, независимо от значений $\beta\omega_{10}$ и $\zeta\omega_{10}$, между временами релаксации фазы и энергии для рассматриваемой модели возникает постоянное отношение

$$\frac{T_z}{\tau_p} = \frac{1}{2}. \quad (3.11-34)$$

Изложенный формализм позволяет рассчитать также спектральные распределения, т. е. функции формы линии. Для этого следует образовать математические ожидания произведений вида $\mathbf{b}_H^+(t)\mathbf{b}_H(t+\tau)$, т. е. корреляционные функции или их фурье-образы.

Будем теперь конкретно считать нашей диссипативной системой электромагнитное поле излучения; тогда в предположении, что излучение не поляризовано, получим

$$\beta\omega_{10} = \frac{1}{2} \frac{\omega_{10}^3}{3\pi c^3 \hbar \epsilon_0} |d_{10}|^2 = \frac{1}{2} A_{10}. \quad (3.11-35)$$

Предположим далее, что температура равна нулю. Это означает, что в состоянии равновесия верхнее состояние

не заселено; тогда $\xi_{\omega_1} = 0$, а для времен релаксации следует

$$T_g = A_{10}^{-1}, \quad \tau_p = 2A_{10}^{-1}. \quad (3.11-36)$$

Только что использованные условия являются условиями спонтанной эмиссии, которые по другому поводу уже рассматривались в пп. 3.111 и 3.112. Мы теперь проведем сравнение с некоторыми полученными там результатами. Во-первых, можно в дополнение к уравнению (3.11-5) привести формулу для полуширины излучаемого распределения фотонов:

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau_p}. \quad (3.11-36a)$$

Во-вторых, если положить $|\mathcal{E}_{A,a}\rangle = |\mathcal{E}_{A,1}\rangle$ и $|\mathcal{E}_{A,e}\rangle = |\mathcal{E}_{A,0}\rangle$ и надлежащим образом установить нуль отсчета энергии, то из уравнения (3.11-5) для изменения во времени полной энергии ансамбля одинаковых частиц получится

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{dt} = -A_{10}\bar{\mathcal{E}},$$

так что на этом пути определяется время релаксации энергии $T_g = A_{10}^{-1}$.

Гамильтониан уравнения (B2.27-41) соответствует модели взаимодействия атомной системы с диссипативной системой. Эта модель, в частности, содержит взаимодействие с излучением и спонтанное излучение. Однако для многих важных проблем эта модель оказывается недостаточной; так, например, для многих механизмов уширения линий приведенные выше (простые) соотношения между временем релаксации фазы, временем релаксации энергии и ширинами линий эмпирически не подтверждаются. Причины известных отклонений состоят в том, что реальные атомные системы (атомы, молекулы) имеют более двух уровней, и в том, что на атомные системы могут одновременно действовать многие разнообразные диссипативные системы; однако при этом можно, вообще говоря, допустить, что характеристики изолированных диссипативных систем достаточно хорошо известны. Особые трудности возникают при описании взаи-

модействия. Наряду с операторами взаимодействия простой структуры типа уравнения (B2.27-41) должны быть введены другие, более сложные операторы, которые не содержат уже операторы частичных систем в линейной форме. Задание в явном виде соответствующих операторов связи, которые удавалось легко определить для взаимодействия с излучением, осуществимо только при определенных допущениях для всей конкретной системы (и до настоящего времени еще было относительно мало разработано). С другой стороны, эти величины необходимы, если мы стремимся количественно объяснить такие экспериментальные данные, как времена релаксации, вероятности переходов и ширины линий. На основании определенных квантовомеханических моделей выбирается структура уравнений движения для атомных операторов [в смысле уравнения (3.11-28)] с привлечением фундаментальных величин, по возможности близких к экспериментальным данным. При этом приходится обходиться без явного использования микрофизических параметров, поскольку они в большинстве случаев неизвестны. Основные контуры такого подхода описаны в п. B2.272 [B2.27-2].

3.114. Согласование теоретически полученных соотношений и величин с феноменологически введенными величинами и эмпирическими данными

Сначала мы рассмотрим отдельные атомные системы или ансамбли отдельных систем, не находящиеся под влиянием внешнего поля излучения.

Частоты переходов и переходные моменты атомных систем указаны в (3.11-8), качественные и количественные соотношения для абсолютных или относительных ширин линий при различных механизмах уширения содержатся в табл. 3. Введенные при описании взаимодействия атомных и диссипативных систем феноменологические поперечные и продольные времена релаксации (ср. п. B2.271) можно следующим образом связать с результатами п. 3.113. Из уравнения (B2.27-21) получаем для матричных элементов оператора плотности

$$\rho_{10}(t) = \rho_{10}(0) e^{-i\omega_1 t} e^{-t/\tau_{10}}, \quad (3.11-37)$$

где $\tau_{10} = \tau_{01}$ — поперечное время релаксации. Если отсюда вычислить дипольные моменты ансамбля одинаковых частиц и принять, что в момент времени $t = 0$ все дипольные моменты равны (этого можно достичь путем предварительного внешнего воздействия, которое выключается в момент времени $t = 0$), то получим для математического ожидания поляризации (при плотности числа частиц γ) для $t \geq 0$

$$\langle \mathbf{P}(t) \rangle = \gamma e^{-t/\tau_{10}} [d_{10} \rho_{01} e^{i\omega_{10}t} + \{KK\}]. \quad (3.11-38)$$

Это уравнение допускает такую же интерпретацию, как уравнение (3.11-30), поэтому поперечное время релаксации есть время релаксации фазы. Фурье-образ от $\langle \mathbf{P}(t) \rangle$ есть функция Лоренца с полушириной $\Delta\omega = 2/\tau_{10}$. Аналогичным образом можно входящее в уравнение (B2.27-18) продольное время релаксации T_{10} отождествить с временем релаксации энергии T_2 .

До сих пор мы вычисляли поляризацию для *однородно* уширенных систем; это означает, что параметры всех отдельных атомных систем, и в частности частоты переходов, считались одинаковыми. Теперь мы предпримем обобщение на *неоднородно* уширенные системы [см. выводы после уравнения (3.11-18)], причем мы можем предположить, что N частиц отличаются только частотами переходов $(\omega_{10})_j$ с $j = 1, \dots, N$. Положим $(\omega_{10})_j = \omega_{10} + \omega'_j$ при $N\omega_{10} = \sum_j (\omega_{10})_j$ и вычислим (так же, как это сделано выше) математическое ожидание поляризации путем суммирования математических ожиданий дипольных моментов частиц в единице объема:

$$\langle \mathbf{P}(t) \rangle = d_{10} \rho_{01} e^{i\omega_{10}t} e^{-t/\tau_{10}} \sum_j e^{i\omega'_j t} + \{KK\}. \quad (3.11-39)$$

При достаточно большом числе частиц в рассматриваемом объеме и достаточно близко расположенных частотах переходов суммирование можно заменить интегрированием:

$$\langle \mathbf{P}(t) \rangle = \gamma d_{10} \rho_{01} e^{i\omega_{10}t} e^{-t/\tau_{10}} G(t) + \{KK\}, \quad (3.11-40)$$

где

$$G(t) = \int d\omega' g_{10}^{(\text{неодн})}(\omega') e^{i\omega' t}.$$

Мы характеризуем здесь число частиц в единице объема, с частотами в интервале $(\omega' \pm \frac{1}{2} d\omega')$, произведением полной плотности числа частиц γ и нормированной функции распределения $g_{10}^{(\text{неодн})}$; функция $g_{10}^{(\text{неодн})}$ идентична уже введенной в п. 3.112 функции формы линии при неоднородном уширении и характеризуется полушириной $\Delta\omega^{(\text{неодн})}$. В специальном случае доплеровского уширения (вследствие теплового движения частиц газа) функция $g_{10}^{(\text{неодн})}$ есть функция Гаусса с параметрами, указанными после уравнения (3.11-20).

Из уравнений (3.11-39) и (3.11-40) видно, что распределение резонансных частот, т. е. неоднородное уширение, влечет за собой дополнительный процесс затухания поляризации (ср. разд. 3.21): величина $G(t)$ убывает от значения 1 при $t = 0$ с возрастанием времени, так как отдельные дипольные моменты больше не колеблются в фазе; характеризующее этот процесс время затухания есть $\tau_{10}^{(\text{неодн})} \simeq [\Delta\omega^{(\text{неодн})}]^{-1}$. Если представить $G(t)$ экспоненциальной функцией с временной константой $\tau_{10}^{(\text{неодн})}$, то полная временная функция затухания колебания поляризации $G^{(\text{эфф})}(t)$ будет экспоненциальной функцией с временной константой $\tau_{10}^{(\text{эфф})}$, определяемой уравнением $1/\tau_{10}^{(\text{эфф})} = 1/\tau_{10} + 1/\tau_{10}^{(\text{неодн})}$; в соответствии с этим фурье-образ поляризации имеет в данном случае лоренцеву форму и обладает полушириной

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau_{10}^{(\text{эфф})}} = \Delta\omega^{(\text{одн})} + \Delta\omega^{(\text{неодн})}. \quad (3.11-40a)$$

В общем случае эффективная функция формы линии, определяемая неоднородным и однородным уширением, строится путем наложения функций формы, характеризующих отдельные процессы. Во многих случаях доминирует какой-нибудь один процесс уширения; например, в газах при низком давлении превалирует доплеровское уширение, для которого форма линии задается функцией Гаусса с шириной $\Delta\omega^{(\text{эфф})} = \Delta\omega^{(\text{неодн})}$.

Из сравнения рассуждений, использованных здесь при вычислении поляризации и проведенных ранее при

изучении процессов спонтанной эмиссии и флуоресценции (ср. разд. 3.112), видно, что эффективные формы линий вычисляются одинаковым образом, поэтому введенные здесь функции формы линий и их полуширины идентичны соответствующим контурам флуоресценции и полуширинам $g_{ae}(\omega)$ и $\Delta\omega_{ea}$.

При дальнейшем изложении мы будем снова пользоваться такими эффективными функциями формы линий $g_{ae}(\omega)$; эффективная функция затухания $G^{(\text{эфф})}(t)$ получится путем преобразования Фурье над функцией $g_{ae}(\omega)$. Во многих случаях применяются функции g_{ae} , параметры которых должны определяться из эксперимента; оценки порядков величин и зависимости полуширин от других физических величин приведены в табл. 3.

Рассмотрим теперь атомные системы, находящиеся под воздействием внешнего поля излучения.

Вначале следует сделать замечание, касающееся полуклассического описания взаимосвязи между поляризацией и напряженностью электрического поля (которая представлена в § 2.3). Полученные там для процессов однородного уширения результаты могут быть перенесены на случай неоднородно уширенных систем; для этой цели следует воспользоваться сказанным после уравнения (3.11-40) и ввести эффективные функции формы. Если считать процессы квазистационарными и пренебречь изменением населенностей, вызванным действием излучения, то процессы однородного и неоднородного уширения создают одни и те же эффекты, и поэтому их невозможно отличить друг от друга в эксперименте при однофотонных (а также и при многофотонных) процессах. По указанным причинам мы будем в дальнейшем рассматривать величины и соотношения, непосредственно относящиеся к эксперименту. (В п. 3.125 и разд. 3.21 мы обсудим также и такие процессы, при которых механизмы однородного и неоднородного уширения линий вызывают экспериментально обнаруживаемые эффекты.)

Из соотношений для скоростей изменения вероятностей переходов при вынужденном излучении и поглощении [см. уравнения (3.11-21) и (3.11-22)] непосредственно могут быть выведены важные соотношения, ко-

торые доступны прямому сопоставлению с экспериментальными данными. Примером может служить коэффициент усиления мощности η_{ae} для монохроматического сигнала на частоте ω_L со спектральной интенсивностью $S_\omega(\omega) = S(\omega_L)\delta(\omega - \omega_L)$; с физической точки зрения можно представить себе излучение лазера с шириной линии существенно меньшей, чем ширина функции $g_{ae}(\omega - \omega_{ae})$. Образова отношение выделившейся на пути dz мощности к полной входной мощности, можно получить эффективные коэффициенты усиления:

$$\eta_{ae}(\omega_L) = \left(\gamma_a - \gamma_e \frac{g_a}{g_e} \right) B_{ae} \frac{\hbar\omega_{ae}}{c} g_{ae}(\omega_L - \omega_{ae}). \quad (3.11-41)$$

Полезно сравнить также с (В1.11-1). Эффект ширины линии будет исключен, если путем интегрирования по всей линии перейти к интегральному коэффициенту усиления; тогда получим

$$\eta_{ae}^{\text{инт}} = B_{ae} \frac{\hbar\omega_{ae}}{c} \gamma_{\text{эфф}}; \quad \gamma_{\text{эфф}} = \gamma_a - \gamma_e \frac{g_a}{g_e}, \quad (3.11-42)$$

где $\gamma_{\text{эфф}}$ — эффективная плотность инверсии чисел заполнения. В то время как отношение $\eta_{ae}^{\text{инт}}/\gamma_{\text{эфф}}$, очевидно, существенным образом определяется величинами, характеризующими отдельные осцилляторы поля излучения, отношение $\eta_{ae}(\omega_L)/\gamma_{\text{эфф}}$ зависит, кроме того, от эффективных механизмов уширения линий. Таким образом, это отношение зависит не только от постоянно существующего затухания излучения, но и от окружения и экспериментальных условий. Эффективный коэффициент усиления мощности можно разделить на слагаемые, соответствующие генерации фотонов и поглощению. От этих слагаемых можно затем перейти к другим важным величинам; например, путем деления на плотность числа частиц можно определить поперечное сечение (эффективное) для поглощения.

Теперь обратимся к получению количественных данных для таких непосредственно определяемых на опыте параметров, какими являются линейная восприимчивость, коэффициент экстинкции и коэффициент поглощения. Для этой цели мы используем значения для частот и моментов переходов из уравнения (3.11-8), а так-

же будем опираться на следующие численные значения для ширин линий флуоресценции $\Delta\omega_{ae}$ (ср. табл. 3), плотности числа частиц, показателя преломления и степеней вырождения:

Флуоресцентная ширина линии $\Delta\omega_{ae}$ в с^{-1} :

10^{14} для электронных переходов в атомах и молекулах,

10^{12} для колебательных переходов в молекулах.

Плотность числа частиц в исходном состоянии $\gamma_a = \gamma = 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

Показатель преломления $n^{(\Delta)} = 1,5$.

Степени вырождения $g_a = g_e = 1$. (3.11-43)

Результаты приведены в табл. 4. Для мнимой части линейной восприимчивости получается

Таблица 4. Значения линейной восприимчивости, коэффициента экстинкции, коэффициента поглощения, а также вклада соответствующих переходов в диэлектрическую постоянную при $\omega = 0$

	$\text{Im} \{ \chi^{(1)}(\omega_{ea}) \}$ А·с/В·м	$\rho_a^{(J)}(\omega_{ea})$	$k_a(\omega_{ea})$ см ⁻¹	$\Delta\epsilon^{(J)}(0)$
Электронный переход	$2 \cdot 10^{-10}$	8	$5 \cdot 10^6$	0,2
Колебательный переход	$2 \cdot 10^{-12}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^3$	0,001

Указанные значения вычислены без полевых поправок. Если желательно сделать полевые поправки согласно теории Лоренца, то значение восприимчивости в соответствии с выводами разд. 2.34 следует умножить

$$\text{на } C_F^{(1)} = \left(\frac{1}{3} [(n^{(J)})^2 + 2] \right)^2 \approx 2.$$

$$\text{Im} \{ \chi^{(1)}(\omega) \} = -\frac{\gamma\pi}{\hbar} |d_{ae}|^2 g_{ae}(\omega - \omega_{ea}). \quad (3.11-44)$$

Максимум формы линии находится при ω_{ea} и составляет для лоренцевых линий, которыми мы ограничимся, $g_{ae}(0) = 2/\pi\Delta\omega_{ae}$. Коэффициент экстинкции $\rho_a^{(J)}$ определяется как отрицательная мнимая часть комплексного показателя преломления $n^{(J)} - i\rho_a^{(J)}$, т. е. $\rho_a^{(J)} = (-1/2n^{(J)}\epsilon_0) \text{Im} \{ \chi^{(1)}(\omega) \}$. Коэффициент поглощения сов-

падает с отрицательным коэффициентом усиления мощности и определяется выражением $k_a = (2/c) \rho_a^{(J)} \omega_{ea}$.

Экстремальное значение вещественной части линейной восприимчивости имеет вид

$$\left| \text{Re} \left\{ \chi^{(1)} \left(\omega_{ea} \pm \frac{1}{2} \Delta\omega_{ae} \right) \right\} \right| = \frac{\gamma\tau_{10}}{\Delta\omega_{ae}\hbar} |d_{ae}|^2 \quad (3.11-45)$$

и, таким образом, достигает половины максимального значения величины $|\text{Im} \{ \chi^{(1)}(\omega) \}|$. Далее, представляет интерес определить вклады различных переходов в значение $\text{Re} \{ \chi^{(1)}(\omega) \}$ для $\omega = 0$ и для $\omega \ll \omega_{10}$. Из уравнения (2.32-17) для этого вклада следует

$$\chi^{(1)}(0) = \frac{2\gamma}{\hbar\omega_{ea}} |d_{ae}|^2 \quad (3.11-46)$$

и

$$\Delta\epsilon^{(J)}(0) = \frac{1}{\epsilon_0} \chi^{(1)}(0) = \frac{2\gamma}{\hbar\omega_{ea}\epsilon_0} |d_{ae}|^2$$

для вклада в (относительную) диэлектрическую постоянную $\epsilon^{(J)}(0)$. Для рассматриваемых электронных и колебательных переходов значения $\Delta\epsilon^{(J)}(0)$ указаны в последнем столбце табл. 4.

3.2. Нелинейные однофотонные процессы в лазерах

Для описания лазерных процессов вблизи порога (при котором начинается генерация) и выше его существенным является отклонение от равновесного значения инверсии чисел заполнения, обусловленное взаимодействием поля излучения с активной средой; следствием этого обращения населенностей оказывается *нелинейная* зависимость поляризации от напряженности поля. Наиболее характерные черты явления могут быть изучены на примере генерации отдельной моды; результаты имеют основополагающую природу и служат для понимания многомодового режима. Наиболее существенные свойства, такие, как выходная мощность, ши-

рина линии и когерентность, могут быть описаны в широкой области применений достаточно хорошо на основе полуклассической теории, в которую вводятся флуктуационные силы (подобно силам Ланжевена в броуновском молекулярном движении). При определении зависимости амплитуды (нелинейной) поляризации для одной моды от соответствующей амплитуды напряженности поля в накачанной среде применяется метод Лэмба [11]. Используется возможность применения системы связанных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся компонент напряженности поля, поляризации и инверсии чисел заполнения (ниже именуемой просто инверсией) в смысле приближения вращающейся волны. Введенные флуктуационные силы позволяют включить в рассмотрение спонтанную эмиссию и вакуумные шумы, т. е. процессы квантового характера. При этом для случая одномодового колебания выводятся соотношения для ширины спектральной линии, выходной мощности и параметров накачки (величина, важная для описания когерентного поведения) и получаются количественные заключения, касающиеся минимальных ширин линий. В заключение обсуждается явление, при котором в случае доплеровски уширенных линий вследствие указанной выше инверсии возникает характерная зависимость выходной мощности лазера от частоты (лэмбовский провал), связанная со смещением моды в пределах области линии флуоресценции.

3.121. Материальные уравнения для лазерной среды

При выводе материальных уравнений для лазера мы воспользуемся полуклассическими рассуждениями из разд. 2.36 при следующих специальных условиях. Мы будем рассматривать одинаковые, не взаимодействующие между собой атомные двухуровневые системы, находящиеся под действием диссипативной системы. Атомные системы связаны с электрическим полем, причем предполагается справедливость дипольного приближения. Постоянные дипольные моменты отсутствуют, переходные моменты считаем вещественными. При этих предположениях уравнения движения для компонент опе-

ратора плотности имеют вид

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{00}) = \frac{i2dE}{\hbar}(\rho_{01} - \rho_{10}) - \frac{1}{T} \left[(\rho_{11} - \rho_{00}) - \frac{\gamma_i^e}{\gamma} \right], \quad (3.12-1)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{01} = i\omega_{10}\rho_{01} + \frac{i}{\hbar}dE(\rho_{11} - \rho_{00}) - \frac{1}{\tau}\rho_{01}, \quad (3.12-2)$$

где $\omega_{10} = \hbar^{-1}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0)$ — атомная частота перехода, $d = d_{01} = d_{10}$ — атомный переходный момент и γ — плотность числа частиц атомной системы. Продольное (T) и поперечное (τ) времена релаксации характеризуют связь атомной системы с диссипативной. Считаем, что равновесное значение плотности инверсии γ_i^e установилось в отсутствие электрического поля; оно прежде всего определяется воздействием процесса накачки на атомную систему и возрастает с увеличением интенсивности накачки. При локальном рассмотрении (в элементе объема с линейными размерами, малыми по сравнению с длиной волны) получим из обоих уравнений следующие соотношения между математическим ожиданием поляризации $P = \langle \mathbf{d} \rangle$ и разностью инверсионных плотностей $\gamma(\rho_{11} - \rho_{00})$, отличающихся от их равновесного значения γ_i^e на $\Delta\gamma_i$:

$$\frac{d^2}{dt^2}P + \frac{2}{\tau}\frac{d}{dt}P + \left(\omega_{10}^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)P = -2\omega_{10}\frac{d^2}{\hbar}E\gamma_i^{2e} - 2\omega_{10}\frac{d^2}{\hbar}E\Delta\gamma_i, \quad (3.12-3)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\gamma_i + \frac{1}{T}\Delta\gamma_i = \frac{2}{\hbar\omega_{10}}E\left(\frac{d}{dt}P + \frac{1}{\tau}P\right). \quad (3.12-4)$$

Из этой системы связанных уравнений следует исключить плотность инверсии и найти зависимость поляризации от напряженности поля [в предположении, что происходит гармоническое колебание с круговой частотой ω_0 и с комплексной амплитудой $E(\omega_0)$]. Структура уравнений позволяет обнаружить наличие нелинейной зависимости; решение этих уравнений можно выполнить методом последовательных приближений. Из первого дифференциального уравнения сначала определяется

поляризация в первом порядке по E в пренебрежении вторым слагаемым в правой части. Это решение подставляется во второе дифференциальное уравнение и таким образом определяется $\Delta\gamma$, во втором порядке по E ; в качестве результата получается компонента $\hat{\Delta}\gamma$, на частоте, равной нулю, пропорциональная $(-\gamma_l^e |\hat{E}|^2)$. Это означает, что при положительных значениях γ_l^e плотность инверсии убывает с возрастанием энергии поля; взаимодействие с электрическим полем влечет за собой инверсию населенностей. Полученное во втором порядке выражение для $\Delta\gamma$ подставляется в правую часть уравнения (3.12-3), так что поляризация оказывается вычисленной уже в третьем приближении. Таким путем может быть найдена зависимость комплексной амплитуды поляризации $\hat{P}(\omega_0)$ от амплитуды напряженности поля:

$$\hat{P}(\omega_0) = i(-1) \frac{d^2 \gamma_l^e \tau}{\hbar} \left\{ 1 - \frac{4d^2 T \tau}{\hbar^2} |\hat{E}(\omega_0)|^2 \right\} \hat{E}(\omega_0) = \chi \hat{E}(\omega_0). \quad (3.12-5)$$

При выводе были сделаны известные приближения, оправданные с точки зрения применений и ниже количественно обоснованные (в частности, мы полагали $\omega_0 \approx \omega_{10}$, $\omega_{10} \gg \tau^{-1} \gg T^{-1}$ и в связи с этими соотношениями пренебрегли вещественными частями восприимчивости χ в первом и в третьем порядках). На основании закона Пойнтинга из этого уравнения легко вычислить энергию излучения, выделившуюся в единице объема и в единицу времени (ср. ч. I, разд. 1.31). Можно написать

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{S}}^t = -2\omega_0 \text{Im} \{ \chi \} |\hat{E}|^2, \quad (3.12-6)$$

где проведено усреднение по нескольким периодам частоты ω_0 . Если величина γ_l^e положительна и если выражение в фигурных скобках в уравнении (3.12-5) также положительно, то мнимая часть $\text{Im} \{ \chi \}$ восприимчивости отрицательна и происходит выделение энергии излучения. При достаточно малом втором члене в фигурных скобках, т. е. при достаточно малом $|\hat{E}|^2$ эта энергия пропорциональна равновесному значению γ_l^e плотности инверсии и пропорциональна фазовому времени релаксации.

3.122. Анализ взаимодействия между средой и полем излучения в лазерном генераторе на полуклассической основе

Как было показано в пп. В1.112 и 1.121, в идеальном вакуумном резонаторе электромагнитное поле может быть разложено на стоячие волны; для одной моды с частотой ω_0 зависящий от времени множитель $\mathcal{E}(t)$ напряженности поля удовлетворяет дифференциальному уравнению (В1.11-8)

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{E}(t) + \omega_0^2 \mathcal{E}(t) = 0,$$

причем величина \mathcal{E} должна быть нормирована таким образом, чтобы значение $\overline{\mathcal{E}^2}^t$ равнялось электромагнитной энергии $\overline{U_{эм}}^t$ моды в полости; время усреднения составляет несколько периодов длины $2\pi/\omega_0$. Наряду с резонаторами со стоячими волнами можно рассматривать также резонаторы с бегущими волнами, с которыми мы встречаемся в кольцевых лазерах; такие резонаторы обладают преимуществом пространственной однородности в активной среде [3.12-1], что мы будем предполагать в дальнейшем ради простоты изложения. Вследствие реально существующих в резонаторе условий (затухание и усиление) следует исходить из дифференциального уравнения для $\mathcal{E}(t)$ в форме

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{E}(t) + s \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \omega_0^2 \mathcal{E}(t) = 0, \quad (3.12-7)$$

причем для обеспечения генерации в собственном смысле должно соблюдаться неравенство $s \ll \omega_0$, т. е. в течение времени порядка ω_0^{-1} величина $\overline{U_{эм}}^t$ должна изменяться незначительно. Легко убедиться в том, что величина

$$-s = \frac{1}{\overline{U_{эм}}^t} \frac{d}{dt} \overline{U_{эм}}^t \quad (3.12-8)$$

представляет собой относительное изменение энергии поля во времени. Согласно выводам п. В1.112, в пассивном резонаторе может иметь место убывание энергии $\overline{U_{эм}}^t$, обусловленное различными механизмами потерь; это обстоятельство учитывается путем добавления к s

некоторой положительной величины v' . С другой стороны, вследствие зависимости, заданной уравнением (3.12-6), действие активной (накачанной) среды может вызывать прирост $U_{эм}^t$. Это приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{E} + (v' - \beta + \zeta \mathcal{E}^2) \frac{d}{dt} \mathcal{E} + \omega_0^2 \mathcal{E} = 0. \quad (3.12-9)$$

Константа

$$\beta = \frac{\omega_0}{\hbar \epsilon_0} d^2 \nu_f^e \tau \quad (3.12-9a)$$

возникает из компоненты восприимчивости первого порядка в уравнении (3.12-5) и указывает на возможность компенсации потерь в резонаторе при достаточной скорости накачки. Константа

$$\zeta = \frac{2}{\hbar^3 \epsilon_0^3} \frac{\omega_0^2 d^4 \nu_f^e T \tau}{V} \quad (3.12-9b)$$

соответствует компоненте восприимчивости третьего порядка в уравнении (3.12-5) и указывает на эффект насыщения при возрастающей энергии излучения; он возникает вследствие инверсии населенностей в активной среде при ее взаимодействии с полем излучения. Здесь следует заметить, что из интерпретации уравнений (3.12-6) и (3.12-8) следует величина \mathcal{E}^2 , при ее замене на \mathcal{E}^2 может быть формально осуществлен переход от одной величины к другой с помощью множителя ζ ; содержательное обоснование сразу получается из проведенного ниже сравнения с соотношениями, вытекающими из последовательной квантовой теории, а также при сравнении с результатами, которые следуют из теории с более широкой областью применимости.

Вслед за вышеизложенным рассмотрением обсудим иной вариант полуклассического подхода, обладающий преимуществом простого сравнения с соответствующими последовательными квантовыми соотношениями; кроме того, он позволит нам позднее ввести с достаточной ясностью флуктуационные силы, представляющие процессы квантовой природы. Без учета флуктуационных

сил для напряженности поля получится такое же определяющее уравнение, как и в вышеизложенном методе [ср. уравнение (3.12-9)], что будет в явном виде показано после уравнения (3.12-29). Кроме того, при этом способе рассмотрения связь с лазерной теорией может быть сделана особенно наглядной на основе уравнений баланса.

Из уравнений Максвелла следует уравнение для напряженности поля $E(z, t)$ в лазерном резонаторе:

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P. \quad (3.12-10)$$

Мы ограничились здесь уравнением для одной проекции (ось лазера направлена по z); \bar{v} обозначает потери в пассивном резонаторе, P есть поляризация, созданная в накачанной среде. Система связанных уравнений (3.12-10), (3.12-3) и (3.12-4) содержит связь между классическим полем и математическими ожиданиями поляризации и плотности инверсии. Структура этой системы уравнений довольно сложна, так что из нее нельзя непосредственно получить конкретные физические выводы. Поэтому мы обратимся к решению этой системы несколько позже.

Сначала следует разложить напряженность поля по вакуумным модам, так что для одной моды напряженность поля примет вид произведения двух множителей, из которых один зависит от времени, а другой — от координат. В аналогичном виде представим поляризацию и плотность инверсии. Если подставить три таких произведения в три уравнения и после умножения на нормированные пространственные компоненты выполнить интегрирование по объему лазерного резонатора, то можно будет получить такие дифференциальные уравнения, в которых искомые функции являются связанными между собой зависящими только от времени множителями в выражениях для напряженности поля, поляризации и плотности инверсии. Например, уравнение (3.12-10) для определенной μ -й моды принимает вид

$$\frac{d^2}{dt^2} E_\mu(t) + v'_\mu \frac{d}{dt} E_\mu(t) + \omega_\mu^2 E_\mu(t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d^2}{dt^2} P_\mu(t); \quad (3.12-11)$$

здесь $E_\mu(t)$, $P_\mu(t)$ — зависящие от времени множители в выражениях для напряженности поля и поляризации μ -й моды, v'_μ — обратное значение времени жизни электромагнитной энергии для этой моды в пассивном резонаторе. К системе уравнений для зависящих от времени множителей применяется приближение вращающейся волны. Мы уже упоминали о нем в связи с пренебрежением нерезонансными членами при последовательном квантовом описании в разд. 2.22; в связи с полуклассической лазерной теорией это приближение означает следующее: ослабление или усиление электромагнитной энергии лазерной волны в промежутки времени ω_μ^{-1} относительно мало, т. е. имеет смысл квазистационарное представление напряженности поля (и других соответствующих величин). Допустима подстановка

$$E_\mu(t) = \hat{E}_\mu^{(-)}(t) e^{-i\omega_\mu t} + \{KK\}, \quad (3.12-12)$$

где $\hat{E}_\mu^{(-)}(t)$ — медленно изменяющаяся со временем переменная (комплексная) амплитуда. Точнее это можно выразить так, что абсолютное значение фурье-образа ${}^1\hat{E}_\mu^{(-)}$ отлично от нуля только для таких частот Фурье ω' , для которых соблюдается неравенство $|\omega'/\omega_\mu| \ll 1$ (ср. ч. I, Приложение 6). Поляризация P_μ также разлагается аналогично уравнению (3.12-12). Если ставится цель определить $\hat{E}_\mu^{(-)}(t)$ при заданном значении $\hat{P}_\mu^{(-)}(t)$ и при применении приближения вращающейся волны, то дифференциальное уравнение должно быть подвергнуто преобразованию Фурье; тогда получится алгебраическое выражение для ${}^1\hat{E}_\mu^{(-)}$. В этом алгебраическом выражении появляются суммы вида

$$1 + C_1 \frac{v'}{\omega_\mu} + C_2 \frac{\omega'}{\omega_\mu} + C_3 \left(\frac{\omega'}{\omega_\mu}\right)^2 + \dots,$$

где $|C_j| \simeq 1$. Пренебрежение высшими членами, такими, как $(\omega'/\omega_\mu)^2$, по сравнению с другими членами как раз и означает приближение вращающейся волны. Затем с помощью обратного преобразования можно перейти из пространства частот в пространство времени и, таким образом, получить в приближении вращающейся волны

дифференциальное уравнение для $\hat{E}_\mu^{(-)}(t)$. На описанном пути (разложение по модам, применение приближения вращающейся волны и учет неравенств $\omega_0 \gg v'$, $\omega_0 \gg \tau^{-1} \gg T^{-1}$, $\tau^{-1} \gg v'$) можно для одной моды (на частоте ω_0) из связанной системы для E , P , $\Delta\gamma_l$ вывести следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt} a + \frac{v'}{2} a = g' p, \quad (3.12-13)$$

$$\frac{d}{dt} p + \frac{1}{\tau} p = g' a \Delta N, \quad (3.12-14)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta N + \frac{1}{T} (\Delta N - \Delta N^e) = -2g' (a^* p + a p^*). \quad (3.12-15)$$

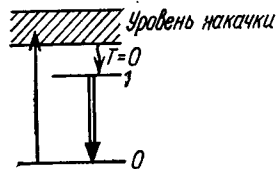
Здесь a пропорционально медленно меняющейся комплексной амплитуде напряженности поля $E^{(-)}(t)$, и, как и p , пропорционально комплексной амплитуде поляризации $P^{(-)}$; ΔN есть полная инверсия $N_1 - N_0$, а ΔN^e — соответствующее равновесное значение. Константа g' осуществляет (после выполнения описанного выше приближения) взаимодействие тех или иных существенных остающихся релаксационных членов: для электрического поля — это поляризация, для поляризации — произведение напряженности поля и инверсии, для инверсии — билинейная форма из напряженности поля и поляризации. Величина a выбрана так, что величина $\hbar\omega_0 a^* a$ равна электромагнитной энергии в резонаторе (усредненной по времени за многие периоды). Константа взаимодействия есть

$$g' = \sqrt{\frac{d^2 \omega_0}{2\epsilon_0 \hbar V}}, \quad (3.12-16)$$

где V — объем резонатора.

Покажем теперь, что полученные на полуклассической основе соотношения для a , p , ΔN позволяют также вывести уравнения баланса для лазера. Они получаются в том же виде, в каком обычно вытекают из последовательных квантовых формул для скоростей изменения вероятностей переходов при однофотонных процессах. Мы воспользуемся заданными в уравнениях (3.11-21) — (3.11-23) скоростями изменения для вывода уравнений баланса простого трехуровневого лазера (фиг. 28). В со-

ответствии со сформулированным в начале п. 3.121 условием идентичности атомных систем нас будут интересовать уравнения баланса для однородно уширенных систем. Можно утверждать, что переход с уровня накачки на верхний лазерный уровень происходит настолько быстро, что можно пренебречь населенностью уровня накачки; тогда имеем



Фиг. 28. Схема простого трехуровневого лазера.

$$N = N_0 + N_1, \quad \Delta N = N_1 - N_0,$$

$$\frac{d}{dt} \Delta N = 2 \frac{d}{dt} N_1,$$

$$N_1 = \frac{1}{2} (N + \Delta N),$$

где N , N_1 , N_0 — полное число атомов, число атомов на верхнем и на нижнем уровнях. Для вклада в скорость изменения N_1 , обусловленного вынужденным излучением, получим

$$- \hbar \omega_{10} B_{10} g_{10}^{\text{макс}} \frac{Q}{V} N_1,$$

где Q — число фотонов в рассматриваемой моде, частота которых ω_0 предполагается близкой к частоте ω_{10} . Это выражение можно получить из заданной в уравнении (3.11-21) спектральной плотности изменения для отдельного атома путем интегрирования по линии и умножения результата

$$\sigma(\omega) = \hbar \omega_{10} \frac{Q}{V} \delta(\omega - \omega_0)$$

на N_1 . Аналогичным образом получают вклады в скорости изменения для N_1 и Q ; T определяет время жизни, обусловленное спонтанной эмиссией. Таким образом получают следующие уравнения баланса для инверсии ΔN и для числа фотонов Q :

$$\frac{d}{dt} \Delta N = \left(2P' - \frac{N}{T} \right) - 2\hbar \omega_{10} B_{10} g_{10}^{\text{макс}} \frac{Q}{V} \Delta N - \frac{\Delta N}{T}, \quad (3.12-17a)$$

$$\frac{d}{dt} Q = \hbar \omega_{10} B_{10} g_{10}^{\text{макс}} \frac{Q}{V} \Delta N - \nu' Q + \omega \frac{N + \Delta N}{2T}; \quad (3.12-17b)$$

P' — скорость накачки с уровня 0 через уровень накачки на уровень 1. Члены, содержащие B_{10} , характеризуют переходы в результате вынужденной эмиссии и поглощения, а член с $\nu'Q$ ответствен за потери в резонаторе. Последние члены в правых частях этих уравнений соответственно возникают в результате спонтанной эмиссии; в уравнении для числа фотонов множитель ω (при $\omega < 1$) перед отношением N_1/T показывает, что из спонтанно эмиттированных фотонов лишь некоторая часть попадает в рассматриваемую моду.

Из полуклассических соотношений (3.12-15) и (3.12-13) непосредственно следуют уравнения

$$\frac{d}{dt} \Delta N = \frac{\Delta N e}{T} - 2g'(a^*p + ap^*) - \frac{\Delta N}{T}, \quad (3.12-18a)$$

$$\frac{d}{dt} a^*a = g'(a^*p + ap^*) - \nu'a^*a. \quad (3.12-18b)$$

Поскольку a^*a и Q являются величинами одной и той же природы, то следует прежде всего констатировать, что системы уравнений баланса (3.12-17) и (3.12-18), выведенные совершенно различными способами, имеют одинаковую структуру (мы здесь не обращаем внимания на последний член в уравнении (3.12-17b); к этой проблеме мы вернемся в п. 3.123). Дальнейшие высказывания становятся возможными в результате детального изучения члена $g'(a^*p + ap^*)$. При высоких значениях τ^{-1} можно принять, что $|(d/dt)p| \ll p/\tau$, и тогда получим $p = g'a\Delta N\tau$. При этом имеем

$$g'(a^*p + ap^*) = (g')^2 2\tau \Delta N a^*a = \hbar \omega_{10} B_{10} \frac{\tau}{\pi} \frac{Q}{V} \Delta N, \quad (3.12-19)$$

где выполнено усреднение по ориентациям дипольных моментов. Поскольку $g_{10}^{\text{макс}}$ можно положить равным τ/π (ср. п. 3.114), то тем самым доказана не только структурная равноценность обеих систем уравнений баланса — полуклассической и полностью квантовой, но также установлено совпадение отдельных членов.

Результаты п. 3.122 были получены в предположении, что соблюдаются определенные приближенные соотношения между частотами, временами жизни и време-

нами релаксации; то, что эти соотношения действительно имеют место для реальных систем, мы покажем на примере широко используемого рубинового лазера, для которого можно положить

$$\omega_0 \approx 3 \cdot 10^{15} \text{с}^{-1}, \quad \tau^{-1} \approx 10^{11} \text{с}^{-1}, \quad \nu' \approx 10^9 \text{с}^{-1}, \\ T^{-1} \approx 10^3 \text{с}^{-1}.$$

3.123. Флуктуации вследствие квантовых процессов

Из приведенных в п. 3.122 уравнений полуклассической теории можно найти полностью определенные во времени функции электрического поля, поляризации, электромагнитной энергии или чисел фотонов; сказанное справедливо также и для величин ΔN и Q , входящих в уравнения баланса полной квантовой теории, поскольку эти уравнения применяются к квантовомеханическим математическим ожиданиям скоростей изменений вероятностей переходов. Эту теорию можно использовать для описания непрерывно протекающих процессов; так, например, ею можно воспользоваться для получения стационарных и нестационарных решений для среднего числа фотонов и средней инверсии в лазере. Однако следует помнить, что в действительности эти процессы протекают дискретно вследствие квантовой природы как атомов, так и излучения. Поэтому неизбежны стохастические отклонения от названных выше средних значений. Они оказываются ответственными за некоторые другие свойства лазера, такие, как минимальная достижимая ширина линии и когерентные свойства излучаемого света.

В принципе эти стохастические явления могут быть адекватным образом описаны только в рамках последовательного квантового рассмотрения. Полезная модель представлена на фиг. 29 [3.12-1]. Отдельные атомные системы $A_1 \dots A_N$ взаимодействуют с полем излучения L . Каждая из атомных систем связана с некоторой диссипативной системой R_j , отображающей происходящие в ней релаксационные процессы (включая явления, возникающие при накачке). Поле излучения связано со своей диссипативной системой, отображающей его ре-

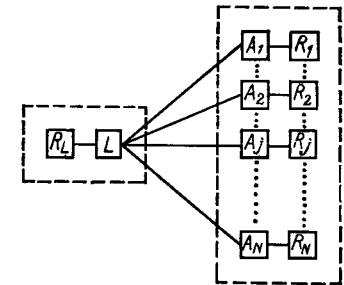
лаксационное поведение (потери в резонаторе). При условиях, сформулированных в пп. 3.121 и 3.122, квантовый расчет по методической схеме, указанной в п. В2.272, приводит к следующей системе уравнений движения:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}(t) + \frac{\nu'}{2} \mathbf{a}(t) = g' \mathbf{p}(t) + \Gamma_a(t), \quad (3.12-20)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) + \frac{1}{\tau} \mathbf{p}(t) = g' \mathbf{a} \Delta N + \Gamma_p(t), \quad (3.12-21)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta N(t) + \frac{1}{T} [\Delta N(t) - \Delta N^e \mathbf{I}] = -2g' [\mathbf{a}^+(t) \mathbf{p}(t) + \mathbf{a}(t) \mathbf{p}^+(t)] + \Gamma_{\Delta N}(t). \quad (3.12-22)$$

Эти уравнения аналогичны полуклассическим уравнениям (3.12-13) — (3.12-15); $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{a}^+(t)$ являются операторами уничтожения и рождения поля излучения; они возникают из соответствующих операторов в представлении Гейзенберга, если отделить главную зависимость от времени. Следовательно, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{a}^+(t)$ являются медленно меняющимися операторами временной компоненты поля. Аналогичным образом $\mathbf{p}(t)$ есть медленно меняющийся оператор, описывающий поляризацию; $\Delta N(t)$ — оператор полной инверсии. Операторы $\Gamma(t)$ являются флуктуационными операторами, которые по сравнению с $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{p}(t)$, $\Delta N(t)$ претерпевают быстрое временное изменение, так что временная структура соответствующих корреляционных функций здесь может быть представлена δ -функцией (поправку мы обсудим позднее в соответствующем месте). Встречающиеся в уравнениях нелинейности служат препятствием для получения замкнутого решения, за исключением особого случая значений намного ниже пороговых. Помимо присутствия флуктуационных сил, в сравнении с полуклас-



Фиг. 29. Схема связи атомной системы с полем излучения.

сическими уравнениями (3.11-13) — (3.11-15) появляются еще отклонения, обусловленные свойствами операторов. Они создают отличия в математических ожиданиях таких произведений, как $a^+(t + \tau')a(t)$ и $a(t)a^+(t + \tau')$. Здесь следует дополнительно заметить, что существует еще другой метод последовательного квантового описания [3.12-2], в котором формулируется уравнение движения для оператора плотности поля излучения и атомов, а в полном операторе плотности выполняется усреднение по переменным диссипативной системы [аналогичный по методике подход мы уже применяли, правда, для гораздо более простой модели при выводе уравнения (3.11-28)].

Наши дальнейшие рассуждения проведены на полуклассических уравнениях (3.12-13) — (3.12-15), которые мы дополним в правых частях соответствующими флуктуационными силами G_a , G_p , $G_{\Delta N}$, аналогичными флуктуационным операторам G_a , G_p , $G_{\Delta N}$. Такой метод дает результаты, достаточно хорошо соответствующие последовательному квантовому описанию, если только можно ограничиться рассмотрением математических ожиданий нормально расположенных произведений операторов вида $a^+(t + \tau')a(t)$. Флуктуационные силы G_a , G_p , $G_{\Delta N}$ обладают следующими общими свойствами:

$\Gamma(t)$ — комплексная величина,

$$\overline{\Gamma(t)} = 0,$$

$$\overline{\Gamma(t')\Gamma(t'')} = 0, \quad (3.12-23)$$

$$\overline{\Gamma^*(t')\Gamma(t'')} = F\delta(t' - t''),$$

$$\text{Re}\{\Gamma(t')\}\text{Re}\{\Gamma(t'')\} = \text{Im}\{\Gamma(t')\}\text{Im}\{\Gamma(t'')\} = \frac{1}{2}F\delta(t' - t'').$$

Символ \dots описывает среднее по ансамблю, которое в стационарном режиме равно среднему по времени; F есть напряженность флуктуационной силы; не существует никакой корреляции между вещественной и мнимой компонентами; G_a , G_p , $G_{\Delta N}$ считаются не зависящими друг от друга.

Силу G_a можно в хорошем приближении определить из уравнения

$$\frac{d}{dt}a + \frac{\nu'}{2}a = g'\psi + G_a, \quad (3.12-24)$$

которое следует из (3.12-13); при этом следует положить $g' = 0$, т. е. пренебречь влиянием задающего устройства. Тогда имеем

$$a(t) = \int_0^\infty d\tau' e^{-\frac{\nu'}{2}\tau'} G_a(t - \tau') \overline{a^*(t)a(t)} = \frac{F_a}{\nu'}.$$

Поскольку $\overline{\hbar\omega_0 a^*(t)a(t)}$ есть средняя энергия излучения для одной моды в полости лазерного резонатора, то для напряженности F_a силы G_a получается

$$F_a = \nu' n_{\text{тепл}}, \quad (3.12-25)$$

где $n_{\text{тепл}}$ есть фактор Бозе $(\exp[\hbar\omega_0/kT] - 1)^{-1}$, определяющий среднее число фотонов в одной моде при тепловом равновесии. Пользуясь уже объясненным выше приближением $|(d/dt)\psi| \ll \nu/\tau$ и учитывая флуктуационную силу G_p , получаем из обобщенного таким образом уравнения (3.12-14)

$$\psi = g'\tau a \Delta N + \tau G_p.$$

Если подставить это выражение в (полуклассическое) уравнение баланса (3.12-186) для числа фотонов, то в правой части этого уравнения появится зависящее от G_p дополнительное слагаемое; вследствие того, что

$$\overline{a^*(t)G_p(t)} = g'\tau \int_{-\infty}^t dt' \overline{G_p^*(t')G_p(t)},$$

это слагаемое примет вид $(g')^2 \tau^2 F_p$; оно соответствует последнему члену в правой части (квантового) уравнения (3.12-176), возникающему благодаря спонтанной эмиссии. Из представленных в п. 3.111 основ однофотонных процессов явствует, что приходящаяся на один фотон скорость перехода при вынужденной эмиссии в случае рассмотрения одной-единственной моды точно равна вкладу спонтанной эмиссии в эту же моду [ср. уравнение (3.11-3)]. Это означает, что стоящий перед a^*a и ΔN в правой части

уравнения (3.12-19) множитель после его умножения на N_1 должен быть равен $(g')^2 2\tau^2 F_p$. Отсюда следует для напряженности F_p силы Γ_p

$$F_p = 2\tau^{-1} N_1. \quad (3.12-26)$$

При переходе отдельной атомной системы с одного уровня на другой величина ΔN изменяется скачком на плюс или минус 2; флуктуационная сила $\Gamma_{\Delta N}$ описывает процесс типа дробового шума. Однако влиянием $\Gamma_{\Delta N}$ можно все-таки пренебречь по сравнению с другими флуктуационными эффектами.

Если уравнения (3.12-13) — (3.12-15) дополнить флуктуационными силами Γ_a , Γ_p , то из них можно будет вывести

$$\frac{d}{dt} a + \left(\frac{v'}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\xi}{2} \hbar \omega_0 |a|^2 \right) a = \Gamma_a + g' \tau \Gamma_p \equiv \Gamma'. \quad (3.12-27)$$

Здесь были применены те же приближения, которые ранее привели к уравнениям для нелинейной поляризации (и напряженности поля) [ср. уравнения (3.12-5) и (3.12-9); относительно β и ξ см. уравнения (3.12-9а, б)]. Флуктуационная сила $\Gamma'(t)$ составлена аддитивно из двух некоррелированных компонент, из которых первая обязана своим происхождением стохастическим процессам вакуумных шумов, а вторая обусловлена спонтанной эмиссией. Функция $\Gamma'(t)$ дельта-коррелирована с напряженностью

$$F' = v' \left[n_{\text{тепл}} + \frac{(g')^2 2\tau N_1}{v'} \right]. \quad (3.12-28)$$

Множитель перед N_1 может быть выражен через обратное значение пороговой инверсии $(N_1 - N_0 g_1 / g_0)_{\text{пор}}$:

$$\frac{(g')^2 2\tau}{v'} = \frac{1}{(N_1 - N_0 \frac{g_1}{g_0})_{\text{пор}}}.$$

Это легко проверить путем определения стационарного решения уравнений (3.12-13) — (3.12-15). $N_1 = (N + \Delta N) / 2$ зависит через ΔN от числа фотонов и поэтому,

строго говоря, не является константой. Однако выше порога устанавливается значение насыщения, так что F' тогда можно рассматривать как постоянную.

В дополнение к дифференциальному уравнению (3.12-27) для $a(t)$ можно составить соответствующее дифференциальное уравнение для быстро меняющейся компоненты напряженности поля $\mathcal{G}(t)$, которая была введена в начале п. 3.122; результат имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{G} + (v' - \beta + \xi \mathcal{G}^2) \frac{d}{dt} \mathcal{G} + \omega_0^2 \mathcal{G} = \mathcal{G}'(t). \quad (3.12-29)$$

Левая часть совпадает с соответствующим выражением в уравнении (3.12-9), в котором член с $(-\beta + \xi \mathcal{G}^2)$ был выведен из выделившейся энергии излучения в связи с нелинейной поляризацией накачанной среды. Функция $\mathcal{G}'(t)$ возникает из $\Gamma'(t)$. Для усредненного по ансамблю значения $\mathfrak{R}_{\mathcal{G}'}(\omega)$ спектра квадратов амплитуд величины $\mathcal{G}'(t)$ следует

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{G}'}(\omega) = \frac{4}{\pi} \hbar \omega_0^3 F' = \frac{4}{\pi} \hbar \omega_0^3 v' n_{\text{тепл}} + \frac{4}{\pi} \hbar \omega_0^3 v' \left(\frac{N_1}{\Delta N} \right)_{\text{пор}}. \quad (3.12-30)$$

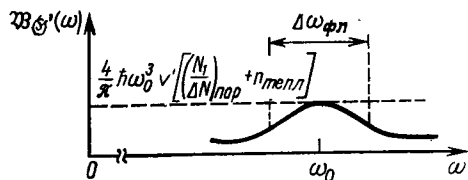
Функция $\mathfrak{R}_{\mathcal{G}'}(\omega)$ выбрана так, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt [\mathcal{G}'(t)]^2 = \int_0^{\infty} d\omega \mathfrak{R}_{\mathcal{G}'}(\omega);$$

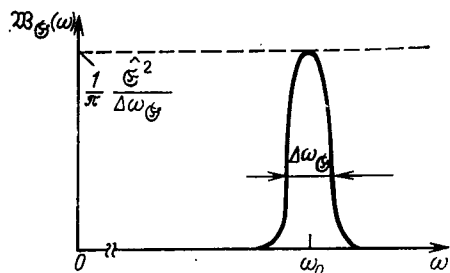
мы рассматриваем, следовательно, только область спектра с $\omega \geq 0$. Поскольку флуктуационная сила $\Gamma'(t)$ дельта-коррелирована и в соответствии с этим представляет белый шум; этот результат получается также и для $\Gamma'(t)$.

В уравнения для медленно меняющихся величин поля и поляризации a и p мы ввели дельта-коррелированные флуктуационные силы Γ_a , Γ_p . Использование δ -функций (благодаря которым дальнейшее численное рассмотрение очень сильно упростилось) явилось математическим отображением следующей физической ситуации: области корреляции флуктуационных сил мож-

но считать очень малыми по сравнению с временем, в течение которого a и φ претерпевают существенные изменения. В действительности мы не встречаемся с областью корреляции, равной нулю, и с этим связан в точности белый спектр, поэтому мы должны обсудить соответствующие поправки. Обусловленная тепловым



Фиг. 30а. Спектр флуктуационной силы $\mathcal{G}(t)$.



Фиг. 30б. Спектр напряженности поля (фазовый шум).

шумом компонента величины $\mathfrak{W}_{\mathcal{G}'}$ может быть оставлена неизменной, так как мы здесь можем исходить из достаточно широкополосного квазибелого спектра. Для компоненты, обусловленной спонтанной эмиссией, следует учитывать конечную ширину линии [ср. уравнение (3.11-23)], что может быть сделано путем введения функции формы линии; это соответствует введению области корреляции порядка $\Delta\omega_{\phi,л}^{-1}$, т. е. порядка обратного значения ширины линии флуоресценции. В соответствии с этим мы будем в дальнейшем применять вместо $\mathcal{G}'(t)$ флуктуационную силу $\mathcal{G}(t)$ со спектральным

распределением

$$\mathfrak{W}_{\mathcal{G}}(\omega) = \frac{4}{\pi} \hbar \omega_0^3 v' n_{\text{тепл}} + \frac{4}{\pi} \hbar \omega_0^3 v' \left(\frac{N_1}{\Delta N} \right)_{\text{пор}} \frac{g_{10}(\omega - \omega_{10})}{g_{10}^{\text{макс}}}. \quad (3.12-31)$$

Спектральное распределение $\mathfrak{W}_{\mathcal{G}}(\omega)$ схематически показано на фиг. 30а; речь идет о линии с функцией формы $g_{10}(\omega)$, на которую накладывается квазибелый тепловой шум. Правда, в области линии с частотой ω_0 в видимом и инфракрасном диапазонах этот шум вносит относительно малый вклад, так как в этих спектральных областях член $n_{\text{тепл}}$, зависящий от ω_0 , бывает обычно мал по сравнению с $(N_1/\Delta N)_{\text{пор}}$. Функция $\mathcal{G}(t)$ может быть записана в форме

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_c(t) \cos \omega_0 t + \mathcal{G}_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (3.12-31a)$$

где \mathcal{G}_c и \mathcal{G}_s являются некоррелированными, медленно меняющимися во времени стохастическими функциями гауссова характера. Для спектра этих функций имеем

$$\mathfrak{W}_{\mathcal{G}_c}(\omega) = \mathfrak{W}_{\mathcal{G}_s}(\omega) = 2\mathfrak{W}_{\mathcal{G}}(\omega + \omega_0), \quad (3.12 б)$$

что означает распределение, преобразованное к частоте $\omega = 0$.

3.124. Определение параметров спектра напряженности поля при одномодовом колебании

Исходным служит уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{E} + (v' - \beta + \zeta \mathcal{E}^2) \frac{d}{dt} \mathcal{E} + \omega_0^2 \mathcal{E} = \mathcal{G}(t). \quad (3.12-32)$$

Все входящие в него величины и константы будут в последующем изложении объяснены, и мы установим их связь с атомными параметрами, временами релаксации и параметрами взаимодействия. Сейчас мы обратимся к расчету ширины линий для одной моды при условиях превышения порога.

Если не учитывать флуктуационную силу $\mathcal{G}(t)$, то выражение

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E} \cos \omega_0 t \quad \text{при} \quad \mathcal{E}^2 = \frac{4}{\zeta} (\beta - v') \quad (3.12-33)$$

образует стационарное решение (мы опустили несинхронные члены, достаточно удаленные от ω_0). Таким образом, в данном случае мы имеем дело с полностью определенной во времени функцией $\mathcal{E}(t)$.

При учете флуктуационной силы \mathcal{E} целесообразно выбрать решение для $\mathcal{E}(t)$ в виде [3.12-3]

$$\mathcal{E}(t) = \tilde{\mathcal{E}} \cos \omega_0 t + \mathcal{C}(t) \cos \omega_0 t + \mathcal{S}(t) \sin \omega_0 t. \quad (3.12-34)$$

Функции $\mathcal{C}(t)$ и $\mathcal{S}(t)$ должны быть в определенном выше смысле медленно меняющимися стохастическими функциями; при достаточном превышении порога можно принять, что $|\tilde{\mathcal{E}}| \gg |\mathcal{C}|, |\mathcal{S}|$. При учете этих свойств можно записать $\mathcal{E}(t)$ в форме

$$\mathcal{E}(t) = \tilde{\mathcal{E}} \left(1 + \frac{\mathcal{C}(t)}{\tilde{\mathcal{E}}} \right) \cos \left(\omega_0 t - \frac{\mathcal{S}(t)}{\tilde{\mathcal{E}}} \right); \quad (3.12-35)$$

далее, из уравнения (3.12-32) получаются следующие определяющие уравнения для $\mathcal{C}(t)$ и $\mathcal{S}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{C}(t) + \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{4} \mathcal{C}^2(t) = \frac{1}{2\omega_0} \mathcal{G}_c(t), \quad (3.12-36a)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{S}(t) = \frac{1}{2\omega_0} \mathcal{G}_s(t). \quad (3.12-36b)$$

Из уравнения (3.12-35) явствует, что отношения $\mathcal{C}(t)/\tilde{\mathcal{E}}$ и $\mathcal{S}(t)/\tilde{\mathcal{E}}$ можно трактовать соответственно как амплитудные и фазовые шумы. Соотношения (3.12-36a, б) по своей структуре таковы, что их можно сравнить с уравнениями для движения частиц. Первое уравнение соответствует движению под действием статистической силы при одновременном влиянии силы, противодействующей растяжению; эта возвращающая сила возрастает с увеличением \mathcal{C}^2 и, следовательно, $(\beta - v')$. Второе уравнение соответствует движению под действием некоррелированной статистической силы той же напряженности, но в отсутствие возвращающей силы. Таким образом, между амплитудными и фазовыми шумами имеется качественное различие; флуктуация фазы определяет (особенно при достаточно больших \mathcal{C}^2) существенным образом флуктуации лазерного излучения, и поэтому в

дальнейшем мы будем обсуждать только действие этого флуктуационного фактора.

Статистические параметры функций $\mathcal{C}(t)$ и $\mathcal{S}(t)$ сравнительно легко вывести из уравнений (3.12-36a, б); тем не менее для того, чтобы на основании этих параметров сделать заключения о статистических параметрах $\mathcal{E}(t)$, требуются специальные рассуждения. При формировании корреляционной функции $\mathcal{E}(t)\mathcal{E}(t+\tau')$, из которой предстоит определить спектральное распределение для \mathcal{E} , необходимо вследствие (3.12-35) вычислить корреляционную функцию для функции

$$\tilde{\mathcal{E}} \cos \left[\omega_0 t - \frac{\mathcal{S}(t)}{\tilde{\mathcal{E}}} \right].$$

Применяя концепцию «мгновенной частоты»

$$\omega(t) \equiv \frac{d}{dt} \left[\omega_0 t - \frac{\mathcal{S}(t)}{\tilde{\mathcal{E}}} \right] = \omega_0 - \frac{1}{\tilde{\mathcal{E}}} \frac{d}{dt} \mathcal{S}(t),$$

можно определить спектр стохастической функции $\exp[(-i/\tilde{\mathcal{E}})d/dt\mathcal{S}(t)]$ при помощи математических методов, содержащихся в [3.12-4]. Тогда может быть определен спектр $\mathcal{E}(t)$. Фазовый шум создает спектр

$$\mathfrak{W}_{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{1}{16\omega_0^2} \mathfrak{W}_{\mathcal{E}}(0) \frac{1}{\left[\frac{\pi}{8\omega_0^2 \tilde{\mathcal{E}}^2} \mathfrak{W}_{\mathcal{E}}(0) \right]^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (3.12-37)$$

нормированной напряженности поля $\mathcal{E}(t)$, представленный на фиг. 30б. Таким образом, создается лоренцев контур с *полушириной*

$$\Delta\omega_{\mathcal{E}} = \frac{\pi \mathfrak{W}_{\mathcal{E}}(0)}{4\omega_0^2 \tilde{\mathcal{E}}^2} = \frac{\hbar\omega_0}{L} (v')^2 \left[\left(\frac{N_1}{\Delta N} \right)_{\text{пор}} + n_{\text{тепл}} \right]. \quad (3.12-38)$$

Спектральная величина $\mathfrak{W}_{\mathcal{E}}(0)$ может быть взята из уравнения (3.12-36a). Эта подстановка приводит к явному заданию $\Delta\omega_{\mathcal{E}}$, причем $L = v'/2\tilde{\mathcal{E}}^2$ представляет собой полную выходную мощность лазера.

Несмотря на использованные приближения и упрощения, изложенная полуклассическая теория, в которую

были введены флуктуационные силы, дает достаточно хорошее описание выходного излучения лазера в широкой и важной области. Однако введение этих сил основывалось на ориентации, вытекающей из последовательного квантовополевого рассмотрения.

Теперь мы обсудим зависимость некоторых важных величин от констант в основном уравнении (3.12-32). Начнем с ширины линии [уравнение (3.12-38)]; это соотношение имеет (так как ν' может рассматриваться как полуширина $\Delta\omega_{pR}$ пассивного резонатора) структуру известной формулы Шавлова и Таунса [11], в которой полуширина $\Delta\omega_{\mathcal{G}}$ пропорциональна $(\Delta\omega_{pR})^2$ и обратно пропорциональна отданной мощности L . Отданная мощность зависит, согласно формуле

$$L = \frac{2(\nu')^2}{\xi} \left(\frac{\beta}{\nu'} - 1 \right), \quad (3.12-39)$$

от констант ν' , β , ξ . Отношение β/ν' показывает, во сколько раз порог превзойден благодаря накачке (в этой связи следует напомнить, что β возрастает с увеличением равновесного значения инверсии, т. е. с интенсивностью накачки). В разд. 3.31 мы покажем, что вышеизложенный полуклассический способ рассмотрения может применяться также для успешного объяснения когерентных свойств лазерного излучения (ср. п. 1.332). Будет также показано, что при этом для количественного описания важную роль играет безразмерный параметр накачки

$$\tilde{p} = \nu' \omega_0 \left(\frac{8}{\pi \mathfrak{W}_{\mathcal{G}}(\omega_0) \xi} \right)^{1/2} \left(\frac{\beta}{\nu'} - 1 \right); \quad (3.12-40)$$

он представляет собой комбинацию констант ν' , β , ξ со спектральными параметрами флуктуационной силы $\mathcal{G}(t)$ из уравнения (3.12-32). Величина \tilde{p} ниже порога отрицательна, равна нулю у порога и становится положительной при его превышении. Следует отметить, что функция формы линии $g_{10}(\omega)$ не входит явно в формулы для ширины линии $\Delta\omega_{\mathcal{G}}$, для выходной мощности L и для параметра накачки \tilde{p} .

Все константы, входящие в уравнение (3.12-32) и тем самым в формулу для ширины линии и в формулы

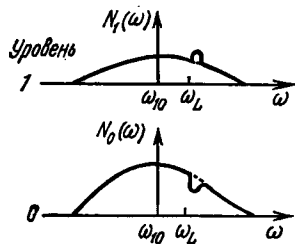
для отданной мощности и для параметров накачки, могут быть с помощью уравнений (3.12-9а), (3.12-9б) и (3.12-31) однозначно связаны с атомными величинами (дипольный момент, времена релаксации, частоты переходов) и с внешними параметрами (потери в резонаторе, объем, мощность накачки). Выше это было показано в явном виде на примере трехуровневого лазера; при надлежащем изменении интерпретации это оказывается возможным сделать и для четырехуровневого лазера и приводит к аналогичным уравнениям.

Изложенный метод решения уравнения (3.12-32) хорошо приспособлен для решения важного для лазеров вопроса о достижимой монохроматичности, т. е. о минимальной ширине линии. При соответствующем выборе внешних параметров для относительной ширины линии получаются теоретические значения вплоть до $5 \cdot 10^{-17}$ у лазера низкого давления на CO_2 (10,6 мкм) и $2 \cdot 10^{-17}$ у He—Ne-лазера (0,6328 мкм); в обоих случаях было принято значение $(\beta/\nu' - 1) = 1$. Для CO_2 -лазера мы применили значения $\nu' = 6 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\xi = 5 \cdot 10^{17} \text{ Вт}^{-1} \text{ с}^{-2}$, что приводит к значению отданной мощности $1,4 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}$; соответствующие значения для He—Ne-лазера следующие: $\nu' = 3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\xi = 2 \cdot 10^{17} \text{ Вт}^{-1} \text{ с}^{-2}$ и $L = 9 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}$. Сравнение с достигаемыми в действительности минимальными ширинами линий можно сделать на основании данных п. В1.112.

3.125. Частотная зависимость входной мощности лазера при линии флуоресценции, уширенной вследствие эффекта Доплера

Прежде всего рассмотрим воздействие лазерного излучения на газ в тепловом равновесии. Будем считать, что функция формы линии $g_{10}(\omega)$ для разрешенного перехода задается доплеровским распределением (ср. п. 3.112). Падающее лазерное излучение можно считать монохроматическим в том смысле, что ширина его линии мала по сравнению с доплеровской шириной и мала также по сравнению с однородной шириной линии. Если частота ω_L лазерного излучения больше частоты ω_{10} центральной линии и если разность $(\omega_L - \omega_{10})$ не превосходит существенно доплеровскую ширину, то может

иметь место взаимодействие лазерного излучения с группой молекул, имеющих компоненту скорости в направлении лазерного излучения; это непосредственно видно из пояснений к фиг. 27. Если лазерное излучение достаточно интенсивно, то вследствие поглощения в этой группе молекул произойдет заметное перераспределение населенностей. На фиг. 31 показано распределение

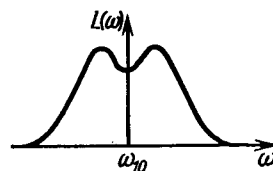


Фиг. 31. Инверсия населенностей на линии, уширенной вследствие эффекта Доплера.

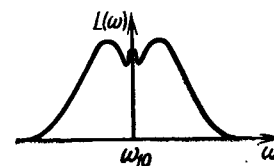
по верхним и нижним уровням при воздействии лазерного излучения; в отсутствие поля излучения функция распределения была бы симметричной относительно ω_{10} . Ширина горба и провала соответствует не зависящей от интенсивности однородной ширине линии, на которую накладывается зависящее от интенсивности уширение (ср. табл. 3). Число частиц, вовлеченных в перераспределение населенностей, определяется зависящими от интенсивности скоростями переходов между обоими уровнями [см. уравнения (3.11-21) и (3.11-22)] и релаксационными процессами, в которых участвуют оба уровня; следует отметить нарастание этого числа частиц с возрастанием интенсивности лазерного облучения до не слишком высоких значений. Если при помощи дополнительного слабого контрольного лазера снять линию поглощения, то на месте ω_L и в окрестности этой частоты порядка однородной ширины линии обнаружится заметное ослабление поглощения, пропорциональное разности $[N_0(\omega) - N_1(\omega)]$. Появление этой узкой по сравнению с доплеровской шириной линии должно рассматриваться как изменение свойств газа, индуцированное лазерным излучением.

Перейдем теперь к излучению газового лазера. Если до сих пор (ср. фиг. 31) мы рассматривали среду, «готовую к поглощению», то теперь примем во внимание, что в лазерном резонаторе электромагнитное излучение взаимодействует с уширенной вследствие эффекта Доплера и «готовой к излучению» средой, в которой вслед-

ствие накачки $N_1(\omega) > N_0(\omega)$. При взаимодействии с бегущей электромагнитной волной, имеющей частоту ω_L , в окрестности этой частоты происходит снижение инверсии вследствие механизма, описанного в п. 3.121. Поле излучения в лазерном резонаторе может рассматриваться как суперпозиция двух противоположных бегущих волн одинаковой интенсивности и одинаковой частоты. Обе волны уменьшают инверсию на некоторой определенной частоте; обе «инверсионные дыры» расположены симметрично



Фиг. 32а. Лэмбовский провал.



Фиг. 32б. Обращенный лэмбовский провал.

относительно центральной частоты ω_{10} (так как эти волны распространяются в противоположных направлениях). В частном случае $\omega_L = \omega_{10}$ в центре линии получается значительное ослабление инверсии, так как тогда обе дыры сливаются в одну дыру. Усиленное снижение инверсии приводит (ср. п. В1.111) к меньшему усилению и, следовательно, к снижению выходной мощности L . Поэтому в результате перестройки лазерной частоты (хотя бы путем изменения длины резонатора) на контуре создается углубление — так называемый *лэмбовский провал* [3.12-5] — при $\omega \approx \omega_{10}$; спектральное распределение $L(\omega)$ показано на фиг. 32а.

Обсуждаемые явления нашли важные применения [В1.11-1]; одним из них служит так называемое индуцированное лазером сужение линии, которое тесно связано с изложенным выше методом перераспределения населенностей в готовой к поглощению среде; второе применение может быть названо техникой *обращенного лэмбовского провала*; в этом случае в резонатор помещается, кроме активной среды, кювета с поглощающим

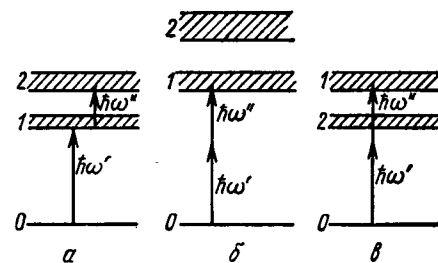
газом. В поглощающем газе происходит резонансное поглощение лазерного излучения, что влечет за собой усиление выходной мощности в центре лэмбовского провала, т. е. возникает так называемый *обращенный лэмбовский провал* (фиг. 32б); его ширина соответствует однородной ширине линии поглощающего газа. Поскольку этот газ может находиться при сравнительно низком давлении и при низкой температуре, то достигается малая ширина линии обращенного лэмбовского провала. Значение этого метода заключается в создании «нелинейной лазерной спектроскопии внутри доплеровской ширины», с помощью которой могут быть проведены измерения однородно уширенных линий частиц газа. Обычно однородное уширение перекрывается доплеровским уширением. Из данных табл. 3 явствует, что таким способом могут быть измерены относительные ширины линий порядка 10^{-10} и, следовательно, достигается эффективное улучшение разрешающей способности на три порядка. Другое важное применение заключается в стабилизации лазера с помощью возникающего при обратном лэмбовском провале узкого резонанса, что имеет принципиальное и практическое значение для создания метрологических методов измерения времени и длины (ср. п. В1.112).

3.13. Многофотонное поглощение

Уже задолго до создания лазеров были открыты процессы, в которых атомная система поглощает несколько световых квантов и при этом переходит в состояние с энергией, превышающей энергию основного состояния на сумму энергий поглощенных квантов. Но эти процессы представляли собой следующие друг за другом однофотонные процессы, в результате которых молекула претерпевала ступенчатое возбуждение с одного резонансного уровня на другой. В отличие от такого возбуждения лишь после создания первого лазера удалось достичь состояний с высокой энергией путем *одновременного* поглощения двух или нескольких фотонов без возбуждения промежуточного резонансного уровня

(фиг. 33). Таким образом, здесь речь идет об истинном многофотонном процессе, при котором в результате *одного* акта взаимодействия с атомной системой уничтожается несколько фотонов в одной или в различных модах поля излучения. Эффект подобного рода был предсказан и рассчитан в 1930 г. М. Гёпперт-Майер.

Многофотонное поглощение (в частности, двухфотонное поглощение) открывает в спектроскопии новые горизонты, что привело в последние годы к более широким ее применениям.



Фиг. 33. Возбуждение атомной системы при поглощении двух фотонов с энергиями $h\omega'$ или $h\omega''$. а — ступенчатый процесс; б — двухфотонное поглощение; в — двухфотонное поглощение с участием промежуточного уровня вблизи резонанса.

Во-первых, оказалось возможным экспериментально зафиксировать переходы, запрещенные правилами отбора для однофотонных переходов или находящиеся при однофотонном поглощении в неблагоприятной для исследования спектральной области [3.13-1^а]. Многофотонные и однофотонные процессы подчиняются различным правилам отбора, в качестве примера можно указать на изменение квантового числа вращательного импульса в атомной спектроскопии, которое равно ± 1 для однофотонных процессов, а для двухфотонных процессов составляет 0 или ± 2 .

Во-вторых, применение *поляризационной спектроскопии* при многофотонном поглощении создает больше степеней свободы, чем при однофотонном поглощении, так как имеется возможность независимым образом выби-

рать направления поляризации различных мод падающего света, одновременно участвующих в процессе поглощения. Благодаря этому создаются эффекты, зависящие от поляризации двух или нескольких световых волн друг относительно друга; эти эффекты имеют место даже в изотропных средах [3.13-2].

В-третьих, двухфотонное поглощение можно использовать для получения узких резонансов в *спектроскопии высокого разрешения*. Такие узкие резонансы возникают в центре уширенных вследствие эффекта Доплера линий в поле встречных волн с частотой ω_L (ср. п. 3.112), распространяющихся в направлениях z и $-z$. Для атома с компонентой скорости v_z одна волна обладает частотой $\omega' = \omega_L + |k_L|v_z$, а другая — частотой $\omega'' = \omega_L - |k_L|v_z$. Все атомы независимо от их скорости принимают одинаковое участие в двухфотонном поглощении встречных волн при выполнении условия резонанса $\omega_{10} = \omega' + \omega'' = 2\omega_L$ между частотой перехода ω_{10} и лазерной частотой ω_L . Ширина этого резонанса определяется исключительно однородной шириной линии, которую можно измерить на основании описанного метода (см., например, [3.1-7]).

В-четвертых, поскольку в твердых телах осуществима спектроскопия не только в пространстве частот, но и в *пространстве волновых векторов и в импульсном пространстве*, то двухфотонное поглощение имеет очень интересные возможности применения в физике твердого тела (ср. п. 3.135).

В заключение укажем еще на один важный частный случай многофотонного поглощения: *многофотонную ионизацию*. При этом происходит возбуждение атомной системы не в дискретное связанное состояние, а в континуум ионизации. Очень чувствительный электрический метод обнаружения продуктов ионизации позволяет наблюдать многофотонные эффекты очень высокого порядка. Многофотонная ионизация играет важную роль в образовании индуцированной лазером плазмы, так как она создает в нейтральной среде, а именно в газе, свободные носители зарядов. В результате других эффектов взаимодействия с электромагнитным полем эти заряды осуществляют затем лавинную реакцию [3.13-3].

Ниже мы исследуем процесс двухфотонного поглощения сначала на полуклассической основе и определим соответствующие восприимчивости. Затем мы выполним квантовый расчет. В обоих случаях главное внимание будет уделено процессу двухфотонного поглощения, а атомные системы будем считать слабо связанными; размеры каждой из них малы по сравнению с длинами волн падающего света. Результаты полуклассических и квантовых расчетов мы сравним между собой и с экспериментальными данными.

В заключение будут рассмотрены некоторые специальные аспекты многофотонной ионизации и многофотонного поглощения в твердых телах.

3.131. Полуклассическое вычисление восприимчивостей и поперечных сечений

Вычислим восприимчивость третьего порядка для процесса двухфотонного поглощения и для этой цели будем исходить из общих представлений разд. 2.33, и в частности из уравнения (2.33-12). Предположим, что в невозмущенной системе все атомы находятся в основном состоянии, т. е. $\rho_{\alpha\alpha}^{(0)} = \delta_{\alpha\alpha}$. Мы ставим перед собой задачу определить восприимчивость, описывающую ослабление светового сигнала на частоте ω' вследствие двухфотонного поглощения в поле сильного источника накачки частоты ω'' . Для этого необходимо знать нелинейную компоненту поляризации третьего порядка на частоте $\omega' = \omega' + \omega'' - \omega''$, зависящую от восприимчивости $\chi^{(3)}(\omega', \omega'', -\omega'')$. Мы обсудим прежде всего область положительных значений частот ($\omega', \omega'' > 0$). Из уравнения (2.33-12) следует, что при этих предположках только в двух его последних членах [а также в членах, возникающих из них путем перестановки $(\omega', p) \rightleftharpoons (\omega'', q)$] слагаемые, в которых индекс суммирования γ принимает значение 1, содержат двухфотонный резонансный знаменатель вида $\omega_{10} - \omega' - \omega'' + (i/\tau_{10})$. В дальнейшем мы будем учитывать только эти четыре резонансных члена и допустим, что однофотонный резо-

нанс отсутствует:

$$\begin{aligned}
 {}^1\chi_{kprq}^{(3)}(\omega', \omega'', -\omega'') &= \frac{\gamma}{6\hbar^3} \frac{1}{\left(\omega_{10} - \omega' - \omega'' + \frac{i}{\tau_{10}}\right)} \times \\
 &\times \sum_{\beta, \delta} \left\{ \frac{d_{p0\beta} d_{q\beta 1} d_{k1\delta} d_{r\delta 0}}{(\omega_{\beta 0} - \omega')(\omega_{\delta 0} - \omega'')} + \right. \\
 &+ \frac{d_{p0\beta} d_{q\beta 1} d_{r1\delta} d_{k\delta 0}}{(\omega_{\beta 0} - \omega')(\omega_{\delta 0} - \omega')} + \\
 &+ \frac{d_{q0\beta} d_{p\beta 1} d_{k1\delta} d_{r\delta 0}}{(\omega_{\beta 0} - \omega'')(\omega_{\delta 0} - \omega'')} + \\
 &\left. + \frac{d_{q0\beta} d_{p\beta 1} d_{r1\delta} d_{k\delta 0}}{(\omega_{\beta 0} - \omega'')(\omega_{\delta 0} - \omega')} \right\}. \quad (3.13-1)
 \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках можно представить в виде произведения двух множителей, из которых один зависит только от β , а другой — только от δ . Поэтому двойная сумма распадается на произведение двух сумм, и можно при сокращенном обозначении

$$\alpha_{pq01}(\omega', \omega'') = \frac{1}{\hbar} \sum_{\beta} \left\{ \frac{d_{p0\beta} d_{q\beta 1}}{\omega_{\beta 0} - \omega'} + \frac{d_{q0\beta} d_{p\beta 1}}{\omega_{\beta 0} - \omega''} \right\} \quad (3.13-2)$$

представить восприимчивость в виде

$$\begin{aligned}
 {}^1\chi_{kprq}^{(3)}(\omega', \omega'', -\omega'') &= \frac{\gamma}{6\hbar} \frac{\omega_{10} - \omega' - \omega'' - \frac{i}{\tau_{10}}}{\left(\omega_{10} - \omega' - \omega''\right)^2 + \frac{1}{\tau_{10}^2}} \times \\
 &\times \alpha_{pq01}(\omega', \omega'') \alpha_{kr01}^*(\omega', \omega''). \quad (3.13-3)
 \end{aligned}$$

Величина α_{pq01} имеет размерность поляризуемости и может быть названа обобщенным тензором поляризуемости. Из разд. 2.33 следует, что обычный тензор поляризуемости может быть представлен в аналогичной форме

$$\begin{aligned}
 \alpha_{pq}(\omega) &= \frac{1}{\gamma} {}^1\chi(\omega) = \alpha_{pq00}(-\omega, \omega) = \\
 &= \frac{1}{\hbar} \sum_{\beta} \left\{ \frac{d_{p0\beta} d_{q\beta 0}}{\omega_{\beta 0} + \omega} + \frac{d_{q0\beta} d_{p\beta 0}}{\omega_{\beta 0} - \omega} \right\}.
 \end{aligned}$$

где матричные элементы составлены с волновыми функциями основного состояния. Мы видим, что частотная зависимость мнимой части восприимчивости ${}^1\chi^{(3)}$, точно так же, как и в случае однофотонного процесса, в значительной мере определяется функцией Лоренца (при сделанных предположениях). Вещественная часть обнаруживает соответствующую дисперсионную зависимость. По аналогии с трактовкой однофотонных взаимодействий могут быть рассмотрены другие механизмы уширения линий, а следовательно, и другие формы линий; для этого следует функцию Лоренца заменить более общей функцией формы линии $g_{10}(\omega_{10} - \omega' - \omega'')$ (ср. п. 3.114):

$$\begin{aligned}
 \text{Im } {}^1\chi_{kprq}^{(3)}(\omega', \omega'', -\omega'') &= -\frac{\gamma\pi}{6\hbar} g_{10}(\omega_{10} - \omega' - \omega'') \times \\
 &\times \alpha_{pq01}(\omega', \omega'') \alpha_{kr01}^*(\omega', \omega''). \quad (3.13-4)
 \end{aligned}$$

При оценке восприимчивости мы сначала рассмотрим случай, в котором все уровни с индексом β , так называемые «промежуточные» уровни, обладают энергией более высокой, чем энергия уровня 1; тем самым обеспечивается достаточное удаление от однофотонного резонанса. Для оценки мы можем принять, что только один уровень ($\beta=2$) существенным образом определяет процесс. Со значениями параметров для электронных переходов из уравнения (3.11-8) получаем оценку

$$\alpha_{01} \approx \frac{2}{\hbar} \frac{d_{02} d_{21}}{\omega_{20}} \approx 10^{-40} \frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2}{\text{В}}.$$

Для мнимой части восприимчивости на частоте $\omega' + \omega'' = \omega_{10}$ имеем

$$-\text{Im } {}^1\chi^{(3)}(\omega', \omega'', -\omega'') = \frac{\gamma\tau_{10}}{6\hbar} |\alpha_{01}|^2 \approx 10^{-32} \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{В}^{-3}. \quad (3.13-5)$$

Более высокие значения α_{01} и $\text{Im } {}^1\chi^{(3)}$ достигаются вблизи однофотонного резонанса, т. е. тогда, когда уровень 2 расположен между уровнями 1 и 0 вблизи значения энергии $\hbar\omega'$ или $\hbar\omega''$; например, при $|\omega_{20} - \omega'| \approx 5\Delta\omega_{20}$ для матричного элемента поляризуемости получается $\alpha_{01} \approx 10^{-39} \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2/\text{В}^{-1}$ и $-\text{Im } {}^1\chi^{(3)} \approx 10^{-80} \text{А} \times$

$\times \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{В}^{-3}$. Если желательно воспользоваться значениями восприимчивости $\chi^{(3)}$ для дискретного спектра частот, то их можно определить снова на основании соотношений, обсужденных в ч. I, п. 1.213: для $\omega' \neq \omega''$ справедливо соотношение

$$\chi^{(3)}(\omega'; \omega', \omega'', -\omega'') = \frac{3}{2} \chi^{(3)}(\omega', \omega'', -\omega'). \quad (3.13-6)$$

В случае двухфотонного поглощения одинаковых фотонов получаем

$$\chi^{(3)}(\omega'; \omega', \omega', -\omega') = \frac{3}{4} \chi^{(3)}(\omega', \omega', -\omega'). \quad (3.13-7)$$

В качестве применения полученных восприимчивостей вычислим мощность излучения от слабого источника света с частотой ω' , поглощаемую в единице объема при стационарных условиях. Согласно ч. I, разд. 1.31, нас интересует величина

$$E \cdot \frac{d}{dt} P = \frac{i\omega'}{4} \hat{E}^*(\omega') \hat{P}(\omega') + \{KK\}. \quad (3.13-8)$$

Для света одного направления поляризации при амплитуде поляризации $\hat{P}(\omega') = \chi^{(3)}(\omega'; \omega', \omega'', -\omega'') \hat{E}(\omega') \times |E(\omega'')|^2$ получим

$$E \frac{d}{dt} P = -\frac{\omega'}{2} \text{Im} \chi^{(3)}(\omega'; \omega', \omega'', -\omega'') |\hat{E}(\omega')|^2 |\hat{E}(\omega'')|^2. \quad (3.13-9)$$

Следовательно, мощность, поглощаемая из волны с частотой ω' , пропорциональна произведению интенсивностей волн с частотами ω' и ω'' . Принимая во внимание, что

$$|\hat{E}(\omega)|^2 = \frac{2\mu_0 c}{n^{(j)}} S(\omega); \quad n^{(j)}(\omega') \approx n^{(j)}(\omega'') = n^{(j)},$$

получаем для коэффициента поглощения двухфотонного процесса при частоте сигнала ω'

$$\kappa_a^{(2)} = -\frac{2\mu_0^2 c^2 \omega'}{(n^{(j)})^2} \text{Im} \chi^{(3)}(\omega'; \omega', \omega'', -\omega'') S(\omega''). \quad (3.13-10)$$

Для поглощающих независимо друг от друга атомных систем можно из $\kappa_a^{(2)}$ путем деления на плотность числа

частиц γ получить поперечное сечение $\sigma^{(2)}$ для молекулярного возбуждения путем двухфотонного поглощения:

$$\sigma^{(2)} = \frac{2\mu_0^2 c^2 \omega'}{(n^{(j)})^2} \left(\frac{-\text{Im} \chi^{(3)}}{\gamma} \right) S(\omega''). \quad (3.13-11)$$

Отсюда видно, что коэффициент поглощения (или поперечное сечение) пропорционален интенсивности сильной волны с частотой ω'' , т. е. поглощательная способность возникает под действием сильной волны. В качестве молекулярного параметра, характеризующего силу двухфотонного поглощения, можно выбрать эффективное сечение $\sigma^{(2)}$, отнесенное к интенсивности $S(\omega'')$ волны накачки или к плотности потока фотонов $J(\omega'') = (1/\hbar \omega'') S(\omega'')$. Мы выберем вторую возможность и введем определение

$$\tilde{\sigma}^{(2)} = \frac{\sigma^{(2)}}{J(\omega'')} = \frac{2\mu_0^2 c^2 \omega' \hbar \omega''}{(n^{(j)})^2} \left(\frac{-\text{Im} \chi^{(3)}}{\gamma} \right), \quad (3.13-12)$$

где

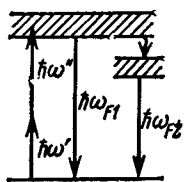
$$\frac{-\text{Im} \chi^{(3)}}{\gamma} = \frac{\pi}{4\hbar} g_{10}(\omega_{10} - \omega' - \omega'') |\alpha_{01}|^2. \quad (3.13-13)$$

Подставляя численное значение восприимчивости из (3.13-5), получаем для эффективного сечения

$$\tilde{\sigma}^{(2)} \approx 10^{-57} \text{м}^4 \cdot \text{с}.$$

При плотностях потока фотонов порядка 10^{30} фотон $\times \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ (в соответствии с $5 \cdot 10^{11}$ Вт $\cdot \text{м}^{-2}$ при круговой частоте $\omega'' = 5 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$) отсюда следует значение $\tilde{\sigma}^{(2)}/C_F^{(3)} \approx 2 \cdot 10^{-27}$ м 2 и при $\gamma = 10^{28}$ м $^{-3}$ коэффициент поглощения $\kappa_a^{(2)}/C_F^{(3)} \approx 20$ м $^{-1}$ ($C_F^{(3)}$ — полевой поправочный множитель, см. разд. 2.35). Таким образом, мы видим, что даже при допущенных высоких значениях переходных моментов и при высоких плотностях частиц необходимы сравнительно длинные кюветы ($\approx 0,1$ м) для наблюдения существенного поглощения. Поскольку, вообще говоря, при высоких плотностях частиц предположение о независимости поглощающих молекул уже не выполняется, то измерения $\tilde{\sigma}^{(2)}$ следует проводить при

сравнительно низких концентрациях активных молекул (например, в растворе или в кристаллической матрице). Но тогда прямое наблюдение двухфотонного поглощения при существующей технике измерений становится затруднительным или даже невозможным. Существуют, однако, косвенные методы, гораздо более чувствительные. Например, можно наблюдать флуоресцентное излучение молекулы, возбужденной в результате двухфотонного поглощения (фиг. 34). При этом флуоресценция



Фиг. 34. Двухфотонное поглощение с последующей флуоресценцией.

может происходить непосредственно с возбужденного уровня (ω_{F1}) или с некоторого нижележащего уровня (ω_{F2}), на который молекула переходит путем безызлучательного процесса. Для таких процессов флуоресценции характерно, что свет флуоресценции в общем случае имеет более короткую волну, чем волна возбуждающего излучения. Флуоресцентный метод очень чувствителен, и поэтому им можно пользоваться еще при концентрациях $\nu \approx 10^{24} \text{ м}^{-3}$, при которых требование

об отсутствии взаимодействия между активными молекулами гораздо лучше выполняется. Заканчивая полуклассическое вычисление таких величин, как восприимчивость и поляризация, укажем снова на возможность прямого полуклассического вычисления также и эффективного сечения в рамках теории возмущений (ср. разд. 2.35). Оба метода приводят к идентичным результатам, как это видно, например, из сравнения уравнений (2.35-24) и (3.12-5). С помощью обоих методов можно аналогичным путем изучить также процессы поглощения более высокого порядка.

3.132. Квантовое вычисление вероятностей переходов

В качестве конкретного примера предсказаний, относящихся к общим двухфотонным процессам, мы уже вывели в разд. 2.22 скорость изменения вероятности перехода при двухфотонном поглощении $\Delta w_{a \rightarrow e}^{(4)} / \Delta t$ в атом-

ной системе [ср. уравнение (2.22-9)]; при этом мы исходили из «основного» оператора для описания взаимодействия в дипольном приближении $\mathbf{H} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$. До включения взаимодействия полная система находилась в энергетическом состоянии $|\mathcal{E}_{A,a}\rangle$ атомной системы и в состоянии с числом фотонов n_{μ_1} и n_{μ_2} соответственно в μ_1 -й и в μ_2 -й модах; в результате взаимодействия полная система переходит из начального состояния $|\mathcal{E}_a\rangle = |\mathcal{E}_{A,a}\rangle |n_{\mu_1}, n_{\mu_2}\rangle$ в конечное состояние $|\mathcal{E}_e\rangle = |\mathcal{E}_{A,e}\rangle |n_{\mu_1} - 1, n_{\mu_2} - 1\rangle$ с вероятностью $w_{a \rightarrow e}^{(4)}(t)$. Пользуясь соотношением $\langle n_{\mu} - 1 | \mathbf{E}_{\mu}^{(-)} \cdot | n_{\mu} \rangle = \sqrt{\hbar \omega_{\mu} / 2 \epsilon_0 V} e_{\mu,i} \times \times \sqrt{n_{\mu}} e^{ik_{\mu} \cdot r}$, получим из уравнения (2.22-9)

$$\frac{\Delta w_{a \rightarrow e}^{(4)}(t)}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar \omega_{\mu_1} \hbar \omega_{\mu_2}}{(2\epsilon_0 V)^2} |\eta^{\text{ДФП}}|^2 n_{\mu_1} n_{\mu_2} \times \times \delta(\mathcal{E}_{A,e} - \mathcal{E}_{A,a} - \hbar \omega_{\mu_1} - \hbar \omega_{\mu_2}), \quad (3.13-14)$$

где

$$\eta^{\text{ДФП}} = \sum_l \left\{ \frac{(d_{el})_2 (d_{la})_1}{\mathcal{E}_{A,a} - \mathcal{E}_{A,l} + \hbar \omega_{\mu_1}} + \frac{(d_{el})_1 (d_{la})_2}{\mathcal{E}_{A,a} - \mathcal{E}_{A,l} + \hbar \omega_{\mu_2}} \right\}$$

и $(d_{el})_1 = d_{el} \cdot e_{\mu_1}$. Константа взаимодействия $\eta^{\text{ДФП}}$ связана с введенной при классическом описании эффективной поляризуемостью $\alpha_{\dots ae}$ следующей формулой:

$$\eta^{\text{ДФП}} = - \sum_{p,q} \alpha_{pqa}^* e_{\mu,p} e_{\mu_2,q}, \quad (3.13-15)$$

где $e_{\mu,p}$, $e_{\mu_2,q}$ — компоненты модовых единичных векторов. Следовательно, вероятность перехода пропорциональна произведению чисел фотонов n_{μ_1}, n_{μ_2} в обеих модах входного излучения.

По аналогии с методом, примененным при трактовке однофотонных процессов [ср. уравнение (3.11-18)], можно вместо уравнения (3.13-14), выведенного в предположении «резких» уровней энергии, вывести более общее соотношение для отнесенной к единице частоты скорости перехода под действием обеих падающих волн. Оно будет справедливым для переходов с произвольной нормированной функцией формы линии $g_{ea}(\omega_{ea} - \omega_1 - \omega_2)$,

а при интенсивностях $S_\omega(\omega_1 - \omega')$ и $S_\omega(\omega_2 - \omega'')$, относенных к единице круговой частоты, в окрестности ω' и ω'' имеет вид

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\omega_1, \omega_2} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{\mu_0}{4\epsilon_0 (n^{(n)})^2} \times \\ \times |\eta^{ДФП}|^2 S_\omega(\omega_1 - \omega') S_\omega(\omega_2 - \omega'') \times \\ \times g_{ea}(\omega_{ea} - \omega_1 - \omega_2). \quad (3.13-16)$$

В частности, для линий падающего лазерного света, узких по сравнению с шириной функции g_{ea} и приближенно характеризуемых соотношением

$$S_\omega(\omega_1 - \omega') = S(\omega') \delta(\omega_1 - \omega'),$$

отсюда следует

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{\mu_0}{4\epsilon_0 (n^{(n)})^2} |\eta^{ДФП}|^2 \times \\ \times S(\omega') S(\omega'') g_{ea}(\omega_{ea} - \omega' - \omega''). \quad (3.13-17)$$

Убедимся в идентичности с результатом полуклассического расчета для волн с дискретными частотами (ср. п. 3.131). Для этого достаточно заметить, что поглощаемая в единице объема мощность из волны с частотой ω' удовлетворяет уравнению

$$\overline{E \frac{d}{dt} P} = \hbar \omega' \gamma \frac{dW}{dt}.$$

В разд. 2.22 было показано, что применение специально построенного для двухфотонного поглощения оператора взаимодействия $\mathbf{H}^{ДФП} = \eta^{ДФП} \mathbf{b}_e^+ \mathbf{b}_a \mathbf{E}_{\mu_1}^{(-)} \mathbf{E}_{\mu_2}^{(-)} + \{HA\}$ [ср. уравнение (2.22-10) и замечания после уравнения (2.22-11)] приводит к таким же результатам для вероятности перехода, какие получаются уже в низшем порядке теории возмущений. Этот специальный оператор взаимодействия оказывается особенно удобным при вычислении математических ожиданий определенных полевых величин, например числа фотонов или напряженности поля при общих состояниях поля; мы вернемся к этому в § 3.3 при изучении роли когерентности.

3.133. Вычисление затухания волны в двухфотонном поглотителе

До сих пор мы рассматривали поглощение в тонком слое двухфотонного поглотителя или исследовали влияние отдельных атомов на фотоны резонансной моды в зависимости от времени. При этом полуклассическое и последовательное квантовое рассмотрение приводили к совпадающим результатам, относящимся к доступным экспериментальной проверке соотношениям (например, для скоростей изменения вероятностей переходов) и значениям важных параметров.

Исследуем теперь затухание волны в двухфотонном поглотителе конечной плотности. Для этой цели будем исходить из классической формулы для пространственного изменения усредненного по времени вектора Пойнтинга сигнальной волны с частотой ω' и амплитудой напряженности поля $\hat{E}(\omega', z)$:

$$\frac{d}{dz} S(\omega'; z) = -\frac{i\omega'}{4} \hat{E}^*(\omega'; z) \hat{P}(\omega'; z) + \{KK\}, \quad (3.13-18)$$

где $\hat{P}(\omega'; z)$ — амплитуда поляризации в среде (ср. ч. I, разд. 1.31).

При анализе двухфотонного поглощения следует различать два случая, в которых нелинейная поляризация на частоте ω' создается сильной волной на другой частоте ω'' или волной на той же частоте ω' . В первом случае уравнение затухания имеет структуру

$$\frac{d}{dz} S(\omega'; z) = -\kappa_a^{(2)} S(\omega'; z), \quad (3.13-19)$$

где коэффициент двухфотонного поглощения $\kappa_a^{(2)}$ задан уравнением (3.13-10). Если допустить, что интенсивность сильной волны накачки на частоте ω'' не зависит от z , то структура уравнения (3.13-19) будет идентична структуре уравнения для процесса однофотонного поглощения, и тогда получим экспоненциальный закон пространственного затухания:

$$S(\omega'; z) = S(\omega'; 0) \exp[-\kappa_a^{(2)} z]. \quad (3.13-20)$$

Однако для двухфотонного поглощения единственной

волны с частотой ω' имеет место другое уравнение:

$$\frac{d}{dz} S(\omega'; z) = -b[S(\omega'; z)]^2, \quad (3.13-21)$$

где

$$b = \frac{2\mu_0^2 c^2 \omega'}{(n^{(n)})^2} [-\text{Im} \chi^{(3)}(\omega'; \omega', \omega', -\omega')].$$

Его решение запишется в виде

$$S(\omega'; z) = S(\omega'; 0) \frac{1}{1 + bzS(\omega'; 0)}. \quad (3.13-22)$$

Отсюда видно, что при больших значениях $bzS(\omega'; 0)$ процесс поглощения создает выходной сигнал вида $S(\omega'; z) = 1/bz$, который не зависит от входной интенсивности. Оба различных закона поглощения были проверены экспериментально.

При экспериментальных исследованиях необходимо обращать особое внимание на то, чтобы затухание вследствие двухфотонного поглощения не перекрывалось однофотонным поглощением из возбужденного состояния на более высокие уровни [3.13-4].

3.134. Многофотонная ионизация

Многофотонная ионизация уже была упомянута во введении к настоящему разделу как частный случай многофотонного поглощения; в соответствии с этим мы рассмотрим вероятность перехода при этом процессе, исходя из результатов п. 3.132. Обсудим (без существенного ограничения общности) случай, когда атомная система облучается светом только одной моды. Тогда вероятность перехода в единицу времени, например, для двухфотонных переходов между дискретными уровнями определяется формулой

$$\frac{\Delta\omega_{a \rightarrow e}^{(4)}(t)}{\Delta t} = |K_{ae}^{(2)}|^2 [\hbar\omega J(\omega)]^2 \delta(\mathcal{E}_{ea}), \quad (3.13-23)$$

где $K_{ae}^{(2)}$ есть константа связи, пропорциональная $\eta^{(ДФП)}$, $J(\omega) = S(\omega)/\hbar\omega = nc$ — плотность потока фотонов в моде падающего света с n фотонами и $\mathcal{E}_{ea} = (\mathcal{E}_{A, e} -$

$-\mathcal{E}_{A, a} - 2\hbar\omega)$ [ср. уравнение (3.13-14)]. Если же переходы происходят не в дискретное состояние, а в область континуума состояний атомной системы с плотностью состояний $\sigma(\mathcal{E}_{A, e})$, то вместо (3.13-23) получается полная вероятность перехода в единицу времени [ср. уравнение (B2.26-10) и рассуждения о функции формы линии в разд. 3.11]:

$$\frac{\Delta W(t)}{\Delta t} = |K_{ae}^{(2)}|^2 [\hbar\omega J]^2 \sigma(\mathcal{E}_{A, e}), \quad (3.13-24)$$

где плотность состояний $\sigma(\mathcal{E}_{A, e})$ должна вычисляться в месте, задаваемом уравнением $\mathcal{E}_{ae} = \mathcal{E}_{\text{ион}} + (\hbar k^2/2m) - 2\hbar\omega = 0$; в последнем уравнении $\mathcal{E}_{\text{ион}}$ есть энергия ионизации, k — модуль волнового вектора электрона и m — его масса. Собственные функции свободного электрона, возникающего в результате ионизации, нормированы таким образом, что для зависимости плотности состояний от волнового вектора имеет место соотношение $\sigma(k) d^3k = (1/2\pi)^3 d^3k$ (ср. [3.13-5]). Отсюда для $\sigma(\mathcal{E}_{A, e})$ получаем

$$\sigma(\mathcal{E}_{A, e}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \frac{m}{\hbar^2} k \Delta\Omega_k \quad (3.13-25)$$

($\Delta\Omega_k$ есть элемент телесного угла в пространстве волновых векторов k). Отсюда следует формула для вероятности перехода в электронное состояние, в котором волновой вектор электрона находится в элементе телесного угла $\Delta\Omega_k$:

$$\frac{\Delta W_{\Omega}(\Omega_k, t)}{\Delta t} \Delta\Omega_k = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \frac{m}{\hbar^2} k |K_{ae}^{(2)}|^2 [\hbar\omega J]^2 \Delta\Omega_k, \quad (3.13-26)$$

и формула для полной вероятности перехода в состояние с любым направлением движения электрона:

$$\frac{\Delta W(t)}{\Delta t} = \int d\Omega_k \frac{\Delta W_{\Omega}(\Omega_k, t)}{\Delta t}, \quad (3.13-27)$$

где интегрирование выполняется по всему пространству углов.

Существенное отличие вычисления матричных элементов $K_{ae}^{(2)}$ по сравнению со всеми до сих пор рассмотренными проблемами состоит в том, что конечное со-

стояние есть состояние континуума. Для водородоподобных систем конечное состояние может быть разложено по собственным состояниям кулоновской проблемы для положительных энергий (см., например, [3.13-6]), а матричные элементы могут быть вычислены без принципиальных затруднений (см., например, [3.13-7]).

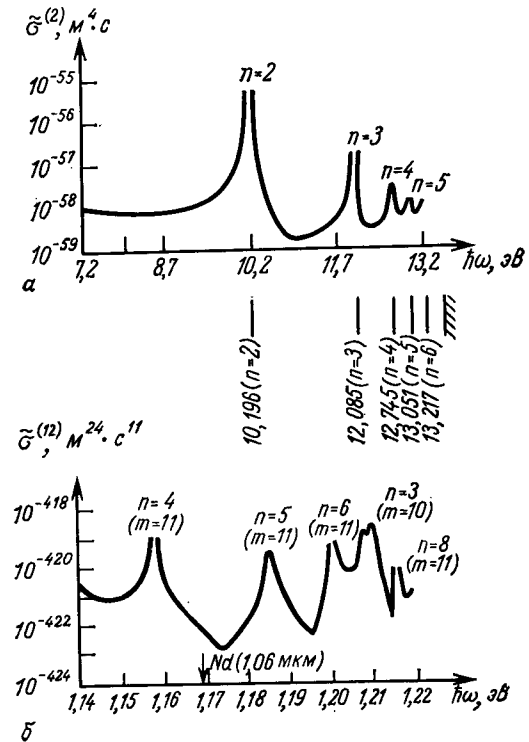
Проблема n -фотонной ионизации решается путем вычисления вероятности перехода соответственно в n -м порядке. Вместо уравнения (3.13-26) получается

$$\frac{\Delta W_{\Omega}(\Omega_k, t)}{\Delta t} \Delta \Omega_k = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{m}{\hbar^2}\right) k |K_{ae}^{(n)}|^2 [\hbar\omega J]^n \Delta \Omega_k. \quad (3.13-28)$$

Таким образом, вероятность перехода зависит от интенсивности в n -й степени.

При измерениях и вычислении поперечных сечений для многофотонной ионизации следует обращать внимание на то, должны ли учитываться промежуточные резонансы и какие именно [3.13-8]. Если типичные значения полных сечений $\sigma^{(2)}$ двухфотонной ионизации при больших удалениях от промежуточных резонансов по порядку величины равны $10^{-50} \text{ м}^2 \cdot \text{с}$, то в области промежуточных резонансов они возрастают на несколько порядков (фиг. 35, а). При эффективных сечениях более высокого порядка сильно возрастают возможности появления промежуточных резонансов. На фиг. 35, б в качестве примера представлена зависимость эффективного сечения процесса двенадцатифотонной ионизации в водороде от энергии фотонов. Обращает на себя внимание влияние промежуточных резонансов. Они возникают в тех местах, в которых при однофотонном процессе достигаются дискретные уровни энергии атома водорода. В данном случае наблюдается несколько промежуточных резонансов, соответствующих поглощению одиннадцати фотонов; имеется также один промежуточный резонанс, соответствующий поглощению десяти фотонов. На фиг. 35, в отмечена энергия фотонов неодимового лазера. Оценим поток фотонов неодимового лазера, необходимый для получения одного электрона в типичных экспериментальных условиях (плотность атомов 10^{26} м^{-3} , фокальный объем лазера 10^{-14} м^{-3} , длитель-

ность импульса 10^{-8} с); при полном эффективном сечении из фиг. 35, б получается $J \approx 10^{35} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Для других



Фиг. 35. Эффективное сечение многофотонной ионизации водорода по [3.13-7].

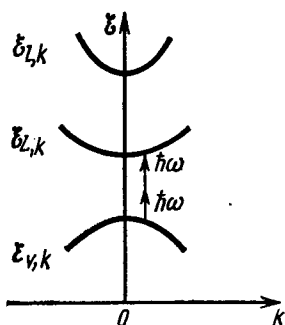
Указано главное квантовое число n резонансного промежуточного уровня. а — двухфотонная ионизация. Ниже кривой расположен спектр водорода; б — двенадцатифотонная ионизация. Кроме главного квантового числа n резонансного промежуточного уровня, указано число фотонов, при котором достигается этот промежуточный резонанс.

атомов получаются значения такого же порядка величины. Отсюда можно заключить, что при фокусировке света импульсных лазеров с обычными параметрами уже может быть достигнута многофотонная ионизация очень высокого порядка, порождающая электроны для

последующих процессов взаимодействия с полем излучения и таким образом инициирующая образование плазмы и явление пробоя.

3.135. Многофотонное поглощение в твердых телах

По аналогии с многофотонным поглощением в молекулах многофотонное поглощение в твердых телах также несет информацию об их энергетической структуре, переходных моментах, заселенностях уровней, а также о параметрах взаимодействия.



Фиг. 36. Модель зонной структуры.

Кривые энергия—квазиимпульс при определении направления вектора k для V -, L - и I -зон.

Будем исходить из зонной модели, представленной на фиг. 36: валентную зону (V) считаем заполненной, а зону проводимости (L) считаем пустой; более высоко лежащие зоны проводимости обозначим I , они образуют промежуточные состояния. Волновые векторы принятых одноэлектронных состояний энергии в зонах обозначим $k_{V\cdot}$, $k_{L\cdot}$, $k_{I\cdot}$, значения энергии $\mathcal{E}_{V, k_{V\cdot}}$, $\mathcal{E}_{L, k_{L\cdot}}$, $\mathcal{E}_{I, k_{I\cdot}}$. Зонная структура в k -пространстве такова, что край зоны находится при $k_{V\cdot} = k_{L\cdot} = k_{I\cdot} = 0$. По аналогии с записью уравнения (3.13-23) мы можем представить скорости переходов в виде

$$\frac{\Delta\omega_{a \rightarrow e}^{(4)}(t)}{\Delta t} = (\hbar\omega J)^2 |\Lambda|^2 \delta(\mathcal{E}_{L, k_{L\cdot}} - \mathcal{E}_{V, k_{V\cdot}} - 2\hbar\omega), \quad (3.13-29)$$

где

$$\Lambda \sim \sum_l \int d^3k_{l\cdot} \times \frac{\langle \mathcal{E}_{L, k_{L\cdot}} | \mathbf{p} \cdot | \mathcal{E}_{I, k_{I\cdot}} \rangle e_{\cdot} \langle \mathcal{E}_{I, k_{I\cdot}} | \mathbf{p} \cdot | \mathcal{E}_{V, k_{V\cdot}} \rangle e_{\cdot}}{\mathcal{E}_{L, k_{L\cdot}} - \mathcal{E}_{V, k_{V\cdot}} - \hbar\omega}.$$

Величина \mathbf{p} есть оператор вектора импульса, J —плотность потока фотонов внутри кристалла. Следует отметить, что вместо оператора радиуса-вектора здесь применяется оператор импульса электрона \mathbf{p} ; кроме того, рассмотрение выполняется в дипольном приближении, в котором множитель $e^{ik\cdot r}$ в важном операторе взаимодействия $-(q_e/m)A\cdot\mathbf{p}$ полагается равным 1 (ср. разд. 2.21). Уравнение (3.13-29) определяет скорость перехода из начального состояния $|\mathcal{E}_{V, k_{V\cdot}}\rangle$ в конечное состояние $|\mathcal{E}_{L, k_{L\cdot}}\rangle$ с фиксированным волновым вектором $k_{L\cdot}$. Однако в целом нужно суммировать по всем конечным состояниям, которые могут быть достигнуты из данного начального состояния. Это приводит к скорости перехода

$$\frac{dW^{(4)}}{dt} = (\hbar\omega J)^2 \int d^3k_{L\cdot} |\Lambda|^2 \delta(\mathcal{E}_{L, k_{L\cdot}} - \mathcal{E}_{V, k_{V\cdot}} - 2\hbar\omega). \quad (3.13-30)$$

До сих пор существенное отличие излагаемой теории от рассмотрения для молекул заключалось только в учете двойного обозначения собственных состояний, а именно номером зоны и волновым числом. Ниже мы должны будем принять во внимание специфические свойства твердых тел. Применяемые функции состояний должны в координатном представлении иметь форму

$$\langle r \cdot | \mathcal{E}_{l, k_{l\cdot}} \rangle = u(l, k_{l\cdot}; r) e^{ik_{l\cdot} r}, \quad (3.13-31)$$

где u —функция от r с периодом решетки, а экспоненциальное выражение представляет собой фактор Блоха; сказанное справедливо также для состояний $|\mathcal{E}_{L, k_{L\cdot}}\rangle$ и $|\mathcal{E}_{V, k_{V\cdot}}\rangle$. Эта форма функций состояний обеспечивает то, что в дипольном приближении не исчезают только

такие переходные моменты, для которых оба состояния имеют один и тот же волновой вектор. Отсюда следует

$$\frac{dW^{(4)}}{dt} = \zeta'(J) \int d^3k \cdot |\xi(k_*)|^2 \delta(\mathcal{E}_{L,k_*} - \mathcal{E}_{V,k_*} - 2\hbar\omega), \quad (3.13-32)$$

где ζ' пропорционально J^2 , а $\xi(k_*)$ определяется формулой

$$\xi(k_*) = \sum_l \frac{\langle \mathcal{E}_{L,k_*} | p \cdot e \cdot | \mathcal{E}_{L,k_*} \rangle \langle \mathcal{E}_{L,k_*} | p \cdot e \cdot | \mathcal{E}_{V,k_*} \rangle}{\mathcal{E}_{L,k_*} - \mathcal{E}_{V,k_*} - \hbar\omega}. \quad (3.13-33)$$

Для дальнейшего вычисления мы будем исходить из следующего упрощающего допущения о зависимости зонных энергий от k . (параболические зоны, изотропные эффективные массы):

$$\mathcal{E}_{V,k_*} = \mathcal{E}_{V,0} - \frac{\hbar^2 k_*^2}{2\tilde{m}_V}, \quad (3.13-34a)$$

$$\mathcal{E}_{L,k_*} = \mathcal{E}_{L,0} + \frac{\hbar^2 k_*^2}{2\tilde{m}_L}. \quad (3.13-34b)$$

Здесь $\mathcal{E}_G = \mathcal{E}_{L,0} - \mathcal{E}_{V,0}$ есть энергетическая щель между зонами; $\tilde{m}_{V,L}$ — эффективные массы валентной зоны и зоны проводимости. Благодаря этой параболической зависимости от $|k_*|$ интегрирование в правой части уравнения (3.13-32) легко выполняется. Введем приведенную массу, определяемую выражением

$$\frac{1}{\tilde{m}} = \frac{1}{\tilde{m}_V} + \frac{1}{\tilde{m}_L}.$$

Тогда δ -функция примет вид

$$\delta\left(\frac{\hbar^2(k_*)^2}{2\tilde{m}} - [2\hbar\omega - \mathcal{E}_G]\right) = \frac{1}{2[2\hbar\omega - \mathcal{E}_G]^{1/2}} \left\{ \delta\left(\frac{\hbar|k_*|}{\sqrt{2\tilde{m}}} - [2\hbar\omega - \mathcal{E}_G]^{1/2}\right) + \delta\left(\frac{\hbar|k_*|}{\sqrt{2\tilde{m}}} + [2\hbar\omega - \mathcal{E}_G]^{1/2}\right) \right\}. \quad (3.13-35)$$

Тем самым интеграл в уравнении (3.13-32) становится пропорциональным

$$[2\hbar\omega - \mathcal{E}_G]^{1/2} |\xi(k_*)|^2,$$

и мы получаем

$$\frac{dW^{(4)}}{dt} = \zeta(J) [2\hbar\omega - \mathcal{E}_G]^{1/2} |\xi(k_*)|^2. \quad (3.13-36)$$

Для k_* следует подставить такое значение, при котором в соответствии с заданной в уравнении (3.13-35) δ -функцией, обеспечивается выполнение закона сохранения энергии. Множитель ζ пропорционален J^2 и содержит, кроме универсальных констант, такие материальные константы (показатель преломления, эффективная масса), которые, как правило, могут определяться при помощи известных методов.

С большими трудностями мы встречаемся при точном определении $|\xi(k_*)|^2$, так как в этом случае важную роль играют более детальные сведения о твердом теле, например такие характеристики, как функции состояний и свойства симметрии обозначенных через l «промежуточных» зон. Для упрощения в некоторой части применяемых моделей пытаются учесть в целом влияние «промежуточных» зон. Так, в одной из моделей [3.13-9] полагают

$$\xi(k_*) = \frac{\langle \mathcal{E}_{L,k_*} | (p \cdot e)^2 | \mathcal{E}_{V,k_*} \rangle}{\bar{\mathcal{E}} - \hbar\omega},$$

где $\bar{\mathcal{E}}$ есть среднее значение, определяемое из сравнения с уравнением (3.13-33). Тогда для разрешенных переходов (в терминах физики твердого тела) вблизи края зоны получим

$$|\xi(k_*)| \simeq \frac{|\langle \mathcal{E}_{L,0} | (p \cdot e)^2 | \mathcal{E}_{V,0} \rangle|}{\hbar\omega}.$$

а для запрещенных переходов (в терминах физики твердого тела)

$$|\xi(k_*)| \simeq \frac{\hbar|k_* e \cdot| |\langle \mathcal{E}_{L,0} | p \cdot e \cdot | \mathcal{E}_{V,0} \rangle|}{\hbar\omega}.$$

Следует заметить, что применяемые здесь названия «разрешенный» и «запрещенный» следует понимать в смысле сравнения четности состояний $|\mathcal{E}_{L,0}\rangle$ и $|\mathcal{E}_{V,0}\rangle$ в точке $k_* = 0$. Но в обоих случаях переход разрешен

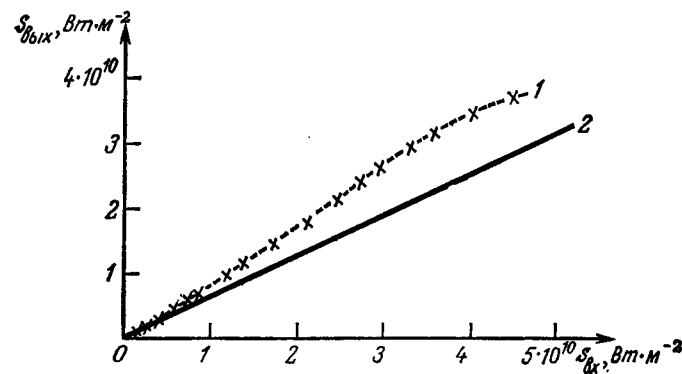
в дипольном приближении; в рассматриваемом случае вероятность перехода обращается в нуль только в точке $k_x = 0$, тогда как в ее окрестности при $|k_x| > 0$ эта вероятность принимает значения, отличные от нуля.

Описанная модель служит только для первого знакомства с данной проблемой. Явный учет всех факторов (влияние симметрии и анизотропии эффективных масс, кулоновское взаимодействие между электронами и дырками, взаимодействие с полем фононов и обусловленное им изменение правил отбора и соотношений между волновыми векторами) очень затруднителен и отчасти по существу проблематичен [3.13-1, 3.13-10—3.13-13]. Поэтому, хотя теоретическое описание и позволяет в общем случае найти функциональные зависимости от параметров падающей волны и атомной системы, для численных значений получаются только оценки или количественные данные. Измерения двухфотонного поглощения в галогенидах щелочных металлов и в CdS привели к значениям коэффициента поглощения порядка нескольких 10^{-1} см^{-1} при плотности потока фотонов порядка $10^{30} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, что согласуется с теоретическими оценками.

При подходящих условиях, относящихся к заселению уровней, может возникать многофотонное поглощение между двумя зонами, из которых одна одновременно участвует в другом процессе поглощения. Примером может служить наблюдаемый в Те процесс однофотонного поглощения между зонами H_4 и H_5 (две валентные подзоны), происходящий одновременно с процессом трехфотонного поглощения между зонами H_5 и H_6 (зона проводимости) при облучении светом $\text{С}^{13}\text{O}_2$ -лазера [3.13-14]; измеренная функция нелинейной прозрачности для обоих процессов показана на фиг. 37. Ее интерпретация позволяет получить данные об эффективном сечении поглощения и об эффективных временах релаксации для между- и внутризонных переходов.

Мы видели, что при описании процессов поглощения существенную роль играют разности энергий атомных систем, а также соответствующие волновые векторы, причем в предположении дипольного приближения могли происходить только переходы без изменения волно-

вых векторов электронов. Если от этого предположения отказаться, то наложенные на волновые числа условия изменяются. Условия $k_V = k_L$ следует заменить условием $k_V + k' + k'' = k_L$, где k' и k'' — волновые векторы, принадлежащие двум модам поля фотонов. Из этого соотношения следует, что при постоянной энергии обоих фотонов $\hbar\omega' = \hbar c|k'|$ и $\hbar\omega'' = \hbar c|k''|$ изменение волнового вектора в твердом теле может принимать



Фиг. 37. Функция $S_{вых}$ ($S_{вх}$).

Кривая 1 показывает нелинейное пропускание; для сравнения кривая 2 показывает экстраполяцию к случаю линейного пропускания.

значения между $|k' + k''|$ и $|k' - k''|$ при изменении направления падающих волн. Хотя при длинах волн порядка 10^{-6} м изменение волнового числа $|k| = 2\pi/\lambda$ достигает всего лишь только значений 10^7 м^{-1} и мало по сравнению с размерами зон Бриллюэна ($\sim 10^{10} \text{ м}^{-1}$), возникающая спектроскопия волновых векторов очень богата информацией, так как именно в этой области зон Бриллюэна дисперсионные кривые твердых тел подвержены сильному влиянию взаимодействия с электромагнитными волнами. Таким образом обнаруживаются дисперсионные кривые возбужденных состояний полной системы, состоящей из твердого тела и электромагнитного поля. В зависимости от способа ее формирования система получает название электронных экситонов твердого тела или фононов решетки твердого тела, экситон-

поляритонов или фотон-поляритонов (ср. п. 3.162). При этом интересная область дисперсионной кривой в k -пространстве расположена между нулем и $(\omega_{ea}(|k| = 0))/c \approx 10^7 \text{ м}^{-1}$ для экситон-поляритонов и $\approx 10^5 \text{ м}^{-1}$ для фонон-поляритонов [3.13-15].

3.14. Генерация гармоник, суммарных и разностных частот

Генерация гармоник, суммарных и разностных частот играет важную роль для применений в квантовой электронике и в спектроскопии. Как уже было объяснено в разд. В.1 и в ч. I, с помощью этих процессов возможно преобразование света с подходящими свойствами (мощность, когерентность, временное поведение) в такие спектральные области, в которых не существует хороших источников или в которых создаются благоприятные предпосылки для детектирования. В подходящих материалах, при использовании соответствующих резонаторных схем и при согласовании фаз может быть достигнуто почти полное преобразование излучения. Существенный прогресс был достигнут в последние годы в области генерации гармоник, суммарных и разностных частот в волноводах, благодаря чему открылись новые перспективы в применениях интегральной оптики (ср. [3.14-1]). Следует отметить, что благодаря зависимости скорости распространения света определенной длины волны от свойств поперечной моды, в которой это распространение происходит, появляются дополнительные возможности для согласования фаз по сравнению с компактной средой.

Генерация гармоник, суммарных и разностных частот уже была рассмотрена на классической основе в ч. I. При этом восприимчивости были определены на основе осцилляторной модели Лоренца — Друде для атомной системы. Теперь мы вычислим восприимчивости квантовомеханически, что позволит получить лучшее согласие с доступными экспериментальному определению параметрами. Классическая трактовка поля излучения оправдывается во многих случаях, в особенности если речь идет о сильных когерентных полях.

В первую очередь мы исследуем восприимчивость для эффектов второго порядка при очень простых условиях. Будем считать, что поле излучения взаимодействует с ансамблем слабо связанных атомных систем, находящихся в основном состоянии; далее, примем, что частота ω падающего света и частота гармоники достаточно удалены от резонансов с атомными системами. Тогда для восприимчивости можем написать

$$\begin{aligned} \chi_{kim}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = & \left(\frac{-1}{\hbar}\right)^2 \gamma \frac{1}{2!} P_2 \sum_{\beta, \gamma} \left\{ \frac{d_{k0\beta} d_{i\beta\gamma} d_{m\gamma 0}}{(\omega_{\gamma 0} + \omega_2)(\omega_{\beta 0} + \omega_1 + \omega_2)} + \right. \\ & + \frac{d_{i0\beta} d_{k\beta\gamma} d_{m\gamma 0}}{(\omega_{\gamma 0} + \omega_2)(\omega_{\beta 0} - \omega_1)} + \\ & \left. + \frac{d_{i0\beta} d_{m\beta\gamma} d_{k\gamma 0}}{(\omega_{\beta 0} - \omega_1)(\omega_{\gamma 0} - \omega_1 - \omega_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.14-1)$$

Здесь P_2 есть оператор перестановки, предусматривающий обмен тензорных индексов i, m и соответствующих частот ω_1, ω_2 [ср. разд. 2.32 и особенно уравнение (2.32-20)]. Мы предпримем оценку по порядку величины этой восприимчивости, а именно тензорной компоненты $\chi_{xxx}^{(2)}$, которую сокращенно обозначим $\chi^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = & \frac{\gamma}{\hbar^2} \sum_{\beta, \gamma} d_{0\beta} d_{\beta\gamma} d_{\gamma 0} \left\{ \frac{1}{(\omega_{\gamma 0} + \omega_2)(\omega_{\beta 0} + \omega_1 + \omega_2)} + \right. \\ & + \frac{1}{(\omega_{\gamma 0} + \omega_2)(\omega_{\beta 0} - \omega_1)} + \\ & \left. + \frac{1}{(\omega_{\beta 0} - \omega_1)(\omega_{\gamma 0} - \omega_1 - \omega_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.14-2)$$

Для оценки воспользуемся трехуровневой моделью (фиг. 38), и в предположении $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_{10}$ получим

$$\chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{6\gamma}{\hbar^2} d_{01} d_{12} d_{20} \frac{1}{\omega_{10}\omega_{20}}, \quad (3.14-3)$$

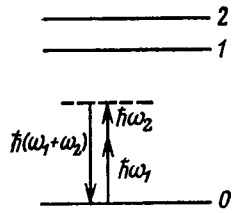
откуда со значениями параметров из уравнений (3.11-8) и (3.11-43) получается для электронного вклада $\chi^{(2)}(\omega_1,$

$\omega_2) \approx 10^{-22} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}^{-2}$. [При учете полевой поправки по Лоренцу указанные значения восприимчивости второго порядка следует умножить на $C_F^{(2)} = ((\epsilon_{NR}^{(1)} + 2)/3)^3$.] При генерации второй гармоники необходимо принимать во внимание, что введенная для дискретного спектра частот величина $\chi^{(2)}(2\omega; \omega, \omega)$ связана с $\chi^{(2)}(\omega, \omega)$ соотношением

$$\chi^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) = 1/2 \chi^{(2)}(\omega, \omega) \quad (3.14-4)$$

(ср. ч. I, п.1.213).

Исследуем теперь влияние приближения к резонансу на частотную зависимость и величину восприимчивости второго порядка. Предположим, что суммарная частота $\omega_1 + \omega_2$ или 2ω близка к ω_{10} (но еще не находится в области сильного поглощения). Тогда в выражении для восприимчивости в уравнении (3.14-2) играет роль только член со знаменателем $(\omega_{20} - \omega_1)(\omega_{10} - \omega_1 - \omega_2)$:



Фиг. 38. Трехуровневая схема для вычисления восприимчивостей при генерации суммарной частоты.

реходов могут быть достигнуты значения выше $10^{-22} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}^{-2}$. При дальнейшем приближении к резонансу следует при определении восприимчивости учитывать затухание, т. е. исходить из выражения вида

$$\chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\gamma}{\hbar^2} d_{01} d_{12} d_{20} \frac{1}{(\omega_{20} - \omega_1) \left(\omega_{10} - \frac{i}{\tau_{10}} - \omega_1 - \omega_2 \right)}. \quad (3.14-6)$$

Видно, что теперь уже нельзя пренебречь мнимой частью восприимчивости.

Вычисление восприимчивостей высших порядков выполняется аналогично расчету в случае восприимчиво-

сти второго порядка. Для грубой оценки восприимчивости третьего порядка запишем формулу, справедливую при большом удалении от резонанса с атомной системой, в следующем виде:

$$\chi^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = Z \frac{\gamma}{\hbar^3} |d_{\alpha\beta}|^4 \frac{1}{|\omega_{\alpha\beta}|^3},$$

где $d_{\alpha\beta}$ — средний переходный момент, $\omega_{\alpha\beta}$ — средняя частота перехода; Z есть численный множитель, зависящий от выбора атомной модели и от частоты ω ; в типичных случаях Z по порядку величины равняется 10. Отсюда для электронных переходов следует

$$\chi^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \approx 10^{-33} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{В}^{-3}.$$

Сравнение с результатами для восприимчивости второго порядка дает

$$\left| \frac{\chi^{(2)}}{\chi^{(3)}} \right| \approx \left| \frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{d_{\alpha\beta}} \right|.$$

Для рассматриваемых электронных переходов это отношение имеет порядок величины $10^{11} \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$; это согласуется с результатами оценки по классической модели, в которой это отношение было интерпретировано как внутриатомная напряженность поля (ср. ч. I, разд. 2.22).

Для квантового рассмотрения генерации гармоник и суммарных частот можно воспользоваться методом, примененным в разд. 2.22 на примере двухфотонного поглощения, а именно построить эффективный оператор взаимодействия

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_m \eta_m^{(\text{ГВГ})} \mathbf{E}_\mu^{(+)}(r_m) \mathbf{E}_{\mu'}^{(-)}(r_m) \mathbf{E}_{\mu''}^{(-)}(r_m) + \{H_A\}, \quad (3.14-7)$$

в котором выполняется суммирование по отдельным атомным системам. Для отдельных систем одинаковой природы, одинаково ориентированных и однородным образом распределенных, или для однородных твердых тел постоянную взаимодействия можно вынести за знак суммы, а суммирование заменить интегрированием по

объему (для конденсированных сред):

$$\mathbf{H}^W = \bar{\eta}^{(\text{ГВГ})} \int_V dV' e^{-i(k_{\mu_1} - k_{\mu_1'} - k_{\mu_2})r} \cdot \mathbf{a}_{\mu_1}^+ \mathbf{a}_{\mu_1} \mathbf{a}_{\mu_2} + \{HA\}. \quad (3.14-8)$$

Постоянная взаимодействия $\bar{\eta}^{(\text{ГВГ})}$ пропорциональна $\sum_{p, q, r} \chi_{pqr}^{(2)}(\omega_{\mu_1}, \omega_{\mu_2}) e_{\mu p} e_{\mu_1 q} e_{\mu_2 r}$, $\chi^{(2)}(\omega_{\mu_1}, \omega_{\mu_2})$ — восприимчивость второго порядка, $e_{\mu p}$, $e_{\mu_1 q}$, $e_{\mu_2 r}$ — единичные векторы поляризации для соответствующих мод. Из структуры оператора взаимодействия уже явствует, что процесс может протекать с высокой эффективностью только при условии $\Delta k = |k_{\mu_1} - k_{\mu_1'} - k_{\mu_2}| \approx 0$. Это утверждение согласуется со сформулированным при классическом рассмотрении условием согласования фаз (ср. ч. I, § 3.2).

Из уравнения (3.14-8) в свою очередь очевидно, что оператор \mathbf{H}^W построен исключительно из операторов, действующих только на электромагнитное поле, но не на атомные системы. Это является отображением того факта, что при генерации гармоник и смешанных частот (вне резонансов частот падающего и генерируемого света с атомными переходами) атомные системы остаются в исходном состоянии, и в среднем по времени не происходит никакого обмена энергией между электромагнитным полем и атомными системами, так что процесс «свободен от потерь».

При помощи описанных в разд. 2.2 методов и оператора \mathbf{H}^W можно вычислить вероятности переходов, а также математические ожидания определенных полевых операторов, например, \mathbf{a}_{μ} или \mathbf{a}_{μ}^+ .

Поскольку мы сейчас рассматриваем процессы без потерь, можно исходить также из соображений, изложенных в разд. 2.23, ввести эффективные операторы взаимодействия и получить соответствующие операторные уравнения движения [ср., в частности, с уравнением (2.23-21)]. Например, для оператора напряженности поля на моде суммарной частоты $E^{(-)}$ получается

уравнение вида

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathbf{E}_{\mu}^{(-)}(t) = \hbar \omega_{\mu} \mathbf{E}_{\mu}^{(-)}(t) + [\mathbf{E}_{\mu}^{(-)}, \mathbf{H}^W], \quad (3.14-9)$$

где

$$[\mathbf{E}_{\mu}^{(-)}, \mathbf{H}^W] = C_{\mu_1 \mu_2} \mathbf{E}_{\mu_1}^{(-)} \mathbf{E}_{\mu_2}^{(-)}.$$

Коэффициент $C_{\mu_1 \mu_2}$ пропорционален константе связи $\bar{\eta}^{(\text{ГВГ})}$ и, следовательно, восприимчивости $\chi^{(2)}(\omega_{\mu_1}, \omega_{\mu_2})$. Для интенсивных, полностью когерентных полей накачки можно операторы $\mathbf{E}_{\mu_1}^{(-)}$, $\mathbf{E}_{\mu_2}^{(-)}$ заменить c -числами E_{μ_1} , E_{μ_2} , и тогда получится решение в форме

$$\mathbf{E}_{\mu}^{(-)}(t) = \left[\mathbf{E}_{\mu}^{(-)}(0) - \frac{i}{\hbar} C_{\mu_1 \mu_2} \mathbf{E}_{\mu_1}^{(-)}(0) \mathbf{E}_{\mu_2}^{(-)}(0) t \right] e^{-i(\omega_{\mu_1} + \omega_{\mu_2})t}. \quad (3.14-10)$$

Мы теперь рассмотрим специальный случай, когда суммарная частота первоначально не возбуждена ($\langle \mathbf{E}_{\mu}^{(+)}(0) \mathbf{E}_{\mu}^{(-)}(0) \rangle = 0$); поэтому исследуем математическое ожидание оператора интенсивности $\langle \mathbf{E}_{\mu}^{(+)} \mathbf{E}_{\mu}^{(-)} \rangle$. Для этой величины имеем

$$\langle \mathbf{E}_{\mu}^{(+)} \mathbf{E}_{\mu}^{(-)} \rangle = \frac{1}{\hbar^2} |C_{\mu_1 \mu_2}|^2 E_{\mu_1}^{(+)}(0) E_{\mu_2}^{(+)}(0) E_{\mu_1}^{(-)}(0) E_{\mu_2}^{(-)}(0) t^2. \quad (3.14-11)$$

Таким образом, интенсивность излучения в моду суммарной частоты пропорциональна произведению интенсивностей в модах излучения накачки; этот вывод находится в согласии с результатом классических расчетов (ср. ч. I, пп. 3.21 и 3.31). Если не исходить с самого начала из допущения о совершенной когерентности поля падающего излучения, то четырехкратное произведение напряженностей полей в уравнении (3.14-11) следует заменить корреляционной функцией $\langle \mathbf{E}_{\mu_1}^{(+)} \mathbf{E}_{\mu_2}^{(+)} \mathbf{E}_{\mu_1}^{(-)} \mathbf{E}_{\mu_2}^{(-)} \rangle$ (ср. разд. 1.33). Отсюда следует, что генерация излучения на суммарной частоте в значительной мере зависит от свойств когерентности входного излучения. (Влияние свойств когерентности на преобразование излучения будет исследовано более детально в разд. 3.32 на примере параметрических процессов, причём будут рассчитаны аналогичные корреляторы.)

3.15. Параметрическое усиление, генерация, флуоресценция

После изучения генерации суммарных и разностных частот рассмотрим теперь в качестве еще одного важного нелинейного эффекта второго порядка параметрическое усиление и параметрическую генерацию. При этом будут исследованы входящая волна излучения накачки (частота ω_p , волновое число k_p) и возникновение или усиление сигнальной волны (ω_s, k_s) и холостой (idler) волны (ω_l, k_l). Все частоты считаются достаточно удаленными от резонансов с атомными системами, так что в самой среде не индуцируются какие-либо резонансные переходы. В рассматриваемом процессе фотон волны накачки распадается на фотон сигнальной волны и на фотон холостой волны, причем в этом процессе в соответствии с законом сохранения энергии соблюдается связь между частотами вида $\omega_p = \omega_s + \omega_l$.

В то время как усиление уже существующих сигнальной и холостой волн в достаточно хорошем приближении можно описать при помощи формализма классической теории уравнения генерации) (ср. ч. I, разд. 3.32), для анализа возникновения этих двух волн необходимо привлечь квантовое описание полей излучения. При этом мы будем применять метод, представленный в разд. 2.23, а именно построим гамильтониан с помощью электрооптических констант (восприимчивостей), фигурирующих в классическом описании.

В результате перехода от параметрического усиления к параметрической генерации создаются перестраиваемые когерентные источники излучения, что является важным применением квантовой электроники.

Если при параметрическом усилении и при параметрической генерации могут быть выделены вполне определенные отдельные моды генерируемого излучения (это связано с наличием определенных резонаторных схем), то в случае параметрической флуоресценции выходной спектр (кристалла, облученного интенсивной волной на-

качки) исследуется без такого ограничения; сигнальное излучение и излучение холостой волны обладают в этом случае широким спектром мод.

3.151. Исходные уравнения для параметрического усиления

Для описания параметрического усиления исходят из оператора взаимодействия следующего вида:

$$\hat{H} = - \int_V dV' \chi \mathbf{E}^{(+)}(\omega_s) \mathbf{E}^{(+)}(\omega_l) \mathbf{E}^{(-)}(\omega_p) + \{HA\}. \quad (3.15-1)$$

Содержащиеся в этом выражении операторы находятся в соответствии с классическими величинами напряженности поля, входящими в уравнение (2.23-7). Константа χ представляет собой сочетание компонент восприимчивости второго порядка и единичных векторов поляризации:

$$\chi = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)*}(\omega_p; \omega_s, \omega_l) e_{\alpha}(\omega_p) e_{\beta}(\omega_s) e_{\gamma}(\omega_l). \quad (3.15-2)$$

На основании уравнения

$$\hat{P}_{\alpha}^{(-)}(\omega_p) = \sum_{\beta, \gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)*}(\omega_p; \omega_s, \omega_l) \hat{E}_{\beta}^{(-)}(\omega_s) \hat{E}_{\gamma}^{(-)}(\omega_l) \quad (3.15-3)$$

компоненты восприимчивости описывают классическую взаимосвязь между амплитудами колебаний поляризации и напряженности поля. В согласии с развитыми в

разд. 2.23 представлениями из \hat{H} формируются уравнения движения для операторов $\mathbf{E}^{(+)}(\omega_p)$, $\mathbf{E}^{(+)}(\omega_s)$, $\mathbf{E}^{(+)}(\omega_l)$, соответствующие аналогичным классическим уравнениям движения. Явное представление операторов напряженности поля было дано после уравнения (2.23-7) и приводит к результату

$$\hat{H} = - \hbar \eta^{(IV)} \left\{ \frac{1}{V} \int_V dV' e^{i(k_p \cdot r - k_s \cdot r - k_l \cdot r)} \right\} \mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_l^+ \mathbf{a}_p + \{HA\}, \quad (3.15-4)$$

где коэффициент $\eta^{(ПУ)}$ пропорционален χ , $V^{-1/2}$ и трем множителям $(\omega_{S,I,P}/\epsilon_{S,I,P})$. При точном соблюдении условий синхронизации фаз выражение в фигурных скобках принимает значение, равное 1. При рассогласовании фаз, которое мы вначале не будем учитывать, модуль этой величины ниже единицы. Первое слагаемое в \mathbf{H} представляет генерацию сигнального фотона и фотона холостой волны при одновременном уничтожении фотона накачки, второе слагаемое описывает обратный процесс; очевидно, имеет место согласованность по структуре с соответствующим выражением в уравнении (3.14-8) для преобразования частот. Входящие в уравнение (3.15-2) компоненты восприимчивости можно выразить через параметры атомной системы (энергии переходов, переходные моменты), подобно тому как это уже было сделано в случае преобразования частот [ср. уравнение (3.14-1)]; поэтому мы можем не останавливаться специально на полуклассическом вычислении восприимчивостей и рассматривать их как феноменологически введенные величины.

Из уравнения (3.15-4) получаются в представлении Гейзенберга следующие уравнения движения для зависящих от времени операторов рождения фотонов сигнальной и холостой волн:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a}_S^+)_{\mathbf{H}} = i\omega_S (\mathbf{a}_S^+)_{\mathbf{H}} - i(\eta^{(ПУ)})^* (\mathbf{a}_P^+)_{\mathbf{H}} (\mathbf{a}_I)_{\mathbf{H}}, \quad (3.15-5a)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a}_I^+)_{\mathbf{H}} = i\omega_I (\mathbf{a}_I^+)_{\mathbf{H}} - i(\eta^{(ПУ)})^* (\mathbf{a}_P^+)_{\mathbf{H}} (\mathbf{a}_S)_{\mathbf{H}}. \quad (3.15-5b)$$

В качестве волны накачки обычно используется излучение лазера. Поэтому при большом превышении порога волну накачки можно в хорошем приближении описывать функцией с вполне определенной зависимостью от времени (ср. разд. 1.32 и 3.12); далее, затуханием волны накачки можно во многих случаях пренебречь. Эти обстоятельства позволяют представить описывающий волну накачки оператор в виде функции, зависящей от вре-

¹⁾ ПУ — параметрическое усиление. — Прим. перев.

мени:

$$\eta^{(ПУ)} (\mathbf{a}_P)_{\mathbf{H}} \rightarrow \nu(t) e^{-i\omega_P t} \quad \text{при} \quad \nu(t) = \nu_0 e^{i\varphi_P} e^{i\varphi_P(t)}, \quad (3.15-6)$$

где для упрощения записи константа взаимодействия $\eta^{(ПУ)}$ предполагается включенной в $\nu(t)$, а зависимость волны накачки от времени задается функцией $\exp[-i\omega_P t]$; ν_0 есть постоянное число, большее нуля и пропорциональное константе взаимодействия $\eta^{(ПУ)}$ и амплитуде волны накачки. Функция $\varphi_P(t)$ характеризует флуктуации фазы волны накачки (ср. п. 3.124), а φ_η есть аргумент функции $\eta^{(ПУ)}$.

3.152. Конкретизация основных соотношений и применения

В дальнейшем изложении мы допустим, что фаза волны накачки от времени не зависит и фиксирована; в этом случае $\nu(t)$ становится постоянным комплексным числом ν . При этом предположении дифференциальные уравнения (3.15-5) могут быть решены строго. Если в операторах в представлении Гейзенберга выделить главную зависимость от времени с помощью преобразования

$$(\mathbf{a}_{S,I})_{\mathbf{H}} e^{i\omega_{S,I} t} \equiv \hat{\mathbf{a}}_{S,I}(t), \quad (3.15-7)$$

то для медленно меняющихся во времени операторов $\hat{\mathbf{a}}_{S,I}(t)$ [имеется в виду временное изменение, сравниваемое со временами порядка $(\omega_{S,I})^{-1}$] получатся дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{a}}_S = i\nu \hat{\mathbf{a}}_I^\dagger, \quad (3.15-8a)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{a}}_I = i\nu \hat{\mathbf{a}}_S^\dagger. \quad (3.15-8b)$$

Из этих двух уравнений непосредственно следуют два независимых дифференциальных уравнения для сигнального и холостого операторов:

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{a}}_{S,I} = |\nu|^2 \hat{\mathbf{a}}_{S,I}. \quad (3.15-9)$$

Основные предположения о параметрическом усилении позволяют ожидать, что числа сигнальных фотонов и фотонов холостой волны будут претерпевать одинаковые приращения в единицу времени. Это можно показать с помощью соотношений (3.15-8) путем образования производной

$$\frac{d}{dt} \{(\mathbf{a}_S^+)_{H} (\mathbf{a}_S)_{H}\} = \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{a}}_S^+ \hat{\mathbf{a}}_S),$$

для которой получим

$$\frac{d}{dt} \{(\mathbf{a}_S^+)_{H} (\mathbf{a}_S)_{H}\} = \frac{d}{dt} \{(\mathbf{a}_I^+)_{H} (\mathbf{a}_I)_{H}\}. \quad (3.15-10)$$

Для дальнейшего примем, что в начале процесса, т. е. при $t=0$, сигнальная и холостая моды не взаимодействуют между собой и что, следовательно, полный оператор плотности может быть представлен в виде произведения двух множителей; один из них принадлежит сигнальной моде, а другой — холостой моде.

При этом предположении из уравнения (3.15-10) следует, что математические ожидания временных изменений чисел фотонов сигнальной и холостой волн равны; другими словами, разность этих математических ожиданий постоянна во времени. Эти заключения являются частным случаем соотношений Мэнли — Роу, выражающих общие законы сохранения для средних чисел фотонов при нелинейных оптических процессах (ср. классическое представление в ч. I).

Решение дифференциального уравнения (3.15-9) для сигнальных фотонов имеет вид

$$\hat{\mathbf{a}}_S(t) = \mathbf{a}_S(0) \operatorname{ch} |\nu| t - i \mathbf{a}_I^+(0) \frac{|\nu|}{\nu} \operatorname{sh} |\nu| t, \quad (3.15-11)$$

причем начальные условия задаются величинами $\mathbf{a}_S(0)$, $\mathbf{a}_I^+(0)$. Отсюда можно сформировать оператор числа частиц $(N_S)_{H} = \mathbf{a}_S^+(t) \mathbf{a}_S(t)$ для сигнальных фотонов к моменту времени t . Для больших значений времени, удовлетворяющих неравенству $\exp(2|\nu|t) \gg 1$, полу-

чается

$$(N_S)_{H} = \frac{1}{4} e^{2|\nu|t} \{1 + \mathbf{a}_S^+(0) \mathbf{a}_S(0) + \mathbf{a}_I^+(0) \mathbf{a}_I(0) + \left[\frac{|\nu|}{i\nu} \mathbf{a}_S^+(0) \mathbf{a}_I^+(0) + \{HA\} \right]\}. \quad (3.15-12)$$

Отсюда для математического ожидания сигнальных фотонов следует:

$$\langle N_S(t) \rangle = \frac{1}{4} e^{2|\nu|t} \{1 + \langle N_S(0) \rangle + \langle N_I(0) \rangle + \left[\frac{|\nu|}{i\nu} \langle \mathbf{a}_S^+(0) \rangle \langle \mathbf{a}_I^+(0) \rangle + \{KK\} \right]\} = \frac{1}{4} e^{2|\nu|t} \mathfrak{A}. \quad (3.15-13)$$

Таким образом, среднее число сигнальных фотонов возрастает по экспоненциальному закону; это означает, что происходит *параметрическое усиление*. Коэффициент временного усиления $2|\nu|$ пропорционален модулю амплитуды волны накачки. При положенных в основу предположениях область значений t ограничена сверху условием, чтобы число генерируемых сигнальных фотонов не было слишком большим, т. е. чтобы не происходило ощутимого ослабления волны накачки. Среднее число сигнальных фотонов в момент времени t пропорционально величине \mathfrak{A} . Рассмотрим сначала в формуле для этой величины последнее слагаемое, содержащее произведение сигнальной и холостой компонент. Это слагаемое исчезает в следующих случаях: если вначале вообще нет сигнальных фотонов и фотонов холостой волны; если вначале сигнальные фотоны и фотоны холостой волны, хотя и присутствуют, но одна из волн или обе волны имеют статистически неопределенную фазу. Последний случай реализуется в состояниях с фиксированным числом частиц или при хаотическом излучении (ср. разд. 1.22). С другим предельным случаем мы встречаемся, если как сигнальная, так и холостая волны могут быть описаны глауберовским состоянием (ср. п. 1.314). Тогда обсуждаемое слагаемое равно

$$\sqrt{\langle N_S(0) \rangle} \sqrt{\langle N_I(0) \rangle} \left[e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_\nu + \varphi_S + \varphi_I\right)} + \{KK\} \right].$$

Здесь φ_ν есть аргумент ν , определяемый фазой φ_P волны

накачки; φ_s и φ_l — фазы сигнальной и холостой волн. Максимальное значение, а именно $2\sqrt{\langle N_s(0) \rangle} \sqrt{\langle N_l(0) \rangle}$ получается, если между фазами имеет место соотношение $\pi/2 + \varphi_v + \varphi_s + \varphi_l = 0$. В целом имеем для \mathfrak{A}

$$1 + \langle N_s(0) \rangle + \langle N_l(0) \rangle \leq \mathfrak{A} \leq 1 + [\sqrt{\langle N_s(0) \rangle} + \sqrt{\langle N_l(0) \rangle}]^2. \quad (3.15-14)$$

Точное положение \mathfrak{A} в указанном интервале зависит от статистических свойств сигнальной и холостой волн, вернее от положений фаз этих волн по отношению к волне накачки. Но независимо от начального состояния сигнальной и холостой волн (в частности, при $\langle N_s(0) \rangle = \langle N_l(0) \rangle = 0$), $\mathfrak{A} \geq 1$. Это означает, что в любом случае происходит усиление сигнальной волны; такой процесс инициируется спонтанным распадом фотонов накачки.

В наших предыдущих рассуждениях было сделано предположение о точном согласовании фаз. Из уравнения (3.15-4) видно, что при неполном согласовании фаз в v , кроме $\eta^{(IV)}$ и амплитуды волны накачки, должен учитываться еще один фактор, зависящий от $k_p - k_s - k_l$; его существование влечет за собой уменьшение временного коэффициента усиления $2v$. Факторы, влияющие на пространственное распространение волн, были рассмотрены в ч. I, разд. 3.32.

Предположение о том, что волна накачки обладает фиксированным положением фазы, означает допущение специальных свойств когерентности, которыми обладает идеализированный лазерный свет. Отклонения, существующие в реальном лазерном излучении, будут описаны в п. 3.323 в связи с анализом роли свойств когерентности.

От рассмотренного процесса параметрического усиления можно перейти к *параметрической генерации*, если нелинейный кристалл поместить в соответствующий резонатор. Последний должен быть построен так, чтобы волна накачки могла входить в него относительно беспрепятственно, тогда как выход сигнальной и холостой волн затрудняется соответствующими условиями отражения; таким способом потери в резонаторе

для излучения на частотах ω_s и ω_l поддерживаются малыми. Эта ситуация соответствует тому, о чем было рассказано в п. В1.111 по поводу усиления света и возникновения колебаний: при достаточном усилении сигнальной и холостой волн потери могут быть компенсированы, так что возникает стабильная генерация. Благодаря эффекту максимального усиления при $k_p = k_s + k_l$ выделяется направление при заданном положении кристалла и (при учете дисперсионного соотношения для фотонов) создается селекция частот; таким образом, путем вращения кристалла может достигаться генерация перестраиваемого когерентного излучения. Это имеет важное прикладное значение. С помощью описанного оптического параметрического генератора и путем изменения угла вращения и температуры кристалла LiNbO_3 была осуществлена перестройка длины волны почти от 0,5 мкм до более чем 3 мкм. Как в импульсном (входная мощность $\approx 10^7$ Вт), так и в непрерывном (входная мощность $\approx 10^1$ Вт) режимах, при надлежащем выборе материала, сигнальная мощность достигала величины порядка 10^{-1} от входной мощности.

Для рассмотрения *параметрической флуоресценции* [3.15-1] мы должны расширить гамильтониан в уравнении (3.15-4) путем учета многих возможных сигнальных мод S_l и холостых мод $I_{l'}$ с переменными l и l' :

$$\begin{aligned} \overset{w}{\mathbf{H}} = & -\hbar \sum_{l, l'} \eta^{(IV)}(S_l, I_{l'}) \left\{ \int_V dV' e^{i(k_p \cdot -k_{S_l} \cdot -k_{I_{l'}}) \cdot r} \right\} \times \\ & \times a_p a_{S_l}^+ a_{I_{l'}}^+ + \{HA\}. \end{aligned} \quad (3.15-15)$$

Но, как и раньше, волна накачки должна быть представлена одной модой. Нас интересует число сигнальных фотонов и фотонов холостой волны, излученных в единицу времени, в единичном частотном интервале и в единицу телесного угла в результате возбуждения волной накачки. За начальное состояние сигнальных фотонов и фотонов холостой волны следует выбрать вакуумное состояние. При соответствующей установке (падение света накачки на тонкий диск, возможность пренебречь отражением света накачки на поверхности кри-

сталла) излучение, возникающее в результате параметрической флуоресценции, обнаруживает следующие свойства: сигнальное излучение, связанное с приближенным соблюдением условия согласования фаз, обнаруживает в спектре частот относительно узкие линии; при этом средняя частота зависит от направления наблюдения. Если угол между k_p и k_s превосходит некоторое граничное значение, то излучение больше не наблюдается. Процессы излучения, связанные с нарушением согласования фаз, дают излучение, вообще говоря, заметно более слабое и непрерывно распределенное по всем углам.

При помощи методов, изложенных в разд. 3.15, аналогичным образом могут быть описаны параметрические процессы высших порядков (например, между четырьмя волнами) [3.15-2].

3.16. Вынужденное комбинационное рассеяние

Электроны во внешних оболочках атомов, молекул, кристаллических структур или электроны в плазме могут осуществлять неупругое рассеяние электромагнитного излучения на молекулярных колебаниях, на оптических и акустических колебаниях кристаллов или на других возбужденных состояниях твердых тел и плазменных систем. Если коэффициент усиления принимает достаточно большие значения, то всегда присутствующие оптические потери могут быть скомпенсированы, и тогда становится возможным переход от спонтанного к вынужденному рассеянию; при этом свойства рассеянного излучения качественно изменяются (ср. ч. I, разд. 4.21). Вынужденное комбинационное рассеяние может быть обнаружено на большом числе частиц, квазичастиц и возбужденных состояний и влечет за собой большое многообразие явлений [3.1-10, 3.1-11]. В дальнейших рассуждениях данного раздела будет рассмотрен эффект комбинационного рассеяния на колебаниях молекул, комбинационное рассеяние на длинноволновых оптических фотонах и на фонон-поляритонах, а также комбинационное рассеяние, связанное с процессами переориентирования спинов электронов в полупроводниках.

Эти три случая позволяют моделировать важные аспекты вынужденного комбинационного рассеяния, механизм вынужденного комбинационного рассеяния: возможность высказываний о невозмущенной системе и о величинах параметров взаимодействия; будет также рассмотрено создание перестраиваемых когерентных источников вторичного излучения.

3.161. Комбинационное рассеяние на молекулах; колебательный эффект комбинационного рассеяния

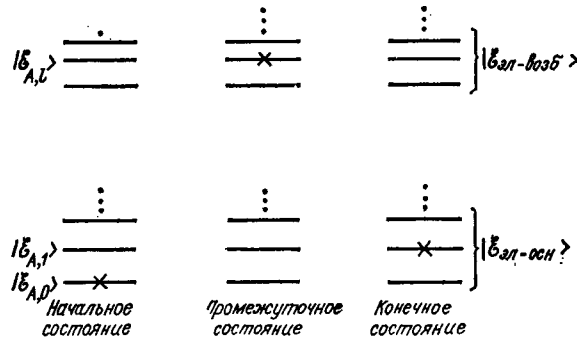
В ч. I, разд. 2.41, была изложена покоящаяся на классическом базисе теория поляризуемости Плачека; она позволяет на основе единых фундаментальных представлений описать явления как спонтанного, так и вынужденного комбинационного рассеяния совершающей колебания и поляризуемой молекулой, находящейся под действием электромагнитного поля [ср. ч. I, уравнение (2.41-9)]. При этом, правда, оказалось необходимым ввести два существенных дополнения, которые, естественно, не могли содержаться автоматически в классической электродинамике. Одно из них заключалось в учете нулевых колебаний молекулы, неизбежном при объяснении эффекта спонтанного комбинационного рассеяния. Кроме того, должны были задаваться значения производных от поляризуемости по колебательным координатам. Для решения этих двух вопросов оказалось необходимым обратиться к квантовым представлениям и к результатам экспериментальных исследований интенсивности рассеянного света.

Последовательное квантовое описание эффекта комбинационного рассеяния

Ниже мы рассмотрим *эффекты спонтанного и вынужденного комбинационного рассеяния на последовательной квантовой основе*, следуя Дираку [3.16-1]; при этом оба описанных выше принципиальных затруднения уже не возникают.

Сначала мы поставим перед собой задачу определить вероятность излучения в единицу времени одного стоксова кванта с энергией $\hbar\omega_s$ при падении лазерного света с энергией фотона $\hbar\omega_L$ на молекулу, которая при

этом совершает переход из основного состояния $|\mathcal{E}_{A,0}\rangle$ в возбужденное колебательное состояние $|\mathcal{E}_{A,1}\rangle$ через виртуальное промежуточное состояние $|\mathcal{E}_{A,i}\rangle$; соответствующая схема состояний молекулы показана на фиг. 39, где представлены основное электронное состояние с соответствующими колебательными состояниями и возбужденное электронное состояние с соответствующими колебательными состояниями. В данном случае



Фиг. 39. Заселенность энергетических состояний молекулы.

речь идет о процессе второго порядка, и мы можем формально воспользоваться результатами разд. 2.22, полученными в связи с двухфотонным поглощением. Предположим, что в начальный момент в поле излучения присутствует n_S фотонов в стоксовой моде и n_L фотонов в лазерной моде. Тогда начальное состояние $|\mathcal{E}_a\rangle$ и конечное состояние $|\mathcal{E}_e\rangle$ могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_a\rangle &= |\mathcal{E}_{A,0}\rangle |n_S, n_L\rangle, \\ |\mathcal{E}_e\rangle &= |\mathcal{E}_{A,1}\rangle |n_S + 1, n_L - 1\rangle, \end{aligned} \quad (3.16-1)$$

где опущены моды, не участвующие в процессе [ср. уравнение (2.22-7)]. В качестве промежуточных состояний $|\mathcal{E}_j\rangle$ учитываются только такие состояния, для которых соблюдаются условия

$$|\mathcal{E}_j\rangle = \begin{cases} |\mathcal{E}_{A,1}\rangle |n_S + 1, n_L\rangle & (\text{случай I}), \\ |\mathcal{E}_{A,1}\rangle |n_S, n_L - 1\rangle & (\text{случай II}), \end{cases} \quad (3.16-2)$$

так как другие промежуточные состояния не вносят никакого вклада в вероятность перехода. В случае I на первом этапе рассматриваемого процесса генерируется стоксов квант, а на втором этапе поглощается лазерный квант; в случае II имеет место обратная последовательность. В соответствии с этим для значений энергии $\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_j$, встречающихся в формуле для вероятности перехода [ср. уравнение (2.2-4)], получаются выражения

$$\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_j = \begin{cases} (\mathcal{E}_{A,0} - \mathcal{E}_{A,1}) - \hbar\omega_S & (\text{случай I}), \\ (\mathcal{E}_{A,0} - \mathcal{E}_{A,1}) + \hbar\omega_L & (\text{случай II}). \end{cases} \quad (3.16-2a)$$

Поскольку в случае I соблюдаются неравенства $(\mathcal{E}_{A,1} - \mathcal{E}_{A,0}) > 0$ и $\hbar\omega_S > 0$, то разность $\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_j$ никогда не равна нулю. В случае II при надлежащем выборе энергии лазерных фотонов, а именно если $\hbar\omega_L \approx \mathcal{E}_{A,1} - \mathcal{E}_{A,0}$, разности $\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_j$ обращаются в нуль; при выполнении этого условия принято говорить о резонансном эффекте комбинационного рассеяния. Мы исключим его в наших дальнейших рассуждениях и будем рассматривать только так называемый нормальный эффект комбинационного рассеяния. Он характеризуется условиями, при которых уменьшенная на $\hbar\omega_L$ энергия возбужденных электронных состояний велика по сравнению с энергией колебаний $\mathcal{E}_{A,1} - \mathcal{E}_{A,0}$, а квант $\hbar\omega_L$ велик по сравнению с энергией колебаний; схематическое представление дано на фиг. 40, a.

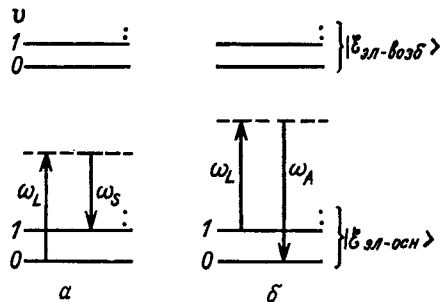
В качестве оператора взаимодействия выберем оператор $-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}$ и, кроме того, как и при выводе уравнения (2.22-5), исключим резонанс энергий между состоянием $|\mathcal{E}_e\rangle$ и одним из виртуальных промежуточных состояний. При этих предпосылках теория возмущений второго порядка приводит [по аналогии с уравнением (2.22-9)] к вероятности перехода при нормальном эффекте комбинационного рассеяния:

$$\begin{aligned} & |\langle \mathcal{E}_e | \Psi^{(R)}(t) \rangle_D|^2 = \omega_{a \rightarrow e}^{(R)}(t) \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{4\epsilon_0^2 V^2} \hbar\omega_L n_L \hbar\omega_S (n_S + 1) |\eta^{(R)}|^2 \frac{\sin^2 \left[\frac{\omega_{ea}}{2} t \right]}{\left[\frac{\omega_{ea}}{2} t \right]^2}, \end{aligned} \quad (3.16-3)$$

где

$$\eta^{(R)} = \sum_l \frac{(d_{l0})_s (d_{l1})_L}{\mathcal{E}_{A,0} - \mathcal{E}_{A,l} - \hbar\omega_s} + \frac{(d_{l0})_L (d_{l1})_s}{\mathcal{E}_{A,0} - \mathcal{E}_{A,l} + \hbar\omega_L}. \quad (3.16-4)$$

Здесь $(d_{l0})_s$ есть скалярное произведение вектора $\langle \mathcal{E}_{A,l} | \mathbf{d} | \mathcal{E}_{A,0} \rangle$ и единичного вектора поляризации стоксовой моды; аналогичным образом формируются и другие величины, обусловленные дипольным моментом;



Фиг. 40. Схема переходов при комбинационном рассеянии (нормальный эффект комбинационного рассеяния).
 v — колебательное квантовое число.
 a — стоксов процесс; b — антистоксов процесс.

$\omega_{ea} = \hbar^{-1}(\mathcal{E}_e - \mathcal{E}_a)$. При раскрытии скобки $(n_s + 1)$ первое слагаемое представляет в формуле для $\omega_{a \rightarrow e}^{(R)}(t)$ эффект вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР): только в случае $n_s > 0$, т. е. если к началу процесса существуют стоксовы фотоны, этот член вносит свой вклад. Второе слагаемое не зависит от числа стоксовых фотонов к началу процесса, и достаточно падения лазерного луча, чтобы дать ход процессу; в этом случае речь идет о спонтанном комбинационном рассеянии (СКР).

Множитель, содержащий величину ω_{ea} , показывает, что существенные вероятности переходов получаются только при малых ω_{ea} , т. е. при $\mathcal{E}_{A,1} - \mathcal{E}_{A,0} \approx \hbar\omega_L - \hbar\omega_s$. При этом предположении мы теперь вычислим полную вероятность перехода, применяя метод из

разд. В2.26. Сначала просуммируем по всем конечным состояниям, для которых $\mathcal{E}_e \approx \mathcal{E}_a$, и зафиксируем начальное состояние [ср. уравнение (В2.26-7)]. Вначале рассмотрим вынужденный эффект. Для этой цели введем величину $\sigma_s(\omega_s, \Omega_s)$, которая определяет энергию на единицу объема, единицу круговой частоты и единицу телесного угла, принадлежащую имеющимся стоксовым фотонам для определенного направления поляризации. Сумма всех стоксовых фотонов на единицу объема в интервале частот $\Delta\omega_s$ и в интервале телесного угла $\Delta\Omega_s$ тогда может быть записана в следующем виде:

$$\sum_{\Delta\omega_s, \Delta\Omega_s} \frac{\hbar\omega_s n_s}{V} = \int_{\Delta\omega_s} d\omega_s \int_{\Delta\Omega_s} d\Omega_s \sigma_s(\omega_s, \Omega_s). \quad (3.16-5)$$

Отсюда получается формула для полной вероятности перехода:

$$\begin{aligned} W^{(ВКР)}(t) &= \sum_{\mathcal{E}_e \approx \mathcal{E}_a} \omega_{a \rightarrow e}^{(ВКР)}(t) = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{\hbar\omega_L n_L}{4e_0^2 V} \int_{\Delta\omega_s} d\omega_s \int_{\Delta\Omega_s} d\Omega_s \sigma_s(\omega_s, \Omega_s) \times \\ &\times |\eta^{(R)}|^2 \frac{\sin^2\left[\frac{\omega_{ea}}{2} t\right]}{\left[\frac{\omega_{ea}}{2} t\right]^2}. \end{aligned} \quad (3.16-6)$$

Интеграл по переменной ω_s , входящей также в выражение $\omega_{ea} = \hbar^{-1}(\mathcal{E}_{A,1} + \hbar\omega_s - \mathcal{E}_{A,0} - \hbar\omega_L)$, имеет структуру, аналогичную структуре интеграла по переменной \mathcal{E}_e в уравнении (В2.26-8); поэтому выполнение интегрирования по ω_s при тех же рассуждениях, что и в случае (В2.26-8), приводит к результату

$$W^{(ВКР)}(t) = t \frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{\hbar\omega_L n_L}{4e_0^2 V} \int_{\Delta\Omega_s} d\Omega_s \sigma_s(\omega_s, \Omega_s) |\eta^{(R)}|^2. \quad (3.16-7)$$

Следует заметить, что член $|\eta^{(R)}|^2$ содержит скалярное произведение $(d_{l0})_s$ и $(d_{l1})_s$ и поэтому является непрерывной функцией от Ω_s , вследствие чего член $|\eta^{(R)}|^2$

нельзя вынести за знак интеграла. Что касается члена в уравнении (3.16-3), относящегося к спонтанному эффекту, то в нем при суммировании по конечным состояниям следует исходить из плотности колебаний вакуума; аналогичным образом мы поступали при изучении спонтанной эмиссии [ср. уравнение (3.11-5)]. Если $\bar{\sigma}$ есть энергия, отнесенная к единице объема, единице круговой частоты, единице телесного угла и к одному направлению поляризации, то

$$\sum_{\Delta\omega_s, \Delta\Omega_s} \frac{\hbar\omega_s}{V} = \int_{\Delta\omega_s} d\omega_s \int_{\Delta\Omega_s} d\Omega_s \bar{\sigma}, \text{ где } \bar{\sigma} = \frac{\hbar\omega_s^3}{8\pi^3 c^3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W^{(\text{CKP})}(t) &= \sum_{\mathcal{E}_e \approx \mathcal{E}_a} \omega_{a \rightarrow e}^{(\text{CKP})}(t) = \\ &= t \frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{\hbar\omega_L n_L}{4\epsilon_0^2 V} \int_{\Delta\Omega_s} d\Omega_s \frac{\hbar\omega_s^3}{8\pi^3 c^3} |\eta^{(R)}|^2. \end{aligned} \quad (3.16-8)$$

При этом интеграл $\int_{\Delta\omega_s} d\omega_s$ был вычислен таким же

способом, как и в уравнении (3.16-6). Итак, мы вычислили полную вероятность перехода как для вынужденного, так и для спонтанного эффекта, причем суммирование выполнено по всем конечным состояниям, для которых $\mathcal{E}_a \approx \mathcal{E}_e$.

До сих пор мы предполагали, что падающее излучение представлено одной модой (ω_L) с n_L фотонами; это, вообще говоря, не соответствует реальным условиям. Мы примем теперь, что в том месте, где находится рассматриваемая молекула, существует пространственная плотность энергии $\sigma_L(\omega_L, \Omega_L)$, отнесенная к единице круговой частоты и к единице телесного угла; будем считать также, что падающие фотоны распределены в некоторой полосе частот $\Delta\omega_L$ и в элементе телесного угла $\Delta\Omega_L$. Тогда полученные в уравнениях (3.16-7) и (3.16-8) вероятности переходов нужно снова суммировать:

$$\sum_{\Delta\omega_L, \Delta\Omega_L} \frac{\hbar\omega_L n_L}{V} = \int_{\Delta\omega_L} d\omega_L \int_{\Delta\Omega_L} d\Omega_L \sigma_L(\omega_L, \Omega_L).$$

Это приводит к полной вероятности перехода $W^{(R)}(t)$, включающей суммирование по конечным и начальным состояниям. В смысле концепции крупнозернистости во временном представлении (ср. разд. 2.26) получим отсюда для скорости изменения

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W^{(R)}}{\Delta t} &= \frac{2\pi}{\hbar^2 4\epsilon_0^2} \int_{\Delta\omega_L} d\omega_L \int_{\Delta\Omega_L} d\Omega_L \int_{\Delta\Omega_S} d\Omega_S \sigma_L(\omega_L, \Omega_L) \times \\ &\times \left\{ \sigma_S(\omega_S, \Omega_S) + \frac{\hbar\omega_s^3}{8\pi^3 c^3} \right\} |\eta^{(R)}|^2. \end{aligned} \quad (3.16-9)$$

Это есть отнесенная к единице времени вероятность того, что молекула переходит из состояния $|\mathcal{E}_A, 0\rangle$ в состояние $|\mathcal{E}_A, 1\rangle$, поглощая фотон лазерного излучения из частотной области $\Delta\omega_L$ и из области телесных углов $\Delta\Omega_L$ и излучая стоксов фотон с частотой ω_S в телесный угол $\Delta\Omega_S$, если в месте нахождения молекулы существуют плотности излучения σ_L и σ_S . Средняя рассеянная мощность равна $\hbar\omega_S \Delta W^{(R)}/\Delta t$. При падении плоской монохроматической волны и при $\sigma_S = 0$ получается $\hbar\omega_S \Delta W^{(R)}/\Delta t = \hbar\omega_S \Delta W^{(\text{CKR})}/\Delta t$, т. е. формула Крамерса — Гейзенберга для спонтанного комбинационного рассеяния.

Основной интерес представляет отношение вынужденной компоненты комбинационного рассеяния к его спонтанной компоненте, которое мы можем вывести из уравнения (3.16-9). При этом сформулируем следующие специальные условия: стоксово и лазерное излучения изотропны, так что для телесного угла можно записать

$$\Delta\Omega_S = \Delta\Omega_L = 4\pi.$$

Тогда с учетом двух возможных направлений поляризации спектральные плотности принимают вид

$$\sigma_S(\omega_S) = 2 \cdot 4\pi \sigma_S(\omega_S, \Omega_S),$$

$$\sigma_L(\omega_L) = 2 \cdot 4\pi \sigma_L(\omega_L, \Omega_L).$$

Кроме того, предположим, что лазерное излучение распределено равномерно в некотором узком интервале частот $\Delta\omega_L$; в таком случае энергию лазерного излучения в единице объема можно представить в виде

$\Delta\omega_L\sigma_L(\omega_L)$. При этих условиях из уравнения (3.16-9) следует, что

$$\frac{\Delta W^{(R)}}{\Delta t} = \Delta\omega_L\sigma_L(\omega_L)\{B'_{01}\sigma_S(\omega_S) + A'_{01}\}. \quad (3.16-10)$$

Мы видим, что скорость перехода складывается из двух частей, из которых первая (ВКР) пропорциональна произведению плотностей излучения входящего и выходящего света, тогда как вторая (СКР) пропорциональна только плотности излучения падающего света. Величины A'_{01} и B'_{01} зависят от молекулярных частот переходов и переходных моментов, а также от частот ω_S и ω_L . Отношение A'_{01}/B'_{01} зависит, помимо универсальных констант, только от ω_S и равно отношению коэффициентов Эйнштейна A и B для вынужденного и спонтанного излучения при однофотонном процессе (см. п. 3.111); в этой связи проблемы теплового равновесия могут быть исследованы для процессов рассеяния так же, как для однофотонных процессов. Полученные результаты свидетельствуют о принципиальном значении теории рассеянного излучения Дирака.

Квантовая интерпретация теории Плачека

Мы должны теперь придать классической теории Плачека такую форму [ср. уравнение (B2.13-3)], которая допускала бы непосредственное сравнение с приведенными выше последовательными квантовыми результатами. Поскольку мы здесь сможем только наметить принципиальный путь, выберем возможно более простые условия: будем рассматривать молекулу при $r = 0$ с только одним нормальным колебанием частоты ω_v ; отклонения x от положения равновесия будем считать малыми, благодаря чему функция Гамильтона невозмущенной молекулы будет функцией Гамильтона гармонического осциллятора:

$$H_A = \frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega_v^2}{2} x^2, \quad (3.16-11)$$

где p и x — канонически сопряженные величины и M — приведенная масса. Кроме того, мы изберем однокомпонентный способ рассмотрения. Из уравнения ч. I

(2.41-6) вытекает, что, учитывая поляризуемость такой молекулы в электромагнитном поле E , ее функцию Гамильтона следует записать в виде

$$H = H_A - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) x E^2. \quad (3.16-12)$$

Второе слагаемое является членом взаимодействия $\overset{W}{H}$ и возникает в результате учета члена первого порядка в разложении поляризуемости α по колебательной координате x в точке $x = 0$, а также в результате использования адиабатического приближения при вычислении энергии взаимодействия. При комбинационном рассеянии электрическое поле должно состоять из стоковой и лазерной компонент:

$$E = (E_S^{(-)} + E_S^{(+)}) + (E_L^{(-)} + E_L^{(+)}). \quad (3.16-13)$$

Переход к квантованию должен заключаться в замене функций H_A и $\overset{W}{H}$ соответствующими операторами \mathbf{H}_A и \mathbf{H} , причем содержащиеся в H_A и $\overset{W}{H}$ величины p , x , E также должны рассматриваться как операторы, а представленная классическими формулами функциональная зависимость должна сохраниться; в частности, производная $(\partial \alpha / \partial x)$ входит в \mathbf{H} как c -число. Пользуясь операторами рождения и уничтожения, получаем из разд. B2.22 и 1.21

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_v}} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^+), \\ \mathbf{E} &= i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}} \{ \omega_S^{1/2} (\mathbf{a}_S - \mathbf{a}_S^+) + \omega_L^{1/2} (\mathbf{a}_L - \mathbf{a}_L^+) \}. \end{aligned} \quad (3.16-14)$$

По аналогии с уравнением (3.16-1) мы должны теперь начальное и конечное состояние обозначить символами

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_a\rangle &= |v' = 0\rangle |n_S, n_L\rangle, \\ |\mathcal{E}_e\rangle &= |v' = 1\rangle |n_S + 1, n_L - 1\rangle, \end{aligned} \quad (3.16-15)$$

где v' — колебательное квантовое число. Таким образом, мы можем с помощью уравнения (B2.26-4) вычис-

лить вероятность перехода:

$$\begin{aligned} \omega_{a \rightarrow e}^{(R)}(t) &= \frac{1}{\hbar^2} |\langle v' = 1 | \langle n_S + 1, n_L - 1 | \mathbf{x} \mathbf{E}^2 | v' = 0 \rangle \times \\ &\quad \times |n_S, n_L\rangle|^2 \times \\ &\quad \times \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\omega_{ea}}{2} t \right] \left[\frac{\omega_{ea}}{2} t \right]^2. \end{aligned} \quad (3.16-16)$$

Оператор $\mathbf{x} \mathbf{E}^2$ аддитивно складывается из 24 произведений, составленных из трех операторов рождения или из операторов уничтожения. Однако при заданных начальном и конечном состояниях только слагаемое $\mathbf{c} \mathbf{a}^+ \mathbf{a}_S^+ \mathbf{a}_L$ может вносить вклад в матричный элемент; он пропорционален $\sqrt{n_L} \sqrt{n_S + 1}$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \omega_{a \rightarrow e}^{(R)}(t) &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{4e_0^2 V^2} \hbar \omega_L n_L \hbar \omega_S (n_S + 1) \frac{1}{8} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 \times \\ &\quad \times \frac{\hbar}{M \omega_v} \frac{\sin^2 \left[\frac{\omega_{ea}}{2} t \right]}{\left[\frac{\omega_{ea}}{2} t \right]^2}. \end{aligned} \quad (3.16-17)$$

Это уравнение имеет такую же структуру, как и (3.16-3), и поэтому можно, исходя из него, дать атомистическое толкование величины $\partial \alpha / \partial x$; получаем

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 = \frac{8M\omega_v}{\hbar} |\eta^{(R)}|^2. \quad (3.16-18)$$

При количественном вычислении величины $|\eta^{(R)}|^2$, естественно, приходится обращать внимание на члены с наименьшими знаменателями [ср. уравнение (3.16-4)]. Модель (см. Приложение 2) с двумя колебательными членами в основном электронном состоянии и в первом возбужденном электронном состоянии может хорошо послужить для количественной оценки; со значениями из Приложения 2 получаем $|\eta^{(R)}|^2 \approx 10^{-81} (\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м})^4 (\text{Вт} \cdot \text{с})^{-2}$. Принимая $M \approx 10^{-26}$ кг и $\omega_v \approx 10^{14}$ с⁻¹, получаем из уравнения (3.16-18) $\partial \alpha / \partial x \approx 10^{-29}$ А·с·м·В⁻¹. Это значение согласуется с полученным экспериментально — из измерения эффективного сечения при спонтанном эффекте комбинационного рассеяния для интенсивных стоксовых линий (ср. ч. I, разд. 2.41).

Рассуждения, послужившие основой для вывода уравнения (3.16-16), позволяют без затруднений построить оператор взаимодействия, специально предназначенный в смысле разд. 2.22 для эффекта комбинационного рассеяния:

$$\mathbb{W}^{(R)} = \tilde{\mathfrak{K}} \mathbf{a}^+ \mathbf{a}_S^+ \mathbf{a}_L + \tilde{\mathfrak{K}}^* \mathbf{a} \mathbf{a}_S \mathbf{a}_L^+. \quad (3.16-19)$$

Он позволяет уже в первом порядке теории возмущений адекватным образом описать интересующие нас эффекты; из уравнений (3.16-16) и (3.16-18) можно усмотреть, как именно выбрать величину $\tilde{\mathfrak{K}}$. Оператор $\mathbb{W}^{(R)}$ с тремя бозонными множителями допускает формальное упрощение для описания комбинационного рассеяния. Первый член дает отличный от нуля вклад в вероятность перехода для излучения стоксова фотона при одновременном поглощении лазерного фотона и колебательном возбуждении; вклад первого члена в вероятность перехода пропорционален $n_L (n_S + 1)$. Второе слагаемое ответственно за отличную от нуля вероятность перехода для процесса излучения лазерного фотона при одновременном поглощении стоксова фотона и переходе на основной колебательный уровень, т. е. для антистоксова рассеяния; соответствующий вклад в вероятность перехода пропорционален $(n_L + 1) n_S$. Вклады с произведением вида $n_L n_S$ в обоих слагаемых соответствуют вынужденным эффектам, тогда как вклады с n_L или n_S отображают различные спонтанные эффекты. Схематическое представление процессов стоксова и антистоксова рассеяния дано на фиг. 40.

Корреляция с полуклассическим описанием и ее осуществление

После изложения определенных фундаментальных представлений перейдем к выводу соотношений и характеристик для рассматриваемых процессов параметров, которые могут быть непосредственно сопоставлены с экспериментальными данными. Для этого необходимо обобщить выведенные выше для «резких» уровней энергии и для энергий фотонов вероятности переходов и скоро-

сти их изменения [ср. уравнения (3.16-9) и (3.16-17)] путем введения функции формы линии; это можно сделать довольно просто — по аналогии с выводом уравнения (3.13-16). Кроме того, мы будем теперь рассматривать только вынужденное комбинационное рассеяние, пренебрегая вкладами спонтанных эффектов в вероятности переходов. При этих условиях последовательная квантовая теория приводит в широкой области применений к результатам, эквивалентным результатам полуклассической теории. В этой связи полезно напомнить, что такая же корреляция между этими теориями существует в случае двухфотонного поглощения. В этом можно непосредственно убедиться из сравнения уравнений (3.13-10) и (3.13-17) для мощности, поглощаемой в единице объема. Формальная процедура изложенного ниже полуклассического рассмотрения вынужденного комбинационного рассеяния также в известной мере аналогична трактовке другого двухфотонного процесса — двухфотонного поглощения, которое также может быть описано полуклассически, если воспользоваться восприимчивостью третьего порядка. Здесь необходимо указать еще на условие применимости изложенной ниже полуклассической теории вынужденного комбинационного рассеяния: в среде должны существовать две (или больше) когерентные волны, по крайней мере лазерная волна и стоксова волна; построение процесса вынужденного комбинационного рассеяния «из шума» не может быть описано без дальнейших допущений. Оно используется при таких экспериментальных методах, при которых входное излучение состоит только из лазерной волны (ср. ч. I, разд. 4.221). Однако такое описание становится возможным в последовательной квантовой теории при учете спонтанной компоненты; мы вернемся к этой проблеме при обсуждении применений в п. 3.162.

Переходя к применению результатов общей полуклассической теории из § 2.3 для описания вынужденного комбинационного рассеяния, мы прежде всего вычислим восприимчивость $\chi_{kprq}^{(3)}(\omega_S, \omega_L, -\omega_L)$ стоксова процесса из уравнения (2.33-12) для нормального эффекта комбинационного рассеяния. Мы заранее предположим, что $\rho_{\alpha\alpha}^{(0)} = \delta_{\alpha\alpha}$, т. е. все частицы считаются находящимися

в основном состоянии. Поскольку для стоксова процесса $\omega_L - \omega_S \approx \omega_{10}$ (где $\omega_L, \omega_S > 0$), то резонансный знаменатель вида $(\omega_{10} - i\tau_{10}^{-1} + \omega_S - \omega_L)$ появляется только при индексе суммирования $\gamma = 1$ в обоих первых членах в фигурных скобках в перестановках $(q\omega_2, p\omega_1, r\omega_3)$ и $(q\omega_2, r\omega_3, p\omega_1)$ основного члена $(p\omega_1, q\omega_2, r\omega_3)$. Если учитывать резонансные члены, то за пределами области однофотонных резонансов получится

$$\begin{aligned} & |\chi_{kprq}^{(3)}(\omega_S, \omega_L, -\omega_L) = \\ & = \frac{\gamma}{6\hbar} \frac{\omega_{10} - \omega_L + \omega_S + i\tau_{10}^{-1}}{(\omega_{10} - \omega_L + \omega_S)^2 + \tau_{10}^{-2}} \alpha_{kq01}(-\omega_S, \omega_L) \alpha_{pr01}^*(-\omega_S, \omega_L) \end{aligned} \quad (3.16-20)$$

где

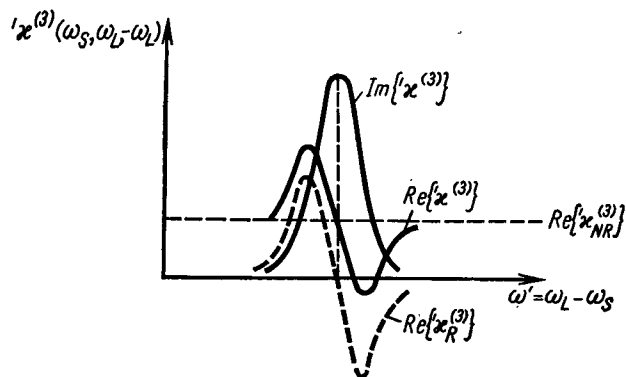
$$\alpha_{kq01}(-\omega_S, \omega_L) = \frac{1}{\hbar} \sum_l \left\{ \frac{d_{k,0l} d_{q,l1}}{\omega_{10} + \omega_S} + \frac{d_{q,0l} d_{k,l1}}{\omega_{10} - \omega_L} \right\}.$$

Таким образом, величины, определяющие восприимчивость $\chi_{kprq}^{(3)}(\omega_S, \omega_L, -\omega_L)$, а тем самым и математическое ожидание поляризации, выражены через атомные величины: переходные моменты, энергии переходов, время релаксации τ_{10} ; они зависят также от частот и направлений поляризации взаимодействующих лазерной и стоксовой волн. [Восприимчивость $\chi^{(3)}$ для дискретного спектра частот определяется выражением $\chi_{kprq}^{(3)}(\omega_S; \omega_S, \omega_L, -\omega_L) = \frac{3}{4} \chi_{kprq}^{(3)}(\omega_S, \omega_L, -\omega_L)$, ср. ч. I, п. 1.213]. Между тензором второго ранга α_{kq01} (который с точностью до множителя, содержащего частоту ω_{10} и массу, выражает производную от поляризуемости) и величиной $\eta^{(R)}$ из уравнения (3.16-4) существует зависимость вида

$$\eta^{(R)} = - \sum_{k,q} \alpha_{kq01}^*(-\omega_S, \omega_L) (e_S)_k (e_L)_q \quad (3.16-21)$$

(e_S и e_L — векторы поляризации стоксовой и лазерной волн). На фиг. 41 показана зависимость вещественной и мнимой частей восприимчивости от $\omega' = \omega_L - \omega_S$. Помимо вклада, вносимого в восприимчивость $\chi^{(3)}$ содер-

жащимися в уравнении (2.33-20) резонансными членами, на фиг. 41 показан вклад нерезонансных членов $\chi_{NR}^{(3)}$, который в области ширины линии функции $\text{Im} \chi^{(3)}$ может считаться постоянным и вещественным. Вклад наибольшего нерезонансного члена по отношению к максимуму резонансного члена имеет большей частью поря-



Фиг. 41. Вещественная и мнимая части стоксовой восприимчивости (вещественная часть восприимчивости $\chi^{(3)}$ складывается из резонансной $\text{Re} \chi_R^{(3)}$ и нерезонансной $\text{Re} \chi_{NR}^{(3)}$ компонент).

док $\Delta\omega_{10}/\omega_{10} \simeq 10^{-2}$; так как часто встречается несколько нерезонансных членов одного и того же порядка, то можно оценить $\text{Re} \chi_{NR}^{(3)}/(\text{Re} \chi^{(3)})_{\text{макс}} \simeq 10^{-1}$. Из уравнения (3.16-20) или из фиг. 41 видно, что мнимая часть $\chi^{(3)}(\omega_S, \omega_L, -\omega_L)$ положительна (в противоположность двухфотонному поглощению). Это означает, как детально показано в ч. I, п. 4.221, что сигнальная волна с частотой ω_S усиливается в поле волны накачки с частотой $\omega_L \approx \omega_{10} + \omega_S$. В соответствующей мере (при сохранении числа фотонов) более высокочастотная волна накачки ослабляется. Если снова пренебречь ослаблением интенсивной волны накачки и рассматривать поляризованные в одном и том же направлении поля в изотропной среде, то коэффициент усиления g_S стоксовой вол-

ны получится в виде

$$g_S = \frac{\pi \mu_0^2 c^2 \omega_L \nu}{2 (n^{(j)})^2 \hbar} \times \left\{ \frac{(\pi \tau_{10})^{-1}}{(\omega_{10} - \omega_L + \omega_S)^2 + \tau_{10}^{-2}} \right\} |\alpha_{01}|^2 S(\omega_L). \quad (3.16-22)$$

Входящая в это уравнение функция формы линии Лоренца может быть в соответствии с реальными обстоятельствами заменена другой функцией формы линии $g_{10}(\omega_{10} - \omega_L + \omega_S)$, по аналогии с тем, как мы поступали в случаях одно- и двухфотонного поглощения. Если стоксова волна в среде претерпевает потери («линейные»), характеризуемые коэффициентом поглощения k_a , то эффективное усиление наступает лишь при выполнении «порогового условия» $g'_S \equiv g_S - k_a > 0$.

Укажем еще на то, что усиление стоксовой волны не зависит от соотношений между фазами φ_S, φ_L стоксовой и лазерной волн, в отличие от усиления антистоксовой волны, к обсуждению которого мы сейчас перейдем.

Рассмотрим изменение антистоксовой волны с частотой $\omega_A = 2\omega_L - \omega_S$ в поле двух волн с частотами ω_L и $\omega_S \approx \omega_L - \omega_{10}$. Как было показано в ч. I, п. 4.222, поляризация третьего порядка на частоте ω_A может быть создана двумя «путями»: во-первых, происходит процесс взаимодействия двух волн, аналогичный процессу при усилении стоксовой волны; это означает, что из волны с более высокой частотой (ω_A) энергия перекачивается в волну, частота которой ω_L на ω_{10} ниже ω_A , т. е. антистоксова волна ослабляется (это явление лежит в основе так называемого обращенного комбинационного рассеяния, к которому мы еще вернемся ниже). Во-вторых, может происходить процесс взаимодействия трех волн с восприимчивостью $\chi^{(3)}(-\omega_S, \omega_L, \omega_L)$ (причем, соответствующая восприимчивость при дискретном спектре частот есть $\chi^{(3)}(\omega_A; -\omega_S, \omega_L, \omega_L) = \frac{3}{4} \chi(-\omega_S, \omega_L, \omega_L)$). Этот процесс имеет иную природу, чем рассмотренные до сих пор двухволновые процессы, при которых процесс излучения сопровождался возбуждением принимающей в

нем участие молекулы; в трехволновом процессе энергии молекулы в начальном и в конечном состояниях одинаковы. Восприимчивость $\chi^{(3)}(-\omega_S, \omega_L, \omega_L)$ получается из уравнения (2.33-1) и для резонансных членов имеет вид

$$\begin{aligned} & \chi^{(3)}(-\omega_S, \omega_L, \omega_L) = \\ & = \frac{\gamma}{3\hbar} \frac{(\omega_{10} - \omega_L + \omega_S) - i\tau_{10}^{-1}}{(\omega_{10} - \omega_L + \omega_S)^2 + \tau_{10}^{-2}} \alpha_{01}(-\omega_S, \omega_L) \alpha_{01}^*(-\omega_S, \omega_L). \end{aligned} \quad (3.16-23)$$

Если можно пренебречь частотной зависимостью матричного элемента поляризуемости α_{01} в области от ω_S до ω_A , то из сравнения со стоковой восприимчивостью следует

$$\chi^{(3)}(\omega_A; -\omega_S, \omega_L, \omega_L) = \chi^{(3)*}(\omega_S; \omega_S, \omega_L, -\omega_L). \quad (3.16-24)$$

Рассмотрим взаимодействие трех монохроматических волн в случае оптимального согласования волновых векторов трех волн и фаз волновых амплитуд и восприимчивости, т. е. при условиях $k \cdot (\omega_A - k \cdot (\omega_S) - 2k \cdot (\omega_L)) = 0$ и $(2\varphi_L - \varphi_S - \varphi_A + \varphi_\chi + \pi/2) = 0$. Тогда, пренебрегая изменением волновых амплитуд лазерной и стоковой волн $\hat{E}(\omega_L; z)$ и $\hat{E}(\omega_S; z)$, получаем из уравнения ч. I (1.32-23)

$$\begin{aligned} & |\hat{E}(\omega_A; z) - \hat{E}(\omega_A; 0)| = \\ & = \frac{\mu_0 \omega_A^2}{2k(\omega_A)} |\chi^{(3)}(\omega_A; -\omega_S, \omega_L, \omega_L)| |\hat{E}(\omega_L)|^2 |\hat{E}(\omega_S)| z. \end{aligned} \quad (3.16-25)$$

Отсюда видно, что выигрыш мощности антистоксовой волны пропорционален $|\chi^{(3)}(\omega_A; -\omega_S, \omega_L, \omega_L)|^2$. (В ч. I был рассмотрен особый случай точного резонанса $\omega_L - \omega_S = \omega_{10}$, при котором, в пренебрежении нерезонансными членами восприимчивость является чисто мнимой.)

Применения

Как явствует из вышеизложенного, измерение усиления стоковой волны и измерение генерации антистоксовой волны позволяют определить зависимость мнимой части комбинационной восприимчивости и ее модуля от

разности частот $\omega_L - \omega_S$. С помощью соотношений Крамера — Кронига по мнимой части восприимчивости или по ее модулю может быть вычислена ее вещественная часть. Таким образом, можно сопоставить результаты обоих измерительных методов и получить предсказания о дисперсии матричных элементов производных поляризуемости. При численной оценке восприимчивостей мы можем воспользоваться значениями, указанными после уравнения (3.16-18) и в Приложении 2; для нормального (колебательного) эффекта комбинационного рассеяния можно считать типичной величиной $\alpha_{10} \approx 3 \cdot 10^{-41} (\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м})^2 \cdot \text{В}^{-1}$. Другой важной величиной является поперечное время релаксации τ_{10} , которое для конденсированных сред имеет порядок величины 10^{-12} с и которое мы здесь положим равным $\approx 2 \cdot 10^{-12}$ с. Отсюда при плотности числа частиц $\gamma = 10^{28} \text{ м}^{-3}$ получим для мнимой части $\chi^{(3)}$ значение

$$\begin{aligned} \text{Im} \{ \chi^{(3)}(\omega_S = \omega_L - \omega_{10}; \omega_S, \omega_L, -\omega_L) \} & \approx \\ & \approx 5 \cdot 10^{-32} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{В}^{-3} \end{aligned}$$

и для коэффициента усиления мощности (на частоте рубинового лазера $\omega_L = 2,7 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$)

$$g_S \langle S(\omega_L) \rangle \approx 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ м} \cdot \text{Вт}^{-1}.$$

Следовательно, при интенсивности лазерного света $10^{12} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2}$ получится коэффициент усиления мощности порядка 10 м^{-1} . Укажем еще на возможность использования света, полученного при вынужденном рассеянии, в качестве источника когерентного вторичного излучения; его частота может варьироваться в некотором диапазоне, например, путем изменения давления газа или его концентрации.

В п. 3.161 мы до сих пор рассматривали *нормальный колебательный эффект комбинационного рассеяния*, условия возникновения которого были сформулированы после уравнения (3.16-2а). Если эти условия нарушаются и лазерная частота становится близкой к области частот однофотонного поглощения, соответствующих переходам в возбужденное электронное состояние (например, если $[\mathcal{E}_{\text{эл. возб}}(v' = 0) - \mathcal{E}_{\text{эл. осн}}(v' = 0)] \leq \hbar\omega_L$, ср.

фиг. 40, а), то говорят о *резонансном колебательном эффекте комбинационного рассеяния* [3.16-2]. При вычислениях восприимчивости для этого эффекта уже нельзя пренебрегать временами релаксации (члены с затуханием) резонансных промежуточных состояний. Оценки показали, что при резонансном эффекте комбинационного рассеяния восприимчивости могут на несколько порядков превосходить восприимчивости нормального эффекта.

При обсуждении роли взаимодействия двух волн, а именно лазерного и антистоксова сигналов, было упомянуто *обращенное комбинационное рассеяние*. Экспериментально оно реализуется при условиях, при которых среда облучается не только лазерной волной (частота ω_L), но еще и излучением с непрерывным спектром $[\omega_L + \omega_{ij}]$. Спектр частот этого излучения должен иметь частоты, превышающие ω_L , и охватывать частоты $\omega_L + \omega_{ij}$, где ω_{ij} — различные активные в комбинационном рассеянии частоты колебаний молекулы. Тот же самый механизм, который привел к уравнению (3.16-22), в случае вынужденного процесса действует при перекачке энергии излучения с более «высоких» частот $\omega_L + \omega_{ij}$ на более «низкую» частоту ω_L . Этот процесс означает *поглощение* из непрерывного спектра, благодаря которому обнаруживаются линии комбинационного рассеяния (отсюда и происходит название *обращенное комбинационное рассеяние*).

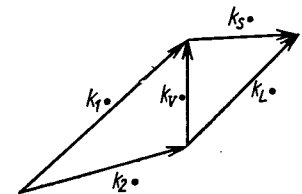
Рассмотрим теперь так называемое *активное комбинационное рассеяние* [3.16-4]. Оно содержит элементы как спонтанного эффекта, так и эффекта, индуцированного извне. В нем участвуют активные в комбинационном рассеянии частоты колебаний молекулы, находящейся под действием двух интенсивных лазерных волн (с частотами ω_1, ω_2 , волновыми векторами k_1, k_2 и волновыми амплитудами \bar{E}_1, \bar{E}_2); разность этих двух частот должна равняться частоте молекулярного колебания ω_v . Лазерные волны возбуждают в среде молекулярные колебания, при которых молекулы в различных областях пространства колеблются с согласованными фазами; волновое число этих пространственно когерентных молекулярных колебаний [мы обратимся к ним снова в связи

с пояснениями к уравнению (3.16-38)] есть $k_v = k_1 - k_2$, а их амплитуда пропорциональна $|\bar{E}_1 \bar{E}_2|$. Если среда дополнительно облучается пробным лучом (частота ω_L , волновое число k_L), то вследствие комбинационного рассеяния на пространственно когерентных молекулярных колебаниях возникают стоксово и антистоксово излучения на частотах $\omega_S = \omega_L - \omega_v$ и $\omega_A = \omega_L + \omega_v$. Вследствие закона сохранения импульса амплитуды соответствующих волн максимальны в направлениях, определяемых уравнениями

$$\begin{aligned} k_S &= k_L - (k_1 - k_2), \\ k_A &= k_L + (k_1 - k_2). \end{aligned} \quad (3.16-26)$$

Для стоксова рассеяния соотношения показаны на фиг. 42. Наряду с только что обсужденной когерентной компонентой активного комбинационного рассеяния существует и некогерентная компонента. Она обусловлена некогерентными колебаниями молекул, происходящими при фиксированных населенностях основного и возбужденного колебательных уровней. Помимо зависимости от направления, обе компоненты различаются еще поведением во времени. Рассмотрим конкретно антистоксово излучение. Если обе интенсивные лазерные волны (ω_1, ω_2) внезапно выключить, то направленное по k_A антистоксово излучение будет затухать со временем затухания фазы когерентных молекулярных колебаний; между тем, ненаправленное комбинационное рассеяние затухает в соответствии с продольным временем релаксации, в течение которого инверсия населенностей колебательных уровней, создаваемая вообще интенсивными лазерными волнами (ω_1, ω_2), исчезает, и населенности возвращаются к их равновесным значениям (ср. разд. 3.22).

Мы закончим п. 3.161 некоторыми замечаниями по поводу предсказательных возможностей рассмотренных методов. По отношению к спонтанному комбинационному рассеянию, даже если оно возбуждается интенсив-



Фиг. 42. Волновые векторы при активном комбинационном рассеянии.

ным лазерным светом, вынужденное комбинационное рассеяние в общем случае обладает тем преимуществом, что оно характеризуется существенно более интенсивным рассеянным светом; поэтому линия может быть измерена в течение гораздо более короткого времени. Измерение частоты колебаний, интенсивности и контура линии рассеянного излучения может быть использовано как для идентификации молекул, так и для заключений о внутреннем потенциальном поле, о важных значениях времен релаксации или о времени разрушения фазы молекулярных колебаний. Однако в известной мере существование порогового условия [ср. пояснения к уравнению (3.16-22)] и конкуренция между отдельными линиями являются недостатком; в спектре появляются только наиболее интенсивные линии (или даже наиболее интенсивная линия), так как остальные подавляются. В противоположность этому при обращенном комбинационном рассеянии могут быть сняты также и слабые линии, как это имеет место при спонтанном комбинационном рассеянии; были разработаны методы, позволяющие получать спектры обращенного комбинационного рассеяния в относительно короткие промежутки времени (в течение одного лазерного импульса) и с достаточной чувствительностью. Активная спектроскопия комбинационного рассеяния объединяет преимущества спонтанного рассеяния (линии комбинационного рассеяния появляются почти в полном составе) и вынужденного рассеяния (высокая интенсивность рассеянного света); однако это связано с большими экспериментальными трудностями.

3.162. Вынужденное комбинационное рассеяние на длинноволновых оптических фононах и на фонон-поляритонах

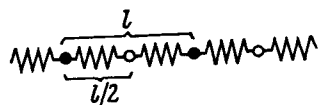
При рассмотрении этой проблемы мы вновь положим в основу схему связи невозмущенной системы с действующим извне электромагнитным полем. В качестве невозмущенной системы мы теперь должны рассматривать совокупность колебаний периодически расположенных структурных элементов решетки (атомы, молекулы, ионы) кристалла. Подобно молекулярным колебаниям, колебания решетки взаимодействуют с электронным движением; в так называемом адиабатическом приближе-

нии значение потенциала, в котором происходит движение решетки, при определенной конфигурации положений ядер равно полной энергии основного состояния, причем эта энергия вычисляется при неподвижных ядрах в той же самой конфигурации. В дальнейшем изложении мы в той мере исходим из модельных допущений п. 3.161, в какой мы учитываем связанные с колебаниями электрические поля; наряду с этим принимается во внимание периодичность кристалла. Определяющие соотношения для колебаний решетки (уравнения для плотности энергии, уравнения движения и др.) содержат в явном виде как «механические» компоненты, так и компоненты внутренних электрических полей в кристалле. Необходимые принципиальные познания об оптических (в особенности о нелинейных оптических) свойствах мы можем получить уже при изучении относительно простых кристаллов или модельных кристаллов; так, например, мы рассмотрим решеточные волны линейной цепочки и в трехмерном представлении колебания решетки с определенным направлением поляризации и распространения в оптически изотропных кристаллах с двумя ионами в элементарной ячейке. Сначала мы займемся невозмущенной системой и изучим длинноволновые оптические колебания решетки (оптические фононы) и колебания поляризации (фонон-поляритоны), представляющие собой смешение решеточных и электромагнитных колебаний [3.1-2]. Затем мы перейдем к рассмотрению взаимодействия решетки с внешним полем излучения. Квантовое описание основных соотношений для невозмущенной системы, а также для взаимодействия с внешним полем излучения может быть успешно выполнено как в качественной, так и в количественной формах по аналогии с классическим рассмотрением. В ч. I и до сих пор в ч. II мы еще не обсуждали решеточные колебания, и поэтому нам придется начать издали.

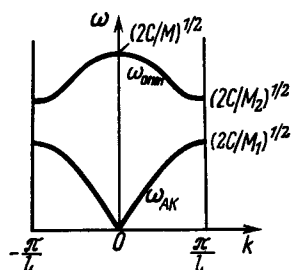
Длинноволновые оптические фононы

Мы начнем с классического метода рассмотрения. Продольные колебания цепочки с двумя различными атомами или ионами [3.16-5] могут быть исследованы по аналогии с цепочкой одинаковых атомов (ср.

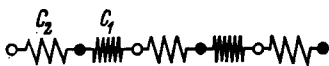
разд. В2.28). Модель двухатомной цепочки показана на фиг. 43а. Соответствующее дисперсионное соотношение представлено на фиг. 43б; верхняя функция изображает



Фиг. 43а. Модель простой двухатомной цепочки.



Фиг. 43б. Дисперсионное соотношение для двухатомной цепочки.



Фиг. 43в. Модель двухатомной цепочки с неравными расстояниями и с неравными силовыми постоянными.

функции $\omega(k)$ с теми же самыми порядками численных значений; при $|k| \ll k_{\text{макс}}$ получается, во-первых, колебание всей элементарной ячейки (с атомами, не смещенными друг относительно друга), соответствующее акустической ветви с $\omega(k \rightarrow 0) = 0$, и, во-вторых, относительное движение структурных элементов решетки в ячейке относительно друг друга, что соответствует оптической ветви с $\omega(k \rightarrow 0) > 0$. Трехмерный кристалл с s атомами в элементарной ячейке обладает $3(s - 1)$ оптическими вет-

ви, принадлежащие подрешетке и находящиеся в ячейках большей пространственной области, движутся с почти равными амплитудами и фазами, в то время как различные атомы в элементарной ячейке движутся относительно друг друга; таким образом, для оптической ветви становятся существенными только координаты относительного движения. В случае $s = 2$ и при $|k| \ll k_{\text{макс}}$ оптические ветви можно приближенно подразделить на одну продольную ветвь (LO : движение в k -направлении) и на две поперечные ветви (TO : движение перпендикулярно направлению вектора k). При определенных направлениях поляризации и распространения можно ориентироваться на верхнюю ветвь фиг. 43б для установления дисперсионных соотношений в оптической ветви.

Теория континуума (ср. разд. В2.28) для длинноволновых оптических колебаний двухатомных кристаллов исходит из плотности гамильтониана вида [3.16-6, 3.1-2]

$$\omega^2 = \frac{2C}{M} - \beta k^2 + O(1) k^4, \quad (3.16-27)$$

где $\beta = Cl^2/2(M_1 + M_2)$; оба атома колеблются при $k = 0$ со сдвигом фаз 180° относительно друг друга. Для цепочки с неравными расстояниями между атомами и с различными силовыми постоянными, показанной на фиг. 43в, получается качественно однотипный ход

дисперсионных соотношений в оптической ветви. Теория континуума (ср. разд. В2.28) для длинноволновых оптических колебаний двухатомных кристаллов исходит из плотности гамильтониана вида [3.16-6, 3.1-2]

$$\mathcal{H}^0 = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega_{TO}^2 q^2 - \sigma q \cdot E - \frac{1}{2} \chi_{эл} E^2. \quad (3.16-28)$$

Значение констант ω_{TO} , σ , $\chi_{эл}$ выяснится в дальнейшем; $p = (d/dt)q$ есть импульс, сопряженный координате q . Вектор q обозначает приведенное относительное смещение структурных элементов обеих подрешеток относительно их равновесного расстояния; имеем

$$q_\alpha = (r_{1\alpha} - r_{2\alpha})(M\gamma)^{-1/2}, \quad (3.16-29)$$

где $M\gamma$ — приведенная плотность массы и $r_{1\alpha}$, $r_{2\alpha}$ — векторы положения структурных элементов обеих решеток. Величина E есть напряженность макроскопического электрического поля внутри кристалла. Оно складывается из поля, создаваемого деформацией кристаллической решетки (деполяризационное поле), и приложенного в данных условиях внешнего поля. Следует заметить, что (в предположении $|k| \ll k_{\text{макс}}$) в выражении для плотности гамильтониана можно не принимать во внимание роль члена βk^2 в (3.16-27); если, кроме того, предположить малые отклонения и малые напряженности поля, то можно будет пренебречь членами, содержащими произведения более чем двух множителей q , E . По общим

методам механики из § можно получить уравнение движения для q , а именно:

$$\frac{d^2}{dt^2} q + \omega_{TO}^2 q = \sigma E. \quad (3.16-30)$$

Далее, образуя градиент от плотности гамильтониана по вектору E , получаем компоненты поляризации (ср. разд. 2.23)

$$P = -\nabla_E \mathcal{H} = \sigma q + \chi_{эл} E. \quad (3.16-31)$$

Член σq описывает поляризационную компоненту при сдвиге обеих подрешеток, а константа $\chi_{эл}$ описывает восприимчивость, возникающую вследствие подвижности электронов в атомах и ионах. Она определяется формулой

$$\chi_{эл} = \epsilon_0 (\epsilon_{эл} - 1), \quad (3.16-32)$$

где $\epsilon_{эл}$ есть диэлектрическая постоянная на электронных частотах. При наложении статического электрического поля получим из уравнения $(d^2/dt^2)q = 0$ восприимчивость и диэлектрическую постоянную $\epsilon_{ст}$ для статического случая:

$$\epsilon_0 (\epsilon_{ст} - 1) = \frac{\sigma^2}{\omega_{TO}^2} + \chi_{эл}. \quad (3.16-33)$$

Отсюда следует

$$\sigma = \omega_{TO} \epsilon_0^{1/2} (\epsilon_{ст} - \epsilon_{эл})^{1/2}; \quad (3.16-34)$$

эта величина характеризует интенсивность инфракрасной активности вещества. Исследуем теперь случай отсутствия внешнего электрического поля. Поперечное колебание не создает деполяризационного поля, и поэтому частота TO -колебания (трансверсального оптического) при $k = 0$ есть

$$\omega_{TO} \equiv \omega_{TO}(k \rightarrow 0). \quad (3.16-35)$$

Для длинноволновых продольных колебаний деполяризационное поле равно $E = -\epsilon_0^{-1} P$, так как $D = 0$; отсюда следует для частоты LO -колебания (продольного оптического)

$$\omega_{LO} = \omega_{TO} \left(\frac{\epsilon_{ст}}{\epsilon_{эл}} \right)^{1/2} \equiv \omega_{LO}(k \rightarrow 0). \quad (3.16-36)$$

Приведем для примера численные значения для NaCl : $\omega_{TO} = 3,1 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$; $\epsilon_{ст} = 5,0$; $\epsilon_{эл} = 2,3$. Уравнения движения для длинноволновых оптических колебаний решетки имеют вид

$$\frac{d^2}{dt^2} q_{TO} + \omega_{TO}^2 q_{TO} = 0, \quad (3.16-37a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} q_{LO} + \omega_{LO}^2 q_{LO} = 0. \quad (3.16-37b)$$

Поскольку, согласно уравнению (3.16-30), величины q и E связаны между собой линейной зависимостью, плотность гамильтониана \mathcal{H} может быть представлена как величина, зависящая от q , во втором порядке. Представим собственное решение уравнения движения в виде

$$q(z, t) = \bar{q}^{(-)} e^{i(kz - \omega(k)t)} + \{KK\}, \quad (3.16-38)$$

где величина $\bar{q}^{(-)}$ должна считаться постоянной, и решение носит явно выраженный волновой характер. Постоянство волновой амплитуды влечет за собой постоянство полной энергии во времени, благодаря чему создается возможность квазичастичной интерпретации. При TO -колебаниях вектор $\bar{q}^{(-)}$ перпендикулярен k , а при LO -колебаниях эти векторы параллельны.

Эти волны могут рассматриваться как квазичастицы — длинноволновые оптические фононы — с энергией $\hbar\omega(k)$ и импульсом $\hbar k$. Поэтому колебания можно квантовать, и для этой цели может быть использован формализм квантования поля (ср. разд. В2.28); разложение q по бегущим волнам в основной области периодичности приводит к тому, что классическая величина $\bar{q}^{(-)}$ после квантования переходит с точностью до некоторого множителя в оператор уничтожения фононов a_{Φ} [ср. уравнение (В2.28-9)].

Сравним колебания оптических фононов с колебаниями молекул. Рассуждения об оптических решеточных колебаниях, которые привели к уравнениям (3.16-37) и (3.16-38), показывают, что при $|k| \ll k_{\text{макс}}$ характер колебательного движения двух подрешеток относительно друг друга соответствует молекулярным колебаниям (ср.

ч. I, разд. 2.41, и ч. II, п. 3.161). Дисперсионное соотношение было заменено функцией $\omega(k)$ при $k=0$ (пренебрежение членом βk^2). Такая замена привела к тому, что в волновом уравнении для q отсутствуют какие-либо явные пространственные зависимости (производные по z). При колебаниях изолированных друг от друга и распределенных в пространстве молекул возможно произвольное пространственно-временное соотношение фаз между колебательными координатами, которое может быть обусловлено внешними воздействиями (ср. хотя бы допущения, относящиеся к активному комбинационному рассеянию, п. 3.161); в частности, возможно также когерентное движение согласно уравнению (3.16-38). Отсюда можно заключить, что колебания молекул в жидкости (если только молекулы не движутся слишком быстро) могут рассматриваться как колебания длинноволновых фононов. Это положение можно сделать наглядным также и иным способом: соотношения для описания длинноволновых оптических решеточных колебаний в принципе не изменяются, если представленную на фиг. 43в модель интерпретировать как молекулярный кристалл, т.е. считать силовую постоянную C_2 малой по сравнению с C_1 ; в предельном случае мы перейдем к изолированным молекулам.

Фонон-поляритоны

Для длинноволновых оптических решеточных колебаний мы могли заменить дисперсионное соотношение $\omega(k)$ для заданного направления поляризации и распространения касательной к функции при $k=0$; это было хорошим приближением. Однако качественно совсем другие дисперсионные кривые появляются при учете связи оптических колебаний с электромагнитными колебаниями. До сих пор мы пользовались уравнениями (3.16-30) и (3.16-31), не принимая во внимание, что волновое уравнение

$$\nabla \cdot (\nabla \times E) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P. \quad (3.16-39)$$

содержит дополнительное соотношение между E и P . С физической точки зрения одновременное решение трех

связанных уравнений (3.16-30), (3.16-31) и (3.16-39) означает учет взаимодействия колебаний решетки с электромагнитными колебаниями. Особенно ярко выраженных эффектов можно ожидать, вообще говоря, при взаимодействии волн в тех областях, в которых приближенно совпадают частоты и волновые числа. Если на фиг. 43б начертить прямую, соответствующую дисперсионному соотношению для фотонов, то точка ее пересечения с дисперсионной кривой для оптической ветви падалась бы при $k_{\text{пер}} \simeq 10^5 \text{ м}^{-1}$. Эта оценка сделана на основании значений величин C , M , β . Значение $k_{\text{пер}}$ мало по сравнению с $k_{\text{макс}}$, откуда следует, что даже при учете взаимодействия с электромагнитными колебаниями следует пользоваться уравнениями (3.16-30) и (3.16-31) для длинноволновых оптических решеточных колебаний. Мы рассматриваем TO -колебания, у которых векторы q , как и напряженности электрического поля, перпендикулярны вектору k . Все три вектора q , E , P имеют одно и то же направление, перпендикулярное k , так что мы можем в дальнейшем опустить символ вектора. Сделаем подстановку

$$E = \bar{E}^{(-)} e^{i(kz - \omega t)} + \{KK\}$$

с постоянной комплексной волновой амплитудой $\bar{E}^{(-)}$ и тогда из уравнений (3.16-30) и (3.16-31) получим

$$q = \bar{q}^{(-)} e^{i(kz - \omega t)} + \{KK\}, \quad \text{где } \bar{q}^{(-)} = \frac{\sigma}{\omega_{TO}^2 - \omega^2} \bar{E}^{(-)}, \quad (3.16-40)$$

$$P = \bar{P}^{(-)} e^{i(kz - \omega t)} + \{KK\}, \quad \text{где } \bar{P}^{(-)} = \sigma \bar{q}^{(-)} + \chi_{\text{эл}} \bar{E}^{(-)}, \quad (3.16-41)$$

и еще волновое уравнение для напряженности поля

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \bar{E}^{(-)} = \mu_0 \omega^2 \bar{P}^{(-)}. \quad (3.16-42)$$

Исключение $\bar{q}^{(-)}$ и $\bar{P}^{(-)}$ из этих трех уравнений приводит к результату

$$\left(k^2 - \frac{\epsilon_{\text{эл}}}{c^2} \omega^2 - \frac{\epsilon_{\text{ст}} - \epsilon_{\text{эл}}}{c^2} \omega_{TO}^2 \frac{\omega^2}{\omega_{TO}^2 - \omega^2}\right) \bar{E}^{(-)} = 0. \quad (3.16-43)$$

Если выражение в скобках обращается в нуль, то уравнение (3.16-43) соблюдается для любых значений $\bar{E}^{(-)}$. Вместе с уравнениями (3.16-40) и (3.16-28) оно образует собственные решения. Возникают волны поляризации, в которых смешаны решеточные волны и электромагнитные волны; соответствующая этим волнам плотность гамильтониана может быть приведена к такой форме, в которой во втором порядке она зависит только от $\bar{q}^{(-)}$ или только от $\bar{E}^{(-)}$.

После уравнения (3.16-38) мы приводили аргументы, на основании которых выполнялось квантование оптических фононов. Аналогичные соображения могут быть использованы для квантования волн поляризации. Возникающие квазичастицы называют фонон-поляритонами (в отличие от других поляритонов, например экситон-поляритонов, на которых мы здесь не останавливаемся). Поляритон имеет энергию $\hbar\omega_p(k_p)$ и импульс $\hbar k_p$. Гамильтониан поляритонной системы записывается в виде

$$H = \sum_{k_p} \hbar\omega_p(k_p) \left[a_p^+(k_p) a_p(k_p) + \frac{1}{2} I \right]. \quad (3.16-44)$$

Оператор уничтожения поляритонов $a_p(k_p)$ соответствует как амплитуде $\bar{E}_p^{(-)}$ напряженности электрического поля волны поляризации, так и ее колебательной амплитуде $\bar{q}_p^{(-)}$. При разложении по бегущим плоским волнам в основной области периодичности для оператора напряженности электрического поля в представлении Шредингера получается

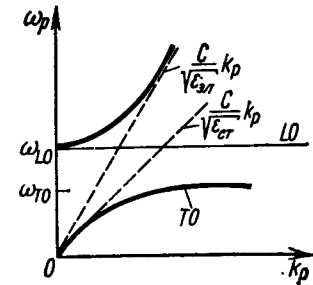
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p(k_p) = i \sqrt{\frac{\hbar\omega_p(k_p)}{2\epsilon_0 V}} \sqrt{\frac{v_p(k_p) \bar{v}_p(k_p)}{c^2}} \times \\ \times a_p(k_p) e^{ik_p z} + \{NA\}. \end{aligned} \quad (3.16-45)$$

С помощью уравнения (3.16-40), согласно которому должно быть $q_p(k_p) \approx \mathbf{E}_p(k_p)$, отсюда можно вычислить оператор колебательной координаты $q_p(k_p)$. Величина v_p или \bar{v}_p есть фазовая или групповая скорость волны поляризации, которую можно определить из дисперсионного соотношения. Зависимость частоты ω_p от волнового

числа k_p поляритонов получается из уравнения (3.16-43) в виде

$$\begin{aligned} \omega_p^2 = \frac{1}{2\epsilon_{эл}} \{ [\omega_{т0}^2 \epsilon_{ст} + c^2 k_p^2] \pm \\ \pm [(\omega_{т0}^2 \epsilon_{ст} + c^2 k_p^2)^2 - 4\omega_{т0}^2 k_p^2 c^2]^{1/2} \}. \end{aligned} \quad (3.16-46)$$

Функция $\omega_p(k_p)$ наглядно представлена на фиг. 44; в результате смешивания оптических колебаний решетки с электромагнитными колебаниями эта функция имеет две ветви. На верхней ветви для малых $|k_p|$ обнаруживается фононоподобное поведение (колебательная частота ω_{LO}), а для больших $|k_p|$ наблюдается фотоноподобное поведение (скорость света $c\epsilon_{эл}^{-1/2}$); на нижней ветви для малых $|k_p|$ имеет место фотоноподобное поведение (скорость света $c\epsilon_{ст}^{-1/2}$), а для больших $|k_p|$ — фононоподобное поведение (колебательная частота $\omega_{т0}$).



Фиг. 44. Дисперсионное соотношение для поляритонов

Взаимодействие с внешним полем излучения

Наша методика описания взаимодействия возбужденных состояний среды (фононов и поляритонов) с внешним электромагнитным полем снова заключается в том, что на первом этапе используется классическое рассмотрение. Мы примем, что среда является активной как к инфракрасному поглощению, так и к комбинационному рассеянию. Это возможно для кристаллов с точечными группами без инверсионной симметрии, например для LiNbO_3 . Чтобы сделать описание существенных нелинейных эффектов наиболее наглядным, можно применить однокомпонентное представление.

Мы видели, что существенные дисперсионные свойства среды могут описываться слагаемым \mathcal{H} плотности гамильтониана, состоящим из квадратичных членов. Но для того, чтобы охватить процессы взаимодействия, от-

ветственные за рассмотренное в разд. 3.16 рассеяние света, следует при формировании полной плотности гамильтониана прибавить к \mathfrak{H} слагаемое, содержащее члены третьего порядка. Сначала рассмотрим член взаимодействия вида

$$\mathfrak{H}' = -\frac{\alpha'}{2} q E^2. \quad (3.16-47)$$

Эта формула отображает предположенную нами активность вещества в комбинационном рассеянии и соответствует выражению для энергии взаимодействия в уравнении (3.16-12); α' есть производная от поляризуемости по q . Из полной плотности гамильтониана $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}'$ получим путем частного дифференцирования по E выражение для поляризации:

$$P = \chi_{\text{эл}} E + \sigma q + \alpha' q E. \quad (3.16-48)$$

Вычисляя частную производную по q , получаем действующую силу и уравнение движения для q :

$$\frac{d^2}{dt^2} q + \Gamma \frac{d}{dt} q + \omega_{TO}^2 q = \sigma E + \frac{\alpha'}{2} E^2. \quad (3.16-49)$$

Мы ввели здесь дополнительный член, описывающий затухание колебаний решетки. Сравнение с уравнениями (3.16-30) и (3.16-31) показывает, что теперь появились дополнительные *нелинейные* члены. Для дальнейших рассуждений важным является решение уравнения движения для q :

$$q(t, z) = \sigma \int_0^\infty d\tau G(\omega_{TO}, \Gamma; \tau) E(t - \tau, z) + \frac{\alpha'}{2} \int_0^\infty d\tau G(\omega_{TO}, \Gamma; \tau) E^2(t - \tau, z);$$

$G(\omega_{TO}, \Gamma; \tau)$ есть системная функция (фурье-образ частотного хода) затухающего гармонического осциллятора с частотой ω_{TO} и с параметром затухания Γ (ср. ч. I, п. 1.111 и § П1). С этим решением, при заданном $E(t, z)$,

определяется поляризация $P(t, z)$:

$$P(t, z) = \chi_{\text{эл}} E(t, z) + \sigma^2 \int_0^\infty d\tau G(\omega_{TO}, \Gamma; \tau) E(t - \tau, z) + P^{(\text{нл})},$$

$$P^{(\text{нл})}(t, z) = \frac{\sigma\alpha'}{2} \left\{ \int_0^\infty d\tau G(\omega_{TO}, \Gamma; \tau) E^2(t - \tau, z) + \right.$$

$$+ 2E(t, z) \int_0^\infty d\tau G(\omega_{TO}, \Gamma; \tau) E(t - \tau, z) \left. \right\} +$$

$$+ \frac{|\alpha'|^2}{2} E(t, z) \int_0^\infty d\tau G(\omega_{TO}, \Gamma; \tau) E^2(t - \tau, z). \quad (3.16-50a)$$

Два слагаемых в P зависят от E линейно ($\sim \chi_{\text{эл}}$ и $\sim \sigma$); два слагаемых зависят от E нелинейно ($\sim \sigma\alpha'$ и $\sim |\alpha'|^2$). Подстановка в волновое уравнение (3.16-39) дает

$$T^{(\text{н})}[E] = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{(\text{нл})}, \quad (3.16-51)$$

где $T^{(\text{н})}[E]$ содержит все члены, линейные по E . Произведя подстановку

$$E = \bar{E}^{(-)} e^{i(kz - \omega_p t)},$$

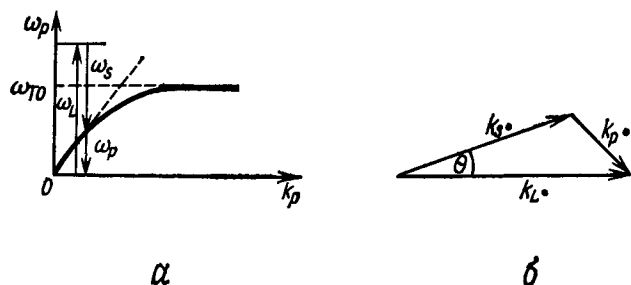
получим из требования $T^{(\text{н})}[E] = 0$ для $\Gamma \rightarrow 0$ уравнение (3.16-43) и тем самым дисперсионное соотношение, применимое к поляритонам. Если принять, что напряженность поля содержит три волны с дискретными частотами: лазерную волну (частота ω_L , волновой вектор k_L , амплитуда $\bar{E}_L^{(-)}$), рассеянную волну ($\omega_S, k_S, \bar{E}_S^{(-)}$) и поляритонную волну ($\omega_P, k_P, \bar{E}_P^{(-)}$), то уравнение (3.16-51) распадается на три уравнения для этих плоских волн. Вследствие существования $P^{(\text{нл})}$ между этими тремя волнами может возникнуть взаимодействие, сопровождающееся когерентным усилением или ослаблением. Структура $P^{(\text{нл})}$ такова, что коэффициенты усиления существенно зависят от положения частот поля и квадрата напряженности поля относительно

частоты $\omega_{\text{го}}$. Условиями совместного решения трех волновых уравнений, вытекающих из уравнения (3.16-51), служат соотношения

$$\omega_L = \omega_S + \omega_P, \quad (3.16-52a)$$

$$k_{L\cdot} = k_{S\cdot} + k_{P\cdot}. \quad (3.16-52б)$$

(Это утверждение может быть понято на основании аналогии с математической проблемой, обсужденной в ч. I, разд. 2.52.) С физической точки зрения уравнения



Фиг. 45. Соотношения между частотами (а) и волновыми векторами (б) при рассеянии на поляритонах (нижняя ветвь).

(3.16-52) выражают законы сохранения энергии и импульса при рассеянии на поляритонах; соотношения между частотами и волновыми числами для нижней ветви поляритонной дисперсионной кривой показаны на фиг. 45. При учете члена с затуханием в волновом уравнении для E (который полагается пропорциональным $\partial/\partial t E$) ситуация несколько усложняется; тем не менее можно предсказать, что при выполнении дисперсионных соотношений и соотношений (3.16-52) коэффициент усиления рассеянной волны принимает максимальное значение в направлении, определяемом вектором $k_{S\cdot}$.

Мы начнем квантовое теоретическое описание взаимодействия с изложением полуклассического метода для случая молекулы, способной совершать колебания [3.16-7]. Молекулы описываются с квантовой точки зрения, а поля — классически. Оператор взаимодействия в гамильтониане одной молекулы (которая предполагает-

ся активной в инфракрасном спектре и в комбинационном рассеянии) относится к колебанию с колебательной координатой q и имеет вид

$$\overset{W}{H}^{(M)} = -\mathbf{d}(q)E - \frac{1}{2}\alpha(q)E^2; \quad (3.16-53)$$

\mathbf{d} есть оператор дипольного момента, α — оператор поляризуемости (ср. п. 2. 362). Согласно теории Плачека [ср. уравнение (3.16-12)], операторы \mathbf{d} и α зависят от колебательной координаты q . Переходу от одной молекулы ко всем молекулам в единице объема соответствует переход от оператора $\overset{W}{H}^{(M)}$ к оператору плотности гамильтониана $\overset{W}{H}$. Математическое ожидание поляризации определяется выражением

$$P = \left\langle -\frac{\partial}{\partial E} \overset{W}{H} \right\rangle = \chi_{эл} E + \langle \sigma \rangle q + \langle \alpha' \rangle q E + O(1) q^2. \quad (3.16-54)$$

Здесь σ и α' являются коэффициентами при q в разложении $\gamma \mathbf{d}$ и $\gamma \alpha$ по q , где γ — плотность числа молекул. Предполагается, что постоянный дипольный момент отсутствует. На основании уравнения (3.16-53) можно для двухуровневой колебательной системы молекулы вывести уравнения движения для матричных элементов молекулярного оператора плотности ρ (см. разд. 2.36); в рассматриваемом случае в эти уравнения входят матричные элементы операторов \mathbf{d} и α , напряженность поля E , частота перехода ω_{10} и соответствующее поперечное время релаксации τ_{10} . Образова след с оператором ρ , можно однозначно выразить математические ожидания $\langle \sigma \rangle$ и $\langle \alpha' \rangle$ через только что названные атомные величины. По аналогии с выводом уравнения (3.16-30) можно из уравнения (3.16-53) вывести уравнение движения для колебательной координаты. Итак, в рассматриваемом случае получаются для P и q два уравнения, имеющие ту же структуру, что уравнения (3.16-48) и (3.16-49); поэтому интересующая нас проблема формально может быть решена таким же путем, по которому мы шли при решении этих двух классических уравнений. Существенно, что теперь, как мы видели, все кон-

станты выражены через атомные величины. Следует отметить, что частота ω_{10} должна быть заменена частотой перехода ω_{10} ; величина σ^2 пропорциональна квадрату модуля переходного дипольного момента $|d_{10}|^2$. При учете члена с затуханием, содержащего константу Γ_p , в волновом уравнении для E_p получим дисперсионное соотношение для когерентных молекулярных колебаний поляритонного характера:

$$k_p^2 = \omega_p^2 \left\{ \zeta_1 n_p^2 + \frac{1}{\omega_{10}^2 - \omega_p^2} (\zeta_2 |d_{10}|^2 \omega_{10} \gamma + \zeta_3 \frac{n_p \Gamma_p}{\tau_{10}}) \right\}, \quad (3.16-55)$$

где n_p — показатель преломления и ζ_i — универсальные константы. Это соотношение имеет, очевидно, ту же структуру, что и в случае без затухания [ср. уравнение (3.16-43)]; однако в не зависящие от ω_p величины входят константа затухания и время релаксации.

Изложенные выше классическая и полуклассическая теории позволяют получить полностью определенные во времени функции для зависящих от времени (и от координат) волновых амплитуд электромагнитных и решеточных колебаний. Последовательное квантовое рассмотрение позволяет охватить также и спонтанно протекающие процессы. В конкретных экспериментальных условиях они играют более или менее важную роль в зависимости от того, как часто «из шума» возникают когерентные стоксовы и поляритонные волны. Основой нашего последовательного квантового описания будет снова служить модель взаимодействия трех волн; мы предположим, что для них соблюдаются соотношения (3.16-52). Тогда гамильтониан невозмущенной системы

$$\begin{aligned} \overset{0}{H}_{L, S, P} = & \hbar\omega_L \left(a_L^+ a_L + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right) + \\ & + \hbar\omega_S \left(a_S^+ a_S + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right) + \hbar\omega_P \left(a_P^+ a_P + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right) \end{aligned} \quad (3.16-56)$$

складывается из членов, соответствующих лазерной, стоксовой и поляритонной волнам. Член взаимодействия мы построим по аналогии с классической теорией, в которой используется плотность гамильтониана в виде

[3.16-8]:

$$\overset{W}{\mathcal{H}}_{L, S, P} = -\mathfrak{R}_1 \bar{E}_L^{(-)} \bar{E}_S^{(+)} \bar{E}_P^{(+)} - \mathfrak{R}_2 \bar{E}_L^{(-)} \bar{E}_S^{(+)} \bar{E}_P^{(+)} + \{KK\}. \quad (3.16-57)$$

Первое слагаемое получается непосредственно из заданного в уравнении (3.16-47) выражения $\overset{W}{\mathcal{H}}$ для нелинейной энергии взаимодействия, если в него подставить три волны и пренебречь членами, быстро меняющимися со временем. Второе слагаемое представляет собой обобщение по отношению к уравнению (3.16-47); оно ответственно за нелинейную часть амплитуд поляризации, которые образуются путем вычисления частных производных от $\overset{W}{\mathcal{H}}_{L, S, P}$ по амплитудам напряженности поля (ср. разд. 2.23). Следовательно,

$$(\bar{P}_P^{(n,l)})^{(-)} = -\frac{\partial}{\partial \bar{E}_P^{(+)}} \overset{W}{\mathcal{H}} = \mathfrak{R}_2 \bar{E}_L^{(-)} \bar{E}_S^{(+)}.$$

Сравнение с уравнением (3.16-50a) показывает, что определяемый уравнением (3.16-47) член взаимодействия $\overset{W}{\mathcal{H}}$ приводит к соотношению между $P^{(n,l)}$ и $\bar{E}_L^{(-)} \bar{E}_S^{(+)}$ той же самой структуры, причем в случае уравнения (3.16-50a) константа была выражена через σ и α' . Укажем еще на то, что если ограничиться оптически изотропными средами (кубические кристаллы), то тензорный характер величин \mathfrak{R}_1 и \mathfrak{R}_2 и векторный характер волновой амплитуды явно не играют роли. При квантовании выражения для плотности энергии взаимодействия перейдем от величин к соответствующим им операторам: $\bar{E}_L^{(-)} \sim a_L$, $\bar{E}_S^{(+)} \sim a_S$, $\bar{q}_P^{(+)} \sim a_P^+$, $\bar{E}_P^{(+)} \sim a_P^+$; коэффициенты пропорциональности для электромагнитных волн следует взять из разд. 1.21, а для поляритонных величин — из уравнений (3.16-40) и (3.16-45). При подстановке трех волн оператор плотности гамильтониана имеет вид

$$\overset{W}{H} = \mathcal{C}' a_L a_S^+ a_P^+ + \{HA\} \quad (3.16-58)$$

и состоит из трех произведений бозонных операторов; \mathcal{C}' содержит \mathfrak{K}_1 и \mathfrak{K}_2 , частоты и волновые числа взаимодействующих волн, значения производных от функции $\omega_p(k_p)$ в точке k_p , а также объем V основной области периодичности, в котором электромагнитные поля и колебательная координата q были разложены по плоским бегущим волнам. При выводе предполагалось, что в этом объеме волновые амплитуды постоянны. Однако для вещества с реальными свойствами (затухание поляритонной волны) и для обычных экспериментальных условий (например, параметрическое усиление стоксовой волны) полного постоянства волновых амплитуд предполагать нельзя, поэтому линейные размеры основной области следует выбрать так, чтобы они были малы по сравнению с обратным коэффициентом поглощения, или коэффициентом усиления. Полный оператор взаимодействия получится в результате пространственного интегрирования $\overset{W}{\mathbf{H}}$ по основной области, что означает простое умножение на V :

$$\overset{W}{\mathbf{H}} = \mathcal{C} a_L a_S^+ a_P^+ + \mathcal{C}^* a_L^+ a_S a_P. \quad (3.16-59)$$

Поскольку волновые амплитуды зависят от V , то величина $|\mathcal{C}'|$ пропорциональна $V^{-3/2}$, откуда следует, что величина $|\mathcal{C}|$ пропорциональна $V^{-1/2}$. Если отказаться от используемого до сих пор предположения о строгом соблюдении условия $k_L = k_S + k_P$ и допустить некоторое рассогласование фаз $\Delta k = k_L - k_S - k_P \neq 0$, то первое слагаемое следует уже умножить не на V , а на множитель $\int_V dV' e^{i \Delta k \cdot r'}$; второе слагаемое следует умножить на комплексно сопряженное выражение.

Применения

В полуклассической теории было вычислено дисперсионное соотношение (3.16-55) для поляритонных волн, связанных с молекулярными колебаниями. При тех же условиях, при которых было выполнено это вычисление, и при взаимодействии лазерной, стоксовой и поляритонной волн коэффициент усиления стоксовой волны по-

лучается в виде

$$g_S = \xi \left\{ \frac{\gamma |a_{10}|^2 \tau_{10} |\bar{E}_L^{(-)}|^2}{n_S \lambda_S} \right\} \left\{ \frac{\omega_{10}/\omega_P}{1 + [\Gamma_P n_P \tau_{10} (\omega_{10}^2 - \omega_P^2)/(2\omega_P^2 c F)]} \right\}. \quad (3.16-60)$$

Величина $F(\omega_{10}, \omega_P)$ есть второе слагаемое в фигурных скобках в уравнении (3.16-55); ξ — универсальная константа. Первый множитель в фигурных скобках соответствует обычному коэффициенту усиления стоксовой волны при нормальном комбинационном рассеянии на молекулах [ср. уравнение (3.16-22)]. Вторым множителем в фигурных скобках характеризует особые условия рассеяния на поляритонах; второе слагаемое в знаменателе пропорционально ω_{10}^2/ω_P^2 при малых ω_P и ведет себя как $(\omega_{10} - \omega_P)^2$ при $\omega_P^2 \approx \omega_{10}^2$.

Рассмотрим теперь рождение стоксовых квантов и поляритонов «исходя из спонтанного процесса»; для этой цели применим представленный выше аппарат последовательной квантовой теории. Сначала допустим, что в основной области в момент времени t_0 состояние $|\psi(t_0)\rangle$ задается фиксированными числами частиц n_L, n_S, n_P и модами, характеризующимися волновыми векторами k_L, k_S, k_P :

$$|\psi(t_0)\rangle = |n_L\rangle |n_S\rangle |n_P\rangle. \quad (3.16-61)$$

Легко видеть, что оператор взаимодействия $\overset{W}{\mathbf{H}}$ из уравнения (3.16-59) приводит тогда только к отличным от нуля вероятностям переходов из состояния $|\psi(t_0)\rangle$ в два состояния $|n_L - 1\rangle |n_S + 1\rangle |n_P + 1\rangle$ и $|n_L + 1\rangle |n_S - 1\rangle |n_P - 1\rangle$ с производными

$$\frac{d}{dt} W_+ = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{C}|^2 n_L (n_S + 1) (n_P + 1) \delta(\omega_L - \omega_S - \omega_P)$$

и

$$\frac{d}{dt} W_- = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{C}|^2 (n_L + 1) n_S n_P \delta(\omega_L - \omega_S - \omega_P)$$

(ср. разд. В2.26). Единицы в скобках обусловлены тем или другим спонтанным эффектом. Результирующая скорость для генерации стоксовых квантов и поляритонов

есть

$$\frac{d}{dt} W = \frac{d}{dt} W_+ - \frac{d}{dt} W_- = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{E}|^2 \{n_L(n_S + n_P + 1) - n_S n_P\} \delta(\omega_L - \omega_S - \omega_P). \quad (3.16-62)$$

В случае учета затухания конечных состояний дельта-функцию следует заменить:

$$\delta(\omega_L - \omega_S - \omega_P) \rightarrow \frac{\tilde{\Gamma}_P/2\pi}{(\omega_L - \omega_S - \omega_P)^2 + (\tilde{\Gamma}_P/2)^2} \equiv g(\omega_L - \omega_S - \omega_P),$$

где $\tilde{\Gamma}_P$ — ширина функции формы линии, представляющей затухание (ср. п. 3.112). Из уравнения (3.16-62) явствует, что, при $n_L \gg n_S, n_P$ результирующая производная $d/dt W$ всегда положительна. Это справедливо, в частности, в том случае, когда первоначально вообще нет стоксовых квантов и поляритонов; они генерируются в результате спонтанного распада лазерного кванта. В одном из важных экспериментальных вариантов поляритонного рассеяния под действием интенсивной лазерной волны в среде нарастает спонтанный процесс рассеяния, из которого формируются когерентные стоксова и поляритонная волны. Поэтому мы достигнем лучшего соответствия с действительностью, если будем описывать начальное состояние не фиксированным числом частиц, а когерентным излучением лазерной волны и распределением с максимальной энтропией (термодинамическое равновесие) стоксовых квантов и поляритонов. Тогда оператор плотности в момент времени t_0 [ср. уравнения (1.31-14) и (1.22-17)] запишется в виде

$$\rho(t_0) = \rho_L \rho_S \rho_P, \quad (3.16-63)$$

где

$$\rho_L = |\alpha_L\rangle \langle \alpha_L|$$

и

$$\rho_{S,P} = \sum_{S,P} \left(\frac{\bar{n}_{S,P}}{1 + \bar{n}_{S,P}} \right)^n \frac{1}{1 + \bar{n}_{S,P}} |n_{S,P}\rangle \langle n_{S,P}|.$$

Здесь $|\alpha_L\rangle$ есть глауберовское состояние лазерной моды со средним числом фотонов $|\alpha_L|^2 = n_L$; $\bar{n}_{S,P}$ — сред-

ние числа стоксовых квантов и поляритонов. Вычисление по теории возмущений второго порядка дает для скорости генерации стоксовых фотонов выражение

$$\frac{\Delta \langle a_S^+ a_S \rangle}{\Delta t} = \frac{\langle a_S^+ a_S \rangle_{t_0 + \Delta t} - \langle a_S^+ a_S \rangle_{t_0}}{\Delta t} = \frac{\Omega}{V} \{ \bar{n}_L (\bar{n}_S + \bar{n}_P + 1) - \bar{n}_S \bar{n}_P \}, \quad (3.16-64)$$

где

$$\Omega = \frac{V 2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{E}|^2 \delta(\omega_L - \omega_S - \omega_P) \text{ или}$$

$$\frac{V 2\pi}{\hbar^2} |\mathcal{E}|^2 g(\omega_L - \omega_S - \omega_P).$$

Мы можем, таким образом, констатировать, что при облучении среды когерентной волной и при «хаотическом» распределении стоксовых квантов и поляритонов скорость генерации стоксовых фотонов точно так же зависит от среднего числа частиц, как и при состояниях с фиксированным числом частиц. Поэтому можно, конечно, воспользоваться полученными для этих состояний заключениями и выводами. Аналогично скорости генерации стоксовых квантов определяются скорости генерации поляритонов и уничтожения лазерных квантов.

Теперь мы займемся пространственно-временными явлениями при прохождении волн через среду. До сих пор мы изучали эти явления с помощью волнового уравнения классической электродинамики, пользуясь при этом математическим ожиданием поляризации; теперь мы будем иметь дело непосредственно с числом частиц или с плотностью числа частиц, причем мы воспользуемся выведенными выше скоростями рождения и уничтожения. От описанных выше чисел частиц n или средних чисел частиц \bar{n} мы можем перейти к соответствующим (средним) плотностям γ путем умножения на V^{-1} ; пусть $\gamma_L, \gamma_S, \gamma_P$ — плотности для лазерных и стоксовых квантов и для поляритонов. Допустим, что все частицы движутся в направлении z . Расчет баланса для временного изменения в элементе объема дает для частиц одного

сорта (индекс которого опущен)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \omega - \mathfrak{B}. \quad (3.16-65)$$

Первое слагаемое в правой части представляет временное изменение γ в элементе объема вследствие проникновения частиц через граничные поверхности, перпендикулярные направлению движения; \bar{v} — групповая скорость. Второе слагаемое описывает результирующую скорость генерации в результате рассматриваемого нелинейного процесса, отнесенную к элементу объема; $\omega = (1/V) \Delta (a_S^+ a_S) / \Delta t$. Третье слагаемое в (3.16-65) характеризует потери, обусловленные взаимодействием с диссипативной системой. В случае световых квантов можно положить $\mathfrak{B} = \bar{v} \kappa_a \gamma$, где κ_a — коэффициент поглощения. В случае возбужденных состояний среды (поляритоны) справедливо уравнение $\mathfrak{B} = \beta (\gamma - \bar{\gamma})$, в котором $\bar{\gamma}$ — значение γ в состоянии теплового равновесия. Величины $\bar{v} \kappa_a$ и β имеют смысл обратных времен жизни. Поскольку скорость генерации ω , вообще говоря, содержит связь между γ_L , γ_S , γ_P [ср. уравнение (3.16-64)], то одновременное рассмотрение частиц всех трех типов приводит к системе связанных дифференциальных уравнений. Важное отличие рассмотрения процессов по сравнению с классическими уравнениями возникает в связи с тем, что величина ω автоматически содержит спонтанные компоненты излучения. Комбинационное рассеяние на длинноволновых оптических фононах могут быть рассмотрены по одной и той же схеме; доказательство правильности этого утверждения можно получить, анализируя структуру заданного в уравнении (3.16-19) оператора взаимодействия и пользуясь разъяснениями, следующими за уравнением (3.16-38).

Обратимся теперь к конкретным экспериментальным условиям и рассмотрим сначала случай, когда среда облучается двумя интенсивными лазерными волнами, а плотность поляритонов мала по сравнению с плотностью фотонов. Тогда для скорости генерации стоксовых квантов можно написать [ср. уравнения (3.16-62) и

(3.16-64)]

$$\omega_S = \Omega \gamma_L \gamma_S.$$

В соответствии с этим для γ_S получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \gamma_S}{\partial t} = -\bar{v}_S \frac{\partial \gamma_S}{\partial z} + \Omega \gamma_L \gamma_S - \bar{v}_S (\kappa_a)_S \gamma_S. \quad (3.16-66)$$

В стационарном режиме имеем

$$\frac{d \gamma_S}{dz} = \left\{ \frac{\Omega}{\bar{v}_S} \gamma_L - (\kappa_a)_S \right\} \gamma_S. \quad (3.16-67)$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой эффективный коэффициент усиления стоксовой волны, который складывается из результирующей скорости генерации стоксовых фотонов и коэффициента поглощения; он положителен только при условии, что плотность числа лазерных фотонов превосходит $\bar{v}_S (\kappa_a)_S / \Omega$.

Для комбинационного рассеяния на длинноволновых оптических фононах (мы сохраняем здесь индекс P для возбужденных состояний среды) система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_L}{\partial t} &= -\bar{v}_L \frac{\partial \gamma_L}{\partial z} - \Omega [\gamma_L (\gamma_S + \gamma_P + V^{-1}) - \gamma_S \gamma_P] - \\ &\quad - \bar{v}_L (\kappa_a)_L \gamma_L, \\ \frac{\partial \gamma_S}{\partial t} &= -\bar{v}_S \frac{\partial \gamma_S}{\partial z} + \Omega [\gamma_L (\gamma_S + \gamma_P + V^{-1}) - \gamma_S \gamma_P] - \\ &\quad - \bar{v}_S (\kappa_a)_S \gamma_S, \\ \frac{\partial \gamma_P}{\partial t} &= \Omega [\gamma_L (\gamma_S + \gamma_P + V^{-1}) - \gamma_S \gamma_P] - \beta_P [\gamma_P - \bar{\gamma}_P]. \end{aligned} \quad (3.16-68)$$

Вследствие того что величина \bar{v}_P относительно мала, можно пренебречь производной от γ_P по пространственной координате. Эта система уравнений может быть решена для стационарного режима [3.16-9]. Круглая скобка в любой из правых частей может быть записана в форме $\gamma_S + (\gamma_P - \bar{\gamma}_P) + (\bar{\gamma}_P + V^{-1})$. Член с $\Omega \gamma_L (\bar{\gamma}_P + V^{-1})$ отвечает процессу усиления шума; с членом $\Omega \gamma_L (\gamma_P - \bar{\gamma}_P)$ связана параметрическая нестабильность.

Важным результатом является зависимость плотности стоксовых фотонов от координаты:

$$\gamma_s(z) \approx \gamma' (e^{g'_s z} - 1) + \gamma_s(0) e^{g'_s z}, \quad (3.16-69)$$

если значения этой плотности достаточно малы по сравнению с ее значением при насыщении. При этом эффективный стоксов коэффициент усиления есть

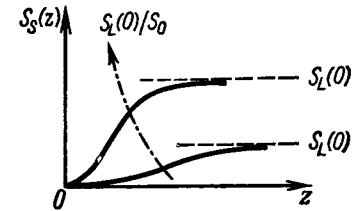
$$g'_s = \frac{\Omega S_L(0)}{\hbar \omega_L \bar{v}_s \bar{v}_L} \frac{S_0}{S_0 - S_L(0)} - (k_a)_s.$$

Величина $S_0 = \hbar \omega_L \bar{v}_L \beta_P / \Omega$ носит характер порога неустойчивости для интенсивности лазерного луча $S_L(0)$ на входе в среду. Первое слагаемое в правой части уравнения (3.16-69) представляет усиленную спонтанную компоненту и соответствует образованию стоксовой волны (также и в том случае, когда стоксова волна первоначально в среду не входит), возникшей «из шума». Полученное выражение можно использовать для детального обсуждения явлений, связанных как с вынужденными, так и со спонтанными эффектами; спонтанный процесс доминирует в областях с малыми z ($g'_s z \ll 1$), в которых стоксова интенсивность еще незначительна. Для параметра γ' имеем

$$\gamma' = (\bar{v}_P + V^{-1}) \left(1 + \frac{(k_a)_s}{g'_s} \right).$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (3.16-69) представляет собой вклад, вносимый облучением среды стоксовой волной. На фиг. 46 схематически представлена стоксова интенсивность $S_s(z)$ для различных значений параметра $S_L(0)/S_0$. Поскольку $S_L(0)/S_0 < 1$, обе кривые однотипны; однако для больших значений $S_L(0)/S_0$ насыщение $S_s \approx S_L$ достигается при меньших z . При $S_L(0)/S_0 \leq 1$ наступает насыщение на длине $z_{\text{нас}} \approx \bar{v}_s \beta_P$, принимающей практически значения от 10^{-4} до 10^{-2} м. При возрастающей интенсивности $S_L(0)$ лазерного облучения система уравнений (3.16-68) правильно передает три стадии комбинационного рассеяния. При малых значениях $S_L(0)$, ($S_L(0)/S_0 \leq 10^{-1}$ про-

исходит спонтанное комбинационное рассеяние со стоксовой интенсивностью на выходе из кюветы, пропорциональной $S_L(0)$. При средних лазерных интенсивностях ($10^{-1} \leq S_L(0)/S_0 \leq 9 \cdot 10^{-1}$) возникает экспоненциальная зависимость выходной стоксовой интенсивности от $S_L(0)$ [ср. также уравнение (3.16-69)]. При дальнейшем увеличении $S_L(0)$ наступает почти скачкообразное нарастание стоксовой выходной интенсивности до значения, близкого к значению насыщения. Путем соответствующего выбора параметра S_0 эти теоретические результаты можно применить для описания эмпирических данных, например таких, какие были получены для рассеяния в азоте [3.16-9]. При интерпретации результатов для интенсивностей необходимо, конечно, следить за тем, чтобы исключить влияние других нелинейных процессов взаимодействия, в особенности самофокусировку, а также различные нестационарности.



Фиг. 46. Представление γ' стоксова облучения $S_s(z)$ при различных значениях параметра $S_L(0)/S_0 < 1$.

Следует указать на совсем иную методику описания процессов рассеяния «из шума» [3.16-10]; она тесно примыкает к классическому соотношению для колебательной координаты $q(t, z)$ [ср. уравнение (3.16-49)] и для поляризации $P[E(t, z)]$ [ср. уравнение (3.16-50)]. Структура этих соотношений сохраняется; однако электромагнитное поле и колебательная координата заменяются квантовыми величинами и описываются операторами $\mathbf{H}(t, z)$ и $q(t, z)$, благодаря чему поляризация также получается в виде оператора. Флуктуации механической системы представляются флуктуационными силами (ср. методику, изложенную в п. 3.123); они охватываются оператором $\mathbf{F}'(t, z)$, который добавляется в правой части уравнения (3.16-49). В соответствии с этим в правой части уравнения (3.16-50) добавляется флуктуационный оператор $\mathbf{F}''(t, z)$. При помощи уравнения (3.16-48) операторы \mathbf{F}' и \mathbf{F}'' могут быть связаны между

собой. Интенсивная когерентная лазерная волна описывается классически, тогда как стоксова и поляритонная волны описываются с точки зрения квантовой теории. Выражение для поляризации разлагается на отдельные компоненты, соответствующие частотам ω_L , ω_S , ω_P , что приводит к образованию соответствующих компонент флуктуационной силы F'' . Так как F''_P не зависит от лазерного поля, то в данном случае математические ожидания корреляционной функции определяются из равновесных флуктуаций поляризации. Из них следуют математические ожидания для корреляционных функций оператора F' , а также F''_S и $[F''_S, F''_P]$, благодаря чему охватываются также и неравновесные флуктуации. С этими математическими ожиданиями можно вычислить интенсивность стоксова рассеяния в точке z . Получается формула $S_S(z) = \xi_1 (e^{2z} - 1)$, имеющая такую же структуру, как у первого слагаемого в правой части уравнения (3.16-69); величина ξ_1 пропорциональна $V\bar{\nu}_P + 1$, т. е. пропорциональна ν' .

В целом результаты поляритонного рассеяния позволяют сделать важные выводы о свойствах вещества — молекул (в жидкостях) и кристаллов. Во-первых, возникает связь между величинами, доступными измерениям, и атомными величинами; в качестве примера можно указать на соотношение (3.16-60) для стоксова коэффициента усиления. Во-вторых, становится возможным определение важных макроскопических оптических величин, таких как характеристические параметры в нелинейных восприимчивостях, в дисперсионных и в релаксационных соотношениях. В определенных случаях из поляритонного рассеяния определяются оптические величины в таких областях длин волн, для которых при других методах возможны только экстраполяции. Например, в области сильной поляритонной дисперсии были определены коэффициенты поглощения и показатели преломления в инфракрасном диапазоне. Большой интерес представляют измерения времен жизни возбужденных колебательных состояний решетки. Изменяя направления входного луча и поляризации по отношению к пространственному положению кристалла и измеряя угловое распределение возникающего излучения, можно

диагностировать возбужденные состояния в среде (поляритоны, оптические фононы), а также определять зависимость указанных макроскопических оптических параметров от симметрии кристалла. Принципиальное значение имеет связанная с поляритонным рассеянием возможность создания перестраиваемых источников излучения в инфракрасной и в далекой инфракрасной областях. Для объяснения обратимся к представленным в наглядной форме на фиг. 45 законам сохранения для частот и волновых чисел. Применение резонатора позволяет для рассеянного излучения зафиксировать направление k_S по отношению к направлению лазерной волны. При заданном угле θ между k_L и k_S и при выполнении дисперсионного соотношения для фотонов и поляритонов может генерироваться только определенная стоксова частота и, следовательно, только одна поляритонная частота. Изменяя угол θ , мы можем продвигаться по дисперсионной кривой для поляритонов (фиг. 45, а) и, таким образом, мы получаем возможность устанавливать определенные значения ω_S и ω_P , а следовательно, и $\omega_L = \omega_S + \omega_P$. Такая перестройка в особенности направляется на фотоподобной части нижней ветви; в подходящих веществах изменения угла θ на несколько градусов позволяют изменять поляритонную частоту в 5 раз. При экспериментальных исследованиях кристалла LiNbO_3 [3.16-11] вынужденный процесс возбуждался излучением рубинового лазера (длина волны 0,694 мкм, мощность $L_L \approx 1$ МВт, длительность импульса ≈ 20 нс), причем были выделены стоксова и поляритонная волны. На стоксовой волне достигались мощности излучения $\approx 0,5 L_L$, а излучение на поляритонной волне в далекой инфракрасной области имело мощности $\approx 10^{-5} L_L$. Вследствие сильного инфракрасного поглощения (сильная механическая волна) коэффициент преобразования в данном случае был значительно ниже граничного значения, определяемого соотношениями Мэнли — Роу. Изменение угла в пределах $0,5^\circ \leq \theta \leq 4^\circ$ создает перестройку в области длин волн $250 \text{ мкм} > \lambda_P > 50 \text{ мкм}$. На когерентной волне длиной 200 мкм выходная мощность излучения может превышать 50 Вт.

3.163. Вынужденное комбинационное рассеяние в связи с процессами переворачивания спина

Специально в связи с проблемой создания перестраиваемых лазеров были проведены исследования вынужденного комбинационного рассеяния на свободных носителях заряда в полупроводниках. Энергетические состояния носителей заряда вырождены; при воздействии (квази)статического магнитного поля на твердое тело происходят расщепления на уровни Ландау, разность энергий которых соответствует циклотронной частоте, и на подуровни, соответствующие ориентациям спинов электронов. При излучательных процессах могут иметь место переходы между уровнями с различной ориентацией спинов, т. е. явления переворачивания спинов (spin-flip). Исследования этих процессов переворачивания спинов внесли важные вклады как в лучшее понимание свойств полупроводников, так и в их практические применения [3.16-12 — 3.16-14].

Наши рассуждения относятся к процессам переворачивания спинов электронов в зоне проводимости (L) вблизи края зоны. Предполагается, что происходит переворачивание спина электрона при его виртуальном переходе с нижнего уровня Ландау L -зоны через валентную зону (V):

$$|n=0, \uparrow\rangle_L \rightarrow (V\text{-зона}) \rightarrow |n=0, \downarrow\rangle_L.$$

Стрелка при векторе состояния указывает направление спина; n есть квантовое число уровня Ландау. Более точная теория должна учитывать относительные населенности зон, зависящие от концентрации электронов и от напряженности магнитного поля. Кроме того, должно быть принято во внимание возникновение двухэлектронных процессов. Приближенное, но полностью применимое описание основывается на эффективном гамильтоиане вида

$$H^{\text{эфф}} = \frac{1}{2\tilde{m}} (p + eA)^2 - \mu |H \cdot| + R(p, |H \cdot|), \quad (3.16-70)$$

позволяющем трактовать проблему как одноэлектронную [3.16-15]. Для системы, которая не находится под влиянием внешнего поля излучения, но помещена в (ква-

зи) статическое магнитное поле, при подходящем выборе нуля отсчета энергии получается следующее разложение энергии:

$$\mathcal{E}_{k,n,s} = \mathcal{E}_G + \frac{\hbar^2 k^2}{2\tilde{m}} + \frac{\hbar e \mu_0}{2\tilde{m}} \times \\ \times (2n+1) |H \cdot| + g \mu_B s |H \cdot| + \tilde{R}(k, |H \cdot|). \quad (3.16-71)$$

Здесь p и μ — операторы импульса и магнитного момента; A — вектор-потенциал поля излучения, $|H \cdot|$ — напряженность магнитного поля, e — элементарный заряд, μ_0 — индукционная константа, μ_B — магнетон Бора; \mathcal{E}_G — энергия межзонной щели. Уровни Ландау обозначены квантовыми числами $n = 0, 1, 2, \dots$, а квантовые числа $s = \pm 1/2$ характеризуют спиновые уровни. Слагаемые $R(p, |H \cdot|)$ или $\tilde{R}(k, |H \cdot|)$ ответственны за непараболические вклады, относящиеся к импульсу или к волновому вектору k , и за нелинейные вклады, относящиеся к напряженности поля. Эффективная масса \tilde{m} и g -фактор определяются из характеристических величин L - и V -зоны (а именно из значений энергии межзонной щели, из спин-орбитального расщепления и из характеристического момента перехода между V - и L -зонами).

При облучении возбуждающим светом (лазерная волна с частотой ω_L) наблюдалось рассеянное излучение с частотой

$$\omega_S = \omega_L - \frac{|g| \mu_B |H \cdot|}{\hbar}, \quad (3.16-72)$$

связанное с процессом переворачивания спина; соответствующее дифференциальное поперечное сечение рассеяния этого спонтанного стоковского рассеяния есть

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\uparrow\downarrow} \approx \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{g}{g_{св}} \right)^2 \left(\frac{\hbar\omega_L}{\mathcal{E}_G} \right)^2, \quad (3.16-73)$$

где m_e и $g_{св}$ — соответственно масса и g -фактор свободного электрона. Важные исследования были выполнены с кристаллом n -InSb; его типичные параметры: $\mathcal{E}_G = 0,23 \text{ эВ}$, $\tilde{m} \approx (1/70) m_e$, $g(B=0) = -48$, $g(B=10 \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{м}^2}) \hat{=} \hat{=}$

$\cong 100 \text{ кГц}) = -35$. Первый множитель в правой части уравнения (3.16-73) представляет собой поперечное сечение томсоновского рассеяния на свободных электронах, а два последних множителя определяются свойствами полупроводника и частотой лазера. В случае когда возбуждающим излучением служит излучение CO_2 -лазера, для поперечного сечения стоковского рассеяния получается значение $\cong 10^{-27} \text{ м}^2/\text{ср}$. Это значение превосходит сечение для перехода между уровнями Ландау и значительно больше типичных поперечных сечений для спонтанного комбинационного рассеяния на молекулах, имеющих порядок величины $10^{-32} \text{ м}^2/\text{ср}$.

Чтобы сделать возможным возникновение вынужденного рассеянного излучения, коэффициент усиления должен быть достаточно большим для компенсации имеющихся потерь. При стоковом рассеянии имеем для коэффициента усиления

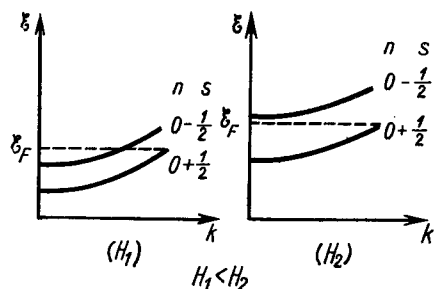
$$\frac{g_S}{S_L} \sim \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\uparrow\downarrow} n_e G(\mathcal{E}_F, |H \cdot|, \mathcal{T}) \times \omega_S^{-3} (\Delta\omega)^{-1}, \quad (3.16-74)$$

где n_e — плотность носителей заряда, $\Delta\omega$ — ширина линии при спонтанном рассеянии и S_L — интенсивность облучающего света лазера. Функция G учитывает относительные населенности зон и зависит от энергии Ферми \mathcal{E}_F , напряженности магнитного поля и температуры. При $V = 5 \text{ В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$ ($\cong 50 \text{ кГц}$) было получено значение коэффициента усиления, отнесенного к интенсивности, $\cong 10^{-7} \text{ м}^{-1}/\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2}$. Это значение достаточно велико, чтобы при интенсивности накачки порядка нескольких $10^9 \text{ Вт}/\text{м}^2$ могли быть компенсированы возникающие оптические потери, и тогда станет возможным режим вынужденного рассеяния излучения. При помощи CO_2 -лазера с модулированной добротностью ($\omega_L = 10,6 \text{ мкм}$, $1,5 \text{ кВт}$, 100 нс , частота следования импульсов 120 Гц) могут быть достигнуты импульсные мощности рассеянного излучения от 30 до 100 Вт , причем путем изменения $|V \cdot|$ между $1,5$ и $10 \text{ В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$ ($\cong 15$ и 100 кГц) длина волны рассеянного излучения может пе-

рестраиваться между 11 и 13 мкм . Наряду с этой относительно высокой долей преобразования мощности (несколько процентов) следует отметить высокую точность коррекции длины волны; она лучше, чем $0,4 \text{ нм}$ при 12 мкм . Было установлено, что относительная ширина линии рассеянного излучения меньше $3 \cdot 10^{-5}$ (причем это значение было определено благодаря точности измерительной аппаратуры, применяемой для нахождения ширины линий). В других условиях лазерной накачки и при других значениях напряженности магнитного поля измерения ширины линий были выполнены при помощи гетеродинного метода и дали относительное значение меньше 10^{-10} .

При заданной плотности носителей заряда n_e вынужденный процесс начинается только при напряженностях поля $H \geq H_{\text{мин}}(n_e)$. Причина этого может быть понята из анализа коэффициента усиления. С одной стороны, коэффициент усиления g_S пропорционален дифференциальному поперечному сечению для спонтанного рассеяния, заданному уравнением (3.16-73); из него получается, как правило, только слабая зависимость от поля (ср. приведенные выше данные для изменения g -фактора при различных значениях напряженности поля). С другой стороны, коэффициент усиления пропорционален величине, описывающей относительные населенности спиновых уровней. Существующие закономерности схематически показаны на фиг. 47. При слабых полях энергия Ферми так расположена по отношению к энергетическим зонам, что верхний уровень в значительной мере заполнен; поэтому лишь относительно малое число электронов может совершать переходы снизу вверх. Напротив, при более сильных полях верхний уровень преимущественно свободен (при достаточно низких температурах), так что путем переворачивания спина значительная часть электронов может возбуждаться, что приводит к относительно высокому значению коэффициента усиления. Область значений напряженности поля, в которой создаются эти благоприятные условия для вынужденного рассеяния, зависит от плотности носителей заряда. Чем меньше плотность носителей заряда, тем при меньших напряженностях поля создаются благо-

приятные относительные населенности. Для практического использования принципа переворачивания спина понижение необходимой напряженности поля должно рассматриваться как благоприятное обстоятельство, поскольку достижение напряженностей поля $\geq 1,2 \cdot 10^6$ А·м⁻¹ ($\cong 15$ кЭ) сопряжено с трудностями. Правда, понижение плотности носителей заряда влечет за собой уменьшение коэффициента усиления, который пропорционален n_e ; это может привести к тому, что вынужден-



Фиг. 47. Положение энергетических зон при различных значениях напряженности магнитного поля и при одинаковых концентрациях носителей заряда.

ный режим станет невозможным. При применении накачки СО₂-лазером вынужденный процесс рассеяния достигается при $n_e = 5 \cdot 10^{15}$ см⁻³, но не при $n_e = 1 \cdot 10^{15}$ см⁻³; в последнем случае усиление столь мало, что потери уже не могут компенсироваться. Выход из такой ситуации заключается в применении для накачки источников света с более короткой длиной волны. Так, использование СО-лазера (5,3 мкм) делает возможным создание вынужденного режима уже при $n_e = 1 \cdot 10^{15}$ см⁻³. Необходимому для этого увеличению коэффициента усиления способствует возрастание последнего множителя в правой части уравнения (3.16-73) при повышении частоты волны накачки. Одновременное возрастание затухания является отрицательным эффектом, но оно компенсируется или даже перекомпенсируется возрастанием подвижности при малых n_e и образованием более резкой границы края зоны. Указанный эффект,

в частности, обеспечивает достаточно точное соблюдение условия согласования фаз для вынужденного антистоксова рассеяния

$$2k_L = k_S + k_A. \quad (3.16-75)$$

Таким образом, становится возможным создание антистоксова лазера с переворачиванием спина, работающего в непрерывном временном режиме. При непрерывном облучении кристалла *n*-InSb (размеры $4 \times 2 \times 2$ мм³, $n_e = 1 \cdot 10^{15}$ см⁻³) светом СО-лазера мощностью 3 Вт достигаются при $V = 0,05$ В·с·м⁻² ($\cong 500$ Гс) следующие мощности излучения: 0,2 Вт (первая стоксова линия), 0,015 Вт (вторая стоксова линия, антистоксова линия).

Из всего изложенного можно заключить, что описанные исследования дают важную информацию о свойствах полупроводников, находящихся под воздействием внешних полей. Кроме того, приведенные численные данные свидетельствуют о том, что лазер с переворачиванием спина представляет исключительный интерес для практических применений; это было, между прочим, доказано спектральными исследованиями в газах в инфракрасной области при высокой разрешающей способности.

§ 3.2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЕТА С АТОМНЫМИ СИСТЕМАМИ

Применение лазеров делает возможным получение очень коротких световых импульсов с высокими напряженностями поля (ср. § В1.1). Этими импульсами можно существенно воздействовать на атомные системы уже в течение таких промежутков времени, которые сравнимы со временами релаксации соответствующих резонансных переходов или даже короче их; кратковременно могут быть достигнуты сильные инверсии населенностей актуальных уровней и сильные когерентные возбуждения [3.2-2, 3.2.3]. Кроме того, через нестационарные процессы взаимодействия можно целенаправленно влиять на свойства световых импульсов, например на их дли-

тельность, максимальную интенсивность и форму. Для создания возбужденных состояний используются как однофотонные, так и многофотонные процессы. Наряду с однофотонным поглощением применяется вынужденное комбинационное рассеяние, бриллюэновское рассеяние, а также двухфотонное поглощение. Благодаря возможности выбора между различными процессами может быть достигнуто возбуждение до таких уровней, однофотонные переходы на которые из основного состояния запрещены по соображениям симметрии. Достигнутые на короткое время возбуждения среды могут в свою очередь инициировать дальнейшие быстро протекающие физические или химические процессы.

При резонансном возбуждении атомной системы нестационарное поведение может вызываться инерционностью самой атомной системы и дисперсионными свойствами среды. Последние создают между импульсами с различной центральной частотой эффекты, обусловленные временем пролета, а также приводят к «разбеганию» импульса. (Мы не останавливаемся здесь на процессах установления колебаний в резонаторах и на временном процессе формирования вынужденных волн из спонтанной эмиссии; см. по этому поводу разд. 3.15 и 3.16.)

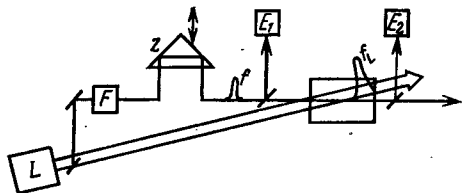
Инерционный тип нестационарного поведения может наблюдаться в фиксированном месте среды. Поэтому он называется «локальным». При дисперсионном типе нестационарного поведения необходимо следить за распространением волны на большей длине пути в среде и в соответствии с этим такой тип поведения называется «нелокальным». В § 3.2 мы будем преимущественно заниматься локальными эффектами, ибо они позволяют непосредственно изучить кинетические процессы в атомных системах, тогда как нелокальные эффекты определяются главным образом частотным ходом линейных восприимчивостей. Следует отметить, что в эксперименте оба эффекта существуют совместно и могут взаимно влиять друг на друга. Поэтому условия измерений и методы оценок должны быть выбраны так, чтобы отделить друг от друга эти два типа нестационарных свойств и их проявления. Особенно сильное влияние оказывают

локальные нестационарные свойства на процессы распространения в соответствующих средах при импульсах с длительностью $\tau_L \ll \tau$ (τ — время разрушения фазы резонансного перехода), если напряженность поля этих импульсов достаточна для того, чтобы за время их действия вызвать переход атомной системы в возбужденное состояние или (при еще больших напряженностях поля) вызвать качание атомной системы между основным и возбужденным состояниями. Это явление принято называть оптической нутацией. Поскольку релаксацией можно пренебречь, обмен энергией между импульсом и атомной системой является обратимым, и атомная система участвует в нестационарных процессах только благодаря ее способности накапливать энергию. При известных экспериментальных условиях такие импульсы могут пробегать среду без потерь, причем скорость распространения может существенно отклоняться от определенной обычным образом групповой скорости (ср. п. 3.212).

Сначала кратко изложим специфические экспериментальные методы, применяемые для наблюдения нестационарных процессов в нелинейной оптике; при этом мы будем опираться на сведения из § В1. Измерение зависящих от времени процессов может осуществляться путем наблюдения за изменением возбуждающего импульса. Можно воспользоваться запаздывающим во времени и взаимодействующим с системой более слабым импульсом той же или измененной частоты. Такой импульс называется пробным. При помощи метода пробного импульса можно измерить когерентные и некогерентные возбуждения среды уже после окончания действия возбуждающего импульса; может быть исследована кинетика последующих процессов и определены константы скорости и временные константы.

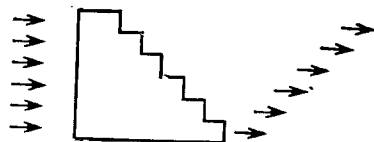
Простая схема представлена на фиг. 48. При помощи оптической замедляющей системы может быть установлено определенное временное расстояние θ между импульсом накачки и пробным импульсом. Измеряется зависимость прозрачности образца от θ . Методика измерения значительно упрощается, если после импульсного возбуждения измерять поглощение со мно-

гими различно замедленными пробными импульсами. Предназначенная для этого установка может быть выполнена с эшелонем (фиг. 49). На фиг. 50 представлена

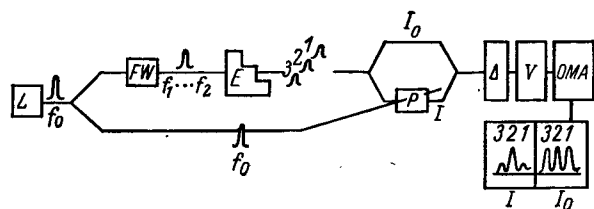


Фиг. 48. Схема эксперимента с пробным лучом.

L — импульсный лазер с частотой f_L ; F — преобразователь частоты (например, ГВГ-кристалл), генерирующий пробный импульс с частотой f (например, $f = 2f_L$); Z — элемент для изменения временного запаздывания между импульсом накачки и пробным импульсом; E_1 , E_2 — фотоприемники, измеряющие изменение пробного импульса.



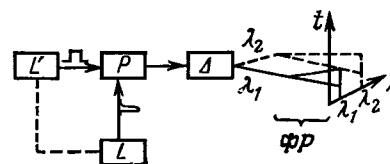
Фиг. 49. Замедление пробного импульса с помощью эшелона (положение стрелки обозначает замедление различных областей лазерного пучка относительно друг друга).



Фиг. 50. Спектрометр с пробным лучом.

схема спектрометра с относительно широкой входной областью используемого для применения метода пробных лучей [3.2-5]. Образец P подвергается воздействию сильного возбуждающего импульса с частотой f_0 . Такой

же импульс действует на элемент F преобразователя частоты (генерация спектрального континуума). Этот пробный импульс разделяется при помощи эшелона E на m пространственно разделенных «каналов» с пробными импульсами, по-разному замедленными по отношению к импульсу накачки. После дальнейшего расщепления пробные импульсы пробегают канал с образцом I и канал сравнения I_0 . При помощи монохроматора можно выделить из континуума длину волны, удобную для детектирования. Из каналов I и I_0 сигналы принимаются видекодом (V) и регистрируются при помощи оптиче-



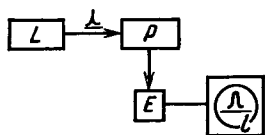
Фиг. 51. Спектрометр с фотоэлектронным регистратором.

L — импульсный лазер накачки, L' — лазер — источник пробного луча, ФР — фотоэлектронный регистратор.

ского многоканального анализатора ОМА. Со спектрометром, у которого регистрирующим устройством служит фотоэлектронный регистратор, как это показано на фиг. 51, изменение поглощения, вызванное коротким лазерным импульсом, может наблюдаться при помощи длинного светового импульса. При этом путем сочетания спектрографа с фотоэлектронным регистратором оказывается возможным записать зависимость поглощательной способности от длины волны и от времени.

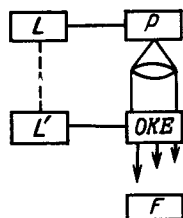
В тех случаях, когда возбуждение импульсом накачки сопровождается излучением света тех же или других длин волн, за кинетикой процесса можно следить также посредством анализа эмиссионного сигнала. Эмиссионный сигнал может быть зарегистрирован при помощи аппаратуры, схематически представленной на фиг. 52 и 53. В приборе, показанном на фиг. 53, оптический затвор Керра открывается световым импульсом вспомогательного лазера L' , который на определенное время замедлен по отношению к возбуждающему им-

пульсу. В рассматриваемом нами методе «скрещенных» лучей затвор раскрывается в различных точках пространства в разные моменты времени, что дает возможность получить на одном снимке на фотопластинке F зависимость эмиссионного сигнала от времени задержки θ (ср. § В1.3). Между затвором Керра и фотопластинкой можно поместить еще один спектрограф; тогда интенсивность будет регистрироваться в плоскости (λ, θ) .



Фиг. 52. Светоэлектрический индикатор эмиссионного сигнала.

L — лазер, P — образец, E — приемник.



Фиг. 53. Регистрация эмиссионного сигнала с помощью переключателя, основанного на оптическом эффекте Керра (ОКЕ).

L, L' — лазеры, F — фотопластинка.

В заключение следует сказать, что временное изменение физических свойств системы после ее возбуждения импульсом накачки можно наблюдать также при помощи неоптических методов. Например, можно измерить временные изменения диэлектрической постоянной, электропроводности или спектра электронного парамагнитного резонанса.

Ниже мы разьясим трактовку нестационарных явлений сначала на примере однофотонного поглощения. Затем будет показано, как можно представленные методы и полученные результаты перенести на многофотонные процессы, причем особое внимание мы обратим на двухфотонное поглощение и вынужденное комбинационное рассеяние. Чтобы можно было охватить наиболее существенные черты нестационарных явлений, мы сделаем упрощающие предположения об условиях рас-

пространения света. Световой пучок будем считать коллинеарным и обладающим линейной поляризацией в одном направлении. В качестве простой атомной системы выберем эффективную двухуровневую модель с переходными моментами, определенно ориентированными в пространстве, а именно в направлении вектора поляризации падающих волн. Кроме того, мы не будем исследовать взаимодействие между одно- и многофотонными процессами или между различными многофотонными процессами, которое возникает, например, при поляритонном рассеянии. Для исследования кратковременных процессов необходимы высокие интенсивности падающего света. Поэтому во многих случаях оказывается целесообразным выдвинуть на передний план изучение вынужденных процессов и применить полуклассическое описание. Этим мы в дальнейшем воспользуемся. В некоторых местах мы учтем роль спонтанных процессов феноменологически. При сделанных предположениях мы можем исходить из выведенных в разд. 2.36 уравнений движения для математических ожиданий физических параметров среды и из классического волнового уравнения для напряженности электрического поля; поскольку мы ограничились одним направлением поляризации, то можно во всех уравнениях опустить тензорные и векторные индексы.

3.21. Нестационарные явления при однофотонных процессах

При описанных выше предположениях из уравнений (2.36-13), (2.36-15) и из волнового уравнения вытекает следующая система уравнений для поляризации P , инверсии γ_I и напряженности поля E :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} P + \Omega^2 P = -\frac{2}{\hbar} \Omega^2 |d|^2 \gamma_I E,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_I + \frac{1}{T} (\gamma_I - \gamma_I^e) = \frac{2}{\hbar \Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} P \right) E, \quad (3.21-1)$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P,$$

В третьем уравнении мы пренебрегли вкладом нерезонансных переходов в дисперсионные свойства среды, так как для дальнейших рассуждений они несущественны. Мы исследуем теперь взаимодействие светового импульса, обладающего центральной частотой ω , с двухуровневой системой, которая характеризуется резонансной частотой Ω , переходным моментом d , поперечным временем релаксации τ и продольным временем релаксации T . Обычным способом разделим пространственные и временные быстро меняющиеся компоненты напряженности поля и поляризации при помощи подстановки

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \frac{1}{2} \bar{E}(z, t) e^{i(\omega t - kz)} + \{KK\}, \\ P(z, t) &= \frac{1}{2} \bar{P}(z, t) e^{i(\omega t - kz)} + \{KK\}. \end{aligned} \quad (3.21-2)$$

Для «медленно» меняющихся амплитуд, пренебрегая вторыми производными этих величин (обоснование этого приближения см. в ч. I, § 1.3 и § П6), из уравнения (3.21-1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{P} + \left[\frac{1}{\tau} + i(\omega - \Omega) \right] \bar{P} &= \frac{i}{\hbar} |d|^2 \gamma_I \bar{E}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \gamma_I + \frac{1}{T} (\gamma_I - \gamma_I^e) &= -\frac{i}{2\hbar} [\bar{P}^* \bar{E} - \bar{P} \bar{E}^*], \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{E} &= -\frac{i}{2} \mu_0 \Omega c \bar{P}. \end{aligned} \quad (3.21-3)$$

Для многих применений оказывается целесообразным преобразовать эту систему уравнений к новым переменным:

$$\begin{aligned} \eta &= t - \frac{z}{c}, \quad \xi = z, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.21-4)$$

Переменная η позволяет непосредственно задавать изменение соответствующих физических величин в системе, движущейся вместе с группой волн (со скоростью c или, в более общем случае, при $\eta = t - (z/v')$, с групповой скоростью v'). В такой системе физические выводы и обоснования тех или иных приближений часто оказываются более очевидными.

Результирующая система дифференциальных уравнений в частных производных все еще остается очень сложной для решения в общем виде. Поэтому мы исследуем эту систему при различных упрощающих предположениях, при которых отдельные нестационарные эффекты становятся очень наглядными в полученном решении.

3.211. Поведение атомной системы в пренебрежении обратным действием на импульс накачки. Когерентная флуоресценция, фотонное эхо

Если число фотонов в импульсе накачки очень велико по сравнению с числом активных атомов, которые, например, находятся в тонком слое вещества толщиной Δz , то действием среды на импульс накачки можно, вообще говоря, пренебречь, т. е. предполагается, что форма и высота импульса мало изменяются при прохождении через слой. В этом случае в системе уравнений (3.21-3) можно принимать во внимание только первые два уравнения.

Для облегчения понимания рассмотрим сначала стационарное и квазистационарное возбуждения при сделанных допущениях. С квазистационарным возбуждением мы встречаемся, если за время $t \leq \tau$ напряженность поля накачки существенно не меняется. Возбуждение считается стационарным, если изменением импульса накачки можно пренебречь также и за время $t \leq T$. Квазистационарное решение первого уравнения системы (3.21-3) гласит:

$$\bar{P} = \frac{|d|^2}{\hbar} \frac{1}{(\omega - \Omega) - \frac{i}{\tau}} \gamma_I \bar{E}. \quad (3.21-5)$$

Если его подставить во второе уравнение системы (3.21-3), то получится дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_I + \frac{C(t)}{T} \gamma_I = \frac{1}{T} \gamma_I^e \quad (3.21-6)$$

с параметром

$$C(t) = 1 + \frac{|d|^2 T}{\hbar^2 \tau} \frac{1}{(\omega - \Omega)^2 + \tau^{-2}} |\bar{E}(t)|^2$$

и с решением

$$\frac{\gamma_I(t)}{\gamma_I^e} = \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T} \int_0^t dt' C(t')} \int_0^t dt'' e^{\frac{1}{T} \int_0^{t''} dt' C(t')} + e^{-\frac{1}{T} \int_0^t dt' C(t')}. \quad (3.21-7)$$

В случае прямоугольного импульса накачки отсюда следует при $t \leq \tau_L$

$$\frac{\gamma_I(t)}{\gamma_I^e} = \frac{1}{C} + \left(1 - \frac{1}{C}\right) e^{-\frac{t}{T}}. \quad (3.21-8)$$

Для стационарных условий получим

$$\frac{\gamma_I(t)}{\gamma_I^e} = \frac{1}{C(t)}. \quad (3.21-9)$$

Из уравнений (3.21-7)–(3.21-9) видно, что при стационарной и квазистационарной накачке функция $\gamma_I(t)$ всегда имеет тот же знак, что и γ_I^e , так как величина $C(t)$ положительна. Это означает, что среда, первоначально находящаяся в состоянии теплового равновесия с $\gamma_I^e < 0$, сохраняет при накачке отрицательную инверсию; при сильном поле накачки ($C \gg 1$) инверсия стремится к нулю, т. е. достигается одинаковая населенность обеих уровней системы.

Рассмотрим теперь другой предельный случай крайне нестационарного процесса накачки, при котором длительность импульса $\tau_L \ll \tau$, T . Для упрощения предположим, что импульсы имеют прямоугольную форму и амплитуда их напряженности поля есть

$$\bar{E}(t) = \begin{cases} \bar{E} & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_L, \\ 0 & \text{для всех других } t; \end{cases}$$

\bar{E} предполагается вещественным. При этих условиях можно на протяжении длительности импульса пренебречь релаксационными процессами; тогда из уравнения

(3.21-3) при $\bar{P} = \bar{P}_1 + i\bar{P}_2$ (\bar{P}_1, \bar{P}_2 — вещественны) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{P}_1 - (\omega - \Omega) \bar{P}_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{P}_2 + (\omega - \Omega) \bar{P}_1 &= \frac{1}{\hbar} |d|^2 \gamma_I \bar{E}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \gamma_I &= -\frac{1}{\hbar} \bar{E} \bar{P}_2. \end{aligned} \quad (3.21-10)$$

Дифференцируя по времени второе уравнение этой системы и подставляя производные по времени из первого и третьего уравнений, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{P}_2 + \tilde{\Omega}^2 \bar{P}_2 &= 0, \\ \tilde{\Omega}^2 &= (\omega - \Omega)^2 + \frac{1}{\hbar^2} |d|^2 \bar{E}^2. \end{aligned} \quad (3.21-11)$$

Это значит, что для \bar{P}_2 , а следовательно, и для \bar{P}_1 , а также и для γ_I получаются периодические решения, которые при начальных условиях $\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = 0$, $\gamma_I(0) = \gamma_I^e$ принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= -(\omega - \Omega) \frac{|d|^2 \bar{E}}{\hbar \tilde{\Omega}^2} \gamma_I^e [\cos \tilde{\Omega} t - 1], \\ \bar{P}_2 &= \frac{|d|^2 \bar{E}}{\hbar \tilde{\Omega}} \gamma_I^e \sin \tilde{\Omega} t, \\ \frac{\gamma_I}{\gamma_I^e} &= \frac{|d|^2 \bar{E}^2}{\hbar^2 \tilde{\Omega}^2} [\cos \tilde{\Omega} t - 1] + 1. \end{aligned} \quad (3.21-12)$$

Рассмотрим сначала случай точного резонанса $\omega = \Omega$, $\tilde{\Omega} = (|d| \bar{E})/\hbar$, для которого имеем

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= 0, \\ \bar{P}_2 &= |d| \gamma_I^e \sin \frac{|d| \bar{E}}{\hbar} t, \\ \frac{\gamma_I}{\gamma_I^e} &= \cos \frac{|d| \bar{E}}{\hbar} t. \end{aligned} \quad (3.21-13)$$

Если при $t = 0$ все атомные системы среды находятся в основном состоянии ($\gamma_i^e = -\gamma$), то к моменту времени $t = \pi\hbar/|d|\bar{E}$ будет достигнута полная инверсия двухуровневой системы. Другими словами, это произойдет после того, как с образцом прозвонит прямоугольный импульс с «площадью» $(|d|/\hbar)\bar{E}t$. Для непрямоугольного импульса должно соблюдаться более общее условие площади:

$$\frac{|d|}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \bar{E}(t') = \pi.$$

Импульс, порождающий это действие, называют π -импульсом (по аналогии с названием в высокочастотной спектроскопии, в которой такой импульс переориентирует полный спин на 180°). Под действием импульса, который длиннее π -импульса, инверсия опять убывает, а

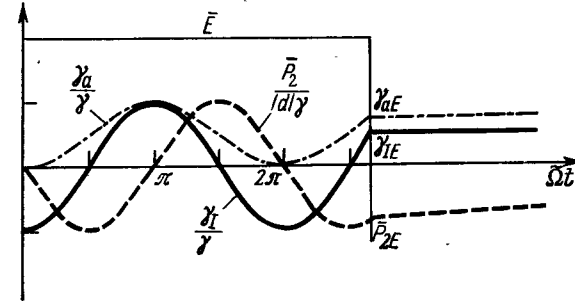
с импульсом с площадью $\hbar^{-1}|d| \int_{t_0}^t dt' \bar{E} = 2\pi$ (в частно-

сти, $\hbar^{-1}|d|\bar{E}t = 2\pi$), т. е. с 2π -импульсом, среда возвращается в начальное состояние. В соответствии с этим компонента поляризации \bar{P}_2 достигает своего максимального значения при облучении $(\pi/2)$ -импульсом; в конце этого импульса инверсия исчезает. Таким образом происходит периодический обмен энергией между полем и средой с частотой $\tilde{\Omega} = \hbar^{-1}|d|\bar{E}$. Это явление называют *оптической нутацией*. Поглощения не происходит; оно возникает только при вступлении в действие диссипации, которой мы здесь пренебрегали. На фиг. 54 показана зависимость плотности инверсии γ_i и мнимой части амплитуды поляризации для $\gamma_i^e = -\gamma$ от времени.

После отключения внешних полей, т. е. по окончании действия импульса, еще существуют определенные амплитуда поляризации \bar{P}_E и инверсия γ_{iE} , зависящие от длительности и интенсивности импульса и распадающиеся за времена релаксации τ или T согласно уравнению (3.21-3), в которое следует подставить $\bar{E} = 0$. Законы распада имеют вид

$$\bar{P} = \bar{P}_E e^{-t/\tau}, \quad \gamma_i = \gamma_i^e + (\gamma_{iE} - \gamma_i^e) e^{-t/T}. \quad (3.21-14)$$

Заслуживает внимания тот факт, что после окончания светового импульса в течение времени порядка τ еще существует значительная поляризация; например, в конце $(\pi/2)$ -импульса в среде с $\gamma_i^e = -\gamma$ амплитуда поляризации есть $\bar{P}_E = -i\gamma|d|$. Эта зависящая от времени поляризация $P = 1/2 \bar{P}_E e^{-1/\tau} e^{i\Omega t} + \{KK\}$ приводит, между



Фиг. 54. Плотность инверсии γ_i , плотность чисел заполнения возбужденного уровня γ_a и амплитуда поляризации \bar{P}_2 в зависимости от $\tilde{\Omega}t$ ($\tilde{\Omega} = \frac{|d|\bar{E}}{\hbar}$) при воздействии прямоугольного светового импульса длины $\tau_L = \frac{21}{8} \pi \frac{1}{\tilde{\Omega}}$ и амплитуды \bar{E} .

Во время импульса величины γ_i , γ_a и \bar{P}_2 осциллируют, а после импульса они медленно затухают от значений, достигнутых в конце импульса γ_{iE} , γ_{aE} , \bar{P}_{2E} вследствие процессов релаксации.

прочим, к эффектам спонтанного излучения, при которых все атомные системы колеблются в фазе. Следовательно, речь идет об эффекте коллективного излучения, при котором величина эффективно излучающего диполя пропорциональна числу частиц. В нашем случае дипольный момент d_G всех N , находящихся в объеме V активных частиц, определяется выражением

$$d_G = VP = 2N|d|e^{-t/\tau} \sin \Omega t.$$

Излучаемая таким диполем полная мощность вычисляется классически и оказывается пропорциональной

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} d_G \right)^2 \sim N^2, \quad (3.21-15)$$

Мы видим, что интенсивность излучения пропорциональна квадрату числа частиц, в отличие от некогерентного спонтанного излучения, интенсивность которого пропорциональна первой степени числа частиц. Этот коллективный эффект излучения является оптическим аналогом свободного индукционного распада в спектроскопии ядерного резонанса и поэтому называется также *оптическим свободным индукционным распадом*. Само собой разумеется, что эти процессы спонтанного излучения должны быть описаны на основе квантовой теории; однако квантовые расчеты приводят в основном к тем же самым результатам — например, в том, что касается зависимости интенсивности от числа частиц [9, 3.21-1]. Коллективный эффект поляризации и излучения затухает со временем релаксации τ , если справедливо сделанное нами предположение о том, что можно пренебречь влиянием процесса излучения на атомные системы по сравнению с влиянием на них безызлучательных релаксационных процессов. После этого затухания некогерентные спонтанные процессы могут, вообще говоря, продолжаться, пока инверсия не достигнет своего равновесного значения γ_i^e . Когерентный и некогерентный процессы отличаются друг от друга не только временной зависимостью, но также и характеристиками выходного излучения и поведением поляризации.

Относящийся к поляризации дополнительный эффект возникает в том случае, если различные атомы среды обладают несколько различающимися резонансными частотами, распределенными в пределах линии с шириной $(\Delta\omega)_{\text{неодн}}$. Величина $(\Delta\omega)_{\text{неодн}}$ называется неоднородной шириной линии (ср. §2.3 и п. 3.114). Может выполняться неравенство $(\Delta\omega)_{\text{неодн}} \gg 2/\tau$, где $2/\tau$ есть однородная ширина линии. При этих условиях амплитуда поляризации, созданной импульсом с длительностью, малой по сравнению с $(1/\Delta\omega_{\text{неодн}})$, разрушается не после времени τ , а уже за времена порядка $(\Delta\omega_{\text{неодн}})^{-1}$. Это происходит по той причине, что отдельные атомы колеблются с несколько различающимися частотами и после времен порядка $(\Delta\omega_{\text{неодн}})^{-1}$ различие между их фазами становится порядка π . Поэтому сумма отдельных дипольных моментов оказывается равной нулю. После этих времен [ср.

уравнение (3.11-40)] амплитуда поляризации есть

$$\bar{P} = \bar{P}_E e^{-t/\tau} \sum_m e^{i\omega'_m t} \approx 0, \quad (3.21-16)$$

так как

$$\sum_m e^{i\omega'_m t} \approx 0,$$

где ω'_m есть отклонение резонансной частоты m -го атома от средней резонансной частоты Ω . Быстрое протекание «оптического свободного индукционного распада» у неоднородно уширенных линий может быть использовано для генерации коротких импульсов. Предпосылкой для этого служит очень большая крутизна заднего фланга входного импульса [3.21-2].

В противоположность ранее описанному необратимому затуханию через релаксационные процессы, при *данном* разрушении поляризации речь идет об *обратимом* процессе. Поскольку допустимо пренебрежение релаксационными процессами, начальное состояние может быть следующим образом восстановлено. Пусть поляризация создается $\pi/2$ -импульсом. После ее затухания, обусловленного разбросом резонансных частот, среда облучается вторым импульсом со временем запаздывания ϑ ($(1/\Delta\omega_{\text{неодн}}) < \vartheta \ll \tau$) по отношению к первому импульсу. Предположим, что второй импульс является π -импульсом и что его длительность также мала по сравнению с $(\Delta\omega_{\text{неодн}})^{-1}$. Он создаст изменение фазы каждого отдельного дипольного момента на π , т. е. после этого импульса поляризация, определяемая уравнением (3.21-16), примет вид

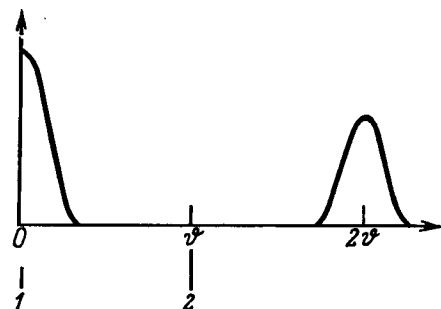
$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{P}_E e^{-\vartheta/\tau} \sum_m e^{i\omega'_m \vartheta + i\pi} = \\ &= \bar{P}_E e^{-\vartheta/\tau} \sum_m e^{-i\omega'_m \vartheta}. \end{aligned} \quad (3.21-17)$$

Непосредственно после импульса сумма $\sum_m e^{-i\omega'_m \vartheta}$ тоже получится приближенно равной нулю. Для времен $t > \vartheta$ поляризация претерпевает эволюцию от значения, задаваемого уравнением (3.21-17) в момент времени $t = \vartheta$.

Согласно уравнению (3.21-16),

$$\bar{P} = \bar{P}_E e^{-t/\tau} \sum_m e^{-i\omega'_m \theta} e^{i\omega'_m (t-\theta)}. \quad (3.21-18)$$

Это, однако, означает, что после времени $t = 2\theta$ начальное состояние восстанавливается независимо от затухания через релаксацию. Причина в том, что под действием π -импульса значения фазы или фазовые траектории, достигнутые отдельными атомными системами к мо-



Фиг. 55. Поляризационное эхо (фотонное эхо).

1. $\frac{\pi}{2}$ -импульс, 2. π -импульс.

менту θ и пропорциональные частоте отдельных систем и времени, заменяются значениями фазы с теми же модулями, но противоположными знаками. Это означает, что «упреждение» наиболее «быстро» колеблющихся атомных систем преобразуется в равное по абсолютной величине отставание и наоборот. Так как направление движения и частоты при этом сохраняются, то через удвоенное время «быстрые» атомные системы вновь догоняют «медленные» системы (фиг. 55). Таким образом возникает *поляризационное эхо* и как следствие — новое нарастание коллективного спонтанного излучения за времени в окрестности 2θ .

В высокочастотной спектроскопии этот метод известен под названием спинового эха. Он нашел практическое применение, в частности, для определения времени релаксации τ . В оптической спектроскопии в последние годы были проведены соответствующие эксперименты в

газах и в твердых телах, для которых также были измерены времена релаксации [3.2-1, 3.21-3, 3.21-3а].

Исследуем теперь роль релаксационных процессов во время облучения светом. Для этого примем, что световой импульс с постоянной вещественной амплитудой E и с частотой $\omega = \Omega$ включается в момент времени $t = 0$. Обратным действием на световую волну снова пренебрежем. Тогда из уравнения (3.21-3) следует исходная система уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{P}_2 + \frac{1}{\tau} \bar{P}_2 = \frac{|d|^2}{\hbar} \gamma_I \bar{E}, \quad (3.21-19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_I + \frac{1}{T} (\gamma_I - \gamma_I^e) = -\frac{1}{\hbar} \bar{E} \bar{P}_2$$

с начальными условиями $\bar{P}_2 = 0$, $\gamma_I(0) = -\gamma$ и с решением

$$\begin{aligned} \bar{P}_2 &= \bar{\mathfrak{P}} + \mathfrak{P}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathfrak{P}_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \gamma_I &= \bar{\Gamma} + \hat{\Gamma}_1 e^{\lambda_1 t} + \hat{\Gamma}_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \quad (3.21-20)$$

где

$$\tau \lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau}{T} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\tau}{T} \right)^2 - \frac{\tau}{T} - s^2},$$

$$s = -\frac{\bar{E} |d| \tau}{\hbar},$$

$$\bar{\mathfrak{P}} = \frac{s}{T s^2 + 1} |d| \gamma, \quad \bar{\Gamma} = \frac{-1}{T s^2 + 1} \gamma, \quad (3.21-21)$$

$$\hat{\Gamma}_1 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \left(\frac{\frac{T}{\tau} s^2}{1 + \frac{T}{\tau} s^2} \right) \gamma,$$

$$\hat{\Gamma}_2 = \left\{ -1 + \frac{1}{1 + \frac{T}{\tau} s^2} - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \left(\frac{\frac{T}{\tau} s^2}{1 + \frac{T}{\tau} s^2} \right) \right\} \gamma,$$

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{\lambda_1 + \frac{\tau}{T}}{s} \hat{\Gamma}_1 |d|,$$

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{\lambda_2 + \frac{\tau}{T}}{s} \hat{\Gamma}_2 |d|.$$

Для больших значений времени отсюда следует стационарное решение

$$\bar{P}_2 = \frac{s}{\frac{T}{\tau} s^2 + 1} |d| \gamma, \quad \gamma_I = \frac{-1}{\frac{T}{\tau} s^2 + 1} \gamma. \quad (3.21-22)$$

Для слабого облучения ($(T/\tau)s^2 \ll 1$) тогда имеем

$$\bar{P}_2 = -\hbar^{-1} |d|^2 \tau \bar{E} \gamma, \quad \gamma_I = -\gamma,$$

а для сильного облучения ($(T/\tau)s^2 \gg 1$) происходит насыщение перехода, так что

$$\bar{P}_2 \rightarrow 0, \quad \gamma_I \rightarrow 0,$$

т. е. получается одинаковая заселенность обоих уровней.

При $t \ll T$ и $\tau \ll T$ получаем $\tau \lambda_{1/2} = -1/2 \pm \sqrt{1/4 - s^2}$. Особенно интересен случай сильного облучения с $s^2 > 1/4$, для которого

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= -\frac{1}{2} \pm i \sqrt{s^2 - \frac{1}{4}}, \\ \gamma_I &= -\gamma e^{-t/2\tau} \left\{ \cos\left(\sqrt{s^2 - \frac{1}{4}} \frac{t}{\tau}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{s^2 - \frac{1}{4}}} \sin\left(\sqrt{s^2 - \frac{1}{4}} \frac{t}{\tau}\right) \right\}, \quad (3.21-23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_2 &= \gamma |d| \frac{s}{\sqrt{s^2 - \frac{1}{4}}} e^{-t/2\tau} \times \\ &\quad \times \sin\left(\sqrt{s^2 - \frac{1}{4}} \frac{t}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Поляризация и инверсия обнаруживают осцилляции с частотой

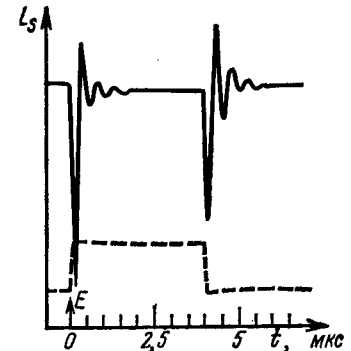
$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= \sqrt{s^2 - \frac{1}{4}} \frac{1}{\tau} = \sqrt{\hbar^{-2} |d|^2 \bar{E}^2 \tau^2 - \frac{1}{4}} \frac{1}{\tau} \approx \\ &\approx \hbar^{-1} \bar{E} |d|. \end{aligned}$$

Таким образом, мы вновь встречаемся с оптической нутацией. Амплитуды осцилляций затухают по экспоненциальному закону с временной константой 2τ . Но амплитуда поляризации затухает после отключения импульса с временной константой τ [ср. уравнение (3.21-14)].

На фиг. 56 представлен весьма наглядный экспериментальный результат по оптической нутации [3.21-4].

Этот пример, строго говоря, не описывается при помощи выведенных здесь соотношений, так как оптическая нутация наблюдается благодаря обратному влиянию на световой импульс и так как имеет место неоднородное уширение. Тем не менее качественное сравнение возможно. Пусть на находящийся внутри кюветы газ наложено электрическое напряжение, импульс которого имеет прямоугольную форму. В результате возникшего в электрическом поле эффекта Штарка взаимодействие между светом непрерывно излучающего

лазера и исследуемым газом испытывает кратковременное изменение. До наложения электрического поля переход, в котором участвуют только частицы газа с вполне определенной компонентой скорости, является насыщенным. Вызванное полем штарковское расщепление больше однородной и в то же время меньше неоднородной ширины линии. Оно приводит к тому, что во взаимодействии со светом могут принять участие также и другие молекулы. При наблюдении лазерного сигнала на выходе из кюветы становится видимым типичный переходный процесс. Подобная техника была использована также в экспериментах по фотонному эху. С помощью описанной методики удалось провести очень точные измерения времен релаксации и переходных моментов в газах.



Фиг. 56. Оптическая нутация в $C^{13}H_3F$.

Штриховая кривая изображает временной ход наложенного на кювету с газом штарковского поля E ; сплошная кривая передает временной ход измеренной детектором мощности излучения L_S .

3.212. Учет обратного действия на световой импульс при пренебрежимых релаксационных процессах. Самоиндуцированная прозрачность, неискаженные импульсы, солитонные решения

В настоящем разделе мы исследуем обратное действие переходов в атомных системах на поле излучения. При этом мы вначале ограничимся процессами, происходящими в течение времен, малых по сравнению с τ и T , благодаря чему можно будет пренебречь релаксационными членами. Кроме того, предположим, что средняя частота поля излучения находится в резонансе с частотами атомных переходов. При этих допущениях из исходной системы (3.21-3) следует для поляризации, инверсии и напряженности поля система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{P}_2 &= \frac{1}{\hbar} |d|^2 \gamma_I \bar{E}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \gamma_I &= -\frac{1}{\hbar} \bar{E} \bar{P}_2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{E} &= \frac{1}{2} \mu_0 \Omega c \bar{P}_2. \end{aligned} \quad (3.21-24)$$

Первые два уравнения этой системы вместе с начальными условиями $\bar{P}_2(t_0) = 0$, $\gamma_I(t_0) = -\gamma$ могут быть решены при помощи подстановки

$$\begin{aligned} \bar{P}_2 &= \gamma |d| \sin \sigma, \\ \gamma_I &= \gamma \cos \sigma, \end{aligned} \quad (3.21-25)$$

где σ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma = \frac{1}{\hbar} |d| \bar{E} \quad (3.21-26)$$

с решением

$$\sigma(t) - \sigma(t_0) = \frac{1}{\hbar} |d| \int_{t_0}^t dt' \bar{E}, \quad \sigma(t_0) = \pm \pi. \quad (3.21-27)$$

Если в третье уравнение системы (3.21-24) подставить $\bar{E} = (\hbar/|d|) (\partial/\partial t) \sigma$, то получится следующее дифференциальное уравнение в частных производных для σ :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma = \beta \sin \sigma, \quad (3.21-28)$$

где

$$\beta = \frac{|d|^2 \mu_0 \Omega c}{2\hbar} \gamma.$$

Мы будем исследовать специальную, но очень интересную группу решений этого дифференциального уравнения в частных производных — так называемые *неискаженные решения*. Исследуем также вопрос о существовании импульсов, которые без искажения пробегают через среду, состоящую из резонансных двухуровневых систем. Зависимость этих решений σ от времени и от координат может иметь только форму $t - (z/v)$. Это означает, что должно выполняться уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \sigma,$$

в котором v — еще подлежащий определению параметр, имеющий размерность скорости. Из уравнения (3.21-28) тогда следует

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sigma = -(\Omega')^2 \sin \sigma, \quad (3.21-29)$$

где

$$(\Omega')^2 = \beta c \left(\frac{c}{v} - 1 \right)^{-1}.$$

Мы получили обычное нелинейное дифференциальное уравнение типа уравнения для маятника. Частное решение этого уравнения имеет вид

$$\sigma = 2 \arcsin(\operatorname{th} \Omega' t), \quad (3.21-30)$$

в чем легко убедиться путем дифференцирования. Это решение удовлетворяет начальному условию $\sigma(-\infty) = -\pi$. При учете того факта, что напряженность поля может зависеть только от аргумента $t - (z/v)$, отсюда следует

$$\bar{E} = \frac{\hbar}{|d|} \frac{\partial}{\partial t} \sigma = \frac{2\hbar\Omega'}{|d|} \frac{1}{\operatorname{ch} \Omega' \left(t - \frac{z}{v} \right)} \quad (3.21-31)$$

или

$$\bar{E} = \bar{E}_{\max} \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2\hbar} \bar{E}_{\max} |d| \left(t - \frac{z}{v} \right) \right], \quad (3.21-32)$$

где введена максимальная амплитуда напряженности поля $\bar{E}_{\text{макс}}$:

$$\bar{E}_{\text{макс}} = \frac{2\hbar\Omega'}{|d|}.$$

Согласно уравнениям (3.21-28) — (3.28-30), скорость v распространения импульса определяется из формулы

$$\frac{c}{v} - 1 = \frac{2\hbar\Omega\gamma}{\epsilon_0 \bar{E}_{\text{макс}}^2}. \quad (3.21-33)$$

Эти импульсы обнаруживают ряд исключительно интересных свойств.

- а. Импульсы возвращают среду в каждой ее точке в исходное состояние [соблюдаются соотношения $\gamma_1(t=\infty) = \gamma_1(t=-\infty) = -\gamma$, $\bar{P}_2(t=\infty) = \bar{P}_2(t=-\infty) = 0$], осуществляя лишь в определенных промежутки времени обмен энергией с атомными системами. Среда является для этих импульсов полностью прозрачной, и принято говорить о явлении *самоиндуцированной прозрачности*.
- б. Импульсы распространяются в среде без искажений. Поясним. В системе координат $z = \xi$, $\eta = t - (z/c)$ форма импульса, правда, меняется в процессе пробега через среду, если это изменение определить как зависимость амплитуды напряженности поля от временной координаты $\eta = t - (z/c)$, поскольку импульс поглощается на переднем фланге и усиливается на заднем фланге вследствие вынужденного излучения. Благодаря этому процессу максимум импульса смещается «назад», и скорость движения этого максимума меньше скорости света. Но форма импульса, определяемая как зависимость амплитуды напряженности поля от $(t - (z/v))$, остается постоянной при изменении ξ .
- в. Согласно уравнению (2.21-33), скорость распространения импульса не идентична ни фазовой, ни групповой скорости, которые определяются как ω/k и $d\omega/dk$. Эта скорость зависит от свойств среды и, кроме того, от максимальной амплитуды напряженности поля $\bar{E}_{\text{макс}}$ импульса. При сделанном предположении об отрицательной начальной инверсии ($\gamma_1 = -\gamma$) скорость

распространения v импульса инвариантной формы меньше скорости света c . Напротив, предположение о положительной начальной инверсии $\gamma_1(t_0) = \gamma_2 - \gamma_1 > 0$ приводит к скорости распространения $v > c$ (однако с этой скоростью v не могут передаваться никакие сигналы). Из уравнения (3.21-33) следует, что v тем сильнее отличается от c , чем меньше $\bar{E}_{\text{макс}}$. Однако при обсуждении такой зависимости следует учесть, что, с другой стороны, из требования малой ширины импульса по сравнению с временем релаксации τ вытекает соотношение

$$\frac{E_{\text{макс}} |d|}{\hbar} \gg \frac{1}{\tau}. \quad (3.21-34)$$

При положительной начальной инверсии $\gamma_1(t_0) = \gamma$ и при $\bar{E}_{\text{макс}} = (C\hbar/\tau|d|)$ ($C \gtrsim 3$) получим из уравнения (3.21-33)

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{C^2}\right) \frac{\Omega\tau^2 |d|^2 \gamma}{\epsilon_0 \hbar}}. \quad (3.21-35)$$

«Полная площадь» импульса напряженности поля

$$\sigma_F = \sigma(\infty) - \sigma(-\infty) = \frac{|d|}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \bar{E} \quad (3.21-36)$$

составляет 2π , вследствие чего эти особые импульсы называют также 2π -импульсами [см. по этому поводу замечание после уравнения (3.21-13)].

Очень интенсивные экспериментальные исследования распространения 2π -импульсов в различных средах выполнены в оптической области спектра [3.2-6, 3.2-7, 3.21-3]. Отправным пунктом служили исследования по распространению импульсов рубинового лазера в кристаллах рубина и импульсов CO_2 -лазера в газах, активных к инфракрасному поглощению. Были проведены такие эксперименты с лазерами на красителях. Удалось измерить очень малые затухания, а также зависимость скорости распространения от интенсивности излучения и от параметров атомных систем. Кроме того, эксперимен-

тально и теоретически было исследовано влияние поперечной релаксации и неоднородных уширений (ср. по этому поводу также выводы в п. 3.211).

Рассмотренные здесь 2π -импульсы являются только частными случаями более общих групп решений системы уравнений (3.21-24) или уравнения (3.21-28). Так, например, существуют другие импульсы, обладающие свойством «а» и также возвращающие среду в исходное состояние; это импульсы с общей площадью

$$\sigma_F = m \cdot 2\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21-37)$$

Но в противоположность 2π -импульсам, импульсы с $m \neq 1$ не обладают свойством «б», т. е. не обладают свойством сохранения формы. В частности, после длительного времени пробега эти импульсы расщепляются на 2π -импульсы. Все решения этих типов принадлежат к более общему классу решений нелинейных волновых уравнений, а именно к *солитонам* [321-5]. В качестве примера приведем решение с $m = 2$; оно гласит:

$$\begin{aligned} \bar{E}(x, t) = & \frac{\bar{E}_{\text{макс}1}^2 - \bar{E}_{\text{макс}2}^2}{\bar{E}_{\text{макс}1}^2 + \bar{E}_{\text{макс}2}^2} \times \\ & \times \frac{\bar{E}_{\text{макс}1} \operatorname{sech} \theta_1 + \bar{E}_{\text{макс}2} \operatorname{sech} \theta_2}{1 - \frac{2\bar{E}_{\text{макс}1}\bar{E}_{\text{макс}2}}{\bar{E}_{\text{макс}1}^2 + \bar{E}_{\text{макс}2}^2} [\operatorname{th} \theta_1 \operatorname{th} \theta_2 - \operatorname{sech} \theta_1 \operatorname{sech} \theta_2]} \end{aligned} \quad (3.21-38)$$

где

$$\theta_i = \Omega'_i t - \frac{\Omega'_i}{v_i} z + \delta_i.$$

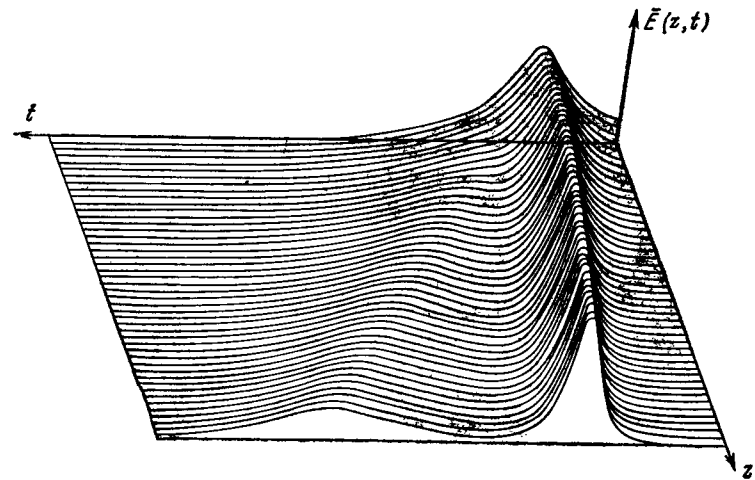
Легко убедиться, что этот импульс индуцирует полную прозрачность, но не сохраняет правильную форму. При больших t он принимает форму (при $\bar{E}_{\text{макс}1} > \bar{E}_{\text{макс}2}$)

$$\bar{E}(x, t) = \bar{E}_{\text{макс}1} \operatorname{sech}(\theta_1 + \beta_{12}) + \bar{E}_{\text{макс}2} \operatorname{sech}(\theta_2 - \beta_{12}), \quad (3.21-39)$$

где

$$\beta_{12} = \ln \frac{\bar{E}_{\text{макс}1} + \bar{E}_{\text{макс}2}}{\bar{E}_{\text{макс}1} - \bar{E}_{\text{макс}2}};$$

4π -импульс (2-солитонный импульс) расщепляется, следовательно, на два максимума, которые движутся с различными скоростями (v_1 и v_2), и в конце концов порож-



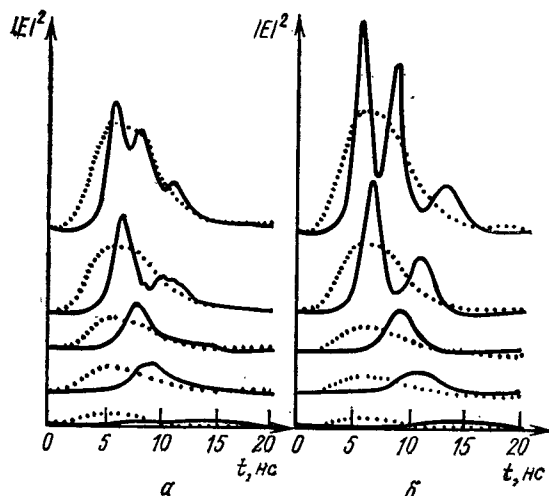
Фиг. 57. Расщепление 4π -импульса на два 2π -импульса.

дает два 2π -импульса правильной формы (фиг. 57). Такое расщепление высших солитонных импульсов на 2π -импульсы наблюдалось в парах рублидия [3.21-6] (фиг. 58). «Линейное» пропускание энергии составило в этом примере всего 0,7%. Но благодаря эффекту *самоиндуцированной прозрачности* наблюдаемое в эксперименте пропускание энергии превосходило 90%, причем были измерены замедления импульса до 8 нс.

С помощью полученных уравнений можно описать также столкновение многих 2π -импульсов и образование солитонного импульса высшего порядка.

Для неоднородно уширенных переходов справедлива так называемая «теорема площади самоиндуцированной

прозрачности» [3.2-7]. Она утверждает, что в поглощающей среде все световые импульсы преобразуются в $m \cdot 2\pi$ -импульсы (m — целое), причем (в пренебрежении нерезонансными процессами потерь в среде) все импуль-



Фиг. 58. Формирование световых импульсов при самондущиванной прозрачности в парах рубидия для различных «площадей» σ_F импульсов входной напряженности поля.

$\sigma_F = 6,28; 8,7; 10,5; 17,5$ или 23 .

Пунктир — входной импульс, сплошные кривые — выходной импульс.
а — результаты измерений; б — результаты сравнительных расчетов.

сы в области поверхности $m \cdot 2\pi - \pi \leq \sigma \leq m \cdot 2\pi + \pi$ стремятся к значению $\sigma = m \cdot 2\pi$, т. е. площадь их напряженности поля может возрастать:

3.213. Вычисление обратного действия на световой импульс в квазистационарном режиме. Формирование импульса

В дальнейшем изложении мы исследуем распространение световых импульсов с частотой ω в среде, состоящей из двухуровневых систем с резонансной частотой $\Omega \approx \omega$. Будем предполагать, что амплитуда напряженно-

сти поля \bar{E} не изменяется существенно за время, сравнимое со временем поперечной релаксации τ . При этом предположении мы получим, исходя из уравнения (3.21-3), следующую систему уравнений баланса для плотности потока фотонов $J = (e_0 c n^{(J)} / 2\hbar\omega) |\bar{E}|^2$ и для инверсии γ_I , причем мы откажемся от того, чтобы ограничиться значением показателя преломления $n^{(J)} = 1$ и значением групповой скорости $v' = c$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \gamma_I + \frac{1}{T} (\gamma_I - \gamma_I^e) &= -2\sigma^{(1)} \gamma_I J, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} J &= \sigma^{(1)} \gamma_I J, \end{aligned} \quad (3.21-40)$$

где

$$\sigma^{(1)} = \frac{\mu_0 c |d|^2 \tau}{\hbar n^{(J)}}, \quad \eta = t - \frac{z}{v'}, \quad \xi = z$$

($\sigma^{(1)}$ есть поперечное сечение поглощения для однофотонного процесса). Из второго уравнения следует, что $\sigma^{(1)} \gamma_I = (\partial / \partial \xi) \ln J$. Подстановка полученного из этого соотношения значения γ_I в первое уравнение дает

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln J + 2\sigma^{(1)} \frac{\partial}{\partial \xi} J + \frac{1}{T} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \ln J - \sigma^{(1)} \gamma_I^e \right\} = 0. \quad (3.21-41)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных служит для определения J при граничном условии $J(\xi = 0, \eta) = J_0(\eta)$ и при начальном условии $(\partial / \partial \xi) \ln J(\xi, \eta = -\infty) = \sigma^{(1)} \gamma_I^e$. Система уравнений (3.21-40) или эквивалентное уравнение (3.21-41) были, например, решены численно в [3.21-7] для входных импульсов гауссовой формы и для различных значений отношения ширины импульса τ_L ко времени релаксации T . Мы здесь рассмотрим только два предельных случая $\tau_L \ll T$ и $\tau_L \gg T$, которые реализуются во многих применениях, в особенности если на форму импульса оказывается целенаправленное воздействие. Эти два предельных случая допускают аналитическое решение.

В первом случае ($\tau_L \ll T$) можно пренебречь двумя последними членами в уравнении (3.21-41). Интегрирование получающегося уравнения относительно ξ приво-

дит к результату

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{J}{J_0(\eta)} + 2\sigma^{(1)} [J - J_0(\eta)] = 0. \quad (3.21-42)$$

Интеграл этого уравнения определен с точностью до произвольной функции от ξ , которая должна быть установлена на основании начального условия. В результате получается следующая форма импульса для плотности потока фотонов J на выходе из среды:

$$J = J_0(\eta) \frac{\exp \left\{ 2\sigma^{(1)} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' J_0(\eta') \right\}}{e^{+\sigma^{(1)} \gamma_I^e \xi} - 1 + \exp \left\{ 2\sigma^{(1)} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' J_0(\eta') \right\}}. \quad (3.21-43)$$

(Во многих случаях можно предположить, что в состоянии теплового равновесия почти все частицы находятся в основном состоянии, так что $\gamma_I^e = -\gamma$.) Для входного импульса гауссовой формы

$$J_0(\eta) = J_{0\text{макс}} e^{-4 \ln 2 (\eta/\tau_L)^2} \quad (3.21-44)$$

получается на выходе

$$J = J_{0\text{макс}} \times \frac{\exp \left(- \left(\frac{\eta}{\tau_L} \right)^2 4 \ln 2 + \frac{J_{0\text{макс}} \sigma^{(1)} \tau_L \sqrt{\pi}}{\sqrt{4 \ln 2}} \left\{ 1 + \Phi \left[\frac{2\eta \sqrt{2 \ln 2}}{\tau_L} \right] \right\} \right)}{e^{+\sigma^{(1)} \gamma_I^e \xi} - 1 + \exp \left(\frac{J_{0\text{макс}} \sigma^{(1)} \tau_L \sqrt{\pi}}{\sqrt{4 \ln 2}} \left\{ 1 + \Phi \left[\frac{2\eta \sqrt{2 \ln 2}}{\tau_L} \right] \right\} \right)}, \quad (3.21-45)$$

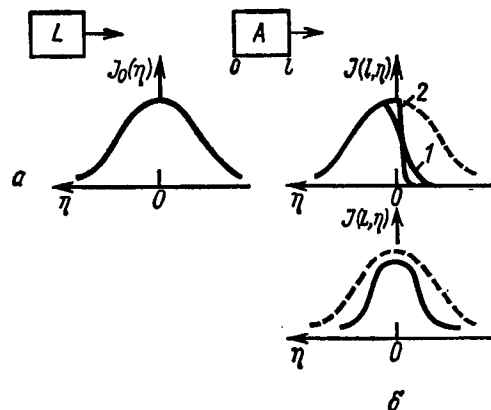
где $\Phi(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x dt e^{-t^2}$ есть интеграл ошибок. На

фиг. 59, а приведен пример преобразования входного импульса гауссовой формы в поглощающей среде описанного типа. Видно, что поглощение в некоторый определенный момент времени сильно зависит от «предыстории», т. е. мы имеем дело с «нелинейным фильтром, обладающим памятью» (ср. ч. I, разд. 1.12).

Во втором предельном случае ($\tau_L \gg T$) из уравнения (3.21-41) получается стационарное решение

$$\ln \frac{J_0(\eta)}{J} + 2\sigma^{(1)} T [J_0(\eta) - J] = \sigma \gamma l. \quad (3.21-46)$$

О влиянии подобного поглотителя на форму импульса мы можем судить из фиг. 59, б. При этих условиях погло-



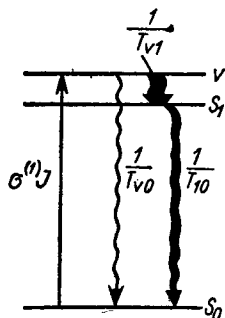
Фиг. 59. Изменение формы гауссова входного импульса при его прохождении через образец с резонансными двухуровневыми системами.

а — $\tau_L \ll T$, кривая 1: $\sigma^{(1)} \gamma l = 10$, $\sigma^{(1)} J_0 \tau_L = 10$; кривая 2: $\sigma^{(1)} \gamma l = 30$, $\sigma^{(1)} J_0 \tau_L = 30$;
б — $\tau_L \gg T$; L — лазер, А — поглотитель.

щение зависит только от мгновенного значения входной интенсивности, но не от предыстории. Этот поглотитель, следовательно, представляет собой «нелинейный фильтр без памяти».

При обсуждении возможности создания таких фильтров полезно напомнить (см. числовые данные в разд. 3.11), что существуют поглотители с очень сильно различающимися временами релаксации, значения которых находятся в широких пределах: от нескольких пикосекунд в растворах красителей до миллисекунд в газах при низких давлениях. Путем изменения концентрации (или давления газа) и длины образца интенсивность по-

глощения также можно варьировать в широких пределах. Поэтому с такими поглотителями можно сделать фильтры, обладающие очень сильно различающимися свойствами. Эти фильтры, в особенности те из них, которые характеризуются коротким временем релаксации, используются также для пассивной модуляции добротности и для синхронизации мод (ср. разд. В1.13 и 3.31).



Фиг. 60. Схема процессов возбуждения и релаксации в молекуле красителя.

S_0 — основное электронное состояние; S_1 — возбужденное электронное состояние; v — высшие колебательные уровни возбужденного электронного состояния; $\sigma^{(1)}J$, $\frac{1}{T_{10}}$, $\frac{1}{T_{v1}}$, $\frac{1}{T_{v0}}$ — вероятности переходов между соответствующими уровнями вследствие излучательных или релаксационных процессов.

так и колебательную энергию и проходит при этом с большей вероятностью релаксационный путь, идущий через бесколебательное состояние возбужденного электронного уровня (фиг. 60). В работе [3.21-8] исследовано взаимодействие таких молекул со световыми импульсами при различных соотношениях между длиной импульса и отдельными временами релаксации. Было показано, что воздействие этих молекул на световые импульсы может

В сложных молекулах и в твердых телах могут происходить разнообразные релаксационные процессы. Возникает вопрос о пригодности простой двухуровневой схемы для описания воздействия этих систем на световые импульсы, находящиеся в резонансе с молекулярным переходом, или о необходимости применения многоуровневой модели для понимания такого воздействия. Приведем пример. В качестве насыщаемых поглотителей очень часто используются молекулы органических красителей, в которых, согласно принципу Франка—Кондона, наиболее эффективное возбуждение происходит при переходе не в бесколебательное возбужденное электронное состояние, а на некоторый высокий колебательный уровень этого электронного состояния. По этой причине молекула отдает при релаксации как электронную,

описываться на основании двухуровневой модели, если длительность импульса мала по сравнению с существующими временами релаксации; во время импульса молекулы не успевают переходить с первоначально возбужденного уровня на какой-нибудь другой уровень. Кроме того, был исследован часто встречающийся случай $T_{v1} \ll \tau_L \ll T_{10}$, T_{v0} (так как $T_{v1} \approx 10^{-12}$ с, T_{v0} и $T_{10} \gg 10^{-12}$ с). При этом для импульса на выходе из поглотителя было получено выражение

$$J = J_0(\eta) \frac{\exp \left\{ \sigma^{(1)} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' J_0(\eta') \right\}}{e^{\sigma^{(1)} \nu_f \tau_L} - 1 + \exp \left\{ \sigma^{(1)} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' J_0(\eta') \right\}}. \quad (3.21-47)$$

Уравнение (3.21-47) отличается от соответствующей формулы для двухуровневой системы в уравнении (3.21-43) только множителем перед интегралом по $J_0(\eta')$. Насыщение двухуровневой системы при меньших интенсивностях может быть легко понято на основании того факта, что в двухуровневой системе полное насыщение, т. е. исчезновение всякого дальнейшего поглощения, достигается при одинаковых населенностях верхнего и нижнего уровней, тогда как в трехуровневой системе при тех же условиях основной уровень должен быть полностью опустошен.

3.22. Нестационарные явления при многофотонных процессах

В настоящем разделе мы исследуем на избранных примерах специфическое влияние нестационарных многофотонных процессов взаимодействия на кинетические явления в атомных системах и на световые импульсы. По соображениям, изложенным в начале § 3.2, мы прежде всего обратим внимание на рассмотрение «локальных» нестационарных процессов, при которых имеет место по крайней мере одно резонансное взаимодействие с атомными системами; оно влечет за собой обра-

тимый или необратимый обмен энергией между этими системами и электромагнитным полем.

При анализе резонансных взаимодействий, возбуждающих атомную систему, мы ограничимся описанием двухфотонных процессов. Среди резонансных двухфотонных взаимодействий следует различать двухфотонное поглощение и двухфотонное излучение, при которых атомная система поглощает или излучает сумму двух фотонов, и процессы, подобные комбинационному рассеянию, при которых атомная система поглощает или излучает разность энергий фотонов. В дополнение к изложенному в разд. 3.21 мы рассмотрим в п. 3.221 некоторые аспекты нестационарного двухфотонного поглощения. В п. 3.222 представлены нестационарные процессы рассеяния на примере вынужденного комбинационного рассеяния, причем также будет показано, как с помощью этих процессов можно измерять продольные и поперечные времена релаксации.

3.221. Двухфотонное поглощение

Нестационарные процессы двухфотонного поглощения происходят между начальным состоянием 0 и конечным состоянием 1 атомной системы, разность энергий которых равна $\hbar\Omega$. Их можно описать при помощи уравнений из разд. 2.36 для математических ожиданий инверсии и поляризации некоторой эффективной двухуровневой системы, если промежуточные виртуальные уровни достаточно удалены от однофотонных резонансов (см. также разд. 3.13).

В квазистационарном режиме (длительность импульса τ_L много больше поперечного времени релаксации τ), который мы сначала рассмотрим, при облучении среды импульсом со средней частотой $\omega \approx 1/2\Omega$ справедливы следующие уравнения баланса для плотности потока фотонов J и инверсии ν_I :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} J &= \tilde{\sigma}^{(2)} \nu_I J^2, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \nu_I + \frac{1}{T} (\nu_I - \nu_I^e) &= -\tilde{\sigma}^{(2)} \nu_I J^2. \end{aligned} \quad (3.22-1)$$

Аналогично тому, как это было сделано в разд. 3.21, отсюда можно получить дифференциальное уравнение в частных производных для J :

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} J^{-1} - \tilde{\sigma}^{(2)} \frac{\partial}{\partial \xi} J + \frac{1}{T} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} J^{-1} + \tilde{\sigma}^{(2)} \nu_I^e \right] = 0. \quad (3.22-2)$$

Граничное условие имеет вид $J(\xi=0, \eta) = J_0(\eta)$, а начальное условие гласит $(\partial/\partial \xi) J^{-1} = -\tilde{\sigma}^{(2)} \nu_I^e$. В предельных случаях $\tau_L \ll T$ и $\tau_L \gg T$ уравнение (3.22-2) может быть снова сравнительно легко решено, и могут быть вычислены результирующие изменения населенностей и преобразования формы импульса. Характерное отличие от однофотонного процесса заключается в том, что области импульса с высокими интенсивностями участвуют во взаимодействии с большим весом. Это видно очень отчетливо в процессах, происходящих в тонком слое вещества, в котором можно пренебречь изменениями величины J . В этом случае решение имеет структуру, подобную структуре решения для однофотонного поглощения. Опять выполняется уравнение (3.21-7), но $C(t)$ теперь определяется выражениями

$$C(t) = 1 + C_1 |E(t)|^4$$

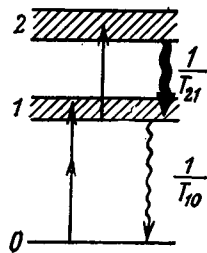
или

$$C(t) = 1 + C'_1 J^2(t) \quad (C_1, C'_1 = \text{const}).$$

Напряженность поля или интенсивность входят теперь в решение в более высокой степени.

При помощи двухфотонного поглощения, подобно тому как это делается в случае однофотонного поглощения, могут проводиться эксперименты по насыщению и по измерению продольного времени релаксации соответствующего перехода. Экспериментальная трудность заключается в том, что для достижения больших вероятностей переходов должно выполняться условие $\tilde{\sigma}^{(2)} J^2 \approx \tau_L^{-1}$ или T^{-1} , а для этого, вообще говоря, необходимы очень большие интенсивности, которые во многих материалах уже могут приводить к их разрушению. По этим причинам трудно, например, применить двух- или многофотонное поглощение для накачки ультрафиолетовых лазеров с достаточной эффективностью. Наобо-

рот, при применении чувствительных регистрирующих устройств (например, флуоресцентных методов или одноквантового поглощения пробного луча с переходом из возбужденного состояния) оказываются достаточными уже очень малые инверсии населенностей, которые достигаются при существенно более низких интенсивностях [3.22-1, 3.22-2] (ср. разд. 3.13). В ступенчатом процессе,



Фиг. 61. Одноквантовое поглощение из возбужденного состояния, заселенного при двухквантовом поглощении

в котором одноквантовое поглощение происходит с уровня, заселенного посредством двухквантового поглощения (фиг. 61), очень сильное воздействие на импульсы может быть достигнуто при подходящих условиях также в случае малой инверсии населенностей. Если время релаксации между нижними уровнями T_{10} велико по сравнению с длительностью импульса τ_L , а время релаксации между двумя верхними уровнями T_{21} мало по сравнению с τ_L , то атомные системы с течением времени собираются на уровне 1 и осуществляют нарастающее со временем одноквантовое поглощение. При больших поперечных сечениях одноквантовых процессов оно может служить причиной существенного преобразования импульса. В противоположность преобразованиям, описанным в п. 3.213, в данном случае наиболее сильно подавляется задний фланг импульса, что вызывается интегрирующим эффектом. Путем комбинирования ступенчатого поглотителя с одноквантовым поглотителем можно построить подходящий фильтр для воздействия на форму заранее заданного импульса, а также для укорочения импульса; работа таких фильтров была исследована теоретически и экспериментально в [3.21-8 и 3.22-3]. При этом было также рассмотрено влияние этих фильтров на возникновение импульса в лазерном резонаторе (ср. разд. 3.32).

Для описания нестационарных процессов, при которых характеристические величины E , P и γ_I существенно изменяются уже за времена $\leq \tau$, можно исходить из соотношений, приведенных в разд. 2.36 для двухквантовых

процессов (в предположении, что соблюдаются условия, сформулированные во вводной части настоящего раздела). Тогда при выполнении резонансного условия $2\omega = \Omega$ получается следующая система уравнений для инверсии γ_I и для мнимой части \bar{Q}_2 амплитуды поляризуемости, которая определяется выражениями $Q = \frac{1}{2}\bar{Q}e^{2i(\omega t - kz)} + \{KK\}$ и $\bar{Q} = \bar{Q}_1 + i\bar{Q}_2$ (амплитуда напряженности поля E является вещественной):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\right)\bar{Q}_2 = i|\alpha_{01}|^2 \gamma_I \frac{1}{4}\bar{E}^2, \quad (3.22-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma_I + \frac{1}{T}(\gamma_I - \gamma_I^e) = \frac{1}{2\hbar}\bar{Q}_2\bar{E}^2.$$

Мы рассмотрим эти уравнения только в одном простом случае. Представим себе, что исследуемый образец является тонким слоем вещества и что, как и в п. 3.211, можно пренебречь ослаблением лазерной волны вследствие поглощения, т. е. обратным действием на лазерный импульс. При этих предположениях напряженность поля выступает в материальных уравнениях как заданный и зависящий от времени параметр. Это, однако, означает, что мы можем воспользоваться всеми результатами п. 3.211, полученными для одноквантовых процессов; при этом необходимо только подставить соответствующие параметры, тогда как в остальном уравнения имеют ту же самую структуру.

Отсюда следует вывод, что с двухквантовым поглощением можно наблюдать эффекты, аналогичные эффектам при одноквантовом поглощении, в частности самоиндуцированную прозрачность и фотонное эхо. Но при этом следует иметь в виду, что такие наблюдения возможны только в веществах, обладающих очень высокими значениями поперечного сечения для двухквантового взаимодействия, обеспечивающими выполнение условия $\bar{\sigma}^{(2)}J^2 > 1/\tau$; оно необходимо для достижения сильных кратковременных возбуждений, происходящих без разрушения самого материала. С точки зрения получения нелинейных восприимчивостей наиболее благоприятны полупроводники.

3.222. Вынужденное комбинационное рассеяние

Описание нестационарных процессов вынужденного рассеяния, например вынужденного комбинационного рассеяния, сложнее описания рассмотренных выше процессов, так как должно быть учтено зависящее от времени взаимодействие среды со *многими* световыми импульсами, обладающими *различными* средними частотами. Для выяснения принципиального подхода сделаем упрощающие допущения. Ограничимся рассмотрением атомных систем, в которых комбинационное рассеяние создает инверсию населенностей только между двумя уровнями и которые в смысле рассуждений разд. 2.36 описываются как эффективные двухуровневые системы. Пусть такие системы взаимодействуют с двумя световыми импульсами — одним лазерным и одним стоксовым импульсами со средними частотами f_L и f_S , распространяющимися коллинеарно в направлении z . С помощью подстановки

$$E(z, t) = \sum_{i=L, S} \frac{1}{2} \bar{E}_i(z, t) e^{i(\omega_i t - k_i z)} + \{KK\}$$

и

$$Q(z, t) = \frac{1}{2} \bar{Q}(z, t) e^{i(\omega' t - k' z)} + \{KK\}$$

$$(\omega' = \omega_L - \omega_S, \quad k' = k_L - k_S)$$

получим при резонансе, т. е. при $\omega_L - \omega_S = \Omega$, из соотношений разд. 2.36 следующую систему уравнений для амплитуды поляризуемости \bar{Q} , инверсии γ_i и амплитуд напряженности поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{Q} + \frac{1}{\tau} \bar{Q} &= |\alpha_{01}|^2 \frac{i}{2\hbar} \gamma_L \bar{E}_L \bar{E}_S^*, \\ \frac{\partial}{\partial t} \gamma_L + \frac{1}{T} (\gamma_L - \gamma_L^e) &= \frac{i}{4\hbar} [\bar{Q} \bar{E}_L \bar{E}_S - \bar{Q}^* \bar{E}_L \bar{E}_S^*], \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_S} \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{E}_S &= \frac{-i\mu_0 \omega_S^2}{4k_S} \bar{E}_L \bar{Q}^*, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_L} \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{E}_L &= \frac{-i\mu_0 \omega_L^2}{4k_L} \bar{E}_S \bar{Q}. \end{aligned} \quad (3.22-5)$$

Здесь v'_L, v'_S — групповые скорости на частотах f_L и f_S . (При отклонениях от резонанса, т. е. при $\Delta = \omega_L - \omega_S - \Omega \neq 0$, в первом из этих уравнений следует заменить $1/\tau$ на $(1/\tau) + i\Delta$). Из этих уравнений можно заключить, что через среду осуществляется взаимное влияние на амплитуды и фазы обеих волн. Это становится еще более очевидным, если в амплитудах выделить модули и фазовые множители: $\bar{Q} = |\bar{Q}| e^{i\varphi}$; $\bar{E}_L = |\bar{E}_L| e^{i\varphi_L}$, $\bar{E}_S = |\bar{E}_S| e^{i\varphi_S}$. Вводя сокращенное обозначение $\varphi_L - \varphi_S - \varphi = \delta$, получим следующую систему (вещественных) дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\bar{Q}| + \frac{1}{\tau} |\bar{Q}| &= -\frac{1}{2\hbar} |\alpha|^2 \gamma_L |\bar{E}_L| |\bar{E}_S| \sin \delta, \\ |\bar{Q}| \frac{\partial}{\partial t} \varphi &= \frac{1}{2\hbar} |\alpha|^2 \gamma_L |\bar{E}_L| |\bar{E}_S| \cos \delta, \\ \gamma_L + \frac{1}{T} (\gamma_L - \gamma_L^e) &= \frac{1}{2\hbar} |\bar{Q}| |\bar{E}_L| |\bar{E}_S| \sin \delta, \\ \frac{\partial}{\partial z} |\bar{E}_L| + \frac{1}{v'_L} \frac{\partial}{\partial t} |\bar{E}_L| &= -\frac{\mu_0 \omega_L^2}{4k_L} |\bar{Q}| |\bar{E}_S| \sin \delta, \\ |\bar{E}_L| \left(\frac{\partial}{\partial z} \varphi_L + \frac{1}{v'_L} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_L \right) &= -\frac{\mu_0 \omega_L^2}{4k_L} |\bar{Q}| |\bar{E}_S| \cos \delta, \\ \frac{\partial}{\partial z} |\bar{E}_S| + \frac{1}{v'_S} \frac{\partial}{\partial t} |\bar{E}_S| &= \frac{\mu_0 \omega_S^2}{4k_S} |\bar{Q}| |\bar{E}_L| \sin \delta, \\ |\bar{E}_S| \left(\frac{\partial}{\partial z} \varphi_S + \frac{1}{v'_S} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_S \right) &= -\frac{\mu_0 \omega_S^2}{4k_S} |\bar{Q}| |\bar{E}_L| \cos \delta \end{aligned} \quad (3.22-6)$$

(где $|\alpha|^2 = |\alpha_{01}|^2$).

Мы решим эту систему связанных дифференциальных уравнений для атомных систем и полей при различных условиях, в частности квазистационарных и предельно нестационарных (ср. [3.2-2, 3.22-4]).

Квазистационарные условия

Сначала рассмотрим квазистационарный случай, т. е. будем считать время τ_i ($i = L, S$), в течение которого

амплитуды и фазы полей падающего излучения существенно изменяются, большим по сравнению с поперечным временем релаксации τ . При этих условиях из уравнения (3.22-5) или (3.22-6) можно вывести следующую систему уравнений баланса для плотности потока фотонов J_L , J_S и для плотности инверсии γ_I :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_I + \frac{1}{T} (\gamma_I - \gamma_I^e) &= -2C\gamma_I J_L J_S, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_L'} \frac{\partial}{\partial t} \right) J_S &= -C\gamma_I J_L J_S, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_L'} \frac{\partial}{\partial t} \right) J_L &= C\gamma_I J_L J_S, \end{aligned} \quad (3.22-7)$$

где

$$C = (\mu_0^2 \omega_L^2 \omega_S^2 |a|^2 \tau) / (2k_L k_S).$$

Более общие соотношения для отклонений от резонанса ($\Delta = \omega_L - \omega_S - \Omega \neq 0$) получатся, если C заменить на $C' = C[1 + (\Delta\tau)^2]^{-1}$.

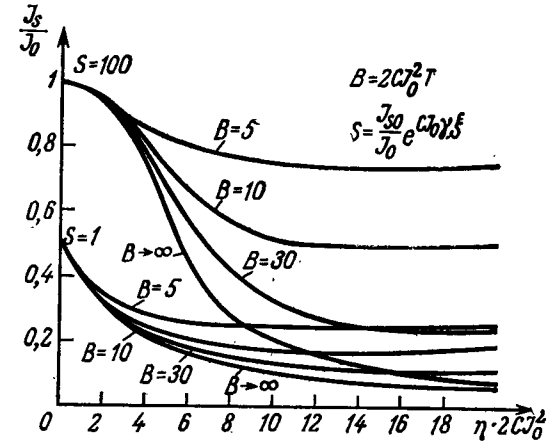
Нелокальными, т. е. связанными со свойствами распространения эффектами, можно пренебречь, если $\tau_i \gg l |(1/v_L') - (1/v_S')|$, где l — длина образца, активно-го в комбинационном рассеянии. (При рассеянии назад это условие следует заменить неравенством $\tau_i \gg \gg l |(1/v_L') + (1/v_S')|$). При этих условиях можно положить $v_L' \approx v_S' = v'$, и тогда после преобразования к новым переменным $\eta = t - (z/v')$, $\xi = z$ получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \gamma_I + \frac{1}{T} (\gamma_I - \gamma_I^e) &= -2C\gamma_I J_L J_S, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} J_S &= -C\gamma_I J_L J_S, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} J_L &= C\gamma_I J_L J_S \end{aligned} \quad (3.22-8)$$

(ср. [3.22-5]). Из этой системы уравнений непосредственно следует соотношение Мэнли — Роу

$$J_S + J_L = \text{const} = J_0(\eta) \equiv J_S(\xi = 0, \eta) + J_L(\xi = 0, \eta). \quad (3.22-9)$$

Пользуясь этим интегралом с начальным условием $\gamma_I(\xi, 0) = -\gamma$ и граничными условиями $J_S(\xi = 0, \eta) = J_{S0}(\eta)$, $J_L(\xi = 0, \eta) = J_{L0}(\eta)$, ($J_{S0} + J_{L0} = J_0$), можно



Фиг. 62. Убывание стоксова усиления с течением времени вследствие изменения населенностей атомных систем.

получить следующее дифференциальное уравнение только для одной переменной J_S :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} J_S &= \frac{J_S(J_0 - J_S)}{J_0} \left\{ \left(\frac{\partial J_0}{\partial \eta} \frac{1}{J_0} - \frac{1}{T} \right) \ln \frac{J_S}{J_0 - J_S} - 2CJ_0 J_S + \right. \\ &+ \frac{CJ_0 \gamma \xi}{T} + 2CJ_0 J_{S0} + \left. \left(\frac{1}{T} - \frac{\partial J_0}{\partial \eta} \frac{1}{J_0} \right) \ln \frac{J_{S0}}{J_0 - J_{S0}} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\ln \frac{J_{S0}}{J_0 - J_{S0}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.22-10)$$

Это уравнение решено в [3.22-6]. Было показано, что лазерный и стоксов импульсы трансформируются при прохождении через среду. На фиг. 62 в качестве примера представлен ход функции $J_S(\eta)/J_0$ при граничных условиях

$$J_{S0}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta < 0, \\ J_{S0} = \text{const} & \text{при } \eta \geq 0 \end{cases}$$

и

$$J_{L0}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta < 0, \\ J_{L0} = \text{const} & \text{при } \eta \geq 0. \end{cases}$$

Из фиг. 62 видно, что стоксово усиление имеет наибольшее значение вначале, так как все частицы находятся в основном состоянии; вследствие изменения населенностей стоксово усиление с течением времени убывает и стремится к значению $J_S(\infty)/J_0$, которое соответствует стационарным условиям и определяется уравнением

$$J_S(\infty) = J_{S0} + \frac{1}{2CJ_0T} \ln \left\{ \frac{J_S(\infty) \left[\frac{J_0}{J_{S0}} - 1 \right]}{[J_0 - J_{S0}(\infty)]} e^{-CJ_0\eta} \right\} = 0. \quad (3.22-11)$$

Такие изменения формы стоксовых импульсов и соответствующих лазерных импульсов происходят при их распространении в активной к комбинационному рассеянию среде, в которой имеют место существенные изменения населенностей. Например, они наблюдались в газах, где вследствие относительно высоких значений продольных времен релаксации комбинационный переход может насыщаться уже при не слишком высоких интенсивностях [3.1-11, 3.22-7, 3.22-8].

Обратимся теперь к исследованию нестационарных проблем в случае $\tau_i \leq \tau$. При этом мы сначала рассмотрим нестационарное поведение атомной системы в пренебрежении ее обратным действием на электромагнитные поля, порождающие изменения в атомной системе. В заключение мы вычислим влияние нестационарных процессов на стоксовы импульсы.

Нестационарное поведение атомной системы при пренебрежимом обратном действии на электромагнитные поля

Сначала рассмотрим случай проникновения двух сильных импульсов с центральными частотами f_L и f_S в тонкий слой вещества, где они создают волну поляризуемости и изменяют населенности; будем считать, что изменениями интенсивных световых волн внутри

слоя можно пренебречь. Кроме того, предположим, что фазы световых импульсов не подвергаются модуляции. Зададим начальные условия в виде $\psi_i(t=0) = \psi_i^e$ и $\bar{Q}(t=0) = 0$. При длительностях импульсов τ_L, τ_S , малых по сравнению с временами релаксации τ и T , получим по аналогии с уравнением (3.21-13) для инверсии ψ_i и для амплитуды \bar{Q} макроскопической поляризуемости Q :

$$\begin{aligned} \psi_i &= \psi_i^e \cos \left\{ \sqrt{|\alpha_{10}|^2} \frac{1}{2\hbar} \int_0^t dt' |\bar{E}_L \parallel \bar{E}_S| \right\}, \\ |\bar{Q}| &= -\psi_i^e \sqrt{|\alpha_{10}|^2} \sin \left\{ \sqrt{|\alpha_{10}|^2} \frac{1}{2\hbar} \int_0^t dt' |\bar{E}_L \parallel \bar{E}_S| \right\}. \end{aligned} \quad (3.22-12)$$

Отсюда видно, что интенсивные световые импульсы, подобно тому как это происходит при одно- и двухфотонном поглощении, могут создавать осциллирующие изменения населенностей. Периодические изменения амплитуды \bar{Q} приводят к изменению знака (которым мы здесь вначале пренебрегали) коэффициента усиления стоксовой и лазерной волн. При условиях, при которых в среде может происходить существенное изменение амплитуды, например в более толстом слое, благодаря этому возникает модуляция световых импульсов.

Предположим, что пробегающие импульсы создают по крайней мере одно состояние с $\psi_i \geq 0$. Это возможно при условии

$$\sqrt{|\alpha_{10}|^2} \frac{1}{2\hbar} \int_0^t dt' |\bar{E}_L \parallel \bar{E}_S| > \frac{\pi}{2}. \quad (3.22-13)$$

Из уравнений (3.22-12) и (3.22-13) явствует, что эффективность процесса зависит от интенсивности обоих импульсов и от их перекрывания. На одном примере мы обсудим возможность реализации инвертированного состояния под действием $\pi/2$ -импульсов, π -импульсов и т. д. Особенно высокими временами релаксации характеризуются газы, состоящие из малых молекул; например, поперечное время релаксации в газообразном водороде при

давлениях порядка нескольких атмосфер составляет около 10^{-9} с. В подобном газе $\sqrt{|\alpha_{10}|^2} \approx 10^{-41} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}^{-1}$. Если выбрать наибольшую возможную длину импульса лазерного и стоксова излучения (около 0,5 нс), то максимальные амплитуды напряженности поля, необходимые для достижения положительной инверсии, должны удовлетворять условию $\sqrt{|\bar{E}_L| |\bar{E}_S|} \geq 2 \cdot 10^8 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$. Этому соответствует при $|\bar{E}_L| \approx |\bar{E}_S|$ интенсивность

$$S(\omega_L) \approx S(\omega_S) \approx 5 \cdot 10^{13} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} = 5 \text{ ГВт} \cdot \text{см}^{-2}.$$

После прохождения световых импульсов на материальную систему продолжают действовать релаксационные процессы, которые без затруднений можно учесть; точно так же, как в разд. 3.21, они приводят к экспоненциальному затуханию амплитуды поляризуемости Q и инверсии γ_1 , начиная от значения, достигнутого после прекращения импульса.

Процессы, при которых длительность возбуждающего импульса сравнима с поперечным временем релаксации, были рассмотрены, например, в [3.2-2] и [3.22-4]; при этом метод аналогичен применяемому в случае однофотонных процессов, описанных в разд. 3.21.

С сильно возбужденными материальными системами после прохождения через них импульса накачки могут быть проведены очень интересные эксперименты. Например, непосредственно после достижения инвертированного состояния можно возбудить вынужденное антистоксово рассеяние. Кроме того, по аналогии с экспериментами по фотонному эху, основанными на однофотонных процессах, в принципе возможны эксперименты по комбинационному эху (см., например, [3.22-9]). Однако экспериментальные трудности очень велики, так как требуются экстремальные свойства световых импульсов и материальных сред. Но случай более слабого возбуждения, при котором не достигается положительная инверсия, также представляет большой интерес, поскольку создаются изменения населенностей и волны поляризуемости; они продолжают существовать и после прекращения светового импульса и в течение их времен затухания

Т или τ могут быть измерены при помощи различных методов пробных лучей.

Зависимость населенности в возбужденном состоянии от времени, а тем самым и продольное время релаксации можно, например, определить, если после сильного возбуждения импульсом накачки осуществить слабое возбуждение на некоторой другой частоте f_{L2} и затем изучить интенсивность спонтанного антистоксова рассеяния под углом 90° на частоте $f_{L2} + (\Omega/2\pi)$, пропорциональную населенности $N_1 = V\gamma_1$.

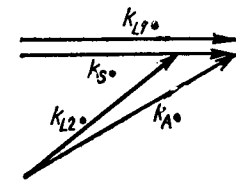
Поперечное время релаксации τ можно измерить, если осуществить генерацию когерентного антистоксова рассеяния при помощи некоторого пробного импульса, т. е. получить рассеяние на волне поляризуемости, созданной импульсом накачки. Пробный импульс должен быть достаточно слабым, для того чтобы он сам не создавал вынужденное комбинационное рассеяние. Таким образом, здесь речь идет об особом методе — так называемой активной спектроскопии (ср. п. 3.161). Допустим, что импульс накачки $L1$ и пробный импульс излучения $L2$ имеют одинаковые частоты, но различаются направлениями. Импульс накачки генерирует волну поляризуемости с волновым вектором

$$k' = k_{L1} - k_{S1}. \quad (3.22-14)$$

(фиг. 63). На этой волне пробный импульс с волновым вектором k_{L2} когерентно рассеивается, причем возникает антистоксова волна с волновым вектором

$$k_A = k_{L2} + k'. \quad (3.22-15)$$

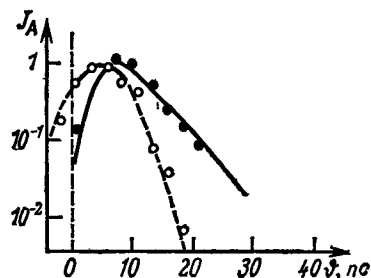
Эти соотношения задают при заданной геометрии процесса накачки и заданном направлении распространения запаздывающего измеряющего импульса определенное направление распространения антистоксова импульса. Эта отчетливо выраженная взаимосвязь направлений



Фиг. 63. Диаграмма волновых векторов при когерентном антистоксовом рассеянии. Вместо k_S • следует брать k'_S • k'_A •.

служит для того, чтобы явно отличить когерентное рассеяние от некогерентного. Кроме того, различаются между собой также абсолютные интенсивности. Интенсивность когерентного антистоксова рассеяния в момент времени t пропорциональна $|E_{L2}(t)\bar{Q}(t)|^2$, где \bar{Q} зависит от параметров импульса накачки $L1$ и от запаздывания пробного импульса по отношению к импульсу накачки.

На фиг. 64 приведен пример измеренной зависимости интенсивности некогерентного и когерентного анти-



Фиг. 64. Нормированный антистоксов сигнал J_A собственного колебания с частотой $f/c = 2939 \text{ см}^{-1}$ 1, 1-трихлорэтана как функция времени запаздывания Δt для некогерентного (сплошная кривая) и когерентного (штриховая кривая) рассеяния.

стоксова рассеяния от времени запаздывания для собственного колебания $\Omega/2\pi c = 2939 \text{ см}^{-1}$ трихлорэтана [3.22-10]. Из этой зависимости было определено продольное время релаксации $T = 5 \pm 1 \text{ пс}$ и поперечное время релаксации $\tau \approx 2 \text{ пс}$. (Часто продольное и поперечное времена релаксации отличаются друг от друга еще гораздо сильнее, например, для этилового спирта $T/\tau \approx 40$.) В этом примере непосредственно измеренное время разрушения фазы τ хорошо согласуется со значением $2/\Delta\omega$, которое было определено из ширины линии спонтанного комбинационного рассеяния $\Delta\omega/2\pi c = 4,9 \text{ см}^{-1}$. Описанные нами экспериментальные методы были первыми методами, при помощи которых удалось в конденсированной среде непосредственно наблюдать релаксацию энергии и разрушение фазы молекулярных колебаний. Эти методы пробных лучей позволили также

измерить перенос энергии на другие собственные колебания в одной и той же молекуле или от одной молекулы к другой.

Следует заметить, что метод определения времени разрушения фазы при помощи когерентного рассеяния пробных лучей был впервые применен к бриллюэновскому рассеянию, при котором удалось провести прямые измерения времени жизни акустических фононов [3.22-11].

Влияние стоксова сигнала

Ниже мы исследуем сначала усиление, а затем генерацию стоксовых импульсов в нестационарном режиме. При этом мы будем снова предполагать, что можно пренебречь дисперсионными эффектами. Кроме того, допустим, что можно пренебречь изменениями населенностей в среде, а также и ослаблением лазерного импульса. Эти условия могут быть реализованы при помощи подходящего выбора экспериментальных параметров источников излучения и материальных сред (см., например, [3.22-12]). Пользуясь преобразованием переменных $\eta = t - z/v$, $\xi = z$ и производя замену $\gamma_i = -\gamma$, получаем из уравнения (3.22-5) следующие исходные уравнения для вычисления усиления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{Q}^* + \frac{1}{\tau} \bar{Q}^* &= \frac{i}{2\hbar} |\alpha_{10}|^2 \gamma \bar{E}_L^* \bar{E}_S, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{E}_S &= -\frac{i\mu_0 \omega_S^2}{4k_S} \bar{Q}^* \bar{E}_L. \end{aligned} \quad (3.22-16)$$

(Здесь E_L есть заданная функция η .) Исключая E_S или \bar{Q} , получаем следующее гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных для $\mathcal{F} = \bar{E}_S \bar{E}_L^{-1}$ или $\mathcal{F} = \bar{Q}^*$:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} - \beta |\bar{E}_L|^2 \right\} \mathcal{F} = 0, \quad (3.22-17)$$

где

$$\beta = \frac{\mu_0 \omega_S^2 |\alpha_{10}|^2}{8\hbar k_S} \gamma.$$

Подстановка $\mathcal{F} = Fe^{-\eta\tau}$ и преобразование переменных

$$\xi(-\infty, \eta) = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' |\bar{E}_L(\eta')|^2$$

позволяет привести это гиперболическое уравнение к стандартной форме

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi} - \beta \right\} F = 0. \quad (3.22-18)$$

Оно может быть решено по методу Римана. При начальном условии $\bar{Q}^*(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{E}_S = 0$ для $\eta = -\infty$ и при граничном условии $\bar{E}_S(\xi = 0, \eta) = \bar{E}_{S0}(\eta)$ решения имеют вид (см., например, [3.22-13])

$$\begin{aligned} \bar{E}_S = & E_{S0}(\eta) + \sqrt{\beta} \bar{E}_L(\eta) \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' e^{-\frac{\eta-\eta'}{\tau}} \bar{E}_L^*(\eta') \bar{E}_{S0}(\eta') \times \\ & \times [\xi(\eta) - \xi(\eta')]^{-1/2} J_1[\sqrt{4\beta\xi\xi(\eta', \eta)}], \end{aligned} \quad (3.22-19)$$

где

$$\xi(\eta) \equiv \xi(-\infty, \eta),$$

$$Q^* =$$

$$= \frac{i}{2\hbar} |\alpha_{10}|^2 \nu \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' e^{-\frac{\eta-\eta'}{\tau}} \bar{E}_L^*(\eta') \bar{E}_{S0}(\eta') J_0[\sqrt{4\beta\xi\xi(\eta', \eta)}];$$

здесь $J_j[y]$ — бесселевы функции мнимого аргумента порядка j . При обсуждении этого решения мы сначала предположим, что разности фаз между \bar{E}_L , \bar{E}_S и \bar{Q} постоянны во времени и что фаза \bar{Q} удовлетворяет соотношению $\varphi = \varphi_L - \varphi_S - \pi/2$. Этот случай представляет особый физический интерес и имеет важное значение, так как при очень высоких усилениях он устанавливается автоматически (такие соотношения устанавливаются, даже если вначале они не имели места) и так как усиление в этом случае достигает максимального значения [3.22-13]; без дальнейшего ограничения общности мы можем, следовательно, положить $\varphi_L = \varphi_S = 0$ и $\varphi = -\pi/2$. Исходя из этих условий, рассмотрим вы-

ходной стоксов сигнал и колебание поляризации при постоянном во времени входном стоксовом сигнале \bar{E}_{S0} в поле короткого лазерного импульса (длительность лазерного импульса $\tau_L < \tau$) и при больших усилениях ($\bar{E}_{S0} \ll (\bar{E}(\xi, \eta))_{\text{макс}}$). Интегралы в уравнении (3.22-19) обращаются в нуль в точках среды ξ , в которые вступает передний фронт лазерного импульса. Затем эти интегралы нарастают при пробегании области максимальных значений напряженности поля этого импульса и достигают своего максимального значения с задержкой по отношению к максимуму лазерного импульса. После прохождения лазерного импульса эти интегралы убывают от своего максимального значения по экспоненциальному закону $e^{-\eta\tau}$. Очень высокие усиления стоксова импульса могут быть рассчитаны при этих нестационарных условиях путем применения асимптотического представления бесселевой функции мнимого аргумента $J_1(y) \rightarrow (1/\sqrt{2\pi y})e^y$; для коэффициентов усиления мощности получается

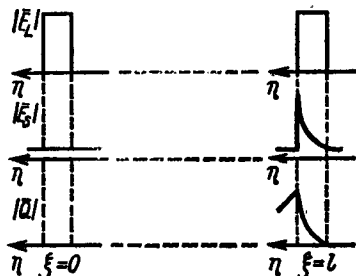
$$\ln \left| \frac{\bar{E}_S(\eta)}{\bar{E}_{S0}} \right|^2 \approx 2 \sqrt{4\beta\xi} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' |\bar{E}_L(\eta')|^2. \quad (3.22-20)$$

Для вычисления максимального значения коэффициента усиления можно, не допуская большой ошибки, заменить верхний предел интегрирования на бесконечность; в самом деле, максимальное усиление наступает только после лазерного максимума, во время прохождения заднего фронта лазерного импульса. Таким образом, максимальное усиление пропорционально корню квадратному из лазерной энергии и из длины образца. В случае прямоугольного лазерного импульса уравнение (3.22-20) принимает вид

$$\ln \left| \frac{\bar{E}_S(\eta)}{\bar{E}_{S0}} \right|^2 = 2 \sqrt{4\beta\xi} |\bar{E}_L|^2 \eta. \quad (3.22-21)$$

Следовательно, коэффициент усиления пропорционален корню квадратному из длины образца, лазерной интенсивности и времени. В этой связи полезно еще раз напомнить, что при стационарных условиях получается ре-

зультат $\ln(|\bar{E}_s|^2|\bar{E}_{s0}|^{-2}) = 2\beta|E_L(\eta)|^2\tau\xi$, т. е. совсем другая зависимость. На фиг. 65 представлено временное поведение \bar{E}_L , \bar{E}_s и \bar{Q} для прямоугольного лазерного импульса в различных точках кюветы для комбинационного рассеяния. Видно, что амплитуда поляризации достигает своего максимума в конце лазерного импульса и затем убывает по экспоненциальному закону. Этот



Фиг. 65. Зависимость амплитуд лазерной и стоксовой напряженности поля, а также макроскопических значений поляризуемости от $\eta = t - \frac{z}{v}$ в начале ($\xi = 0$) и в конце ($\xi = l$) кюветы для комбинационного рассеяния.

вывод согласуется с результатами, полученными в начале данного раздела при изучении комбинационно накачанной среды в пренебрежении обратным действием на световые импульсы. Напротив, стоксова амплитуда по окончании лазерного импульса возвращается к значению \bar{E}_{s0} и, следовательно, не обнаруживает релаксационных свойств. При лазерных импульсах с крутыми фронтами получаются стоксовы импульсы более короткие, чем лазерные импульсы. При $\tau_L \approx \tau$ из точного измерения формы стоксова импульса можно определить время релаксации τ , в частности, путем измерения ширины и запаздывания максимума по отношению к максимуму лазерного импульса. Соответствующие методы применялись, в частности, для решения эквивалентной проблемы нестационарного стоксова усиления в случае вынужденного бриллюэновского и релеевского рассеяний, для которых подлежащие измерению времена

находятся в более благоприятной области с точки зрения достижимой точности измерений (см., например, [3.22-14, 3.22-2, 3.1-11]).

Если необходимо принять во внимание быстрые изменения фазы (модуляции или флуктуации) входного излучения, то, вообще говоря, исходное уравнение (3.22-16) придется решать численно. Однако уже на основании качественных соображений можно показать, какому дополнительному влиянию подвергнется усиление интенсивности стоксовой волны; усиление обнаруживает некоторые флуктуации, аналогичные флуктуациям волны накачки, и возрастает в среднем медленнее, чем при усилении в поле лазерного импульса с постоянной фазой и с той же длительностью. При очень высоких усилениях эти коэффициенты усиления сближаются [3.22-13].

Проблема возникновения стоксова излучения в генераторе при нестационарных условиях может быть исследована при помощи представленного здесь полуклассического метода, если ввести в рассмотрение флуктуационные силы, как это уже было описано и обосновано в пп. 3.123 и 3.162; но в данном случае флуктуации атомной системы вносят существенный вклад. Квантовое решение нестационарной проблемы содержится в работах [3.22-15—3.22-17] и приводит к результатам, которые служат дальнейшим оправданием полуклассического подхода. В указанном смысле мы прибавим в правой части первого уравнения системы (3.22-16) флуктуационный член G , пропорциональный введенной в п. 3.162 величине F' . Он должен обладать свойством

$$G(\eta, \xi) G(\eta', \xi') = g \delta(\eta - \eta') \delta(\xi - \xi').$$

Если положить $\bar{Q}(\eta = 0, \xi) = 0$ и $\bar{E}_s(\eta, \xi = 0) = 0$, то для стоксовой амплитуды получится следующее решение (ср. [3.2-2]):

$$\begin{aligned} \bar{E}_s = & -i \frac{\mu_0 \omega_s^2}{4k_s} \bar{E}_L(\eta) \int_0^\eta d\eta' e^{-\eta'/\tau} \int_0^\xi d\xi' G(\eta - \eta', \xi - \xi') \times \\ & \times J_0[\sqrt{4\beta\xi\xi'}(\eta - \eta', \eta)], \quad (3.22-22) \end{aligned}$$

или для $|\bar{E}_S|^2$:

$$|\bar{E}_S|^2 = g \frac{\mu_0^2 \omega_S^4}{16k_S^2} |\bar{E}_L(\eta)|^2 \int_0^\eta d\eta' e^{-2\eta'/\tau} \int_0^\xi d\xi J_0^2[\sqrt{4\beta\xi\xi}(\eta - \eta', \eta)].$$

Из структуры этого решения явствует, что изменения фазы лазерной волны (фазовые флуктуации или модуляции) не влияют на интенсивность стоксовой волны (в отличие от случая усиления), однако спектр стоксова излучения претерпевает изменения.

Для предельно нестационарных условий ($\tau_L \ll \tau$) отсюда получаем

$$|\bar{E}_S|^2 \sim \frac{1}{\sqrt{4\beta\xi\eta} |\bar{E}_L|^2} e^2 \sqrt{4\beta\xi\eta} |\bar{E}_L|^2,$$

т. е. закон нарастания стоксовой интенсивности, подобный закону в случае усиления.

При очень малых лазерных интенсивностях из уравнения (3.22-22) для спонтанного рассеяния следует

$$|\bar{E}_S(\eta)|_{\text{сп}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 \omega_S^2}{4k_S} \right)^2 g \tau |\bar{E}_L|^2 \xi (1 - e^{-2\eta/\tau}) \quad (3.22-23)$$

(откуда видно, что стоксово излучение нарастает со временем) и для $\tau_L \gg \tau$ и $\tau_L > \eta \gg \tau$, т. е. для квазистационарного возбуждения, имеем

$$|\bar{E}_S(\eta)|_{\text{сп}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 \omega_S^2}{4k_S} \right)^2 g \tau |\bar{E}_L|^2 \xi. \quad (3.22-24)$$

Сравнивая это выражение с соотношениями для спонтанной стоксовой интенсивности в разд. 3.16, можно определить множитель g .

Влияние дисперсии среды

В заключение настоящего раздела обсудим влияние дисперсии (линейной) среды, которым мы до сих пор пренебрегали.

Проще всего рассмотреть случай квазистационарного возбуждения ($\tau_L \gg \tau$); в качестве результата для плотности потока фотонов J_S получим из уравнения (3.22-7)

(если можно пренебречь изменением населенностей и преобразованием лазерного излучения)

$$J_S = J_{S0} e^{C_V \int_0^\xi d\xi' J_L(\eta_{\pm} - v_{\pm} \xi')}, \quad (3.22-25)$$

где

$$\eta_{\mp} = t \mp \frac{z}{v_S} \quad \text{и} \quad v_{\mp} = \frac{1}{v_L} \mp \frac{1}{v_S}.$$

(Индексы $-$ и $+$ относятся к рассеянию вперед и назад.) Можно заключить, что после прохождения лучом некоторой характеристической длины

$$l_{\mp} = \frac{\tau_L}{v_{\mp}} \quad (3.22-26)$$

усиление стремится к значению насыщения, так как стоксов и лазерный импульсы больше не перекрываются и поэтому стоксов импульс больше не усиливается. Кроме того, можно усмотреть, что для рассеяния назад нестационарное поведение выражено гораздо более отчетливо; этот вывод согласуется также с экспериментальными результатами.

Из известных данных по дисперсии для типичных сред и из уравнения (3.22-26) следует, что для не слишком больших длин ($l \approx 10^{-1}$ м) нелокальные нестационарные процессы играют существенную роль только для очень коротких импульсов ($\leq 10^{-9}$ с). Но для таких импульсов в первую очередь должны быть учтены также локальные нестационарные процессы, вследствие чего рассмотрение оказывается очень трудным (см. [3.22-13] и [3.2-2]). Процесс рассеяния вперед при нормальной дисперсии, в отсутствие фазовой модуляции и при $\tau_L \ll \tau$ качественно может быть описан следующим образом. На начальном участке комбинационной кюветы существенны только локальные нестационарности, и возникают обстоятельства, описанные в начале настоящего раздела (фиг. 65), т. е. стоксов импульс сначала существенно возрастает в максимуме лазерного импульса и обнаруживает некоторое запаздывание по отношению к лазерному импульсу. Затем вследствие его высо-

кой групповой скорости стоксов импульс смещается относительно лазерного импульса вперед и обгоняет его по мере возрастания длины кюветы. Но в этом случае все еще продолжается генерация стоксова излучения, так как лазерный импульс пробегает области, в которых молекулы возбуждены. Благодаря этому в конце концов развивается стоксов импульс, распространяющийся синхронно с лазерным импульсом и нарастающий с ростом пространственной координаты по экспоненциальному закону. Коэффициент усиления приближенно задается выражением

$$\sqrt{4} |\bar{E}_L|^2 \beta \xi \tau_{гр},$$

где

$$\tau_{гр} = \xi \left| \frac{1}{v'_L} - \frac{1}{v'_S} \right|.$$

В случае аномальной дисперсии стоксов импульс отстает от лазерного импульса. Для $\xi > \tau_L (1/v'_S) - (1/v'_L)$ стоксова интенсивность тогда не зависит от ξ . Максимальный коэффициент усиления равен $\sqrt{4} |\bar{E}_L|^2 \beta \xi \tau_L^{-1}$.

В случае фазовой модуляции волны накачки в диспергирующей среде эффективность процесса существенно зависит от того, смогут ли в ходе усиления установиться благоприятные значения для фазы стоксовой волны. Длина l_A , на которой вследствие процесса усиления формируется стоксова волна с благоприятной фазой, определяется выражением

$$l_A \approx \frac{\Delta\omega_L}{\beta |\bar{E}_L|^2},$$

$\Delta\omega_L$ — ширина полосы лазерного излучения. В этом можно убедиться, если обратить внимание на то, что в соответствии с первым уравнением (3.22-16) для коротких, модулированных по фазе лазерных импульсов с шириной полосы $\Delta\omega_L$ и для стоксовой амплитуды \bar{E}_{S0} на входе создается амплитуда поляризуемости

$$|\bar{Q}| \approx \frac{1}{2\hbar} |\alpha_{10}|^2 \gamma |\bar{E}_L| |\bar{E}_{S0}| \frac{1}{\Delta\omega_L}.$$

Выполняя процесс итераций, эту величину амплитуды $|\bar{Q}|$ следует подставить во второе уравнение системы, и тогда для амплитуды усиленной волны с наиболее благоприятным соотношением между фазами получается выражение $|\bar{E}_{S0}| + \mu_0 \omega_S^2 / 4k_S |\bar{Q}| |\bar{E}_L| z$. Длина l_A определяется условием $(\mu_0 \omega_S^2 / 4k_S) |\bar{Q}| |\bar{E}_L| l_A \approx |\bar{E}_{S0}|$. С другой стороны, при случайных флуктуациях фазы лазера, приводящих к ширине полосы $\Delta\omega_L$, разрушается определенное фазовое соотношение между стоксовой и лазерной волнами на длине

$$l_z = \frac{\pi}{\Delta\omega_L \left[\frac{1}{v'_L} - \frac{1}{v'_S} \right]}.$$

Следует заметить, что l_z может быть существенно короче длины $\tau_L (1/v'_L - 1/v'_S)^{-1}$, на которой импульсы полностью разбегаются. Таким образом, эффективность стоксовой генерации существенно зависит от отношения l_z/l_A , которое определяет, установится ли благоприятное соотношение фаз между волнами.

§ 3.3. ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ КОГЕРЕНТНОСТИ НА ПРОТЕКАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Мы обсудим взаимосвязи различных нелинейных процессов — многофотонное поглощение, параметрическое усиление, процессы рассеяния, нелинейные процессы при пассивной синхронизации мод — с когерентными свойствами [3.3-5, 6, 3.2-2]. Конкретно, в разд. 3.32 будут освещены следующие проблемы: влияние когерентности на атомные вероятности переходов, пространственно-временное изменение когерентных свойств поля излучения при нелинейных процессах, когерентность в связи с нестационарным поведением и разграничение областей применимости классического и квантового описаний. Но прежде чем можно будет перейти к этим проблемам, необходимо рассмотреть такие свойства падающего излучения, которые определяют когерентность; это сделано в разд. 3.31 (см. также [1.-6]).

3.31. Когерентные свойства падающего излучения

Обсуждение статистических и когерентных свойств падающего излучения распространяется как на стационарный, так и на нестационарный режимы.

3.31.1. Стационарный режим

В случае стационарного режима мы можем в основном исходить из ранее сделанных объяснений.

В разд. 1.22 было показано, что *хаотическое излучение* следует рассматривать как важный предельный случай. Свойства этого излучения полностью определяются требованием, чтобы энтропия поля принимала максимальное значение при дополнительном условии постоянства среднего числа фотонов в различных модах. Заключение о свойствах многомодовой системы легко вывести из свойств одномодовой системы, поэтому в дальнейшем мы будем ориентироваться на одномодовую систему. Оператор плотности может быть взят из уравнения (1.22-17). Квазивероятность $\mathcal{P}(\beta)$, применяемая при представлении с помощью глауберовских состояний, задана в уравнении (1.31-25a); отсюда следует, что фазы комплексных амплитуд распределены равномерно, тогда как модули этих амплитуд распределены нормально, т. е. имеют гауссово распределение. Нормально упорядоченная корреляционная функция $\Gamma^{(m,n)}(x_1, \dots, x_{m+n})$ [ср. уравнение (1.33-14)] обращается в нуль при $m \neq n$, а в остальных случаях представима с помощью корреляционной функции низшего порядка.

Другим предельным случаем служит *идеализированный лазер*, который в предположении постоянной фазы (аргумент комплексного числа α) характеризуется оператором плотности $|\alpha\rangle\langle\alpha|$, а его квазивероятностью является двумерная дельта-функция $\delta^2(\alpha - \beta)$ [ср. уравнение (1.31-25b)]. В смысле данного в разд. 1.33 определения когерентности это излучение следует рассматривать как полностью когерентное. Если отказаться от предположения о стабилизированной фазе и допустить равномерно распределенные фазы, то

в качестве квазивероятности получим

$$\mathcal{P}(\beta) = \frac{1}{\pi} \delta(|\alpha|^2 - |\beta|^2); \quad (3.31-1)$$

если считать β комплексной напряженностью поля, то это распределение соответствует представленному на фиг. 6 для случая бесконечно малой толщины кольца.

Хотя названные предельные случаи могут служить некоторыми отправными пунктами, для достаточно точного описания эффектов необходимо анализировать излучение реального лазера. Полуклассическое описание реального лазера содержится в разд. 3.12, в котором для учета квантовой природы процессов были введены флуктуационные силы. Эта нелинейная теория, позволяющая описать выходную мощность и ширину линии, оказывается весьма плодотворной также и для описания статистических свойств. Результатом этой теории было получение уравнения (3.12-32) для определения зависящей от времени компоненты напряженности поля в резонаторе. В принципе из этого уравнения можно вывести статистические свойства напряженности поля и различные корреляционные функции. Однако при данной форме уравнения (3.12-32) или (3.12-27) и при заданных характеристиках появляющихся флуктуационных сил оказывается более целесообразным для расчета перейти к уравнению Фоккера — Планка. В данном случае речь идет о дифференциальном уравнении в частных производных для вероятности найти в момент времени t комплексную нормированную амплитуду напряженности поля a в определенном интервале значений [3.3-4,1-6]. Путем подходящего выбора единиц для координат можно добиться того, чтобы в дифференциальное уравнение входил только безразмерный параметр накачки $\bar{\rho}$, заданный уравнением (3.12-40). В стационарном случае как важный результат получается распределение W интенсивности I лазерного излучения. Функция WI_0 однозначно зависит от нормированной интенсивности $\mathfrak{R} = I/I_0$ и от параметра накачки $\bar{\rho}$, где I_0 — средняя интенсивность у порога ($\bar{\rho} = 0$); если $\mathfrak{R} < 0$, то $W \equiv 0$. Следует различать три области. Достаточно далеко ниже порога ($\bar{\rho} \leq -2$) имеем в хо-

рошем приближении

$$W(\mathfrak{R}; \tilde{\rho}) \sim \exp\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \tilde{\rho} \mathfrak{R}\right]. \quad (3.31-2)$$

Это выражение показывает, что при значении параметра накачки, достаточно низком по отношению к пороговому, квадрат модуля амплитуды убывает по экспоненциальному закону; это означает нормальное распределение для амплитуды, т. е. лазерное излучение имеет в этом случае гауссов характер. У порога ($\tilde{\rho} = 0$) распределение имеет вид

$$W(\mathfrak{R}; \tilde{\rho}) \sim \exp\left[-\frac{\mathfrak{R}^2}{\pi}\right]. \quad (3.31-3)$$

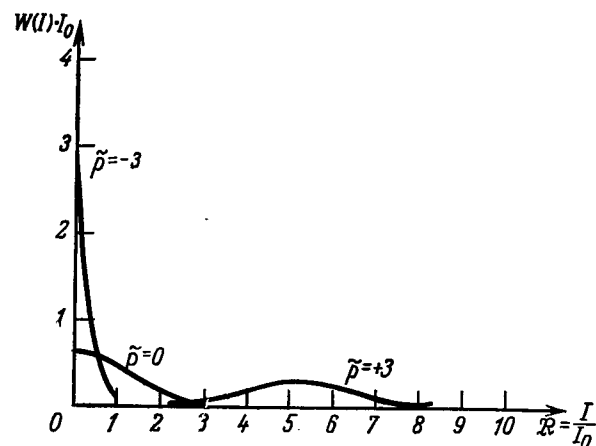
Наконец, при достаточном превышении порога

$$W(\mathfrak{R}; \tilde{\rho}) \sim \exp\left[-\frac{4\tilde{\rho}}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{\mathfrak{R}} - \pi^{1/4}\sqrt{\tilde{\rho}})^2\right]. \quad (3.31-4)$$

Следовательно, модуль амплитуды ($\sim \sqrt{\mathfrak{R}}$) подчиняется в данном случае преимущественно гауссовому распределению относительно центра $\pi^{1/4}\sqrt{\tilde{\rho}}$; однако для малых $\sqrt{\mathfrak{R}}$ гауссово распределение несколько нарушено, ибо $W \equiv 0$ для $\mathfrak{R} < 0$. Мы можем заключить, что величина $\sqrt{\pi^{1/2} \ln 2} \tilde{\rho}^{-1/2}$ носит характер полуширины распределения, так что при возрастающем $\tilde{\rho}$ распределение принимает вид дельта-функции, а именно функции $\delta(I - \bar{I})$, где \bar{I} есть средняя интенсивность. Это свидетельствует о том, что при достаточном превышении порога представленная в разд. 1.31 суперпозиционная модель [ср. уравнение (1.31-25в) и фиг. 19] служит пригодным описанием для излучения реального лазера. Для значений $\tilde{\rho} = -3; 0; +3$ распределения показаны на фиг. 66.

Приведенные результаты были подтверждены в экспериментах со счетом фотонов. В согласии с теоретическими предсказаниями был обнаружен переход от распределения Бозе — Эйнштейна (для отрицательных $\tilde{\rho}$) к распределению Пуассона при возрастающих $\tilde{\rho}$. При счете частиц было найдено, что нормированная дисперсия $(\Delta N)^2/\bar{N}$ превышает единицу, но с возрастанием $\tilde{\rho}$

стремится к значению, равному единице распределения Пуассона. Свойства корреляционных функций высшего порядка (например, третьего порядка по интенсивности) были также определены из представленной в



Фиг. 66. Распределение интенсивностей $W(I)$ излучения лазеров в стационарном режиме для значений $-3; 0; +3$ параметра накачки $\tilde{\rho}$.

I_0 — средняя интенсивность при $\tilde{\rho} = 0$.

разд. 3.12 полуклассической нелинейной теории и находятся в согласии с экспериментальными данными [3.3-1].

3.312. Нестационарный режим

Если при описании стационарного или квазистационарного режима можно было пользоваться представлением об одномодовом лазере, то для лазеров, условия излучения которых изменяются в течение коротких промежутков времени, т. е. для лазеров, работающих в нестационарном режиме, необходимо исходить из многих продольных мод. Существенные изменения в испускании излучения возможны только в течение времени порядка $(m\Omega)^{-1}$, где m — число принимающих участие в

процессе мод и Ω — разность частот двух соседних мод. Когерентные свойства таких лазеров определяются как статистическими свойствами отдельных мод, так и статистическими свойствами, характеризующими суперпозицию мод. Если эти лазеры работают далеко выше порога, то мы можем исходить из классического описания и воспользоваться полученными выше результатами для одномодового лазера. Тогда электрическое поле следует задать в форме

$$E(t) = \sum_{j=1}^m |\hat{E}_j| e^{i[\omega_j t + \varphi_j]} + \{KK\} \quad (3.31-5)$$

с вещественной частотой ω_j и вещественной фазой φ_j . Частота j -й моды связана со

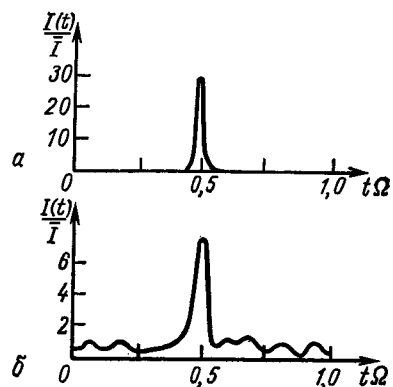
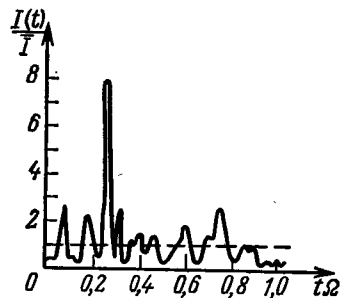
Фиг. 67. Временной ход интенсивностей для несвязанных мод.

средней частотой лазерного перехода ω_c соотношением

$$\omega_j = \omega_c + \frac{\Omega}{2} (2j - m - 1) \quad (3.31-6)$$

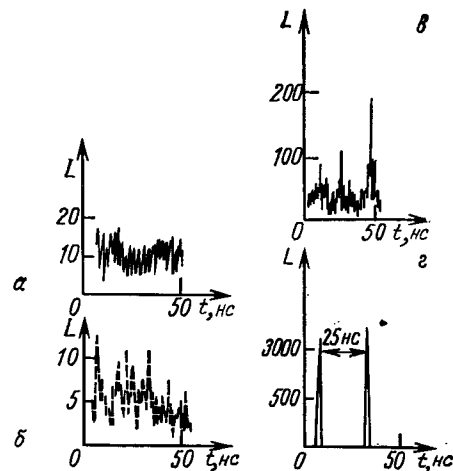
(в предположении, что одна из модовых частот совпадает с ω_c).

В зависимости от соотношения между фазами отдельных волн многомодовый лазер может работать в различных режимах (ср. [3.2-2]). В одном случае, при несинхронизированных модах (свободно бегущие волны), фазы различных волн независимы друг от друга и распределены равномерно в интервале $(-\pi, +\pi)$. При $m \gg 1$ получается гауссово распределение интенсивности. Корреляционная ширина равна $(m\Omega)^{-1}$. На фиг. 67 представлен рассчитанный пример временного хода интенсивности (отнесенной к средней интенсивности I) при $m = 30$; в этом примере принято, что модули амплитуд напряженности поля равны для всех мод. В другом случае в результате применения активных или пас-



Фиг. 68. Временной ход относительной интенсивности для различных степеней связанности мод.

a — полностью связанные моды; *b* — частично связанные моды.



Фиг. 69. Стадии возникновения цугов пикосекундных импульсов по [3.31-1].

Фотометрическая расшифровка снимков фотоэлектрического регистратора. *a* — 1200 нс, *b* — 900 нс, *v* — 600 нс, *z* — 300 нс перед максимумом цуга импульсов.

сивных элементов внутри лазерного резонатора все или некоторые моды могут быть связаны между собой; оба типа взаимодействия между модами связаны с нелинейными эффектами при генерации импульсного излучения (пассивная связь между модами подробнее описана в разд. 3.32). При полной синхронизации мод возникает вполне определенное соотношение между фазами всех мод в форме $\varphi_j = \varphi_c + \zeta_j$ (при постоянных φ_c и ζ_j). В простейшем случае все фазы равны, т. е. сконцентрированы в одной точке фазового интервала ($-\pi, +\pi$). Пример соответствующего распределения интенсивности приведен на фиг. 68, а, причем снова принято, что $m = 30$. Пример случайного распределения фаз в интервале ширины π показан на фиг. 68, б. В эксперименте часто встречается случай, когда только часть мод полностью или частично синхронизирована, в то время как другая их часть, в другом частотном интервале, не синхронизирована.

На фиг. 69 приведен экспериментальный пример различных хронологически следующих стадий воздействия синхронизации мод при формировании ультракоротких импульсов [3.31-1]; если вначале интенсивность носит характер гауссова шума, то затем вследствие нелинейного процесса взаимодействия мод возникает цуг эквидистантных пикосекундных импульсов.

3.32. Взаимосвязь между когерентными свойствами и однофотонными и многофотонными процессами

Прежде чем обратиться к многофотонным процессам, представляется целесообразным с методической точки зрения сначала изучить явление на однофотонных процессах. В среде с потерями изменение когерентного состояния падающего света может произойти уже при однофотонных процессах, тогда как в непоглощающих веществах распределение фотонов по состояниям с фиксированным числом частиц остается неизменным; сказанное справедливо, если в среде можно пренебречь многофотонными процессами, в особенности некогерентным рассеянием. При возникновении многофотонных процессов статистические свойства света, вообще гово-

ря, изменяются, и притом независимо от того, обладает среда потерями или нет. Можно указать на общую причину этого явления: вследствие нелинейного взаимодействия фотоны определенных мод уничтожаются, тогда как другие моды, наоборот, порождаются. Это и влечет за собой изменение статистического распределения.

3.321. Однофотонный процесс

Рассмотрим взаимодействие света с системой двух-уровневых атомов. Будем считать, что между состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ возможен дипольный переход. Пусть далее разность энергий соответствует энергии фотонов входной моды излучения $\hbar\omega$. Тогда оператор взаимодействия системы в дипольном приближении и в приближении вращающейся волны (см. разд. 2.22) имеет вид

$$\hat{H} = \sum_j \eta' b_{2j}^+ b_{1j} E^{(-)}(r_{j.}) + \{HA\}. \quad (3.32-1)$$

Здесь η' есть матричный элемент перехода; b_{2j}^+ , b_{1j} — операторы рождения и уничтожения состояний $|2\rangle$ и $|1\rangle$ j -го атома; $E^{(-)}(r_{j.})$ есть отрицательно-частотная компонента напряженности поля в месте нахождения j -го атома; этот оператор содержит оператор уничтожения для фотонов с частотой ω . При исследовании взаимодействия с излучением мы примем, что соблюдается так называемое необратимое приближение, т. е. что начальное распределение (тепловое распределение) атомов не изменяется существенно под действием излучения. Следовательно, если вначале, т. е. при $t = 0$, полный оператор плотности может быть представлен в виде $\rho(0) = \rho_A(0)\rho_F(0)$ (произведение множителей, соответствующих атомам и полю излучения), то при $t > 0$ должно соблюдаться соотношение $\rho(t) = \rho_A(0)\rho_F(t)$. Можно построить уравнение движения отдельно для $\rho_F(t)$, если в уравнении для полного оператора плотности ρ образовать след по отношению к атомной парциальной системе; при этом следует указать, что процедура аналогична примененной в п. 3.113, хотя там

парциальные системы имели другой физический характер.

Для обсуждаемого однофотонного процесса результат может быть представлен в очень наглядной форме [3.32-1]. Если в момент включения взаимодействия поле излучения описывается квазивероятностью $\mathcal{P}(\beta)$, то ко времени $t > 0$ возникает суперпозиция двух полей, определяемых квазивероятностями

$$\mathcal{P}_{\text{вын}}(\beta; t) = \mathcal{P}(\beta \exp \{[\chi(\gamma_2 - \gamma_1) - i\omega]t\}) \quad (3.32-2a)$$

и

$$\mathcal{P}_{\text{неког}}(\beta; t) = [\pi \langle N(t) \rangle]^{-1} \exp \{-|\beta|^2 \langle N(t) \rangle^{-1}\}. \quad (3.32-2b)$$

При этом среднее число фотонов определяется выражением

$$\langle N(t) \rangle = \gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1)^{-1} [\exp \{2\chi(\gamma_2 - \gamma_1)t\} - 1], \quad (3.32-3)$$

где $\chi \sim |\eta'|^2$ и γ_1, γ_2 — равновесные населенности состояний $|2\rangle$ и $|1\rangle$. Выражение в уравнении (3.32-2a) представляет собой изменение поля излучения в результате вынужденных процессов, а именно поглощения и вынужденного излучения; все амплитуды β умножаются на один и тот же множитель, что означает только преобразование β -пространства при фиксированной форме \mathcal{P} -функции. Поэтому можно сказать, что при вынужденных однофотонных процессах когерентные свойства в основном сохраняются. Функция $\mathcal{P}_{\text{неког}}$ представляет некогерентное поле излучения со средним числом фотонов $\langle N(t) \rangle$, создаваемое некогерентным испусканием. Эта компонента поля может играть роль только при условии, что равновесная населенность γ_2 отлична от нуля.

3.322. Многофотонное поглощение

Сначала рассмотрим *вероятность перехода* атомной системы («атома») из основного состояния $|1\rangle$ в возбужденное состояние $|2\rangle$ в результате одновременного поглощения нескольких (n) фотонов. Существенные результаты могут быть продемонстрированы уже на примере двухфотонного поглощения, и они легко обобщаются на случай $n > 2$. Применяя теорию возмущений, зависящих от времени (см. разд. В.2.21), получаем

при учете существенных для двухфотонного поглощения членов (см. разд. 2.22 и 3.13) формулу для вероятности того, что в результате двухфотонного поглощения атом находится в возбужденном состоянии:

$$W^{(2)}(t) = \int_0^t dt'_1 \int_0^{t'_1} dt'_2 \int_0^{t'_2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \Psi_A^*(t'_1, t'_2) \Psi_A(t_1, t_2) \times \\ \times \text{Sp} \{ \rho_F(0) \mathbf{E}^{(+)}(t'_1) \mathbf{E}^{(+)}(t'_2) \mathbf{E}^{(-)}(t_1) \mathbf{E}^{(-)}(t_2) \}. \quad (3.32-4)$$

Здесь $\rho_F(0)$ есть состояние поля излучения в момент включения $t = 0$. Операторы напряженности поля относятся к месту нахождения атома. Функция Ψ_A содержит характеристические свойства атома — все переходные матричные элементы и энергии переходов. При выводе мы воспользовались дипольным приближением и приближением вращающейся волны, а для того, чтобы подчеркнуть *нелинейные* свойства, мы игнорировали векторный характер применяемых величин (о дальнейших подробностях см. [3.32-2]). Величины $\mathbf{E}^{(\pm)}(t)$ представляют собой положительно-частотную и отрицательно-частотную компоненты операторов напряженности поля в представлении Гейзенберга в месте нахождения атома. Очевидно, что $W^{(2)}(t)$ зависит от нормально упорядоченной корреляционной функции $\Gamma^{2,2}(t'_1, t'_2, t_1, t_2)$. При применении теории возмущений, зависящих от времени, в n -м порядке получим для n -фотонного поглощения

$$W^{(n)}(t) = \dots \int_0^t dt'_1 \dots \int_0^{t'_1} dt_1 \dots \Psi_A^*(t'_1, \dots, t'_n) \times \\ \times \Psi_A(t_1, \dots, t_n) \times \\ \times \Gamma^{(n,n)}(t'_1, \dots, t'_n). \quad (3.32-5)$$

$W^{(n)}(t)$ повышается или понижается в зависимости от когерентного состояния, определяемого функцией $\Gamma^{(n,n)}$. С другой стороны, по известному значению $W^{(n)}(t)$ можно через $\Gamma^{(n,n)}$ получить информацию о когерентном состоянии. При обычных предположениях (стационарность полей, выполнение условий временной крупнозернистости) (см. разд. В.2.26) можно по значению $W^{(n)}(t)$

определить не зависящую от времени вероятность перехода. В случае квазимонохроматических полей (ширина линий мала по сравнению с обратным временем жизни конечного состояния) в предположении n -кратного поглощения фотонов из одной моды получается

$$\frac{dW^{(n)}}{dt} \sim \langle (a^+)^n a^n \rangle = \begin{cases} n! \langle a^+ a \rangle^n & \text{для хаотического} \\ & \text{излучения,} \\ (a^+ a)^n & \text{для когерентного} \\ & \text{излучения,} \end{cases} \quad (3.32-6)$$

где a^+ , a — операторы рождения и уничтожения рассматриваемой моды; для вычисления $\langle (a^+)^n a^n \rangle$ следует обратиться к уравнению (1.22-17) и п. 1.314. Результаты для состояний различной степени когерентности сильно различаются между собой и зависят от средней интенсивности $\langle a^+ a \rangle$. Вероятность переходов в единицу времени для хаотического излучения, к которому принадлежит также и тепловой свет при одной и той же средней интенсивности, в $n!$ раз больше соответствующей величины когерентного света, находящегося в глауберовском состоянии; приближенно такой свет реализуется как лазерное излучение (ср. фиг. 66). Эти свойства основаны на том, что интенсивность хаотического излучения дает более значительные отклонения от ее среднего значения $\langle a^+ a \rangle$, чем лазерный свет. При многофотонном поглощении положительное отклонение создает большую разность относительно средней вероятности переходов, чем такое же по величине отрицательное отклонение; поэтому средний нелинейный отклик на тепловое излучение превосходит отклик на лазерный свет, причем в обоих случаях предполагается одна и та же средняя интенсивность.

Теперь мы рассмотрим изменение свойств поля излучения под влиянием многофотонного поглощения. В принципе мы можем применять метод, аналогичный подходу при однофотонном процессе (п. 3.321): при применении оператора взаимодействия из полного оператора на основе необратимого приближения путем образования следа по переменным атомной системы выводится определяющее уравнение отдельно для опера-

тора плотности ρ_F поля излучения. В качестве оператора взаимодействия теперь используется [см. уравнение (3.32-1) и следующие за ним разъяснения] оператор

$$\mathbf{H} = \sum_j \eta^{(n)} b_{2j}^+ b_{1j} E^{(-)}(r_j) \dots E^{(-)}(r_j) + \{HA\}. \quad (3.32-7)$$

При этом для простоты снова принимается, что поглощение происходит из одной моды. Для полевого оператора плотности получается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_F = -\eta^{(n)} \{ \gamma_1 [(a^+)^n a^n \rho_F - 2a^n \rho_F (a^+)^n + \rho_F (a^+)^n a^n] + \\ + \gamma_2 [a^n (a^+)^n \rho_F - 2(a^+)^n \rho_F a^n + \rho_F a^n (a^+)^n] \}. \quad (3.32-8)$$

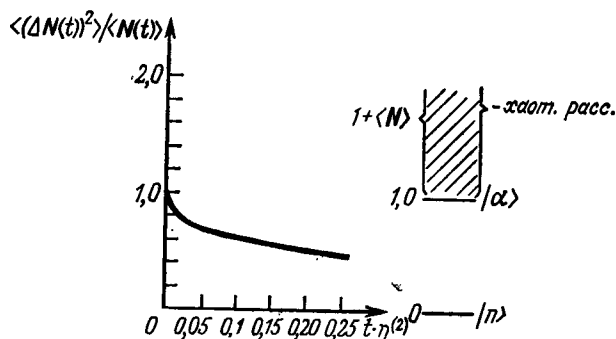
Величина $\eta^{(n)}$ пропорциональна $|\eta^{(n)}|^2$ и пропорциональна функции формы линии, как в уравнении (3.13-16). Получающиеся нормальные и антинормальные члены приводят к нормально и антинормально расположенным корреляционным функциям, если сформировать математические ожидания. Из уравнения (3.32-8) выводятся определяющие уравнения для $\partial/\partial t \langle a \rangle_t$, $\partial/\partial t \langle a^+ a \rangle_t$ и т. д.; для зависящего от времени математического ожидания числа фотонов справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle a^+ a \rangle_t = 2n\eta^{(n)} \{ -\gamma_1 \langle (a^+)^n a^n \rangle_t + \gamma_2 \langle a^n (a^+)^n \rangle_t \}. \quad (3.32-8a)$$

Первый член в фигурных скобках представляет поглощение, а второй — антинормально расположенное вынужденное и спонтанное излучение. Следует заметить, что при математическом анализе уравнения (3.32-8) успешно используется функционал рождения [3.32-1], однозначно характеризующий ρ_F .

Замкнутые решения этих дифференциальных уравнений в настоящее время неизвестны. Поэтому решение осуществляется на основе численного расчета (см. [3.3-5, гл. 3.1]). В предположении, что в момент времени $t=0$ все атомы находятся в основном состоянии и что поле в этот момент времени обладает распределением Пуассона, была определена нормированная дисперсия $\langle [\Delta N(t)]^2 \rangle / \langle N(t) \rangle$ для распределения фотонов

при двухфотонном поглощении, причем было принято $\langle N(0) \rangle = 10$. Результат представлен на фиг. 70. Нормированная дисперсия убывает с возрастанием времени, что находится также в качественном согласии с другими расчетами [3.32-3]. Роль этой временной зависимости станет ясной, если ее сравнить с показанными в правой части фиг. 70 значениями дисперсии для некоторых фундаментальных распределений. Кривая распо-



Фиг. 70. Временная зависимость нормированной дисперсии при двухфотонном поглощении.

ложена между значениями для глауберовского состояния $|\alpha\rangle$ и состояния Фока $|n\rangle$. Таким образом, двухфотонное поглощение не проявляет тенденции к хаотическим свойствам, а в большей степени приводит к состояниям с фиксированным числом частиц. Заметное отклонение от глауберовского состояния наступает уже после того, как будет достигнуто значение, равное $1/10$ от $1/\eta^{(2)}$. При $t \rightarrow \infty$ получаем $\langle N(t) \rangle \rightarrow 0$ и возникает особое фокковское состояние, а именно вакуумное состояние.

Изменение когерентных свойств при распространении света через многофотонный поглотитель представляет большой интерес как с точки зрения основополагающих аспектов, так и благодаря применениям. Проведенные нами до сих пор рассуждения относятся к пространственно замкнутой области, а именно к объему основной области периодичности или к полости, ограничен-

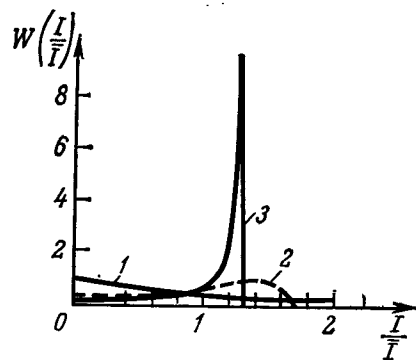
ной идеально отражающими стенками (см. п. 1.121). Теперь следует рассмотреть обстоятельства в различных, пространственно разделенных парциальных объемах, которым следует приписать соответствующие локализованные операторы. В качестве «носителей» свойств когерентности особое значение имеют операторы плотности. Между операторами в различных парциальных объемах возникают определенные пространственно-временные отношения. Однако если пространственно-временные отношения между средними числами фотонов в парциальных объемах можно задать и вычислить сравнительно просто [ср. методику при выводе уравнения (3.16-65)], то нахождение решений для локализованных операторов связано с большими трудностями. Приближенная трактовка проблемы для излучения высокой интенсивности основывается на том, что математические ожидания чисел фотонов и квантовые корреляционные функции можно заменить классическими значениями интенсивности и соответственно классическими корреляционными функциями. В качестве результата таких рассуждений получается общее высказывание для многофотонного поглощения о том, что при прохождении излучения через многофотонный поглотитель снижаются флуктуации интенсивности и достигается ее стабилизация; этот эффект тем более отчетливо выражен при прочих равных условиях, чем выше порядок нелинейного процесса. Такое положение находится в соответствии с разъяснением к уравнению (3.32-6).

Опираясь на описанный выше классический способ рассмотрения, исследуем один простой пример, важный для практических применений. Пусть входной сигнал с интенсивностью $I(z=0)$ флуктуирует по закону Гаусса и в соответствии с этим удовлетворяет распределению вероятностей

$$W[I(0)] dI(0) = \frac{1}{I(0)} \exp\left[-\frac{I(0)}{I(0)}\right] dI(0), \quad (3.32-9)$$

где $I(0)$ следует измерять во времена, короткие по сравнению с временем корреляции сигнала. Это допущение о гауссовом поведении оправдано не только для тепловых источников света, но также для лазеров, из-

лучающих с большим числом мод с некоррелированными фазами (ср. разд. 3.31). Время корреляции подобных лазеров определяется обратным значением ширины генерируемой полосы. Предстоит исследовать изменения такого сигнала в многофотонном поглотителе, причем мы будем предполагать, что время памяти поглотителя мало по сравнению со временем корреляции τ_c сигнала. В эксперименте это удастся осуществить путем



Фиг. 71. Распределение интенсивностей на входе (кривая 1) в кювету и после прохождения через двухфотонный поглотитель (кривая 2) или трехфотонный поглотитель (кривая 3).

выбора среды с соответствующим временем релаксации и путем выбора интенсивности входного излучения. При этих условиях каждое мгновенное значение входной интенсивности $I(0, t)$ приводит к выходному сигналу $I(l, t)$ в конце кюветы при $z = l$, определяемому формулами

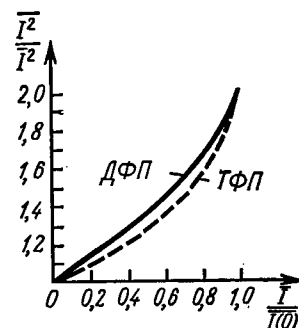
$$I(l, t) = \frac{I(0, t)}{1 + \sigma^{(2)} \gamma I(0, t) l} \quad (3.32-9a)$$

для двухфотонного поглотителя (ср. уравнение (3.13-22)) и

$$I(l, t) = \frac{I(0, t)}{[1 + 2\sigma^{(3)} \gamma I^2(0, t) l]^{1/2}} \quad (3.32-9b)$$

для трехфотонного поглотителя. Из этих соотношений можно определить $I(0, t)$ как функцию от $I(l, t)$; под-

ставляя затем ее в $W[I(0)]$, мы получаем распределение вероятностей как функцию выходной интенсивности. На фиг. 71 показано распределение вероятностей на входе в кювету (кривая 1) и на выходе из двухфотонного поглотителя (кривая 2) или из трехфотонного поглотителя (кривая 3), рассчитанное при одинаковой эффективной прозрачности $I(l)/I(0) = 0,27$ (ср. [3.32-9] и [3.3-5]). Видно, что стабилизирующее интенсивность действие трехфотонного процесса выражено очень отчетливо; излучение на выходе из этого поглотителя обнаруживает малые флуктуации от средней интенсивности и имеет характер лазерного излучения выше порога [ср. объяснения к (3.31-4)]. На фиг. 72 показана зависимость нормированной корреляционной функции $\overline{I(t)I(t+\tau)}/\overline{I}^2$ для $\tau = 0$ [что соответствует отношению $\langle (a^+)^2 a^2 \rangle / \langle a^+ a \rangle^2$ из уравнения (3.32-6)] для излучения на выходе из двухфотонного поглотителя и из трехфотонного поглотителя от прозрачности $I/I(0)$.



Фиг. 72. Зависимость величины $\overline{I^2}/\overline{I}^2$ от прозрачности $I/I(0)$ для двухфотонного (ДФП) и трехфотонного (ТФП) поглотителей.

Кривые подтверждают сильное влияние излучения на когерентные свойства. Подходящие многофотонные поглотители с достаточно большими эффективными сечениями, могут быть реализованы с веществами, у которых встречаются промежуточные резонансы, а времена релаксации между всеми актуальными уровнями малы по сравнению со временем релаксации для излучения (ср. разд. 3.13, фиг. 61 и [3.3-5]).

3.323. Параметрическое усиление и преобразование частот

Аналогичные последовательности преобразования частот и параметрического усиления (ср. разд. 3.14 и 3.15) оказываются процессами, благоприятными для совмест-

ного рассмотрения с точки зрения их влияния на когерентные свойства.

Параметрическое усиление связано с распадом фотона накачки на сигнальный фотон и фотон холостой волны. При изложении основных представлений об этом явлении в п. 3.151 мы принимали, что падающая лазерная волна (волна накачки) может описываться как зависящее от времени c -число. Наряду с главной временной зависимостью $\exp(-i\omega_p t)$ была учтена фазовая флуктуация лазерной волны согласно закону $\exp[i\varphi_p(t)]$. Далее было принято, что лазерная волна заметно не ослабляется и поэтому возможен расчет с постоянным во времени модулем ее амплитуды.

В п. 3.152 мы производили оценки для идеализированного лазерного света, т. е. считали фазу φ_p постоянной. Теперь мы рассмотрим влияние когерентных свойств в реальном лазере. Это означает учет фазовых флуктуаций в явном виде, но флуктуации амплитуды, напротив, приниматься во внимание не будут (ср. п. 3.124). При этих предположениях дифференциальные уравнения (3.15-5а, б) уже не могут быть решены в замкнутой форме. Однако можно найти численные решения, если предположить, что фазовые флуктуации являются «медленными» по сравнению с временными коэффициентами усиления ν_0 . Это условие можно выразить неравенством

$$\left| \frac{d\varphi_p}{dt} \right| \ll \nu_0. \quad (3.32-10)$$

Оно означает [ср. уравнение (3.15-6)] при заданной функции $\varphi_p(t)$ допущение, что модуль константы взаимодействия $\eta^{(пв)}$ и амплитуда волны накачки достаточно велики. В предположении неравенств

$$\left| \frac{d\varphi_p}{dt} \right|^2, \quad \left| \frac{d^2\varphi_p}{dt^2} \right| \ll \nu_0^2 \quad (3.32-10a)$$

можно найти решения для зависящих от времени амплитудных операторов $(a_{s,l})_H$ и операторов числа частиц $(N_{s,l})_H$, причем $\varphi_p(t)$ должна играть роль заданной функции. При выполнении решения следует сначала образовать квантовомеханические математические

ожидания и затем последние снова усреднить, так как необходимо учесть, что $\varphi_p(t)$ возникает в результате стохастического процесса — фазового шума; в качестве случайной переменной выступает $\omega \equiv d\varphi_p/dt$. Согласно концепции мгновенной частоты, ω означает мгновенное отклонение от центральной частоты ω_p . Можно принять, что ω удовлетворяет гауссову распределению (со среднеквадратичным по ансамблю значением $\overline{\omega^2}$). Для расчета потребуется также знать распределение $\omega^2(t)$, однако оно не является гауссовым. При заданных выше приближениях оказывается реалистичным характеризовать распределение случайных переменных характеристической функцией, в которой участвуют моменты до второго порядка. В качестве существенного результата [3.32-4] этих вычислений получается уменьшение временного коэффициента усиления по закону

$$2\nu_0 \rightarrow 2\nu_0 \left(1 - \frac{\overline{\omega^2}}{2\nu_0^2} \right) \quad (3.32-10б)$$

при переходе от идеализированного лазерного света к реальному лазерному свету. Следовательно, определяющим для этого уменьшения является такое свойство волны накачки, как средний квадрат мгновенного отклонения частоты, отнесенный к интенсивности.

По такой же схеме можно исследовать влияние медленных флуктуаций фазы на *преобразование частот*. Мы рассмотрим случай повышенной сигнальной частоты (процесс ап-конверсии), для которого

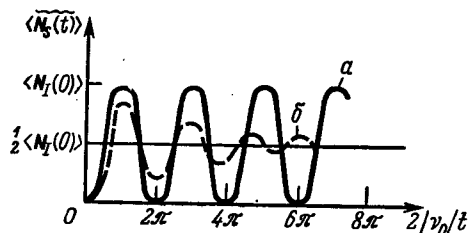
$$\omega_s = \omega_p + \omega_l. \quad (3.32-11)$$

Если волну накачки можно рассматривать как идеализированный лазерный свет, то уравнения движения дают для $\langle N_s(t) \rangle$ такие решения, при которых с периодической временной зависимостью (период равен π/ν_0) происходит полный обмен энергией между сигнальной и холостой волнами (кривая а на фиг. 73). При медленных флуктуациях фазы степень эффективности обмена энергией убывает с течением времени, так что при достаточно длительном времени наблюдения и взаимодействия достигается равномерное распределение сиг-

нальных фотонов и фотонов холостой волны (кривая *б* на фиг. 73). С этим эффектом связано сокращение длительности периода по закону

$$\frac{\pi}{\nu_0} \rightarrow \frac{\pi}{\nu_0} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\nu_0^2}}$$

Следует упомянуть, что в случае быстрых фазовых флуктуаций, для которых приближение (3.32-10) больше не соблюдается, необходимо воспользоваться другим



Фиг. 73. Временная зависимость числа сигнальных фотонов без фазовых флуктуаций (кривая *а*) и с фазовыми флуктуациями (кривая *б*).

теоретическим подходом. Поскольку существует соотношение между оператором плотности поля излучения и квазивероятностью $\mathcal{P}(\beta)$ [ср. уравнение (1.31-30)], то можно от уравнения движения (B2.15-9) для оператора плотности перейти к уравнению движения для зависящей от времени функции $\mathcal{P}(\beta; t)$ [3.32-5]. Этот метод особенно удобен при вычислении статистических моментов и корреляционной функции поля.

3.324. Вынужденные процессы рассеяния

Очень поучительный пример влияния свойств когерентности может быть приведен для вынужденного антистоксова рассеяния; основные представления о нем даны в разд. 3.16. В предположении, что поле излучения состоит из глауберовских состояний волны накачки, стоксовой и антистоксовой волн и что в соответствии с

этим результирующее состояние поля характеризуется выражением

$$|\Phi_F\rangle = |\alpha_P\rangle |\alpha_S\rangle |\alpha_A\rangle, \quad (3.32-12)$$

получим в случае взаимодействия с системой одинаковых молекул следующую формулу для коэффициента усиления антистоксова излучения [3.32-6]:

$$g_A \sim \left\{ - \sum_j \left(\frac{\langle N_A \rangle}{\langle N_S \rangle} \right)^{1/2} (1 + \langle N_S \rangle^{-1}) - \sum_j \left(\frac{\omega_S}{\omega_A} \right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \cos [(2k_P - k_S - k_A) r_j + (2\varphi_P - \varphi_S - \varphi_A)] \right\}. \quad (3.32-13)$$

Здесь $\langle N_A \rangle$, $\langle N_S \rangle$ — средние антистоксовы и стоксовы числа фотонов; ω_A , ω_S — принадлежащие им частоты; r_j определяет положение j -й молекулы; k_P , k_S , k_A — волновые векторы трех волн; φ_P , φ_S , φ_A — фазы комплексных амплитуд. В направлении, выделяемом соблюдением закона сохранения импульса ($k_A \approx 2k_P - k_S$), может быть достигнуто необходимое для когерентного выходного излучения положительное значение g_A , если $\cos [2\varphi_P - \varphi_S - \varphi_A] < 0$; это требование вытекает из того, что оба слагаемых в фигурных скобках имеют отрицательные знаки. Если условие

$$k_A \approx 2k_P - k_S \quad (3.32-14)$$

не выполняется, то для неупорядоченных молекул второе слагаемое обращается в нуль. Неравенство

$$\cos [2\varphi_P - \varphi_S - \varphi_A] < 0 \quad (3.32-15)$$

может выполняться *только* для достаточно когерентных полей.

В п. 3.162 мы рассмотрели образование фотонных, фононных и поляритонных волн из шума. Но если там преимущественно была исследована на основании уравнения (3.16-65) эволюция средней плотности числа частиц, то теперь мы выдвинем на передний план свойства когерентности. На основании уравнения (3.16-59)

можно исходить из оператора взаимодействия

$$\hat{H} = -\hbar\eta \hat{a}_e^+ \hat{a}_2^+ \hat{a}_1 + \{HA\} \quad (3.32-16)$$

для описания процесса рассеяния на элементарных возбуждениях (фононах, фонон-поляритонах). Здесь \hat{a}_e^+ обозначает оператор рождения для одной моды возбужденных состояний; \hat{a}_1^+ , \hat{a}_2^+ обозначают операторы рождения фотонов в модах 1 и 2. Соответствующие частоты связаны соотношением $\omega_1 = \omega_e + \omega_2$, так что ω_2 играет роль стоксовой частоты. Представим себе, что две световые волны высокой интенсивности и высокой когерентности падают на кристалл. При математическом анализе операторы $(\hat{a}_{1,2})_H$ в представлении Гейзенберга могут быть заменены, согласно соотношению

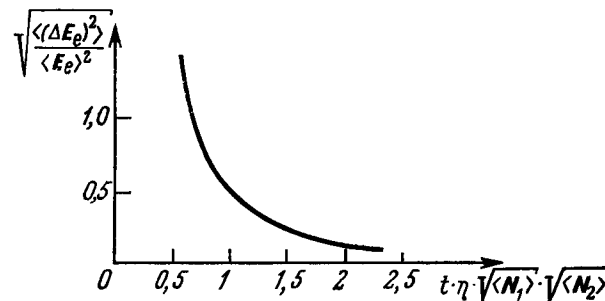
$$(\hat{a}_{1,2})_H \rightarrow \alpha_{1,2} \exp[-i\omega_{1,2}t],$$

c -числом; при этом $\alpha_{1,2}$ должны быть постоянными комплексными числами, характеризующими амплитуды и фазы падающих волн (этот метод аналогичен примененному к волне накачки в п. 3.151). Будем считать, что в момент времени $t=0$ включения взаимодействия состояние элементарного возбуждения характеризуется вакуумным состоянием. При этих предположениях в качестве решения для состояния элементарного возбуждения при $t > 0$ получается глауберовское состояние

$$|\psi_e(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle, \quad \text{где } \alpha(t) = i\eta t \alpha_1 \alpha_2^*. \quad (3.32-17)$$

Из этого результата возникает вопрос о возможности классического описания не только волн накачки, но и элементарного возбуждения (его электромагнитной и колебательной компоненты); с этим было бы связано то преимущество, что этот эксперимент по смешиванию двух лазерных волн можно было бы полностью описывать при помощи существенно более простого классического формализма вместо квантового. Проблема перехода от квантового к более простому классическому описанию возникает в связи со многими эффектами НЛО. Она допускает в известной степени свободный от произвола анализ, поскольку некоторые основопола-

гающие классические величины могут описываться их квантовомеханическими средними значениями. Поскольку классическая теория основывается на взаимосвязи между поляризацией и напряженностью поля и поскольку для описания эффектов применяется пространственно-временное разложение напряженности поля, то именно свойства напряженности поля должны быть исследованы также и на основе квантовой теории. Исходя из указанных в п. 1.321 решений проблемы собственных



Фиг. 74. Зависимость от времени средней относительной флуктуации напряженности поля, связанной с элементарным возбуждением.

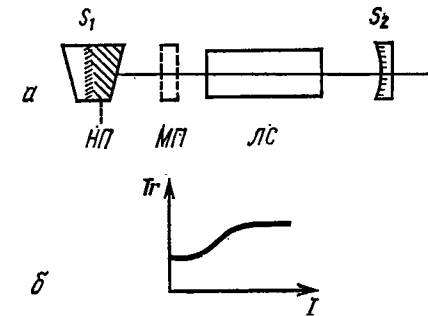
значений оператора напряженности электрического поля, можно сформулировать уравнение движения для оператора плотности с собственными состояниями напряженности электрического поля. Это даст возможность произвести свободное от произвола сравнение классических и соответствующих квантовомеханических величин и соотношений [1.32-1]. В стоящей перед нами специальной проблеме развития волны возбуждений в результате воздействия входного излучения двух лазерных волн хорошее проникновение в сущность явления достигается уже путем рассмотрения флуктуаций напряженности электрического поля (оператор E_e), принадлежащего элементарному возбуждению (ср. рассуждения о поляритонах в п. 3.162). На фиг. 74 представлена зависимость средней относительной флуктуации от времени. При малых t существуют большие флуктуации вследствие неизбежных квантовых флуктуаций. При

больших значениях t флуктуации стремятся к нулю, и в этой области связанное с элементарными возбуждениями электрическое поле можно в хорошем приближении рассматривать как заданную функцию времени, что характерно для классического описания. Нижняя граница интервала времени, в течение которого возможно классическое описание, убывает с возрастанием константы взаимодействия η и математических ожиданий чисел фотонов обеих волн.

3.325. Нелинейные процессы при пассивной синхронизации мод

В п. 3.312 было показано, что ультракороткие импульсы могут развиваться из статистических распределений интенсивности в многомодовом лазере, причем фазы отдельных мод могут иметь вначале случайное распределение. В специальной резонаторной схеме (см. фиг. 75, а) могут генерироваться пикосекундные импульсы в процессе усиления света и *нелинейного* поглощения. Процесс генерации можно разделить на несколько стадий. В самом начале интенсивность еще настолько низка, что усиление и поглощение могут считаться линейными. Правда, в общем непериодический ход интенсивности (см. фиг. 67) уже дополняется в некоторой области периодическими структурами с длиной периода $2L/c$ (L есть оптическая длина пути в резонаторе) вдоль прямого и обратного хода. С возрастанием интенсивности становится заметным нелинейное поведение насыщаемого поглотителя; поглощение этого однофотонного поглотителя убывает с возрастанием интенсивности I , так как убывает разность населенностей верхнего и нижнего уровней вследствие перекачки. Поэтому в процессе усиления главную роль играют максимумы интенсивности, тогда как малые значения интенсивностей являются несущественными. Из сильного максимума интенсивности поглотитель после своего насыщения уже ничего не «заглатывает» (см. характеристику прозрачности на фиг. 75, б). Таким образом, при возрастающем усилении импульс встречает «нормальные» лазерные условия, благодаря чему на дальнейшей стадии в конце концов наступает про-

цесс уменьшения усиления вследствие снижения инверсии в активной среде. Устанавливается стабильный уровень интенсивности (ср. также п. 3.122); в течение промежутка времени $2L/c = 2\pi/\Omega$ могут в конце концов сниматься импульсы, возникшие из *одного* пика флуктуирующего распределения интенсивности [Ω -частота из уравнения (3.31-6)]. Наглядное представление этой стадии показано для выходного сигнала на фиг. 69.



Фиг. 75. Схема установки для генерации пикосекундных импульсов (а) и характеристика насыщаемого поглотителя (НП) (б).

S_1, S_2 — зеркала; МП — многофотонный поглотитель; ЛС — лазерная среда.

Для практического эффективного использования упомянутого процесса необходимо овладеть следующими явлениями. Фактически при статистическом характере начального распределения интенсивностей могут возникать и усиливаться многие пики интенсивности, так что создаются доминирующий импульс и побочные импульсы. Упомянутое выше снижение инверсии под действием доминирующего импульса уменьшает усиление не только этого же импульса, но и побочных импульсов, что в свою очередь можно использовать для дискриминации последних. Для хорошей временной селекции отдельных импульсных пиков требуются насыщаемые поглотители со временем релаксации, малым по сравнению с такими промежутками времени, в течение которых происходят существенные изменения интенсивности; согласно п. 3.312, следует считать, что это

время имеет порядок величины $(m\Omega)^{-1}$. При очень высоких интенсивностях на процесс генерации пикосекундных импульсов могут влиять изменения показателя преломления; изменения частот и фаз вызывают изменения временной структуры, а самофокусировка создает изменение пространственной структуры импульсов. Дополнительные нелинейные элементы, например двухфотонные поглотители и эффективные трехфотонные поглотители (см. фиг. 71), могут использоваться для подавления побочных импульсов и для стабилизации [3.32-7, 3.32-8].

Глава 4

ПОСЛЕСЛОВИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ

В настоящей книге представлены важные методы описания взаимодействия электромагнитных полей с атомными системами; эти методы применяются к избранным конкретным процессам НЛО. При изложении самих методов и в примерах, иллюстрирующих их применения, на передний план выдвигались квантовофизические аспекты рассматриваемых явлений. Мы не ставили перед собой цель достичь полноты описания расчетных методов и охватить все области НЛО. Мы стремились лишь в рамках требований, предъявляемых к учебнику, продемонстрировать общую методологию на примерах, часто при упрощающих предположениях, и таким образом открыть читателю путь к оригинальной литературе. Книга должна дать читателю возможность понимать различные другие явления НЛО, изучать специальную литературу и самостоятельно в ней разбираться. Мы надеемся, что читатель приобрел способность освоения новых методов, их классификации с общей точки зрения и применения их к конкретным проблемам.

В этом смысле мы хотели бы в дальнейшем со ссылками на более углубленные литературные данные остановиться на методах и процессах НЛО, которые в данной книге до сих пор не рассматривались в явном виде или только вкратце затрагивались. Кроме того, мы хотели бы привлечь внимание к таким направлениям развития НЛО, которые, на наш взгляд, в настоящее время вырисовываются. Мы отдаем себе отчет в трудностях, связанных с написанием этой главы. В самом деле, здесь неизбежно возникнет некоторая неоднозначность и частичная субъективность. Для ознакомления с про-

блемами развития НЛО мы хотели бы в особенности указать на материалы последних конференций по НЛО и по квантовой электронике [4.1, 4.-2—4.-6].

Метод решения уравнения движения для вектора состояния или для оператора плотности

Как следует из результатов гл. 3, типичные процессы взаимодействия излучения с атомными системами могут описываться с достаточной точностью при помощи методов теории возмущений, зависящих от времени. При этом последовательные приближения, приводящие к уравнениям (B2.21-11) и (B2.21-12), после некоторого конечного числа шагов обрываются. Такая возможность описания основана как на *структуре* важнейших характеристических соотношений между величинами, доступными измерению, так и на *количественных результатах*. Благодаря зависимости оператора взаимодействия от операторов рождения и уничтожения фотонов и от напряженности электрического поля применяемая методика позволяет также осуществить классификацию процессов по числу фотонов, участвующих в элементарном акте или по порядку величины определяющих компонент поляризации. Однако из разд. B2.21 следует, что результаты приближенного расчета такого рода могут быть поставлены под сомнение при сильных взаимодействиях, т. е. при высоких интенсивностях излучения, а также при больших длительностях взаимодействия.

В таких случаях стремятся решить основополагающие уравнения движения (B2.14-1) и (B2.15-9) при помощи методов, *не основанных на теории возмущений*. Важным примером таких методов служит теория естественной ширины линии *Вигнера и Вайскопфа* [3.11-1] (см. п. 3.112); в этой теории система дифференциальных уравнений, вытекающая из основополагающих уравнений, приближенно заменяется более простой системой; последняя приспособлена к конкретной проблеме и может быть решена с помощью применения преобразования Лапласа для больших времен. В других конкретных проблемах также удается получить из фундаментальных уравнений квантовой теории такие

математические соотношения, которые прямо приводят к решению; это становится возможным при специальных предположениях о временной зависимости действующего электрического поля (например, гармоническая временная зависимость) или об атомной системе (гармонический осциллятор, двухуровневая система). Другой метод заключается в вычислении оператора $U(t, t_0)$, определяющего временную эволюцию [см. уравнение (B2.14-2)]; с его помощью при заданном начальном состоянии также можно вычислить математические ожидания. В уравнении (B2.14-4) для U задан бесконечный ряд, возникший в результате проведения последовательных приближений. Исходя из физических характеристик рассматриваемого физического процесса, некоторыми членами этого ряда можно пренебречь, и тогда оставшийся частичный бесконечный ряд может быть просуммирован. Аналогичным образом можно поступать с величинами, предназначенными для представления временного поведения вектора состояния или оператора плотности, но находящимися в другой зависимости с гамильтонианом по сравнению с U . Здесь прежде всего следует назвать оператор Грина (или функцию Грина). Например, оказывается возможным для нелинейных оптических процессов рассеяния [4.-7, 4.-8] задать адекватное решение основополагающего уравнения движения в виде

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle + \int dt' \mathbf{G}(t-t') \overset{W}{\mathbf{H}} |\psi(t')\rangle.$$

Здесь \mathbf{G} есть сопоставленный гамильтониану свободной системы оператор Грина, а $\overset{W}{\mathbf{H}}$ — оператор взаимодействия. С такими представлениями и с соответствующим частотным представлением можно получить сравнительно простым способом общие уравнения для математических ожиданий некоторых наблюдаемых, причем структура этих уравнений может быть интерпретирована с физической точки зрения. Правда, в общем случае необходимые для этого операторы не имеют замкнутую форму, а представимы только с помощью рекуррентных формул или бесконечных рядов, так что и при этом подходе для конкретных процессов и условий

возникают расчетные проблемы и проблемы сходимости. Сказанное справедливо также и для применения резольвент [представление Лапласа для $U(t, t_0)$], которые можно выразить через бесконечные операторные цепные дроби [4.-9, 4.-10].

В общем можно сказать, что методы, не основанные на теории возмущений, могут успешно применяться для ряда проблем, для исправления результатов, полученных в рамках этой теории, и для описания различных дополнительных эффектов. При использовании высоких интенсивностей излучения, что соответствует современным возможностям, в значительной мере усиливается взаимное влияние атомной системы и поля излучения, благодаря чему возникает более сильное отклонение от поведения «свободной» системы. Это происходит, например, в случае зависящего от интенсивности изменения функции формы линии.

Геометрия распространения света в нелинейных оптических средах (самофокусировка, пленение, фазовая автомодуляция)

Влияние геометрии распространения волн монохроматического света в нелинейных оптических средах может быть интерпретировано в квантовой теории элементарного акта взаимодействия как многофотонный процесс. Так, например, в результате четырехфотонного рассеяния из двух падающих фотонов с одинаковыми частотами и различными волновыми векторами k_1, k_2 могут возникнуть два разбегающихся фотона с теми же самыми частотами и с двумя изменившимися волновыми векторами k_3, k_4 . Этому процессу следует сопоставить оператор взаимодействия (ср. разд. 2.22)

$$\hat{H} = \eta^{\text{ста}} a_4^+ a_3^+ a_2 a_1 + \{HA\}$$

с операторами рождения и уничтожения фотонов для мод одинаковой частоты, но с неравными волновыми векторами. С этим оператором можно определить при помощи теории возмущений математические ожидания для величин, характеризующих поля излучения входящих и выходящих волн.

Распространение света может происходить как благодаря параметрическому рассеянию, так и вследствие рассеяния на различных квазичастицах среды (например, фононах), возбуждаемых при вынужденных процессах. При этом, правда, не все влетающие и вылетающие фотоны имеют одну и ту же частоту, но различия в частотах могут быть очень малыми и поэтому не разрешаются при наблюдении. Эти последние процессы рассеяния идентичны элементарным актам в активной спектроскопии (см. п. 3.161).

Влияние нелинейностей среды на геометрические характеристики распространения света оказывается эффективным лишь при относительно высоких интенсивностях; при этих интенсивностях свет может, вообще говоря, описываться на классической основе. Поэтому обсуждение может быть построено на методах, описанных в ч. 1, § 4.1. Соответствующие восприимчивости можно заимствовать из эксперимента или рассчитать квантовомеханически в рамках полуклассической трактовки (см. § 2.3). Для интерпретации экспериментальных результатов обсуждаются вклады различных процессов в нелинейную восприимчивость в их зависимости от свойств среды и световых волн [4.-11]. Этими восприимчивостями можно воспользоваться для определения изменения показателя преломления под действием облучающего света. Проблемы распространения света в среде с зависящим от интенсивности показателем преломления исследуются при помощи методов классической оптики в рамках как волновой, так и геометрической оптики [4.-12].

В последние годы достигнуто более углубленное понимание распространения света в нелинейных оптических средах. Это стало возможным в результате проведения экспериментов при вполне определенных условиях, например при возбуждении лазерами в одномодовом поперечном и продольном режимах с применением улучшенной измерительной техники. Той же цели послужили также расчеты, соответствующие реальным экспериментальным условиям [4.-13, 4.-14, 4.-11.2].

Самофокусировка и самодефокусировка были достигнуты в лазерном излучении, непрерывном во вре-

мени; эти процессы удалось возбудить как при тепловых эффектах, так и при насыщении аномальной дисперсии в парах металлов при их облучении светом, близким к резонансному. Как и следовало ожидать на основании теоретических соображений, на высокочастотной стороне по отношению к резонансу происходила фокусировка, а на низкочастотной — дефокусировка; в этих экспериментах впервые наблюдались стационарные световые нити (self-trapping).

Если входное излучение имеет характер световых импульсов, то обстоятельства усложняются, так как свойства самофокусировки становятся зависящими от времени через напряженность поля. Поэтому в среде возникают блуждающие фокусы; за их движением можно следить при помощи фотоэлектронного регистратора. Но и в этих сложных условиях было получено хорошее согласие между экспериментальными и теоретическими результатами [4.-14].

Самофокусировка и самодефокусировка подвержены сильному влиянию других нелинейных процессов, например вынужденного комбинационного и бриллюэновского рассеяний, а также параметрических эффектов. Но это влияние является взаимным. В целом вопрос о границах световых пучков и об их дифракции играет важную роль в нелинейных взаимодействиях [4.-3].

Рассматривая влияние геометрических условий распространения света в среде, укажем еще на явление фазовой автомодуляции световой волны [4.11]. Она обусловлена нелинейным эффектом зависимости показателя преломления от напряженности поля и изменяет когерентные свойства света и форму коротких импульсов, а также влияет на эффективность нелинейных процессов, зависящую от относительных фаз волн.

*Взаимодействия излучений на поверхностях,
а также в тонких слоях и в неоднородных средах*

На основе изложенных микроскопических процессов взаимодействия можно описать, кроме объемных эффектов в однородных газах, жидкостях и твердых те-

лах, также оптические поверхностные явления и эффекты в неоднородных средах.

Важные нелинейные эффекты на граничных поверхностях, такие как генерация гармоник, суммарных и разностных частот при отражении, наблюдались и были рассчитаны уже в начале 60-х годов [2, 5]. Были даны общие формулы для нелинейного отражения и преломления на граничной поверхности между линейной изотропной и нелинейной анизотропной средами. В частности, для оптически одноосных кристаллов были сделаны численные оценки [4.-15]. Позднее были исследованы генерация гармоник, суммарных и разностных частот, а также и другие параметрические процессы (ср. разд. 3.14 и 3.15) в тонких слоях и в волноводах.

В вышеназванных процессах специфика поверхностных эффектов касается в первую очередь электромагнитного поля, которое складывается из падающих и отраженных волн, а среда не приобретает никаких особых поверхностных свойств. Но в последние годы в большей степени были исследованы такие взаимодействия с излучением, которые основаны на специфических поверхностных свойствах среды. В окрестности граничной поверхности в среде существуют квазичастицы, свойства которых отличаются от свойств квазичастиц внутри среды. Примерами могут служить поверхностные фононы и экситоны, обуславливающие процессы, с помощью которых они могут быть изучены [4.-16]. Взаимодействие электромагнитных волн с определенными поверхностными квазичастицами влечет за собой (по аналогии с объемными эффектами) образование поверхностных поляритонов. В жидкостях было исследовано взаимодействие с вынужденными поверхностными волнами [4.-3].

В *неоднородных* средах возникают дальнейшие специфические явления взаимодействия, которые связаны как со свойством отдельных локализованных квазичастиц, так и со статистическим распределением неоднородностей [4.-17, 3.2-2]. Примесные частицы или структурные дефекты приводят при интенсивном облучении к изменению показателя преломления в области неоднородности, что в свою очередь создает амплитуду рассеяния, нелинейно зависящую от амплитуды возбуж-

дающего света; в соответствующих исследованиях [4.-18] было учтено влияние оптического эффекта Керра, электрострикции и разогрева. Эти исследования важны для выяснения устойчивости к излучению и для понимания ответственных за оптические разрушения механизмов, к которым относятся такие нелинейные оптические эффекты, как вынужденное бриллюэновское рассеяние и самофокусировка [4.-19].

Пространственная дисперсия

Отношение размеров l элементарных атомных систем к длине волны λ электромагнитных полей падающего излучения достаточно мало для того, чтобы можно было пренебречь влиянием пространственной дисперсии при многих процессах. С другой стороны, несмотря на малую величину этого отношения, пространственная дисперсия может вызывать *специфические* наблюдаемые явления взаимодействия, например, могут генерироваться волны с частотами или направлениями поляризации, которые в отсутствие пространственной дисперсии в спектре не появляются. Влияние пространственной дисперсии можно рассмотреть с помощью общих методов описания взаимодействия электромагнитных полей с атомными системами, представленных в § 2.1. Тогда получают описания, основанные на дипольном приближении (см. разд. 2.21). Зависимость поляризации от напряженности поля носит при этих условиях нелокальный характер:

$$P.(r., t) = \sum_{n=1} \int dV_1 \int d\tau_1 \dots \\ \dots \int dV_n \int d\tau_n \tilde{\chi}_{..}^n \dots (r_{1.}, \tau_1; \dots; r_{n.}, \tau_n) \times \\ \times E.(r. - r_{1.}, t - \tau_1) E.(r. - r_{n.}, t - \tau_n),$$

где $\tilde{\chi}_{..}^{(n)} \dots$ — обобщенные восприимчивости. По сравнению с уравнением (1.3-4) из ч. I здесь выступает, кроме зависимости от «предыстории», еще зависимость от «событий по соседству». Соответствующие соотношения в пространстве Фурье содержат частоты и волновые векторы участвующих полей; в соответствии с этим фурье-

образы обобщенных восприимчивостей зависят не только от частот, но и от волновых векторов. При слабой пространственной дисперсии напрашивается разложение оператора взаимодействия по степеням отношения l/λ . Первый член этого разложения содержит электрический дипольный член, а последующий член включает электрическое квадрупольное взаимодействие. При включении в расчет магнитной компоненты гамильтониана появляется магнитное дипольное взаимодействие [9]. Обзор эффектов, связанных с пространственной дисперсией, содержится в [4.-20].

Резонансное взаимодействие при высоких напряженностях поля

На основании методов, изложенных в гл. 2, можно последовательно квантотеоретически или полуклассически исследовать нелинейные процессы, в частности в резонансной области, а также при очень сильных полях, причем для этого следует применить *теорию возмущений высшего порядка или методы, не основанные на теории возмущений*. [Примером применения теории возмущений очень высокого порядка может служить расчет многофотонной ионизации (ср. п. 3.134).] Взаимодействие сильных электромагнитных полей с атомными системами может приводить к сильным сдвигам и уширениям уровней энергии; оно может также влиять на релаксационные процессы. Поэтому само взаимодействие атомной системы с волной накачки и с пробной волной качественно изменяется и становится зависящим от интенсивности накачки. Такие сдвиги уровней можно точно измерить при помощи средств спектроскопии высокого разрешения [3.1-7]. Влияние на релаксационные процессы обнаруживается, например, при вынужденном бриллюэновском рассеянии света высокой интенсивности [3.1-11].

Влияние на положение и форму резонансных линий и на релаксационные процессы сильно сказывается, между прочим, при ступенчатом возбуждении атомных систем [4.-2], которое играет важную роль при инициировании химических реакций и при разделении изотопов с помощью фотодиссоциации. Особенно интересные экс-

периментальные возможности предоставляют методы доплеровского резонанса, в которых на атомную систему действует несколько когерентных волн, находящихся в резонансе с различными атомными переходами [4.-1]. При этом иногда применяются когерентные волны из весьма различных спектральных областей, например комбинируются поля из микроволновой области с оптическими полями.

В конденсированных средах вследствие их сложной структуры при очень высоких напряженностях поля могут, вообще говоря, возникать многие нелинейные эффекты одновременно. Они воздействуют как на среду, так и на световые волны, что очень затрудняет интерпретацию результатов измерений.

Возбужденные излучением когерентные волновые процессы в конденсированных средах

В настоящей книге генерация когерентных возбужденных состояний в конденсированных средах была рассмотрена на примере оптических фононов и поляритонов (см. разд. 3.16 и § 3.2).

В поле интенсивных когерентных световых волн могут возникать различные другие возбуждения, которые сами воздействуют на поле излучения. Например, подобно оптическим фононам могут создаваться акустические фононы, температурные волны, волны энтропии и анизотропии, которые приводят к вынужденному бриллюэновскому рассеянию, вынужденному релеевскому рассеянию и рассеянию на крыле линии Релея. Эти явления рассеяния можно исследовать по аналогии с вынужденным комбинационным рассеянием, причем можно возвратиться к классическому или полуклассическому рассмотрению (ср. ч. I, § 4.3, [3.1-11 и 4.-21]).

При облучении двумя или несколькими когерентными световыми волнами могут возникать токи, временное поведение которых описывается суммой или разностью частот падающих световых волн; для свойств их распространения в пространстве важное значение имеют, наряду с симметрией кристалла, волновые векторы световых волн [5]. В случае двух волн это явление можно описать при помощи проводимости второго порядка, ко-

торая в специальных случаях может быть связана простым соотношением с оптической восприимчивостью второго порядка.

В процессах взаимодействия сильных полей с твердыми телами могут в одном резонансном процессе рождаться или уничтожаться одновременно несколько фотонов и квазичастиц в различных модах [4.-22]. Такое явление можно использовать для *единого описания* нелинейных процессов, в которых устанавливается взаимосвязь различных участвующих во взаимодействии возбуждений (например, экситонов, поляритонов, плазмонов) между собой и с принимающими участие в процессах фотонами. Следует отметить, что в этой области проводятся интенсивные теоретические и экспериментальные исследования [4.-23—4.-25]. Двухфотонное поглощение и генерация фотонов на суммарной частоте могут быть связаны с объединением двух поляритонов, т. е. с процессом их слияния. Вновь возникшая частица может быть «чистым» экситоном электронов твердого тела или поляритоном. При исследованиях были получены данные об угловой и частотной зависимостях процесса слияния поляритонов, об относительном количестве участвующих в этом процессе поляритонов и о свойствах результирующих поляритонов.

В эксперименте следует различать каскадные процессы генерации нескольких квазичастиц от истинных «многоквазичастичных» процессов. Измерение вероятностей генерации многих частиц позволяет судить о взаимодействии одинаковых или разнородных квазичастиц.

В парамагнитных материалах наблюдалось влияние порожденных бриллюэновским рассеянием фононов на парамагнитный электронный резонанс [4.-26].

Индукцированные светом фазовые переходы

Воздействие интенсивных световых волн может индуцировать в среде фазовые переходы; при этом достигаются состояния среды, недоступные при применении других методов. Усиленно исследуется генерация высоких концентраций экситонов в твердых телах при ее

облучении светом лазеров большой мощности, сопровождаемая процессом образования экситонных молекул и их конденсации; при ней, подобно конденсации реальных частиц из газовой фазы, в подходящих местах образуются «капельки» [4.-27, 4.-28].

Взаимодействие интенсивного света со свободными электронами и с плазмами

При рассмотрении многофотонной ионизации в п. 3.134 уже было указано на то, что возникшие в результате этого процесса свободные электроны претерпевают дальнейшие взаимодействия с сильными электромагнитными полями и что таким образом развиваются лавинные реакции.

При трактовке эффектов взаимодействия свободных электронов, а также заряженных частиц в плазмах можно исходить из методов, представленных в ч. I, § 2. Более подробные представления о теоретических исследованиях и об экспериментальных результатах можно найти в работах [4.-29, 4.-31, 4.-6]. Эти процессы взаимодействия представляют интерес для прикладных проблем, связанных с физикой плазмы, в особенности для проблемы индуцированного лазером слияния ядер, и, наконец, также для фундаментальных исследований свойств и поведения электронов при очень высоких напряжениях поля.

Нелинейные оптические процессы на коротких волнах

В последние два десятилетия развитие когерентных источников света, начавшееся с микроволновых генераторов, шло по пути проникновения в области все более коротких волн. С помощью газовых лазеров в настоящее время можно достичь длины волны почти 100 нм, а путем генерации гармоник можно получить еще более короткие волны (см. разд. 1.15). Наряду с переносом принципов генерации из радио- и микроволновой области в область оптических частот при этом переходе в новый спектральный диапазон применялись также другие экспериментальные схемы и методы описания:

В настоящее время усиленно исследуется экспериментально и теоретически проблема генерации коге-

рентного излучения в рентгеновской области [4.-1, 4.-2, 4.-32]; кроме того, существуют первые предложения принципа создания γ -лазера [4.-1, 4.-2]. Тем самым перед квантовой электроникой и перед нелинейной оптикой открываются совершенно новые спектральные области и качественно новые возможности. В этой связи следует указать на то, что уже сейчас, т. е. до построения первого γ -лазера, удалось доказать экспериментально существование нелинейных параметрических процессов.

Для дальнейшего развития НЛО особую роль играют спектроскопия высокого разрешения и активная спектроскопия (§ 3.1), нестационарные процессы (§ 3.2), когерентные явления (§ 3.3), а также процессы взаимодействия при специальных геометрических условиях связи волн и обратной связи; последнее важно вследствие возрастающего значения интегральной оптики. Эти направления НЛО дают в возрастающих масштабах качественно новые результаты и открывают новые горизонты в аналитической измерительной технике, при исследовании химических процессов и управления ими, в оптической метрологии, в обработке информации и в технике ее передачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

П1. К РАСЧЕТУ УСРЕДНЕНИЯ ПО ОРИЕНТАЦИЯМ

Макроскопические линейные и нелинейные оптические свойства, например восприимчивости ансамбля взаимодействующих или слабо взаимодействующих между собой молекул, вычисляются путем суммирования по вкладам отдельных молекул (§ 2.3). При этом вклады отдельных молекул зависят от их ориентации относительно лабораторной системы координат. Для идентичных отдельных молекул, имеющих различную ориентацию, суммирование по молекулам сводится к усреднению по существующим молекулярным ориентациям.

Вклад отдельной молекулы с заданной ориентацией простым образом зависит (см. разд. 2.34) от произведений переходных моментов $d_{k\alpha\beta}$ в лабораторной системе координат $k = x, y, z$. Величины $d_{k\alpha\beta}$ отличаются друг от друга в зависимости от ориентации каждой молекулы. Обычно заданными являются компоненты $d_{K\alpha\beta}$ в системе координат, связанной с молекулой $K = X, Y, Z$. Для вычисления вклада в восприимчивость одной произвольно ориентированной молекулы необходимо, следовательно, найти связь между произведениями переходных моментов в лабораторной и в молекулярной системах. Эта связь задается направляющими косинусами a_{kK} , так что, например,

$$d_k d_l = \sum_{K,L} a_{kK} a_{lL} d_K d_L. \quad (\text{П1-1})$$

(Для удобства записи греческие индексы в обозначениях матричных элементов, например α, β , опущены.) Отсюда следует, что при усреднении по ориентациям нужно усреднить произведения направляющих косину-

сов, например

$$\overline{d_k d_l}^0 = \sum_{K,L} \overline{a_{kK} a_{lL}}^0 d_K d_L. \quad (\text{П1-2})$$

Это усреднение выполняется просто для важного случая макроскопически изотропной системы, в которой все молекулярные ориентации равновероятны. Для этого случая имеем:

$$1. \quad \overline{a_{kK}}^0 = 0. \quad (\text{П1-3})$$

$$2. \quad \overline{a_{kK} a_{lL}}^0 = \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{KL}. \quad (\text{П1-4})$$

3. Отличны от нуля только такие средние значения тройных произведений, которые не содержат повторяющиеся индексы:

$$\begin{aligned} \overline{a_{xX} a_{yY} a_{zZ}}^0 &= \overline{a_{xY} a_{yZ} a_{zX}}^0 = \overline{a_{xZ} a_{yX} a_{zY}}^0 = -\overline{a_{xX} a_{yZ} a_{zY}}^0 = \\ &= -\overline{a_{xY} a_{yX} a_{zZ}}^0 = -\overline{a_{xZ} a_{yY} a_{zX}}^0 = \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (\text{П1-5})$$

4. Отличны от нуля только следующие средние значения произведений четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \overline{a_{kK}^4}^0 &= \frac{1}{5}, \\ \overline{a_{kK}^2 a_{lL}^2}^0 &= \overline{a_{kK}^2 a_{kL}^2}^0 = \frac{2}{15}, \\ \overline{a_{kK}^2 a_{lK}^2}^0 &= \frac{2}{15}, \\ \overline{a_{kK} a_{kL} a_{lK} a_{lL}}^0 &= -\frac{1}{30}. \end{aligned} \quad (\text{П1-6})$$

Для наглядности приведем два примера.

Представим себе, что в молекулярной системе координат отлична от нуля только одна компонента $K = X$ интересующего переходного момента. Тогда для поглощения или излучения фотона с поляризацией x, y или z определяющими являются величины:

$$|d_{x\alpha\beta}|^2 = |d_{y\alpha\beta}|^2 = |d_{z\alpha\beta}|^2 = \frac{1}{3} |d_{X\alpha\beta}|^2.$$

Если, наоборот, $d_{X\alpha\beta} = d_{Y\alpha\beta} = d_{Z\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}$, то получается

$$|d_{x\alpha\beta}|^2 = |d_{y\alpha\beta}|^2 = |d_{z\alpha\beta}|^2 = |d_{\alpha\beta}|^2.$$

Соответствующие рассуждения можно провести для двух- и многофотонных процессов (специальный случай, относящийся к вынужденному комбинационному рассеянию, был рассмотрен в ч. I, § П5).

П2. ВЫЧИСЛЕНИЕ И ОЦЕНКА ПЕРЕХОДНЫХ МОМЕНТОВ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ

Переходные моменты могут быть вычислены следующим образом (для упрощения мы здесь не принимаем во внимание вращение молекулы и ограничиваемся двухатомными молекулами). В так называемом адиабатическом приближении полную собственную функцию молекулы ψ_α можно записать в виде произведения электронной собственной функции ψ_{α_e} , заданной при фиксированном расстоянии между ядрами и параметрически зависящей от положения ядер, и функции ядерного движения (см., например, [П2-1]):

$$\psi_\alpha(r_i, R) = \psi_{\alpha_e}(r_i; R) \chi_{\alpha_e \alpha_K}(R), \quad (\text{П2-1})$$

где α_e, α_K — квантовые числа, характеризующие электронное состояние и состояние движения ядер; r_i символизирует совокупность электронных координат, а R есть расстояние между ядрами, т. е. $R = |R_1 - R_2|$. С полными функциями начального и конечного состояний вычисляется переходный момент $d_{\alpha\beta}$:

$$d_{\alpha\beta} = (\psi_\alpha | d. | \psi_\beta) = (\chi_{\alpha_e \alpha_K} (\psi_{\alpha_e} | d. | \psi_{\beta_e}) \chi_{\beta_e \beta_K}), \quad (\text{П2-2})$$

где

$$d. = -e \sum_i r_i. + e \sum_{j=1}^2 Z_j R_j. \quad (Z_j - \text{заряд ядра}).$$

Здесь круглые скобки обозначают построение матричных элементов путем интегрирования по соответствующему пространству координат. Выполняя сначала интегрирование по электронным координатам, получаем момент

$$d_{\alpha_e \beta_e}(R) = (\psi_{\alpha_e} | d. | \psi_{\beta_e}); \quad (\text{П2-3})$$

$d_{\alpha_e \beta_e}$ выражает зависимость дипольного момента фиксированного электронного состояния от положения ядер; если $\alpha_e \neq \beta_e$, то $d_{\alpha_e \beta_e}$ является соответствующим переходным электронным моментом.

Электронные переходы ($\alpha_e \neq \beta_e$)

Сделаем обычное хорошо выполняющееся предположение, что в окрестности равновесного положения ядер R^e электронный переходный момент лишь слабо зависит от R ; тогда полный переходный момент легко вычислить:

$$\begin{aligned} d_{\alpha\beta} &= \\ &= (\chi_{\alpha_e \alpha_K} | d_{\alpha_e \beta_e}(R) | \chi_{\beta_e \beta_K}) \approx \\ &\approx d_{\alpha_e \beta_e}(R^e) (\chi_{\alpha_e \alpha_K} | \chi_{\beta_e \beta_K}). \end{aligned} \quad (\text{П2-4})$$

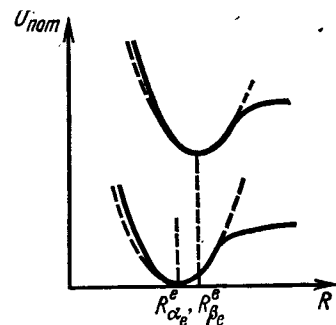
Интеграл перекрытия $(\chi_{\alpha_e \alpha_K} | \chi_{\beta_e \beta_K})$ называют

фактором Франка — Кондона. Мы вычислим этот фактор при упрощающих предположениях. На фиг. 76

представлены потенциальные кривые (т. е. молекулярные энергии при фиксированном расстоянии между ядрами как функции этого расстояния) для электронных состояний α_e и β_e . Штрихованные кривые являются квадратичными парабололами (гармоническое приближение!) одинаковой кривизны; их минимумы расположены при $R_{\alpha_e}^e$ и $R_{\beta_e}^e$, причем предполагается, что

$$|R_{\beta_e}^e - R_{\alpha_e}^e| \ll \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_M}}$$

($\sqrt{\hbar/2M\omega_M}$ есть корень квадратный из среднего квадратичного отклонения от равновесного положения в основном состоянии, или, иначе говоря, классическая нулевая колебательная амплитуда, деленная на $\sqrt{2}$; M —



Фиг. 76. Изображение потенциальных кривых двух электронных состояний.

приведенная масса, ω_M — частота осциллятора). При этих предположениях получается следующее разложение в ряд фактора Франка — Кондона по степеням $|R_{\beta_e}^e - R_{\alpha_e}^e|/\sqrt{\hbar/M\omega_M}$:

$$(\chi_{\alpha_e \alpha_K} | \chi_{\beta_e \beta_K}) = \begin{cases} 1 + O(1) [M\omega_M/\hbar] [R_{\beta_e}^e - R_{\alpha_e}^e]^2 & \text{для } \beta_K = \alpha_K, \\ \left[\frac{\alpha_K}{2} M\omega_M \hbar^{-1} \right]^{1/2} [R_{\beta_e}^e - R_{\alpha_e}^e] & \text{для } \beta_K = \alpha_K - 1, \\ \left[\frac{\alpha_K + 1}{2} M\omega_M \hbar^{-1} \right]^{1/2} [R_{\beta_e}^e - R_{\alpha_e}^e] & \text{для } \beta_K = \alpha_K + 1, \\ O(1) [M\omega_M/\hbar] [R_{\beta_e}^e - R_{\alpha_e}^e]^2 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (\text{П2-5})$$

(О деталях расчета см., например, [П2-1].) Из первой формулы видно, что для наиболее интенсивного электронно-колебательного перехода фактор Франка — Кондона по порядку величины равен единице. Для ближайших соседних электронно-колебательных переходов [строки 2 и 3 в (П2-5)] появляется множитель, имеющий порядок величины $[M\omega_M \hbar^{-1}]^{1/2} [R_{\beta_e}^e - R_{\alpha_e}^e]$ и понижающий значение фактора Франка — Кондона. Для всех остальных переходов он еще гораздо меньше. Конечно, эти результаты сильно зависят от применяемой нами специальной модели. Но более общие расчеты и экспериментальные данные подтверждают следующее.

1. Для наиболее интенсивных электронно-колебательных переходов фактор Франка — Кондона достигает значений порядка 1. (Но этот максимум не должен находиться, как в нашей модели, при $\beta_K = \alpha_K$.)
2. Для ближайших к наиболее интенсивному из переходов интеграл $(\chi_{\alpha_e \alpha_K} | \chi_{\beta_e \beta_K})$ приобретает множитель $\eta \simeq 10^{-1}$, на который умножается его максимальное значение, и, следовательно, вообще уменьшается приблизительно в 10 раз.

Если $\alpha_e \neq \beta_e$, то в $d_{\alpha_e \beta_e}$ исчезает член, составленный с ядерными координатами, и $d_{\alpha_e \beta_e}$ принимает вид

$$d_{\alpha_e \beta_e} = -e (\psi_{\alpha_e} | \sum_i r_i | \psi_{\beta_e}). \quad (\text{П2-6})$$

В частном случае одноэлектронной системы отсюда следует

$$d_{\alpha_e \beta_e} = -er_{\alpha_e \beta_e}. \quad (\text{П2-7})$$

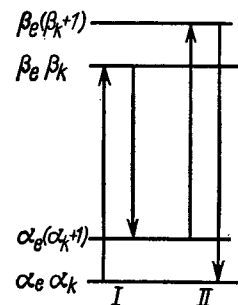
В дальнейших оценках мы ограничимся однокомпонентным представлением. Матричный элемент $r_{\alpha_e \beta_e}$ может принимать значения, имеющие порядок внутримолекулярного расстояния между ядрами, т. е. 10^{-10} м. Тогда для интенсивных электронных переходов получается (с фактором Франка — Кондона порядка 1)

$$d_{\alpha_e \alpha_K \beta_e \beta_K} \approx d_{\alpha_e \beta_e} \simeq 10^{-29} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}. \quad (\text{П2-7а})$$

В некоторых приложениях (в частности, в случае колебательного эффекта комбинационного рассеяния) появляются произведения переходных моментов чисто электронных переходов и соседних электронно-колебательных переходов следующего вида (фиг. 77):

$$\begin{aligned} & (\text{I}) \quad d_{\alpha_e \alpha_K \beta_e \beta_K} d_{\beta_e \beta_K \alpha_e (\alpha_K + 1)} \\ & \text{или} \\ & (\text{II}) \quad d_{\alpha_e (\alpha_K + 1) \beta_e (\beta_K + 1)} d_{\beta_e (\beta_K + 1) \alpha_e \alpha_K} \end{aligned}$$

Если принять, что в обоих произведениях (I) и (II) интеграл перекрывания Франка — Кондона в первом множителе достигает своего максимального значения и по порядку величины равен 1, то можно допустить, что вторые множители отличаются от первых множителем η , причем, как уже было сказано, в общем случае η имеет



Фиг. 77. Изображение электронно-колебательных переходов в четырехуровневой системе.

порядок 10^{-1} . Поэтому

$$d_{\alpha_e \alpha_K \beta_e \beta_K} d_{\beta_e \beta_K \alpha_e (\alpha_K + 1)} \approx d_{\alpha_e (\alpha_K + 1) \beta_e (\beta_K + 1)} d_{\beta_e (\beta_K + 1) \alpha_e \alpha_K} \approx |d_{\alpha_e \beta_e}|^2 \eta.$$

Отсюда следует оценка для этих произведений около $10^{-59} \text{ А}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2$. Для вычисления интенсивности линий в колебательном эффекте комбинационного рассеяния требуется знать матричные элементы поляризуемости следующего вида:

$$\alpha_{01}(-\omega_S, \omega_L) \approx \frac{1}{\hbar} \sum_{\beta} \left\{ \frac{d_{0\beta} d_{\beta 1}}{\omega_{\beta 0} + \omega_S} + \frac{d_{0\beta} d_{\beta 1}}{\omega_{\beta 0} - \omega_L} \right\}.$$

Индексы 0 и 1 здесь соответствуют значениям $(\alpha_e = 0, \alpha_K = 0)$ и $(\alpha_e = 0, \alpha_K = 1)$. В простой четырехуровневой модели β принимает два значения: $(\alpha_e = 1, \alpha_K = 0)$ и $(\alpha_e = 1, \alpha_K = 1)$. При большом удалении от однофотонного резонанса мы можем сделать оценку:

$$\alpha_{01}(-\omega_S, \omega_L) \approx \frac{4}{\hbar \omega_{\beta 0}} |d_{\alpha_e \beta_e}|^2 \eta.$$

При значении матричного элемента для чисто электронного перехода $d_{\alpha_e \beta_e} \approx 10^{-29} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$ из уравнения (П2-7а), при значениях $\eta \approx 10^{-1}$ и $\omega_{\beta 0} \approx 10^{16} \text{ с}^{-1}$ отсюда следует

$$\alpha_{01}(-\omega_S, \omega_L) \approx 10^{-41} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}^{-1}.$$

Колебательные переходы в одном и том же электронном состоянии $(\alpha_e = \beta_e)$. Вычислим теперь с дипольным моментом $d_{\alpha_e \alpha_e}(R)$ рассматриваемого электронного состояния α_e и с колебательными собственными функциями $\chi_{\alpha_e \alpha_K}$ матричный элемент

$$d_{\alpha\beta} = (\chi_{\alpha_e \alpha_K}(R) | d_{\alpha_e \alpha_e}(R) | \chi_{\alpha_e \beta_K}(R)). \quad (\text{П2-8})$$

Для этой цели разложим дипольный момент $d_{\alpha_e \alpha_e}(R)$ по степеням отклонения X от равновесного положения R^e :

$$d_{\alpha_e \alpha_e}(R) = d_{\alpha_e \alpha_e}(R^e) + \left(\frac{d}{dR} d_{\alpha_e \alpha_e} \right)_{R=R^e} X + \dots \quad (\text{П2-9})$$

Тогда $d_{\alpha\beta}$ примет вид

$$d_{\alpha\beta} = d_{\alpha_e \alpha_e}(R^e) \delta_{\alpha_K \beta_K} + \left(\frac{d}{dR} d_{\alpha_e \alpha_e} \right)_{R=R^e} (\chi_{\alpha_e \alpha_K} | X | \chi_{\alpha_e \beta_K}) + \dots \quad (\text{П2-10})$$

Для колебательных переходов нас интересует только случай $\alpha_K \neq \beta_K$ и, следовательно, второй член в уравнении (П2-10). Передний множитель в этом члене представляет собой производную по ядерной координате в положении равновесия или, выражаясь более конкретно, «эффективный колеблющийся заряд». Для интенсивных колебательных переходов, активных в инфракрасном спектре, этот «эффективный колеблющийся заряд» сравним с отношением статического дипольного момента к равновесному расстоянию:

$$\left(\frac{d}{dR} d_{\alpha_e \alpha_e} \right)_{R=R^e} \approx \frac{d_{\alpha_e \alpha_e}(R^e)}{R^e}, \quad (\text{П2-11})$$

откуда следуют значения порядка $10^{-1} e$. В гармоническом приближении для матричного элемента $(\chi_{\alpha_e \alpha_K} | X | \chi_{\alpha_e \beta_K})$ получаем

$$(\chi_{\alpha_e \alpha_K} | X | \chi_{\alpha_e \beta_K}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mathcal{M}\omega_M}} \left\{ \sqrt{\beta_K} \delta_{\alpha_K (\beta_K - 1)} + \sqrt{\beta_K + 1} \delta_{\alpha_K (\beta_K + 1)} \right\}, \quad (\text{П2-12})$$

т. е. возможны переходы только между соседними уровнями (\mathcal{M} есть приведенная масса, ω_M — основная частота осциллятора).

Если для оценки рассмотреть переход $0 \rightarrow 1$ и подставить для приведенной массы и для колебательной частоты значения из ч. I, разд. 2.41 ($\mathcal{M} = 10^{-26} \text{ кг}$, $\omega_M = 2 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$), то получим

$$(\chi_{\alpha_e 0} | X | \chi_{\alpha_e 1}) \approx 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

При приведенных выше оценках для $((d/dR) d_{\alpha_e \alpha_e})_{R=R^e}$ и при этом значении матричного элемента получим для колебательного переходного момента в данном электронном состоянии $d_{\alpha\beta} \approx 10^{-1} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot 5 \cdot 10^{-12} \text{ м} \approx 10^{-31} \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$.

ЛИТЕРАТУРА

ОБЩАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ
И КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ

1. Ахманов С. А., Хохлов Р. В., Проблемы нелинейной оптики, Москва, 1965.
2. Arrechi F. T., Schulz-Dubois E. D., Laser Handbook, Amsterdam, 1972.
3. Baldwin G. C., An Introduction to Nonlinear Optics, New York, 1969.
4. Bertin F., Bases de l'Electronique Quantique, Paris, 1969.
5. Bloembergen N., Nonlinear Optics. New York/Amsterdam, 1965. (См. перевод: Н. Бломберген, Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966.)
6. Brunner W., Radloff W., Junge K., Quantenelektronik. Eine Einführung in die Physik des Lasers, Berlin, 1975.
7. Butcher P. N., Nonlinear Optical Phenomena, Columbus (O.), 1965.
8. De Witt C., Quantum Optics and Electronics. Lectures delivered at Les Houches 1964. New York, 1965.
9. Fain W. M., Chanin J. I., Quantenelektronik. Physik der Maser und Laser. Leipzig, 1969.
10. Файн В. М., Ханин Я. И., Квантовая радиофизика, Москва. Фононы и нелинейные среды, том I, 1972. Динамика квантовых генераторов, том 2, 1975.
11. Kleen W., Müller R., Laser. Verstärkung durch induzierte Emission. Sender optischer Strahlung hoher Kohärenz und Leistungsdichte. Berlin, 1969.
- 11a. Loudon R., The Quantum Theory of Light. Oxford, 1973. (См. перевод: Р. Луддон, Квантовая теория света. — М.: Мир, 1976.)
12. Louisell W. H., Radiation and Noise in Quantum Electronics. New York, 1964.
- 12a. Louisell W. H., Quantum Statistical Properties of Radiation. New York, 1973.
13. Pantell R. H., Puthoff H. E., Fundamentals of Quantum Electronics. New York, 1969. (См. перевод: Р. Пантел, Г. Путьхоф, Основы квантовой электроники. — М.: Мир, 1972.)
- 14a. Paul H., Lasertheorie, Bd. 1 und 2. Berlin, 1969.
- 14b. Paul H., Nichtlineare Optik, Bd. 1 and 2. Berlin, 1973.
15. Пестов Э. Г., Лансин Г. М., Квантовая электроника, Москва, 1972.
16. Schubert M., Wilhelmi B., Einführung in die nichtlineare Optik. Teil I: Klassische Beschreibung. Leipzig, 1971. (См. перевод: М. Шуберт, Б. Вильгельми, Введение в нелинейную оптику. Часть I. Классическое рассмотрение. — М.: Мир, 1973.)

ОБЩАЯ ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. VI

- B1.-1. Басов Н. Г., Беленов Э. М., Данилычев В. А., Сучков А. Ф., Электронноионизационные лазеры на сжатом углекислом газе, УФН, 144, 213 (1974).
- B1.-2. Birnbaum G., Optical Masers. New York/London, 1964.
- B1.-3. Geppert G., Experimentelle Methoden der Molekülspektroskopie. Berlin, 1964.
- B1.-4. Грасюк А. З., Генерация и усиление света на основе вынужденного рассеяния, Труды ФИАН, 76, 75 (1974).
- B1.-5. Григорьянц В. В., Жаботинский М. Е., Золин В. Ф., Квантовые стандарты частоты, Москва, 1968.
- B1.-6. Guers K., Laser. Grundlagen, Eigenschaften und Anwendungen. Frankfurt/M., 1970.
- B1.-7. Heard H. G., Laser Parameter Measurements Handbook, New York, 1968.
- B1.-8. Котра К. Л., Chemical Lasers. (West) Berlin/Heidelberg/New York, 1973.
- B1.-9. Letokhov V. S., Laserspektroskopie, Berlin, 1977.
- B1.-10. Машкевич В. С., Кинетическая теория лазеров, Москва, 1971.
- B1.-11. Мустель Е. Р., Парыгин В. Н., Методы модуляции и сканирования света, Москва, 1970.
- B1.-12. Ратнер А. М., Спектральные, пространственные и временные характеристики лазера, Киев, 1968.
- B1.-13. Рязцев Н. Г., Материалы квантовой электроники, Москва, 1972.
- B1.-14. Röss D., Laser — Lichtverstärker und Oszillatoren. Frankfurt/M., 1966.
- B1.-15. Ross M., Laser Receivers. New York, 1966.
- B1.-16. Schäfer F.-P., Dye Lasers. (West) Berlin/Heidelberg/New York, 1973.
- B1.-17. Зельдович Б. Я., Кузнецова Т. И., Генерация сверхкоротких импульсов света с помощью лазеров, УФН, 106, 47 (1972).
- B1.-18. Зубов В. А., Методы измерения характеристик лазерного излучения, Москва, 1973.
- B1.-19. Вайнштейн Л. А., Открытые волноводы и открытые резонаторы, Москва, 1966.
- B1.-20. Vollrath K., Thomer G., High-speed physics, Wien, 1967.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. VI

- B1.11-1. Feld M. S., Letokhov V. S., Scient. Amer., 229, 69 (1973).
- B1.11-2. Grau G., глава 9 в работе [11].
- B1.12-1. Kogelnik H., Li T., Appl. Opt., 5, 1550 (1966).
- B1.12-2. Boyd G. D., Kogelnik H., Bell Syst. Techn. J., 41 1347 (1962).
- B1.32-1a. Schubert M., Exp. Techn. Phys., 13, 297 (1965).
- B1.32-1b. Wilhelmi B., Exp. Techn. Phys., 15, 141 (1967).
- B1.4-1. Bradley D. J., New H. G. C., Proc. IEEE, 62, 313 (1974).
- B1.4-2. Фабелинский И. Л., УФН, 104, 77 (1971).

ОБЩАЯ ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. В2

- B2.-1. *Dirac P. A. M.*, The Principles of Quantum Mechanics, Oxford, 1958. (См. перевод: П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики, М., Физматгиз, 1960.)
 B2.-2. *Fick E.*, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Leipzig, 1968.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. В2

- B2.27-1. *Abragam A.*, The Principles of Nuclear Magnetism, Oxford, 1961. (См. перевод: А. Абрагам, Ядерный магнетизм. — М.: ИЛ, 1963).
 B2.27-2. *Ponath H., Schubert M.*, Ann. Phys. (в печати).
 B2.28-1. *Bjorken J. D., Drell S. D.*, Relativistische Quantenfeldtheorie. Mannheim, 1967.

ОБЩАЯ ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. 1

- 1.-1. *Дьяков В. А., Тарасов Л. В.*, Оптическое когерентное излучение, Москва, 1974.
 1.-2. *Glauber R. J.*, The Quantum Theory of Optical Coherence, Phys. Rev., 130, 2529 (1963).
 1.-3. *Heitler W.*, The Quantum Theory of Radiation, New York, 1954. (См. перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения. — М.: ИЛ, 1956.)
 1.-4. *Klauder J. R., Sudarshan E. C. G.*, Fundamentals of Quantum Optics. New York, 1968. (См. перевод: Д. Р. Клаудер, Э. Сударшан, Основы квантовой оптики. — М.: Мир, 1970.)
 1.-5. *Mandel B., Wolf E.*, Selected Papers on Coherence and Fluctuations of Light, New York, 1970.
 1.-6. *Peřina J.*, Coherence of Light, London, 1972. (См. перевод: Я. Перина, Когерентность света. — М.: Мир, 1974.)
 1.-7. *Scully M. O., Whitney K. G.*, Tools of Theoretical Quantum Optics, в книге E. Wolf, Progress in Optics, Bd. X. Amsterdam, 1972.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. 1

- 1.31-1. *Peřina J.*, глава 13.2 в работе [1.-6].
 1.32-1. *Schubert M., Vogel W.*, Wiss. Z., Univ. Jena (в печати).
 1.33-1. *Louisell W. H.*, Phys. Lett., 7, 49 (1963).
 1.33-2. *Paul H.*, Fortschr. Phys., 22, 657 (1974).
 1.33-3. *Schubert M.*, Phys. Lett., 27 A, 698 (1968).
 1.33-4. *Файн В. М.*, ЖЭТФ, 52, 1544 (1967).
 1.33-5. *Titulaer U. M., Glauber R. J.*, Phys. Rev., 140 B, 676 (1965).
 1.33-6. *Hanbury Brown R., Twiss R. Q.*, Nature, London, 177, 27 (1956).
 1.33-7. *Mandel L.*, Phys. Rev., 152, 438 (1966).

ОБЩАЯ ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. 2

- 2.-1. *Achieser A. I., Berestezki W. B.*, Quantenelektrodynamik, Leipzig, 1962.
Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, Москва, 1959.
 2.-2. *Landau L. D., Lifschitz E. M.*, Elektrodynamik der Kontinua. 3. Aufl. Berlin, 1974.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Москва, 1958.
 2.-3. *Schiff L. I.*, Quantum Mechanics, New York, 1955. (См. перевод: Л. И. Шифф, Квантовая механика. — М.: ИЛ, 1959.)
 2.-4. *Thirring W.*, Einführung in die Quantenelektrodynamik, Wien, 1955. (См. перевод: В. Е. Тирринг, Принципы квантовой электродинамики. — М.: Высшая школа, 1964.)

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. 2

- 2.13-1. *Weber G.*, Wiss. Z. Univ. Jena, Math.-Nat. Reihe, 18, 213 (1969).
 2.21-1. *Göppert-Mayer M.*, Ann. Phys., 9, 273 (1931).
 2.34.1. *Pine A. S.*, Phys. Rev., A 139, 901 (1965).
 2.34-2. *Wünsche A.*, Exp. Techn. Phys., 23, 223 (1975).
 2.34-3. *Fuller Brown W.*, в книге: Handbuch der Physik, Bd 17. (West) Berlin, 1956.
 2.36-1. *Puthoff H. E.*, M. L.-Report No. 1547. Stanford, 1967.

ОБЩАЯ ЛИТЕРАТУРА К § 3.1

- 3.1-1. *Agarwal G. S.*, Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission and their Relation to other Approaches. Springer Tracts in Modern Physics, 70 (1974).
 3.1-2. *Claus R., Merten L., Brandmüller J.*, Light Scattering by Phonon-Polaritons. Springer Tracts in Modern Physics, 75 (1975).
 3.1-3. *Дербов В. Л., Ковнер М. А., Потанов С. К.*, Вибронные спектры и межмолекулярные взаимодействия молекул, облученных интенсивным лазерным светом, препринт ИТФ-75-21Р, Киев, 1975.
 3.1-4. *Делоне Н. Б.*, Многофотонная ионизация атомов, УФН, 115, 361 (1975).
 3.1-5. *Graham R.*, Statistical Theory of Instabilities in Nonstationary Nonequilibrium Systems with Applications to Lasers and Non-linear Optics. Springer Tracts in Modern Physics, 66 (1972).
 3.1-6. *Haken H.*, Laser Theory, в книге S. Flugge, Handbuch der Physik, Bd. XXV/2c. (West) Berlin, 1969.
 3.1-7. *Летохов В. С., Чебогаев В. П.*, Принципы нелинейной лазерной спектроскопии, Москва, 1975.
 3.1-8. *Loader J.*, Basic Laser Raman Spectroscopy, London, 1970.
 3.1-9. *Луговой В. Н.*, Введение в теорию вынужденного комбинационного рассеяния, Москва, 1968.
 3.1-10. *Schubert M.*, Neure Entwicklungen auf dem Gebiet der stimulierten Raman-Streuung (SRS), в книге: Bericht zur Internationalen Lasertagung, Dresden, 1970, S 247,

- 3.1-11. Шуберт М., Вильгельми Б., О рассеянии лазерного излучения на молекулах и твердых телах, Квант. электр., 1, 1056 (1974).
 3.1-12. Schwabl F., Thirring W., Quantum Theory of Laser Radiation. Springer Tracts in Modern Physics, 36 (1965).

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА К § 3.1

- 3.11-1. Weisskopf V. F., Wigner E., Z. Phys., 63, 54 (1930).
 3.12-1. Risken H., Fortschr. Phys., 16, 261 (1968).
 3.12-2. Risken H., Progr. in Optics, 8, § 5 (1970).
 3.12-3. Yarov A., Caton W. M., IEEE J. Qu. Electr., QE-10, 509 (1974).
 3.12-4. Rowe H. E., Signal and Noise in Communication Systems, Princeton, 1965.
 3.12-5. Lamb W. E., Phys. Rev., A134, 1429 (1964).
 3.13-1. Бредихин В. И., Галанин М. Д., Генкин В. Н., УФН, 110, 3 (1973).
 3.13-2. Саржевский А. М., Севченко А. Н., Анизотропия поглощения и испускания света молекулами, Минск, 1971.
 3.13-3. Hora H., Laser Plasmas and Nuclear Energy, New York, 1975.
 3.13-4. Kleinschmidt Rentsch S., Tottleben W., Wilhelmi B., Chem. Phys. Lett., 24, 133 (1974).
 3.13-5. Messiah A., Quantum Mechanics, New York, 1962.
 3.13-6. Flügge S., Marschall H., Rechenmethoden der Quantentheorie. (West) Berlin, 1957.
 3.13-7. Bebb H. B., Gold A., Phys. Rev., 143, 1 (1966).
 3.13-8. Lecompte C., Mainfray G., Manus C., Sanchez F., Phys. Rev. Lett., 32, 265 (1965).
 3.13-9. Gold A., Ottica quantistica, Course XLII, S. 397. New York, 1969.
 3.13-10. Yee J. H., Phys. Rev., B 5, 449 (1972).
 3.13-11. Bassani F., Hassan A. R., Nuov. Cim., 7, 313 (1972).
 3.13-12. Fröhlich D., Festkörperprobleme, X, 227 (1970).
 3.13-13. Onodera Y., Opt. Comm., 3, 113 (1971).
 3.13-14. Fritsche M., Pöhler M., Schubert M., Staupendahl G., phys. stat. sol. (a), 33, 149 (1976).
 3.13-15. Fröhlich D., Phys. in unserer Zeit, 6, 47 (1975).
 3.14-1. Miller S. E., IEEE J. Qu. Electr., OE-8, 199 (1972).
 3.15-1. Kleinman D. A., Phys. Rev., 174, 1027 (1968).
 3.15-2. Penzkofer A., Kaiser W., Optical and Quantum Electronics, 9, 315 (1977).
 3.16-1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc. London, A 114, 710 (1927).
 3.16-2. Weigmann H. J., Pfeiffer M., Lau A., Lenz K., Opt. Commun., 12, 231 (1974).
 3.16-3. McLaren R. A., Stoicheff B. P., Appl. Phys. Lett., 16, 140 (1970).
 3.16-4. Terhune R. W., Maker P. D., Phys. Rev., A 137, 801 (1965).
 3.16-5. Haug A., Theoretische Festkörperphysik, Band 1, § 46. Wien, 1964.

- 3.16-6. Kittel Ch., Quantentheorie der Festkörper, Kapitel 3. Wien 1970. (См. перевод: Ч. Киттель, Квантовая теория твердых тел. — М.: «Наука», 1967.)
 3.16-7. Puthoff H. E., Pantell R. H., Huth B. G., J. appl. Phys., 37, 860 (1966).
 3.16-8. Henry C. H., Garrett C. G. B., Phys. Rev. 171, 1058 (1968).
 3.16-9. Sparks M., Phys. Rev. Lett., 32, 450 (1974).
 3.16-10. Strizhevskij V. L., Obuchovskij V. V., Phys. stat. sol. (b), 53, 603 (1972).
 3.16-11. Sussmann S. S., Johnson B. C., Yarborough I. M., Puthoff H. E., Pantell R. H., SooHoo I., Bericht zum Symposium on Submillimeter Waves, Brooklyn, 1970, S. 211.
 3.16-12. Patel C. K. N., Shaw E. D., Phys. Rev., B 3, 1279 (1971).
 3.16-13. Patel C. K. N., Appl. Phys. Lett., 19, 400 (1971).
 3.16-14. Wherrett B. S., Firth W. J., IEEE J. Qu. Electr. QE-8, 865 (1972).
 3.16-15. Kittel Ch., Quantentheorie der Festkörper. Kapitel 14. Wien, 1970. (См. перевод: Ч. Киттель, Квантовая теория твердых тел. — М.: Наука, 1967.)

ОБЩАЯ ЛИТЕРАТУРА К § 3.2

- 3.2-1. Abella I. D., Echoes at Optical Frequencies, в книге E. Wolf, Progress in Optics, Bd. VII. Amsterdam, 1969.
 3.2-2. Ахманов С. А., Чиркин А. С., Статистические явления в нелинейной оптике. Москва, 1971.
 3.2-3. De Maria A. J., Picosecond Laser Pulses, в книге: E. Wolf, Progress in Optics, Bd. IX. Amsterdam, 1971.
 3.2-4. Кривошеков Г. В., Никулин Н. Г., Соколовский Р. И., Нестационарные процессы при возбуждении оптических гармоник, в книге: Нелинейные процессы в оптике, Новосибирск, 1972.
 3.2-5. Netzel T. L., Rentzepis P. M., Picosecond Kinetics. Chem. Phys. Lett., 29, 337 (1974).
 3.2-6. Полузтков И. А., Попов Ю. М., Ройтберг В. С., Эффект самоиндуцированной прозрачности, УФН, 114, 97 (1974).
 3.2-7. Slusher R. E., Self-Induced Transparency, в книге: E. Wolf, Progress in Optics, Bd. XII. Amsterdam, 1974.
 3.2-8. Triebel W., Wilhelmi B., Beobachtung von schnell ablaufenden Molekulprozessen mit Methoden der Laserspektroskopie und nichtlinearen Optik, Z. Chem., 13, 329 (1973).

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА К § 3.2

- 3.21-1. Paerschke H., Süsse K., Welsch D., Ann. Phys., 33, 215, 228 (1976).
 3.21-2. Yablonovitch E., Goldhar J., Appl. Phys. Lett., 25, 580 (1974).
 3.21-3. Световое эхо. Материалы I Всесоюзного симпозиума по световому эхо, Казань, 1973. См. также Изв. Акад. наук, 37, вып. 19 (1973).
 3.21-3a. Bachmann P., Sauer K., Wallis G., Fortschr. Phys., 20, 147. (1972).

- 3.21-4. *Brewer R. G., Shoemaker R. L.*, Phys. Rev. Lett., 27, 631 (1971); Phys. Rev., A 6, 2001 (1972).
- 3.21-5. *Bullough R. K., Candrey P. J., Eilbeck J. C., Gibben J. D.*, Opto-electronics, 6, 121 (1974).
- 3.21-6. *Gibbs H. M., Slusher R. E.*, Phys. Rev., A 6, 2326 (1972).
- 3.21-7. *Penzkofer A.*, Opto-electronics, 6, 87 (1974).
- 3.21-8. *Herrmann J., Wienecke J., Wilhelmi B.*, Optical and Quantum Electronics, 7, 337 (1975).
- 3.22-1. *Worlock J. M.*, Two-Photon Spectroscopy, в книге: F. T. Arecchi, E. O. Schulz-Dubois, Laser Handbook, Bd. 2. Amstredam, 1972.
- 3.22-2. *Heumann E., Triebel W., Wilhelmi B.*, Chem. Phys. Lett., 32, 589 (1975).
- 3.22-3. *Heumann E., Triebel W., Wilhelmi B.*, в книге: Proc. of ICO-10, 341. Prag, 1975.
- 3.22-4. *Wilhelmi B.*, Wiss. Z. Univ. Jena, 22, 157 (1973).
- 3.22-5. *Maier M., Kaiser W., Giordmaine J.*, Phys. Rev., 177, 580 (1969).
- 3.22-6. *Herrmann J.*, Phys. Lett., 43 A, 133 (1973).
- 3.22-7. *Kovacs M. A., Mack M. E.*, Appl. Phys. Lett., 20, 487 (1972).
- 3.22-8. *Audibert M., Joffrin C.*, Opt. Comm., 5, 218 (1972).
- 3.22-9. *Hartmann S. R.*, IEEE J. Qu. Electr., QE-4, 802 (1968).
- 3.22-10. *Laubereau A., Kaiser W.*, Opto-electronics, 6, 1 (1974).
- 3.22-11. *Heinicke W., Winterling R.*, Appl. Phys. Lett., 11, 231 (1967); J. Acoust. Soc. Amer., 49, 954 (1971).
- 3.22-12. *Carman R. L., Mack M. E.*, Phys. Rev., A5, 341 (1972).
- 3.22-13. *Carman R. L., Shimizu F., Wang C. S., Bloembergen N.*, Phys. Rev., A2, 60 (1970).
- 3.22-14. *Kaiser W., Maier M.*, в книге: F. T. Arecchi, E. O. Schulz-Dubois, Laser Handbook, Bd. 2. Amsterdam, 1972.
- 3.22-15. *Ponath H. E., Schubert M.*, Ann. Phys., 33, 413 (1976).
- 3.22-16. *Herrmann J., Ponath H. E.*, Ann. Phys., 33, 427 (1976).
- 3.22-17. *Herrmann J., Ponath H. E., Schubert M.*, Proc. of ICO-10, 249. Prag, 1975.

ОБЩАЯ ЛИТЕРАТУРА К § 3.3

- 3.2-2. *Ахманов С. А., Чиркин А. С.*, Статистические явления в нелинейной оптике, Москва, 1971.
- 3.3-1. *Arecchi F. T.*, Photon Statistics. Proc. of ICO-10, 23. Prag, 1975.
- 3.3-2. *Graham R.*, The Phase Transition Concept and Coherence in Atomic Emission, в книге: E. Wolf, Progress in Optics, Bd. XII. Amsterdam, 1974.
- 3.3-3. *Lax M.*, Fluctuation and Coherence Phenomena in Classical and Quantum Physics. New York, 1968. (См. перевод: М. Лэкс, Флуктуации и когерентные явления. — М.: Мир, 1973.)
- 1-6. *Peřina J.*, Coherence of Light, London, 1972. (См. перевод: Я. Перина, Когерентность света. — М.: Мир, 1974.)
- 3.3-4. *Risken H.*, Statistical Properties of Laser Light, в книге: E. Wolf, Progress in Optics, Bd. VIII. Amsterdam, 1970.

- 3.3-5. *Schubert M., Wilhelmi B.*, On Coherence in Nonlinear Optical Effects under Special Consideration of Ultra-Short-Time Phenomena. Proc. of ICO-10, Prag, 1975.
- 3.3-6. *Shen Y. R.*, Quantum Statistics of Nonlinear Optics, Phys. Rev., 155, 921 (1967).

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА К § 3.3

- 3.31-1. *Chekalin S. V., Kriukov P. G., Matveetz Yu. A., Shatberashvili O. B.*, Opto-electronics, 6, 249 (1974).
- 3.32-1. *Carusotto S.*, Phys. Rev., A 11, 1629 (1975).
- 3.32-2. *Agarwal G. S.*, Phys. Rev. A1, 1445 (1970).
- 3.32-3. *Tornau N., Bach A.*, Opt. Comm., 11, 46 (1974).
- 3.32-4. *Crosignani B., DiPorto P., Graniel U., Solimeno S., Yariv A.*, IEEE J. Qu. Electr., QE-8, 731 (1972).
- 3.32-5. *Crosignani B., Graniel U., Solimeno S., DiPorto P.*, Phys. Rev., A 4, 1570 (1971).
- 3.32-6. *Freedhoff H. S.*, J. Chem. Phys., 47, 2554 (1967).
- 3.32-7. *Бруннер В., Дюрр Х., Клозе Э., Пауль Х.*, Квант. электр., 2, 832 (1975).
- 3.32-8. *Вильгельми Б., Гойман Э., Трибель В.*, Квант. электр., 3, 732 (1976).
- 3.32-9. *Weber H. P.*, IEEE J. Qu. Electr., QE-7, 189 (1971).

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. 4

- 4-1. Нелинейные процессы в оптике: Материалы 3-й Вавиловской конференции по нелинейной оптике, Новосибирск, 1973.
- 4-2. Материалы 4-й Вавиловской конференции по нелинейной оптике, Новосибирск, 1975. Квант. электр., 3, вып. 4 (1976). Тезисы докладов 7-й Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике, Ташкент, 1974.
- 4-4. Тезисы докладов 8-й Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике, Ташкент, Тбилиси: Мецниереба, 1976.
- 4-5. Proceedings of 9. International Conference on Quantum Electronics, Amsterdam, 1976.
- 4-6. Materialien der 2. und 3. Internationalen Tagung Laser und ihre Anwendungen, Dresden, 1973; Dresden, 1977.
- 4-7. *Newton R. G.*, Scattering Theory of Waves and Particles, New York, 1966 (См. перевод: Р. Ньютон, Теория рассеяния волн и частиц. — М.: Мир, 1969.)
- 4-8. *Knöll L.*, Ann. Phys., 26, 121 (1971).
- 4-9. *Swain S.*, J. Phys. A. Math. Nucl. Gen., 6, 192 (1973).
- 4-10. *Hager Th.*, Dissertation, Universität Jena, 1975.
- 4-11. *Svelto O.*, Self-Focusing, Self-Trapping, and Self-Phase Modulation of Laser Beams, в книге: E. Wolf, Progress in Optics, Bd. XII, Amsterdam, 1974.
- 4-12. *Гуревич А. В., Шаарцбург А. Б.*, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, Москва, 1973.
- 4-13. *Аскарьян Г. А.*, Эффект самофокусировки, УФН, 111, 249 (1973).

- 4.-14. *Луговой В. Н., Прохоров А. М.*, УФН, 111, 203 (1973).
 4.-15. *Fischer R., Wünsche A.*, Optica Acta, 23, 203 (1976).
 4.-16. *Lean E. G.*, Interaction of Light and Acoustic Surface Waves, в книге: E. Wolf, Progress in Optics, Bd. XI, Amsterdam, 1973.
 4.-17. *Прохоров А. М., Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С., Шишов В. И.*, Распространение лазерного излучения в случайно-неоднородных средах, УФН, 114, 415 (1974).
 4.-18. *Данилейко Ю. К., Маненков А. А., Нечитайло В. С., Хаимов-Мальков В. Я.*, ЖЭТФ, 60, 1245 (1971).
 4.-19. *Bliss E. S.*, Opto-electronics, 3, 99 (1971).
 4.-20. *Agranovich V. M., Ginzburg V. L.*, Crystal Optics with Spatial Dispersion, в книге: E. Wolf, Progress in Optics, Bd. IX, Amsterdam, 1971.
 4.-21. *Фабелинский И. Л.*, Молекулярное рассеяние света, Москва, 1965.
 4.-22. *Коварский В. А.*, Многоквантовые переходы, Книшнев, 1974.
 4.-23. *Овандер Л. Н.*, УФН, 86, 3 (1965).
 4.-24. *Fröhlich D., Mohler E., Uihlein Ch.*, phys. stat. sol. (b), 55, 175 (1973).
 4.-25. *Bogett D., Loudon R.*, Phys. Rev. Lett., 28, 1051 (1972).
 4.-26. *Альшутлер С. А., Валишев Р. М., Кочелав Б. И., Хасанов А. Х.*, ЖЭТФ, 62, 639 (1972).
 4.-27. *Haken H., Nikitine S.*, Excitons at High Density. Springer Tracts in Modern Physics, 73 (1975).
 4.-28. *Келдыш В. Л.*, УФН, 100, 514 (1970).
 4.-29. *Eberly J. H.*, Interaction of Very Intense Light with Free Electrons, в книге: E. Wolf, Progress in Optics, Bd. VII, Amsterdam, 1969.
 4.-30. *Силин В. П.*, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, Москва, 1973.
 4.-31. *Цытович В. Н.*, Нелинейные эффекты в плазме, Москва, 1967.
 4.-32. *Бушцев В. А., Кузьмин П. Н.*, УФН, 114, 677 (1974).
 П2-1. *Давыдов А. С.*, Квантовая механика, Москва, 1973.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автокоррелятор 65
 Активность вещества в инфракрасном спектре 264, 374
 Анизотропии воли 488
 Антистоксова волиа 366, 443, 472
 Антистоксово излучение 443, 473
 — коэффициент усиления 473
 Аппаратная функция 46, 47
- Бозе — Эйнштейна** распределение 456
 Бозоны 138
 Бриллюэна зоны 335
 Бриллюэновское рассеяние 448
- Вакуумное состояние 142
 Вектор-потенциал 126, 127, 176, 180
 Взаимодействие с излучением в неоднородной среде 484
 Вигнера — Вайскопфа теория 271, 480
 Волиа бегущая плоская 131
 — стоячая 128
 Волновод 336
 Волновое уравнение 127
 Восприимчивость 175, 212, 215, 237
 — ансамбля атомных систем 238, 246
 — второго порядка 337
 — высшего порядка 245, 338
 — затухающего и незатухающего ансамблей 242
 — изолированной атомной системы 228
 — линейная 224, 227
 — микроскопического образца 215
 — при антистоксовом процессе 366
 — многофотонном поглощении 317
 — стоксовом процессе 366
 Второй гармоники генерация 37
 Вращающейся волны приближение 191, 290
- Гамильтонна 80
 — полной системы излучение — вещество 180
 — поля излучения 146
 Гармонический осцилятор 87
 Гауссов контур 19, 285
 — процесс 29
 Гейзенберга представление 81, 344
 Генератор оптический параметрический 39, 349
 Генерация гармоник 336
 — суммарных и разностных частот 336
 Геродиный метод 44, 399
 Гильберта векторы 72
 Гильбертово пространство 71
 Глауберовское состояние 151, 156, 171, 464
 Граница чувствительности 56
 Грина оператор 481
 — функция 481
- Двухуровневая система эффективная 263
 Джозефсона контакты 44
 Динамических систем ансамбль 103
 Дипольное приближение 186
 Дирака вектор 72
 — поле 181
 — представление 85, 103
 — временная зависимость 85
 — теория рассеянного излучения 351
 Дисперсионная кривая 335
 Дисперсионное соотношение 134
 — для длинноволновых оптических фононов 372
 — — линейных и нелинейных восприимчивостей 246
 — — механических колебаний 119
 Дисперсия пространственная 450, 486
 Диссипативная система 102, 207
 Диссипация 102
 Диэлектрическая постоянная относительная 288, 289
 Добротности модуляция 32
 — фактор по Строунгу 49
 Доплера эффект 276
- Замедляющая система оптическая 63
 Затухания функция 285
 Зонная структура 330
- Излучение вынужденное 269
 — спонтанное 268
 — коллективное 416
 — гауссово 145, 155
 — хаотическое 145, 146, 154, 454
 Инверсионные дыры 313
 Инверсия 32
 — населенностей 175, 244, 312
 — эффективная 19
 Индукционный спад свободный оптический 414
 Интегральная оптика и нелинейные процессы 490
 Интенсивностей корреляция 29
 Интерференционный эксперимент 50, 169
 Интерференция 173
 Ионизация энергия 327
 Ионизация многофотонная 316, 326, 487
- Квантовая электродинамика 181
 Керра затвор оптический 62, 406
 — эффект оптический 62, 406
 Когерентное время сигнала 69
 — состояние возбуждения 488
 Когерентность полная 169
 — пространственная и временная 29, 162, 166, 453
 Когерентные свойства лазерного излучения 28, 454

Комбинационного рассеяния эффект вынужденный 368
 — — — нормальный 353, 367
 — — — резонансный 353, 368
 Комбинационное рассеяние активное 368
 — — — вынужденное 37, 350, 351, 436
 — — — на длинноволновых оптических фонах 370, 391
 — — — молекулах 351
 — — — фонон-поляритонах 370
 — — — обращенное 368
 — — — спонтанное 350
 Комбинационное эхо 442
 Контрастности отношение 69
 Корреляционная функция 65, 166, 169, 309
 Крупнозернистость 99, 193

Лагранжа формализм 181
 Лазер газовый 36
 — — — газодинамический 35
 — — — гелий-неоновый 19, 33
 — — — жидкостный 36
 — — — идеализированный 454
 — — — кольцевой 293
 — — — многомодовый 458
 — — — на красителе 19, 33, 36, 38
 — — — неодимовом стекле 19, 33, 35
 — — — CO_2 32, 35
 — — — одимодовый 457, 458
 — — — полупроводниковый 36, 38
 — — — поляритонный 39
 — — — реальный 454
 — — — рубиновый 19, 33
 — — — с переворачиванием спина 40
 — — — твердотельный 36
 — — — трехуровневый 311
 — — — четырехуровневый 311
 Лазерное усиление 34
 Ландау уровень 396
 Ланде фактор 40
 Ланжевена сила 290
 Лапласа преобразование 272
 Линии уширенные доплеровское 274, 285, 312
 — — — неоднородное, однородное 274, 275
 — — — механизмы 274
 — — — ударное 274
 — — — ширина естественная 270
 — — — лазера минимальная достижимая 300
 — — — неоднородная, однородная 311
 — — — флуоресцентная 19, 286
 — — — формула Шавлова и Таунса 310
 Лоренцев контур линии 19, 222, 242, 273, 288, 309
 Лэмба — Резерфорда сдвиг 272
 Лэмбовский провал 290, 313
 — — — обращенный 313

Макельсона видимость 169
 — — — интерферометр 50
Максвелла уравнения 126, 168
 Масса приведенная 332
 — — — эффективная 332

Математическое ожидание квадрата напряженности поля 147, 148
 — — — напряженности поля 146, 147
 — — — переходного момента 261
 — — — полной энергии 148
 — — — поляризации 175
 Матричное представление 142
 Многоканальный анализатор оптический 64, 405
 Мода 127, 177
 — — — объемного резонатора 22
 — — — парааксиальная 23
 — — — поперечная электромагнитная 24
 — — — продольная 30, 33
 — — — стабильная и нестабильная 24, 31
 Мод плотность 136, 268
 — — — связность 459
 — — — синхронизация 33, 458, 460, 476
 — — — частота 22, 458
 — — — энергия 141
 Модуляционный фотонный тормозящий детектор 55
 Мощности измерение 54
 — — — спектр 45
 Мультипольное излучение 187
Мэнли — Роу соотношение 346, 438

Накачки импульс 403
 — — — интенсивность 291
 — — — процесс 27, 41, 291
 Нелинейный фильтр 428, 429
 Необратимое приближение 239
 Нестационарные процессы 401, 431
 Нулевое колебание 351
 Нулевые флуктуации поля 148
 Нутация оптическая 403, 412

Объемный резонатор 22, 23, 293
 Однофотонные процессы линейные 267
 — — — нелинейные 289
 Однофотонный резонанс 319
 Оператор амплитудный 163
 — — — вектора-потенциала 140
 — — — взаимодействия 186
 — — — двухфотонного поглощения 195
 — — — дипольного момента 216
 — — — напряженности магнитного поля 140
 — — — электрического поля 140, 157, 170
 — — — перестройков 227, 237
 — — — плотность 83
 — — — полного импульса 140
 — — — проекционный 76
 — — — рождения 93, 139, 163, 180
 — — — статистический 83
 — — — уничтожения 93, 139, 163, 171, 180, 378
 — — — фазовый 163
 — — — фермионный 92
 — — — флуктуационный 115, 209, 279, 301
 — — — числа частиц 89, 140, 144
 — — — энергии 140
 Осциллятора сила 190

Памяти время 220
 Переменные динамические 71
 Перестаивочное соотношение 79, 139
 Перехода вероятность 174, 250
 — — — при двухфотонном поглощении 322

Перехода вероятность при многофотонной ионизации 326
 — — — поля 268
 — — — усиление 418
 Переходный момент 270
 Плазма, индуцированная лазером 316
 Плазмы образование 330
Плачека теория поляризуемости 351, 358

Пленение 482
 Поглощение 261, 277
 — — — вынужденное 277, 286
 — — — двухфотонное 193, 253, 317, 334
 — — — многофотонное 267, 314, 317, 334, 462
 — — — насышаемое 62
 — — — однофотонное 326, 334
 — — — трехфотонное 334
 Поглощения коэффициент 242, 287, 288, 321
 — — — двухфотонного процесса 320
 — — — эффективное сечение 287, 334
Покельса эффект 62
 Полная энергия 127
 Полный импульс 127
 Поляризации вектор 134
 — — — волна 378
 Поляризационная спектроскопия 315
 Поляризационное эхо 416
 Поляризация 175, 212, 247, 284
 Поляризуемости тензор обобщенный 318
 Поляритон 39, 265, 378
 Поляритонная волна 384
 Принцип соответствия 167
 \mathcal{P} -представление 154, 171
 Пробного импульса метод 403, 444
 Промежуточная зона 333
 Промежуточное состояние виртуальное 352
 Промежуточный резонанс 328
Пуассона распределение 457

Рассеяние томсоновское 398
 Релаксация время 208, 278
 Решетки колебания 371, 377

Самовозбуждение 21
 Самондиффракционная прозрачность 420, 435
 Самофокусировка 482
 Света усиление 18
 Световой импульс 31, 401
 Светом индуцированный фазовый переход 485
 Сгущения эффект 170
 Собственное состояние 74
 Совместная вероятность 166, 169, 171, 173
 Согласования фаз условие 340, 401
 Солянтное решение 420
 Соотношение неопределенностей 79
 — — — ортогональности 144
 — — — полноты 144, 159
 Спектроскопия активная 443
 — — — высокого разрешения 316
 — — — насыщения 53
 — — — поляризационная 315

Спинного эха метод 416
 Стандарт времени, длины 43, 44
 Стоксов импульс в нестационарном режиме 445
 Стоксовых фотонов скорость генерации 389
 Стоксово излучение при нестационарных условиях 449
 Стохастическая функция 102

Теория возмущений высшего порядка 487
 — — — зависящих от времени 87, 480

Унитарное преобразование 78
 — — — временное 81
 Уравнение баланса для вероятности населенностей 108
 — — — инверсии 298
 — — — лазера 297
 — — — плотности потока фотонов 438
 — — — числа фотонов 298
 Усреднение по ориентациям 263, 269, 492

Фабри — Перо схема 18, 19, 50
 Фазовая автомодуляция 482
 Фазы время разрушения 281, 403, 444
 — — — неопределенности 164
 — — — флуктуации 308
 Факторизации условие 168, 172
 Флуктуационная сила 26, 290, 301
 Флуоресценция когерентная 409
 — — — параметрическая 342, 349
Фоккера — Планка уравнение 455
 Фонон акустический 488
 — — — оптический длинноволновый 370, 488
 Фонон-поляритон 336, 350, 370, 376
 Фотон 139
 Фотонное эхо 409, 416, 435
 Фотонный шум 182
 Фотонов детектор 55, 170, 173
 — — — статистика 173
Френеля число 24, 25
 Функция формы линии 18, 222

Холодовая волна 342
Хэнбери — Броуна — Твисса эксперимент 170

Частота перехода 18, 270
 — — — циклотронная 396

Шредингера представление 81
 Шум амплитудный 308
 — — — фазовый 308

Йинштейна коэффициент 18
 — — — для вынужденного излучения 269
 — — — спонтанного излучения 269
 Экситон-поляритон 336
 Экстинкции коэффициент 287, 288
 Энтропия волны 488
 Энтропия 145
 Эргodicность 169
 Эффективной массы анизотропия 334

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчика	5
Предисловие авторов к русскому изданию	7
Предисловие авторов	8
Обозначения и символы	11
§ В1.06 экспериментальной технике нелинейной оптики	17
§ В1.1. Источники излучения для НЛО	17
§ В1.2. Возбуждение эффектов НЛО в оптических резонаторах	41
§ В1.3. Измерение длины волн и частот, спектральное разложение	43
§ В1.4. Измерения энергии, энтропии и мощности	54
В2. Понятия и закономерности квантово-механического описания	71
§ В2.1. Основопологающие понятия и закономерности квантовой механики	71
§ В2.2. Применение и дальнейшее развитие основных положений квантовой теории	85
Глава 1. Описание изолированного элекромагнитного поля	125
§ 1.1. Основы классического описания изолированного электромагнитного поля	126
§ 1.2. Основы квантового описания изолированного электромагнитного поля	138
§ 1.3. Развернутое квантовое описание	146
Глава 2. Физические и методические основы взаимодействия излучения с веществом при линейных и нелинейных процессах	174
§ 2.1. Основы квантового описания взаимодействия	175
§ 2.2. Методические вопросы при определении матричных элементов	182
§ 2.3. Подклассическое описание взаимодействия между излучением и атомными системами	211
Глава 3. Качественное и количественное описание типичных нелинейных и нелинейных процессов	266
§ 3.1. Основные явления — лазерные процессы, многофотонное поглощение, параметрические процессы и процессы рассеяния	267
§ 3.2. Нестационарные процессы при взаимодействии света с атомными системами	401
§ 3.3. Влияние свойств когерентности на протекание нелинейных процессов	453
Глава 4. Исследования и перспективы	479
Приложение	492
Литература	500
Предметный указатель	509